LIMITI NOTEVOLI

1) $\frac{a^x - 1}{x} = \ln a$

2) $\frac{(1+x)^a - 1}{ax} = 1$

3) $\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

4) $\frac{\operatorname{sen} ax}{bx} = \frac{a}{b}$

5) $\frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$

6) $\frac{1 - \cos x}{x} = 0$

7) $\frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

8) $\frac{\operatorname{arcsen} x}{x} = 1$

Maggiorazioni

$|x| \leq \sqrt{x^2+y^2}$ $\qquad \frac{|x|}{|x|+y^2} \leq 1$

$|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2+y^2)$

$x^2 \leq x^2+y^2$

$\frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq 1$

Teorema restrizioni

Siano A un sottoinsieme non vuoto di R^2, $(x_0, y_0) \in DA$, E un sottoinsieme non vuoto di A tale che $(x_0, y_0) \in DE$, f una funzione reale definita in A. Se

$$\exists \lim_{x,y \to 0,0} f(x,y) = l \in R$$

Allora:

$$\exists \lim_{x,y \to 0,0} f_{|E}(x,y) = l \in R$$

Dimostrazione

Supponiamo che $l = +\infty$, Bisogna provare che

$\forall K > 0 \ \exists \delta > 0 : f_{|E}(x,y) > K$

$\forall (x,y) \in E \cap I_\delta(x_0, y_0) \setminus \{(x_0, y_0)\}$

Dall'ipotesi, fissato $K > 0$ esiste $\delta_1 > 0$ tale che

$f(x,y) > K \ \ \forall (x,y) \in A \cap I_{\delta_1}(x_0, y_0) \setminus \{(x_0, y_0)\}$

Ovviamente si ha anche

$f(x,y) > K \ \ \forall (x,y) \in E \cap \delta_1(x_0, y_0) \setminus \{(x_0, y_0)\}$

E quindi si ha la tesi prendendo $\delta = \delta_1$ e osservando che $f_{|E}(x,y) = f(x,y) \ \forall (x,y) \in E$

~~Allora esiste la restrizione di f al seguente sottoinsieme di H~~

Teorema di Fermat

Sia $f : X \subseteq R^2 \to R$, se $(x_0, y_0) \in X$ è un punto di massimo o minimo relativo, e se f è dotata di derivate parziali in (x_0, y_0), allora $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$

Dimostrazione

Supponiamo che (x_0, y_0) sia un punto di massimo relativo. Per DEF $\exists \delta > 0 : f(x_0, y_0) \geq f(x,y) \ \forall (x,y) \in I_\delta(x_0, y_0)$

Posto $y = y_0$, costruiamo la fz ad una variabile reale $F(x) = f(x, y_0)$. Per Hp, ovvero che

$F(x_0) \geq F(x) \ \forall x \in R : x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$

Per il teorema di Fermat ad una variabile avremo

① $F'_x = f_x(x_0, y_0) = 0$. Analogamente, posto $x = x_0$

$G(y) = f(x_0, y)$ Da cui $G(y_0) \geq G(y)$

Per lo stesso teorema risulta

② $G'(y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$. Dalle 1 e 2 segue la tesi