# Семинары по ТУ

## I. Линейные САУ

А.П. Котов

kotov@ssau.ru

Кафедра суперкомпьютеров и общей информатики

Самарский университет

Осень 2021

## /Установившийся режим

Установившийся режим

# Статические и динамические характеристики САУ

Рассмотрим

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_ny = b_0x^{(m)} + b_1x^{(m-1)} + ... + b_mx \quad (1)$$

- переменные $y, \ldots, y^{(n)}$ - состояния
  коэффициенты $a_0, \ldots a_n$ - координаты состояний
- Статический режим характеризуются установившимися состояниями при неизменных входных воздействиях.
- Уравнения статики легко получить из уравнений динамики САУ путем приравнивания в них нулю:
  1) всех производных по времени переменных (координат состояния);
  2) всех производных внешних воздействий.

# Линеаризация/Основные понятия

# Линеаризация нелинейных моделей

Нелинейную зависимость можно разложить в ряд Тейлора в окрестности точки установившегося режима, отбросив члены ряда выше первого порядка малости.

**Условия для линеаризации:**

1. она применима только для малых отклонений (т.е. переменные величины на входе звеньев претерпевают достаточно малые отклонения от установившихся значений)
2. и только к непрерывно дифференцируемым нелинейностям

Существенно нелинейные звенья - звенья, не удовлетворяющие второму условию. Например звенья с прерывистыми характеристиками (реле) и неоднозначными характеристиками (петля гистерезиса).

# Пример 01. Трансформатор (электрическая система)

## Задание

Составить уравнение эл. цепи (рис. 1), описывающее изменение выходного напряжения $U_{\text{вых}}(t)$ при условии подачи на вход напряжения $U_{\text{вх}}(t)$ при известных $R_1$, $R_2$.

- входная величина - напряжение питания: $x(t) = U_{\text{вх}}(t)$
- в качестве выходной величины рассматриваем напряжение на втором резисторе: $y(t) = U_{\text{вых}}(t)$

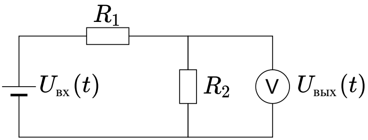


Рис. 1: Электрическая цепь

## Подсказки

- применить второе правило Кирхгофа
- $U_R = iR$, где $i$ - величина тока

# Усилительное звено

## Ответ

$$y(t) = k\,x(t),\ \text{где}\ k = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \qquad (2)$$

- получено уравнение усилительного звена с коэффициентом усиления $k$
- (2) характеризует установившийся (статический) режим

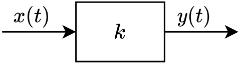


Рис. 2: Структурная схема усилительного звена

- Передаточная функция усилительного звена $W = k = const$
- Другой пример усилительного звена - редуктор, где угловые скорости выходного и входного вала связаны через соотношение чисел зубьев шестерён. (будет рисунок)

# Составление уравнений движений/Переходные процессы

# Пример 02.

## Задание

Составить уравнение движения электрической системы (рис. 3) при известных $R$, $C$. В начальный момент времени ёмкость $C$ не заряжена.

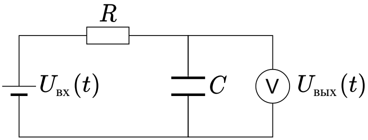


Рис. 3: Электрическая цепь

## Подсказки

- предполагаем линейность зависимости падений напряжения на элементах контура: $\frac{dU_c}{dt} = \frac{i}{C}$

# Апериодическое звено

**Ответ**

$$T\,\dot{y}(t) + y(t) = k\,x(t), \text{ где } T = R\,C, \;\; k = 1$$

- получено уравнение апериодического звена,
  где $T$ - постоянная времени, $k$ - коэффициент усиления
- статическая характеристика системы – это зависимость выходной переменной от какой-либо входной переменной в статическом (установившемся) режиме.
- в установившемся статическом режиме входная и выходная величины связаны ур-ем $y_{\text{ст}}(t) = k\,x_{\text{ст}}(t)$

# Составление уравнений движений/Системы второго порядка

# Пример 03. Механическая система.

- в разработке

# Составление уравнений движений/Выводы

# Выводы

- при составлении уравнений движения электрических и механических систем использовались соответстующие законы движения
- предполагаем линейность характеристик
- вне зависимости от физической природы процесса получены одинаковые уравнения движения

## Анализ выходных процессов/Решение с помощью методов теории диф. ур-й

# Пример

### Задача

Найти решение неоднородного дифференциального уравнения $T\,\dot{y}(t) + y(t) = k\,x(t)$ с нулевыми начальными условиями, если $x(t) = 1$ при $t \geq 0$.

### Алгоритм решения задачи

Найти общее решение неоднородного уравнения, затем подставить н.у.

# Ход решения

1. найти общее решение однородного уравнения
$T\,\dot{y}(t) + y(t) = 0$.
Характеристическое уравнение $T\lambda + 1 = 0$ имеет корень $\lambda = -\frac{1}{T}$. Решение имеет вид $y_0 = Ce^{-\frac{t}{T}}$.
2. частное решение неоднородного уравнения $y_н$ находится методом вариации произвольных постоянных или методом подбора.
$y_н = A$. В результате подстановки в неоднородное уравнение:
$T \cdot 0 + A = k \;\Rightarrow\; y_н = k$.
3. общее решение неоднородного уравнения имеет вид
$y(t) = y_0 + y_н = Ce^{-\frac{t}{T}} + k$
4. из начального условия $y(0) = Ce^0 + 1 = 0$ следует $C = -1$.
Таким образом
$$y(t) = k\,(1 - e^{-\frac{t}{T}}).$$

# Метод вариации произвольной постоянной

2 и 3 пункты выглядят иначе.

$$T(C'(t)e^{-\frac{t}{T}} - \frac{1}{T}C(t)e^{-\frac{t}{T}}) + C(t)e^{-\frac{t}{T}} = k$$

$$T\,C'(t)\,e^{-\frac{t}{T}} = k\,; \quad C'(t) = \frac{k}{T}e^{\frac{t}{T}}\,; \quad \int C'(t)dt = \frac{k}{T}\int e^{\frac{t}{T}}dt$$

$$C(t) = k\,e^{\frac{t}{T}} + C_2$$

$$y(t) = C(t)\,e^{-\frac{t}{T}} = (k\,e^{\frac{t}{T}} + C_2)e^{-\frac{t}{T}} = k + C_2\,e^{-\frac{t}{T}}$$

## Переходная функция (характеристика)

- переходная функция представляет собой реакцию звена на единичное ступенчатое воздействие (обозначается $h(t)$)
- единичное ступенчатое воздействие - воздействие, которое мгновенно возрастает от нуля до единицы и далее остаётся неизменным (обозначается $1(t)$):

$$1(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ 1 & \text{при } t \geq 0. \end{cases}$$

- из предыдущего примера получено уравнение переходной функции

### Переходная функция апериодического звена

$$h(t) = k\left(1 - e^{\frac{t}{T}}\right),$$

где $T$ - постоянная времени, $k$ - коэффициент усиления.

# Анализ выходных процессов/Преобразование Лапласа

# Определение

Прямое преобразование

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-\frac{t}{T}}$$

в случае линейных стационарных систем применим операционный метод Лапласа

$$y(t) = L^{-1} Y(s)$$

где $Y(s) = W(s)\, X(s)$

## Свойства преобразования

- в случае линейных стационарных систем применим операционный метод Лапласа
- принцип суперпозиции выполняется как для прямого, так и для обратного преобразования Лапласа
- с помощью преобразования Лапласа можно сразу найти начальное и конечное значения функции-оригинала (при $t = 0$ и $t \to \infty$), не вычисляя самого оригинала:

$$f(0) = \lim_{s \to \infty} s\,F(s), \quad f(\infty) = \lim_{s \to 0} s\,F(s)$$

# Анализ выходных процессов/Задачи

. . .