Gesamtpunkte:

MaLo
SS 2021
31. Mai 2021

Nick Plaspohl 406476
Svenja Bösinger 408866
Ahmet Polat 411291

Übungsblatt 05

Aufgabe 2

a)

i)

Z.z.: $\mathfrak{N} := (\mathbb{N}, +, -, \cdot)$ ist keine Substruktur von $\mathfrak{R}$.

Offensichtlich gilt $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$, da alle Zahlen in der Menge $\mathbb{N}$ sind auch reelle Zahlen, aber nicht alle reellen Zahlen sind in der Menge $\mathbb{N}$ (z.B. π).

Für alle $a, b \in \mathbb{N}$ gelten $a + b \in \mathbb{N}$ und $a \cdot b \in \mathbb{N}$, also ausschließlich für die Funktionssymbole $+$ und $\cdot$ gilt $\text{dom}(\mathbb{N}) \subseteq \text{dom}(\mathbb{R})$.

Aber es existieren $a, b \in \mathbb{N}$ mit $a - b \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$. Siehe das Gegenbeispiel $a = 1, b = 5$.

Somit wurde gezeigt, dass $\mathbb{N}$ nicht $\{+, -, \cdot\}$-abgeschlossen ist.

Also $\mathfrak{N}$ ist keine Substruktur von $\mathfrak{R}$.

Eine Substruktur von $\mathfrak{R}$, die $\mathbb{N}$ enthält, ist $\mathfrak{Z} := (\mathbb{Z}, +, -, \cdot)$, da die Menge der ganzen Zahlen eine Teilmenge von $\mathbb{R}$, eine Obermenge von natürlichen Zahlen und $\mathbb{Z}$ $-$-abgeschlossen ist (wie auch für die anderen Funktionen der Signatur von $\mathfrak{R}$).

ii)

Wir wissen, dass $\mathbb{Z}$ $\{+, -, \cdot\}$-abgeschlossen ist.

Bekannt ist uns auch $2\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$.

Wir können nun diese FO-Aussage schreiben:

$\forall z \in 2\mathbb{Z} \to (\exists a(a \in \mathbb{Z} \wedge a + a = z))$.

D.h. für alle $z \in 2\mathbb{Z}$ existiert ein $a \in \mathbb{Z}$ mit $a + a = z$.

Also für beliebige $z, z' \in 2\mathbb{Z}$ existieren $a, a' \in \mathbb{Z}$ mit $a + a = z$ und $a' + a' = z'$. Wir zeigen nun für die jeweiligen Funktionen in Signatur von $\mathfrak{R}$ die Abgeschlossenheit.

$(+^{\mathfrak{R}})$

$$z + z' = (a + a) + (a' + a') \overset{\text{assoziativ}}{=} a + a + a' + a' \overset{\text{kommutativ}}{=} a + a' + a + a' \overset{a+a':=a''}{=} a'' + a''.$$

Also da offensichtlich $a'' + a'' \in 2\mathbb{Z}$, ist $2\mathbb{Z}$ $+$-abgeschlossen.

$(-^{\mathfrak{R}})$

$$z - z' = (a + a) - (a' + a') \overset{\substack{\text{distributiv}\\ \text{assoziativ}}}{=} a + a - a' - a' \overset{\text{kommutativ}}{=} a - a' + a - a' \overset{a-a':=a''}{=} a'' + a''.$$

Also da offensichtlich $a'' + a'' \in 2\mathbb{Z}$, ist $2\mathbb{Z}$ $-$-abgeschlossen.

$(\cdot^{\mathfrak{R}})$

$z \cdot z' = (a+a) \cdot (a'+a') \overset{\text{distributiv}}{=} (a \cdot a') + (a \cdot a') + (a \cdot a') + (a \cdot a') \overset{\text{assoziativ}}{=} (a \cdot a' + a \cdot a') + (a \cdot a' + a \cdot a') \overset{(a \cdot a' + a \cdot a') := a''}{=} a'' + a''$.

Also da offensichtlich $a'' + a'' \in 2\mathbb{Z}$, ist $2\mathbb{Z}$ $\cdot$-abgeschlossen.

Somit wurde gezeigt, dass $2\mathfrak{Z} := (2\mathbb{Z}, +, -, \cdot)$ eine Substruktur von $\mathfrak{R}$ ist.

b)

i)

$\{1\}$ ist zwar eine Teilmenge von $\mathbb{Q}$, aber ist die entsprechende Struktur mit der Signatur von $\mathfrak{Q}$ $\mathfrak{I} := (\{1\}, +, -, \cdot, ^{-1})$ nicht $+$-abgeschlossen ($1 + 1 \neq 1$). Damit ist $\mathfrak{I}$ keine Substruktur von $\mathfrak{Q}$.

Die kleinste Substruktur ist also die $\mathfrak{Q}$, da für die Abgeschlossenheit von $+$ soll die Menge unendlich sein, und wegen $^{-1}$ sind in der Menge auch nicht ganze Zahlen enthalten. Es gibt keine kleinere Menge, die diese Bedingungen erfüllt und unter Signatur von $\mathfrak{Q}$ abgeschlossen ist.

ii)

$\{0\}$ ist eine Teilmenge von $\mathbb{Q}$.

Wir betrachten das einzige Element von $\{0\}$, nämlich 0. Für die jeweiligen Funktionen der Signatur von $\mathfrak{Q}$ gelten:

$0 + 0 = 0$.

$0 - 0 = 0$.

$0 \cdot 0 = 0$.

$0^{-1} = 0$.

Damit sind alle möglichen Fälle bedeckt und es wurde gezeigt, dass $\mathfrak{O} := (\{0\}, +, -, \cdot, ^{-1})$ eine Substruktur von $\mathfrak{Q}$ ist.

Aufgabe 3

a)

i)

Die Aussage beschreibt alle Bäume, die eine Tiefe kleiner als 3 haben. Die Aussage gilt offensichtlich für den Beispielbaum, da dessen Tiefe 2 ist.

ii)

Die Aussage beschreibt alle binären Bäume, in denen jeder Knoten außer den Blättern, genau zwei Kinder hat.

Der Beispielbaum erfüllt diesen Satz nicht, da der Knoten v_1 nur ein Kind hat, was laut Satz ψ_2 nicht geht, da laut ψ_2 hat ein Knoten entweder 2 oder 0 Kinder.

b)

Es gibt einen Knoten im Baum, der von der Wurzel n Kanten entfernt ist. Wenn für einen Baum $B \models \vartheta_n$ gilt, dann heiß das, dass B mindestens die Tiefe n hat. Für n = 1 und n = 2 erfüllt der Beispielbaum ϑ_n.

c)

$$\varphi(x) \coloneqq (\forall v(\neg E(v, x))) \wedge (\exists v'(E(x, v')))$$

Aufgabe 4

a)

i)

$$\varphi_{ai}(a) \coloneqq \forall x((a \circ x = x) \wedge (x \circ a = x)$$

Erklärung: Das leere Wort hat keine Wirkung auf die Konkatenation.

ii)

$$\varphi_{aii}(a) \coloneqq \forall x(\neg(a \backsimeq x))$$

Erklärung: Kein anderes Wort hat die gleiche Länge wie ϵ, weil gäbe es so ein Wort $\epsilon' \backsimeq \epsilon$, würde ϵ' nach der Definition in **i)** das leere Wort sein, weil es sie erfüllt, aber da das leere Wort einzigartig ist, gilt $\epsilon = \epsilon'$. Also kein anderes Wort hat die Länge von ϵ.

b)

$$\varphi_b(a, b) \coloneqq \exists x(a = b \circ x)$$

Erklärung: Wenn b ein Präfix von a ist, dann müsste es ein Wort geben, so dass wenn man es mit b konkateniert wie in der Lösung, kriegt man a.

c)

$$\varphi_c(a) \coloneqq \bigvee_{w \in \{00\}^*} a \backsimeq (0 \circ w)$$

Erklärung: Wir haben $(a \backsimeq 0) \vee (a \backsimeq 000) \vee (a \backsimeq 00000)$..., was besagt, dass wir die Länge a mit allen ungeraden natürlichen Zahlen vergleichen und a für eines dieser Nullen der ungeraden Länge, die Aussage erfüllen muss. Wenn die Aussage falsch ist, dann wissen wir auch direkt dass a eine gerade Länge hat

d)

$$\varphi_d(a, n) \coloneqq \bigvee_{i \in \underline{n}} \bigvee_{w \in \{0,1\}^i} a = w$$

Erklärung: Da n fest ist, muss es ein Parameter der Formel sein. Wir sagen, dass wenn a höchsten die Länge n hat, für mindestens ein Wort bis zur Länge n, das Gleiche sein muss.

e)

$$\varphi_e(a) \coloneqq \bigvee_{w \in \{0101010\}^*} a \backsimeq (01010 \circ w)$$

Erklärung: w ist immer der Länge $7n$ für $n \in \mathbb{N}$.

01010 ist einfach ein festes Wort der Länge 5. Nur die Länge ist für uns relevant.

wir verodern die Längenvergleichungsrelation $\backsimeq$, was bedeutet dass damit die Aussage wahr ist, die Formel für mindestens eins der w-en gelten muss.