Zadania sobota 01.03.2025

1. Najmniejsza/największa liczba spełniająca nierówność

Zadanie 4. (1pkt) Najmniejszą liczbą całkowitą spełniającą nierówność $2(x-2) \leq 4(x-1)+1$ jest:

A. -2

B. -1

C. 0

D. 1

Odpowiedź Wyjaśnienie

Odpowiedź
C

Wyjaśnienie:
Na samym początku musimy wymnożyć przez siebie poszczególne wartości i rozwiązać tę nierówność:

$$\begin{gathered}2(x-2) \leq 4(x-1)+1 \\ 2x-4 \leq 4x-4+1 \\ 2x-4 \leq 4x-3 \\ -2x-4 \leq -3 \\ -2x \leq 1 \quad \Big/ : (-2) \\ x \geq -\frac{1}{2}\end{gathered}$$

Zwróć uwagę na zmianę znaku w ostatniej linijce! Wynika ona z tego, że wykonywaliśmy dzielenie przez liczbę ujemną.

Musimy teraz określić jaka jest najmniejsza liczba całkowita większa od $-\frac{1}{2}$. Tą liczbą będzie oczywiście 0 i to jest nasza poszukiwana odpowiedź.

2. Ułożenie równania na podstawie polecenia (warunków)

Zadanie 7. (1pkt) Liczby rzeczywiste a, b, c spełniają warunki: $a+b=3$, $b+c=4$ i $c+a=5$. Wtedy suma $a+b+c$ jest równa:

A. 20

B. 6

C. 4

D. 1

Odpowiedź Wyjaśnienie

Odpowiedź
B

Wyjaśnienie:
Z treści zadania wynika, że możemy ułożyć następującą równość:

$$(a+b)+(b+c)+(c+a)=3+4+5$$
$$2a+2b+2c=12$$
$$2\cdot(a+b+c)=12$$
$$a+b+c=6$$

3. Interpretacja układu równań

Zadanie 5. (1pkt) Układ równań $\begin{cases} x-y=3 \\ 2x+0,5y=4 \end{cases}$ opisuje w układzie współrzędnych na płaszczyźnie:

A. zbiór pusty

B. dokładnie jeden punkt

C. dokładnie dwa różne punkty

D. zbiór nieskończony

Odpowiedź Wyjaśnienie

Odpowiedź
B

Wyjaśnienie:
Krok 1. Doprowadzenie równań do postaci $y=ax+b$.
Zadanie brzmi dość skomplikowanie, ale tak naprawdę polega na tym by określić ile punktów wspólnych będą mieć te dwie proste. Aby to określić, potrzebujemy je zapisać w postaci $y=ax+b$.

$$\begin{cases} x-y=3 \quad \Big/ -x \\ 2x+0,5y=4 \quad \Big/ \cdot 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -y=3-x \quad \Big/ \cdot (-1) \\ 2x+0,5y=4 \quad \Big/ \cdot 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=-3+x \\ 4x+y=8 \quad \Big/ -4x \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=x-3 \\ y=-4x+8 \end{cases}$$

Krok 2. Interpretacja otrzymanego wyniku.
Obydwie proste mają różne współczynniki kierunkowe a. Pierwsza ma $a=1$, druga $a=-4$. To oznacza, że te dwie proste mają tylko jeden wspólny punkt przecięcia.

Zadanie 8. (1pkt) Proste o równaniach $2x - 3y = 4$ i $5x - 6y = 7$ przecinają się w punkcie P. Stąd wynika, że:

A. $P = (1, 2)$

B. $P = (-1, 2)$

C. $P = (-1, -2)$

D. $P = (1, -2)$

Odpowiedź
C

Wyjaśnienie:
Aby poznać miejsce przecięcia się dwóch prostych (czyli współrzędne punktu P) należy rozwiązać prosty układ równań:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 4 \quad \Big/ \cdot (-2) \\ 5x - 6y = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4x + 6y = -8 \\ 5x - 6y = 7 \end{cases}$$

Teraz dodajemy to równanie stronami, wszystkie igreki się nam skrócą i otrzymamy dzięki temu wynik: $x = -1$.

Znając współrzędną $x = -1$ możemy ją teraz podstawić do któregoś z równań i w ten oto sposób wyznaczymy współrzędną y:

$$2 \cdot (-1) - 3y = 4$$
$$-2 - 3y = 4$$
$$-3y = 6$$
$$y = -2$$

To oznacza, że $P = (-1; -2)$.

4. Metody rozwiązywania układów równań: przeciwne współczynniki

Zadanie 2. (1pkt) Rozwiązaniem układu równań: $\begin{cases} x+3y=5 \\ 2x-y=3 \end{cases}$ jest:

A. $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$

B. $\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$

C. $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$

D. $\begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases}$

Odpowiedź
A

Wyjaśnienie:
To równanie możemy rozwiązać zarówno metodą podstawiania jak i przeciwnych współczynników. Prościej będzie tutaj chyba użyć tego drugiego sposobu, mnożąc najpierw obie strony drugiego równania przez 3.

$$\begin{cases} x+3y=5 \\ 2x-y=3 \quad \Big/ \cdot 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+3y=5 \\ 6x-3y=9 \end{cases}$$

Dodajemy to równanie stronami i otrzymujemy:

$$7x=14$$
$$x=2$$

Podstawiając wartość $x=2$ do jednego z równań wyznaczymy wartość y:

$$2+3y=5$$
$$3y=3$$
$$y=1$$

Rozwiązaniem jest więc para liczb: $x=2$ oraz $y=1$.

5. Metody rozwiązywania układów równań: podstawianie

$$\begin{cases} x - y = 5 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$$

https://www.matemaks.pl/metoda-podstawiania.html

6. Możliwe rozwiązania: układ z jednym rozwiązaniem (konkretna para liczb)

Zadanie 3. (1pkt) Rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} 3x - 5y = 0 \\ 2x - y = 14 \end{cases}$ jest para liczb (x, y) takich, że:

A. $x < 0$ i $y < 0$

B. $x < 0$ i $y > 0$

C. $x > 0$ i $y < 0$

D. $x > 0$ i $y > 0$

Odpowiedź Wyjaśnienie

Odpowiedź

D

Wyjaśnienie:

Najprostszym sposobem na poznanie odpowiedzi będzie po prostu rozwiązanie tego układu równań. Tu możemy zastosować dowolną metodę, ale najszybciej będzie chyba wymnożyć to drugie równanie przez -5 i zastosować metodę przeciwnych współczynników:

$$\begin{cases} 3x-5y=0 \\ 2x-y=14 \quad \Big/ \cdot(-5) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x-5y=0 \\ -10x+5y=-70 \quad \Big/ \cdot(-5) \end{cases}$$

Teraz dodając równanie stronami otrzymamy:

$$-7x=-70$$
$$x=10$$

Znając wartość $x=10$ możemy podstawić ją do jednego z równań, otrzymując w ten sposób wartość y, zatem:

$$3\cdot 10-5y=0$$
$$30=5y$$
$$y=6$$

Zarówno x jak i y wyszły nam dodatnie, tak więc prawidłowa jest odpowiedź czwarta.

7. Możliwe rozwiązania: układ sprzeczny (brak rozwiązań)

Zadanie 10. (1pkt) Dane jest równanie $3x+4y-5=0$. Z którym z poniższych równań tworzy ono układ sprzeczny?

A. $6x+8y-10=0$

B. $4x-3y+5=0$

C. $9x+12y-10=0$

D. $5x+4y-3=0$

Odpowiedź Wyjaśnienie

Odpowiedź

C

Wyjaśnienie:

Układ jest sprzeczny, kiedy po rozwiązaniu układu otrzymamy nieprawdziwą równość np. $1=2$. Równanie z treści zadania stworzy sprzeczny układ jedynie z trzecim równaniem:

$$\begin{cases} 3x+4y-5=0 \quad \Big/ \cdot 3 \\ 9x+12y-10=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9x+12y-15=0 \\ 9x+12y-10=0 \end{cases}$$

Odejmując te równania stronami otrzymamy:

$$\begin{gathered} -15-(-10)=0 \\ -15+10=0 \\ -5=0 \end{gathered}$$

Otrzymany wynik świadczy o sprzeczności układu.

Warto też dodać, że nasze równanie stworzyłoby z równaniem z pierwszej odpowiedzi układ tożsamościowy, czyli taki w którym rozwiązaniem będzie każda liczba rzeczywista.

8. Możliwe rozwiązania: układ o nieskończonej ilości rozwiązań

Zadanie 1. (1pkt) Układ równań $\begin{cases} 4x + 2y = 10 \\ 6x + ay = 15 \end{cases}$ ma nieskończenie wiele rozwiązań, jeśli:

A. $a = -1$

B. $a = 0$

C. $a = 2$

D. $a = 3$

Odpowiedź Wyjaśnienie

Odpowiedź
D

Wyjaśnienie:
Aby układ równań miał nieskończenie wiele rozwiązań to pierwsze i drugie równanie musimy doprowadzić do identycznej postaci, dzięki czemu bez problemu wyznaczymy parametr a:

$$\begin{cases} 4x + 2y = 10 \quad \Big/ \cdot 1,5 \\ 6x + ay = 15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x + \color{blue}{3y} = 15 \\ 6x + \color{blue}{ay} = 15 \end{cases}$$

Skoro w pierwszym równaniu pojawiła nam się wartość $3y$, to parametr a w drugim równaniu także musi być równy 3.

9. Rozwiązywanie na krzyż

Zadanie 8. (1pkt) Równość $\frac{m}{5-\sqrt{5}}=\frac{5+\sqrt{5}}{5}$ zachodzi dla:

A. $m=5$

B. $m=4$

C. $m=1$

D. $m=-5$

Odpowiedź Wyjaśnienie

Odpowiedź
B

Wyjaśnienie:
Najprościej jest rozwiązać to zadanie wykonując tzw. mnożenie na krzyż, zwłaszcza że będziemy mogli zastosować tutaj wzory skróconego mnożenia.

$$5\cdot m=(5-\sqrt{5})\cdot(5+\sqrt{5})$$
$$5m=5^2-(\sqrt{5})^2$$
$$5m=25-5$$
$$5m=20$$
$$m=4$$

10. Przyrównywanie do zera (wykluczanie rozwiązań z mianownika)

Zadanie 6. (1pkt) Równanie $\frac{x(x+5)(2-x)}{2x+4}=0$ w zbiorze liczb rzeczywistych ma dokładnie:

A. dwa rozwiązania: (-5) oraz 2

B. dwa rozwiązania: (-5) oraz 0

C. trzy rozwiązania: (-5), 0 oraz 2

D. cztery rozwiązania: (-5), (-2), 0 oraz 2

Odpowiedź
C

Wyjaśnienie:
Krok 1. Zapisanie założeń.
Mamy równanie wymierne, czyli takie, w którego mianowniku znalazła się niewiadoma x. W związku z tym, iż na matematyce nie istnieje dzielenie przez zero, to wartość mianownika musi być różna od zera, stąd też:

$$2x+4\neq0$$
$$2x\neq-4$$
$$x\neq-2$$

Krok 2. Rozwiązanie równania.
Teraz możemy przystąpić do rozwiązywania, a całość zaczynamy od standardowego wymnożenia obydwu stron przez wartość w mianowniku, zatem:

$$\frac{x(x+5)(2-x)}{2x+4}=0 \quad \Big/ \cdot(2x+4)$$
$$x(x+5)(2-x)=0$$

Otrzymaliśmy postać iloczynową. Aby wartość wyrażenia po lewej stronie była równa zero, to albo to co stoi przed nawiasem jest równe zero, albo któryś z nawiasów jest równy zero, zatem:

$$x=0 \quad \lor \quad x+5=0 \quad \lor \quad 2-x=0$$
$$x=0 \quad \lor \quad x=-5 \quad \lor \quad x=2$$

Krok 3. Weryfikacja otrzymanych wyników.
Otrzymane wyniki musimy jeszcze zweryfikować z zapisanymi na początku założeniami. Okazuje się, że żadnego z rozwiązań nie musimy odrzucić, bo żadne nie jest równe -2, stąd też możemy stwierdzić, że nasze równanie ma trzy rozwiązania: (-5), 0 oraz 2.

11. Układanie układów równań z treści

Zadanie 10. (1pkt) W październiku 2022 roku założono dwa sady, w których posadzono łącznie 1960 drzew. Po roku stwierdzono, że uschło 5% drzew w pierwszym sadzie i 10% drzew w drugim sadzie. Uschnięte drzewa usunięto, a nowych nie dosadzano. Liczba drzew, które pozostały w drugim sadzie, stanowiła 60% liczby drzew, które pozostały w pierwszym sadzie. Niech x oraz y oznaczają liczby drzew posadzonych – odpowiednio – w pierwszym i drugim sadzie.

Układem równań, którego poprawne rozwiązanie prowadzi do obliczenia liczby x drzew posadzonych w pierwszym sadzie oraz liczby y drzew posadzonych w drugim sadzie, jest

A. $\begin{cases} x+y=1960 \\ 0,6\cdot 0,95x=0,9y \end{cases}$

B. $\begin{cases} x+y=1960 \\ 0,95x=0,6\cdot 0,9y \end{cases}$

C. $\begin{cases} x+y=1960 \\ 0,05x=0,6\cdot 0,1y \end{cases}$

D. $\begin{cases} x+y=1960 \\ 0,4\cdot 0,95x=0,9y \end{cases}$

Odpowiedź Wyjaśnienie

Odpowiedź
A

Wyjaśnienie:
Pierwsze równanie jest dość oczywiste i powtarza się w każdej proponowanej odpowiedzi, a będzie to $x+y=1960$. Trudność tego zadania opiera się zatem na poprawnym zapisaniu drugiego równania.

Jeśli uschło 5% drzew w pierwszym sadzie, to zostało tam $0,95x$ drzew. W drugim sadzie uschło 10%, zatem zostało tam $0,9y$. Z treści zadania wynika także, że liczba drzew z drugiego sadu stanowi 60% tych z sadu pierwszego, czyli możemy zapisać, że $0,6\cdot 0,95x=0,9y$. To oznacza, że poprawny jest pierwszy układ równań.