ЗАДАНИЕ

Случайный процесс $\xi(t)$ задан как функция некоторых независимых случайных величин X и Y, а также детерминированного параметра t:
$\xi(t) = X\cos(\omega\, t) + Y\sin(\omega\, t)$.

Здесь параметр ω полагается детерминированным действительным числом, равным 1,5. X распределена по закону Лапласа с плотностью вероятности

$$f(x) = \frac{\sqrt{6}}{4}\exp\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}|x|\right).$$

Y распределена равномерно на отрезке $[-2;+2]$.

1. Смоделировать и изобразить на графике несколько реализаций случайного процесса $\xi(t)$, проведя дискретизацию параметра t.

2. Построить и изобразить графически статистические оценки математического ожидания и дисперсии случайного процесса $\xi(t)$. Сравнить их с реальными математическим ожиданием и дисперсией этого случайного процесса.

3. Выяснить, является ли случайный процесс $\xi(t)$ стационарным в широком смысле. Если случайный процесс $\xi(t)$ является стационарным в широком смысле, построить и изобразить графически статистическую оценку автокорреляционной функции этого случайного процесса, зависящую от разницы во времени. Сравнить её с реальной автокорреляционной функцией этого случайного процесса.

РЕФЕРАТ

Отчёт по лабораторной работе: 16 с, 4 рисунка, 1 приложение.

СЛУЧАЙНЫЙ ПРОЦЕСС, РЕАЛИЗАЦИЯ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА, СЕЧЕНИЕ, МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ, ДИСПЕРСИЯ, КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ФУНКЦИЯ, СТАЦИОНАРНОСТЬ В ШИРОКОМ СМЫСЛЕ, MATLAB, ДИСКРЕТИЗАЦИЯ.

– объект исследования: случайный процесс;

– цель работы: научиться определять основные характеристики случайного процесса, а также проверять его на стационарность в широком смысле;

– результат работы – графики МО, дисперсии и корреляционной функции СП, а также нескольких реализаций этого СП.

ВВЕДЕНИЕ

В решаемой задаче случайный процесс $\xi(t)$ задан как функция известных независимых случайных величин X и Y, а также детерминированного параметра t.

Используя пакет прикладных программ Scilab, можно получить приблизительную оценку характеристик случайного процесса, сделав выборку по каждому сечению случайного процесса в некотором промежутке и с некоторым шагом, и посчитав нужные характеристики для соответствующих случайных величин. Таким образом можно получить приблизительные функции параметра t, характеризующие случайный процесс.

1 Основные определения теории случайных процессов

Случайным процессом (СП) называется функция ξ(t), зависящая от случайного параметра x и протекающая во времени t, как правило, представляемом действительным множеством:

$\xi(t)\colon \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

При заданном фиксированном t мы получаем случайную величину, называемую сечением случайного процесса.

Если же фиксируется результат случайного эксперимента, то мы получаем неслучайную функцию x(t) – реализацию случайного процесса.

Математическим ожиданием СП называют первый начальный момент этого СП:

$$m_\xi = m_1 = M_\xi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x dF_\xi(t,x)$$

Дисперсия СП – его второй центральный момент:

$$D_\xi(t) = M(\xi(t) - m_\xi)^2$$

Корреляционная функция СП имеет вид:

$$R_\xi(t_1,t_2) = M\,[(\xi(t_1) - M\,(\xi(t_1))(\xi(t_2) - M\,(\xi(t_2))] =$$

$$= M(\xi(t_1)\xi(t_2)) - M(\xi(t_1))M(\xi(t_2))$$

Случайный процесс является стационарным в широком смысле, если выполняются следующие два условия:

- математическое ожидание постоянно на всем пространстве времени;
- корреляционная функция зависит только от разности t_2 и t_1:

$$M_\xi(t) = m_\xi;\;\; R_\xi(t_1,t_2) = R_\xi(t_2 - t_1)\;\; .$$

2 Исходные данные и способ решения

Дан случайный процесс:

$\xi(t) = X\cos(1.5t) + Y\sin(1.5t)$, где:

Случайная величина X распределена по закону Лапласа с плотностью вероятности

$$f(x) = \frac{\sqrt{6}}{4}\exp\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}|x|\right).$$

Случайная величина Y распределена равномерно на отрезке $\left[-2;+2\right]$.

При решении данной задачи использовался пакет прикладных программ Scilab и встроенный в пакет язык программирования. Решение задачи получено с помощью дискретизации параметра t на промежутке $\left[-2;+2\right]$ с шагом 0,02 (т. е. для 1000 случайных величин, являющихся сечениями случайного процесса ξ(t)).

3 Результаты

На рисунке 1 приведены три произвольные реализации случайного процесса $\xi(t)$.

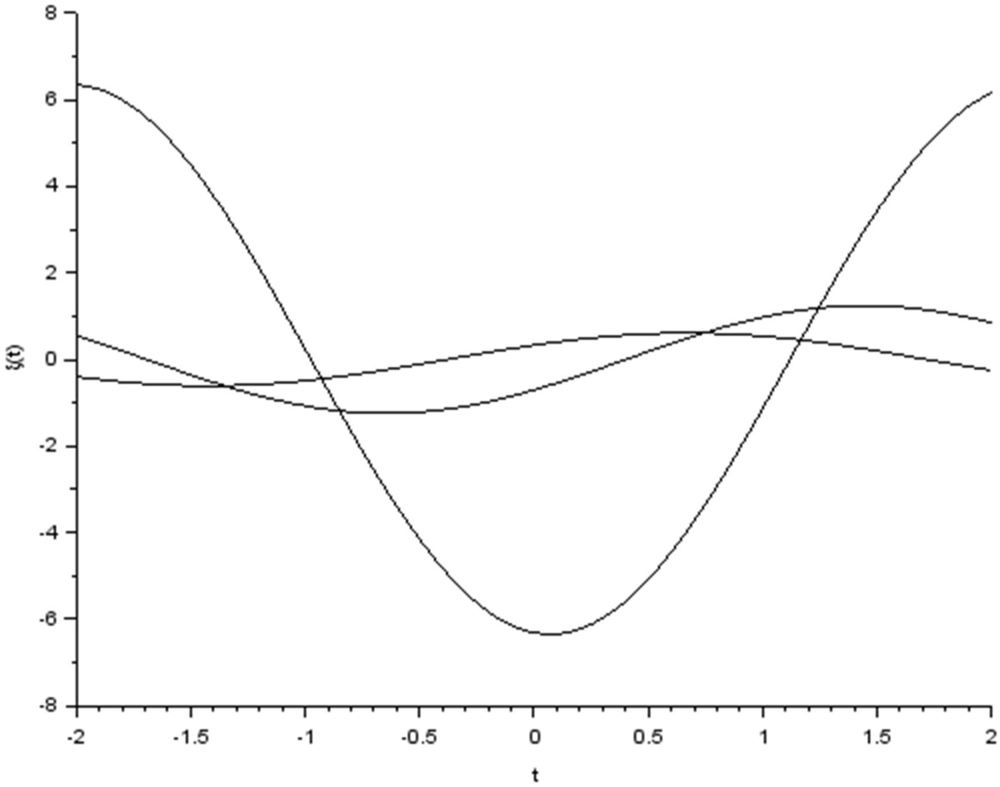

Рисунок 1 – Реализации случайного процесса ξ(t)

Математическое ожидание случайного процесса:

$$M[\xi(t)] = M[X\cos\omega t + Y\sin\omega t] = \cos(\omega t)MX + \sin(\omega t)MY\ .$$

Случайные величины X и Y симметричны относительно оси Oy, поэтому $MX = MY = 0$. Получаем, что $M[\xi(t)] = 0$.

На рисунке 2 приведена статистическая оценка математического ожидания СП ξ(t) (чёрным цветом) и реальное математическое ожидание СП ξ(t) (синим цветом).

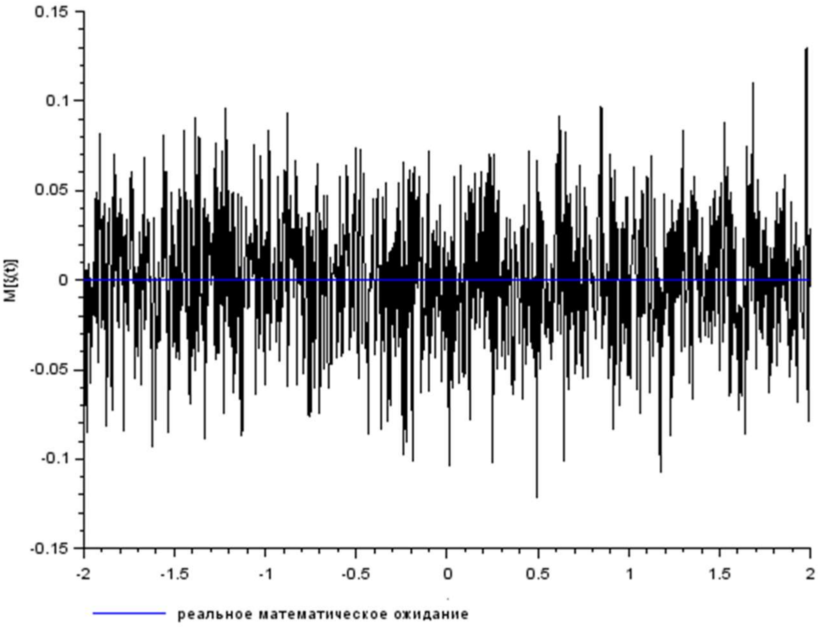

Рисунок 2 – Статистическая оценка математического ожидания и реальное математическое ожидание

Дисперсия:

$$D[\xi(t)] = M[\xi^2(t)] - [M\xi(t)]^2 = \cos^2(\omega t)DX + \sin^2(\omega t)DY \ .$$

$$DX = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \frac{\sqrt{6}}{4} \exp\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}|x|\right) dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{0} x^2 \frac{\sqrt{6}}{4} \exp\left(\frac{\sqrt{6}}{2}x\right) dx + \int_{0}^{+\infty} x^2 \frac{\sqrt{6}}{4} \exp\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}x\right) dx = \frac{4}{3} \ .$$

$$DY = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{\left(2-(-2)\right)^2}{12} = \frac{4}{3} \ .$$

$$D[\xi(t)] = \cos^2(\omega t)\frac{4}{3} + \sin^2(\omega t)\frac{4}{3} = \frac{4}{3}.$$

На рисунке 3 приведена статистическая оценка дисперсии СП ξ(t) (чёрным цветом) и реальная дисперсия СП ξ(t) (синим цветом).

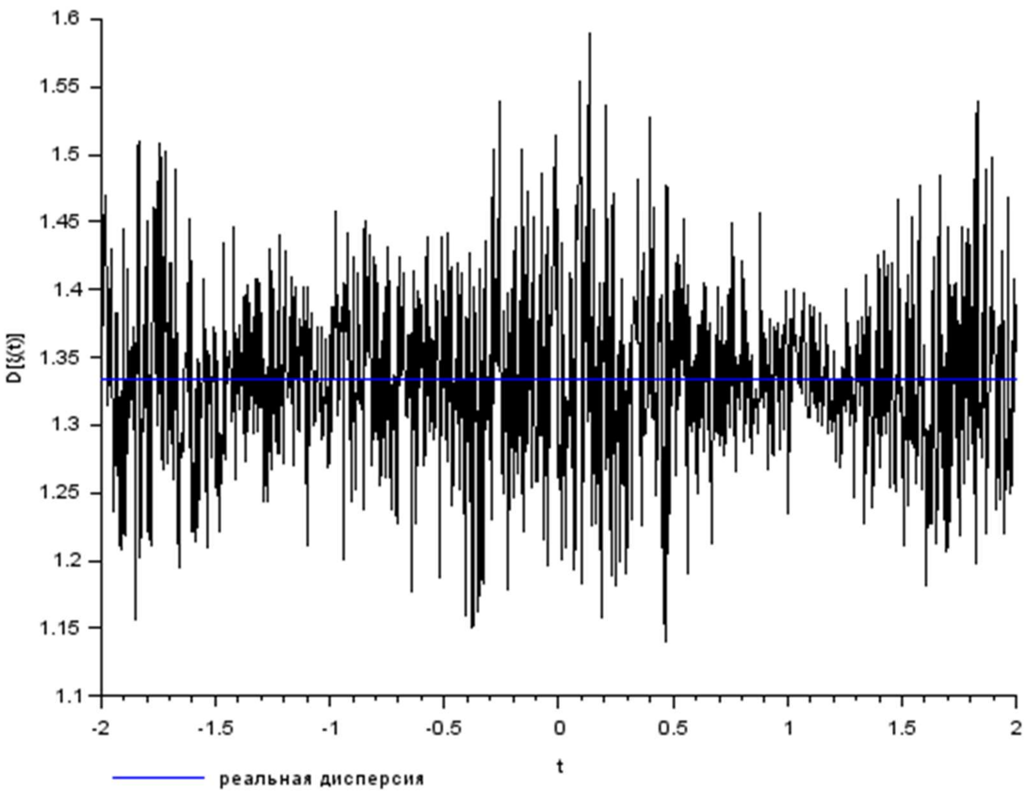

Рисунок 3 – Статистическая оценка дисперсии и реальная дисперсия

Корреляционная функция:

$$R_\xi(t_1, t_2) = M[\xi(t_1)\xi(t_2)] = (\cos(\omega t_1)\cos(\omega t_2) + \sin(\omega t_1)\sin(\omega t_2))D_\xi =$$

$$= D_\xi \cos(\omega(t_2 - t_1)) = \frac{4}{3}\cos(\omega(t_2 - t_1))$$

Справедливость двух условий стационарности СП ξ(t) доказана, следовательно, случайный процесс ξ является стационарным в широком смысле.

Для удобства рассмотрим случай, когда $t_1 = 0$. Тогда t_2 равна разности переменных t.

На рисунке 4 приведена статистическая оценка корреляционной функции СП ξ(t) (чёрным цветом) и реальная корреляционная функция СП ξ(t) (синим цветом).

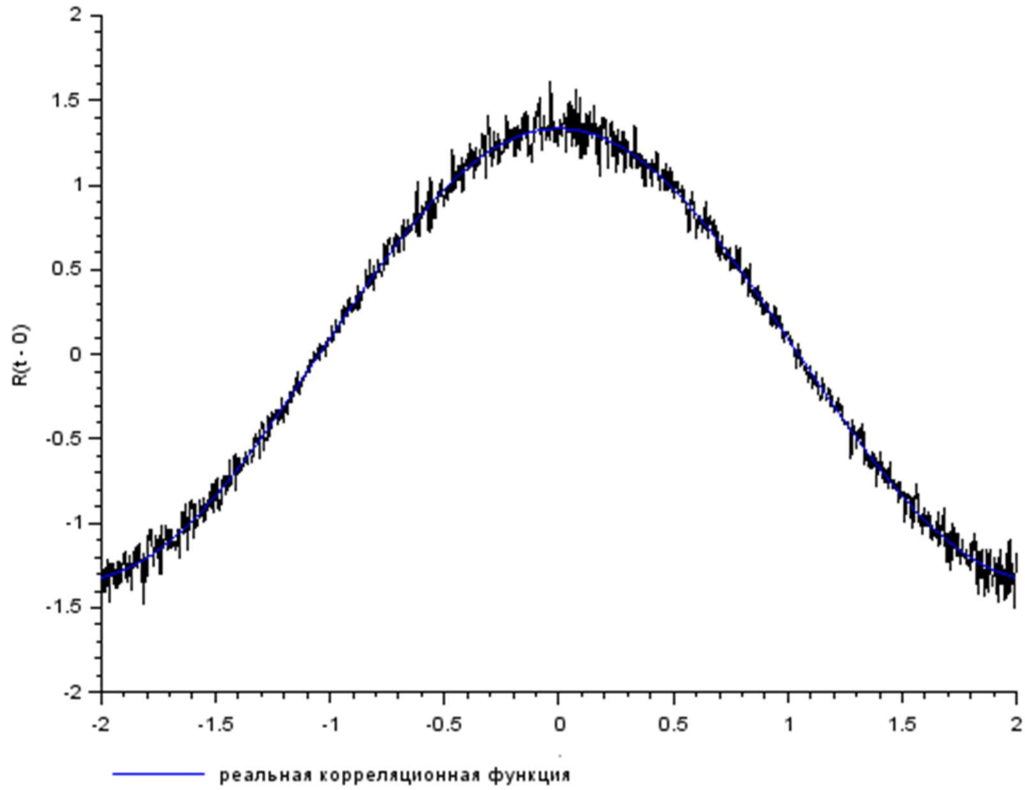

Рисунок 4 – Статистическая оценка корреляционной функции и реальная корреляционная функция

ЗАДАНИЕ

Случайный процесс $\xi(t)$ задан как функция некоторых независимых случайных величин A и φ, а также детерминированного параметра t:

$\xi(t) = A\sin(\omega\, t + \varphi)$.

A распределена по треугольному закону с плотностью вероятности

$$f(x) = \begin{cases} |1-2x|, -0,5 \le x \le +0,5 \\ 0, иначе \end{cases}.$$

φ распределена равномерно на отрезке [–1,5; +1,5].

$\omega = 3$.

1. Смоделировать и изобразить на графике несколько реализаций случайного процесса $\xi(t)$, проведя дискретизацию параметра t.

2. Найти математическое ожидание случайного процесса $\xi(t)$. Выяснить, является ли случайный процесс $\xi(t)$ эргодическим относительно математического ожидания.

3. Построить график зависимости статистической оценки математического ожидания случайного процесса $\xi(t)$, вычисленной по одной реализации этого случайного процесса, от длины этой реализации. Сравнить её с реальным математическим ожиданием случайного процесса $\xi(t)$.

РЕФЕРАТ

Отчёт по лабораторной работе: 13с, 2 рисунка, 1 приложение.

РЕАЛИЗАЦИЯ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА, СХОДИМОСТЬ ПО ВЕРОЯТНОСТИ, ЭРГОДИЧНОСТЬ, СРЕДНЕЕ ПО ВРЕМЕНИ, СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА.

– объект исследования: случайный процесс;

– цель работы: научиться проверять случайные процессы на эргодичность а также оценивать математическое ожидание,

– результат работы – утверждение об эргодичности (неэргодичности) процесса; график статистической оценки математического ожидания.

ВВЕДЕНИЕ

В задаче, которую необходимо решить, случайный процесс $\xi(t)$ задан как функция известных независимых случайных величин A и φ, а также детерминированного параметра t.

С помощью пакета прикладных программ Scilab через дискретизацию параметра T можно определить, к какой величине сходится среднее по вероятности для случайного процесса, а затем сравнить с величиной, к которой сходится (если сходится) математическое ожидание (МО) случайного процесса и определить, является ли он эргодическим.

Зачастую определение эргодичности вручную выполнить тяжело, особенно если достаточное условие эргодичности (сходимость корреляционной функции к нулю на бесконечности) не выполняется. В таком случае необходимо сравнивать мат. ожидание процесса со статистической оценкой на основе предположения, что он является эргодическим.

1 Предельные характеристики случайных процессов

Говорят, что случайный процесс сходится по вероятности к величине *a* и пишут: $<\xi(t)>_0^T \xrightarrow[n\to\infty]{P} a$, если:

$$\lim_{T\to\infty} \Pr\left\{\left|\frac{1}{T}\int_0^T \xi(t)dt - a\right| < \varepsilon\right\} = 1$$

Величину $\frac{1}{T}\int_0^T \xi(t)dt$ называют средней по времени данного случайного процесса.

Случайный процесс называется эргодическим, если он сходится по вероятности к своему математическому ожиданию:

$$\lim_{T\to\infty} \Pr\left\{\left|\int_0^T \xi(t)dt - M_\xi\right| < \varepsilon\right\} = 1$$

Другими словами, эргодические процессы подчиняются закону о больших числах.

Случайный процесс сходится почти всюду к величине *a,* если:

$$\Pr\{\lim_{t\to\infty} \xi(t) = a\} = 1$$

Случайный процесс сходится среднеквадратически к величине *a*, если:

$$M\left(\frac{1}{T}\int_0^T \xi(t)dt - a\right)^2 = 0$$

Из среднеквадратической сходимости СП либо его сходимости почти всюду к математическому ожиданию следует сходимость по вероятности к МО, а, следовательно, и его эргодичность.

Достаточный признак эргодичности случайного процесса:

$$\lim_{\tau\to\infty} R_\xi(\tau) = 0$$

Если данный признак не выполняется, мы не можем сказать, эргодический ли процесс или нет.

2 Исходные данные и способ решения

Дан случайный процесс

$\xi(t) = A \sin(\omega\, t + \varphi)$, где:

Случайная величина A распределена по треугольному закону с плотностью вероятности

$$f(x) = \begin{cases} |1-2x|, -0,5 \le x \le +0,5 \\ 0, \textit{иначе} \end{cases}.$$

Случайная величина φ распределена равномерно на отрезке [–1,5; +1,5].

$\omega = 3$.

При решении данной задачи использовался пакет прикладных программ Scilab и встроенный в пакет язык программирования. Нахождение реализаций случайного процесса произведено с помощью дискретизации параметра t на промежутке $[-1,5;+1,5]$ и шагом 0,003 (т.е. для 1000 случайных величин, являющихся сечениями СП $\xi(t)$). Нахождение величины, к которой сходится среднее по времени случайного процесса, найдено с помощью многократных вычислений этого среднего $\frac{1}{T}\int_0^T \xi(t)dt$ на промежутке $T \in (0, 200)$ с шагом 0,1.

3 Результаты

На рисунке 1 приведены три произвольные реализации случайного процесса ξ(t).

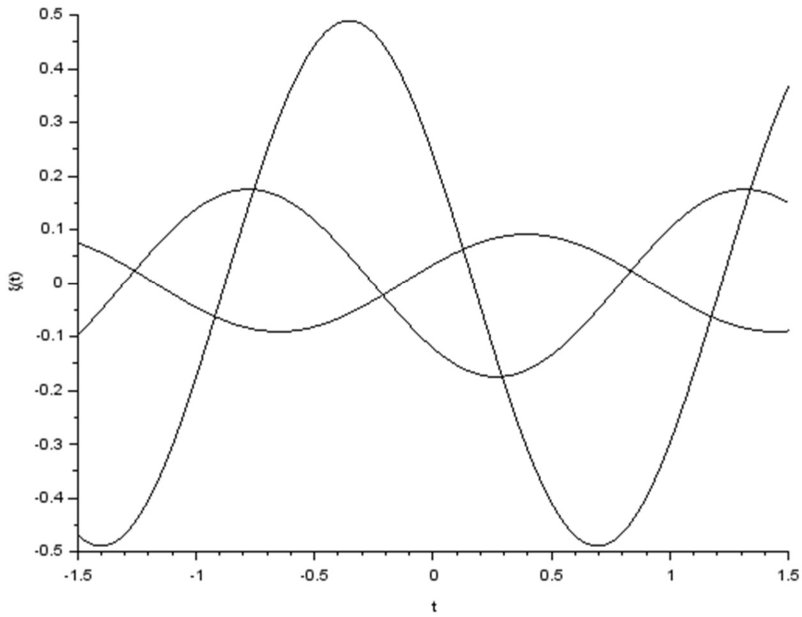

Рисунок 1 – Реализации случайного процесса

Математическое ожидание случайного процесса:

$M[\xi(t)] = M[A\sin(\omega t + \varphi)] = MA \cdot M[\sin(\omega t + \varphi)] = 0C = 0$, т. к. A симметрична относительно Оy.

Проверим случайный процесс ξ(t) на эргодичность. Зафиксируем конкретный исход экспериментов A и φ, чтобы в процессе вычислений их можно было считать неслучайными действительными числами.

$$\frac{1}{T}\int_0^T A\sin(\omega t + \varphi)dt = \frac{A}{T\varphi}(-\cos(\omega t + \varphi))\Bigg|_0^T = -\frac{A(\cos(\omega T + \varphi) + \cos\varphi)}{T\varphi}.$$

Зададим условие эргодичности для полученного выражения:

$$\lim_{T\to\infty} \Pr\left\{\left|\frac{A(\cos(\omega T + \varphi) + \cos\varphi)}{T\varphi} - 0\right| < \varepsilon\right\} = 1 \geq \lim_{T\to\infty} \Pr\left\{\frac{2|A|}{\omega T} < \varepsilon\right\}.$$

Исходя из определения предела, мы доказали, что при ограниченной СВ A процесс эргодический.

В случае неограниченной СВ A:

$$\lim_{T\to\infty} \Pr\left\{|A| < \frac{\omega T\varepsilon}{2}\right\} = \lim_{T\to\infty}\left(1 - \Pr\left\{|A| < \frac{\omega T\varepsilon}{2}\right\}\right) = 1 - \lim_{T\to\infty} \Pr\left\{|A| \geq \frac{\omega T\varepsilon}{2}\right\} =$$

$\geq 1 - \lim\limits_{T\to\infty} \dfrac{4DA}{(\omega T\varepsilon)^2} = 1$, так как по неравенству Чебышева $P\{|X - MX| > \varepsilon\} \leq \dfrac{DX}{\varepsilon^2}$ (в нашем примере $MA = 0$).

Таким образом, для эргодичности процесса необходимо, чтобы дисперсия случайной величины A была конечна.

$$\Pr\left\{|A| \geq \frac{\omega T\varepsilon}{2}\right\} \leq \frac{4DA}{(\omega T\varepsilon)^2}$$

Математическое ожидание (обозначено синим цветом) и зависимость статистической оценки математического ожидания от T (чёрным) приведена на рисунке 2.

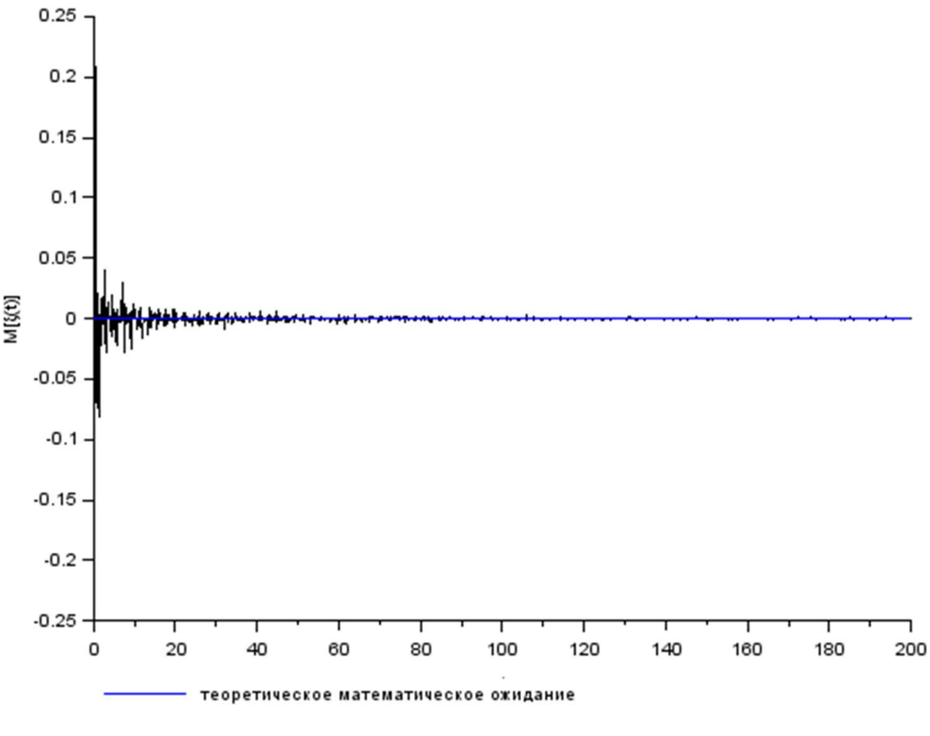

Рисунок 2 – График зависимости статистической оценки математического ожидания от T

ЗАДАНИЕ

Однородная цепь Маркова с дискретным временем задана графом состояний. На нулевом шаге она всегда находится в первом состоянии.

1. Найти предельные вероятности состояний этой цепи Маркова, если они существуют, решив систему линейных алгебраических уравнений.

2. Найти распределение вероятностей состояний цепи через достаточно большое количество шагов путём возведения в соответствующую степень матрицы переходных вероятностей. Сравнить его с предельными вероятностями состояний, если они существуют.

3. Статистически оценить вероятности состояний через достаточно большое количество шагов методом Монте-Карло, моделируя поведение цепи достаточно большое количество раз. Сравнить их с предельными вероятностями состояний, если они существуют.

РЕФЕРАТ

Отчёт по лабораторной работе: 15с, 2 рисунка, 1 приложение.

МАРКОВСКИЙ ПРОЦЕСС, ОДНОРОДНАЯ ЦЕПЬ МАРКОВА, МАТРИЦА ПЕРЕХОДОВ, ГРАФ СОСТОЯНИЙ, ПРЕДЕЛЬНЫЕ ВЕРОЯТНОСТИ СОСТОЯНИЙ, МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ.

– объект исследования: однородная цепь Маркова;

– цель работы: научиться работать с графом состояний, а также различными способами определять предельные вероятности состояний;

– результат работы – векторы предельных вероятностей, полученные тремя способами решения.

ВВЕДЕНИЕ

В условии задачи, которую предстоит решить, однородная цепь Маркова представлена в виде графа состояний: состояниям соответствуют вершины, а переходам – ребра.

Пакет прикладных программ Scilab позволяет достаточно быстро найти предельные вероятности различными способами. Среди них – нахождение данных вероятностей, исходя из их определения; возведение матрицы переходов в достаточно большую степень, при котором вероятности будут стремиться к предельным; исходя из графа состояний, сделать достаточно большое количество шагов и произвести такой эксперимент какое-то число раз, чтобы вероятности были примерно равны предельным. Тем не менее, методы обладают различной степенью точности, которые следует выяснить.

1 Однородная цепь Маркова

Марковским случайным процессом называют процесс, для которого:

$$\Pr\{\xi(n) = E_{i,}\xi(n-1) = E_j, ..., \xi(n-k) = E_l\} = \Pr\{\xi(n) = E_i \mid \xi(n-1) = E_j\}$$

E – множество состояний (фазовое пространство); n–k, …, n–1, n – моменты времени.

Цепь Маркова – это марковский случайный процесс с дискретным временем t и конечным или счетным множеством состояний E.

Вероятностью $P_{ij}(s, t)$ будем обозначать следующую вероятность:

$$P_{ij}(s,t) = \Pr\{\xi(t) = j \mid \xi(s) = i\}$$

Однородная цепь Маркова – это цепь Маркова, в которой переход из состояния в состояние зависит только от интервала времени, а не от положения этого интервала.

Переходной матрицей называют матрицу, для которой элемент p_{ij} определяет вероятность перехода из состояния i в j за 1 шаг. Обозначается Р.

Пусть $p(0)$ – вектор начальных состояний, а $p(k)$ – вектор, определяющий вероятности принятия цепью состояний после k шагов.

Тогда $p(k) = p(0)$ P^{n}.

Матрица переходных вероятностей обладает следующими свойствами:

- $0 \le p_{ij} \le 1$;
- $\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1$;
- $p(n+m) = p(n)$ P^{m}.

Предельными вероятностями состояний называются $\pi = \lim_{n\to\infty} p(0)\mathbf{P}^n$, если эти пределы существуют и не зависят от $p(0)$. π является вектором, компоненты которого находятся из формулы:

$$\pi_k = \sum_i \pi_i p_{ik}, \ \ k = 1, \dots, N$$

и системы уравнений:

$$\begin{cases} \pi_k & = \sum_i \pi_i p_{ik}, \quad k = 1, \ldots, N \\ \sum_k \pi_k & = 1 \end{cases}.$$

2 Исходные данные и способ решения

Условием задан граф состояний, представленный на рисунке 1.

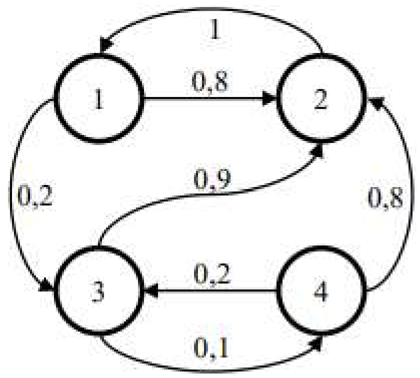

Рисунок 1 – Граф состояний

Для этого графа составим соответствующую матрицу переходов. Она имеет следующий вид:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0,8 & 0,2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,9 & 0 & 0,1 \\ 0 & 0,8 & 0,2 & 0 \end{pmatrix}$$

Задание 1.

Необходимо составить систему линейных уравнений, решением которой будет вектор предельных вероятностей. Из определения

$$\begin{cases} \pi_k & = \sum_i \pi_i p_{ik}, \quad k = 1, \dots, N \\ \sum_k \pi_k & = 1 \end{cases}$$

получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{pmatrix} 0-1 & 0,8 & 0,2 & 0 \\ 1 & 0-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,9 & 0-1 & 0,1 \\ 0 & 0,8 & 0,2 & 0-1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \pi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Отсюда находим требуемый вектор.

Задание 2.

Как уже отмечалось выше, матрица переходов имеет вид:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0,8 & 0,2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,9 & 0 & 0,1 \\ 0 & 0,8 & 0,2 & 0 \end{pmatrix}$$

Чтобы получить вероятности, близкие к предельным, надо возвести матрицу в значительную степень. При вычислении была взята 10000-ая степень матрицы. Вычисления производились в программном пакете Scilab.

Задание 3.

При вычислении вероятностей методом Монте-Карло проводятся многочисленные однотипные эксперименты, целью которых является нахождение состояния после значительного числа шагов. В результате этого мы получаем последовательность случайных величин $\{X_i\}$. Найдем вероятность оказаться в состоянии k:

$$\pi_k = \frac{\sum_{i=1}^{n} P_i}{n}\ ;\ P_i = \begin{cases} 1, & X_i = k \\ 0, & X_i \neq k \end{cases}$$; n – число состояний.

Вектор (π_k) является оценкой предельных вероятностей.

Сами случайные величины можно получить с помощью произвольного построения маршрута в графе состояний, состоящего из большого числа ребер. Большое число необходимо, чтобы избавиться от влияния значения вектора начальных состояний. В программе, реализующей построение, создается 10000 маршрутов по 10000 ребер.

3 Результаты

Методом решения линейного уравнения получаем такой вектор:

$$\pi = \begin{pmatrix} 0{,}4495413 \\ 0{,}4495413 \\ 0{,}0917431 \\ 0{,}0091743 \end{pmatrix}$$

Возведением в 10000-ую степень матрицы переходов получаем:

$$\pi = \begin{pmatrix} 0{,}4495413 \\ 0{,}4495413 \\ 0{,}0917431 \\ 0{,}0091743 \end{pmatrix}$$

Как видим, значения вероятностей получены с высокой точностью.

Применением метода Монте-Карло получаем:

$$\pi = \begin{pmatrix} 0{,}425 \\ 0{,}477 \\ 0{,}09 \\ 0{,}008 \end{pmatrix}$$

В сравнении с двумя другими способами решения метод Монте-Карло является куда менее точным, однако на практике такая точность (2 числа после запятой) может быть приемлема.

Пример результата работы программы представлен на рисунке 2.

```
предельные вероятности состояний данной цепи Маркова:

  0.4495413
  0.4495413
  0.0917431
  0.0091743

распределение вероятностей состояний цепи через достаточно большое количество шагов:

  0.4495413
  0.4495413
  0.0917431
  0.0091743

статистическая оценка вероятностей (через достаточно большое количество шагов) на шаге №1000:

  0.425
  0.477
  0.09
  0.008
```

Рисунок 2 – Пример работы программы