Contro esempi

	Continua	Derivate parziali	Differenziabile	Direzionali
$\sqrt{x^2+y^2}$	✓	✗	✗	
$\begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} \\ 0 \end{cases}$	✗	✓	✗	✗
$\sqrt{\lvert xy \rvert}$	✓	✓	✗	
$\begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} \\ 0 \end{cases}$	✓	✓	✗	✓

Teorema differenziabilità

Se f è differenziabile nel punto (x_0,y_0), allora si ha

1) f è continua nel punto (x_0,y_0)

2) f è dotata di derivate parziali prime nel punto (x_0,y_0) e si ha $f_x(x_0,y_0)=\ell$, $f_y(x_0,y_0)=m$

Dimostrazione

1) f è continua nel punto (x_0,y_0) se e solo se $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \Delta f = 0$. Tenendo conto che

$$\lim_{h,k\to 0,0} \sqrt{h^2+k^2}=0 \qquad e \qquad \lim_{h,k\to 0,0} (\ell h + mk) = 0$$

Risulta:

$$\lim_{h,k\to 0,0} \Delta f = \lim_{h,k\to 0,0} \left[\frac{\Delta f - (\ell h + mk)}{\sqrt{h^2+k^2}} \sqrt{h^2+k^2} + (\ell h + mk) \right] = 0$$

come si voleva

2) Dimostriamo che $f_x(x_0,y_0)=\ell$ e quindi che $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h} = \ell$

Posto

$$g(h,k) = \frac{f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)-(\ell h + mk)}{\sqrt{h^2+k^2}} \quad \forall (h,k) \in H \setminus \{(0,0)\}$$

Per l'ipotesi di differenziabilità si ha $\lim_{h,k\to 0 0} g(h,k) = 0$

Allora anche la restrizione di g al seguente sottoinsieme di $H\setminus\{(0,0)\}$ $\{(h,0): h\in\mathbb{R}, h\neq 0\}$ tende a 0 al tendere di (h,k) a $(0,0)$. Ciò implica che $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)-\ell h}{|h|} = 0$

$$= \frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h} = \left[\frac{|h|}{h} \frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)-\ell h}{|h|} + \ell \right] = \ell$$

come si voleva