Задача 1.
Построить матрицу поворота на угол ϕ вокруг точки $A(a, b)$ на плоскости.

Ответ: $\begin{bmatrix} cos\ \phi & -sin\ \phi \\ sin\ \phi & cos\ \phi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$.

Задача 2.
Построить матрицу поворота на угол ϕ вокруг прямой L в $3D$ - пространстве проходящей через точку $A = (a, b, c)$ и имеющей направляющий вектор (l, m, n) с модулем, равным единице.

Чтобы выполнить поворот на угол ϕ вокруг прямой, проходящей через точку $A(a, b, c)$ и направляющим вектором (l, m, n), надо:

- выполнить перенос так, чтобы точка $A(a, b, c)$ находилась в начале системы координат;
- выполнить соответствующие повороты так, чтобы ось вращения совпала с осью z;
- выполнить поворот на угол ϕ вокруг оси z;
- выполнить преобразование, обратное тому, что позволило совместить ось вращения с осью z;
- выполнить обратный перенос;

1. Выполним перенос точки $A(a, b, c)$ в начало координат:

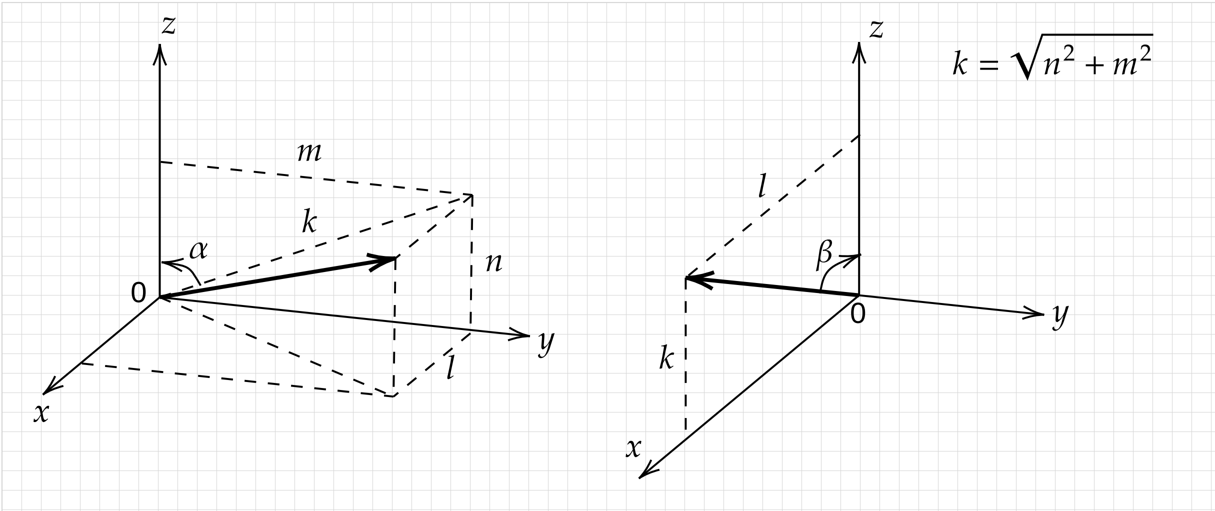
$$\begin{cases} 0 = a + x \\ 0 = b + y \\ 0 = c + z \end{cases}$$

Такой перенос может быть записан в матричной форме: $[0\ 0\ 0\ 1] = [a\ b\ c\ 1]\ T$, где

$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -a & -b & -c & 1 \end{bmatrix}$, здесь первая, вторая и третья строки матрицы T соответствуют отображениям бесконечно удаленных точек, а четвертая - отображению точки $[0\ 0\ 0\ 1]$.

2. Сделаем так, чтобы ось вращения совпала с осью z:
В общем случае для того, чтобы произвольная ось проходящая через начало координат, совпала с одной из координатных осей, необходимо сделать два последовательных поворота вокруг двух других координатных осей. Для совмещения нашей оси с осью z сначала выполним поворот вокруг оси x, а затем вокруг оси y.
Чтобы определить угол поворота α вокруг оси x, используемый для перевода произвольной оси в плоскость xz, спроецируем сначала на плоскость yz направляющий

единичный вектор этой оси.



Из рисунка получаем, что $cos\ \alpha = \dfrac{n}{\sqrt{n^2+m^2}},\ sin\ \alpha = \dfrac{m}{\sqrt{n^2+m^2}}$.

Тогда с помощью матрицы поворота вокруг оси x $[R_x] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & cos\ \alpha & sin\ \alpha & 0 \\ 0 & -sin\ \alpha & cos\ \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

переходим в плоскость xz, причем теперь z-компонента вектора будет равна $\sqrt{n^2+m^2}$.

Из рисунка получаем, что $cos\ \beta = \dfrac{\sqrt{n^2+m^2}}{1},\ sin\ \beta = \dfrac{l}{1}$.

Тогда с помощью матрицы поворота вокруг оси y $[R_y] = \begin{bmatrix} cos(-\beta) & 0 & -sin(-\beta) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ sin(-\beta) & 0 & cos(-\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ось вращения совпадет с осью z.

3. Выполним поворот на угол ϕ вокруг оси z с помощью матрицы поворота

$$[R_z] = \begin{bmatrix} -cos\ \phi & sin\ \phi & 0 & 0 \\ -sin\ \phi & cos\ \phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ответ: $[R] = [T]^{-1}[R_x]^{-1}[R_y]^{-1}[R_z][R_y][R_x][T]$, где

$$[T]=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\-a&-b&-c&1\end{bmatrix},\ [R_x]=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&\frac{n}{\sqrt{n^2+m^2}}&\frac{m}{\sqrt{n^2+m^2}}&0\\0&-\frac{m}{\sqrt{n^2+m^2}}&\frac{n}{\sqrt{n^2+m^2}}&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},$$

$$[R_y]=\begin{bmatrix}\sqrt{n^2+m^2}&0&l&0\\0&1&0&0\\-l&0&\sqrt{n^2+m^2}&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},\ [R_z]=\begin{bmatrix}-cos\,\phi&sin\,\phi&0&0\\-sin\,\phi&cos\,\phi&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}.$$

Задача 3.

Пусть первый поворот совершается вокруг оси x на угол $\pi/2$, а второй - вокруг оси y на тот же угол. Найдите результирующий поворот.

Сначала рассматрим общий случай поворота на угол ψ_1 вокруг оси с направляющим вектором v_1, затем поворота на угол ψ_2 вокруг оси с направляющим вектором v_2.
При первом повороте произвольный веткор $w\in\mathbb{R}^3$ перейдет в $w_1=q_1wq_1^{-1}$,
где $q_1=cos(\psi_1/2)+v_1\cdot sin(\psi_1/2)$.
При втором повороте w_1 перейдет в $w_2=q_2w_1q_2^{-1}=q_2q_1wq_1^{-1}q_2^{-1}$,
где $q_2=cos(\psi_2/2)+v_2\cdot sin(\psi_2/2)$.
Тогда вычислив произведение q_2q_1 и представив его в виде $q_2q_1=cos\,\psi\ +\ v\cdot sin\,\psi$, заключаем, что результирующий поворот есть поворот вокруг оси v на угол 2ψ.

$$\begin{gathered}q_2q_1=(cos(\psi_2/2)+v_2\cdot sin(\psi_2/2))\cdot(cos(\psi_1/2)+v_1\cdot sin(\psi_1/2))=\\=(1/2+v_2\cdot 1/2)\cdot(1/2+v_1\cdot 1/2)=\\=\left(cos\frac{\psi_2}{2}cos\frac{\psi_1}{2}-sin\frac{\psi_2}{2}sin\frac{\psi_1}{2}\langle v_2,v_1\rangle\right)+\\+\left(sin\frac{\psi_2}{2}cos\frac{\psi_1}{2}v_2+sin\frac{\psi_1}{2}cos\frac{\psi_2}{2}v_1+sin\frac{\psi_2}{2}sin\frac{\psi_1}{2}[v_2,v_1]\right)\end{gathered}$$

Отсюда можно получить следующие равенства для нахождения $\psi,\ v$:

$$cos\,\psi=cos\frac{\psi_2}{2}cos\frac{\psi_1}{2}-sin\frac{\psi_2}{2}sin\frac{\psi_1}{2}\langle v_2,v_1\rangle$$

$$tan\ \psi \cdot v = \frac{tan\frac{\psi_2}{2}v_2 + tan\frac{\psi_1}{2}v_1 + tan\frac{\psi_2}{2}tan\frac{\psi_1}{2}[v_2, v_1]}{1 - tan\frac{\psi_2}{2}tan\frac{\psi_1}{2}\langle v_2, v_1\rangle}$$

Подставим значения из нашей задачи

$v_1 = (1, 0, 0),\ \psi_1 = \pi/2,\ v_2 = (0, 1, 0),\ \psi_2 = \pi/2$:

$$cos\ \psi = cos\frac{\pi}{4}cos\frac{\pi}{4} - sin\frac{\pi}{4}sin\frac{\pi}{4} \cdot 0 = \frac{1}{2} \Longrightarrow sin\ \psi = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2},\ tan\ \psi = \sqrt{3}$$

$$\sqrt{3} \cdot v = \frac{tan\frac{\pi}{4}v_2 + tan\frac{\pi}{4}v_1 + tan\frac{\pi}{4}tan\frac{\pi}{4}[v_2, v_1]}{1 - tan\frac{\pi}{4}tan\frac{\pi}{4} \cdot 0} = v_2 + v_1 + (0, 0, -1) =$$

$$= (0, 1, 0) + (1, 0, 0) + (0, 0, -1) = (1, 1, -1)$$

$$v = \left(\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Ответ: $\psi = \frac{\pi}{3},\ v = \left(\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.