

*Metodi di fluidodinamica computazionale CFD per
una turbomacchina*

Alberto Scomparin

11 febbraio 2018

Indice

<i>Introduzione</i>	3
<i>Geometria del campo di moto</i>	4
<i>Semplificazione del dominio</i>	4
<i>Nomenclatura</i>	5
<i>Implementazione del dominio</i>	5
<i>Legge del campo di moto</i>	7
<i>Metodo delle Differenze Divise</i>	9
<i>Discretizzazione del dominio</i>	9
<i>Derivata con notazione in serie di Taylor</i>	9
<i>Legge del moto con differenze divise</i>	10
<i>Individuazione dei nodi</i>	11
<i>Individuazione dei nodi adiacenti ad ogni nodo</i>	11
<i>Individuazione parametri di deformazione λ</i>	12
<i>Linea di corrente</i>	12
<i>Miglioramenti possibili futuri</i>	12
<i>Metodo degli Elementi Finiti</i>	13
<i>Equazione integrale</i>	13
<i>Interpolazione della funzione incognita nel dominio</i>	13
<i>Suddivisione del dominio nell'algoritmo</i>	14
<i>Applicazione del teorema di Green</i>	14
<i>Scelta della funzione di test</i>	15
<i>Contributi al contorno</i>	16
<i>Introduzione coefficiente riassuntivo $a_{h,k}$</i>	16
<i>Sistema lineare</i>	18
<i>Linea di corrente</i>	20
<i>Risultati e confronti tra i metodi</i>	21

Introduzione

In questa relazione viene descritta la parte teorica e una possibile implementazione in linguaggio Matlab del Metodo alle Differenze Finite FDM e del Metodo degli Elementi Finiti FEM per lo studio del campo di moto interno ad una turbomacchina.

Il fluido che scorre in una turbomacchina¹ è un esempio di fluidodinamica *interna*: alcune delle condizioni al contorno del campo di moto sono date dall'impenetrabilità delle pareti del condotto; il sistema risulta complessivamente chiuso, eccetto per entrata ed uscita del fluido.

Finite Difference Method
Finite Element Method

¹ **turbomàccina** s. f. (comp. di turbo- e macchina). – Macchina motrice o operatrice a fluido, caratterizzata dalla presenza di una ruota mobile calettata sull'albero della turbina e munita alla periferia di pale che hanno la funzione di ricevere energia da un fluido motore per trasmetterla all'albero (turbomotrici), o anche quella di trasmettere energia a un fluido, utilizzando il lavoro meccanico che un motore fornisce all'albero della turbina (turbooperatrici).

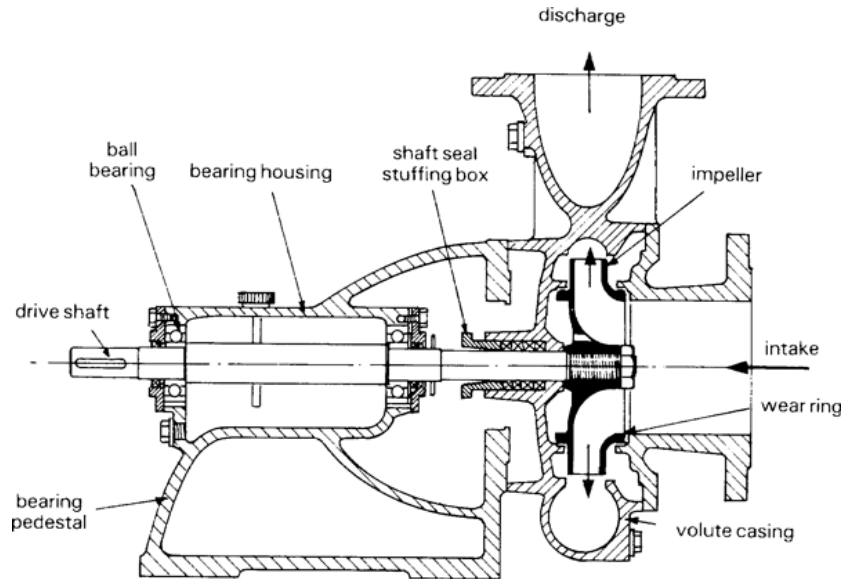
Geometria del campo di moto

Semplificazione del dominio

La turbomacchina presa in esame è una pompa. Essa viene inizialmente modellata come un corpo tridimensionale: il dominio del campo di moto è la porzione di volume compresa all'interno della girante². Il fluido per una pompa è un liquido, considerato incompressibile.

² Elemento rotante collegato all'albero motore, in inglese *impeller*

Figura 1: Sezione di una pompa. La parte evidenziata in nero è la girante



Le pale della girante mettono in moto il liquido, ma non vengono considerate nel dominio di riferimento. Vi sono vari modelli di pompe (e giranti) esistenti: in genere una variante del modello in figura.

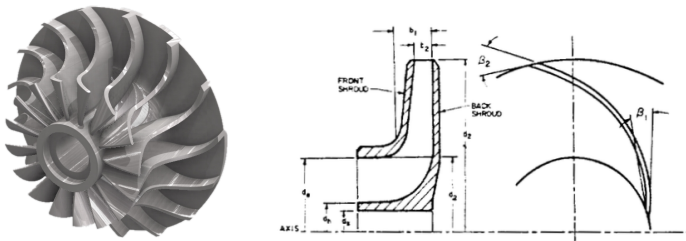


Figura 2: Sinistra: Modello CAD 3D di una girante. Destra: Sezione laterale di una girante, presa da [HuzHua1971]. Si nota da subito la simmetria

Con una tale geometria il liquido entra in direzione assiale³ ed esce in direzione radiale⁴, rispettivamente su tutta la superficie di entrata ed uscita. Per informazioni sulla motivazione di tali imposizioni si rimanda al brevetto⁵.

³ $v_r = 0$

⁴ $v_z = 0$, se il condotto di uscita è sufficientemente lungo

⁵ Ferdinand P. Sollinger, 1945 *Centrifugal compressor entry vane* US2384265

Siccome il fluido può soltanto entrare ed uscire attraverso le superfici menzionate, la portata entrante ed uscente rimangono costanti e la *continuità*⁶ del fluido è assicurata.

Una simmetria si manifesta lungo l'asse dell'albero motore: il campo fluido è analizzabile sezionando il dominio con un semipiano generato a partire dall'asse di simmetria. Ogni proprietà e geometria dei punti del dominio risultano identiche⁷ per qualsiasi angolo θ .

Ci si pone allora in un sistema di riferimento cilindrico: scelto un angolo θ arbitrario di sezione, il semipiano risultante è il dominio da studiare divenuto bidimensionale in coordinate assiali z e radiali r . L'ultima semplificazione impone l'origine del sistema di riferimento nel punto dell'asse di simmetria all'entrata della girante: il dominio è un solo quadrante⁸.

Nomenclatura

Conviene stabilire una nomenclatura per ogni parte del dominio di cui si conoscono le proprietà.

Il *mozzo* ha come parete la superficie di rotazione indicata in blu. Il mozzo è la porzione della girante calettata all'albero motore; essendo una parete è considerata impenetrabile per il fluido.

La *corona* ha come parete la superficie di rotazione indicata in arancione. La corona è l'involucro che richiude la girante; impone al fluido la stessa condizione del mozzo, con opportuno verso.

L'*entrata* è la superficie - corona circolare - indicata in verde dove entra il fluido; la velocità entrante è completamente assiale.

L'*uscita* è la superficie - laterale di un cilindro - dove esce il fluido, la velocità è completamente radiale se le pareti di mozzo e corona sono perpendicolari all'asse di rotazione.

Anche se mozzo e corona rappresentano componenti reali tridimensionali della girante si indica d'ora in poi come mozzo e corona le curve della figura 3 con i rispettivi colori. Ci si può ora liberare della complicata trattazione tridimensionale concentrandosi sull'applicazione delle equazioni che regolano il moto del fluido al dominio bidimensionale compreso tra i segmenti di entrata e uscita e le curve di mozzo e corona.

Implementazione del dominio

Per implementare le equazioni del fluido è necessario avere una parametrizzazione del dominio. Le dimensioni del dominio sono date dai parametri costruttivi della girante.

Sarebbero sufficienti otto dati iniziali dai quali si ricaverebbero in seguito i dodici⁹ forniti in laboratorio.

⁶ $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$, per fluido incompressibile

⁷ $\frac{\partial}{\partial \theta} = 0 \quad \forall f(\mathbf{P}), \quad \mathbf{P} = (z, r, r\theta)$

⁸ $z \geq 0, r \geq 0$

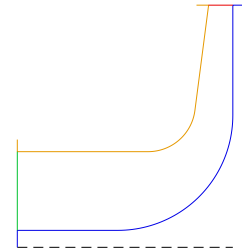


Figura 3: I colori indicano le superfici sezionate

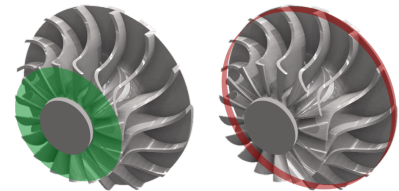


Figura 4: La geometria delle superfici di entrata e uscita è evidente

⁹ Sei punti a due coordinate ciascuno

A partire da queste coordinate la geometria del profilo si adatta al variare dei parametri costruttivi.

Tali parametri iniziali potrebbero essere:

1. Distanza dall'asse dell'entrata
2. Lunghezza radiale dell'entrata
3. Lunghezza assiale della girante
4. Distanza dall'asse dell'uscita
5. Lunghezza assiale dell'uscita
6. Angolo uscita della corona
7. Raggio di curvatura del mozzo
8. Raggio di curvatura della corona

Si suppone che la geometria sia quella di figura 2, con l'angolo di uscita del mozzo ortogonale all'asse di rotazione. Si individuano i punti blu in figura 5: i passaggi sono piuttosto semplici e per semplicità si assumono direttamente note le coordinate dei punti.

L'ascissa del punto all'entrata del mozzo, da cui si inizia a ricavare il resto dei punti, è arbitraria e si pone uguale a 10^{10} . Altri punti notevoli sono quelli di inizio e fine curvatura di mozzo e corona

Il punto di tangenza nella corona tra la curvatura e l'uscita rappresenta la complicazione maggiore per questa parte dell'implementazione. Vi sono varie metodologie per individuarlo: si può risolvere un sistema tra il fascio di rette passanti per il punto all'uscita della corona e la circonferenza contenente la curvatura della corona. In questa trattazione si sfruttano proprietà della geometria del dominio.

La parte fin'ora esposta è comune a entrambe le implementazioni. I punti salvati nei vettori z_{Dominio} e r_{Dominio} servono per disegnare facilmente il dominio del campo di moto. Tali punti non forniscono precisamente la forma del campo in quanto sono discretizzazioni sufficienti a semplificare l'immagine di una curva all'occhio.

Nel Metodo delle Differenze Divise la frontiera del dominio viene spezzata in funzioni definite a tratti per discretizzare il dominio: all'occorrenza la funzione definita fornisce $z = f_1(r)$, $r = f_2(z)$.

Nel Metodo degli Elementi Finiti la frontiera viene parametrizzata invece come curva definita a tratti con ascissa curvilinea.

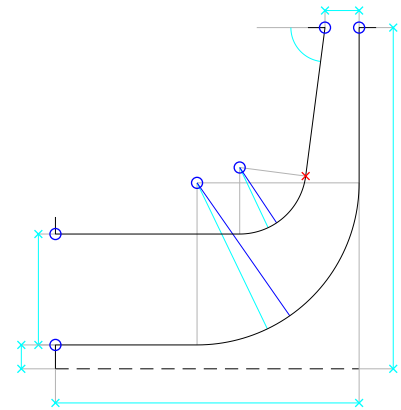


Figura 5: In laboratorio vengono gentilmente fornite dal prof. Navarro le coordinate indicate in blu. Nell'implementazione sono richieste le coordinate dei punti in blu come dati iniziali

¹⁰ Seguendo i dati forniti dal professore. Si può comunque considerare nulla e il risultato rimane inalterato

Legge del campo di moto

La legge che regola il campo di moto è sostanzialmente espressa dalle equazioni di continuità¹¹ e di rotazionalità. Dato che la pompa viene impiegata per dei liquidi, il fluido si può supporre incomprimibile e l'equazione di continuità diviene la seguente, accompagnata dalla rotazionalità del campo fluido:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{v} = (v_r, v_\theta, v_z) \quad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega}, \quad \boldsymbol{\omega} = (\Omega_r, \Omega_\theta, \Omega_z) \quad (2)$$

che in coordinate cilindriche¹² diventano:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(r \cdot v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

$$\left[\frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right] \cdot \hat{\mathbf{i}}_r + \left[\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} \right] \cdot \hat{\mathbf{i}}_\theta + \left[\frac{1}{r} \frac{\partial(r \cdot v_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \cdot \hat{\mathbf{i}}_z = \boldsymbol{\omega}$$

Per simmetria assiale si riducono a:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(r \cdot v_r)}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} = \Omega_\theta \quad (4)$$

Esse saranno il nucleo dell'equazione del moto che regola il campo fluido nel dominio. Per esaminare facilmente il campo viene introdotta una funzione di corrente ψ , definita per un sistema di riferimento assial-simmetrico nel piano meridiano come funzione di corrente di Stokes, dalla quale si ricava successivamente in ogni punto del campo i valori di velocità $v(z, r)$ e pressione $p(z, r)$.

L'equazione 3 si può esplicitare, con la derivata del prodotto, per la derivata parziale della velocità in r o si può con essa evidenziare l'uguaglianza delle derivate parziali:

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial(r \cdot v_z)}{\partial z} = \frac{\partial(-r \cdot v_r)}{\partial r} \quad (5)$$

La seconda delle precedenti esprime il fatto che la forma differenziale così definita:

$$d\psi = (-r \cdot v_r)dz + (r \cdot v_z)dr \quad (6)$$

è esatta¹³. Questa si può scrivere anche come:

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial z} dz + \frac{\partial \psi}{\partial r} dr$$

Dove dunque ψ è una funzione potenziale della forma differenziale. Dalle due espressioni si ricavano le seguenti uguaglianze che legano velocità radiale e assiale alla funzione ψ :

$$v_z = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad v_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad (7)$$

¹¹ $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0$

¹² Anderson J. D., *Fundamentals of Aerodynamics*, cap. 2

¹³ Una forma differenziale si dice esatta se in un dominio semplicemente connesso le sue derivate in croce sono uguali tra loro

Preso un punto arbitrario O , che verrà considerato fisso, all'interno del dominio nel piano meridiano e un altro P che si collega al primo con una curva semplice γ , la funzione ψ si definisce perciò come:

$$\psi_P - \psi_O = \int_{\gamma} d\psi = \int_{\gamma} (-r \cdot v_r) dz + (r \cdot v_z) dr$$

Raccogliendo il prodotto scalare, si ottiene:

$$\int_{\gamma} (-r \cdot v_r) dz + (r \cdot v_z) dr = \int_{\gamma} r \cdot (v_z, v_r) \cdot (dr, -dz) = \int_{\gamma} r \cdot \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds$$

L'ultimo membro dell'equazione fornisce il senso fisico della funzione ψ : la portata di volume che attraversa la superficie aperta di rotazione della curva γ arbitraria attorno all'asse di simmetria è data esattamente da 2π volte quel membro¹⁴.

La funzione di corrente ψ rappresenta quindi sia il potenziale della forma differenziale data dall'equazione di continuità, sia la portata passante per la superficie di rotazione; la sua relazione con il vettore velocità \mathbf{v} può essere riassunta nella formula della *funzione di corrente di Stokes*:

$$\mathbf{v} = \nabla \times \frac{\psi}{r} \cdot \hat{\mathbf{i}}_{\theta}$$

Il problema trattato in questa breve relazione concerne individuare la funzione ψ . Il sistema deve dunque essere ben posto: un'equazione regola l'andamento della funzione nel dominio e vigono le opportune condizioni al contorno.

Vi sono due tipi di condizioni al contorno, già accennate nella sezione *Nomenclatura*, condizioni di Neumann, che sono vincoli alla derivata prima della funzione incognita, e di Dirichlet, vincoli al valore della funzione:

- La frontiera all'entrata ha come condizione che la velocità radiale sia nulla: $\frac{\partial \psi}{\partial z} = 0$
- La frontiera all'uscita virtuale¹⁵ ha come condizione che la velocità assiale sia nulla: $\frac{\partial \psi}{\partial r} = 0$
- Si indica nella superficie del mozzo il valore percentuale di portata nullo $\psi = 0$
- Si indica nella superficie della corona il valore percentuale di portata totale $\psi = 100$

Note le condizioni al contorno, la legge da scegliere è tra le due espressioni 3 e 4.

Sostituendo nell'equazione di continuità 3 le espressioni 7 delle velocità in relazione alla ψ si ottiene:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0 \quad (8)$$

¹⁴ Batchelor G. K., 1967, *An introduction to Fluid Dynamics*, p. 78

¹⁵ Parete di mozzo e corona devono essere ortogonali all'asse

Sostituendo nell'equazione di rotazionalità 4 le espressioni 7 delle velocità in relazione alla ψ si ottiene, cambiando il segno dell'intera equazione:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = -\Omega_\theta \quad (9)$$

Nell'implementazione del Metodo delle Differenze Divise si approssimerà il valore di ψ sfruttando la 8 mentre in quella del Metodo degli Elementi Finiti si utilizzerà la 9.

Metodo delle Differenze Divise

Discretizzazione del dominio

La discretizzazione del dominio viene fatta dividendo la regione rettangolare che contiene l'intero dominio in rettangoli, la cui distribuzione è scelta in base al numero di elementi richiesti. Conviene d'ora in poi tuttavia riferirsi ai nodi singoli e non ai rettangoli: il calcolo effettivo viene svolto in ogni nodo rispetto ai quattro adiacenti. Nel caso della turbomacchina i nodi scelti in questa implementazione sono distinguibili essenzialmente in tre tipi: nodi interni, nodi al contorno, nodi esterni; un quarto tipo sono i nodi che non vengono considerati nel rettangolo di discretizzazione. La costruzione della griglia è stata progettata per avere i nodi coincidenti con punti della sezione all'ingresso e all'uscita (sui quali si applica necessariamente la condizione al contorno). Essendo mozzo e corona con parte curva la quadratura non coincide perfettamente: si prendono alcuni nodi esterni¹⁶ dove si può applicare con dovuti accorgimenti la condizione al contorno per lo svolgimento dell'iterazione.

¹⁶ Si veda in seguito

Derivata con notazione in serie di Taylor

La legge del moto da risolvere è la 8. Compiono in essa due derivate parziali del secondo ordine in due direzioni e una derivata parziale del primo ordine lungo r . Il metodo delle differenze divise consiste nell'applicare l'equazione di Laplace nei nodi discreti del dominio. Si consideri una funzione $f(x)$ e la sua derivata nel punto x , definita come:

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Se si espande il termine $f(x + \Delta x)$ con serie di Taylor rispetto a $f(x)$, si ottiene:

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta x \frac{\partial f(x)}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} + o(\Delta x^3)$$

Dividendo e portando a primo membro:

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\partial f(x)}{\partial x} + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2} + o(\Delta x^2)$$

Si può così scrivere un'espressione per f in due punti, $f(x + \Delta x)$ e $f(x - \Delta x)$, note come rispettivamente differenza finita in avanti e all'indietro.

$$f_{i+1} = f_i + \Delta x \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_i + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2} + o(\Delta x^3)$$

$$f_{i-1} = f_i - \Delta x \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_i + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2} + o(\Delta x^3)$$

Sottraendo le due equazioni precedenti si ottiene un'espressione per la derivata *centrale*:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x} + o(\Delta x^2) \quad (10)$$

Sommandole, invece, si ottiene un'espressione per la derivata del secondo ordine:

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_i = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{\Delta x^2} + o(\Delta x^2) \quad (11)$$

Legge del moto con differenze divise

La legge del moto con derivate parziali è esprimibile con differenze divise considerando le due direzioni z e r separatamente.

La legge non viene applicata nel dominio una volta sola nella sua interezza ma localmente a un nodo e ai quattro nodi ad esso adiacenti. Spostandosi di nodo in nodo si esegue nuovamente l'operazione fino ad arrivare ad una convergenza.

Si sostituiscono ora le espressioni 10 e 11 nella legge del moto; i pedici sono indicativi dei nodi con notazione in figura, con lo 0 che indica il nodo su cui si calcola l'espressione:

$$\begin{array}{llll} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} & - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} & + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} & = 0 \\ \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \right)_0 & - \frac{1}{r_0} \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \right)_0 & + \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right)_0 & = 0 \\ \frac{\psi_2 - 2\psi_0 + \psi_4}{\Delta r^2} & - \frac{1}{r_0} \frac{\psi_2 - \psi_4}{2\Delta r} & + \frac{\psi_1 - 2\psi_0 + \psi_3}{\Delta z^2} & = 0 \end{array}$$

Estraendo dalle frazioni i vari valori di ψ :

$$-\psi_0 \left[\frac{2}{\Delta r^2} + \frac{2}{\Delta r^2} \right] + \psi_1 \left[\frac{1}{\Delta z^2} \right] + \psi_2 \left[\frac{1}{\Delta r^2} - \frac{1}{2r_0 \Delta r} \right] + \psi_3 \left[\frac{1}{\Delta z^2} \right] + \psi_4 \left[\frac{1}{\Delta r^2} - \frac{1}{2r_0 \Delta r} \right] = 0$$

Siccome l'incognita è ψ_0 , si isola dal resto:

$$\psi_0 = \frac{\Delta r^2 \Delta z^2}{2(\Delta r^2 + \Delta z^2)} \left[\frac{\psi_1 + \psi_3}{\Delta z^2} + \frac{\psi_2 + \psi_4}{\Delta r^2} + \frac{\psi_2 - \psi_4}{2r_0 \Delta r} \right] \quad (12)$$

Se si considerano anche parametri di deformazione della differenza divisa per i nodi al contorno, l'equazione diventa:

$$\psi_0 = \frac{\frac{\psi_2}{\lambda_2} + \frac{\psi_4}{\lambda_4}}{(\lambda_2 + \lambda_4) \cdot \Delta r^2} + \frac{\frac{\psi_1}{\lambda_1} + \frac{\psi_3}{\lambda_3}}{(\lambda_1 + \lambda_3) \cdot \Delta z^2} - \frac{\lambda_2 - \lambda_4}{2 \cdot r_0 \cdot \Delta r \cdot (\lambda_2 + \lambda_4)} \quad (13)$$

$$\frac{\lambda_1 \cdot \lambda_3 \cdot \Delta z^2 + \lambda_2 \cdot \lambda_4 \cdot \Delta r^2}{\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_4 \cdot \Delta r^2 \cdot \Delta z^2}$$

Questa è l'equazione utilizzata nell'implementazione dell'algoritmo.¹⁷

¹⁷ Si rimanda agli appunti delle lezioni per tutti i passaggi

Individuazione dei nodi

Il criterio generale impiegato per scegliere i nodi si riassume nel seguente:

Se almeno un punto adiacente al nodo considerato è strettamente interno al dominio del campo di moto, allora il nodo viene incluso nella lista dei nodi.

Questo criterio è stato scelto in modo che in ogni punto interno al campo di moto abbia un adiacente in ogni direzione e verso attraverso il quale calcolare la differenza divisa.

Per implementare la condizione sono stati parametrizzati mozzo e corona come funzioni in un piano Oxy e i nodi della griglia come punti di tale piano. Viene iterato ogni nodo della griglia a partire da quello con x e y minime incrementando prima verticalmente e poi orizzontalmente. La condizione di controllo non viene effettuata sul nodo in sé ma sui punti di coordinate $x \pm \Delta x$ e $y \pm \Delta y$. Se un punto adiacente si trova al di sopra della funzione mozzo e al di sotto della funzione corona allora il punto viene aggiunto alla lista con le sue coordinate (z, r) rispettivamente date da (x, y) . Per velocizzare l'iterazione, se il nodo è al limite superiore del dominio si passa direttamente alla ascissa successiva.

Noti ora i punti da considerare, si imposta per i punti del mozzo il valore di ψ a 0, per i punti della corona a 100 (si considera una funzione di corrente percentuale) mentre per i punti interni il valore medio 50 per velocizzare leggermente la convergenza.

Individuazione dei nodi adiacenti ad ogni nodo

Ora che si è in possesso della lista dei nodi necessari alla soluzione del campo fluido, è importante metterli in relazione l'uno con l'altro,

trovando i quattro nodi adiacenti ad ognuno. I nodi adiacenti verticalmente sono semplici da trovare, in quanto la lista dei nodi viene fatta sequenzialmente in direzione r : i due adiacenti sono il precedente nella lista e il successivo. Per gli adiacenti a destra e a sinistra si è scelto di partire dal nodo e di individuare andando per uno a ritroso e per l'altro in avanti il primo punto con la stessa ordinata del nodo. Così si sono ottenute per ogni nodo quattro liste, una per direzione, di nodi adiacenti. Un accorgimento importante: se un nodo si trova al contorno verso una direzione, come nodo adiacente si sceglie il nodo stesso¹⁸.

¹⁸ In questo modo la differenza divisa lungo tale direzione, normale, risulta nulla e si ottiene la condizione di impermeabilità.

Individuazione parametri di deformazione λ

Per ovviare al problema della quadratura, si introducono dei coefficienti λ che alterano lunghezza della differenza divisa in modo da riportare il nodo esterno precisamente al contorno e calcolare in modo più preciso la differenza divisa. Questo accorgimento risulta fondamentale per valori di Ψ prossimi a 0 e 100. Per i punti interni al campo fluido il coefficiente per ogni direzione è banalmente 1, mentre per i punti al contorno di mozzo e corona va calcolato come la differenza tra la coordinata del nodo e la proiezione del nodo esterno sul contorno del dominio.

Linea di corrente

Ora che tutti i parametri dell'equazione sono noti, si svolge l'iterazione. Come condizione si è scelto un numero massimo di iterazioni (per evitare calcoli eccessivamente lunghi) e contemporaneamente una tolleranza sulla differenza massima tra i nodi tra un'iterazione e la precedente (criterio di convergenza).

Sono noti i valori di ψ per ogni nodo della lista, si individuano i nodi che comprendono il valore cercato, e si prende il loro punto medio, rispettivamente in direzione verticale prima della curvatura, e orizzontale dopo la curvatura.

Note le coordinate dei punti cercati, essi vanno interpolati con una spline cubica per costruire una funzione che approssimi l'andamento della linea di corrente (che altro non è che una sezione della funzione di corrente).

Miglioramenti possibili futuri

Malgrado si sia cercato di rendere efficiente l'algoritmo di implementazione, per una maggiore chiarezza si è scelto di separare passaggi logici in operazioni diverse (ad esempio l'individuazione dei nodi e i loro adiacenti) mentre ne sarebbe potuta bastare una. L'equazione

risolutiva con i lambda è sufficiente impiegarla per i punti del contorno, mentre per quelli interni sarebbe più opportuno impiegare l'equazione semplificata.

Per una maggior precisione del valore di psi in uscita si sarebbe potuto estendere virtualmente il dominio fluido¹⁹ e tagliarlo successivamente una volta calcolate le ψ .

¹⁹ Vedi Implementazione del Dominio

Metodo degli Elementi Finiti

Equazione integrale

Con le premesse date dalla formulazione del variazionale di Galerkin, è possibile trasformare l'equazione alle differenze 9 nella seguente equazione integrale, detta formulazione debole dell'equazione di Poisson:

$$\iint_D G \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) drdz + \iint_D G \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) drdz = \iint_D -G \Omega_\theta drdz \quad (14)$$

Interpolazione della funzione incognita nel dominio

L'equazione 14, chiaramente, non è lineare: per risolverla è necessario dividere il dominio del profilo in elementi quadrilateri o triangolari; in questa trattazione è stato scelto l'impiego di elementi quadrilateri. Viene suddivisa in un sistema con tante equazioni quanti sono gli elementi isoparametrici e vale per ognuno di essi.

$$\left\{ \begin{array}{l} \dots \\ \iint_{D_j} \left[G \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) + G \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \right] drdz = \iint_{D_j} -G \Omega_\theta drdz \\ \dots \end{array} \right.$$

Tale suddivisione viene introdotta poiché non conoscendo i valori continui di ψ la si interpola localmente nell'elemento con una *funzione di forma*²⁰, in questo caso bidimensionale lineare. Per ricostruire la funzione, dunque, sono sufficienti i valori ai quattro vertici del quadrilatero della funzione ψ_i , $i = \{1, 2, 3, 4\}$.

La funzione di forma impiegata è:

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4} \cdot (1 + \xi \xi_i) \cdot (1 + \eta \eta_i) \quad (15)$$

La funzione ψ viene interpolata nell'elemento j-esimo²¹ come:

$$\psi = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) \cdot \psi_{k(i)} \quad (16)$$

Dove k rappresenta l'indice del nodo rispetto all'intero dominio. Se l'elemento j-esimo ad esempio è formato dai nodi $k = \{2, 3, 8, 9\}$, ad

²⁰ La funzione di forma implementata permette di interpolare una funzione sommando quattro membri, ognuno dei quali rappresenta il peso unitario di ogni nodo, moltiplicati per il valore della ψ_i .

²¹ Le coordinate non sono z ed r , questa notazione vale infatti se si considera la funzione interpolata in un elemento *parente*, ovvero quadrato centrato nell'origine di lato 2.

essi corrispondono rispettivamente le funzioni di forma con indici $i = \{1, 4, 2, 3\}^{22}$.

Sostituendo la funzione interpolata 16 nell'equazione integrale, e sfruttando la linearità dell'operatore di derivazione, il sistema si riassume nel seguente²³:

$$\begin{cases} \dots \\ \sum_{i=1}^4 \psi_{k(i)} \iint_{D_j} \left[G \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial N_i}{\partial z} \right) + G \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial N_i}{\partial r} \right) \right] drdz = \iint_{D_j} -G\Omega_\theta drdz \\ \dots \end{cases}$$

²² Fare riferimento alla figura per capire meglio la notazione indiciale

²³ Ricordando che la N_i è definita in coordinate ζ, η

Suddivisione del dominio nell'algoritmo

Si è scelto di implementare le linee di mozzo e corona come curve parametriche con parametrizzazione ad ascissa curvilinea: in questo modo è possibile dividere il dominio in elementi con dimensioni pressoché similari.

Lungo il moto si suddivide prendendo punti della curva con una frazione della lunghezza come parametro, ortogonalmente al moto si prendono i punti nella retta che passa tra l'i-esimo punto del mozzo e della corona, suddividendola a sua volta.

Si ottengono matrici rettangolari di semplice ispezione: assegnate coordinate z e r si inseriscono i valori di Ψ_i a 0 e 100 nella prima e ultima riga della matrice. Per i punti intermedi si è scelto il valore NaN (Not a Number), ma per lo scopo può andar bene anche 50 o altro valore qualsiasi purché diverso dai valori al contorno.

Applicazione del teorema di Green

Grazie al teorema di Green (simile alla formula della derivata del prodotto) gli integrali a sinistra di ogni equazione si possono separare in componenti dovute all'interno del dominio e al contorno:

$$g \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial (g \cdot f)}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial x} \cdot f$$

$$\begin{aligned} \iint_{D_j} \left[G \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) + G \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \right] drdz &= \iint_{D_j} -G\Omega_\theta drdz \\ \iint_{D_j} \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{G}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial G}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{G}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial G}{\partial r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right] drdz &= \iint_{D_j} -G\Omega_\theta drdz \end{aligned}$$

Riordinando i termini con segno positivo:

$$\iint_{D_j} \left[\frac{\partial G}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{\partial G}{\partial r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right] \frac{drdz}{r} = \iint_{D_j} \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{G}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{G}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \right] drdz + \iint_{D_j} G\Omega_\theta drdz$$

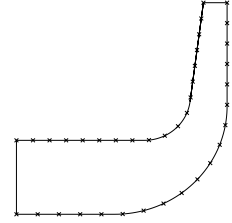


Figura 6: Suddivisione longitudinale del dominio

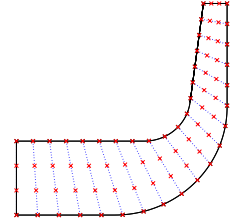


Figura 7: Suddivisione in larghezza del dominio

Applicando il teorema di Gauss-Green:

$$\iint_{D_j} \left[\frac{\partial G}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{\partial G}{\partial r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right] \frac{drdz}{r} = \int_{\partial D_j} \frac{G}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} (\hat{n} \cdot \hat{z}) dr + \int_{\partial D_j} \frac{G}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} (\hat{n} \cdot \hat{r}) dz + \iint_{D_j} G \Omega_\theta drdz$$

Dove il versore \hat{n} indica la normale al contorno dell'elemento j -esimo diretta verso l'esterno.

Scelta della funzione di test

Nella formulazione di Galerkin, la funzione di test è esattamente la funzione di forma riferita al nodo h -esimo $N_{i(h)}$. Per ogni equazione del sistema precedente ne esistono ora 4 date dai 4 nodi h dell'elemento j -esimo. Mettendo assieme dunque tutte le considerazioni fin'ora esplicitate, si ottiene il sistema seguente:

$$\begin{cases} \dots \\ \sum_{i=1}^4 \psi_{k(i)} \iint_{D_j} \left[\frac{\partial N_{i(h)}}{\partial z} \frac{\partial N_{i(k(i))}}{\partial z} + \frac{\partial N_{i(h)}}{\partial r} \frac{\partial N_{i(k(i))}}{\partial r} \right] \frac{drdz}{r} = \\ \qquad \qquad \qquad = \int_{\partial D_j} \frac{N_{i(h)}}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} (\hat{n} \cdot \hat{z}) dr + \int_{\partial D_j} \frac{N_{i(h)}}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} (\hat{n} \cdot \hat{r}) dz + \iint_{D_j} N_{i(h)} \Omega_\theta drdz \\ \dots \end{cases}$$

La notazione degli indici può parere ridondante, ma è bene specificare il perché di tale notazione: la sommatoria è data dagli i nodi che, se considerati con indici globali k , si possono considerare come nodi $k(i)$.

La funzione di forma è riferita ai nodi globali k , ma nelle coordinate locali i , dunque la funzione di forma si indica con $N_{i(k(i))}$ per explicitare il fatto che è calcolata nell'elemento locale j rispetto al nodo globale k , trovato cercando localmente gli i vertici dell'elemento.

Dato che il nodo h dell'equazione considerata non è dovuto alla sommatoria, la funzione di forma ad esso associato è soltanto $N_i(h)$.

Le funzioni di forma sono definite soltanto con l'indice $i = 1, 2, 3, 4$ e sono date dalle seguenti:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) \\ N_2 &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) \\ N_3 &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) \\ N_4 &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta) \end{aligned}$$

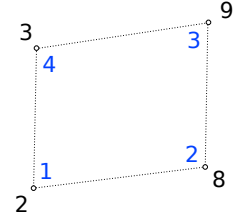


Figura 8: In blu gli indici i , all'esterno gli indici con numerazione globale k

Contributi al contorno

Ponendo attenzione al seguente termine:

$$\int_{\partial D_j} \frac{N_{i(h)}}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} (\hat{n} \cdot \hat{z}) dr + \int_{\partial D_j} \frac{N_{i(h)}}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} (\hat{n} \cdot \hat{r}) dz$$

il peso dato dalla $N_{i(h)}$ rende i contributi al contorno di ogni D_j contenente il nodo h -esimo nulli una volta ricomposto il sistema, ad esclusione del contorno del dominio globale.

Ciò può essere intuito anche dal fatto che il sistema stesso è stato costruito partendo dal considerare il dominio nella sua interezza. Siccome il teorema di Green vale anche se lo si considera nell'interezza, è naturale che il contributo del contorno debba essere dato soltanto dal contorno esterno.

Nel caso in cui il contorno dell'elemento sia effettivamente un contorno del dominio le condizioni al contorno del sistema (Neumann e Dirichlet) rendono questi contributi di frontiera nulli ugualmente:

- Dirichlet mozzo e corona: lungo il mozzo (e corona) è noto e costante il valore di ψ , percorrendo il contorno del mozzo (o della corona) entrambi i membri sono nulli poiché le derivate in entrambe le direzioni sono nulle.
- Neumann all'entrata: lungo l'entrata la velocità radiale è nulla, dunque il termine a destra si annulla
- Neumann all'uscita: lungo l'uscita la velocità assiale è nulla, dunque il termine a destra si annulla
- Conservazione massa: dato che l'integrale delle velocità assiali lungo l'entrata e delle velocità radiali lungo l'uscita rappresenta l'intera portata del fluido, e che la normale è diretta in direzioni opposte (negativa per l'entrata e positiva per l'uscita), la continuità del moto annulla entrambe le componenti.

Introduzione coefficiente riassuntivo $a_{h,k}$

Il sistema si riduce essenzialmente al seguente, dove l'equazione è la h -esima:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dots \\ \sum_{i=1}^4 \psi_{k(i)} \iint_{D_j} \left[\frac{\partial N_{i(h)}}{\partial z} \frac{\partial N_{i(k(i))}}{\partial z} + \frac{\partial N_{i(h)}}{\partial r} \frac{\partial N_{i(k(i))}}{\partial r} \right] \frac{dr dz}{r} = \iint_{D_j} N_{i(h)} \Omega_{\theta} dr dz \\ \dots \end{array} \right.$$

Il termine integrale si può riassumere in un coefficiente, chiamato a :

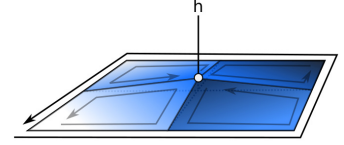


Figura 9: Una volta riassembleato il sistema, i contributi al contorno attorno al nodo h -esimo si elidono poiché sono uguali ma con direzione diversa; il contributo al contorno tra i 4 elementi è nullo perché nulla è la funzione di forma $N_{i(h)}$ nel tratto di percorso esterno

$$a_{h,k(i)}^J = \iint_{D_j} \left[\frac{\partial N_{i(h)}}{\partial z} \frac{\partial N_{i(k(i))}}{\partial z} + \frac{\partial N_{i(h)}}{\partial r} \frac{\partial N_{i(k(i))}}{\partial r} \right] \frac{drdz}{r}$$

Dove per J si intende l'elemento D_j e, dunque, il sistema diventa:

$$\begin{cases} \dots \\ \sum_{i=1}^4 \psi_{k(i)} a_{h,k(i)}^J = \iint_{D_j} N_{i(h)} \Omega_\theta drdz \\ \dots \end{cases}$$

Se si considera il moto irrotazionale (il che è ragionevole se non si presentano vortici o turbolenze nel campo di moto), la componente Ω_θ si annulla e, espandendo la serie, il sistema risulta:

$$\begin{cases} \dots \\ \psi_{k(1)} a_{h,k(1)}^J + \psi_{k(2)} a_{h,k(2)}^J + \psi_{k(3)} a_{h,k(3)}^J + \psi_{k(4)} a_{h,k(4)}^J = 0 \\ \dots \end{cases}$$

Ricapitolando, l'equazione indicata rappresenta l'equazione per il nodo h -esimo considerato appartenente all'elemento j -esimo e contando il contributo dei k nodi dell'elemento.

Per risolvere l'integrale rappresentato da $a_{h,k}^J$ non si può procedere direttamente, poiché non sono note le derivate della funzione di forma in direzione z ed r . Sono però note le derivate in ξ ed η :

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{\xi_i}{4}(1 + \eta\eta_i) \quad \frac{\partial N_i}{\partial \eta} = \frac{\eta_i}{4}(1 + \xi\xi_i) \quad (17)$$

Nota la regola della catena, le derivate 17 sono in relazione alle derivate nell'integrale come segue:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} &= \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} &= \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \eta} \end{aligned}$$

In notazione matriciale²⁴:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial r}{\partial \xi} \\ \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial r}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial z} \\ \frac{\partial N_i}{\partial r} \end{Bmatrix}$$

Invertendo l'equazione:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial z} \\ \frac{\partial N_i}{\partial r} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial r}{\partial \xi} \\ \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial r}{\partial \eta} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial r}{\partial \eta} - \frac{\partial z}{\partial \eta} \frac{\partial r}{\partial \xi}} \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial \eta} & -\frac{\partial r}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix}$$

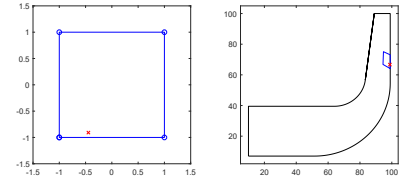


Figura 10: Come la funzione di forma permette di mappare un punto dalle coordinate ξ, η nelle coordinate r, z , usando la 16 inserendo al posto di $\psi_{k(i)}$ i valori di r e z

²⁴ La matrice in questa equazione è la matrice jacobiana di trasformazione dal dominio dell'elemento isoparametrico al dominio dell'elemento parente

Dato che sono note anche le derivate di z e r in ξ ed η , si conoscono le $\frac{\partial N_i}{\partial z}$ e $\frac{\partial N_i}{\partial r}$ in funzione di ξ ed η ; devono inoltre essere noti anche i valori di r_k e z_k dell'elemento in cui si sta integrando. Questo perché, ad esempio²⁵:

²⁵ Le altre sono facilmente ricavabili

$$\frac{\partial z}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^4 \frac{1}{4} \eta_i (1 + \xi \xi_i) z_{k(i)}$$

Non resta ora che parametrizzare il dominio dell'elemento isoparametrico secondo ξ ed η . Per farlo è sufficiente la seguente uguaglianza:

$$dzdr = |\mathbb{J}| d\xi d\eta$$

L'integrale del coefficiente infine, diviene:

$$a_{h,k(i)}^I = \iint_{[-1,1] \times [-1,1]} \left[\frac{\partial N_{i(h)}}{\partial z}(\xi, \eta) \frac{\partial N_{i(k(i))}}{\partial z}(\xi, \eta) + \frac{\partial N_{i(h)}}{\partial r}(\xi, \eta) \frac{\partial N_{i(k(i))}}{\partial r}(\xi, \eta) \right] \frac{|\mathbb{J}(\xi, \eta)|}{r(\xi, \eta)} d\xi d\eta$$

Dove la distanza radiale r è data dalla mappatura:

$$r(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 \frac{1}{4} (1 + \xi \xi_i)(1 + \eta \eta_i) r_{k(i)}$$

Il coefficiente a è ora integrabile con integrazione numerica, in particolare si usa in questa implementazione la quadratura di Legendre-Gauss:

$$a_{h,k(i)}^I \simeq \sum_x \sum_y P_x \cdot P_y \left[\frac{\partial N_{i(h)}}{\partial z}(\xi_x, \eta_y) \frac{\partial N_{i(k(i))}}{\partial z}(\xi_x, \eta_y) + \frac{\partial N_{i(h)}}{\partial r}(\xi_x, \eta_y) \frac{\partial N_{i(k(i))}}{\partial r}(\xi_x, \eta_y) \right] \frac{|\mathbb{J}(\xi_x, \eta_y)|}{r(\xi_x, \eta_y)} \quad (18)$$

La quadratura viene effettuata in particolari punti (a scelta, nell'implementazione sono stati usati 9 punti) cosiddetti di Legendre-Gauss. Per trovarli in una direzione o l'altra, vale la tabella seguente:

n	j	P_j
1	0	2
2	$-\sqrt{\frac{1}{3}}, +\sqrt{\frac{1}{3}}$	1, 1
3	$-\sqrt{\frac{3}{5}}, 0, +\sqrt{\frac{3}{5}}$	$\frac{5}{9}, \frac{8}{9}, \frac{5}{9}$

Scegliendo ad esempio 3 punti sia lungo la ξ che la η si ottengono 9 punti, così come implementato nell'algoritmo.

Sistema lineare

Ognuna delle h -equazioni può essere riassunta in un sistema lineare avente come matrice una matrice di coefficienti $a_{h,k(i)}$. Ogni nodo h

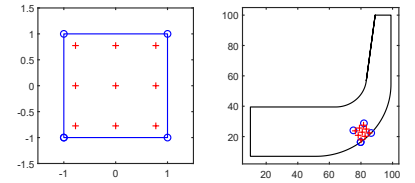


Figura 11: L'integrazione viene effettuata nei 9 punti rimappati nel dominio di partenza

può avere da 1 a 4 elementi J di riferimento: per ogni equazione del sistema riferita al nodo h si va a inserire una riga della matrice \mathbb{A} .

Ad esempio, se $h(1) = 2$, allora l'equazione del nodo 2 (globale) può ad esempio essere:

$$\psi_1 a_{2,1}^{(1,7,8,2)} + \psi_7 a_{2,7}^{(1,7,8,2)} + \psi_8 a_{2,8}^{(1,7,8,2)} + \psi_2 a_{2,2}^{(1,7,8,2)} = 0$$

Questa equazione vista come sistema con matrice è:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{2,1}^{(1,7,8,2)} & a_{2,2}^{(1,7,8,2)} & 0 & \dots & 0 & a_{2,7}^{(1,7,8,2)} & a_{2,8}^{(1,7,8,2)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_7 \\ \psi_8 \\ \vdots \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Ricomponendo il sistema si riassumono i contributi, dati da ogni elemento j -esimo contenente il nodo h -esimo, nel solo coefficiente:

$$a_{h,k} = \sum_{j \in J_h} a_{h,k}^j \quad J_h = J \mid h \in J$$

Ove gli elementi J_h sono gli elementi del dominio che contengono il nodo h al loro interno. La matrice dell'intero sistema è riassumibile nella seguente:

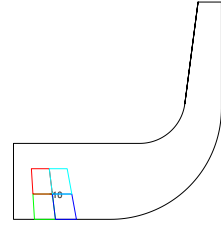


Figura 12: Elementi adiacenti al nodo $h = 10$

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & 0 & \dots & 0 & 0 & a_{1,i} & a_{1,i+1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & 0 & \dots & 0 & a_{2,i} & \ddots & \ddots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_{3,2} & a_{3,3} & \ddots & 0 & \dots & 0 & \ddots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & & \ddots & 0 & & & & 0 & 0 \\ 0 & \vdots & 0 & & & & & \ddots & & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & \ddots & & & & 0 & \ddots & & \ddots & a_{N-i-1,N} \\ a_{i,1} & a_{i,2} & 0 & & & & & & 0 & a_{N-i,N-1} & a_{N-i,N} \\ a_{i+1,1} & \ddots & \ddots & 0 & & & & \ddots & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & & \ddots & & & & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & & 0 & & \ddots & & 0 & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \ddots & 0 & \dots & 0 & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \ddots & \ddots & a_{N-1,N-i} & 0 & \dots & 0 & \ddots & \ddots & a_{N-1,N} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_{N,N-i-1} & a_{N,N-i} & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{N,N-1} & a_{N,N} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \vdots \\ \psi_i \\ \psi_{i+1} \\ \vdots \\ \psi_{N-1} \\ \psi_N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix}$$

L'indice i dipende chiaramente da come si è suddiviso il dominio, e dall'ordine in cui si è scelto di procedere per numerare i nodi. Data

la forma allungata del dominio, è consigliabile procedere numerando i nodi in direzione normale al moto, in modo che le fasce laterali alla diagonale siano più vicine alla diagonale²⁶.

Prima di risolvere il sistema bisogna calcolare i coefficienti $a_{h,k}$, poi ridurre il sistema portando a destra i nodi noti dalle condizioni di Dirichlet.

Si consideri la prima colonna della matrice \mathbb{A} : essa rappresenta il prodotto tra il coefficiente $a_{j,1}$ e il valore di ψ_1 in ogni riga j . Se il valore del nodo in questione è noto, si può portare a destra dell'equazione il prodotto tra a e ψ semplificando così il sistema: si elide la colonna, la riga riferita al nodo, e dunque anche la prima componente del vettore incognito Φ :

$$[\mathbb{A}] \cdot \Phi = \mathbf{0} \quad \rightarrow \quad [\mathbb{A}^{(1)}] \cdot \Phi^{(1)} = -\mathbf{a}_1 \cdot \phi_1 \quad (19)$$

Questo procedimento viene iterato per tutti i nodi in cui viene imposta la condizione di Dirichlet, ottenendo il sistema finale ridotto:

$$[\mathbb{A}^{(p)}] \cdot \Phi^{(p)} = \sum_{s \in MC} -\mathbf{a}_s \cdot \phi_s$$

L'insieme MC rappresenta tutti i nodi facenti parte di mozzo e corona, e dunque il sistema da risolvere ridotto è un sistema di $N - p$ equazioni in $N - p$ incognite. Risolto il sistema con un metodo computazionale a piacere sono noti tutti i valori di ψ nei vertici di ogni elemento del dominio.

Linea di corrente

Per individuare le curve di livello della funzione di corrente ψ bisogna impostare un valore di ψ percentuale richiesto. In seguito bisogna individuare gli elementi del dominio che hanno tale valore compreso tra i quattro nodi ai vertici. Localmente si tratta semplicemente di ricavare η in funzione di ξ dall'equazione di interpolazione di ψ :

$$\psi_c = \sum_{i=1}^4 \frac{1}{4} (1 + \xi \xi_i) (1 + \eta \eta_i) \psi_{k(i)}$$

Esplicitando la sommatoria e saltando qualche passaggio si ottiene:

$$\eta(\xi) = \frac{4\psi_c - (1 - \xi)(\psi_{k(1)} + \psi_{k(4)}) - (1 + \xi)(\psi_{k(2)} + \psi_{k(3)})}{(1 + \xi)(\psi_{k(3)} - \psi_{k(2)}) - (1 - \xi)(\psi_{k(4)} + \psi_{k(1)})} \quad (20)$$

Note le coordinate ξ, η si possono rimappare z, r per ottenere le coordinate dei punti nel dominio di partenza. Eseguendo l'operazione per tutti gli elementi contenenti il valore di ψ cercato, si ottengono le linee di corrente.

²⁶ Dal punto di vista computazionale con una matrice così definita è più semplice risolvere il sistema.

Risultati e confronti tra i metodi

Come risulta chiaro dai grafici dei due casi, i metodi raggiungono risultati equivalenti se le suddivisioni del dominio sono sufficientemente elevate.

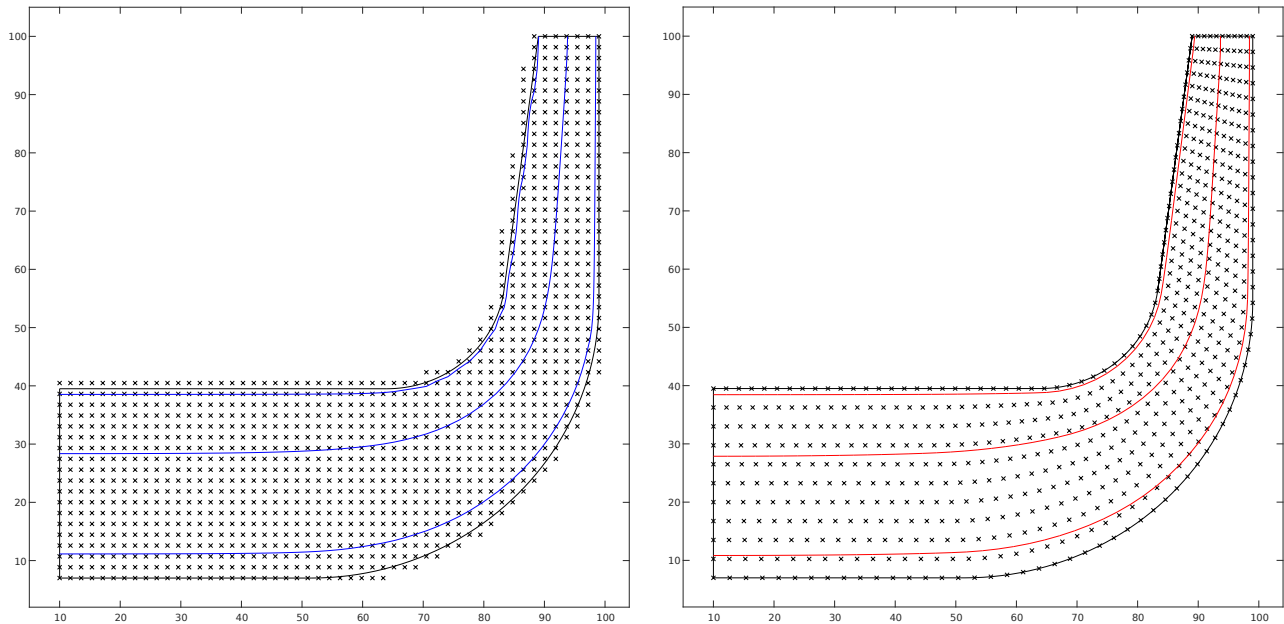


Figura 13: Distribuzione dei nodi nei due casi: a sinistra la suddivisione è indipendente dalla forma del dominio: un numero di suddivisioni pari a 50 non è sufficiente (si osservi la linea di ψ_{95}); a destra sono sufficienti poche suddivisioni che seguono il dominio per avere risultati soddisfacenti.

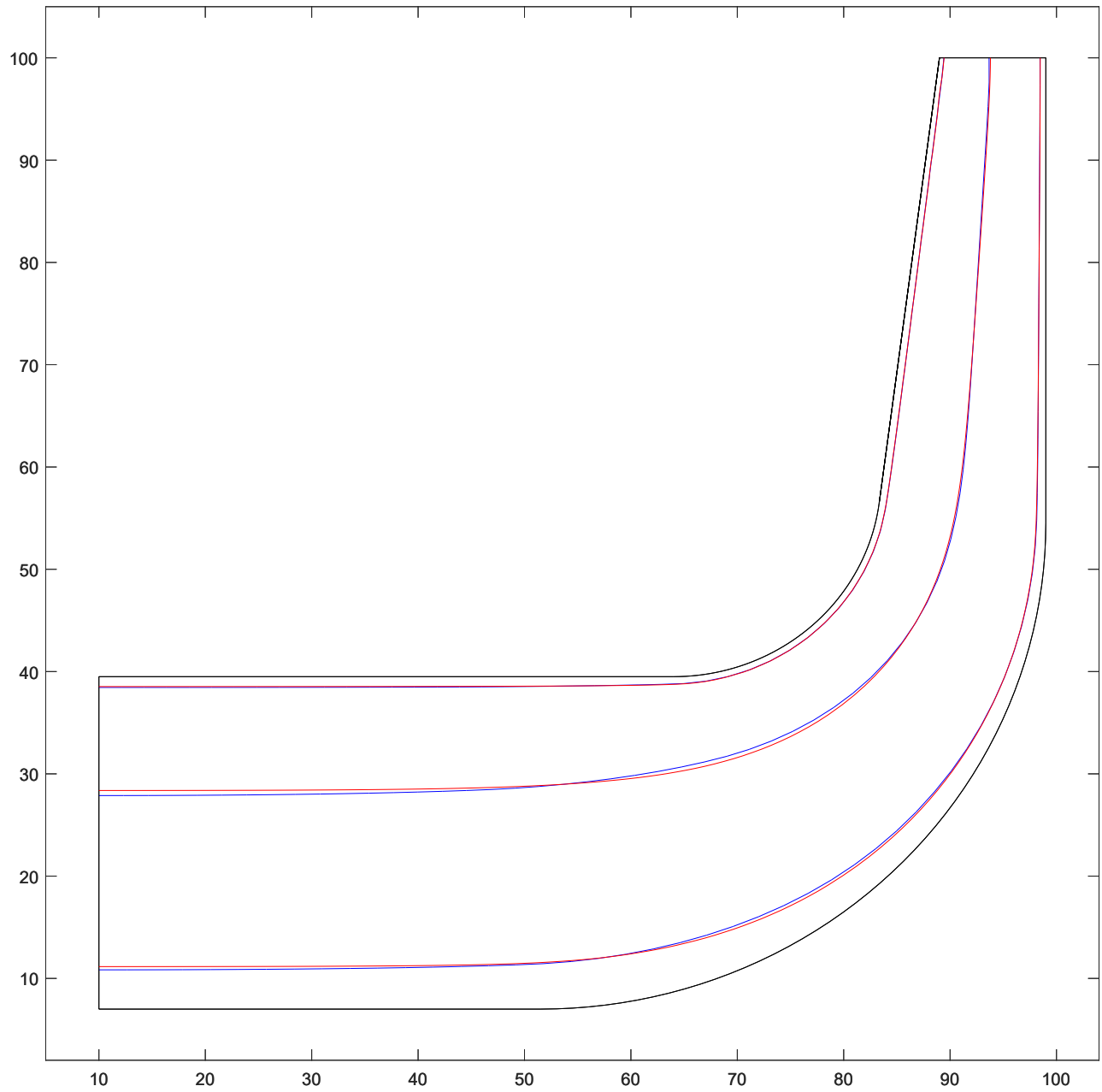


Figura 14: Confronto tra i due risultati delle linee con ψ percentuale ai valori di 5%, 50% e 95%: in rosso Metodo degli Elementi Finiti, in blu Metodo delle Differenze Divise