МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к выполнению домашней работы по дисциплине

«Теория формальных языков и методы трансляции»

Часть 1

Порядок выполнения:

1. Определить к какому типу по Хомскому относится язык, заданный указанным множеством (использовать лемму о разрастании языков или замкнутость класса языков).
2. Если язык является регулярным выполнить следующую последовательность действий:
   - 2.1. Привести искомое множество, определяющее заданный язык, к регулярному виду.
   - 2.2. Построить регулярное выражение для искомого регулярного множества
   - 2.3. Для полученного регулярного выражения выполнить следующее:
     - 2.3.1. Построить леволинейную и праволинейную грамматики;

       ВНИМАНИЕ. Все нижеследующие задания выполнять для ОБЕИХ ГРАММАТИК
     - 2.3.2. Сделать приведение построенных грамматик:
       - 2.3.2.1. Выполнить проверку пустоты языка
       - 2.3.2.2. Удалить бесполезные символы
       - 2.3.2.3. Удалить недостижимые символы
       - 2.3.2.4. Удалить ε–правила
       - 2.3.2.5. Удалить цепные правила
       - 2.3.2.6. Повторить 2.3.2.2 и 2.3.2.3, если произошло изменение грамматик в п.2.3.2.4 и п.2.3.2.5
     - 2.3.3. Построить для приведенных грамматик конечные автоматы:
       - 2.3.3.1. Привести грамматики к автоматному виду
       - 2.3.3.2. Для автоматных грамматик построить конечные автоматы, т.е. определить пятерки вида $M_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$ и $M_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$;
       - 2.3.3.3. Нарисовать диаграмму состояний построенных автоматов;
   - 2.4. Для полученного регулярного выражения построить конечный автомат $M_3 = (Q_3, \Sigma, \delta_3, q_3, F_3)$:
     - 2.4.1. Выполнить построение КА $M_3 = (Q_3, \Sigma, \delta_3, q_3, F_3)$ для регулярного выражения (использовать алгоритм построения КА по регулярному выражению);
     - 2.4.2. Нарисовать диаграмму состояний построенного автомата $M_3 = (Q_3, \Sigma, \delta_3, q_3, F_3)$ (на каждом шаге построения автомата строить диаграммы состояний автоматов ОБЯЗАТЕЛЬНО!!!);
   - 2.5. Определить являются ли построенные автоматы M_1, M_2, M_3 детерминированными, т.е. позволяют ли они осуществить детерминированный разбор цепочки.
   - 2.6. В случае недетерминированных автоматов выполнить построение эквивалентных детерминированных автоматов $M_1' = (Q_1', \Sigma, \delta_1', q_1', F_1')$, $M_2' = (Q_2', \Sigma, \delta_2', q_2', F_2')$, $M_3' = (Q_3', \Sigma, \delta_3', q_3', F_3')$;

2.7. Выполнить удаление недостижимых состояний для автоматов $M_1' = (Q_1', \Sigma, \delta_1', q_1', F_1')$, $M_2' = (Q_2', \Sigma, \delta_2', q_2', F_2')$, $M_3' = (Q_3', \Sigma, \delta_3', q_3', F_3')$;

2.8. Нарисовать диаграмму состояний построенных детерминированных автоматов M_1', M_2', M_3' без недостижимых состояний;

2.9. Для построенных детерминированных автоматов M_1', M_2', M_3' построить минимальные детерминированные конечные автоматы $M_1'' = (Q_1'', \Sigma, \delta_1'', q_1'', F_1'')$, $M_2'' = (Q_2'', \Sigma, \delta_2'', q_2'', F_2'')$, $M_3'' = (Q_3'', \Sigma, \delta_3'', q_3'', F_3'')$;

2.10. Для построенных автоматов $M_1'' = (Q_1'', \Sigma, \delta_1'', q_1'', F_1'')$, $M_2'' = (Q_2'', \Sigma, \delta_2'', q_2'', F_2'')$, $M_3'' = (Q_3'', \Sigma, \delta_3'', q_3'', F_3'')$ нарисовать их диаграммы состояний;

2.11. Сделать обратные преобразования:

2.11.1. Построить по минимальным детерминированным конечным автоматам $M_1'' = (Q_1'', \Sigma, \delta_1'', q_1'', F_1'')$ и $M_2'' = (Q_2'', \Sigma, \delta_2'', q_2'', F_2'')$ грамматики: для M_1'' – леволинейную грамматику, для M_2'' – праволинейную грамматику;

2.11.2. Используя теорию уравнений с регулярными коэффициентами сделать построение регулярных выражений p_1 и p_2 для построенных в п.2.11.1 регулярных грамматик;

2.11.3. Построить по минимальному детерминированному конечному автомату $M_3'' = (Q_3'', \Sigma, \delta_3'', q_3'', F_3'')$ регулярное выражение p_3 (использовать алгоритм построения регулярного выражения по конечному автомату);

2.11.4. По полученным регулярным выражениям p_1, p_2, p_3 построить регулярные множества L_1, L_2, L_3;

2.11.5. Сравнить исходный L и полученные языки L_1, L_2, L_3 !!!

3. Программная реализация (пока в разработке):

3.1. Написать программу для реализации анализатора заданного языка по правилам грамматики, построенной в п.2.3;

3.2. Написать программу для реализации анализатора заданного языка по конечному автомату, построенному в п.2.5;

3.3. Написать программу для реализации анализатора заданного языка по конечному автомату, построенному в п.2.6

3.4. Написать программу для реализации анализатора заданного языка по конечному автомату, построенному в п.2.7

3.5. Сравнить временные характеристики и корректность работы всех пяти программ и сделать выводы

Пример выполнения домашней работы:

Вариант X.xx

$$L = \left\{ (ab)^k, (ac)^l, (bc)^m \middle| \forall k,l,m \geq 0, \text{ где } k,l,m - \text{целые} \right\} \quad (1)$$

Решение:

Шаг 1

Вариант №1 (используя лемму о разрастании регулярных языков)

$$\alpha = (ab)^3 = \underbrace{ab}_{\gamma_1} \cdot \underbrace{ab}_{\beta} \cdot \underbrace{ab}_{\gamma_2}$$

Разрастаем цепочку

$i = 0 : \alpha' = \gamma_1 \beta^0 \gamma_2 = ab \cdot (ab)^0 \cdot ab = (ab)^2 \quad \in L,$

$i = 1 : \alpha' = \gamma_1 \beta^1 \gamma_2 = ab \cdot (ab)^1 \cdot ab = (ab)^3 \quad \in L,$

$i = 2 : \alpha' = \gamma_1 \beta^2 \gamma_2 = ab \cdot (ab)^2 \cdot ab = (ab)^4 \quad \in L,$

…

$i = k : \alpha' = \gamma_1 \beta^k \gamma_2 = ab \cdot (ab)^k \cdot ab = (ab)^{k+2} \quad \in L,$

…

В виду произвольности выбора k делаем вывод, что α' для любого $i \geq 0$ принадлежит L. Таким образом, делаем вывод, что L может являться регулярным языком.

Преобразуем множество L таким образом, чтобы оно представляло собой множество, полученное путем применения конечного числа операций объединения, конкатенации и итерации.

$L = \left\{ (ab)^k, (ac)^l, (bc)^m \middle| \forall k,l,m \geq 0, \text{ где } k,l,m - \text{целые} \right\} =$

так как имеет место соотношение (определение операции итерации)

$\left\{ \alpha^n \middle| \forall n \geq 0 \right\} = \{\alpha\}^*$, то

$$= \{ab\}^* \cup \{ac\}^* \cup \{bc\}^* = (\{a\} \cdot \{b\})^* \cup (\{a\} \cdot \{c\})^* \cup (\{b\} \cdot \{c\})^* \quad (2)$$

Нетрудно заметить, что получение множество удовлетворяет рекурсивному определению регулярного множества, следовательно, оно регулярное.

Вариант №2 (используя замкнутость класса регулярных языков)

$$L = \left\{ (ab)^k, (ac)^l, (bc)^m \middle| \forall k,l,m \geq 0 \right\} = \left\{ (ab)^k \middle| \forall k \geq 0 \right\} \cup \left\{ (ac)^l \middle| \forall l \geq 0 \right\} \cup$$

$$\cup \left\{ (bc)^m \middle| \forall m \geq 0 \right\} = \{ab\}^* \cup \{ac\}^* \cup \{bc\}^* = \left(\underbrace{\{a\}}_{L_1} \cdot \underbrace{\{b\}}_{L_2} \right)^* \cup \left(\underbrace{\{a\}}_{L_3} \cdot \underbrace{\{c\}}_{L_4} \right)^* \cup \left(\underbrace{\{b\}}_{L_5} \cdot \underbrace{\{c\}}_{L_6} \right)^* =$$

$$= (L_1 \cdot L_2)^* \cup (L_3 \cdot L_4)^* \cup (L_5 \cdot L_6)^* \quad (3)$$

Языки $L_1, L_2, L_3, L_4, L_5, L_6$ – регулярны в силу определения регулярного множества. Используя свойство замкнутости класса регулярных языков, регулярными будут языки $L_1 \cdot L_2, L_3 \cdot L_4, L_5 \cdot L_6$ и, следовательно, языки

$(L_1 \cdot L_2)^*, (L_3 \cdot L_4)^*, (L_5 \cdot L_6)^*$, а также их объединение. Таким образом, делаем вывод, что регулярным будет исходный язык.

Шаг 2

Шаг 2.1

Выражение (2) или (3) уже представляет регулярное множество.

Шаг 2.2

Регулярное выражение для множества (2) или (3) примет вид

$$p = (a \cdot b)^* + (a \cdot c)^* + (b \cdot c)^*. \tag{4}$$

Шаг 2.3

Шаг 2.3.1

Построим леволинейную и праволинейную грамматики для выражения (4). Воспользуемся рекурсивным определением регулярного выражения для построения последовательности праволинейных грамматик для каждого элементарного регулярного выражения, входящих в состав выражения (4). Собственно последняя грамматика и будет являться искомой. Определим совокупность выражений, входящих в состав (4)

$$p = \underbrace{\underbrace{\underbrace{\left(\underbrace{\underbrace{a}_{1} \cdot \underbrace{b}_{2}}_{7}\right)^*}_{10} + \underbrace{\left(\underbrace{\underbrace{a}_{3} \cdot \underbrace{c}_{4}}_{8}\right)^*}_{11}}_{13} + \underbrace{\left(\underbrace{\underbrace{b}_{5} \cdot \underbrace{c}_{6}}_{9}\right)^*}_{12}}_{14}. \tag{5}$$

Построим леволинейные и праволинейные грамматики для указанных выражений. Каждую грамматику будем нумеровать по номеру выражения, для которого строится данная грамматика. Леволинейную грамматику будем обозначать одним штрихом, праволинейную грамматику двумя штрихами. Для первых шести выражений леволинейные и праволинейные грамматики будут одинаковыми и будут следующими

$G_1 = (\{S_1\}, \Sigma, \{S_1 \to a\}, S_1)$, $G_2 = (\{S_2\}, \Sigma, \{S_2 \to b\}, S_2)$,

$G_3 = (\{S_3\}, \Sigma, \{S_3 \to a\}, S_3)$, $G_4 = (\{S_4\}, \Sigma, \{S_4 \to c\}, S_4)$,

$G_5 = (\{S_5\}, \Sigma, \{S_5 \to b\}, S_5)$, $G_6 = (\{S_6\}, \Sigma, \{S_6 \to c\}, S_6)$.

Для выражения $a \cdot b$ леволинейная и праволинейная грамматики примут вид

$G_7' = (\{S_1, S_2\}, \Sigma, \{S_1 \to a, S_2 \to S_1 b\}, S_2)$,

$G_7'' = (\{S_1, S_2\}, \Sigma, \{S_2 \to b, S_1 \to a S_2\}, S_1)$;

для $a \cdot c$:

$$G_8' = (\{S_3, S_4\}, \Sigma, \{S_3 \to a, S_4 \to S_3 c\}, S_4),$$

$$G_8'' = (\{S_3, S_4\}, \Sigma, \{S_4 \to c, S_3 \to a S_4\}, S_3);$$

для $b \cdot c$:

$$G_9{}' = \left(\{S_5, S_6\}, \Sigma, \{S_5 \to b, S_6 \to S_5 c\}, S_6\right),$$

$$G_9{}'' = \left(\{S_5, S_6\}, \Sigma, \{S_6 \to c, S_5 \to bS_6\}, S_5\right);$$

для $(a \cdot b)^*$:

$$G_{10}{}' = \left(\{S_1, S_2, S_{10}\}, \Sigma, \{S_2 \to S_1 b, S_1 \to S_{10} a \mid a, S_{10} \to S_2 \mid \varepsilon\}, S_{10}\right),$$

$$G_{10}{}'' = \left(\{S_1, S_2, S_{10}\}, \Sigma, \{S_1 \to aS_2, S_2 \to b \mid bS_{10}, S_{10} \to S_1 \mid \varepsilon\}, S_{10}\right);$$

для $(a \cdot c)^*$:

$$G_{11}{}' = \left(\{S_3, S_4, S_{11}\}, \Sigma, \{S_4 \to S_3 c, S_3 \to S_{11} a \mid a, S_{11} \to S_4 \mid \varepsilon\}, S_{11}\right),$$

$$G_{11}{}'' = \left(\{S_3, S_4, S_{11}\}, \Sigma, \{S_3 \to aS_4, S_4 \to c \mid cS_{11}, S_{11} \to S_3 \mid \varepsilon\}, S_{11}\right);$$

для $(b \cdot c)^*$:

$$G_{12}{}' = \left(\{S_5, S_6, S_{12}\}, \Sigma, \{S_6 \to S_5 c, S_5 \to S_{12} b \mid b, S_{12} \to S_6 \mid \varepsilon\}, S_{12}\right),$$

$$G_{12}{}'' = \left(\{S_5, S_6, S_{12}\}, \Sigma, \{S_5 \to bS_6, S_6 \to c \mid cS_{12}, S_{12} \to S_5 \mid \varepsilon\}, S_{12}\right);$$

для $(a \cdot b)^* + (a \cdot c)^*$:

$$G_{13}{}' = \begin{pmatrix} \{S_1, S_2, S_{10}, S_3, S_4, S_{11}, S_{13}\}, \Sigma, \\ \{S_2 \to S_1 b, S_1 \to S_{10} a \mid a, S_{10} \to S_2 \mid \varepsilon, \\ S_4 \to S_3 c, S_3 \to S_{11} a \mid a, S_{11} \to S_4 \mid \varepsilon, S_{13} \to S_{10} \mid S_{11}\}, S_{13} \end{pmatrix},$$

$$G_{13}{}'' = \begin{pmatrix} \{S_1, S_2, S_{10}, S_3, S_4, S_{11}, S_{13}\}, \Sigma, \\ \{S_1 \to aS_2, S_2 \to b \mid bS_{10}, S_{10} \to S_1 \mid \varepsilon, \\ S_3 \to aS_4, S_4 \to c \mid cS_{11}, S_{11} \to S_3 \mid \varepsilon, S_{13} \to S_{10} \mid S_{11}\}, S_{13} \end{pmatrix};$$

для $(a \cdot b)^* + (a \cdot c)^* + (b \cdot c)^*$:

$$G_{14}{}' = \left(\begin{array}{l} \{S_1, S_2, S_{10}, S_3, S_4, S_{11}, S_{13}, S_5, S_6, S_{12}, S_{14}\}, \Sigma, \\ \left\{ \begin{array}{l} S_2 \to S_1 b, S_1 \to S_{10} a \mid a, S_{10} \to S_2 \mid \varepsilon, S_4 \to S_3 c, \\ S_3 \to S_{11} a \mid a, S_{11} \to S_4 \mid \varepsilon, S_{13} \to S_{10} \mid S_{11}, S_6 \to S_5 c, \\ S_5 \to S_{12} b \mid b, S_{12} \to S_6 \mid \varepsilon, S_{14} \to S_{13} \mid S_{12} \end{array} \right\}, S_{14} \end{array} \right),$$

$$G_{14}{}'' = \left(\begin{array}{l} \{S_1, S_2, S_{10}, S_3, S_4, S_{11}, S_{13}, S_5, S_6, S_{12}, S_{14}\}, \Sigma, \\ \left\{ \begin{array}{l} S_1 \to aS_2, S_2 \to b \mid bS_{10}, S_{10} \to S_1 \mid \varepsilon, \\ S_3 \to aS_4, S_4 \to c \mid cS_{11}, S_{11} \to S_3 \mid \varepsilon, S_{13} \to S_{10} \mid S_{11}, \\ S_5 \to bS_6, S_6 \to c \mid cS_{12}, S_{12} \to S_5 \mid \varepsilon, S_{14} \to S_{12} \mid S_{13} \end{array} \right\}, S_{14} \end{array} \right);$$

Переупорядочим множества, составляющие грамматику

$$G_{14}' = \left(\begin{array}{l} \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{14}\}, \Sigma, \\ \left\{ \begin{array}{l} S_1 \to S_{10}a \mid a, S_2 \to S_1b, S_3 \to S_{11}a \mid a, S_4 \to S_3c, \\ S_5 \to S_{12}b \mid b, S_6 \to S_5c, S_{10} \to S_2 \mid \varepsilon, S_{11} \to S_4 \mid \varepsilon, \\ S_{12} \to S_6 \mid \varepsilon, S_{13} \to S_{10} \mid S_{11}, S_{14} \to S_{13} \mid S_{12} \end{array} \right\}, S_{14} \end{array} \right),$$

$$G_{14}'' = \left(\begin{array}{l} \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{14}\}, \Sigma, \\ \left\{ \begin{array}{l} S_1 \to aS_2, S_2 \to b \mid bS_{10}, S_3 \to aS_4, S_4 \to c \mid cS_{11}, \\ S_5 \to bS_6, S_6 \to c \mid cS_{12}, S_{10} \to S_1 \mid \varepsilon, S_{11} \to S_3 \mid \varepsilon, \\ S_{12} \to S_5 \mid \varepsilon, S_{13} \to S_{10} \mid S_{11}, S_{14} \to S_{12} \mid S_{13} \end{array} \right\}, S_{14} \end{array} \right).$$

Шаг 2.3.2

На этом шаге производим преобразование (приведение) грамматики. Цель этого преобразования заключается в удалении недостижимых символов грамматики, т.е. символов, которые не встречаются ни в одной сентенциальной форме грамматики, бесплодных символов, для которых в грамматике нет правил вывода, пустых правил (правил вида $A \to \varepsilon$), которые дают лишний переход конечного автомата, что приводит к замедлению алгоритма разбора цепочки, цепных правил (правил вида $A \to B$), т.е. правил которые могут привести к зацикливанию алгоритма.

Шаг 2.3.2.1

Проверка пустоты

Для леволинейной грамматики G_{14}':

$C_0 = \varnothing$.

$C_1 = \{S_1, S_3, S_5, S_{10}, S_{11}, S_{12}\} \cup C_0 = \{S_1, S_3, S_5, S_{10}, S_{11}, S_{12}\}$.

$C_2 = \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{14}\} \cup C_1 =$

$= \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{14}\} \cup \{S_1, S_3, S_5, S_{10}, S_{11}, S_{12}\} = .$

$= \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{14}\}$

$C_3 = \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{14}\} \cup C_2 =$

$= \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{14}\} \cup$

$\cup \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{14}\} =$

$= \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{14}\}$

Язык, порождаемый грамматикой G_{14}' не пуст.

Для праволинейной грамматики G_{14}''

$C_0 = \varnothing$.

$C_1 = \{S_2, S_4, S_6, S_{10}, S_{11}, S_{12}\} \cup C_0 = \{S_2, S_4, S_6, S_{10}, S_{11}, S_{12}\}$.

$C_2 = \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{14}\} \cup C_1 =$
$= \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{14}\} \cup \{S_2, S_4, S_6, S_{10}, S_{11}, S_{12}\} = .$
$= \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{14}\}$

$C_3 = \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{14}\} \cup C_2 =$
$= \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{14}\} \cup$
$\cup \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{14}\} =$.
$= \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{14}\}$

Язык, порождаемый грамматикой G_{14}'' не пуст.

Шаг 2.3.2.2

Удаление бесполезных символов

Для леволинейной грамматики G_{14}':

$C_0 = \varnothing$.

$C_1 = \{S_1, S_3, S_5, S_{10}, S_{11}, S_{12}\} \cup C_0 = \{S_1, S_3, S_5, S_{10}, S_{11}, S_{12}\}$.

$C_2 = \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{14}\} \cup C_1 =$
$= \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{14}\} \cup \{S_1, S_3, S_5, S_{10}, S_{11}, S_{12}\} = .$
$= \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{14}\}$

$C_3 = \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{14}\} \cup C_2 =$
$= \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{14}\} \cup$
$\cup \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{14}\} =$.
$= \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{14}\}$

Бесполезных символов нет, следовательно, грамматика G_{14}' не изменилась.

Для праволинейной грамматики G_{14}''

$C_0 = \varnothing$.

$C_1 = \{S_2, S_4, S_6, S_{10}, S_{11}, S_{12}\} \cup C_0 = \{S_2, S_4, S_6, S_{10}, S_{11}, S_{12}\}$.

$C_2 = \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{14}\} \cup C_1 =$
$= \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{14}\} \cup \{S_2, S_4, S_6, S_{10}, S_{11}, S_{12}\} = .$
$= \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{14}\}$

$C_3 = \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{14}\} \cup C_2 =$
$= \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{14}\} \cup$
$\cup \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{14}\} =$.
$= \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{14}\}$

Бесполезных символов нет, следовательно, грамматика G_{14}'' не изменилась.

Шаг 2.3.2.3

Удаление недостижимых символов

Для леволинейной грамматики G_{14}':

$C_0 = \{S_{14}\}$.

$C_1 = \{S_{12}, S_{13}\} \cup C_0 =$

$= \{S_{12}, S_{13}\} \cup \{S_{14}\} = \{S_{12}, S_{13}, S_{14}\}$

$C_2 = \{S_6, S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{13}\} \cup C_1 =$

$= \{S_6, S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{13}\} \cup \{S_{12}, S_{13}, S_{14}\} = \{S_6, S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{14}\}$

$C_3 = \{S_2, S_4, S_5, c, S_6, S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{13}\} \cup C_2 =$

$= \{S_2, S_4, S_5, c, S_6, S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{13}\} \cup \{S_6, S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{14}\} =$

$= \{S_2, S_4, S_5, c, S_6, S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{14}\}$

$C_4 = \{S_1, b, S_2, S_3, S_4, S_5, c, S_6, S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{13}\} \cup C_3 =$

$= \{S_1, b, S_2, S_3, S_4, S_5, c, S_6, S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{13}\} \cup$

$\cup \{S_2, S_4, S_5, c, S_6, S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{14}\} =$

$= \{S_1, b, S_2, S_3, S_4, S_5, c, S_6, S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{14}\}$

$C_5 = \{S_1, a, b, S_2, S_3, S_4, S_5, c, S_6, S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{13}\} \cup C_4 =$

$= \{S_1, a, b, S_2, S_3, S_4, S_5, c, S_6, S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{13}\} \cup$

$\cup \{S_1, b, S_2, S_3, S_4, S_5, c, S_6, S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{14}\} =$

$= \{S_1, a, b, S_2, S_3, S_4, S_5, c, S_6, S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{14}\}$

$C_6 = \{S_1, a, b, S_2, S_3, S_4, S_5, c, S_6, S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{13}\} \cup C_5 =$

$= \{S_1, a, b, S_2, S_3, S_4, S_5, c, S_6, S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{13}\} \cup$

$\cup \{S_1, b, S_2, S_3, S_4, S_5, c, S_6, S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{14}\} =$

$= \{S_1, a, b, S_2, S_3, S_4, S_5, c, S_6, S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{14}\}$

Недостижимых символов нет, следовательно, грамматика G_{14}' не изменилась.

Для праволинейной грамматики G_{14}''

$C_0 = \{S_{14}\}$.

$C_1 = \{S_{12}, S_{13}\} \cup C_0 =$

$= \{S_{12}, S_{13}\} \cup \{S_{14}\} = \{S_{12}, S_{13}, S_{14}\}$.

$C_2 = \{S_5, S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{13}\} \cup C_1 =$

$= \{S_5, S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{13}\} \cup \{S_{12}, S_{13}, S_{14}\} = \{S_5, S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{14}\}$.

$C_3 = \{S_1, S_3, b, S_5, S_6, S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{13}\} \cup C_2 =$

$= \{S_1, S_3, b, S_5, S_6, S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{13}\} \cup \{S_5, S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{14}\} =.$

$= \{S_1, S_3, b, S_5, S_6, S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{14}\}$

$C_4 = \{S_1, b, a, S_2, S_3, S_4, S_5, c, S_6, S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{13}\} \cup C_3 =$

$= \{S_1, b, a, S_2, S_3, S_4, S_5, c, S_6, S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{13}\} \cup$

$\cup \{S_1, S_3, b, S_5, S_6, S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{14}\} =$

$= \{S_1, b, a, S_2, S_3, S_4, S_5, c, S_6, S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{14}\}$

$C_5 = \{S_1, b, a, S_2, S_3, S_4, S_5, c, S_6, S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{13}\} \cup C_4 =$

$= \{S_1, b, a, S_2, S_3, S_4, S_5, c, S_6, S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{13}\} \cup$

$\cup \{S_1, S_3, b, S_5, S_6, S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{14}\} =$

$= \{S_1, b, a, S_2, S_3, S_4, S_5, c, S_6, S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{14}\}$

Недостижимых символов нет, следовательно, грамматика G_{14}'' не изменилась.

<u>Шаг 2.3.2.4</u>

<u>Удаление пустых правил</u>

Для леволинейной грамматики G_{14}':

$C_0 = \{S_{10}, S_{11}, S_{12}\}.$

$C_1 = \{S_{13}, S_{14}\} \cup C_0 =$

$= \{S_{13}, S_{14}\} \cup \{S_{10}, S_{11}, S_{12}\} = \{S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{14}\}.$

$C_2 = \{S_{13}, S_{14}\} \cup C_1 =$

$= \{S_{13}, S_{14}\} \cup \{S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{14}\} = \{S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{14}\}.$

Итоговая грамматика G_{15}' без пустых правил и после добавления новых правил примет вид

$$G_{15}' = \left(\begin{array}{l} \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{14}, S_{15}\}, \Sigma, \\ \left\{ \begin{array}{l} S_1 \to S_{10}a \mid a, S_2 \to S_1 b, S_3 \to S_{11}a \mid a, S_4 \to S_3 c, \\ S_5 \to S_{12}b \mid b, S_6 \to S_5 c, S_{10} \to S_2, S_{11} \to S_4, \\ S_{12} \to S_6, S_{13} \to S_{10} \mid S_{11}, S_{14} \to S_{13} \mid S_{12}, S_{15} \to S_{14} \mid \varepsilon \end{array} \right\}, S_{15} \end{array} \right)$$

Для праволинейной грамматики G_{14}''

$C_0 = \{S_{10}, S_{11}, S_{12}\}.$

$C_1 = \{S_{13}, S_{14}\} \cup C_0 =$

$= \{S_{13}, S_{14}\} \cup \{S_{10}, S_{11}, S_{12}\} = \{S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{14}\}.$

$C_2 = \{S_{13}, S_{14}\} \cup C_1 =$

$= \{S_{13}, S_{14}\} \cup \{S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{14}\} = \{S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{14}\}.$

Итоговая грамматика G_{15}'' без пустых правил и после добавления новых правил примет вид

$$G_{15}'' = \left(\begin{array}{l} \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{14}, S_{15}\}, \Sigma, \\ \left\{ \begin{array}{l} S_1 \to aS_2, S_2 \to b \mid bS_{10}, S_3 \to aS_4, S_4 \to c \mid cS_{11}, \\ S_5 \to bS_6, S_6 \to c \mid cS_{12}, S_{10} \to S_1, S_{11} \to S_3, \\ S_{12} \to S_5, S_{13} \to S_{10} \mid S_{11}, S_{14} \to S_{12} \mid S_{13}, S_{15} \to S_{14} \mid \varepsilon \end{array} \right\}, S_{15} \end{array} \right)$$

Шаг 2.3.2.5

Удаление цепных правил

Строим последовательность множеств N_i^X для леволинейной грамматики G_{15}':

$\mathrm{N}_0^{S_1} = \{S_1\}, \mathrm{N}_0^{S_2} = \{S_2\}, \mathrm{N}_0^{S_3} = \{S_3\}, \mathrm{N}_0^{S_4} = \{S_4\}, \mathrm{N}_0^{S_5} = \{S_5\}, \mathrm{N}_0^{S_6} = \{S_6\},$

$\mathrm{N}_0^{S_{10}} = \{S_{10}\}, \mathrm{N}_0^{S_{11}} = \{S_{11}\}, \mathrm{N}_0^{S_{12}} = \{S_{12}\}, \mathrm{N}_0^{S_{13}} = \{S_{13}\}, \mathrm{N}_0^{S_{14}} = \{S_{14}\}, \mathrm{N}_0^{S_{15}} = \{S_{15}\}$

$\mathrm{N}_1^{S_1} = \{S_1\}, \mathrm{N}_1^{S_2} = \{S_2\}, \mathrm{N}_1^{S_3} = \{S_3\}, \mathrm{N}_1^{S_4} = \{S_4\}, \mathrm{N}_1^{S_5} = \{S_5\}, \mathrm{N}_1^{S_6} = \{S_6\},$

$\mathrm{N}_1^{S_{10}} = \{S_2, S_{10}\}, \mathrm{N}_1^{S_{11}} = \{S_4, S_{11}\}, \mathrm{N}_1^{S_{12}} = \{S_6, S_{12}\}, \mathrm{N}_1^{S_{13}} = \{S_{10}, S_{11}, S_{13}\},$

$\mathrm{N}_1^{S_{14}} = \{S_{12}, S_{13}, S_{14}\}, \mathrm{N}_1^{S_{15}} = \{S_{14}, S_{15}\}$

Так как $\mathrm{N}_i^X = \mathrm{N}_{i-1}^X$, где $X \in \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6\}$, то построение N_i^X для $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6$.

$\mathrm{N}_2^{S_{10}} = \{S_2, S_{10}\}, \mathrm{N}_2^{S_{11}} = \{S_4, S_{11}\}, \mathrm{N}_2^{S_{12}} = \{S_6, S_{12}\}, \mathrm{N}_2^{S_{13}} = \{S_2, S_4, S_{10}, S_{11}, S_{13}\},$

$\mathrm{N}_2^{S_{14}} = \{S_6, S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{14}\}, \mathrm{N}_2^{S_{15}} = \{S_{12}, S_{13}, S_{14}, S_{15}\}$

Построение множеств N_i^X для нетерминалов S_{10}, S_{11}, S_{12} заканчиваем, так как они не изменились на втором шаге. Продолжаем построение N_i^X для нетерминалов S_{13}, S_{14}, S_{15}.

$\mathrm{N}_3^{S_{13}} = \{S_2, S_4, S_{10}, S_{11}, S_{13}\}, \mathrm{N}_3^{S_{14}} = \{S_2, S_4, S_6, S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{14}\},$

$\mathrm{N}_3^{S_{15}} = \{S_6, S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{14}, S_{15}\}$

Построение множеств N_i^X для нетерминала S_{13} заканчиваем, так как $\mathrm{N}_3^{S_{13}} = \mathrm{N}_3^{S_{13}}$. Продолжаем выполнять построение множеств N_i^X для нетерминалов S_{14}, S_{15}.

$\mathrm{N}_4^{S_{14}} = \{S_2, S_4, S_6, S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{14}\},$

$\mathrm{N}_4^{S_{15}} = \{S_2, S_4, S_6, S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{14}, S_{15}\}$

Построение множеств N_i^X для нетерминала S_{14} заканчиваем, продолжаем для S_{15}.

$\mathrm{N}_5^{S_{15}} = \{S_2, S_4, S_6, S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{14}, S_{15}\}$

Построение множеств N_i^X для всех нетерминалов грамматики G'_{15} закончено и приступаем к выполнению шага 4 алгоритма устранения цепных правил: необходимо из построенных множеств исключить нетерминалы, для которых эти множества построены.

$$\mathrm{N}^{S_1} = \mathrm{N}_0^{S_1} \setminus \{S_1\} = \varnothing, \mathrm{N}^{S_2} = \mathrm{N}_0^{S_2} \setminus \{S_2\} = \varnothing, \mathrm{N}^{S_3} = \mathrm{N}_0^{S_3} \setminus \{S_3\} = \varnothing,$$

$$\mathrm{N}^{S_4} = \mathrm{N}_0^{S_4} \setminus \{S_4\} = \varnothing, \mathrm{N}^{S_5} = \mathrm{N}_0^{S_5} \setminus \{S_5\} = \varnothing, \mathrm{N}^{S_6} = \mathrm{N}_0^{S_6} \setminus \{S_6\} = \varnothing,$$

$$\mathrm{N}^{S_{10}} = \mathrm{N}_0^{S_{10}} \setminus \{S_{10}\} = \{S_2\}, \mathrm{N}^{S_{11}} = \mathrm{N}_0^{S_{11}} \setminus \{S_{11}\} = \{S_4\}, \mathrm{N}^{S_{12}} = \mathrm{N}_0^{S_{12}} \setminus \{S_{12}\} = \{S_6\},$$

$$\mathrm{N}^{S_{13}} = \mathrm{N}_0^{S_{13}} \setminus \{S_{13}\} = \{S_2, S_4, S_{10}, S_{11}\},$$

$$\mathrm{N}^{S_{14}} = \mathrm{N}_0^{S_{14}} \setminus \{S_{14}\} = \{S_2, S_4, S_6, S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{13}\},$$

$$\mathrm{N}^{S_{15}} = \mathrm{N}_0^{S_{15}} \setminus \{S_{15}\} = \{S_2, S_4, S_6, S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{14}\}$$

Строим результирующую грамматику. Множество нетерминалов N'_{16} результирующей грамматики G'_{16} примет вид

$$\mathrm{N}'_{16} = \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{14}, S_{15}\}.$$

Множество правил P'_{16} результирующей грамматики будет содержать все правила исходной грамматики G'_{15}, кроме цепных:

$$\mathrm{P}'_{16} = \left\{ \begin{array}{l} S_1 \to S_{10}a \mid a, S_2 \to S_1 b, S_3 \to S_{11}a \mid a, S_4 \to S_3 c, \\ S_5 \to S_{12}b \mid b, S_6 \to S_5 c, S_{15} \to \varepsilon \end{array} \right\}$$

с добавлением новых правил, опираясь на соотношение вида

$$\mathrm{P}'_{16} = \left\{ (B \to \alpha) \middle| \forall (A \to \alpha) \in \mathrm{P}, A \in \mathrm{N}^B \right\},$$

то есть

$$\mathrm{P}'_{16} = \mathrm{P}'_{16} \cup \left\{ \begin{array}{l} S_{10} \to S_1 b, S_{11} \to S_3 c, S_{12} \to S_5 c, \\ S_{13} \to S_1 b \mid S_3 c, S_{14} \to S_1 b \mid S_3 c \mid S_5 c, S_{15} \to S_1 b \mid S_3 c \mid S_5 c \end{array} \right\}.$$

Таким образом, результирующая грамматика G'_{16} примет следующий вид

$$G_{16}{}' = \left(\begin{array}{l} \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{14}, S_{15}\}, \Sigma, \\ \left\{ \begin{array}{l} S_1 \to S_{10}a \mid a, S_2 \to S_1 b, S_3 \to S_{11}a \mid a, S_4 \to S_3 c, S_5 \to S_{12}b \mid b, \\ S_6 \to S_5 c, S_{10} \to S_1 b, S_{11} \to S_3 c, S_{12} \to S_5 c, \\ S_{13} \to S_1 b \mid S_3 c, S_{14} \to S_1 b \mid S_3 c \mid S_5 c, S_{15} \to S_1 b \mid S_3 c \mid S_5 c \mid \varepsilon \end{array} \right\}, S_{15} \end{array} \right)$$

Строим последовательность множеств N_i^X для праволинейной грамматики $G_{15}{}''$:

$$\mathrm{N}_0^{S_1} = \{S_1\}, \mathrm{N}_0^{S_2} = \{S_2\}, \mathrm{N}_0^{S_3} = \{S_3\}, \mathrm{N}_0^{S_4} = \{S_4\}, \mathrm{N}_0^{S_5} = \{S_5\}, \mathrm{N}_0^{S_6} = \{S_6\},$$

$$\mathrm{N}_0^{S_{10}} = \{S_{10}\}, \mathrm{N}_0^{S_{11}} = \{S_{11}\}, \mathrm{N}_0^{S_{12}} = \{S_{12}\}, \mathrm{N}_0^{S_{13}} = \{S_{13}\}, \mathrm{N}_0^{S_{14}} = \{S_{14}\}, \mathrm{N}_0^{S_{15}} = \{S_{15}\}$$

При $i = 1$ указанные множества примут следующий вид

$N_1^{S_1} = \{S_1\}, N_1^{S_2} = \{S_2\}, N_1^{S_3} = \{S_3\}, N_1^{S_4} = \{S_4\}, N_1^{S_5} = \{S_5\}, N_1^{S_6} = \{S_6\}$,

$N_1^{S_{10}} = \{S_1, S_{10}\}, N_1^{S_{11}} = \{S_3, S_{11}\}, N_1^{S_{12}} = \{S_5, S_{12}\}$,

$N_1^{S_{13}} = \{S_{10}, S_{11}, S_{13}\}, N_1^{S_{14}} = \{S_{12}, S_{13}, S_{14}\}, N_1^{S_{15}} = \{S_{14}, S_{15}\}$

Построение последовательности множеств N_i^X для нетерминалов $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6$ закончено, так как на очередном шаге построения изменение множеств для указанных нетерминалов не произошло. Продолжаем построение упомянутой выше последовательности множеств для нетерминалов $S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{14}, S_{15}$.

$N_2^{S_{10}} = \{S_1, S_{10}\}, N_2^{S_{11}} = \{S_3, S_{11}\}, N_2^{S_{12}} = \{S_5, S_{12}\}$,

$N_2^{S_{13}} = \{S_1, S_3, S_{10}, S_{11}, S_{13}\}, N_2^{S_{14}} = \{S_5, S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{14}\}$,

$N_2^{S_{15}} = \{S_{12}, S_{13}, S_{14}, S_{15}\}$

Построение последовательности множеств N_i^X для нетерминалов S_{10}, S_{11}, S_{12} закончено. Продолжаем построение N_i^X только для нетерминалов S_{13}, S_{14}, S_{15}.

$N_3^{S_{13}} = \{S_1, S_3, S_{10}, S_{11}, S_{13}\}, N_3^{S_{14}} = \{S_1, S_3, S_5, S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{14}\}$,

$N_3^{S_{15}} = \{S_5, S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{14}, S_{15}\}$

Продолжаем построение N_i^X для нетерминалов S_{14}, S_{15}, а для S_{13} это построение заканчиваем.

$N_4^{S_{14}} = \{S_1, S_3, S_5, S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{14}\}$,

$N_4^{S_{15}} = \{S_1, S_3, S_5, S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{14}, S_{15}\}$

Продолжаем только для нетерминала S_{15}.

$N_5^{S_{15}} = \{S_1, S_3, S_5, S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{14}, S_{15}\}$

Построение множеств N_i^X для всех нетерминалов грамматики G''_{15} закончено. Теперь приступаем у выполнению шага 4 алгоритма устранения цепных правил. Строим множества N^X путем исключения из построенных множеств нетерминалов, для которых эти множества построены.

$N^{S_1} = \varnothing, N^{S_2} = \varnothing, N^{S_3} = \varnothing, N^{S_4} = \varnothing, N^{S_5} = \varnothing, N^{S_6} = \varnothing$,

$N^{S_{10}} = \{S_1\}, N^{S_{11}} = \{S_3\}, N^{S_{12}} = \{S_5\}, N^{S_{13}} = \{S_1, S_3, S_{10}, S_{11}\}$,

$N^{S_{14}} = \{S_1, S_3, S_5, S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{13}\}, N^{S_{15}} = \{S_1, S_3, S_5, S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{14}\}$

Выполняем построение результирующей грамматики G''_{16}. Множество нетерминалов N''_{16} грамматики G''_{16} примет вид

$N''_{16} = N''_{15} = \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{14}, S_{15}\}$.

Множество правил P''_{16} результирующей грамматики будет содержать правила исходной грамматики G''_{15} (кроме цепных правил):

$$P''_{16} = \left\{ \begin{array}{l} S_1 \to aS_2, S_2 \to b \mid bS_{10}, S_3 \to aS_4, S_4 \to c \mid cS_{11}, \\ S_5 \to bS_6, S_6 \to c \mid cS_{12}, S_{15} \to \varepsilon \end{array} \right\}$$

с добавлением новых правил, то есть

$$\mathrm{P}''_{16} = \mathrm{P}''_{16} \cup \left\{ \begin{matrix} S_{10} \to aS_2, S_{11} \to aS_4, S_{12} \to bS_6, \\ S_{13} \to aS_2 \mid aS_4, S_{14} \to aS_2 \mid aS_4 \mid bS_6, S_{15} \to aS_2 \mid aS_4 \mid bS_6 \end{matrix} \right\}.$$

Таким образом, результирующая грамматика G''_{16} без цепных правил примет следующий вид

$$G''_{16} = \left(\begin{matrix} \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{14}, S_{15}\}, \Sigma, \\ \left\{ \begin{matrix} S_1 \to aS_2, S_2 \to b \mid bS_{10}, S_3 \to aS_4, S_4 \to c \mid cS_{11}, S_5 \to bS_6, \\ S_6 \to c \mid cS_{12}, S_{10} \to aS_2, S_{11} \to aS_4, S_{12} \to bS_6, \\ S_{13} \to aS_2 \mid aS_4, S_{14} \to aS_2 \mid aS_4 \mid bS_6, S_{15} \to aS_2 \mid aS_4 \mid bS_6 \mid \varepsilon \end{matrix} \right\}, S_{15} \end{matrix} \right)$$

Так как при удалении пустых правил и цепных правил лево– и праволинейной грамматик произошло их изменение, то необходимо повторить удаление бесполезных и недостижимых символов.

<u>Шаг 2.3.2.6</u>

Выполним удаление бесполезных символов грамматик G'_{16} и G''_{16}.

<u>Удаление бесполезных символов</u>

Для леволинейной грамматики G'_{16} получаем следующее:

$C_0 = \varnothing$

$C_1 = \{S_1, S_3, S_5, S_{15}\} \cup C_0 = \{S_1, S_3, S_5, S_{15}\}$

$C_2 = \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{14}, S_{15}\} \cup C_1 =$

$= \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{14}, S_{15}\}$

$C_3 = \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{14}, S_{15}\} \cup C_2 =$

$= \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{14}, S_{15}\}$

Бесполезных символов в грамматике G'_{16} нет, следовательно, она не изменяется.

Для праволинейной грамматики G''_{16} получаем следующее:

$C_0 = \varnothing$

$C_1 = \{S_2, S_4, S_6, S_{15}\} \cup C_0 = \{S_2, S_4, S_6, S_{15}\}$

$C_2 = \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{14}, S_{15}\} \cup C_1 =$

$= \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{14}, S_{15}\}$

$C_3 = \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{14}, S_{15}\} \cup C_2 =$

$= \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{14}, S_{15}\}$

Бесполезных символов в грамматике G''_{16} нет, следовательно, она не изменяется.

Выполним удаление недостижимых символов грамматик G'_{16} и G''_{16}.

<u>Удаление недостижимых символов</u>

Для леволинейной грамматики G'_{16} получаем следующее:

$C_0 = \{S_{15}\}$

$C_1 = \{S_1, b, S_3, c, S_5\} \cup C_0 = \{S_1, b, S_3, c, S_5, S_{15}\}$

$C_2 = \{S_1, b, S_3, c, S_5, S_{10}, a, S_{11}, S_{12}\} \cup C_1 = \{S_1, b, S_3, c, S_5, S_{10}, a, S_{11}, S_{12}, S_{15}\}$

$C_3 = \{S_{10}, a, S_{11}, S_{12}, b, S_1, S_3, c, S_5\} \cup C_2 = \{a, b, c, S_1, S_3, S_5, S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{15}\}$

Строим результирующую грамматику G'_{17} без недостижимых символов.

$\mathrm{N}'_{17} = \mathrm{N}'_{16} \cap C_3 = \{S_1, S_3, S_5, S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{15}\}$

$\Sigma'_{17} = \Sigma'_{16} \cap C_3 = \{a, b, c\}$

$$\mathrm{P}'_{17} = \left\{(A \to \alpha) \middle| \forall (A \to \alpha) \in \mathrm{P}'_{16}, A \in \mathrm{N}'_{17}, \alpha \in \left(\Sigma'_{17} \cup \mathrm{N}'_{17}\right)^*\right\} =$$

$$= \begin{Bmatrix} S_1 \to S_{10}a \mid a, S_3 \to S_{11}a \mid a, S_5 \to S_{12}b \mid b, S_{10} \to S_1 b, \\ S_{11} \to S_3 c, S_{12} \to S_5 c, S_{15} \to S_1 b \mid S_3 c \mid S_5 c \mid \varepsilon \end{Bmatrix}$$

$S'_{17} \equiv S_{15}$

Таким образом, результирующая грамматика G'_{17} примет вид

$$G'_{17} = \left(\begin{array}{l} \{S_1, S_3, S_5, S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{15}\}, \{a, b, c\}, \\ \begin{Bmatrix} S_1 \to S_{10}a \mid a, S_3 \to S_{11}a \mid a, S_5 \to S_{12}b \mid b, S_{10} \to S_1 b, \\ S_{11} \to S_3 c, S_{12} \to S_5 c, S_{15} \to S_1 b \mid S_3 c \mid S_5 c \mid \varepsilon \end{Bmatrix}, S_{15} \end{array} \right)$$

Для праволинейной грамматики G''_{16} получаем следующее:

$C_0 = \{S_{15}\}$

$C_1 = \{a, S_2, S_4, b, S_6\} \cup C_0 = \{a, S_2, S_4, b, S_6, S_{15}\}$

$C_2 = \{b, S_{10}, c, S_{11}, S_{12}, a, S_2, S_4, S_6\} \cup C_1 = \{b, S_{10}, c, S_{11}, S_{12}, a, S_2, S_4, S_6, S_{15}\}$

$C_3 = \{a, b, c, S_2, S_4, S_6, S_{10}, S_{11}, S_{12}\} \cup C_2 = \{a, b, c, S_2, S_4, S_6, S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{15}\}$

Строим результирующую грамматику G''_{17} без недостижимых символов.

$\mathrm{N}''_{17} = \mathrm{N}''_{16} \cap C_3 = \{S_2, S_4, S_5, S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{15}\}$

$\Sigma''_{17} = \Sigma''_{16} \cap C_3 = \{a, b, c\}$

$$\mathrm{P}''_{17} = \left\{(A \to \alpha) \middle| \forall (A \to \alpha) \in \mathrm{P}''_{16}, A \in \mathrm{N}''_{17}, \alpha \in \left(\Sigma''_{17} \cup \mathrm{N}''_{17}\right)^*\right\} =$$

$$= \begin{Bmatrix} S_2 \to b \mid bS_{10}, S_4 \to c \mid cS_{11}, S_6 \to c \mid cS_{12}, S_{10} \to aS_2, \\ S_{11} \to aS_4, S_{12} \to bS_6, S_{15} \to aS_2 \mid aS_4 \mid bS_6 \mid \varepsilon \end{Bmatrix}$$

$S''_{17} \equiv S_{15}$

Таким образом, результирующая грамматика G''_{17} примет вид

$$G''_{17} = \left(\begin{array}{l} \{S_2, S_4, S_5, S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{15}\}, \{a, b, c\}, \\ \begin{Bmatrix} S_2 \to b \mid bS_{10}, S_4 \to c \mid cS_{11}, S_6 \to c \mid cS_{12}, S_{10} \to aS_2, \\ S_{11} \to aS_4, S_{12} \to bS_6, S_{15} \to aS_2 \mid aS_4 \mid bS_6 \mid \varepsilon \end{Bmatrix}, S_{15} \end{array} \right)$$

Переходим к построению конечного автомата для приведенной грамматики.

Шаг 2.3.3

На этом шаге для приведенных грамматик G'_{17} и G''_{17} строим конечные автоматы.

Шаг 2.3.3.1

Делаем преобразование построенных грамматик G'_{17} и G''_{17} к автоматному виду. Так как все правила данных грамматик удовлетворяют определению автоматной грамматики, то изменение данных грамматик не производится.

Шаг 2.3.3.2

Выполняем построение конечных автоматов $M_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$ и $M_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$ для автоматных грамматик G'_{17} и G''_{17}.

Строим автомат $M_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$ для леволинейной грамматики G'_{17} следующим образом: множество возможных состояний КА будет содержать состояния, именуемые нетерминалами исходной грамматики, а также добавляется новое состояние, которое будет начальным состоянием автомата и на наименование которого действуют соглашения по наименованию нетерминалов грамматик. Таким образом, получаем множество вида

$$Q_1 = \mathrm{N}'_{17} \cup \{H\} = \{S_1, S_3, S_5, S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{15}, H\}.$$

Начальным состоянием будет новое состояние

$$q_1 \equiv H.$$

Множество заключительных состояний будет содержать целевой символ исходной грамматики

$$F_1 = \{S_{15}\}.$$

Множество переходов δ_1 результирующего автомата примет вид

$$\delta_1(S_{10}, a) = \{S_1\}, \delta_1(H, a) = \{S_1, S_3\}, \delta_1(S_{11}, a) = \{S_3\},$$
$$\delta_1(S_{12}, b) = \{S_5\}, \delta_1(H, b) = \{S_5\}, \delta_1(S_1, b) = \{S_{10}, S_{15}\},$$
$$\delta_1(S_3, c) = \{S_{11}, S_{15}\}, \delta_1(S_5, c) = \{S_{12}, S_{15}\}$$

Так как правило вида $S \to \varepsilon$ принадлежит множеству правил исходной грамматики, во множество заключительных состояний автомата добавляется начальное состояние. Таким образом множество заключительных состояний F_1 примет вид

$$F_1 = \{H, S_{15}\}.$$

Строим автомат $M_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$ для праволинейной грамматики G''_{17} следующим образом: множество возможных состояний КА будет содержать состояния, именуемые нетерминалами исходной грамматики, а также добавляется новое состояние, которое будет заключительным состоянием автомата и на наименование которого действуют соглашения по наименованию нетерминалов грамматик. Таким образом, получаем множество вида

$$Q_2 = \mathrm{N}''_{17} \cup \{F\} = \{S_2, S_4, S_5, S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{15}, F\}.$$

Начальным состоянием будет состояние, соответствующее целевому символу исходной грамматики

$$q_2 \equiv S_{15}.$$

Множество заключительных состояний будет содержать новое состояние

$$F_2 = \{F\}.$$

Множество переходов δ_2 результирующего автомата примет вид

$$\delta_2(S_2, b) = \{F, S_{10}\}, \delta_2(S_4, c) = \{F, S_{11}\}, \delta_2(S_6, c) = \{F, S_{12}\},$$

$$\delta_2(S_{10}, a) = \{S_2\}, \delta_2(S_{11}, a) = \{S_4\}, \delta_2(S_{12}, b) = \{S_6\},$$

$$\delta_2(S_{15}, a) = \{S_2, S_4\}, \delta_2(S_{15}, b) = \{S_6\}$$

Так как правило вида $S \to \varepsilon$ принадлежит множеству правил исходной грамматики, во множество заключительных состояний автомата добавляется начальное состояние. Таким образом, множество заключительных состояний F_2 примет вид

$$F_2 = \{S_{15}, F\}.$$

На этом построение конечных автоматов по автоматным грамматикам заканчивается.

Шаг 2.3.3.3

Построим диаграмму состояний автомата M. Диаграмма состояний конечного автомата – это неупорядоченный ориентированный помеченный граф, вершины которого помечены именами состояний автомата и в котором есть дуга из вершины A к вершине B, если есть такой символ $t \in \Sigma$, для которого существует функция перехода вида $\delta(A, t) = B$ во множестве δ конечного автомата M. Кроме того, эта дуга помечается списком, состоящих из всех $t \in \Sigma$, для которых есть функция перехода $\delta(A, t) = B$.

Построим диаграммы состояний для КА $M_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$ и $M_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$.

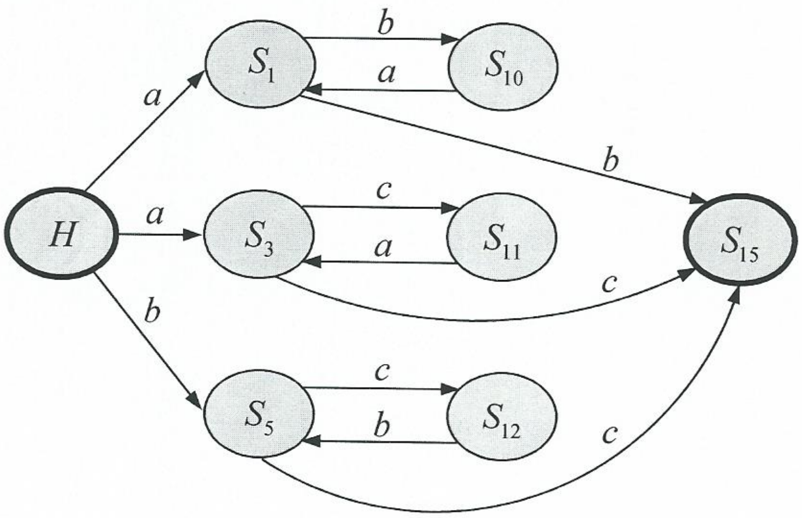

Рис. 1. Диаграмма состояний недетерминированного конечного автомата $M_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$

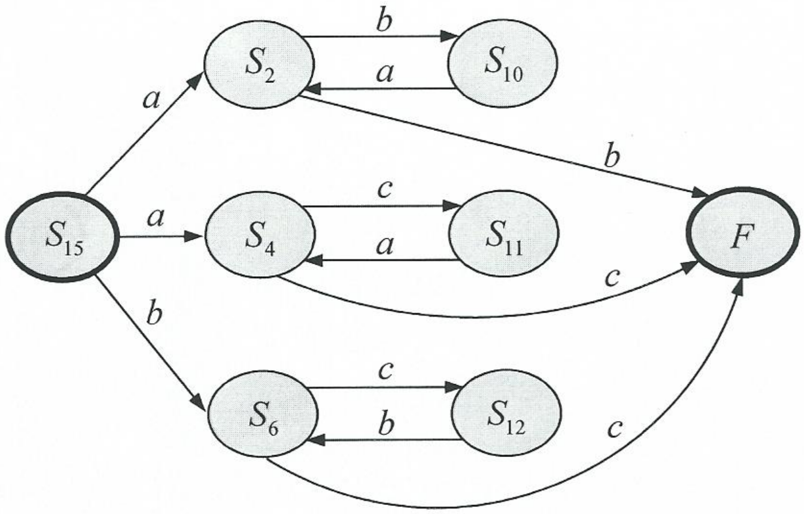

Рис. 2. Диаграмма состояний недетерминированного конечного автомата (НКА) $M_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$

На этих диаграммах и далее выделенные состояния являются заключительными.

<u>Шаг 2.4</u>

<u>Шаг 2.4.1</u>

Выполним построение конечных автоматов для выражения (4). Очередность построения конечных автоматов будет определяться таким же образом, как и в случае построения грамматик по регулярному выражению (5).

Воспользуемся рекурсивным определением регулярного выражения для построения последовательности конечных автоматов для каждого элементарного регулярного выражения, входящих в состав выражения (5). Собственно последний КА и будет являться искомым.

Построим КА для указанных выражений. Каждый КА будем нумеровать по номеру выражения, для которого строится данный КА. Кроме того нумерация состояний КА будет определяться следующим образом: номер каждого состояния будет начинаться с номера конечного автомата.

Для выражения a конечный автомат примет вид

$$M_1 = (\{q_{10}, q_{11}\}, \Sigma, \delta_1, q_{10}, \{q_{11}\}),$$

где множество переходов δ_1 автомата будет содержать переходы вида

$$\delta_1(q_{10}, a) = \{q_{11}\}.$$

Граф переходов построенного КА M_1 примет вид

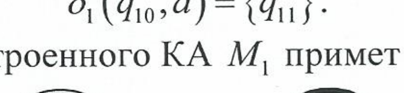

Рис. 3. Диаграмма состояний НКА M_1

Для выражения b конечный автомат примет вид

$$M_2 = (\{q_{20}, q_{21}\}, \Sigma, \delta_2, q_{20}, \{q_{21}\}),$$

где множество переходов δ_2 автомата будет содержать переходы вида

$$\delta_2(q_{20}, b) = \{q_{21}\}.$$

Граф переходов построенного КА M_2 примет вид

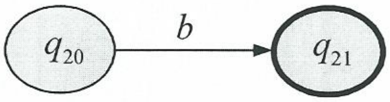

Рис. 4. Диаграмма состояний НКА M_2

Для выражения a конечный автомат примет вид

$$M_3 = (\{q_{30}, q_{31}\}, \Sigma, \delta_3, q_{30}, \{q_{31}\}),$$

где множество переходов δ_3 автомата будет содержать переходы вида

$$\delta_3(q_{30}, a) = \{q_{31}\}.$$

Граф переходов построенного КА M_3 примет вид

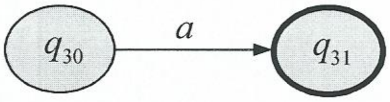

Рис. 5. Диаграмма состояний НКА M_3

Для выражения c конечный автомат примет вид

$$M_4 = (\{q_{40}, q_{41}\}, \Sigma, \delta_4, q_{40}, \{q_{41}\}),$$

где множество переходов δ_4 автомата будет содержать переходы вида

$$\delta_4(q_{40}, a) = \{q_{41}\}.$$

Граф переходов построенного КА M_4 примет вид

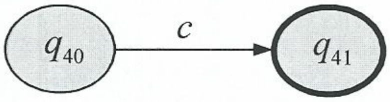

Рис. 6. Диаграмма состояний НКА M_4

Для выражения b конечный автомат примет вид

$$M_5 = (\{q_{50}, q_{51}\}, \Sigma, \delta_5, q_{50}, \{q_{51}\}),$$

где множество переходов δ_5 автомата будет содержать переходы вида

$$\delta_5(q_{50}, a) = \{q_{51}\}.$$

Граф переходов построенного КА M_5 примет вид

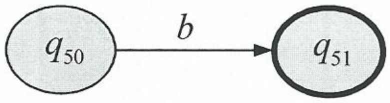

Рис. 7. Диаграмма состояний НКА M_5

Для выражения c конечный автомат примет вид

$$M_6 = (\{q_{60}, q_{61}\}, \Sigma, \delta_6, q_{60}, \{q_{61}\}),$$

где множество переходов δ_6 автомата будет содержать переходы вида

$$\delta_6(q_{60}, a) = \{q_{61}\}.$$

Граф переходов построенного КА M_6 примет вид

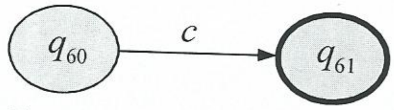

Рис. 8. Диаграмма состояний НКА M_6

Для выражения $a \cdot b$ строим КА $M_7 = (Q_7, \Sigma, \delta_7, q_{70}, F_7)$ следующим образом:

- множество состояний автомата M_7 получается путём объединения множеств состояний исходных автоматов

$$Q_7 = Q_1 \cup Q_2 = \{q_{10}, q_{11}, q_{20}, q_{21}\};$$

- начальным состоянием результирующего автомата M_7 будет начальное состояние автомата M_1

$$q_{70} \equiv q_{10};$$

- множество заключительных состояний F_7 будет содержать только множество заключительных состояний автомата M_2

$$F_7 = F_2 = \{q_{21}\};$$

- множество переходов δ_7 автомата M_7 будет содержать переходы автомата M_1, кроме переходов из заключительных состояний

$$\delta_7(q_{10}, a) = \delta_1(q_{10}, a) = \{q_{11}\},$$

а также добавляются переходы из заключительных состояний первого автомата в состояния второго автомата, в которые имеются переходы из начальных состояний второго автомата

$$\delta_7(q_{11}, b) = \varnothing \cup \delta_2(q_{20}, b) = \{q_{21}\}.$$

Кроме этого добавляются все переходы второго автомата

$$\delta_7(q_{20}, b) = \delta_2(q_{20}, b) = \{q_{21}\}.$$

Граф переходов построенного КА M_7 примет вид

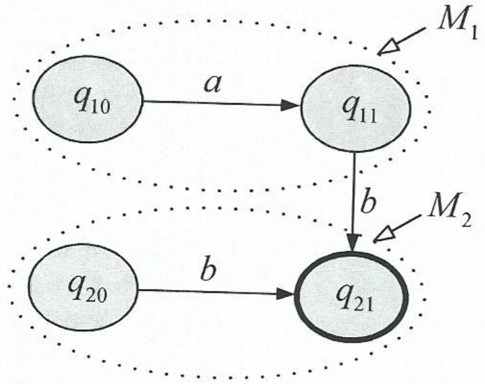

Рис. 9. Диаграмма состояний НКА M_7

Для выражения $a \cdot c$ строим КА $M_8 = (Q_8, \Sigma, \delta_8, q_{80}, F_8)$ следующим образом:

- множество состояний автомата M_8 получается путём объединения множеств состояний исходных автоматов

$$Q_8 = Q_3 \cup Q_4 = \{q_{30}, q_{31}, q_{40}, q_{41}\};$$

- начальным состоянием результирующего автомата M_8 будет начальное состояние автомата M_3

$$q_{80} \equiv q_{30};$$

- множество заключительных состояний F_8 будет содержать только множество заключительных состояний автомата M_4

$$F_8 = F_4 = \{q_{41}\};$$

- множество переходов δ_8 автомата M_8 будет содержать переходы автомата M_3, кроме переходов из заключительных состояний

$$\delta_8(q_{30}, a) = \delta_3(q_{30}, a) = \{q_{31}\},$$

а также добавляются переходы из заключительных состояний первого автомата в состояния второго автомата, в которые имеются переходы из начальных состояний второго автомата

$$\delta_8(q_{31}, c) = \varnothing \cup \delta_4(q_{40}, c) = \{q_{41}\}.$$

Кроме этого добавляются все переходы второго автомата

$$\delta_8(q_{40}, c) = \delta_4(q_{40}, c) = \{q_{41}\}.$$

Граф переходов построенного КА M_8 примет вид

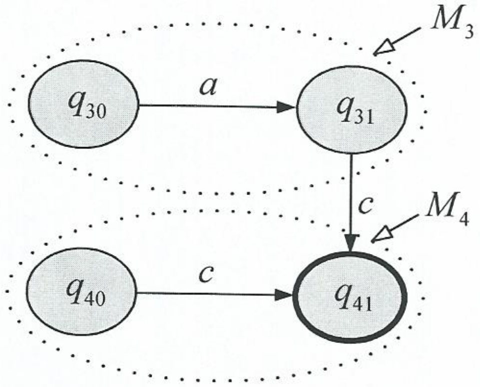

Рис. 10. Диаграмма состояний НКА M_8

Для выражения $b \cdot c$ строим КА $M_9 = (Q_9, \Sigma, \delta_9, q_{90}, F_9)$ следующим образом:

- множество состояний автомата M_9 получается путём объединения множеств состояний исходных автоматов

$$Q_9 = Q_5 \cup Q_6 = \{q_{50}, q_{51}, q_{60}, q_{61}\};$$

- начальным состоянием результирующего автомата M_9 будет начальное состояние автомата M_5

$$q_{90} \equiv q_{50};$$

- множество заключительных состояний F_9 будет содержать только множество заключительных состояний автомата M_6

$$F_9 = F_6 = \{q_{61}\};$$

- множество переходов δ_9 автомата M_9 будет содержать переходы автомата M_5, кроме переходов из заключительных состояний

$$\delta_9(q_{50}, b) = \delta_5(q_{50}, b) = \{q_{51}\},$$

а также добавляются переходы из заключительных состояний первого автомата в состояния второго автомата, в которые имеются переходы из начальных состояний второго автомата

$$\delta_9(q_{51}, c) = \varnothing \cup \delta_6(q_{60}, c) = \{q_{61}\}.$$

Кроме этого добавляются все переходы второго автомата

$$\delta_9(q_{60}, c) = \delta_6(q_{60}, c) = \{q_{61}\}.$$

Граф переходов построенного КА M_9 примет вид

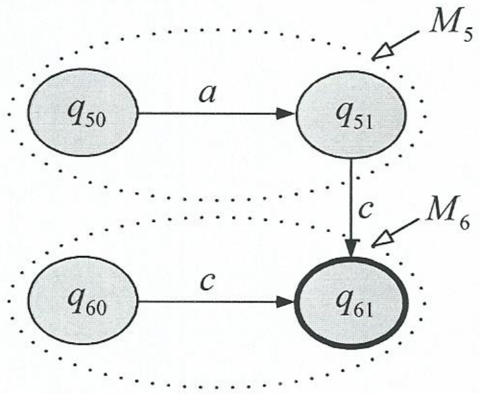

Рис. 11. Диаграмма состояний НКА M_9

Для выражения $(a \cdot b)^*$ строим КА $M_{10} = (Q_{10}, \Sigma, \delta_{10}, q_{100}, F_{10})$ следующим образом:

- множество состояний автомата M_{10} получается путём объединения множества состояний исходного автомата M_7 и нового состояния q_{100}

$$Q_{10} = Q_7 \cup \{q_{100}\} = \{q_{10}, q_{11}, q_{20}, q_{21}, q_{100}\};$$

- начальным состоянием результирующего автомата M_{10} будет новое состояние q_{100};

- множество заключительных состояний F_{10} будет содержать множество заключительных состояний F_7 автомата M_7 с добавлением начального состояния автомата M_{10}

$$F_{10} = F_7 \cup \{q_{100}\} = \{q_{21}, q_{100}\};$$

- множество переходов δ_{10} автомата M_{10} будет содержать переходы исходного автомата M_7, кроме переходов из заключительных состояний

$$\delta_{10}(q_{10}, a) = \delta_7(q_{10}, a) = \{q_{11}\}$$

$$\delta_{10}(q_{11}, b) = \delta_7(q_{11}, b) = \{q_{21}\},$$

$$\delta_{10}(q_{20}, b) = \delta_7(q_{20}, b) = \{q_{21}\}$$

а также добавляются переходы из заключительных состояний исходного автомата в состояния, в которые имеются переходы из начальных состояний исходного автомата

$$\delta_{10}(q_{21},a)=\varnothing\cup\delta_7(q_{10},a)=\{q_{11}\}.$$

Кроме того, добавляются переходы из начального состояния результирующего автомата M_{10} в состояния, в которые имеются переходы из начального состояния исходного автомата M_7

$$\delta_{10}(q_{100},a)=\delta_7(q_{10},a)=\{q_{11}\}.$$

Граф переходов построенного КА M_{10} примет вид

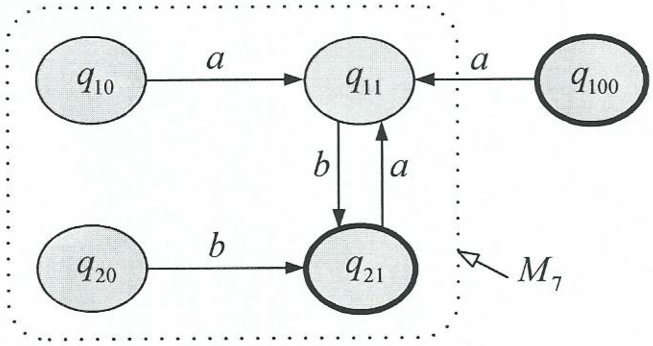

Рис. 12. Диаграмма состояний НКА M_{10}

Для выражения $(a\cdot c)^*$ строим КА $M_{11}=(Q_{11},\Sigma,\delta_{11},q_{110},F_{11})$ следующим образом:

- множество состояний автомата M_{11} получается путём объединения множества состояний исходного автомата M_8 и нового состояния q_{110}

$$Q_{11}=Q_8\cup\{q_{110}\}=\{q_{30},q_{31},q_{40},q_{41},q_{110}\};$$

- начальным состоянием результирующего автомата M_{11} будет новое состояние q_{110};

- множество заключительных состояний F_{11} будет содержать множество заключительных состояний F_8 автомата M_8 с добавлением начального состояния автомата M_{11}

$$F_{11}=F_8\cup\{q_{110}\}=\{q_{41},q_{110}\};$$

- множество переходов δ_{11} автомата M_{11} будет содержать переходы исходного автомата M_8, кроме переходов из заключительных состояний

$$\delta_{11}(q_{30},a)=\delta_8(q_{30},a)=\{q_{31}\}$$
$$\delta_{11}(q_{31},c)=\delta_8(q_{31},c)=\{q_{41}\}\ ,$$
$$\delta_{11}(q_{40},c)=\delta_8(q_{40},c)=\{q_{41}\}$$

а также добавляются переходы из заключительных состояний исходного автомата в состояния, в которые имеются переходы из начальных состояний исходного автомата

$$\delta_{11}(q_{41},a)=\varnothing\cup\delta_8(q_{30},a)=\{q_{31}\}.$$

Кроме того, добавляются переходы из начального состояния результирующего автомата M_{11} в состояния, в которые имеются переходы из начального состояния исходного автомата M_8

$$\delta_{11}(q_{110},a)=\delta_8(q_{30},a)=\{q_{31}\}.$$

Граф переходов построенного КА M_{11} примет вид

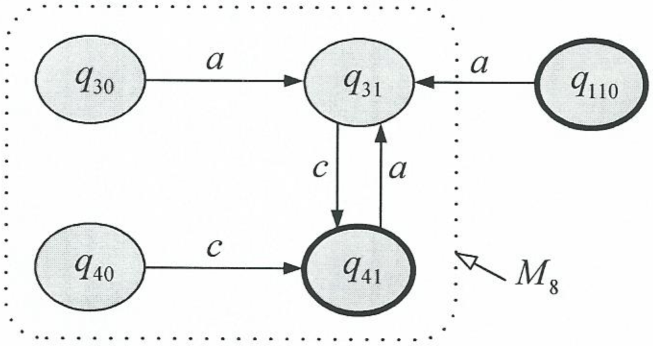

Рис. 13. Диаграмма состояний НКА M_{11}

Для выражения $(b\cdot c)^*$ строим КА $M_{12}=(Q_{12},\Sigma,\delta_{12},q_{120},F_{12})$ следующим образом:

- множество состояний автомата M_{12} получается путём объединения множества состояний исходного автомата M_9 и нового состояния q_{120}

$$Q_{12}=Q_9\cup\{q_{120}\}=\{q_{50},q_{51},q_{60},q_{61},q_{120}\};$$

- начальным состоянием результирующего автомата M_{12} будет новое состояние q_{120};

- множество заключительных состояний F_{12} будет содержать множество заключительных состояний F_9 автомата M_9 с добавлением начального состояния автомата M_{12}

$$F_{12}=F_9\cup\{q_{120}\}=\{q_{61},q_{120}\};$$

- множество переходов δ_{12} автомата M_{12} будет содержать переходы исходного автомата M_9, кроме переходов из заключительных состояний

$$\delta_{12}(q_{50},b)=\delta_9(q_{50},b)=\{q_{51}\}$$

$$\delta_{12}(q_{51},c)=\delta_9(q_{51},c)=\{q_{61}\},$$

$$\delta_{12}(q_{60},c)=\delta_9(q_{60},c)=\{q_{61}\}$$

а также добавляются переходы из заключительных состояний исходного автомата в состояния, в которые имеются переходы из начальных состояний исходного автомата

$$\delta_{12}(q_{61},b)=\varnothing\cup\delta_9(q_{50},b)=\{q_{51}\}.$$

Кроме того, добавляются переходы из начального состояния результирующего автомата M_{12} в состояния, в которые имеются переходы из начального состояния исходного автомата M_9

$$\delta_{12}(q_{120},b)=\delta_9(q_{50},b)=\{q_{51}\}.$$

Граф переходов построенного КА M_{12} примет вид

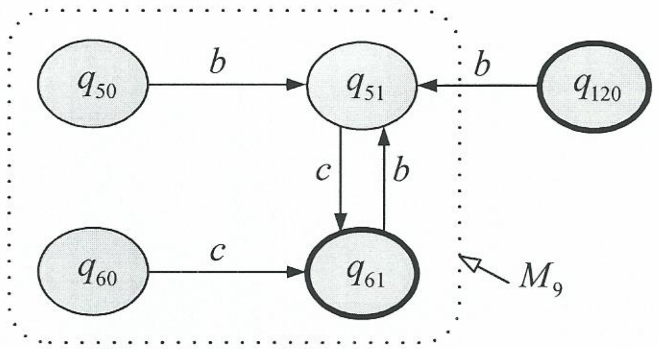

Рис. 14. Диаграмма состояний НКА M_{12}

Для выражения $(a \cdot b)^* + (a \cdot c)^*$ строим КА $M_{13} = (Q_{13}, \Sigma, \delta_{13}, q_{130}, F_{13})$ следующим образом:

- множество состояний автомата M_{13} получается путём объединения множества состояний исходных автоматов M_{10}, M_{11} и нового состояния q_{130}

$$Q_{13} = Q_{10} \cup Q_{11} \cup \{q_{130}\} = \{q_{10}, q_{11}, q_{20}, q_{21}, q_{100}, q_{30}, q_{31}, q_{40}, q_{41}, q_{110}, q_{130}\};$$

- начальным состоянием результирующего автомата M_{13} будет новое состояние q_{130};

- множество заключительных состояний F_{13} будет содержать множество заключительных состояний F_{10} автомата M_{10} и множество заключительных состояний F_{11} автомата M_{11} с добавлением начального состояния автомата M_{13}

$$F_{13} = F_{10} \cup F_{11} \cup \{q_{130}\} = \{q_{21}, q_{100}, q_{41}, q_{110}, q_{130}\};$$

- множество переходов δ_{13} автомата M_{13} будет содержать переходы исходных автомата M_{10} и M_{11}

$$\begin{gathered}
\delta_{13}(q_{10}, a) = \delta_{10}(q_{10}, a) = \{q_{11}\} \\
\delta_{13}(q_{11}, b) = \delta_{10}(q_{11}, b) = \{q_{21}\} \\
\delta_{13}(q_{21}, a) = \delta_{10}(q_{21}, a) = \{q_{11}\} \\
\delta_{13}(q_{20}, b) = \delta_{10}(q_{20}, b) = \{q_{21}\} \\
\delta_{13}(q_{100}, a) = \delta_{10}(q_{100}, a) = \{q_{11}\} \\
\delta_{13}(q_{30}, a) = \delta_{11}(q_{30}, a) = \{q_{31}\} \\
\delta_{13}(q_{31}, c) = \delta_{11}(q_{31}, c) = \{q_{41}\} \\
\delta_{13}(q_{41}, a) = \delta_{11}(q_{41}, a) = \{q_{31}\} \\
\delta_{13}(q_{40}, c) = \delta_{11}(q_{40}, c) = \{q_{41}\} \\
\delta_{13}(q_{110}, a) = \delta_{11}(q_{110}, a) = \{q_{31}\}
\end{gathered},$$

а также добавляются переходы из начального состояния результирующего автомата M_{13} в состояния, в которые имеются переходы из начальных состояний исходных автоматов M_{10} и M_{11}

$$\delta_{13}\left(q_{130},a\right)=\delta_{10}\left(q_{100},a\right)\cup\delta_{11}\left(q_{110},a\right)=\left\{q_{11}\right\}\cup\left\{q_{31}\right\}=\left\{q_{11},q_{31}\right\}.$$

Граф переходов построенного КА M_{13} примет вид

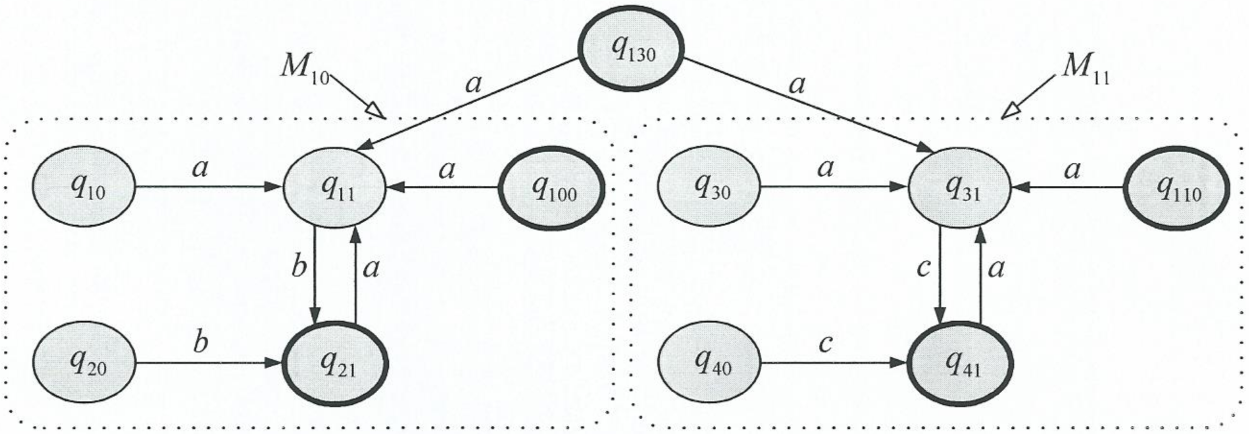

Рис. 15. Диаграмма состояний НКА M_{13}

Для выражения $\left(a\cdot b\right)^{*}+\left(a\cdot c\right)^{*}+\left(b\cdot c\right)^{*}$ строим КА $M_{14}=\left(Q_{14},\Sigma,\delta_{14},q_{140},F_{14}\right)$ следующим образом:

- множество состояний автомата M_{14} получается путём объединения множества состояний исходных автоматов M_{13}, M_{12} и нового состояния q_{140}

$$Q_{14}=Q_{13}\cup Q_{12}\cup\left\{q_{140}\right\}=\left\{\begin{matrix}q_{10},q_{11},q_{20},q_{21},q_{100},q_{30},q_{31},q_{40},q_{41},q_{110},q_{130},\\ q_{50},q_{51},q_{60},q_{61},q_{120},q_{140}\end{matrix}\right\};$$

- начальным состоянием результирующего автомата M_{14} будет новое состояние q_{140};

- множество заключительных состояний F_{14} будет содержать множество заключительных состояний F_{13} автомата M_{13} и множество заключительных состояний F_{12} автомата M_{12} с добавлением начального состояния автомата M_{14}

$$F_{14}=F_{13}\cup F_{12}\cup\left\{q_{140}\right\}=\left\{q_{21},q_{100},q_{41},q_{110},q_{130},q_{61},q_{120},q_{140}\right\};$$

- множество переходов δ_{14} автомата M_{14} будет содержать переходы исходных автомата M_{13} и M_{12}

$$\delta_{14}(q_{10},a)=\delta_{13}(q_{10},a)=\{q_{11}\}, \quad \delta_{14}(q_{40},c)=\delta_{13}(q_{40},c)=\{q_{41}\},$$
$$\delta_{14}(q_{11},b)=\delta_{13}(q_{11},b)=\{q_{21}\}, \quad \delta_{14}(q_{110},a)=\delta_{13}(q_{110},a)=\{q_{31}\},$$
$$\delta_{14}(q_{21},a)=\delta_{13}(q_{21},a)=\{q_{11}\}, \quad \delta_{14}(q_{50},b)=\delta_{12}(q_{50},b)=\{q_{51}\},$$
$$\delta_{14}(q_{20},b)=\delta_{13}(q_{20},b)=\{q_{21}\}, \quad \delta_{14}(q_{51},c)=\delta_{12}(q_{51},c)=\{q_{61}\},$$
$$\delta_{14}(q_{100},a)=\delta_{13}(q_{100},a)=\{q_{11}\}, \quad \delta_{14}(q_{60},c)=\delta_{12}(q_{60},c)=\{q_{61}\},$$
$$\delta_{14}(q_{30},a)=\delta_{13}(q_{30},a)=\{q_{31}\}, \quad \delta_{14}(q_{61},b)=\delta_{12}(q_{61},b)=\{q_{51}\},$$
$$\delta_{14}(q_{31},c)=\delta_{13}(q_{31},c)=\{q_{41}\}, \quad \delta_{14}(q_{120},b)=\delta_{12}(q_{120},b)=\{q_{51}\},$$
$$\delta_{14}(q_{41},a)=\delta_{13}(q_{41},a)=\{q_{31}\},$$

а также добавляются переходы из начального состояния результирующего автомата M_{14} в состояния, в которые имеются переходы из начальных состояний исходных автоматов M_{13} и M_{12}

$$\delta_{14}(q_{140},a)=\delta_{13}(q_{130},a)\cup\varnothing=\{q_{11},q_{31}\}$$
$$\delta_{14}(q_{140},b)=\varnothing\cup\delta_{12}(q_{120},b)=\{q_{51}\}$$

Граф переходов построенного КА M_{14} примет вид

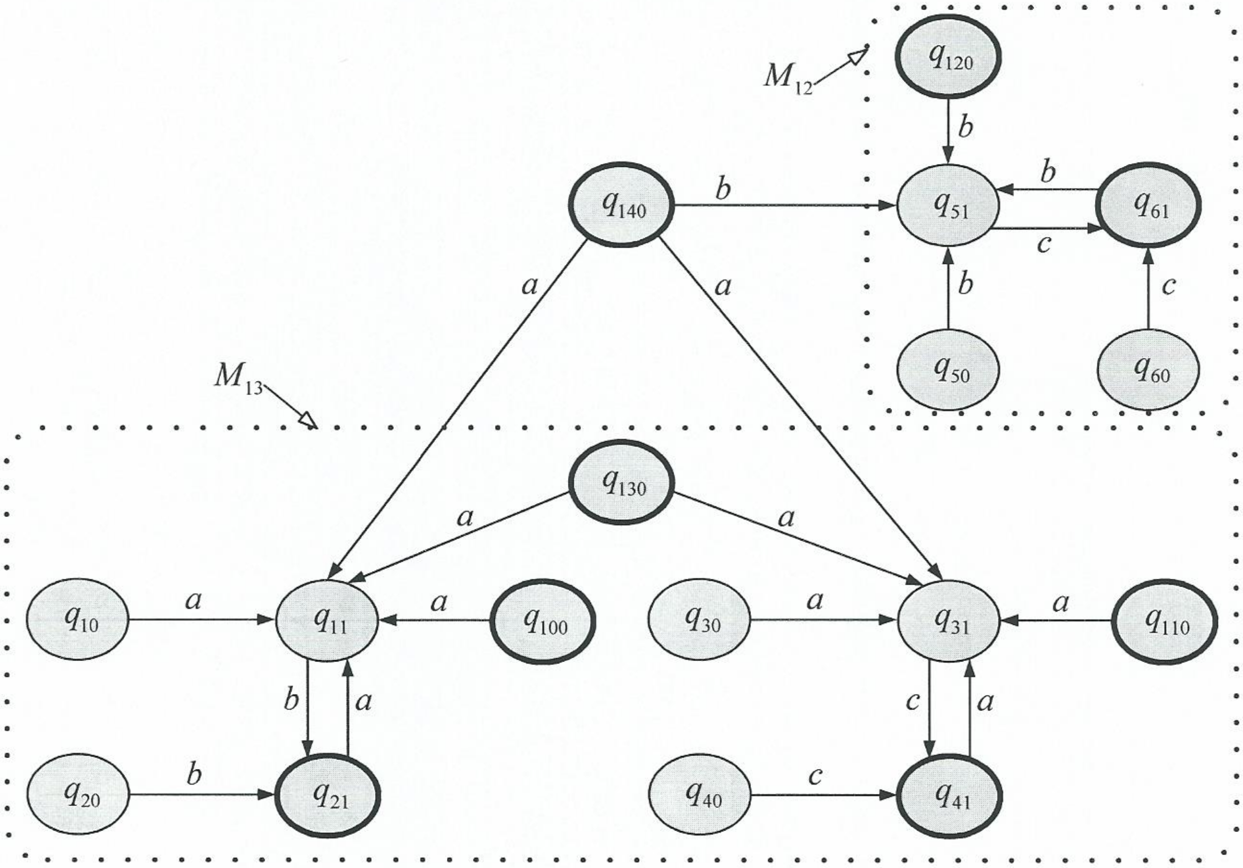

Рис. 16. Диаграмма состояний НКА M_{14}

Результирующим автоматом $M_3=(Q_3,\Sigma,\delta_3,q_3,F_3)$ будет автомат M_{14}.

<u>**Шаг 2.5**</u>

На этом шаге проверяем, является ли построенные конечные автоматы детерминированными. Если они недетерминированные, то строим для них детерминированные конечные автоматы (ДКА). Один из наиболее важных результатов теории конечных автоматов состоит в том, что класс языков, определяемых недетерминированными конечными автоматами, совпадает с классом языков, определяемых детерминированными конечными автоматами. Это означает, что для любого недетерминированного конечного автомата (НКА) всегда можно построить детерминированный конечный автомат, определяющий тот же язык.

Рассмотрим множество функций переходов построенных конечных автоматов $M_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$, $M_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$ и $M_3 = (Q_3, \Sigma, \delta_3, q_3, F_3)$. Нетрудно заметить, что данные автоматы все без исключения являются НКА, так как существует более одной функции перехода по одному символу в разные состояния.

Шаг 2.6

Выполним построение детерминированных конечных автоматов для НКА M_1, M_2 и M_3. Заметим, что множество состояний Q' результирующего ДКА состоит из всех подмножеств множества Q исходного автомата. Каждое состояние из Q' будем обозначать $[A_1 A_2 \ldots A_n]$, где $A_i \in Q$ (учитываем, что состояния $[A_i A_j]$ и $[A_j A_i]$ – одно и тоже состояние). Тогда получаем множество Q', содержащее количество состояний, выражающееся по формуле $N_{Q'} = \sum_{m=1}^{n} \left(C_n^m \right) = \sum_{m=1}^{n} \left(\frac{n!}{(n-m)!m!} \right) = 2^n - 1$.

Учитывая вышесказанное, построим ДКА $M_1' = (Q_1', \Sigma, \delta_1', q_1', F_1')$ следующим образом:

- множество состояний автомата M_1' примет вид

$$Q_1' = \left\{ \begin{matrix} [H],[S_1],[S_3],\ldots,[S_{15}],[HS_1],\ldots,[S_{12}S_{15}],\ldots, \\ [HS_1S_3S_5S_{10}S_{11}S_{12}S_{15}] \end{matrix} \right\};$$

- начальным состоянием q_1' результирующего автомата M_1' будет состояние, в наименовании которого присутствует только наименование начального состояния q_1 исходного автомата M_1

$$q_1' \equiv [H];$$

- множество заключительных состояний F_1' примет вид

$$F_1' = \left\{ \left[q_1 \ldots q_j q_{j+1} \ldots q_{j+k} \right] \right\},$$

где $\{q_1, \ldots, q_j\} \subseteq \{H, S_{15}\}$, $j = \overline{1,2}$,

$\{q_{j+1}, \ldots, q_{j+k}\} \subseteq \{S_1, S_3, S_5, S_{10}, S_{11}, S_{12}\}$, $k = \overline{0,6}$;

- множество переходов δ_1' автомата M_1' будет содержать переходы вида

$\delta_1'([Hq_1 \ldots q_k], a) = [S_1S_3]$, $\{q_1, \ldots, q_k\} \subseteq \{S_1, S_3, S_5, S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{15}\}$, $k = \overline{0,7}$;
$\delta_1'([S_{10}S_{11}q_1 \ldots q_k], a) = [S_1S_3]$, $\{q_1, \ldots, q_k\} \subseteq \{S_1, S_3, S_5, S_{12}, S_{15}\}$, $k = \overline{0,5}$;
$\delta_1'([S_{10}q_1 \ldots q_k], a) = [S_1]$, $\{q_1, \ldots, q_k\} \subseteq \{S_1, S_3, S_5, S_{12}, S_{15}\}$, $k = \overline{0,5}$;
$\delta_1'([S_{11}q_1 \ldots q_k], a) = [S_3]$, $\{q_1, \ldots, q_k\} \subseteq \{S_1, S_3, S_5, S_{12}, S_{15}\}$, $k = \overline{0,5}$;
$\delta_1'([HS_1q_1 \ldots q_k], b) = [S_5S_{10}S_{15}]$, $\{q_1, \ldots, q_k\} \subseteq \{S_3, S_5, S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{15}\}$, $k = \overline{0,6}$;
$\delta_1'([S_1S_{12}q_1 \ldots q_k], b) = [S_5S_{10}S_{15}]$, $\{q_1, \ldots, q_k\} \subseteq \{S_3, S_5, S_{10}, S_{11}, S_{15}\}$, $k = \overline{0,5}$;
$\delta_1'([S_1q_1 \ldots q_k], b) = [S_{10}S_{15}]$, $\{q_1, \ldots, q_k\} \subseteq \{S_3, S_5, S_{10}, S_{11}, S_{15}\}$, $k = \overline{0,5}$;
$\delta_1'([Hq_1 \ldots q_k], b) = [S_5]$, $\{q_1, \ldots, q_k\} \subseteq \{S_3, S_5, S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{15}\}$, $k = \overline{0,6}$;
$\delta_1'([S_{12}q_1 \ldots q_k], b) = [S_5]$, $\{q_1, \ldots, q_k\} \subseteq \{S_3, S_5, S_{10}, S_{11}, S_{15}\}$, $k = \overline{0,5}$;
$\delta_1'([S_3S_5q_1 \ldots q_k], c) = [S_{11}S_{12}S_{15}]$, $\{q_1, \ldots, q_k\} \subseteq \{H, S_1, S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{15}\}$, $k = \overline{0,6}$;
$\delta_1'([S_3q_1 \ldots q_k], c) = [S_{11}S_{15}]$, $\{q_1, \ldots, q_k\} \subseteq \{H, S_1, S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{15}\}$, $k = \overline{0,6}$;
$\delta_1'([S_5q_1 \ldots q_k], c) = [S_{12}S_{15}]$, $\{q_1, \ldots, q_k\} \subseteq \{H, S_1, S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{15}\}$, $k = \overline{0,6}$.

Аналогично, ДКА $M_2' = (Q_2', \Sigma, \delta_2', q_2', F_2')$ будет построен следующим образом:

- множество состояний автомата M_2' примет вид

$$Q_2' = \begin{Bmatrix} [S_{15}], [S_2], [S_4], \ldots, [F], [S_{15}S_2], \ldots, [S_{12}F], \ldots, \\ [S_{15}S_2S_4S_6S_{10}S_{11}S_{12}F] \end{Bmatrix};$$

- начальным состоянием q_2' результирующего автомата M_2' будет состояние, в наименовании которого присутствует только наименование начального состояния q_2 исходного автомата M_2

$$q_2' \equiv [S_{15}];$$

- множество заключительных состояний F_2' примет вид

$$F_2' = \{[q_1 \ldots q_j q_{j+1} \ldots q_{j+k}]\},$$

где $\{q_1, \ldots, q_j\} \subseteq \{S_{15}, F\}$, $j = \overline{1,2}$,
$\{q_{j+1}, \ldots, q_{j+k}\} \subseteq \{S_2, S_4, S_6, S_{10}, S_{11}, S_{12}\}$, $k = \overline{0,6}$;

- множество переходов δ_2' автомата M_2' будет содержать переходы вида

$\delta_2'([S_{15}q_1 \ldots q_k], a) = [S_2S_4]$, $\{q_1, \ldots, q_k\} \subseteq \{S_2, S_4, S_6, S_{10}, S_{11}, S_{12}, F\}$, $k = \overline{0,7}$;
$\delta_2'([S_{10}S_{11}q_1 \ldots q_k], a) = [S_2S_4]$, $\{q_1, \ldots, q_k\} \subseteq \{S_2, S_4, S_6, S_{12}, F\}$, $k = \overline{0,5}$;
$\delta_2'([S_{10}q_1 \ldots q_k], a) = [S_2]$, $\{q_1, \ldots, q_k\} \subseteq \{S_2, S_4, S_6, S_{12}, F\}$, $k = \overline{0,5}$;

$$\delta_2'([S_{11}q_1\ldots q_k],a)=[S_4],\qquad \{q_1,\ldots,q_k\}\subseteq\{S_2,S_4,S_6,S_{12},F\},\qquad k=\overline{0,5};$$
$$\delta_2'([S_{15}S_2q_1\ldots q_k],b)=[S_6S_{10}F],\qquad \{q_1,\ldots,q_k\}\subseteq\{S_4,S_6,S_{10},S_{11},S_{12},F\},\qquad k=\overline{0,6};$$
$$\delta_2'([S_2S_{12}q_1\ldots q_k],b)=[S_6S_{10}F],\qquad \{q_1,\ldots,q_k\}\subseteq\{S_4,S_6,S_{10},S_{11},F\},\qquad k=\overline{0,5};$$
$$\delta_2'([S_2q_1\ldots q_k],b)=[S_{10}F],\qquad \{q_1,\ldots,q_k\}\subseteq\{S_4,S_6,S_{10},S_{11},F\},\qquad k=\overline{0,5};$$
$$\delta_2'([S_{15}q_1\ldots q_k],b)=[S_6],\qquad \{q_1,\ldots,q_k\}\subseteq\{S_4,S_6,S_{10},S_{11},S_{12},F\},\qquad k=\overline{0,6};$$
$$\delta_2'([S_{12}q_1\ldots q_k],b)=[S_6],\qquad \{q_1,\ldots,q_k\}\subseteq\{S_4,S_6,S_{10},S_{11},F\},\qquad k=\overline{0,5};$$
$$\delta_2'([S_4S_6q_1\ldots q_k],c)=[S_{11}S_{12}F],\qquad \{q_1,\ldots,q_k\}\subseteq\{S_{15},S_2,S_{10},S_{11},S_{12},F\},\qquad k=\overline{0,6};$$
$$\delta_2'([S_4q_1\ldots q_k],c)=[S_{11}F],\qquad \{q_1,\ldots,q_k\}\subseteq\{S_{15},S_2,S_{10},S_{11},S_{12},F\},\qquad k=\overline{0,6};$$
$$\delta_2'([S_6q_1\ldots q_k],c)=[S_{12}F],\qquad \{q_1,\ldots,q_k\}\subseteq\{S_{15},S_2,S_{10},S_{11},S_{12},F\},\qquad k=\overline{0,6}.$$

Аналогично, ДКА $M_3'=(Q_3',\Sigma,\delta_3',q_3',F_3')$ будет построен следующим образом:

- множество состояний автомата M_3' примет вид
$$Q_3'=\left\{\begin{matrix}[q_{140}],[q_{10}],[q_{11}],\ldots,[q_{130}],[q_{140}q_{10}],\ldots,[q_{120}q_{130}],\ldots,\\ [q_{140}q_{10}q_{11}q_{20}q_{21}q_{30}q_{31}q_{40}q_{41}q_{50}q_{51}q_{60}q_{61}q_{100}q_{110}q_{120}q_{130}]\end{matrix}\right\};$$
- начальным состоянием q_3' результирующего автомата M_3' будет состояние, в наименовании которого присутствует только наименование начального состояния q_3 исходного автомата M_3
$$q_3'\equiv[q_{140}];$$
- множество заключительных состояний F_3' примет вид
$$F_3'=\{[q_1\ldots q_jq_{j+1}\ldots q_{j+k}]\},$$

где $\{q_1,\ldots,q_j\}\subseteq\{q_{21},q_{41},q_{61},q_{100},q_{110},q_{120},q_{130},q_{140}\}$, $j=\overline{1,8}$,
$\{q_{j+1},\ldots,q_{j+k}\}\subseteq\{q_{10},q_{11},q_{20},q_{30},q_{31},q_{40},q_{50},q_{51},q_{60}\}$, $k=\overline{0,9}$;

- множество переходов δ_3' автомата M_3' будет содержать переходы вида

$$\delta_3'([q_{140}p_1\ldots p_k],a)=[q_{11}q_{31}],$$
$$\{p_1,\ldots,p_k\}\subseteq\left\{\begin{matrix}q_{10},q_{11},q_{20},q_{21},q_{100},q_{30},q_{31},q_{40},q_{41},q_{110},\\ q_{50},q_{51},q_{60},q_{61},q_{120},q_{130}\end{matrix}\right\},\qquad k=\overline{0,16};$$
$$\delta_3'([q_{130}p_1\ldots p_k],a)=[q_{11}q_{31}],$$
$$\{p_1,\ldots,p_k\}\subseteq\left\{\begin{matrix}q_{10},q_{11},q_{20},q_{21},q_{100},q_{30},q_{31},q_{40},q_{41},q_{110},\\ q_{50},q_{51},q_{60},q_{61},q_{120}\end{matrix}\right\},\qquad k=\overline{0,15};$$
$$\delta_3'([q_{10}q_{30}p_1\ldots p_k],a)=[q_{11}q_{31}],$$

$$\{p_1,\dots,p_k\} \subseteq \left\{\begin{matrix} q_{11},q_{20},q_{21},q_{100},q_{31},q_{40},q_{41},q_{110}, \\ q_{50},q_{51},q_{60},q_{61},q_{120} \end{matrix}\right\}, \qquad k=\overline{0,13};$$

$$\delta_3'([q_{10}q_{41}p_1\dots p_k],a)=[q_{11}q_{31}],$$
$$\{p_1,\dots,p_k\} \subseteq \{q_{11},q_{20},q_{21},q_{100},q_{31},q_{40},q_{110},q_{50},q_{51},q_{60},q_{61},q_{120}\}, \qquad k=\overline{0,12};$$

$$\delta_3'([q_{10}q_{110}p_1\dots p_k],a)=[q_{11}q_{31}],$$
$$\{p_1,\dots,p_k\} \subseteq \{q_{11},q_{20},q_{21},q_{100},q_{31},q_{40},q_{50},q_{51},q_{60},q_{61},q_{120}\}, \qquad k=\overline{0,11};$$

$$\delta_3'([q_{21}q_{30}p_1\dots p_k],a)=[q_{11}q_{31}],$$
$$\{p_1,\dots,p_k\} \subseteq \{q_{11},q_{20},q_{100},q_{31},q_{40},q_{41},q_{110},q_{50},q_{51},q_{60},q_{61},q_{120}\}, \qquad k=\overline{0,12};$$

$$\delta_3'([q_{21}q_{41}p_1\dots p_k],a)=[q_{11}q_{31}],$$
$$\{p_1,\dots,p_k\} \subseteq \{q_{11},q_{20},q_{100},q_{31},q_{40},q_{110},q_{50},q_{51},q_{60},q_{61},q_{120}\}, \qquad k=\overline{0,11};$$

$$\delta_3'([q_{21}q_{110}p_1\dots p_k],a)=[q_{11}q_{31}],$$
$$\{p_1,\dots,p_k\} \subseteq \{q_{11},q_{20},q_{100},q_{31},q_{40},q_{50},q_{51},q_{60},q_{61},q_{120}\}, \qquad k=\overline{0,10};$$

$$\delta_3'([q_{100}q_{30}p_1\dots p_k],a)=[q_{11}q_{31}],$$
$$\{p_1,\dots,p_k\} \subseteq \{q_{11},q_{20},q_{31},q_{40},q_{41},q_{110},q_{50},q_{51},q_{60},q_{61},q_{120}\}, \qquad k=\overline{0,11};$$

$$\delta_3'([q_{100}q_{41}p_1\dots p_k],a)=[q_{11}q_{31}],$$
$$\{p_1,\dots,p_k\} \subseteq \{q_{11},q_{20},q_{31},q_{40},q_{110},q_{50},q_{51},q_{60},q_{61},q_{120}\}, \qquad k=\overline{0,10};$$

$$\delta_3'([q_{100}q_{110}p_1\dots p_k],a)=[q_{11}q_{31}],$$
$$\{p_1,\dots,p_k\} \subseteq \{q_{11},q_{20},q_{31},q_{40},q_{50},q_{51},q_{60},q_{61},q_{120}\}, \qquad k=\overline{0,9};$$

$$\delta_3'([q_{10}p_1\dots p_k],a)=[q_{11}],$$
$$\{p_1,\dots,p_k\} \subseteq \{q_{11},q_{20},q_{21},q_{100},q_{31},q_{40},q_{50},q_{51},q_{60},q_{61},q_{120}\}, \qquad k=\overline{0,11};$$

$$\delta_3'([q_{21}p_1\dots p_k],a)=[q_{11}],$$
$$\{p_1,\dots,p_k\} \subseteq \{q_{11},q_{20},q_{100},q_{31},q_{40},q_{50},q_{51},q_{60},q_{61},q_{120}\}, \qquad k=\overline{0,10};$$

$$\delta_3'([q_{100}p_1\dots p_k],a)=[q_{11}],$$
$$\{p_1,\dots,p_k\} \subseteq \{q_{11},q_{20},q_{31},q_{40},q_{50},q_{51},q_{60},q_{61},q_{120}\}, \qquad k=\overline{0,9};$$

$$\delta_3'([q_{30}p_1\dots p_k],a)=[q_{31}],$$
$$\{p_1,\dots,p_k\} \subseteq \left\{\begin{matrix} q_{11},q_{20},q_{30},q_{31},q_{40},q_{41},q_{110}, \\ q_{50},q_{51},q_{60},q_{61},q_{120},q_{130} \end{matrix}\right\}, \qquad k=\overline{0,13};$$

$$\delta_3'([q_{41}p_1\dots p_k],a)=[q_{31}],$$
$$\{p_1,\dots,p_k\} \subseteq \{q_{11},q_{20},q_{31},q_{40},q_{41},q_{110},q_{50},q_{51},q_{60},q_{61},q_{120},q_{130}\}, \qquad k=\overline{0,12};$$

$$\delta_3'([q_{110}p_1\dots p_k],a)=[q_{31}],$$
$$\{p_1,\dots,p_k\} \subseteq \{q_{11},q_{20},q_{31},q_{40},q_{41},q_{50},q_{51},q_{60},q_{61},q_{120},q_{130}\}, \qquad k=\overline{0,11};$$

$$\delta_3'\left(\left[q_{11}q_{50}p_1\dots p_k\right],b\right)=\left[q_{21}q_{51}\right],$$
$$\left\{p_1,\dots,p_k\right\}\subseteq\left\{\begin{matrix}q_{10},q_{20},q_{21},q_{100},q_{30},q_{31},q_{40},q_{41},q_{110},\\ q_{51},q_{60},q_{61},q_{120},q_{130},q_{140}\end{matrix}\right\},\qquad k=\overline{0,15};$$

$$\delta_3'\left(\left[q_{11}q_{61}p_1\dots p_k\right],b\right)=\left[q_{21}q_{51}\right],$$
$$\left\{p_1,\dots,p_k\right\}\subseteq\left\{\begin{matrix}q_{10},q_{20},q_{21},q_{100},q_{30},q_{31},q_{40},q_{41},q_{110},\\ q_{51},q_{60},q_{120},q_{130},q_{140}\end{matrix}\right\},\qquad k=\overline{0,14};$$

$$\delta_3'\left(\left[q_{11}q_{120}p_1\dots p_k\right],b\right)=\left[q_{21}q_{51}\right],$$
$$\left\{p_1,\dots,p_k\right\}\subseteq\left\{\begin{matrix}q_{10},q_{20},q_{21},q_{100},q_{30},q_{31},q_{40},q_{41},q_{110},\\ q_{51},q_{60},q_{130},q_{140}\end{matrix}\right\},\qquad k=\overline{0,13};$$

$$\delta_3'\left(\left[q_{11}q_{140}p_1\dots p_k\right],b\right)=\left[q_{21}q_{51}\right],$$
$$\left\{p_1,\dots,p_k\right\}\subseteq\left\{q_{10},q_{20},q_{21},q_{100},q_{30},q_{31},q_{40},q_{41},q_{110},q_{51},q_{60},q_{130}\right\},\qquad k=\overline{0,12};$$

$$\delta_3'\left(\left[q_{20}q_{50}p_1\dots p_k\right],b\right)=\left[q_{21}q_{51}\right],$$
$$\left\{p_1,\dots,p_k\right\}\subseteq\left\{\begin{matrix}q_{10},q_{21},q_{100},q_{30},q_{31},q_{40},q_{41},q_{110},\\ q_{51},q_{60},q_{61},q_{120},q_{130},q_{140}\end{matrix}\right\},\qquad k=\overline{0,14};$$

$$\delta_3'\left(\left[q_{20}q_{61}p_1\dots p_k\right],b\right)=\left[q_{21}q_{51}\right],$$
$$\left\{p_1,\dots,p_k\right\}\subseteq\left\{\begin{matrix}q_{10},q_{21},q_{100},q_{30},q_{31},q_{40},q_{41},q_{110},\\ q_{51},q_{60},q_{120},q_{130},q_{140}\end{matrix}\right\},\qquad k=\overline{0,13};$$

$$\delta_3'\left(\left[q_{20}q_{120}p_1\dots p_k\right],b\right)=\left[q_{21}q_{51}\right],$$
$$\left\{p_1,\dots,p_k\right\}\subseteq\left\{q_{10},q_{21},q_{100},q_{30},q_{31},q_{40},q_{41},q_{110},q_{51},q_{60},q_{130},q_{140}\right\},\qquad k=\overline{0,12};$$

$$\delta_3'\left(\left[q_{20}q_{140}p_1\dots p_k\right],b\right)=\left[q_{21}q_{51}\right],$$
$$\left\{p_1,\dots,p_k\right\}\subseteq\left\{q_{10},q_{21},q_{100},q_{30},q_{31},q_{40},q_{41},q_{110},q_{51},q_{60},q_{130}\right\},\qquad k=\overline{0,11};$$

$$\delta_3'\left(\left[q_{11}p_1\dots p_k\right],b\right)=\left[q_{21}\right],$$
$$\left\{p_1,\dots,p_k\right\}\subseteq\left\{q_{10},q_{20},q_{21},q_{100},q_{30},q_{31},q_{40},q_{41},q_{110},q_{51},q_{60},q_{130}\right\},\qquad k=\overline{0,12};$$

$$\delta_3'\left(\left[q_{20}p_1\dots p_k\right],b\right)=\left[q_{21}\right],$$
$$\left\{p_1,\dots,p_k\right\}\subseteq\left\{q_{10},q_{21},q_{100},q_{30},q_{31},q_{40},q_{41},q_{110},q_{51},q_{60},q_{130}\right\},\qquad k=\overline{0,11};$$

$$\delta_3'\left(\left[q_{50}p_1\dots p_k\right],b\right)=\left[q_{51}\right],$$
$$\left\{p_1,\dots,p_k\right\}\subseteq\left\{\begin{matrix}q_{10},q_{21},q_{100},q_{30},q_{31},q_{40},q_{41},q_{110},\\ q_{50},q_{51},q_{60},q_{61},q_{120},q_{130},q_{140}\end{matrix}\right\},\qquad k=\overline{0,15};$$

$$\delta_3'\left(\left[q_{61}p_1\dots p_k\right],b\right)=\left[q_{51}\right],$$
$$\left\{p_1,\dots,p_k\right\}\subseteq\left\{\begin{matrix}q_{10},q_{21},q_{100},q_{30},q_{31},q_{40},q_{41},q_{110},\\ q_{50},q_{51},q_{60},q_{120},q_{130},q_{140}\end{matrix}\right\},\qquad k=\overline{0,14};$$

$$\delta_3'\left(\left[q_{120}p_1\dots p_k\right],b\right)=\left[q_{51}\right],$$

$$\{p_1,\dots,p_k\}\subseteq\begin{Bmatrix}q_{10},q_{21},q_{100},q_{30},q_{31},q_{40},q_{41},q_{110},\\ q_{50},q_{51},q_{60},q_{130},q_{140}\end{Bmatrix},\qquad k=\overline{0,13};$$

$$\delta_3'([q_{140}p_1\dots p_k],b)=[q_{51}],$$
$$\{p_1,\dots,p_k\}\subseteq\{q_{10},q_{21},q_{100},q_{30},q_{31},q_{40},q_{41},q_{110},q_{50},q_{51},q_{60},q_{130}\},\qquad k=\overline{0,12};$$

$$\delta_3'([q_{31}q_{51}p_1\dots p_k],c)=[q_{41}q_{61}],$$
$$\{p_1,\dots,p_k\}\subseteq\begin{Bmatrix}q_{10},q_{11},q_{20},q_{21},q_{100},q_{30},q_{40},q_{41},q_{110},\\ q_{50},q_{60},q_{61},q_{120},q_{130},q_{140}\end{Bmatrix},\qquad k=\overline{0,15};$$

$$\delta_3'([q_{31}q_{60}p_1\dots p_k],c)=[q_{41}q_{61}],$$
$$\{p_1,\dots,p_k\}\subseteq\begin{Bmatrix}q_{10},q_{11},q_{20},q_{21},q_{100},q_{30},q_{40},q_{41},q_{110},\\ q_{50},q_{61},q_{120},q_{130},q_{140}\end{Bmatrix},\qquad k=\overline{0,14};$$

$$\delta_3'([q_{40}q_{51}p_1\dots p_k],c)=[q_{41}q_{61}],$$
$$\{p_1,\dots,p_k\}\subseteq\begin{Bmatrix}q_{10},q_{11},q_{20},q_{21},q_{100},q_{30},q_{41},q_{110},\\ q_{50},q_{60},q_{61},q_{120},q_{130},q_{140}\end{Bmatrix},\qquad k=\overline{0,14};$$

$$\delta_3'([q_{40}q_{60}p_1\dots p_k],c)=[q_{41}q_{61}],$$
$$\{p_1,\dots,p_k\}\subseteq\begin{Bmatrix}q_{10},q_{11},q_{20},q_{21},q_{100},q_{30},q_{41},q_{110},\\ q_{50},q_{61},q_{120},q_{130},q_{140}\end{Bmatrix},\qquad k=\overline{0,13};$$

$$\delta_3'([q_{31}p_1\dots p_k],c)=[q_{41}],$$
$$\{p_1,\dots,p_k\}\subseteq\begin{Bmatrix}q_{10},q_{11},q_{20},q_{21},q_{100},q_{30},q_{40},q_{41},q_{110},\\ q_{50},q_{61},q_{120},q_{130},q_{140}\end{Bmatrix},\qquad k=\overline{0,14};$$

$$\delta_3'([q_{40}p_1\dots p_k],c)=[q_{41}],$$
$$\{p_1,\dots,p_k\}\subseteq\begin{Bmatrix}q_{10},q_{11},q_{20},q_{21},q_{100},q_{30},q_{41},q_{110},\\ q_{50},q_{61},q_{120},q_{130},q_{140}\end{Bmatrix},\qquad k=\overline{0,13};$$

$$\delta_3'([q_{51}p_1\dots p_k],c)=[q_{61}],$$
$$\{p_1,\dots,p_k\}\subseteq\begin{Bmatrix}q_{10},q_{11},q_{20},q_{21},q_{100},q_{30},q_{41},q_{110},\\ q_{50},q_{60},q_{61},q_{120},q_{130},q_{140}\end{Bmatrix},\qquad k=\overline{0,14};$$

$$\delta_3'([q_{60}p_1\dots p_k],c)=[q_{61}],$$
$$\{p_1,\dots,p_k\}\subseteq\begin{Bmatrix}q_{10},q_{11},q_{20},q_{21},q_{100},q_{30},q_{41},q_{110},\\ q_{50},q_{61},q_{120},q_{130},q_{140}\end{Bmatrix},\qquad k=\overline{0,13};$$

Шаг 2.7

Выполним удаление недостижимых состояний построенных ДКА M_1', M_2' и M_3'.. Для этого будем использовать два дополнительных множества: множество достижимых состояний R и множество текущих активных состояний на каждом шаге алгоритма P_i. Результатом работы алгоритма является полное множество достижимых состояний данных детерминированных автоматов.

Выполним построение этих множеств для автомата M_1'

$$R = \{[H]\},\ P_0 = \{[H]\}.$$

На следующем шаге работы алгоритма удаления недостижимых состояний автомата получаем

$$P_1 = \{[S_1 S_3],[S_5]\}.$$

Так как разность множества текущих активных состояний и множества достижимых состояний не пустое множество, то есть

$$P_1 \setminus R = \{[S_1 S_3],[S_5]\} \neq \varnothing,$$

то множество достижимых состояний R примет следующий вид

$$R = R \cup \{[S_1 S_3],[S_5]\} = \{[H],[S_1 S_3],[S_5]\}.$$

Продолжаем построение множеств активных состояний. Множество P_2 примет вид

$$P_2 = \{[S_{10} S_{15}],[S_{11} S_{15}],[S_{12} S_{15}]\}.$$

Так как разность множества текущих активных состояний и множества достижимых состояний не пустое множество, то есть

$$P_2 \setminus R = \{[S_{10} S_{15}],[S_{11} S_{15}],[S_{12} S_{15}]\} \neq \varnothing,$$

то множество достижимых состояний R примет следующий вид

$$R = R \cup \{[S_{10} S_{15}],[S_{11} S_{15}],[S_{12} S_{15}]\} =$$
$$= \{[H],[S_1 S_3],[S_5],[S_{10} S_{15}],[S_{11} S_{15}],[S_{12} S_{15}]\}.$$

Продолжаем построение множеств активных состояний. Множество P_3 примет вид

$$P_3 = \{[S_1],[S_3],[S_5]\}.$$

Так как разность множества текущих активных состояний и множества достижимых состояний не пустое множество, то есть

$$P_3 \setminus R = \{[S_1],[S_3]\} \neq \varnothing,$$

то множество достижимых состояний R примет следующий вид

$$R = R \cup \{[S_1],[S_3]\} =$$
$$= \{[H],[S_1 S_3],[S_1],[S_3],[S_5],[S_{10} S_{15}],[S_{11} S_{15}],[S_{12} S_{15}]\}.$$

Продолжаем построение множеств активных состояний. Множество P_4 примет вид

$$P_4 = \{[S_{10} S_{15}],[S_{11} S_{15}],[S_{12} S_{15}]\}.$$

Так как разность множества текущих активных состояний и множества достижимых состояний пустое множество, то есть

$$P_4 \setminus R = \varnothing,$$

то алгоритм удаления недостижимых состояний останавливается и ДКА $M_1' = (Q_1', \Sigma, \delta_1', q_1', F_1')$ определится следующим образом:

- множество состояний автомата M_1' примет вид
$$Q_1' = R = \{[H],[S_1S_3],[S_1],[S_3],[S_5],[S_{10}S_{15}],[S_{11}S_{15}],[S_{12}S_{15}]\};$$
- начальным состоянием q_1' результирующего автомата M_1' будет состояние
$$q_1' \equiv [H];$$
- множество заключительных состояний F_1' примет вид
$$F_1' = \{[H],[S_{10}S_{15}],[S_{11}S_{15}],[S_{12}S_{15}]\};$$
- множество переходов δ_1' автомата M_1' будет содержать переходы вида

$\delta_1'([H],a) = [S_1S_3]$, $\delta_1'([H],b) = [S_5]$, $\delta_1'([S_1S_3],b) = [S_{10}S_{15}]$,
$\delta_1'([S_1S_3],c) = [S_{11}S_{15}]$, $\delta_1'([S_{10}S_{15}],a) = [S_1]$, $\delta_1'([S_1],b) = [S_{10}S_{15}]$,
$\delta_1'([S_{11}S_{15}],a) = [S_3]$, $\delta_1'([S_3],c) = [S_{11}S_{15}]$, $\delta_1'([S_5],c) = [S_{12}S_{15}]$,
$\delta_1'([S_{12}S_{15}],b) = [S_5]$.

Выполним построение этих множеств для автомата M_2'
$$R = \{[S_{15}]\},\ P_0 = \{[S_{15}]\}.$$

На следующем шаге работы алгоритма удаления недостижимых состояний автомата получаем
$$P_1 = \{[S_2S_4],[S_6]\}.$$
Так как разность множества текущих активных состояний и множества достижимых состояний не пустое множество, то есть
$$P_1 \setminus R = \{[S_2S_4],[S_6]\} \neq \varnothing,$$
то множество достижимых состояний R примет следующий вид
$$R = R \cup \{[S_2S_4],[S_6]\} = \{[S_{15}],[S_2S_4],[S_6]\}.$$

Продолжаем построение множеств активных состояний. Множество P_2 примет вид
$$P_2 = \{[S_{10}F],[S_{11}F],[S_{12}F]\}.$$
Так как разность множества текущих активных состояний и множества достижимых состояний не пустое множество, то есть
$$P_2 \setminus R = \{[S_{10}F],[S_{11}F],[S_{12}F]\} \neq \varnothing,$$
то множество достижимых состояний R примет следующий вид
$$R = R \cup \{[S_{10}F],[S_{11}F],[S_{12}F]\} =$$
$$= \{[S_{15}],[S_2S_4],[S_6],[S_{10}F],[S_{11}F],[S_{12}F]\}.$$

Продолжаем построение множества текущих активных состояний. Множество P_3 примет вид

$$P_3 = \{[S_2],[S_4],[S_6]\}.$$

Так как разность множества текущих активных состояний и множества достижимых состояний не пустое множество, то есть

$$P_3 \setminus R = \{[S_2],[S_4]\} \neq \varnothing,$$

то множество достижимых состояний R примет следующий вид

$$R = R \cup \{[S_2],[S_4]\} =$$
$$= \{[S_{15}],[S_2S_4],[S_2],[S_4],[S_6],[S_{10}F],[S_{11}F],[S_{12}F]\}.$$

Продолжаем построение множества текущих активных состояний. Множество P_4 примет вид

$$P_4 = \{[S_{10}F],[S_{11}F],[S_{12}F]\}.$$

Так как разность множества текущих активных состояний и множества достижимых состояний пустое множество, то есть

$$P_4 \setminus R = \varnothing,$$

то алгоритм удаления недостижимых состояний останавливается и ДКА $M_2' = (Q_2',\Sigma,\delta_2',q_2',F_2')$ определится следующим образом:

- множество состояний автомата M_2' примет вид
$$Q_2' = R = \{[S_{15}],[S_2S_4],[S_2],[S_4],[S_6],[S_{10}F],[S_{11}F],[S_{12}F]\};$$
- начальным состоянием q_2' результирующего автомата M_2' будет состояние
$$q_2' \equiv [S_{15}];$$
- множество заключительных состояний F_2' примет вид
$$F_2' = \{[S_{15}],[S_{10}F],[S_{11}F],[S_{12}F]\};$$
- множество переходов δ_2' автомата M_2' будет содержать переходы вида

$\delta_2'([S_{15}],a) = [S_2S_4]$, $\delta_2'([S_{15}],b) = [S_6]$, $\delta_2'([S_2S_4],b) = [S_{10}F]$,
$\delta_2'([S_2S_4],c) = [S_{11}F]$, $\delta_2'([S_{10}F],a) = [S_2]$, $\delta_2'([S_2],b) = [S_{10}F]$,
$\delta_2'([S_{11}F],a) = [S_4]$, $\delta_2'([S_4],c) = [S_{11}F]$, $\delta_2'([S_6],c) = [S_{12}F]$,
$\delta_2'([S_{12}F],b) = [S_6]$.

Выполним построение этих множеств для автомата M_3'

$$R = \{[q_{140}]\},\ P_0 = \{[q_{140}]\}.$$

На следующем шаге работы алгоритма удаления недостижимых состояний автомата получаем

$$P_1 = \{[q_{11}q_{31}],[q_{51}]\}.$$

Так как разность множества текущих активных состояний и множества достижимых состояний не пустое множество, то есть

$$P_1 \setminus R = \{[q_{11}q_{31}],[q_{51}]\} \neq \varnothing,$$

то множество достижимых состояний R примет следующий вид

$$R = R \cup \{[q_{11}q_{31}],[q_{51}]\} = \{[q_{140}],[q_{11}q_{31}],[q_{51}]\}.$$

Продолжаем построение множества текущих активных состояний. Множество P_2 примет вид

$$P_2 = \{[q_{21}],[q_{41}],[q_{61}]\}.$$

Так как разность множества текущих активных состояний и множества достижимых состояний не пустое множество, то есть

$$P_2 \setminus R = \{[q_{21}],[q_{41}],[q_{61}]\} \neq \varnothing,$$

то множество достижимых состояний R примет следующий вид

$$R = R \cup \{[q_{21}],[q_{41}],[q_{61}]\} = \\ = \{[q_{140}],[q_{11}q_{31}],[q_{51}],[q_{21}],[q_{41}],[q_{61}]\}.$$

Продолжаем построение множества текущих активных состояний. Множество P_3 примет вид

$$P_3 = \{[q_{11}],[q_{31}],[q_{51}]\}.$$

Так как разность множества текущих активных состояний и множества достижимых состояний не пустое множество, то есть

$$P_3 \setminus R = \{[q_{11}],[q_{31}]\} \neq \varnothing,$$

то множество достижимых состояний R примет следующий вид

$$R = R \cup \{[q_{11}],[q_{31}]\} = \\ = \{[q_{140}],[q_{11}q_{31}],[q_{51}],[q_{21}],[q_{41}],[q_{61}],[q_{11}],[q_{31}]\}.$$

Продолжаем построение множества текущих активных состояний. Множество P_4 примет вид

$$P_4 = \{[q_{21}],[q_{41}],[q_{61}]\}.$$

Так как разность множества текущих активных состояний и множества достижимых состояний пустое множество, то есть

$$P_4 \setminus R = \varnothing,$$

то алгоритм удаления недостижимых состояний останавливается и ДКА $M_3' = (Q_3', \Sigma, \delta_3', q_3', F_3')$ определится следующим образом:

- множество состояний автомата M_3' примет вид
$$Q_3' = R = \{[q_{140}],[q_{11}q_{31}],[q_{51}],[q_{21}],[q_{41}],[q_{61}],[q_{11}],[q_{31}]\};$$
- начальным состоянием q_3' результирующего автомата M_3' будет состояние
$$q_3' \equiv [q_{140}];$$
- множество заключительных состояний F_3' примет вид
$$F_3' = \{[q_{140}],[q_{21}],[q_{41}],[q_{61}]\};$$
- множество переходов δ_3' автомата M_3' будет содержать переходы вида

$\delta_3'([q_{140}],a)=[q_{11}q_{31}]$, $\delta_3'([q_{140}],b)=[q_{51}]$, $\delta_3'([q_{11}q_{31}],b)=[q_{21}]$, $\delta_3'([q_{11}q_{31}],c)=[q_{41}]$, $\delta_3'([q_{21}],a)=[q_{11}]$, $\delta_3'([q_{11}],b)=[q_{21}]$, $\delta_3'([q_{41}],a)=[q_{31}]$, $\delta_3'([q_{31}],c)=[q_{41}]$, $\delta_3'([q_{51}],c)=[q_{61}]$, $\delta_3'([q_{61}F],b)=[q_{51}]$.

Шаг 2.8

Нарисуем графы переходов построенных детерминированных автоматов M_1', M_2', M_3'.

Граф переходов ДКА M_1' примет вид

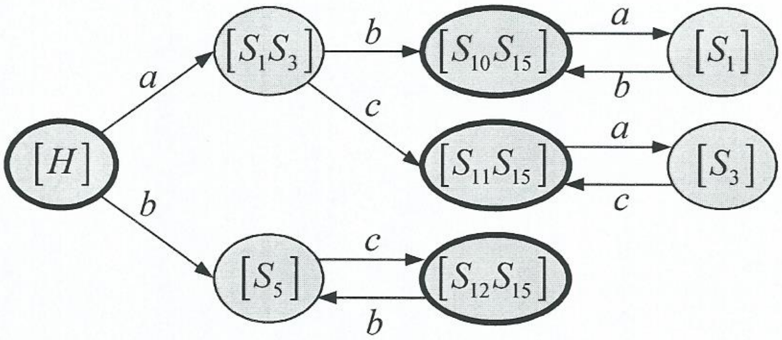

Рис. 17. Диаграмма состояний ДКА M_1' после удаления недостижимых состояний

Граф переходов ДКА M_2' примет вид

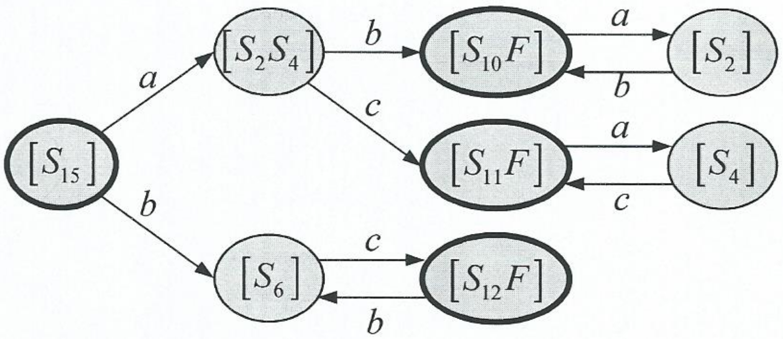

Рис. 18. Диаграмма состояний ДКА M_2' после удаления недостижимых состояний

Граф переходов ДКА M_1' примет вид

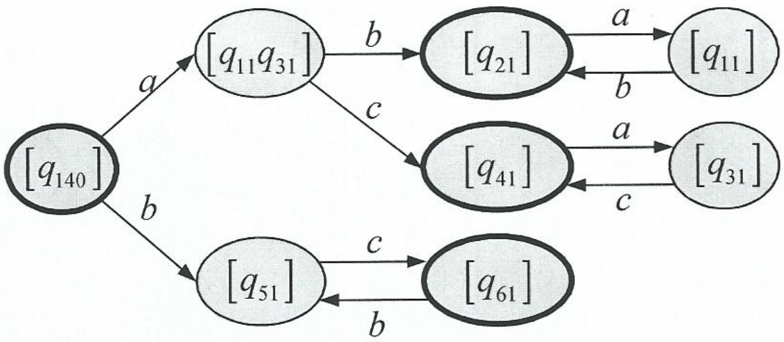

Рис. 19. Диаграмма состояний ДКА M_3' после удаления недостижимых состояний

Анализируя графы переходов детерминированных автоматов M_1', M_2', M_3' (см. рис. 17–19) можно сказать, что полученные автоматы полностью идентичны. Поэтому в дальнейшем будем рассматривать один автомат $M' = (Q', \Sigma, \delta', q_0', F')$ (для определенности пусть это будет $M_3' = (Q_3', \Sigma, \delta_3', q_3', F_3')$).

<u>Шаг 2.9</u>

Перед тем, как приступить к минимизации данного автомата, выполним переобозначение его состояний и, соответственно, изменим множество его переходов. Таким образом, ДКА $M' = (Q', \Sigma, \delta', q_0', F')$ без недостижимых состояний определяется следующим образом:

- множество состояний Q' автомата M' примет вид

$$Q' = \{S_0, S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7\};$$

- начальным состоянием q_0' результирующего автомата M' будет состояние

$$q_0' \equiv S_0;$$

- множество заключительных состояний F' примет вид

$$F' = \{S_0, S_3, S_4, S_5\};$$

- множество переходов δ' автомата M' будет содержать переходы вида

$\delta'(S_0, a) = S_1$, $\delta'(S_0, b) = S_2$, $\delta'(S_1, b) = S_3$, $\delta'(S_1, c) = S_4$, $\delta'(S_2, c) = S_5$, $\delta'(S_3, a) = S_6$, $\delta'(S_4, a) = S_7$, $\delta'(S_5, b) = S_2$, $\delta'(S_6, b) = S_3$, $\delta'(S_7, c) = S_4$.

Граф переходов ДКА M' примет вид

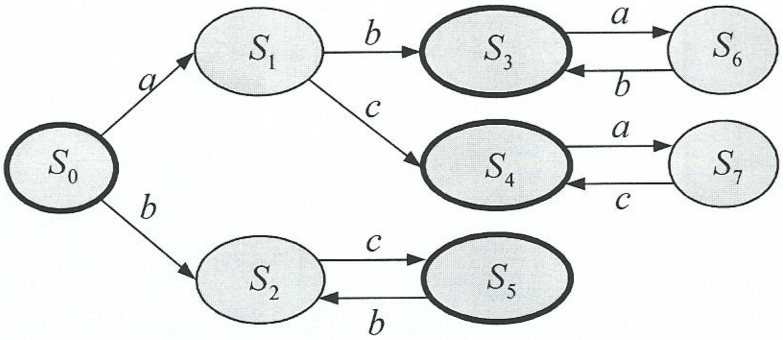

Рис. 20. Диаграмма состояний ДКА M'

Выполним построение минимального автомата $M'' = (Q'', \Sigma, \delta'', q_0'', F'')$ для автомата M'.

Первым шагом данного преобразования является удаление недостижимых состояний. Так как после построения ДКА было выполнено удаление недостижимых состояний, то данный шаг пропускаем. Далее необходимо построить классы эквивалентности состояний автомата.

Строим множество классов 0–эквивалентности. По определению множество классов 0–эквивалентности примет вид

$$R(0) = \{F', Q' \setminus F'\} = \left\{ \underbrace{\{S_0, S_3, S_4, S_5\}}_{r_1(0)}, \underbrace{\{S_1, S_2, S_6, S_7\}}_{r_2(0)} \right\}.$$

Строим совокупность классов 1–эквивалентности. Рассмотрим состояния из класса $r_1(0)$:

- состояние S_0 образует свой класс 1–эквивалентности, так как другие состояния $r_1(0)$ не имеют одновременно переходов по символам a и b;
- состояние S_5 также образует свой класс 1–эквивалентности, так как из данного состояния имеется один переход и только по символу b;
- состояния S_3 и S_4 образуют свой класс 1–эквивалентности, так как из них существует переход только по символу a в состояния S_6 и S_7, которые принадлежат одному классу 0–эквивалентности $r_2(0)$.

Рассмотрим состояния из класса $r_2(0)$:

- состояние S_1 образует свой класс 1–эквивалентности, так как другие состояния $r_2(0)$ не имеют одновременно переходов по символам b и c;
- состояние S_6 также образует свой класс 1–эквивалентности, так как из данного состояния имеется один переход и только по символу b;
- состояния S_2 и S_7 образуют один класс 1–эквивалентности, так как из них существует переход только по символу c в состояния S_5 и S_4, которые принадлежат одному классу 0–эквивалентности $r_1(0)$.

Таким образом, совокупность классов 1–эквивалентности примет вид

$$R(1) == \left\{ \underbrace{\{S_0\}}_{r_1(0)}, \underbrace{\{S_5\}}_{r_2(0)}, \underbrace{\{S_3, S_4\}}_{r_3(0)}, \underbrace{\{S_1\}}_{r_4(0)}, \underbrace{\{S_6\}}_{r_5(0)}, \underbrace{\{S_2, S_7\}}_{r_6(0)} \right\}.$$

Строим совокупность классов $2-$эквивалентности. Классы $1-$эквивалентности, содержащие по одному состоянию рассматривать не станем, так как изменение их содержимого не произойдет, и, следовательно, они будут также классами $2-$эквивалентности.

Рассмотрим состояния из класса $r_3(1)$: из состояния S_3 переход возможен только в состояние S_6, которое принадлежит классу $r_5(1)$, а из состояния S_4 возможен переход в состояние S_7, которое принадлежит классу $r_6(1)$. Следовательно, состояния S_3 и S_4 образуют отдельные классы $2-$эквивалентности.

Рассмотрим состояния из класса $r_6(1)$: из состояния S_2 переход возможен только в состояние S_5, которое принадлежит классу $r_2(1)$, а из состояния S_7 возможен переход в состояние S_4, которое принадлежит классу $r_3(1)$. Следовательно, состояния S_2 и S_7 образуют отдельные классы $2-$эквивалентности.

Таким образом, совокупность классов $2-$эквивалентности примет вид

$$R(2) == \left\{ \underbrace{\{S_0\}}_{r_1(0)}, \underbrace{\{S_5\}}_{r_2(0)}, \underbrace{\{S_1\}}_{r_3(0)}, \underbrace{\{S_6\}}_{r_4(0)}, \underbrace{\{S_3\}}_{r_5(0)}, \underbrace{\{S_4\}}_{r_6(0)}, \underbrace{\{S_2\}}_{r_7(0)}, \underbrace{\{S_7\}}_{r_8(0)} \right\}.$$

Так как множество классов $2-$эквивалентности содержит классы эквивалентности, состоящие из одного состояния, то построение совокупности классов $n-$эквивалентности можно остановить.

Приступаем к построению минимального автомата $M'' = (Q'', \Sigma, \delta'', q_0'', F'')$, который определяется следующим образом:

- множество состояний Q'' автомата M'' будет содержать классы эквивалентности состояний автомата (квадратные скобки в наименованиях результирующих состояний будем опускать) и примет вид

$$Q'' = \{[S_0],[S_1],[S_2],[S_3],[S_4],[S_5],[S_6],[S_7]\} = \\ = \{S_0, S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7\};$$

- начальным состоянием q'' результирующего автомата M'' будет класс эквивалентности, содержащий начальное состояние исходного автомата M', то есть имеет место соотношение вида

$$q'' \equiv [S_0] \equiv S_0;$$

- множество заключительных состояний F'' будет содержать классы эквивалентности, содержащие только заключительные состояния исходного автомата

$$F'' = \{[S_0],[S_3],[S_4],[S_5]\} = \{S_0, S_3, S_4, S_5\};$$

• множество переходов δ'' автомата M'' будет содержать переходы вида

$\delta''(S_0,a)=S_1$, $\delta''(S_0,b)=S_2$, $\delta''(S_1,b)=S_3$, $\delta''(S_1,c)=S_4$, $\delta''(S_2,c)=S_5$, $\delta''(S_3,a)=S_6$, $\delta''(S_4,a)=S_7$, $\delta''(S_5,b)=S_2$, $\delta''(S_6,b)=S_3$, $\delta''(S_7,c)=S_4$.

Шаг 2.10

Граф переходов минимального КА M'' примет вид

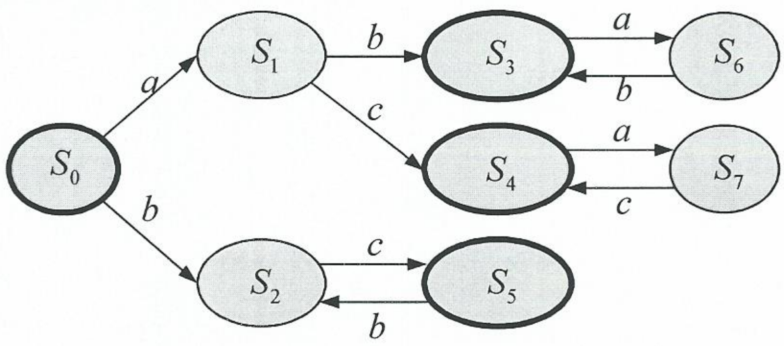

Рис. 21. Диаграмма состояний канонического КА M''

Шаг 2.11

Для оценивания корректности построения минимального конечного автомата выполним обратные преобразования, которые, в конечном итоге, приводят к построению множества цепочек.

Шаг 2.11.1

Выполним построение леволинейной и праволинейной грамматик $G'=(\mathrm{N}',\Sigma,P',S')$ и $G''=(\mathrm{N}'',\Sigma,P'',S'')$ для автомата $M''=(Q'',\Sigma,\delta'',q_0'',F'')$.

Леволинейная грамматика $G'=(\mathrm{N}',\Sigma,P',S')$ определяется следующим образом:

• множество нетерминалов N' грамматики G' будет содержать состояния автомата с добавлением нового нетерминала

$$\mathrm{N}'=Q''\cup\{S\}=\{S_0,S_1,S_2,S_3,S_4,S_5,S_6,S_7,S\};$$

• начальным символом S' результирующей грамматики будет новый нетерминал

$$S'\equiv S;$$

• множество правил P' грамматики G' строится следующим образом: если множество переходов исходного автомата содержит переход вида $\delta(A,t)=B$, тогда во множество правил леволинейной грамматики добавляется правило вида $B\to At$; также во множество правил леволинейной грамматики добавляется правило $H\to\varepsilon$, где $H=q_0$, и правила вида $S\to F_1\,|\ldots|\,F_k$, где $F=\{F_1,\ldots,F_k\}$ – множество заключительных состояний исходного конечного автомата, то есть имеет место соотношение

$$P' = \begin{Bmatrix} S_1 \to S_0 a, S_2 \to S_0 b \mid S_5 b, S_3 \to S_1 b \mid S_6 b, S_4 \to S_1 c \mid S_7 c, \\ S_5 \to S_2 c, S_6 \to S_3 a, S_7 \to S_4 a, S_0 \to \varepsilon, S \to S_0 \mid S_3 \mid S_4 \mid S_5 \end{Bmatrix}.$$

Праволинейная грамматика $G'' = (\mathrm{N}'', \Sigma, P'', S'')$ определяется следующим образом:

- множество нетерминалов N'' грамматики G'' будет содержать только состояния автомата

$$\mathrm{N}'' = Q'' = \{S_0, S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7\};$$

- начальным символом S'' результирующей грамматики будет начальное состояние q_0'' исходного автомата M''

$$S'' \equiv S_0;$$

- множество правил P'' грамматики G'' строится следующим образом: если множество переходов исходного автомата содержит переход вида $\delta(A,t) = B$, тогда во множество правил леволинейной грамматики добавляется правило вида $A \to tB$; также во множество правил леволинейной грамматики добавляется правило $A \to \varepsilon$, где $A \in F$, то есть имеет место соотношение

$$P'' = \begin{Bmatrix} S_0 \to aS_1 \mid bS_2 \mid \varepsilon, S_1 \to bS_3 \mid cS_4, S_2 \to cS_5, S_3 \to aS_6 \mid \varepsilon, \\ S_4 \to aS_7 \mid \varepsilon, S_5 \to bS_2 \mid \varepsilon, S_6 \to bS_3, S_7 \to cS_4 \end{Bmatrix}.$$

Шаг 2.11.2

Используя теорию уравнений с регулярными коэффициентами, выполним построение регулярных выражений p_1 и p_2 для леволинейной и праволинейной грамматик $G' = (\mathrm{N}', \Sigma, P', S')$ и $G'' = (\mathrm{N}'', \Sigma, P'', S'')$.

Система уравнений с регулярными коэффициентами в левосторонней форме записи для грамматики $G' = (\mathrm{N}', \Sigma, P', S')$ примет следующий вид

$$\begin{array}{lll} S_0 = \varepsilon & S_3 = S_1 b + S_6 b & S_6 = S_3 a \\ S_1 = S_0 a & S_4 = S_1 c + S_7 c & S_7 = S_4 a \\ S_2 = S_0 b + S_5 b & S_5 = S_2 c & S = S_0 + S_3 + S_4 + S_5 \end{array}$$

Найдем решение данной системы, то есть определим регулярное выражение p_1, соответствующее целевому символу S грамматики G'. Подставим S_0 в уравнения для S_1 и S_2 и получим следующую систему

$$\begin{array}{lll} S_0 = \varepsilon & S_3 = S_1 b + S_6 b & S_6 = S_3 a \\ S_1 = a & S_4 = S_1 c + S_7 c & S_7 = S_4 a \\ S_2 = b + S_5 b & S_5 = S_2 c & S = S_0 + S_3 + S_4 + S_5 \end{array}$$

Выполним подстановку выражений для S_5, S_6, S_7 в уравнения для S_2, S_3, S_4. В результате получим следующую систему

$$S_0 = \varepsilon \qquad S_3 = ab + S_3ab \qquad S_6 = S_3a$$

$$S_1 = a \qquad S_4 = ac + S_4ac \qquad S_7 = S_4a$$

$$S_2 = b + S_2cb \qquad S_5 = S_2c \qquad S = S_0 + S_3 + S_4 + S_5$$

Рассмотрим уравнения для неизвестных S_2, S_3, S_4

$$S_2 = b + S_2cb = \underbrace{b}_{\beta} + S_2\underbrace{cb}_{\alpha}$$

$$S_3 = ab + S_3ab = \underbrace{ab}_{\beta} + S_3\underbrace{ab}_{\alpha}$$

$$S_4 = ac + S_4ac = \underbrace{ac}_{\beta} + S_4\underbrace{ac}_{\alpha}$$

Находим решение для S_2, S_3, S_4

$$S_2 = \beta\alpha^* = \underbrace{b\cdot(cb)^*}_{p\cdot(qp)^*=(pq)^*\cdot p} = (bc)^*\cdot b$$

$$S_3 = \beta\alpha^* = \underbrace{ab\cdot(ab)^*}_{pp^*=p^+} = (ab)^+$$

$$S_4 = \beta\alpha^* = \underbrace{ac\cdot(ac)^*}_{pp^*=p^+} = (ac)^+$$

Подставим найденное решение для S_2 в уравнение для S_5

$$S_5 = S_2c = \underbrace{(bc)^*\cdot bc}_{p^*p=p^+} = (bc)^+.$$

Выполним подстановку полученных выражений для S_0, S_3, S_4, S_5 в уравнение для S

$$S = S_0 + S_3 + S_4 + S_5 = \underbrace{\varepsilon}_{p=p+p+p} + (ab)^+ + (ac)^+ + (bc)^+ =$$

$$= \underbrace{\varepsilon + (ab)^+}_{\varepsilon+p^+=p^*} + \underbrace{\varepsilon + (ac)^+}_{\varepsilon+p^+=p^*} + \underbrace{\varepsilon + (bc)^+}_{\varepsilon+p^+=p^*} = (ab)^* + (ac)^* + (bc)^*.$$

Таким образом, регулярное выражение p_1 примет вид

$$p_1 = (ab)^* + (ac)^* + (bc)^*.$$

Система уравнений с регулярными коэффициентами в правосторонней форме записи для грамматики $G'' = (\mathrm{N}'', \Sigma, P'', S'')$ примет следующий вид

$$S_0 = aS_1 + bS_2 + \varepsilon \qquad S_3 = aS_6 + \varepsilon \qquad S_6 = bS_3$$

$$S_1 = bS_3 + cS_4 \qquad S_4 = aS_7 + \varepsilon \qquad S_7 = cS_4.$$

$$S_2 = cS_5 \qquad S_5 = bS_2 + \varepsilon$$

Найдем решение данной системы, то есть определим регулярное выражение p_2, соответствующее целевому символу S грамматики G''. Выполним подстановку выражений для S_3, S_4, S_5 в уравнения для S_6, S_7 и S_2 соответственно. В результате получим следующую систему

$$S_0 = aS_1 + bS_2 + \varepsilon \qquad S_3 = aS_6 + \varepsilon \qquad S_6 = bS_3 = baS_6 + b$$
$$S_1 = bS_3 + cS_4 \qquad S_4 = aS_7 + \varepsilon \qquad S_7 = cS_4 = caS_7 + c\,.$$
$$S_2 = cS_5 = cbS_2 + c \qquad S_5 = bS_2 + \varepsilon$$

Рассмотрим уравнения для неизвестных S_6, S_7, S_2

$$S_6 = baS_6 + b = \underbrace{ba}_{\alpha} S_6 + \underbrace{b}_{\beta}$$
$$S_7 = caS_7 + c = \underbrace{ca}_{\alpha} S_7 + \underbrace{c}_{\beta}\,.$$
$$S_2 = cbS_2 + c = \underbrace{cb}_{\alpha} S_2 + \underbrace{c}_{\beta}$$

Находим решение для S_6, S_7, S_2

$$S_6 = \alpha^*\beta = \underbrace{(ba)^* \cdot b}_{(pq)^*\cdot p = p\cdot(qp)^*} = b\cdot(ab)^*$$
$$S_7 = \alpha^*\beta = \underbrace{(ca)^* \cdot c}_{(pq)^*\cdot p = p\cdot(qp)^*} = c\cdot(ac)^*\,.$$
$$S_2 = \alpha^*\beta = \underbrace{(cb)^* \cdot c}_{(pq)^*\cdot p = p\cdot(qp)^*} = c\cdot(bc)^*$$

Выполним подстановку выражений для S_1, S_6, S_7 в уравнения для S_0, S_3, S_4 соответственно. В результате получим следующую систему

$$S_0 = \varepsilon + bS_2 + abS_3 + acS_4$$
$$S_1 = bS_3 + cS_4$$
$$S_2 = c\cdot(bc)^*$$
$$S_3 = aS_6 + \varepsilon = \underbrace{ab\cdot(ab)^* + \varepsilon}_{pp^*+\varepsilon=p^*} = (ab)^*$$
$$S_4 = aS_7 + \varepsilon = \underbrace{ac\cdot(ac)^* + \varepsilon}_{pp^*+\varepsilon=p^*} = (ac)^*$$
$$S_5 = bS_2 + \varepsilon$$
$$S_6 = bS_3 = baS_6 + b$$
$$S_7 = cS_4 = caS_7 + c\,.$$

Выполним подстановку полученных выражений для S_2, S_3, S_4 в уравнение для S_0

$$S_0 = \underbrace{\varepsilon}_{p=p+p+p} + bS_2 + abS_3 + acS_4 =$$
$$= \underbrace{\varepsilon + bc(bc)^*}_{\varepsilon+pp^*=p^*} + \underbrace{\varepsilon + ab(ab)^*}_{\varepsilon+pp^*=p^*} + \underbrace{\varepsilon + ac(ac)^*}_{\varepsilon+pp^*=p^*} = .$$
$$= (bc)^* + (ab)^* + (ac)^*$$

Таким образом, регулярное выражение p_2 примет вид

$$p_2 = (ab)^* + (ac)^* + (bc)^*.$$

<u>Шаг 2.11.3</u>

Используя алгоритм построения регулярного выражения для произвольного конечного автомата выполним построение регулярного выражения p_3 для конечного автомата $M''=\left(Q'',\Sigma,\delta'',q_0'',F''\right)$. Запишем систему уравнений с регулярными коэффициентами в правосторонней форме записи

$$\begin{aligned}
S_0 &= \varepsilon+\varnothing\cdot S_0+a\cdot S_1+b\cdot S_2+\varnothing\cdot S_3+\varnothing\cdot S_4+\varnothing\cdot S_5+\varnothing\cdot S_6+\varnothing\cdot S_7\\
S_1 &= \varnothing+\varnothing\cdot S_0+\varnothing\cdot S_1+\varnothing\cdot S_2+bS_3+cS_4+\varnothing\cdot S_5+\varnothing\cdot S_6+\varnothing\cdot S_7\\
S_2 &= \varnothing+\varnothing\cdot S_0+\varnothing\cdot S_1+\varnothing\cdot S_2+\varnothing\cdot S_3+\varnothing\cdot S_4+cS_5+\varnothing\cdot S_6+\varnothing\cdot S_7\\
S_3 &= \varepsilon+\varnothing\cdot S_0+\varnothing\cdot S_1+\varnothing\cdot S_2+\varnothing\cdot S_3+\varnothing\cdot S_4+\varnothing\cdot S_5+aS_6+\varnothing\cdot S_7\\
S_4 &= \varepsilon+\varnothing\cdot S_0+\varnothing\cdot S_1+\varnothing\cdot S_2+\varnothing\cdot S_3+\varnothing\cdot S_4+\varnothing\cdot S_5+\varnothing\cdot S_6+aS_7\\
S_5 &= \varepsilon+\varnothing\cdot S_0+\varnothing\cdot S_1+bS_2+\varnothing\cdot S_3+\varnothing\cdot S_4+\varnothing\cdot S_5+\varnothing\cdot S_6+\varnothing\cdot S_7\\
S_6 &= \varnothing+\varnothing\cdot S_0+\varnothing\cdot S_1+\varnothing\cdot S_2+bS_3+\varnothing\cdot S_4+\varnothing\cdot S_5+\varnothing\cdot S_6+\varnothing\cdot S_7\\
S_7 &= \varnothing+\varnothing\cdot S_0+\varnothing\cdot S_1+\varnothing\cdot S_2+\varnothing\cdot S_3+cS_4+\varnothing\cdot S_5+\varnothing\cdot S_6+\varnothing\cdot S_7
\end{aligned}.$$

Перепишем систему в следующим виде

$$\begin{array}{ll}
S_0=\varepsilon+a\cdot S_1+b\cdot S_2 & S_4=\varepsilon+aS_7\\
S_1=bS_3+cS_4 & S_5=\varepsilon+bS_2\\
S_2=cS_5 & S_6=bS_3\\
S_3=\varepsilon+aS_6 & S_7=cS_4
\end{array}.$$

Необходимо найти регулярное выражение, соответствующее начальному состоянию КА $M''=\left(Q'',\Sigma,\delta'',q_0'',F''\right)$, которым является символ S_0. Для чего выполним подстановку выражений для S_1, S_5, S_6 и S_7 в уравнения для S_0, S_2, S_3, S_4 соответственно. В результате получим следующую систему

$$\begin{array}{ll}
S_0=\varepsilon+a\cdot S_1+b\cdot S_2=\varepsilon+b\cdot S_2+abS_3+acS_4 & S_4=\varepsilon+aS_7=\varepsilon+acS_4\\
S_1=bS_3+cS_4 & S_5=\varepsilon+bS_2\\
S_2=cS_5=c+cbS_2 & S_6=bS_3\\
S_3=\varepsilon+aS_6=\varepsilon+abS_3 & S_7=cS_4
\end{array}.$$

Рассмотрим уравнения для неизвестных S_2, S_3, S_4

$$S_2=\underbrace{c}_{\beta}+\underbrace{cb}_{\alpha}S_2$$

$$S_3=\underbrace{\varepsilon}_{\beta}+\underbrace{ab}_{\alpha}S_3.$$

$$S_4=\underbrace{\varepsilon}_{\beta}+\underbrace{ac}_{\alpha}S_4$$

Находим решение для S_2, S_3, S_4

$$S_2=\alpha^*\beta=\underbrace{(cb)^*\cdot c}_{(pq)^*p=p(qp)^*}=c(bc)^*$$

$$S_3=\alpha^*\beta=(ab)^*\cdot\varepsilon=(ab)^*\quad.$$

$$S_4=\alpha^*\beta=(ac)^*\cdot\varepsilon=(ac)^*$$

Выполним подстановку полученных выражений для S_2, S_3, S_4 в уравнение для S_0

$$S_0 = \underbrace{\varepsilon}_{p=p+p+p} + bS_2 + abS_3 + acS_4 =$$

$$= \underbrace{\varepsilon + bc(bc)^*}_{\varepsilon+pp^*=p^*} + \underbrace{\varepsilon + ab(ab)^*}_{\varepsilon+pp^*=p^*} + \underbrace{\varepsilon + ac(ac)^*}_{\varepsilon+pp^*=p^*} = .$$

$$= (bc)^* + (ab)^* + (ac)^*$$

Таким образом, регулярное выражение p_3 примет вид

$$p_3 = (ab)^* + (ac)^* + (bc)^* .$$

Шаг 2.11.4

Нетрудно заметить, что полученные выражения p_1, p_2, p_3 эквивалентны, следовательно множества, которые они описывают также эквивалентны.

Выполним построение регулярного множества, для регулярного выражения вида

$$p = (ab)^* + (ac)^* + (bc)^* .$$

Регулярное множество для этого регулярного выражения примет вид

$$L_1 = \left\{ (ab)^k, (ac)^l, (bc)^l \middle| \forall k, l, m \geq 0, \text{ где } k, l, m - \text{целые} \right\}.$$

Шаг 2.11.5

Очевидно, что полученный и исходный языки полностью эквивалентны.