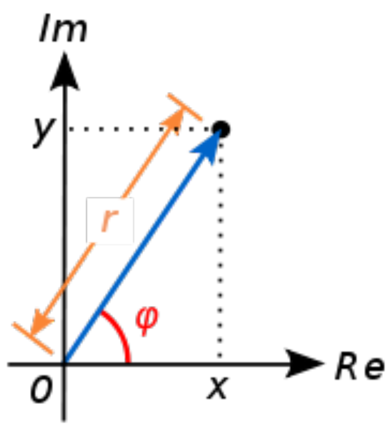
Números complejos

Un número complejo es un número de la forma $a + bi$, en donde a y b son números reales, llamados **parte real** y **parte imaginaria** respectivamente, e $\boldsymbol{i}$ es la **unidad imaginaria** que se define como $i = \sqrt{-1}$.
El conjunto de números complejos $C = \{a + bi|a, b \in R\}$ es necesario para poder calcular las raíces pares de números negativos.
Los números complejos con parte imaginaria nula, es decir : $a + bi \; con \; b \neq 0$, se llaman **números imaginarios**, y si además la parte real es nula, es decir : $a = 0$, son de la forma bi, se llaman **números imaginarios puros.**

Formas de representación



Representación cartesiana -Argand- : $r = a+bi$, *siendo* $|r| = \sqrt{a^2+b^2}$;

$\varphi = arctang\left(\frac{b}{a}\right)$; $a = |r|cos\varphi$; $b = |r|sen\varphi$

Representación trigonométrica: $r = a+bi$; $r = |r|(cos\varphi + isen\varphi)$

Representación polar, o de Steinmetz, o moduloargumental: $r = |r|\angle\varphi$

Representación exponencial: $r = a+bi$, $r = |r|e^{i\varphi}$;

siendo: $|r|$ = *módulo*, φ = *fase o argumento.*

Relación de Euler: $e^{\pm i\varphi} = cos\varphi \pm isen\varphi$

Operaciones con números complejos

Suma:

Sean $Z_1 = a_1 + b_1 i$, $Z_2 = a_2 + b_2 i$, $Z_1 + Z_2 = (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$.

Producto:

$Z_1 \cdot Z_2 = (a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 + b_1 b_2 i^2 + a_1 b_2 i + b_1 a_2 i = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2)i$ Siendo $i^2 = -1$

El producto es más sencillo si utilizamos la representación polar.
$Z_1 \cdot Z_2 = (a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) = (|Z_1|e^{i\varphi 1})(|Z_2|e^{i\varphi 2}) = |Z_1| \cdot |Z_2| e^{i(\varphi 2 - \varphi 1)}$

Otra forma de representar el producto es:

$$\gamma_\varphi \cdot \gamma'_{\varphi'} = \gamma \cdot \gamma' \angle \varphi + \varphi'$$

Tanto la suma como el producto tienen las mismas propiedades asociativa, conmutativa y distributiva que las operaciones equivalentes con los números reales.

División:

$\frac{\gamma_\varphi}{\gamma'_{\varphi'}} = \frac{\gamma}{\gamma'} \angle \varphi - \varphi'$ o También $\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1\, e^{j\phi_1}}{r_2 e^{j\phi\, 2}} = \frac{r_1}{r_2}\, e^{j(\phi_1 - \phi_2)}$

Potenciación:

$(\gamma_\varphi)^8 = \gamma^8 \angle \varphi \cdot 8$ y en forma trigonométrica sería: $[m(\cos\theta + j\mathrm{sen}\theta)]^8 =$
$= m^8 (\cos 8\theta + \mathrm{sen} 8\theta)$

Conjugación :

El conjugado de un complejo $Z = (a + bi)$, es $Z^* = (a + bi)^* = (a - bi)$, $Z^* = |Z|e^{-i\varphi}$ es decir la conjugación cambia el signo de la parte imaginaria y de la fase, mientras mantiene inalteradas la parte real y el módulo del número. En cunto al conjugado de suma y producto: $(Z_1 + Z_2)^* = Z_1^* + Z_2^*$, y $(Z_1 \cdot Z_2)^* = Z_1^* \cdot Z_2^*$

Producto de un número por su conjugado:
$Z^* \cdot Z = Z \cdot Z^* = a^2 + b^2 = |Z|^2$, es siempre un número real y no se ha de confundir con el cuadrado ordinario. $Z^2 = (a + bi)^2 = (a^2 - b^2) + 2abi$, que es un número complejo.

Ejemplos de representaciones de ondas:
Movimiento armónico simple: $X(t) = X_0\, e^{i(\omega t + \phi)}$, done X_0 es la amplitud, $\omega = 2\pi\nu$ la frecuencia angular y ϕ la fase.
Radiación electromagnética y campo magnético:
$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E_0}\, e^{i\,(wt \pm \vec{k}\, \vec{r}\,)}$ y $\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B_0}\, e^{i\,(wt \pm \vec{k}\, \vec{r}\,)}$
donde r representa un punto del espacio, $K = (2\pi\, /\lambda)\bar{u}_K$ vector de ondas, y λ la longitud de onda.

Ejemplos :

$Z_1 = 5 - 2j$, $Z_2 = -3 - 8j$; $Z_1 + Z_2 = (5-3) + (-2 - 8)j = 2 - 10j$

$Z_2 - Z_1 = (-3 - 5) + (-8 + 2)j = -8 - 6j$

$Z_1 \cdot Z_2 = (r_1 e^{j\theta 1}) \cdot (r_2 e^{j\theta 2}) = r_1 . r_2 \cdot e^{j\cdot(\theta 1 + \theta 2)}$

$Z_1 \cdot Z_2 = (r_1 \angle \theta 1)\ (r_2 \angle \theta 2) = r_1 \cdot r_2\ \angle \theta 1 + \theta 2$

$Z_1 = (x_1 + jy_1)$ y $Z_2 = (x_2 + jy_2)$ el producto según los componentes sería:

$Z_1 Z_2 = x_1\, x_2 + x_1\, y_2 . j + x_2\, y_1 \cdot j + y_1\, y_2 \cdot j^2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_2) \cdot j$

$Z_1 = 5e^{j\frac{\Pi}{3}}$ y $Z_2 = 2e^{-j\frac{\Pi}{6}}$; $Z_1 \cdot Z_2 = (5e^{j\frac{\Pi}{3}})(\,2e^{-j\frac{\Pi}{6}}) = 10e^{j\frac{\Pi}{6}}$

$Z_1 = 2\angle 30^0$ y $Z_2 = 5\angle{-45^0}$; $Z_1 \cdot Z_2 = (2\angle 30^0)(\,5\angle{-45^0}) = 10\angle{-15^0}$

$Z_1 = 2 + 3j$ y $Z_2 = -1 - 3j$; $Z_1 \cdot Z_2 = (2 + 3j)(-1 - 3j) = 7 - 9j$

$Z_1 = (x_1 + jy_1)$ y $Z_2 = (x_2 + jy_2)$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{x_1 + jy_1}{x_2 + jy_2} \cdot \frac{x_2 - jy_2}{x_2 - jy_2} = \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + j(y_1 x_2 - y_2 x_1)}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + j\frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{x_2^2 + y_2^2}$$

$$Z_1 = 4 - 5j, \quad Z_2 = 1 + 2j; \quad \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{(4-5j)(1 \ -2j)}{(1 + 2j)(1 - 2j)} = -\frac{6}{5} - \frac{13}{5}j$$

$Z_1 = 4e^{j\frac{\Pi}{3}}$ y $Z_2 = 2e^{-j\frac{\Pi}{6}}$;

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{4e^{j\frac{\pi}{3}}}{2e^{j\frac{\pi}{6}}} = 2e^{j\frac{\pi}{6}}$$

$$Z_1 = 8\ \angle{-30^0}, \quad Z_2 = 2\angle{-60^0}; \quad \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{8\angle{-30^0}}{2\angle{-60^0}} = 4\angle 30^0$$

Poner en forma polar: a) 5 + 7i, b) -2 + 8i, c) -4 -3i, d) 4-i

a) $\sqrt{5^2 + 7^2} = \sqrt{25 + 49} = \sqrt{74} = 8{,}6$; φ = arc.tang.$\frac{7}{5}$ = $54{,}46^0$ ⟶ $8{,}6 \angle 54{,}46^0$

b) $\sqrt{(-2)^2 + 8^2} = \sqrt{4 + 64} = \sqrt{68} = 8{,}24$; φ = arc.tang.$\frac{8}{-2}$ = $-75{,}26^0$ ⟶ $8{,}24\angle -75{,}96^0$

c) $\sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5$; φ = arc.tang.$\frac{-3}{-4}$ = $36{,}87^0$ ⟶ $5 \angle -143{,}13^0$

d) $\sqrt{4^2 + (-1)^2} = \sqrt{17} = 4{,}12$; φ = arc.tang.$\frac{-1}{4}$ = -14^0 ⟶ $4{,}12 \angle -14^0$

Poner en forma cartesiana " a + bi " las expresiones siguientes:

a) 10 $\angle 35^0$, b) 9,5 $\angle 135^0$, c) 18,2 $\angle -90^0$, d) 67 $\angle -20^0$

a) 10 cos35 + 10 sen35 = 8,2 + 5,7i

b) 9,5 cos135 + 9,5 sen135 = -0,7 + 0,7i

c) 18,2 cos-90 + 18,2 sen-90 = - 18,2i

d) 67 cos-20 + 67 sen-20 = 62,9 - 22,9i

Calcular:

a) (-6 – 5i)(8 – i), b) 18,3 $\angle 229$ x 6,7 $\angle -20$, c) (5+6i)/(-5-3i),
d) $(17{,}5\angle 531^0)/(16{,}7\angle -20)$, e) (12 + 2i)/(i(6+7i)(4-3i)).

a) (-6 – 5i)(8 – i) = -48-34i-5 = -53 – 34i ; M=$\sqrt{53^2+34^2}$ = $\sqrt{2809+1156}$ = $\sqrt{3965}$ = 62.97; $\varphi = arctang.\frac{34}{53} = 32{,}68$

b) 18,3x6,7 $\angle 229-20$ = 305,61 $\angle 205$

c) (5+6i)/(-5-3i) = $\frac{(5+6i)(-5+3i)}{(-5-3i)(-5+3i)} = \frac{-43-15i}{25+9} = -\frac{43}{34} - \frac{15i}{34}$ = -1,2647 – 0,441i
M=$\sqrt{(-1{,}26)^2+(-0{,}44)^2} = \sqrt{1{,}794}$ = 1,34
$\varphi = arctang.\frac{0{,}441}{1{,}2647}$ = -19,22; φ = 160,78^0

d) 17,5/16,7 $\angle 531+20$ = 0,8$\angle$551

e) (12+2i)/(i(24+10i+21) = (12+2i)/(-10+45i) =
((12+2)(-10-45i) / ((-10+45i)(-10-45i)) = ((12+2i)(-10-45i)) / (100+45^2)
= (-30-560i) / 2125 = -0,0001988 - 0,069169i = 0,263 $\angle$266,93^0

Dados los números complejos A= 4 + 3i , y B = -5 -10i ; calcular: a) A+B, b) A-B, c) A*B, d) A/B, e) A^2, f) $\sqrt{B}$.

a) (4-5) + (3-10)i = (-1 – 7i) = 7, 7 $\angle$-98,13^0

b) (4 + 3i) - (-5 -10i) = (4 + 5) + (3 + 10)i = (9 + 13i) = 15,81$\angle$55,3^0

c) (4 + 3i)·(-5 -10i) = 10-55i = 55,9$\angle$-79,69^0

d) $\frac{4+3i}{-5-10i}$ = 0,4 + 0,2i = 0,447 $\angle$153,4^0

e) $(4 + 3i)^2$ = 7 + 24i = 25$\angle$73,74^0

f) (-5 -10i) = 11,18 $\angle$63,44; $\sqrt{(-5-10i)} = \sqrt{11{,}18}\angle\frac{63{,}44}{2}$ = 3,34$\angle$31,72^0
= 3,34$\angle$-58,28^0

Calcular:

1) $\frac{(2+3i)(6-3i)}{(10+5i)} = \frac{12+18i-6i-9i^2}{(10+5i)} = \frac{(12+12i-9(-1)}{(10+5i)} = \frac{21+12i}{(10+5i)} = \frac{(21+12i)(10-5i)}{(10+5i)(10-5i)} =$
$\frac{210+120i-105i-60i^2}{(100+25)} = \frac{270+15i}{125} = \frac{270}{125} + \frac{15}{125}\ i = \frac{54}{25} + \frac{3}{125} i$

M = $\sqrt{(\frac{54}{25})^2 + (\frac{3}{25})^2} = \sqrt{\frac{2925}{625}}$ = 2,16; $\varphi = arctang.\frac{3/_{25}}{54/_{25}} = 3^0 12'$

R = 2,16 ($\cos 3^0 12'$ + i $\text{sen} 3^0 12'$)

2) $\frac{(2+i)}{(1-5i)}(3+6i) = \frac{6+3i+12i+6i^2}{(1-5i)} = \frac{15i}{(1-5i)} = \frac{15i(1+5i)}{(1-5i)(1+5i)} = \frac{-75+15i}{26} = \frac{-75}{26} + \frac{15}{26} i$

M = $\sqrt{(\frac{-75}{26})^2 + (\frac{15}{26})^2} = \frac{\sqrt{2850}}{26}$ = 2,93. ; $\varphi = arctang. -0{,}2 = -11^0 19'$;

φ' = $179^0 60' - 11^0 19' = 168^0\ 41'$; R= 2'93(cos168^0 41' + i sen168^0 41')

3) (1+i) - (3-i) + (-2+i) = (-4 + 3i); M = $\sqrt{25}$ = 5; $\varphi = arctang.\frac{3}{-4}$ = -$36^0 52'$

φ' = 179^0 60' - -$36^0$52' = $143^0$8'; R = 5(cos$143^0$8' +i sen$143^0$8')

4) Pasar a forma trigonométrica (1 + $\sqrt{3}$ i)

M= $\sqrt{1+3}$ = 2; $\varphi = arctang.\frac{\sqrt{3}}{1} = 60^0$; (1 + $\sqrt{3}$ i) = 2(cos60^0 + isen60^0)

5) Pasar a forma trigonométrica a) (3+2i) + (3-2i), b) (6-2i)(-6+2i), c) $\frac{3+5i}{1+i}$.
d) $\frac{8+6i}{2-3i}$,

a) (3+2i) + (3-2i) =(3+3) + (2-2)i = 6

b) (6-2i)(-6+2i) = -36 + 12i +12i -4i² = -32 + 24i ; $\varphi = arctang.\frac{24}{-32} =$
$arctang.\frac{-3}{4}$ = -37^0 ; φ= 180-37 = 143^0
M = $\sqrt{-32^2 + 24^2}$ = 39; (6-2i)(-6+2i) = 39(cos143^0 + i sen143^0)

c) $\frac{3+5i}{1+i} = \frac{(3+5i)(1-i)}{(1+i)} = \frac{3+5i-3i-5i^2}{1+1} = \frac{8+2i}{2} =$ 4 + i; M=$\sqrt{17} = 4{,}12$; $\varphi = arctang.\frac{1}{4}$
= 0,25; φ = 14^0; $\frac{3+5i}{1+i}$ = 4(cos14^0 + sen14^0)

d) $\frac{8+6i}{2-3i}$; primero (8+6i), M = $\sqrt{64+36} = \sqrt{100} = 10$; y $\varphi = arctang.\frac{6}{8} =$
37^0 y
el denominador, 2-3i ⇛ M= $\sqrt{13}$ = 3,75 y $\varphi = arctang.\frac{-3}{2} = -57$ ⇛
φ' =360-57= 303^0 ⇛ $\frac{8+6i}{2-3i} = \frac{10(cos 37^0 + i\ sen 37^0)}{3{,}75(Cos 303^0 + sen 303^0)} = \frac{10_{37}}{3{,}75_{303}} = \frac{10}{3{,}75}\angle{-266^0}$

6) Resolver : a)$(8+3i)^8$, b) $(8+7i)^6$, c) $\sqrt[6]{8+7i}$,

a) M = $\sqrt{64+9} = \sqrt{73}$; $\varphi = arctang.\frac{3}{8} = 20^0$;
$(8+3i)^8$ = 73^4(Cos8·20^0 +i Sen8·20^0) = 73^4(Cos160^0 +i Sen160^0)

Apm1451@outlook.com

b) M = $\sqrt{64+49} = \sqrt{113}$ = 10,63. $\varphi = arctang.\frac{7}{8} =$ 41^0; $(8+7i)^6$ = 10,63^6[Cos(6·41^0) +i Sen(6·41^0)]

c) $\sqrt[6]{8+7i}$ = $\sqrt[12]{(8+7i)^6}$ = $\sqrt[12]{10{,}63^6(Cos246^0 \ + \text{i Sen}246^0)}$ =

$\sqrt[12]{113}$ (Cos$\frac{41}{6}$ +i Sen$\frac{41}{6}$).

7) Pasar a forma polar: a) $\frac{(1-10i)}{(1-i)}$, b) $\frac{7_{45}}{(2+3i)}$

a) $\frac{(1-10i)}{(1-i)}$ = $\frac{(1-10i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}$ = $\frac{(11-9i)}{2}$; M =$\sqrt{11{,}5^2 + 4{,}5^2}$ = 7,1; $\varphi = arctang.\frac{-9}{11}$ = 39^{0}16$'$; 359^{0}60$'$ - 39^{0}16$'$ = 320^{0}44$'$ ⇛ $\frac{(1-10i)}{(1-i)}$ = 7,1 $\angle 320^0 44'$

b) $\frac{7_{45}}{(2+3i)}$; En el denominador M = $\sqrt{13}$; $\varphi = arctang.\frac{3}{2}$ = $56^0 19'$ ⇛ $\frac{7_{45}}{\sqrt{13}\angle 56^0 19'}$ ⇛ $\frac{7\sqrt{13}}{13}$(-0,98 -0,16i) = $\left(-\frac{28{,}72}{13} - i\,\frac{4{,}2}{13}\right)$

Apm1451@outlook.com