



이론, 실습, 시뮬레이션 

# 디지털 논리회로

개정 3판

## Chapter 06. 논리식의 간소화

## 학습목표 및 목차

- 카르노 맵을 이용하여 논리식을 간소화할 수 있다.
- NAND와 NOR 게이트로 나타내는 방법을 이해하고 이를 응용할 수 있다.
- 퀴-맥클러스키 최소화 알고리즘을 이용하여 논리식을 간소화할 수 있다.
- 출력함수가 여러 개일 때 논리식을 공유하는 방법을 이해할 수 있다.
- XOR 게이트와 XNOR 게이트의 특징을 이해하고 이를 활용할 수 있다.

01. 2변수 카르노 맵

02. 3변수 카르노 맵

03. 4변수 카르노 맵

04. 선택적 카르노 맵

05. 논리식의 카르노 맵 작성

06. 5변수, 6변수 카르노 맵

08. 여러 개의 출력함수

# 01 2변수 카르노 맵

## ■ 개요

- 불 대수를 이용한 간소화하는 방법은 복잡하고 검증도 어렵다.
- 체계적으로 논리식을 간소화하기 위해 카르노 맵(1953년 Maurice Karnaugh가 소개)과 퀴-맥클러스키 방법(1956년 Willard Van Orman Quine과 Edward J. McCluskey 개발)이 필요
- 퀴-맥클러스키 방법은 많은 변수에 대해서도 쉽게 간소화할 수 있다.

## ■ 2변수 카르노 맵 표현 방법

A \ B	$\bar{B}$	B
	$\bar{A}\bar{B}$	$\bar{A}B$
$\bar{A}$		
A	$A\bar{B}$	AB

A \ B	$\bar{B}$	B
	$m_0$	$m_1$
$\bar{A}$		
A	$m_2$	$m_3$

A \ B	0	1
	0	1
0		
1	2	3

B \ A	$\bar{A}$	A
	$m_0$	$m_2$
$\bar{B}$		
B	$m_1$	$m_3$

- 무관항(don't care) : 입력이 결과에 영향을 미치지 않는 최소항
- x 로 표시하거나 d로 표시한다.

# 01 2변수 카르노 맵

## ■ 일반항과 무관항 표현

$A \backslash B$	0	1
0	1	
1		1

$F(A, B) = \sum m(0, 3)$

$A \backslash B$	0	1
0	1	x
1		1

$F(A, B) = \sum m(0, 3) + \sum d(1)$

- 출력이 1이거나 무관항만 표시한다.
- 출력 0을 표시하여도 되지만 일반적으로 생략한다.

# 01 2변수 카르노 맵

## ■ 카르노 맵을 이용한 간소화 방법

- ① 출력이 같은 항을 1, 2, 4, 8, 16개로 그룹을 지어 묶을 수 있고,
- ② 바로 이웃한 항들끼리 묶을 수 있으며,
- ③ 반드시 직사각형이나 정사각형의 형태로 묶어야 하고,
- ④ 최대한 크게 묶는다.
- ⑤ 중복하여 묶어서 간소화된다면 중복하여 묶는다.
- ⑥ 무관항의 경우 간소화될 수 있으면 묶어 주고, 그렇지 않으면 묶지 않는다.

$A \backslash B$	0	1
0	1	1
1		

$F = \bar{A}$

$A=0$ 이므로  $\bar{A}$   
 $B=0$  and  $1$ 이므로 제거  
즉, 한 변수에서 서로 다른 값이 묶여지면 제거한다.

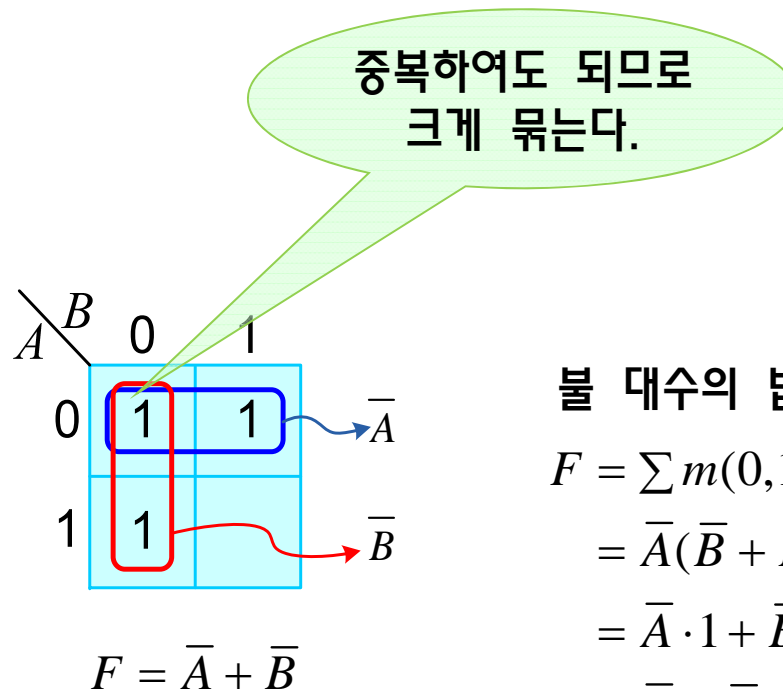
불 대수의 법칙으로 풀면

$$\begin{aligned} F &= \bar{A}\bar{B} + \bar{A}B \\ &= \bar{A}(\bar{B} + B) = \bar{A} \cdot 1 = \bar{A} \end{aligned}$$

# 01 2변수 카르노 맵

## ■ 간소화 예

A	B	F
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0



불 대수의 법칙으로 풀면

$$\begin{aligned} F &= \sum m(0,1,2) = \bar{A}\bar{B} + \bar{A}B + A\bar{B} \\ &= \bar{A}(\bar{B} + B) + \bar{B}(\bar{A} + A) \\ &= \bar{A} \cdot 1 + \bar{B} \cdot 1 \\ &= \bar{A} + \bar{B} \end{aligned}$$

## 02 3변수 카르노 맵

### ■ 3변수 카르노 맵 표현 방법

$\backslash BC$	$\overline{B}\overline{C}$	$\overline{B}C$	$B\overline{C}$	$BC$
$\overline{A}$	$\overline{A}\overline{B}\overline{C}$	$\overline{A}\overline{B}C$	$\overline{A}B\overline{C}$	$\overline{A}BC$
$A$	$A\overline{B}\overline{C}$	$A\overline{B}C$	$AB\overline{C}$	$ABC$

$\backslash BC$	00	01	11	10
0	0	1	3	2
1	4	5	7	6

$\backslash C$	$\overline{C}$	$C$
$\overline{AB}$	$\overline{A}\overline{B}\overline{C}$	$\overline{A}\overline{B}C$
$\overline{AB}$	$\overline{A}\overline{B}\overline{C}$	$\overline{A}\overline{B}C$
$AB$	$AB\overline{C}$	$ABC$
$AB$	$AB\overline{C}$	$ABC$

$\backslash C$	$\overline{C}$	$C$
$\overline{AB}$	$\overline{A}\overline{B}\overline{C}$	$\overline{A}\overline{B}C$
$\overline{AB}$	$\overline{A}\overline{B}\overline{C}$	$\overline{A}\overline{B}C$
$AB$	$AB\overline{C}$	$ABC$
$AB$	$AB\overline{C}$	$ABC$

$\backslash C$	00	01	11	10
0	0	2	6	4
1	1	3	7	5

$\backslash C$	0	1
00	0	1
01	2	3
11	6	7
10	4	5

행과 열을 바꾸어도 상관없다.  
설계자가 선호하는 방법을 선택하면 된다.

## 02 3변수 카르노 맵

### ■ 간소화 예 1

$\begin{array}{c} BC \\ \diagdown \\ A \end{array}$	00	01	11	10
0	1	1		
1			1	1

$\overline{A}\overline{B}$

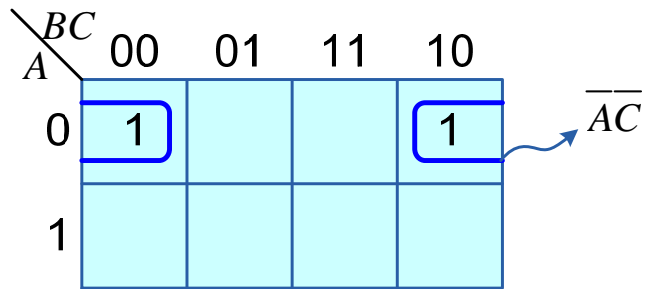
$AB$

$$F = \overline{A}\overline{B} + AB$$



## 02 3변수 카르노 맵

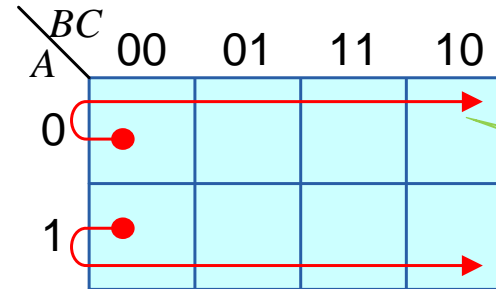
### ■ 간소화 예 2



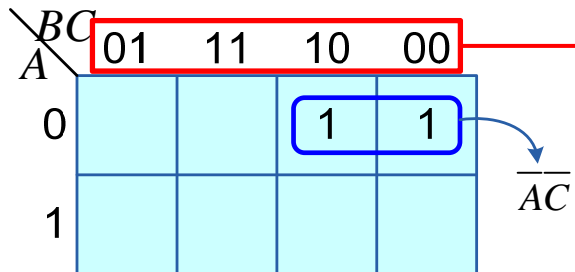
$$F = \overline{A} \overline{C}$$



동일한 카르노 맵



양쪽 끝은  
연결되어 있다.



$$F = \overline{A} \overline{C}$$

이웃하는 비트들이 한 비트만 다르면  
순서는 관계없다.

## 02 3변수 카르노 맵

### ■ 간소화 예 3

$\backslash BC$	00	01	11	10
A				
0		1	1	
1		1	1	

$$F = C$$

$\backslash BC$	00	01	11	10
A				
0	1	1	1	1
1				

$$F = \bar{A}$$

## 02 3변수 카르노 맵

### ■ 간소화 예 4

$\backslash BC$	00	01	11	10
A				
0	1			1
1	1			1

$\bar{C}$

양쪽 끝은  
연결되어 있다.

$$F = \bar{C}$$

$\backslash BC$	00	01	11	10
A				
0		1	1	
1			1	1

$\bar{A}C$

$BC$

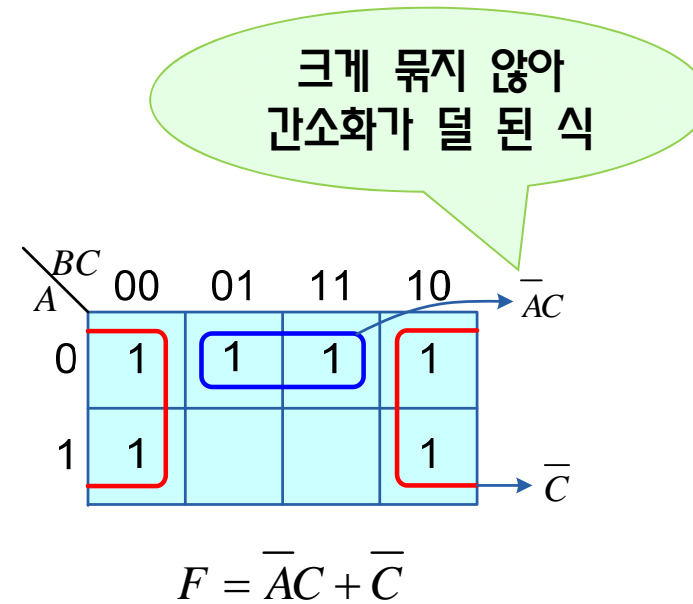
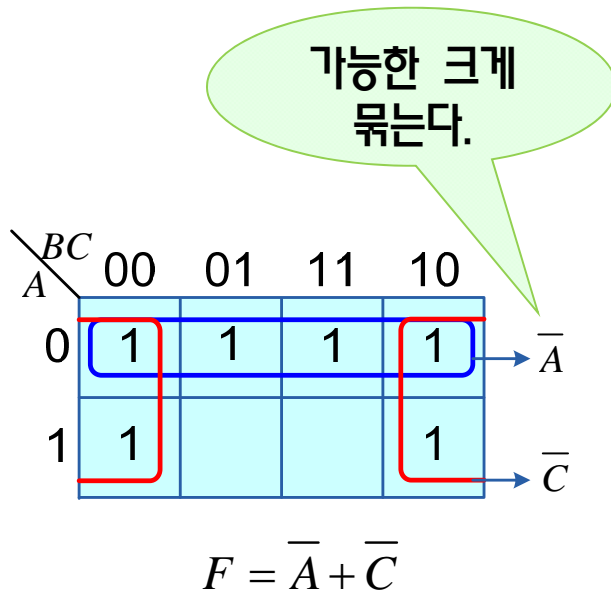
$AB$

다른 묶음에 모두 포함되어  
있으므로 중복하여 묶지  
않는다.

$$F = \bar{A}C + AB$$

## 02 3변수 카르노 맵

### ■ 간소화 예 5

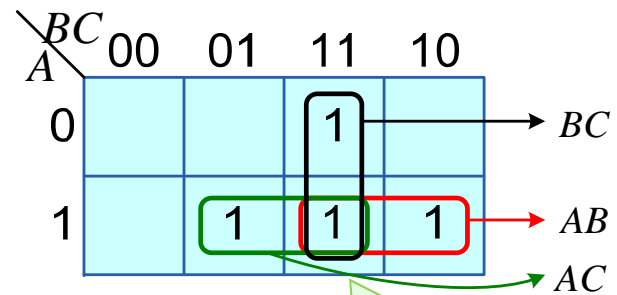


## 02 3변수 카르노 맵

### ■ 간소화 예 6

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$$F = \sum m(3,5,6,7) = AB + BC + AC$$



세 번 중복하여 묶인 경우

## 02 3변수 카르노 맵

### ■ 간소화 예 7

$\begin{smallmatrix} BC \\ A \end{smallmatrix}$	00	01	11	10
0				
1				

모두 0이면 논리식은  
 $F=0$ 이다.

$$F = 0$$

$\begin{smallmatrix} BC \\ A \end{smallmatrix}$	00	01	11	10
0	1	1	1	1
1	1	1	1	1

모두 1이면 논리식은  
 $F=1$ 이다.

$$F = 1$$

# 03 4변수 카르노 맵

## ■ 4변수 카르노 맵 표현 방법

AB \ CD	CD			
	00	01	11	10
00	$\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}$	$\overline{A}\overline{B}\overline{C}D$	$\overline{A}\overline{B}C\overline{D}$	$\overline{A}\overline{B}CD$
01	$\overline{A}\overline{B}C\overline{D}$	$\overline{A}\overline{B}CD$	$\overline{A}B\overline{C}\overline{D}$	$\overline{A}B\overline{C}D$
11	$\overline{A}B\overline{C}\overline{D}$	$\overline{A}B\overline{C}D$	$AB\overline{C}\overline{D}$	$AB\overline{C}D$
10	$\overline{A}B\overline{C}D$	$\overline{A}BC\overline{D}$	$\overline{A}BCD$	$\overline{A}B\overline{C}\overline{D}$

AB \ CD	CD			
	00	01	11	10
00	0	1	3	2
01	4	5	7	6
11	12	13	15	14
10	8	9	11	10

AB \ CD	CD			
	00	01	11	10
00	0	1	3	2
01	4	5	7	6
11	12	13	15	14
10	8	9	11	10

상하 좌우는  
연결되어 있다.

## 03 4변수 카르노 맵

### ■ 예제 6-1 여러 가지 4변수 카르노 맵의 예제

CD \ AB	00	01	11	10
00				
01			1	1
11				
10				

$$F = \bar{A}BC$$

CD \ AB	00	01	11	10
00				
01				
11	1			1
10				

$$F = AB\bar{D}$$

CD \ AB	00	01	11	10
00	1			
01				
11				
10	1			

$$F = \bar{B}\bar{C}\bar{D}$$

CD \ AB	00	01	11	10
00	1			
01	1		1	1
11	1		1	1
10	1			

$$F = \bar{C}\bar{D} + BC$$

CD \ AB	00	01	11	10
00				
01	1			1
11	1			1
10				

$$F = B\bar{D}$$

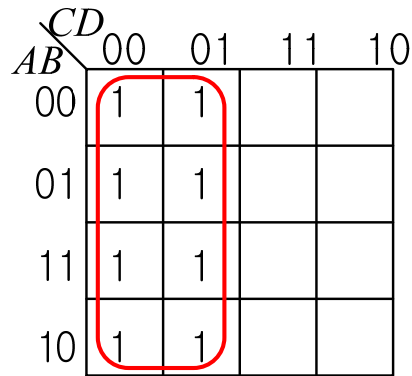
CD \ AB	00	01	11	10
00	1			1
01		1	1	
11		1	1	
10	1			1

$$F = BD + \bar{B}\bar{D}$$

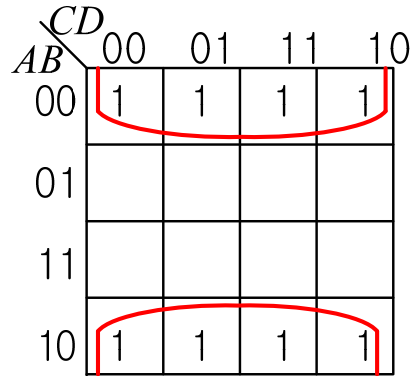


## 03 4변수 카르노 맵

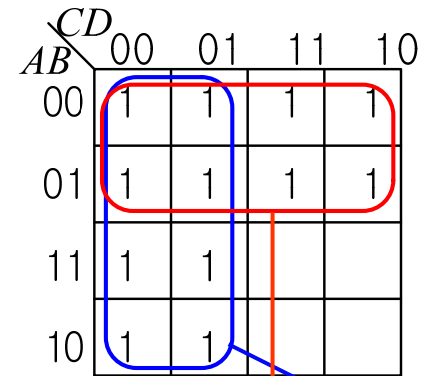
### ■ 예제 6-1 여러 가지 4변수 카르노 맵의 예제



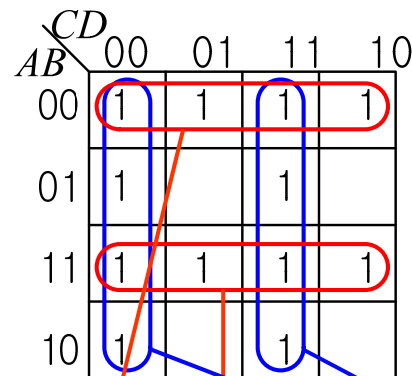
$$F = \overline{C}$$



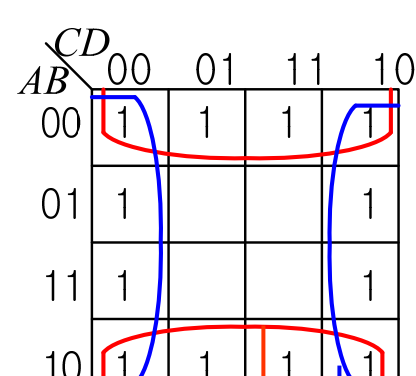
$$F = \overline{B}$$



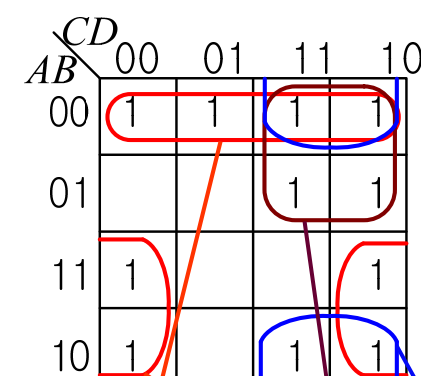
$$F = \overline{A} + \overline{C}$$



$$F = \overline{A}\overline{B} + AB + \overline{C}D + CD$$



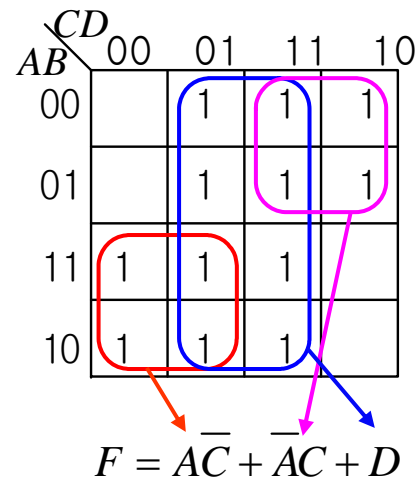
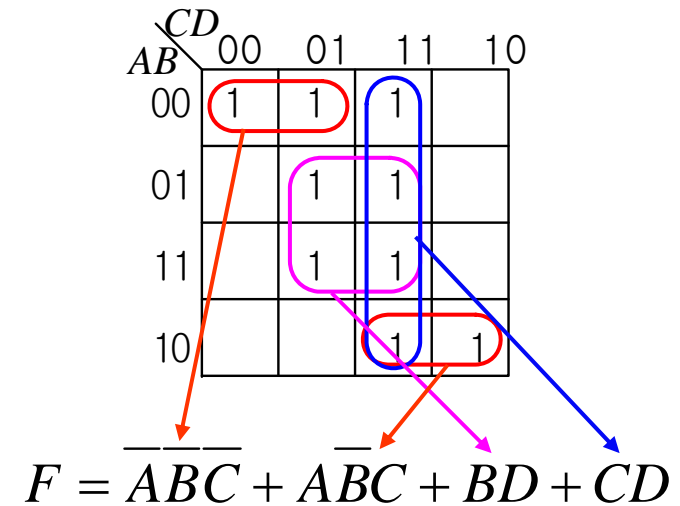
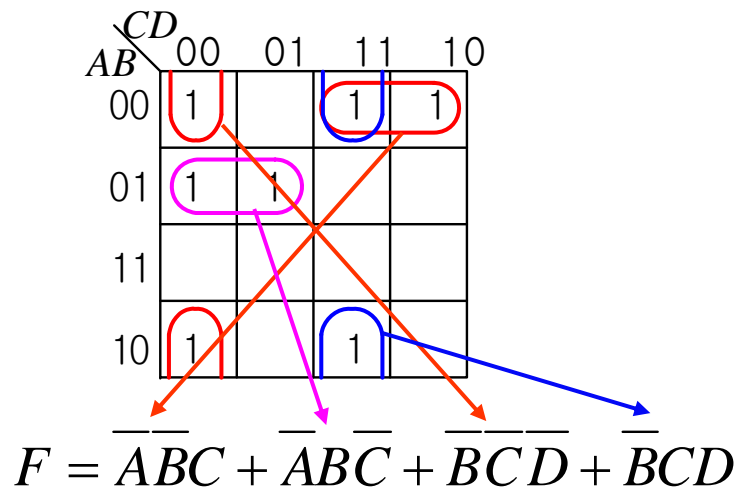
$$F = \overline{B} + \overline{D}$$



$$F = \overline{A}\overline{B} + \overline{A}D + \overline{A}C + \overline{B}C$$

## 03 4변수 카르노 맵

### ■ 예제 6-1 여러 가지 4변수 카르노 맵의 예제



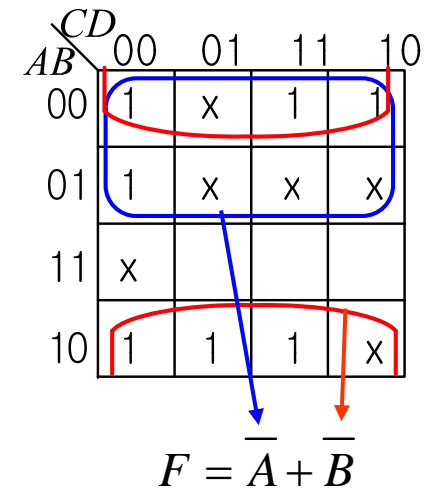
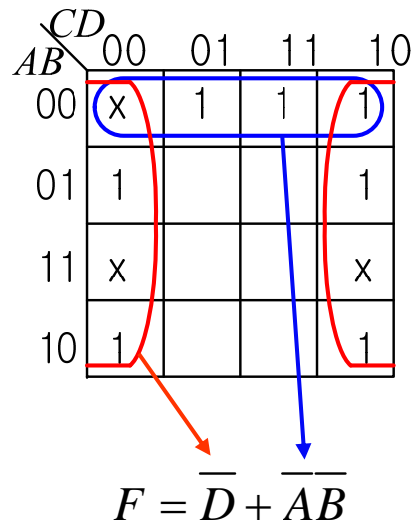
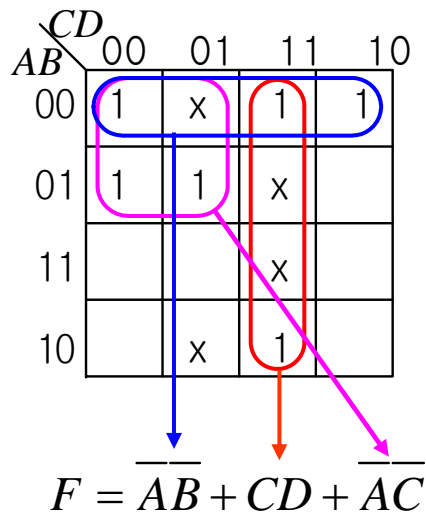
## 03 4변수 카르노 맵

### ■ 예제 6-2 무관항이 있는 경우의 카르노맵의 간소화 예제

$$F(A, B, C, D) = \sum m(0, 2, 3, 4, 5, 11) + \sum d(1, 7, 9, 15)$$

$$F(A, B, C, D) = \sum m(1, 2, 3, 4, 6, 8, 10) + \sum d(0, 12, 14)$$

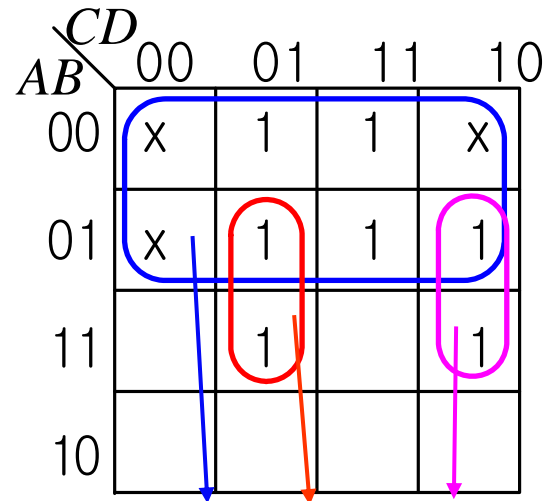
$$F(A, B, C, D) = \sum m(0, 2, 3, 4, 8, 9, 11) + \sum d(1, 5, 6, 7, 10, 12)$$



## 03 4변수 카르노 맵

■ 예제 6-3 다음 진리표로부터 카르노맵을 작성하고 간소화 하여라

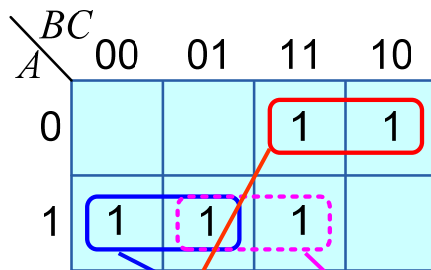
<i>A B C D</i>	<i>F</i>
0 0 0 0	x
0 0 0 1	1
0 0 1 0	x
0 0 1 1	1
0 1 0 0	x
0 1 0 1	1
0 1 1 0	1
0 1 1 1	1
1 0 0 0	0
1 0 0 1	0
1 0 1 0	0
1 0 1 1	0
1 1 0 0	0
1 1 0 1	1
1 1 1 0	1
1 1 1 1	0



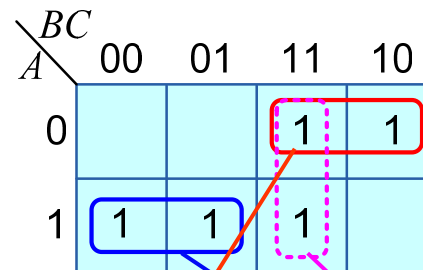
$$F(A, B, C, D) = \bar{A} + \bar{B}\bar{C}D + B\bar{C}\bar{D}$$

## 04 선택적 카르노 맵

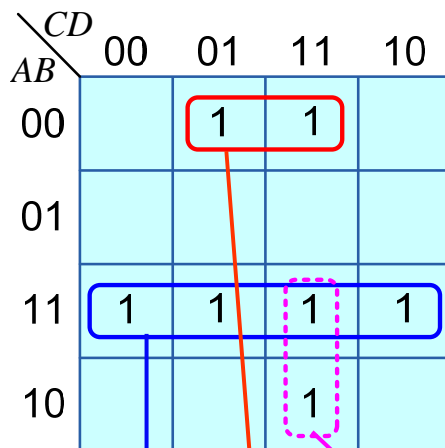
### ■ 카르노 맵에서 선택적으로 묶을 수 있는 경우



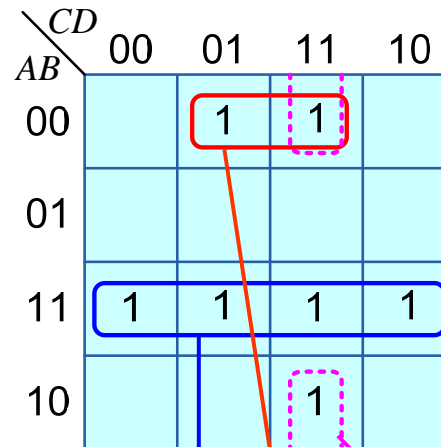
$$F = \overline{A}B + \overline{A}\overline{B} + AC$$



$$F = \overline{A}B + \overline{A}\overline{B} + BC$$



$$F = \overline{A}B + \overline{A}\overline{B}D + ACD$$



$$F = \overline{A}B + \overline{A}\overline{B}D + \overline{B}CD$$

<2가지 답이 가능한 경우>

## 04 선택적 카르노 맵

$\backslash CD$	00	01	11	10
AB 00	x	x	1	x
01	1	x		x
11	x	1	1	x
10	x			

$$F = \bar{A}\bar{B} + AB + B\bar{C}$$

$\backslash CD$	00	01	11	10
AB 00	x	x	1	x
01	1	x		x
11	x	1	1	x
10	x			

$$F = \bar{A}\bar{B} + AB + \bar{A}\bar{C}$$

$\backslash CD$	00	01	11	10
AB 00	x	x	1	x
01	1	x		x
11	x	1	1	x
10	x			

$$F = \bar{A}\bar{B} + AB + B\bar{D}$$

$\backslash CD$	00	01	11	10
AB 00	x	x	1	x
01	1	x		x
11	x	1	1	x
10	x			

$$F = \bar{A}\bar{B} + AB + \bar{A}\bar{D}$$

$\backslash CD$	00	01	11	10
AB 00	x	x	1	x
01	1	x		x
11	x	1	1	x
10	x			

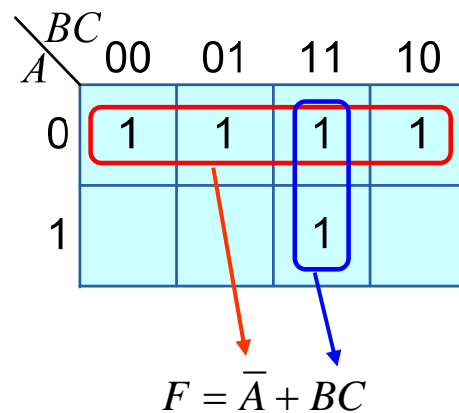
$$F = \bar{A}\bar{B} + AB + \bar{C}\bar{D}$$

<5가지 답이 가능한 경우>

## 05 논리식의 카르노 맵 작성

❖ 논리식에서 생략된 부분을 찾아서 최소항(Minterm)으로 변경

$$\begin{aligned} F(A, B, C) &= ABC + \bar{A}B + \bar{A}\bar{B} \\ &= ABC + \bar{A}B(C + \bar{C}) + \bar{A}\bar{B}(C + \bar{C}) \\ &= ABC + \bar{A}BC + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}\bar{B}\bar{C} \\ &= \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}BC + ABC \\ &= \sum m(0, 1, 2, 3, 7) \end{aligned}$$



## 05 논리식의 카르노 맵 작성

$$\begin{aligned} F(A,B,C,D) &= AB + ABC + \bar{A}CD + \bar{A}\bar{C}D + \bar{A}BC\bar{D} \\ &= AB(C + \bar{C})(D + \bar{D}) + ABC(D + \bar{D}) + \bar{A}(B + \bar{B})CD \\ &\quad + \bar{A}(B + \bar{B})\bar{C}D + \bar{A}BC\bar{D} \\ &= (ABC + AB\bar{C})(D + \bar{D}) + ABCD + ABC\bar{D} + \bar{A}BCD + \bar{A}B\bar{C}D \\ &\quad + \bar{A}B\bar{C}\bar{D} + \bar{A}B\bar{C}D + \bar{A}BC\bar{D} \\ &= ABCD + ABC\bar{D} + AB\bar{C}D + AB\bar{C}\bar{D} + ABCD + ABC\bar{D} + \bar{A}BCD \\ &\quad + \bar{A}B\bar{C}D + \bar{A}B\bar{C}\bar{D} + \bar{A}B\bar{C}D + \bar{A}BC\bar{D} \\ &= \sum m(15,14,13,12,7,3,5,1,6) = \sum m(1,3,5,6,7,12,13,14,15) \end{aligned}$$

CD \ AB	00	01	11	10
00		1	1	
01		1	1	1
11	1	1	1	1
10				

$$F = AB + \bar{A}D + BC$$



## 06 5변수, 6변수 카르노 맵

### ■ 5변수인 경우

		$A=0$						$A=1$			
		$DE$	00	01	11			10	$DE$	00	01
$BC$	00	0	1	3	2	$BC$ <th>00</th> <td>16</td> <td>17</td> <td>19</td> <td>18</td>	00	16	17	19	18
	01	4	5	7	6		01	20	21	23	22
	11	12	13	15	14		11	28	29	31	30
	10	8	9	11	10		10	24	25	27	26

<5변수 카르노 맵>

# 06 5변수, 6변수 카르노 맵

## ■ 6변수인 경우

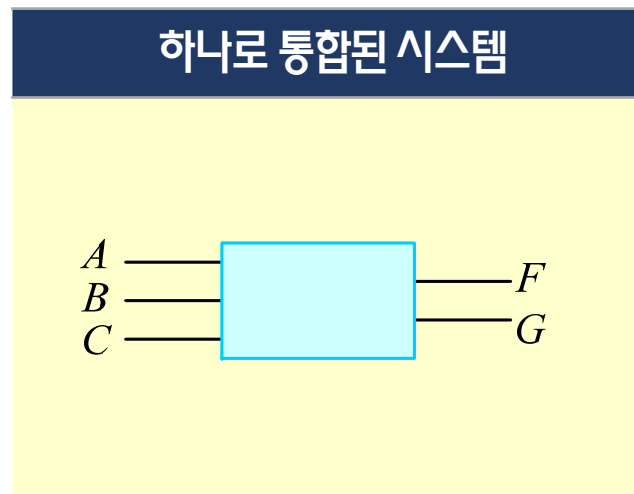
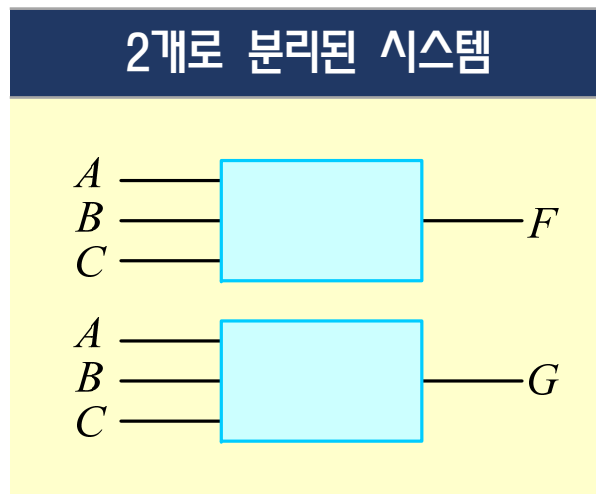
$AB=00$					$AB=01$					$AB=11$					$AB=10$				
$EF \backslash CD$	00	01	11	10	$EF \backslash CD$	00	01	11	10	$EF \backslash CD$	00	01	11	10	$EF \backslash CD$	00	01	11	10
00	0	1	3	2	00	16	17	19	18	00	48	49	51	50	00	32	33	35	34
01	4	5	7	6	01	20	21	23	22	01	52	53	55	54	01	36	37	39	38
11	12	13	15	14	11	28	29	31	30	11	60	61	63	62	11	44	45	47	46
10	8	9	11	10	10	24	25	27	26	10	56	57	59	58	10	40	41	43	42

<6변수 카르노 맵>

## 08 여러 개의 출력함수

### ■ 여러 개의 출력함수를 갖는 시스템의 통합

- 두 개의 시스템으로 분리되어 있는 것을 하나의 시스템으로 통합하는 것이 가능하고, 공유 가능한 게이트가 있을 때 공유하여 시스템을 구성하면 경제적으로 좋은 시스템이 될 수 있다.

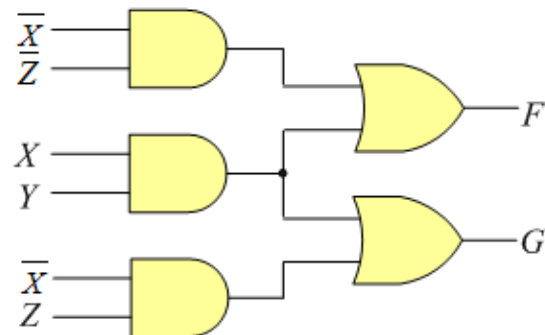
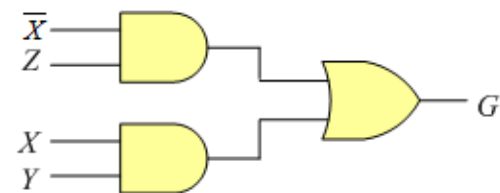
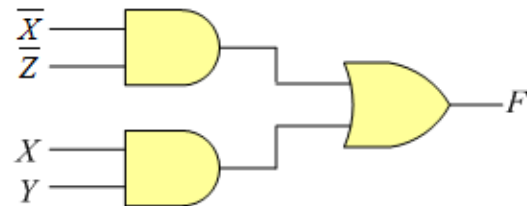
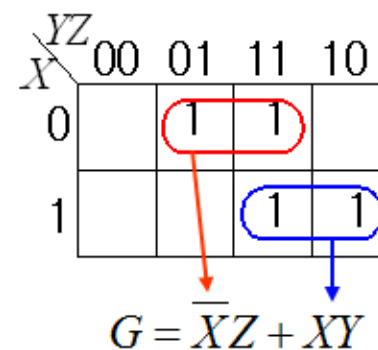
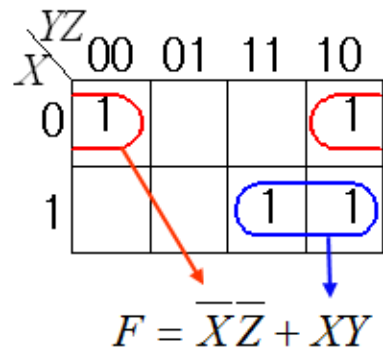


## 08 여러 개의 출력함수

### ■ 예제 6-10 다음과 같은 2개의 논리함수를 하나의 시스템으로 통합

$$F(X, Y, Z) = \sum m(0, 2, 6, 7)$$

$$G(X, Y, Z) = \sum m(1, 3, 6, 7)$$

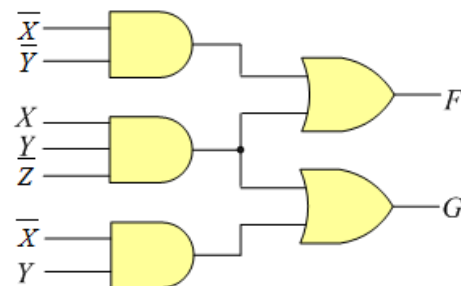
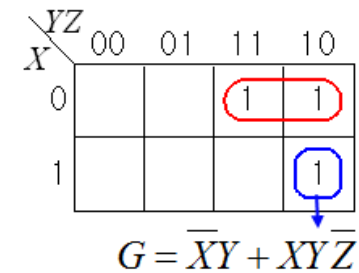
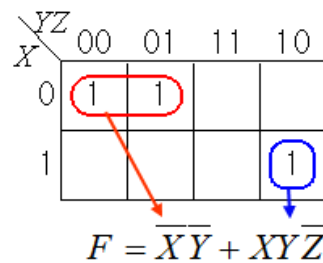
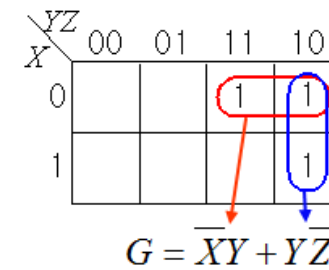
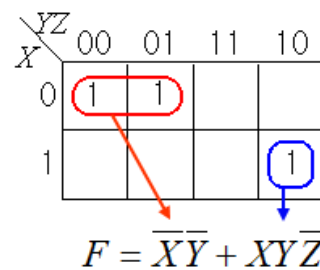


## 08 여러 개의 출력함수

- 예제 6-11 다음과 같은 3변수를 가지는 두 개의 논리함수를 통합하여 게이트수를 최소화

$$F(X,Y,Z) = \sum m(0,1,6)$$

$$G(X,Y,Z) = \sum m(2,3,6)$$



## 08 여러 개의 출력함수

- 예제 6-12 다음과 같은 3변수를 가지는 두 개의 논리함수를 통합하여 게이트수를 최소화

$$F(X,Y,Z) = \sum m(0,1,6)$$

$$G(X,Y,Z) = \sum m(2,3,6)$$

$\backslash YZ$	00	01	11	10
$X$				
0	1	1		
1				1

$$F = \overline{X}\overline{Y} + XY\overline{Z}$$

$\backslash YZ$	00	01	11	10
$X$				
0			1	1
1				1

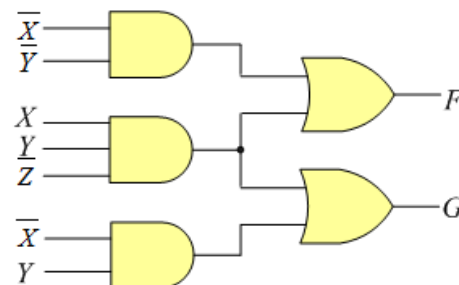
$$G = \overline{X}Y + Y\overline{Z}$$

$\backslash YZ$	00	01	11	10
$X$				
0	1	1		
1				1

$$F = \overline{X}\overline{Y} + XY\overline{Z}$$

$\backslash YZ$	00	01	11	10
$X$				
0			1	1
1				1

$$G = \overline{X}Y + XY\overline{Z}$$



## 학습목표 및 목차

- 카르노 맵을 이용하여 논리식을 간소화할 수 있다.
- NAND와 NOR 게이트로 나타내는 방법을 이해하고 이를 응용할 수 있다.
- 퀴-맥클러스키 최소화 알고리즘을 이용하여 논리식을 간소화할 수 있다.
- 출력함수가 여러 개일 때 논리식을 공유하는 방법을 이해할 수 있다.
- XOR 게이트와 XNOR 게이트의 특징을 이해하고 이를 활용할 수 있다.

01. 2변수 카르노 맵

02. 3변수 카르노 맵

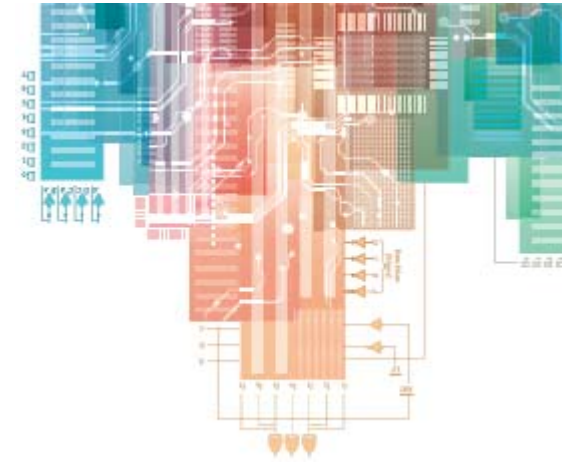
03. 4변수 카르노 맵

04. 선택적 카르노 맵

05. 논리식의 카르노 맵 작성

06. 5변수, 6변수 카르노 맵

08. 여러 개의 출력함수



감사합니다 😊