

并联机器人运动性能的研究现状及发展趋势

叶鹏达¹, 尤晶晶^{1,2}, 仇鑫¹, 王林康¹, 李成刚^{2,3}, 茹煜¹

(1. 南京林业大学机械电子工程学院, 南京, 210037; 2. 南京航空航天大学江苏省精密与微细制造技术重点实验室, 南京, 210016; 3. 南京航空航天大学机电学院, 南京, 210016)

摘要: 随着并联机器人技术的发展, 其运动性能的提升成为了发展需求, 指出了研究工作空间和奇异位形的必要性。以研究方法为主线, 详细阐述了工作空间和奇异位形的国内外研究现状及特点, 进一步提炼出个体的创新思想和面临的共同难题。通过深入分析研究方法的原理, 找到了解决共同难题的突破口, 同时剖析了研究中的尚存难题。结合未来的发展趋势, 从结构综合和理论创新两个方面进行突破, 能够为并联机器人的发展提供强劲动力。得出的结论和展望给从事这一领域的研究者们提供了参考。

关键词: 并联机器人; 工作空间; 奇异位形; 有限离散法; 代数法

中图分类号: TP24

文献标志码: A

文章编号: 1005-2615(2020)03-0363-15

Status and Development Trend of Motion Performance in Parallel Robot

YE Pengda¹, YOU Jingjing^{1,2}, QIU Xin¹, WANG Linkang¹, LI Chenggang^{2,3}, RU Yu¹

(1. College of Mechanical and Electronic Engineering, Nanjing Forestry University, Nanjing, 210037, China; 2. Jiangsu Key Laboratory of Precision and Micro-manufacturing Technology, Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, Nanjing, 210016, China; 3. College of Mechanical and Electrical Engineering, Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, Nanjing, 210016, China)

Abstract: With the development of parallel robot technology, the necessity of studying the workspace and singularity of parallel robot is presented to improve the motion performance. The research status and characteristics of workspace and singularity at home and abroad are described in detail based on different research methods. Furthermore, individual innovative ideas and common problems for different research methods of workspace and singularity are pointed out. Through deeply analyzing the principle of research methods, the breakthrough is found to solve common problems. Meanwhile, the remaining problems in research are analyzed. Combining with the future development trend, breakthroughs in structural synthesis and theoretical innovation can provide strong impetus for the development of parallel robot. The conclusions and prospects provide valuable references for researchers engaged in this field.

Key words: parallel robot; workspace; singularity; finite discrete method; algebraic method

“Robots”一词最早诞生于 20 世纪 20 年代, 作为 20 世纪最伟大的发明之一, 机器人在生产生活及其他各个领域的应用已经成为一个国家的重要发展目标。自从 20 世纪 60 年代初期美国推出第一台作业范围仅限于上、下料的工业机器人以来,

机器人得到了迅速发展, 并广泛应用于工业、服务、医疗卫生和娱乐等许多方面^[1], 对人们的生活产生了深远的影响。现代所说的机器人多指工业机器人, 大都是由基座、腰部、肩部、大臂、小臂、腕部和手部构成, 由于是以串联形式连接, 因而也称为串

基金项目: 国家自然科学基金(51405237)资助项目; 国家留学基金(201908320035)资助项目。

收稿日期: 2019-07-13; **修订日期:** 2019-11-12

通信作者: 茹煜, 女, 教授, 博士生导师, E-mail: superchry@163.com。

引用格式: 叶鹏达, 尤晶晶, 仇鑫, 等. 并联机器人运动性能的研究现状及发展趋势[J]. 南京航空航天大学学报, 2020, 52(3): 363-377. YE Pengda, YOU Jingjing, QIU Xin, et al. Status and development trend of motion performance in parallel robot[J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2020, 52(3): 363-377.

联机器人。就在串联机器人蓬勃发展的时候,又出现了一类全新的机器人——并联机器人。与串联机器人相比,并联机器人具有刚度大、结构稳定紧凑、承载能力强、累积误差小、精度高以及动力性能好等优点^[2]。它作为串联机器人强有力的补充,扩大了整个机器人的应用范围,引起机器人学理论界和工程界的广泛关注,成为机器人研究的主要热点之一。

国内外关于并联机器人的研究主要集中在机构学、运动学、动力学和控制策略等方面,其中工作空间和奇异位形是衡量并联机器人运动性能的两个重要指标^[3],是实现并联机器人控制和应用的基础,因而在并联机器人的研究中占有重要的基础性地位。并联机器人在进行轨迹规划时,需要考虑工作空间的大小以及奇异位形的分布情况,从而在无奇异工作空间中规划出一条合理的移动路径。一般情况下,工作空间的边界和内部都会产生奇异位形,并且奇异轨迹的分布为不规则、不连续的超曲面,这就给奇异位形的研究带来了不小的挑战。一方面,奇异位形所构成的空间奇异轨迹该如何确定;另一方面,针对得出的奇异轨迹该如何直观地图形化描绘。对于少自由度(自由度数目小于等于3)的并联机器人而言,其工作空间和奇异位形的确定和描绘相对简单。然而,对于多自由度(自由度数目大于3)的并联机器人而言,由于其输入输出之间的强运动耦合关系,导致其工作空间和奇异位形的确定和描绘非常复杂。也正因为如此,并联机器人工作空间和奇异位形的研究受到了众多国内外学者的关注,并且迅速成为了一项热门的研究课题。

1 国内外并联机器人研究现状

并联机器人机构最早出现是在 20 世纪 30 年代,Gwinnett^[4]提出了一种基于球面并联机器人机构的娱乐装置,这可能是首个有史料记载的并联机器人构型,如图 1 所示;1934 年,Pollard^[5]设计了一种基于并联机器人机构的汽车喷漆机器人,并在 1940 年获得专利权,如图 2 所示;1947 年,Gough 发明了一种基于并联机器人机构的 6 自由度轮胎检测装置,如图 3 所示;1965 年,Stewart^[6]首次对 Gough 发明的并联机器人机构进行了机构学理论意义上的研究,发表了名为“A platform with six degrees of freedom”的论文引起了广泛的关注,从而奠定了他在空间并联机构中的鼻祖地位,相应的平台称为 Stewart 平台,如图 4 所示。Stewart 平台机构由上下 2 个平台及 6 根可伸缩的支撑杆构成,支撑杆通过球铰或者虎克铰与上下 2 个平台连接,固

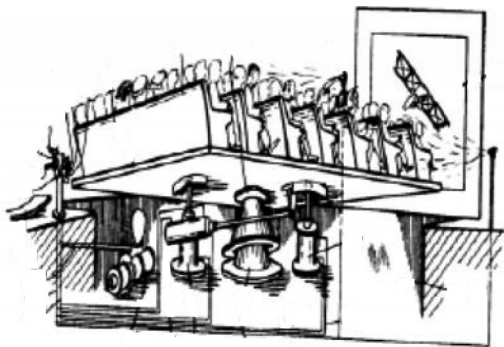


图 1 并联机器人机构娱乐装置
Fig.1 Entertainment device of parallel robot

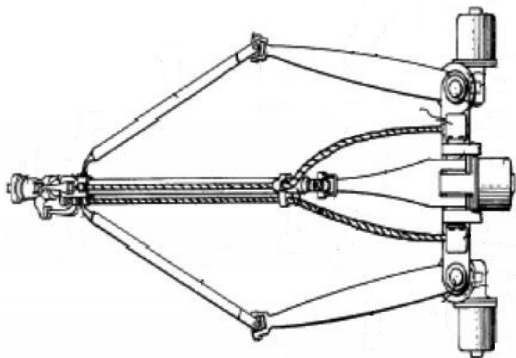


图 2 并联机器人机构的汽车喷漆机器人
Fig.2 Auto painting robot of parallel robot

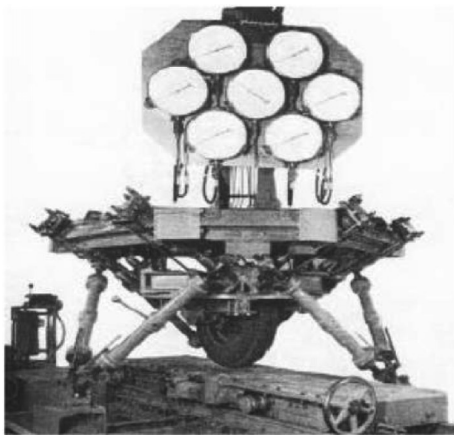


图 3 并联机器人机构的 6 自由度轮胎检测装置
Fig.3 6-DOF tire detection device of parallel robot

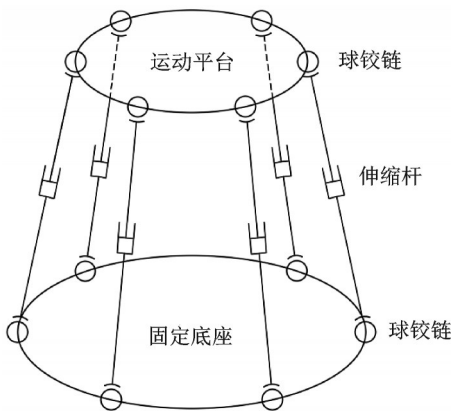


图 4 Stewart 并联机构
Fig.4 Stewart parallel mechanism

定下平台,则上平台可进行6自由度的独立运动(在三维空间做任意方向的移动和绕任意方向位置的轴线转动)。1978年,澳大利亚著名机构学学者Hunt^[7]首次提出把Stewart并联机构应用于工业机器人,提出了一种新型6自由度并联机器人。1979年,Maccallion和Pham基于该机构设计出用于装配的机器人,标志着真正意义上的并联机器人的诞生^[8]。

随后到20世纪80年代中期,国际上研究并联机器人的人还寥寥无几,仅有McDowell,Earl,Fichter,Yang,Lee,Duffy和Tesa等人,研究成果也不多,并联机器人研究似乎停滞不前,其主要原因是受计算机硬件技术水平的限制。随着计算机技术的发展,尤其是计算快速、功能强大的PC出现之后,促进了并联机器人的应用和发展^[9]。到20世纪80年代末90年代初以来,并联机器人机构才引起广泛注意,美国、英国、日本、法国、德国、俄罗斯和韩国等国家的研究机构和企业先后开展了对并联机器人的研究。1991年,燕山大学的黄真教授等研制成功国内首台并联机器人样机,标志着中国自主研制并联机器人的开端,如图5所示。随后哈尔滨工业大学、清华大学、天津大学、中科院以及沈阳自动化所等单位先后开展了研究,并研制出多台样机。



图5 并联机器人样机

Fig.5 Prototype of parallel robot

目前关于并联机器人的研究开发和应用正日益广泛,其主要应用领域包括:装配生产线^[8]、并联机器人机床^[10]、飞行模拟器^[11]、微操作机器人^[12]、空间飞行器对接机构^[13]、娱乐设施^[4]以及六维加速度传感器^[14]等,如图6所示,与串联机器人的应用领域构成互补关系,因而扩大了整个机器人的应用范围。

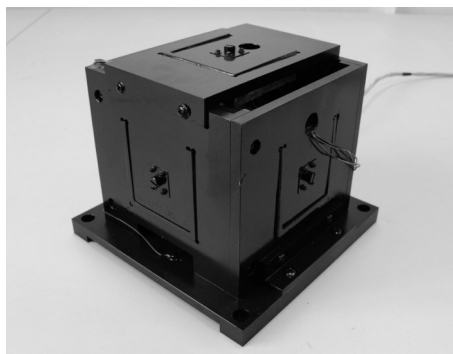


图6 并联式六维加速度传感器

Fig.6 Parallel type six-axis accelerometer

2 并联机器人工作空间研究现状

并联机器人工作空间的研究一直以来备受国内外学者的关注^[15-16],工作空间是衡量并联机器人性能的重要指标,工作空间分析是设计并联机器人末端执行器的首要环节。同样的机构尺寸,串联机器人比并联机器人工作空间大,具备同样的工作空间,串联机器人比并联机器人小,因此研究并联机器人的工作空间是非常重要的。

并联机器人的工作空间是指末端执行器参考点在空间可以达到的所有点的集合。Kumar^[17-18]对并联机器人的工作空间描述提出了独到见解,根据末端执行器工作时的位姿特点,工作空间可分为可达工作空间和灵活工作空间。可达工作空间是指末端执行器上某一参考点可以达到的所有点的集合,这种工作空间不考虑操作器的姿态;灵活工作空间是指末端执行器上某一参考点可以从任何方向到达的点的集合。并联机器人的工作空间分析方法主要包括立体几何法、有限离散法和现代数学法。

2.1 立体几何法

并联机器人工作空间的立体几何求解是一个非常复杂的问题,它是将封闭结构形式的并联机器人拆分为若干子单开链,结合特征点之间的尺度约束条件,将工作空间归结为若干子单开链参考点运动轨迹的交集。

赵新华^[19]运用几何法研究了一种新型具有三维移动自由度并联机器人的工作空间,得出了工作空间边界在三个坐标平面内的投影。张立杰等^[20]针对球面三自由度并联机器人,利用3个相同的串联形式工作空间的交集,除去不满足反解的点,即可得到其可达工作空间。张立杰等^[21]研究了平面2自由度冗余驱动并联机器人,参考点的输出不需要考虑姿态,其工作空间为3个分支工作空间的交集。

不难看出,由于少自由度并联机器人的工作空间变量的维数最多为3,因此其工作空间可以在3维坐标系中进行直观描绘。然而,对于6自由度并联机器人而言,其工作空间的求解是一个相当复杂的过程。考虑到6自由度并联机器人结构上的复杂性,其末端执行器参考点的输出包含三维移动和三维转动,位置和姿态间的强耦合关系使得工作空间很难在3维坐标系中完整描绘。鉴于此,有许多学者提出定姿态工作空间和定位置工作空间,这在一定程度上简化了求解过程,并且在固定位置或者固定姿态下的工作空间能够清晰地通过3维坐标系描绘。

最具代表性的工作当属 Jo 等提出后经 Gosse-lin^[22]发展的几何法,该方法基于给定动平台姿态和受杆长极限约束时,假想单开链末杆参考点运动轨迹为一球面的几何性质,将工作空间边界构造归结为对12张球面求交问题,如图7所示。Merlet^[23]在此基础上通过引入铰链约束和支撑杆干涉做了更加深入的工作,此外,Merlet 还研究了固定动平台参考点,求解相应极限姿态空间的解析方法。由于单纯采用理论上的推导对并联机器人工作空间进行求解有很大难度,于是清华大学刘辛军等^[24]运用几何法,并以并联机器人的运动学逆解为基础,利用 AutoCAD 平台求得 6-RTS 并联机器人的位置工作空间,并得出结论:Stewart 并联机器人的位置工作空间是6个实心或空心球体的交集,该方法能够简单有效的确定并联机器人的工作空间,然而,由于没有考虑运动副转角和杆件干涉等约束问题,导致得到的位置工作空间比实际的要大。

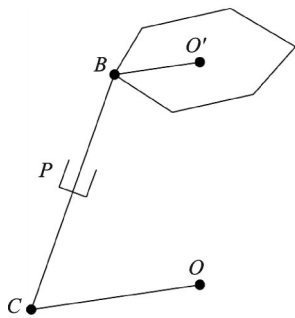


图7 单开链拓扑结构

Fig.7 Topology of single open chain

一般情况下,并联机器人的工作空间有不规则的突起,在这些突起的姿态,机构的运动学多表现为“病态”的特性,鉴于此,张立杰等^[25]针对 DELTA 并联机器人提出最大内切工作空间的概念,即所有工作空间截面上的最大内切圆面的集合,这为并联机器人的尺度综合以及应用奠定了基础,式

(1)为Z截面上的最大内切圆方程。随着新构型的层出不穷,工作空间求解模型构建困难,并且求解过程较复杂,鉴于此,Lu 等^[26]提出了一种 CAD 变量几何法,基于该方法构建了输入输出参数之间的人机交互界面,通过计算多种新型构型和现存构型的可达工作空间,验证了该方法的有效性,即有

$$x^2 + y^2 = (L - R + r)^2 \quad (1)$$

式中: L 为 DELTA 并联机器人定长杆; R 为静平台中心到角点的距离; r 为动平台中心到角点的距离。

2.2 有限离散法

在有限离散法研究方面,主要有网格法、Monte Carlo 法和优化法,这些算法的本质是将工作空间点云离散化,结合并联机器人平台的约束条件来确定工作空间边界。有限离散法求解思路主要分为两类:一类是利用运动学正解来求解工作空间边界,但是并联机器人正解需要求解一组具有强非线性耦合关系的方程组,因此这种方法过于复杂;另一类是利用运动学反解来求解工作空间边界,实质是在一定范围内判断所给的机构参数是否满足约束条件,这种方法需要固定末端执行器的位姿,因此,在不同程度上存在着适用性差、计算效率和求解精度低等缺点。通过查阅大量资料,随机选取10篇有关有限离散法求解工作空间的文献,其中运用反解的有8篇,运用正解的有2篇,可以发现,大多数学者都是运用反解计算并联机器人的工作空间。

Fichter^[27]采用固定6个位姿参数中的3个姿态参数和1个位置参数,而让其他2个参数变化,研究了6自由度并联机器人的工作空间,这种方法只能找出某一固定姿态时工作空间的截面形状。Masory 等^[28]同时考虑到各关节转角的约束、各杆长的约束和机构各构件的干涉来确定并联机器人的工作空间,如式(2)所示,且采用数值积分的方法计算工作空间的体积,比较接近实际,工作空间微分子空间和球铰链模型分别如图8—9所示。

$$\begin{aligned} L_{\min i} &\leq L \leq L_{\max i} \\ \theta_{pi} &= \arccos \frac{l_i \cdot R n_{pi}}{|l_i|} \leq \theta_{pmax} \\ \theta_{bi} &= \arccos \frac{l_i \cdot R n_{bi}}{|l_i|} \leq \theta_{bmax} \\ D_i &\geq D \\ V_i &= \frac{1}{2} \sum_j \rho_j^2 \Delta \gamma \Delta Z \end{aligned} \quad (2)$$

式中: l_i 为各连杆向量; θ_{pi} 为动平台球面副的转角; θ_{bi} 为静平台万向副的转角; R 为运动副相对于固定坐标系的姿态; n_{pi} 为第*i*个球面副的基座在动坐标

系中的姿态; n_{bi} 为第*i*个万向副的基座在定坐标系中的姿态; D 为各杆的直径; D_i 为两相邻杆中心线之间的最短距离; ρ 为极径; $\Delta\gamma$ 为增量角; ΔZ 为 Z 轴向增量。

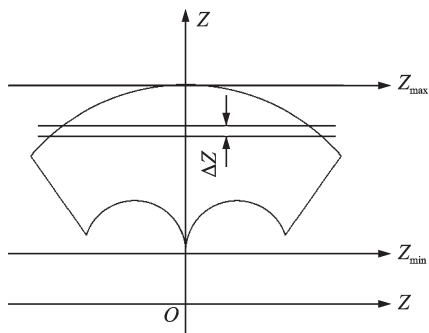


图8 工作空间微分子空间

Fig.8 Differential subspace of workspace

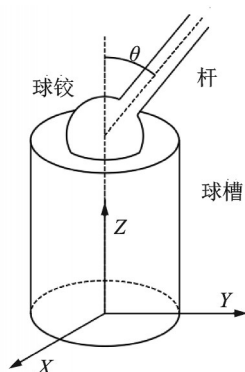


图9 球铰链模型

Fig.9 Spherical joint model

高峰等^[29]在Masory的研究基础上,提出一种球坐标搜索法,对3-RPS并联机构进行了工作空间分析,该方法具有效率高和简易的特点。Boney等^[30]提出了一种新的计算6自由度并联机器人的定姿态工作空间的离散化方法,此方法是利用位置反解方程和并联机器人的3种约束求得,并且将工作空间体积和给定姿态时工作空间的形状作为性能评价指标,探究不同设计参数对工作空间的影响,该方法对求解其他类型的6自由度并联机器人工作空间具有指导意义。曹永刚等^[31]针对6-RSS构型II,给出了驱动副、球副和连杆干涉等数学形式的约束条件,基于反解采用边界搜索法得到了各个定姿态下工作空间的边界曲面,并以工作空间体积最大为优化目标,对机构参数进行了优化设计。针对直线驱动型并联机器人工作空间求解复杂、精度不高和优化目标不合理的问题,吴超宇等^[32]提出一种极坐标变步长迭代搜索法,并且分析各结构参数变化对工作空间的形状、尺寸和对称性的影响趋势,利用综合并联机器人灵巧度和工作空间利用率的全局混合性能指标建立结构参数优化的数学模

型,得到不同工况下基于并联机器人灵巧度和工作空间利用率的最优参数, η 值越小,表明并联机器人的全局混合性能越优异,有

$$\eta_{\min} = \omega \left(\frac{1}{V'} \int_{V'} \kappa dV' \right) + (1 - \omega) \frac{V^*}{V'} \quad (3)$$

式中: ω 为权重系数($0 \leq \omega \leq 1$); V' 为给定设计空间; κ 为Jacobian矩阵的条件数,用来评价并联机器人的操作性能; V^* 为可达工作空间。

2.3 现代数学法

综合考虑立体几何法和有限离散法的优缺点,有些学者从其他角度对工作空间的问题进行了探讨。黄田等^[33]以微分几何和集合论为工具,提出一种Stewart并联机器人工作空间解析建模的方法,该方法应用单参数曲面族包络理论,将工作空间边界问题归结为对若干变心球面族的包络面求交问题,并提出了用截平面法求解工作空间边界的高效算法。陈在礼等^[34]提出一种利用遗传算法求解6自由度空间并联机器人机构综合问题的新方法,该机构的工作空间必须包含预先给定的且具有一定姿态能力的工作空间,为了描述具有一定姿态能力的工作空间,给出了一种简单有效的搜索算法,该算法通过搜索8组具有极限姿态角的定姿态工作空间的交集获得,将工作空间由六维搜索简化为8次三维搜索,效率高、实用性好,与传统的优化算法相比,它采用群体操作,对搜索空间和目标函数没有任何特殊要求,具有很好的鲁棒性和全局优化性,这对并联机器人的设计和分析具有重要意义。

Alp等^[35]首次运用神经网络算法计算6-3 Stewart并联机构的姿态工作空间,并在Matlab中给出姿态工作空间的柱面坐标表示。为了降低神经网络算法的错误率、缩短网络训练的持续时间以及得到更精确的工作空间,Kuzeci等^[36]在Alp的基础上提出一种神经网络与遗传算法相结合的方法,并与试错法计算结果进行对比,该方法不仅提高了计算精度,而且减少了时间消耗。

考虑到区间分析方法在功能评估方面的可靠性,Farzaneh等^[37]通过引入区间分析方法计算得到了3-RPR平面并联机器人和6自由度Stewart并联机器人的无碰撞工作空间,由于区间分析方法的局限性,导致在计算高次复杂方程时需要消耗大量的时间,这可能是区间分析方法在研究无碰撞工作空间中的首次应用,并且为推广到更复杂的并联机器人开辟了一条新途径,图10给出了两种类型的碰撞区间,式(4)为点到直线距离的区间表示。

$$d = \sqrt{\left(\frac{x_P + my_P - mc}{m^2 + 1} - x_P\right)^2 + \left(m \frac{x_P + my_P - mc}{m} + c - y_P\right)^2} \quad (4)$$

$$m = \frac{y_A - [\underline{y}_B, \overline{y}_B]}{x_A - [\underline{x}_B, \overline{x}_B]}$$

$$c = y_A - mx_A$$

$$L: y = mx + c$$

式中: d 为点 P 到直线 L 的距离; m 为直线斜率; c 为常量; x_P 和 y_P 分别为点 P 的横坐标和纵坐标; x_A 和 y_A 分别为点 A 的横坐标和纵坐标; $[\underline{x}_B, \overline{x}_B]$ 为点 B 横坐标的区间, 其中, \underline{x}_B 和 \overline{x}_B 分别为点 B 横坐标的下界和上界; $[\underline{y}_B, \overline{y}_B]$ 为点 B 纵坐标的区间, 其中, \underline{y}_B 和 \overline{y}_B 分别为点 B 纵坐标的下界和上界。

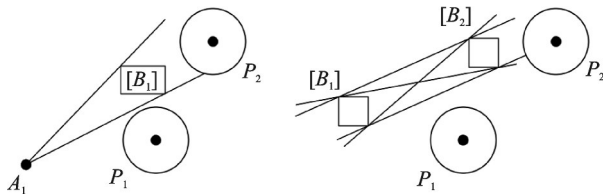


图10 两种区间直线
Fig.10 Two interval lines

3 并联机器人奇异位形研究现状

奇异位形是所有机构都会发生的一种不可避免的现象。从20世纪70年代开始,国内外许多学者就开展了对串联机器人奇异位形的研究。并联机器人奇异位形的研究工作最早是从20世纪80年代开始,具有代表性的学者有 Hunt、Fichter、黄真、曲义远和 Merlet。90年代之后,许多学者都对机构的奇异位形产生了兴趣,从而推进了整个奇异

$$[J]^T = \begin{bmatrix} \frac{B_1 - C_1}{|B_1 - C_1|} & \frac{B_2 - C_2}{|B_2 - C_2|} & \frac{B_3 - C_3}{|B_3 - C_3|} & \frac{B_4 - C_4}{|B_4 - C_4|} & \frac{B_5 - C_5}{|B_5 - C_5|} & \frac{B_6 - C_6}{|B_6 - C_6|} \\ C_1 \times B_1 & C_2 \times B_2 & C_3 \times B_3 & C_4 \times B_4 & C_5 \times B_5 & C_6 \times B_6 \\ \frac{B_1 - C_1}{|B_1 - C_1|} & \frac{B_2 - C_2}{|B_2 - C_2|} & \frac{B_3 - C_3}{|B_3 - C_3|} & \frac{B_4 - C_4}{|B_4 - C_4|} & \frac{B_5 - C_5}{|B_5 - C_5|} & \frac{B_6 - C_6}{|B_6 - C_6|} \end{bmatrix} \quad (5)$$

式中: $B_i (i=1, 2, \dots, 6)$ 为动平台铰链中心点在静坐标系中的位置矢量; C_i 为静平台铰链中心点在静坐标系中的位置矢量,即

$$A\dot{x} + B\dot{\theta} = 0 \quad (6)$$

式中: x 为动平台输出坐标向量; θ 为铰链的输入角向量。

20世纪90年代之前,诸多学者只是发现了若干类型的奇异,但奇异位形之间是孤立的。奇异的发生到底是孤立的还是连续的呢?从90年代中期开始,有人从较简单的机构开始研究,发现机构的

位形的研究。

奇异位形是当机构运动进入某种临界状态时所具有的特定位形,是并联机器人的一项重要运动学特性。在这种临界状态下,机构的实际自由度不再与其理论自由度相等,即存在两种情况:一是机构丧失了应有的自由度导致刚化;二是机构获得了额外的自由度而失去控制。奇异位形的研究方法主要包括代数法、几何法、运动学法和现代数学法。

3.1 代数法

代数法是研究奇异最基本的方法,由于计算过程需要推导出机构的 Jacobian 矩阵,该方法又称为 Jacobian 矩阵法,式(5)为机构的力 Jacobian 矩阵。从 Jacobian 矩阵推导方法来看,主要有3种:运动学方程求导法、静力递推法和速度递推法。Hunt^[38]首先对 Stewart 并联机构的奇异位形进行了研究,得到了6-3 Stewart 并联机构的6条线矢相交于同一条直线时的一种奇异位形。Fichter^[27]利用 Jacobian 矩阵求解,找到了6-3 Stewart 并联机构的上平台绕垂直轴转 $\pm 90^\circ$ 的奇异位形,这种机构的上平台是三角形,下平台是六边形。针对上下平台都是半规则的正六边形 Stewart 并联机构,黄真和曲义远^[39]研究发现,当上平台转 90° 时机构也奇异,并且还导出当上下平台相似且对应点相连时,机构的奇异与位置无关的结论,这是国际上首次给出的6-6 Stewart 并联机构的一种一般线性丛奇异。1990年,加拿大著名机构学家 Gosselin 与 Angeles^[40]对奇异位形的研究作出了突出贡献,他们根据速度 Jacobian 矩阵,如式(6)所示,将奇异位形划分成了3种类型:当 $\det(B)=0$ 时,为边界奇异;当 $\det(A)=0$ 时,为位形奇异;当 $\det(B)=0$ 且 $\det(A)=0$ 时,为结构奇异,这类方法奠定了以代数法研究并联机器人奇异位形的基础。

奇异位形不只是一些孤立的点,找到了一系列连续变化的奇异位形,称之为奇异轨迹^[41]。奇异轨迹是一个含有位姿参数的方程,可以通过计算机构 Jacobian 矩阵的行列式为零求出,该方程即为奇异轨迹方程,如式(7)所示。

$$f_1 Z^3 + f_2 XZ^2 + f_3 YZ^2 + f_4 X^2 Z + f_5 Y^2 Z + f_6 XYZ + f_7 Z^2 + f_8 X^2 + f_9 Y^2 + f_{10} XY + f_{11} XZ + f_{12} YZ + f_{13} Z + f_{14} X + f_{15} Y + f_{16} = 0 \quad (7)$$

式中: X, Y, Z 表示动平台的位置; $f_j (j=1, 2, \dots, 16)$ 表示机构的结构参数与末端执行器姿态变量之间

的函数关系。

不难看出,这是一个不可分解的三次多项式,并且位置与姿态之间的强耦合关系使得奇异轨迹的描绘非常复杂。式(7)可以进一步表示为

$$f(\alpha, \beta) = 0 \quad (8)$$

式中: $\alpha = [X, Y, Z]$ 表示机构末端执行器参考点的位置; $\beta = [\psi, \theta, \varphi]$ 表示机构末端执行器的姿态。

大多数学者都是根据奇异轨迹描述方式的不同,将机构的奇异轨迹分为位置奇异轨迹和姿态奇异轨迹。固定末端执行器的姿态 β , 以位置 α 为变量时, 方程(8)则表示了末端执行器保持在某指定姿态时机构所有可能的位置奇异位形, 即位置奇异轨迹; 相反则表示姿态奇异轨迹。

St-Onge 和 Gosselin^[42]通过构建 Jacobian 矩阵, 推导出一般 6-6 Stewart 机构处于给定姿态参数时的位置轨迹方程表达式, 其中包括 Hunt 与 Fichter 所提出的奇异位形。Huang 等^[43-44]以 ZYZ-欧拉角为姿态参数, 在三维空间中描述了 6-3 SPS 和 6-6 SPS Stewart 并联机构的位置奇异轨迹曲面, 并研究了位置奇异轨迹位于 θ 截面上的几何性质, 得出当 $\theta=0, Z=0$ 时, 动平台有 3 个多余自由度, 分别为两个转动和一个移动自由度。Li 等^[45]以 ZYZ-欧拉角为姿态参数, 研究了 Stewart 机构的位置奇异轨迹, 并分析了特征平面上位置奇异轨迹的几何特性和运动学特性。然而, 单纯的研究位置奇异轨迹并不能够很全面地描绘出机构的奇异位形, 许多学者对机构的姿态奇异轨迹也进行了深入的研究。

Pernkopf 等^[46]以单位四元数描述动平台的姿态, 对给定位置时的 Stewart 机构的姿态奇异轨迹进行了研究, 并结合 Sturm 原理和二分法, 在没有考虑铰链转角约束和杆件干涉的情况下给出了寻找非奇异姿态空间的离散搜索算法, 指出了对于机构的每个位置, 必定存在非奇异的姿态原点, 在非奇异的姿态原点附近也必定存在一个有一定大小的非奇异姿态空间, 该空间是一个以距离姿态奇异轨迹表面最近长度作为半径的球体, 球的体积作为衡量机构处于给定位置时的姿态能力。曹毅等^[47]推导了 6-6 型 Stewart 机构处于固定位置时机构的姿态奇异轨迹的解析表达式, 利用 Stewart 机构的位置反解并综合考虑所有的结构约束条件, 首次提出了一种计算 6-6 型 Stewart 机构的非奇异姿态工作空间的离散算法, 并通过计算机仿真给出了 6-6 型 Stewart 机构的非奇异姿态工作空间的三维可视化描绘, 为该机构的设计和使用提供了重要的理论依据。Li 等^[48]基于 ZYX-欧拉角为姿态参数, 得到了 Stewart 并联机构六维奇异轨迹的解析表达式, 并研究了机构的位置奇异轨迹和姿态奇异轨迹。

在此基础上, Li 等^[49-50]将奇异轨迹图像化, 探究了机构的最大无奇异工作空间, 最大无奇异工作空间是机构设计中不可忽视的问题。Ma 等^[51]利用 Gosselin 的方法得到了相同的结论, 并用实体样机进行了验证, 该方法对于并联机构的设计与无奇异路径规划具有重要意义。Cao 等^[52-53]以 ZYZ-欧拉角为姿态参数, 研究了 Stewart 机构的姿态奇异轨迹, 运用半角公式, 该轨迹可以表示成一个 13 次的多项式, 结合逆运动学, 提出了一种考虑主被动关节转角限制和杆件干涉的姿态工作空间求解的离散化方法; 在此基础上, 提出了姿态能力性能评价指标, 并构建了一种计算该姿态能力的离散化算法, 进一步分析了设计参数和位置参数对姿态能力的影响, 基于姿态能力性能指标, 引入考虑奇异性、铰链转角限制和杆件干涉的实际姿态能力性能评价指标, 其局限性在于两种评价指标都是位于中间姿态 ($\psi = \theta = \varphi = 0^\circ$) 且在给定位置的工作空间中进行计算, 没有考虑整个位置工作空间的姿态能力, 即全局姿态能力, 并且计算过程需要消耗大量时间。

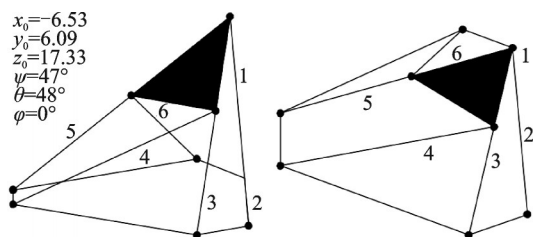
位置奇异轨迹和姿态奇异轨迹的研究是机构无奇异路径规划必不可少的一部分。Innocent 等^[54]最先针对平面三自由度 3 RPR 并联机构, 研究了不同正解位形之间的无奇异路径规划问题, 指出对于 1 组杆长对应 6 个正解位形, 在其中的两个正解之间可以实现从一个正解到另一个正解的无奇异转换。该发现仅仅是表明两个正解之间存在着这样的非奇异路径, 至于这两个正解之间是否还存在着多条类似的路径、如何寻找这样的路径以及其余正解之间是否也存在着这样的路径等问题, 论文并没有涉及。鉴于此, 白志富等^[55]验证了 Innocent 的发现, 指出在这两个正解构型之间还存在多条类似的路径, 并且这些路径形成了近似螺旋状的管道空间, 还发现了另外两个正解之间也存在着这样的无奇异路径, 其判定准则为: 如果机构的两个正解位形对应的 Jacobian 矩阵行列式的值异号, 则一定不存在无奇异连接路径; 如果两值同号, 则不能判断是否存在这样的路径。

无论是位置奇异轨迹, 还是姿态奇异轨迹, 由于 6 自由度并联机构输入输出表达式中包含 3 个位置变量和 3 个姿态变量, 得出的奇异轨迹为超越方程非常复杂。为了简化奇异表达式, 有学者^[56-57]利用四元数表示姿态, 并研究了机构的奇异姿态, 这将复杂的超越方程转化为多项式方程, 大大降低了计算难度; Doyon 等^[58]通过对建立机构的 Jacobian 矩阵进行初等变换操作, 得到 Stewart 并联机构的位置奇异轨迹的简化矢量表达式, 一定程度上降低了计算的复杂性, 该矢量可以描述为是机构奇异曲面上相应奇异

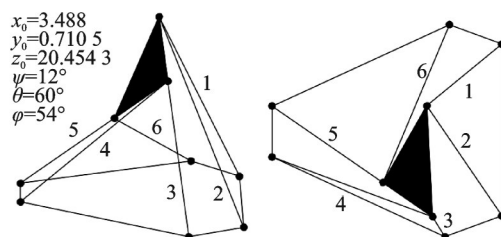
点处的法向量,矢量表达式还可以与区间分析相结合用来确定无奇异工作空间,这为更直观地分析和设计 Stewart 并联机构开辟了一条道路。

3.2 几何法

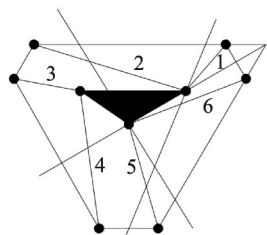
几何法是另一种研究奇异的方法。相比于代数法的复杂性,几何法无需繁琐的运算,能直接发现机构的奇异位形,但这种方法无法找出所有的奇异位形。1989年,Merlet^[59]首次提出将 Grassmann 线几何原理应用于并联机构奇异位形的研究,发现了许多新的奇异位形,取得了较好的研究进展,其原理是当代表运动副轴线的直线成为相关时,机构就奇异。



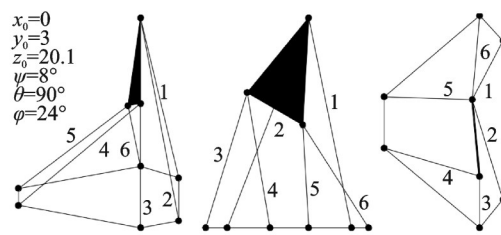
(a) Perspective and top views of 3c-type singularity



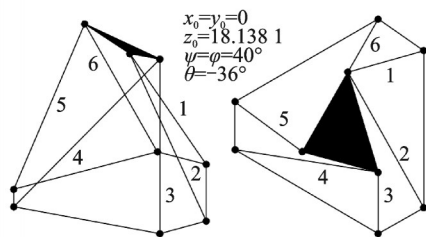
(b) Perspective and top views of 4d-type singularity



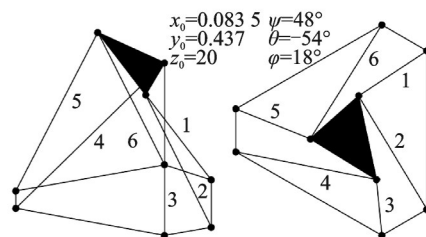
(c) 4b-type



(d) Perspective, side and top views of 5a-type singularity($\theta = \pm \frac{\pi}{2}$)



(e) Perspective and top views of 5a-type singularity($\psi = \phi$)



(f) Perspective and top views of 5b-type singularity

图 11 Merlet 型奇异位形

Fig.11 Merlet-type singularity

3.3 运动学法

从运动学上看,并联机构产生奇异时,虽然所有的输入副都被锁住,但机构仍存在未被约束掉的自由度。基于这个奇异的运动学条件,1999年,Huang等^[63-64]首先提出了奇异产生的运动学条件,但那仅是必要条件,还不是充分必要条件。2001年,Kong等^[65]从另一角度导出了运动学奇异产生的充分必要条件。2003年,Huang等^[66]继续原来的思路,通过引入线性丛的概念,将 Stewart 并联机构的奇异分为一般线性丛奇异和两类特殊的线性丛奇异,导出了 Stewart 并联机构产生一般线性丛奇异的运动学原理和充分必要条件,其原理为:刚体上非共线的3个点的3个速度能决定物体的运动状态的充分必要条件是,对应该3点的3个速度的法平面的交点落在由3个点所决定的平面上,该方法深刻揭示了机构奇异的物理含义,如图12所示。

根据线性束簇秩的不同,可将其分为 3c, 4d, 4b, 5a, 5b 几类,如图 11 所示,这其中也包含了 Hunt 与 Fichter 发现的奇异位形。Wolf 等^[60]利用几何法求解了一种三自由度并联机构的奇异位形。方斌等^[61]运用线几何法研究了同构支链 H4 并联机构的奇异性,给出了机构发生支链奇异、平台奇异和驱动奇异的判别条件,并且分析了机构在奇异位形的运动性质。Pendar 等^[62]利用约束平面法研究了并联机构的奇异位形,并将所得结果与 Grassmann 线几何法相比,约束平面法的效率较高,但是与 Grassmann 几何法一样,它无法找出所有的奇异位形。

Li 等^[67]基于运动学原理研究了 6-3 Stewart 并联机构的奇异等效机构的奇异位形,证明了该方法的正确性,这将 6-3 Stewart 并联机构复杂的奇异分析转化成简单平面机构的位置分析,降低了奇异分析的复杂程度。Cao 等^[68]运用运动学法研究了 6-3 Stewart 并联机构的奇异性,基于刚体间的运

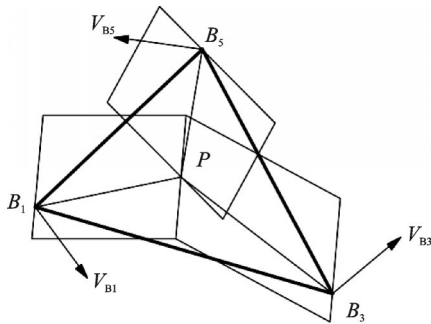


图 12 奇异的运动学原理
Fig.12 The kinematics principle of singularity

动力学关系,验证了运动学法的可靠性和正确性,并且分析了特殊姿态下位置奇异轨迹的特性,得出其轨迹为 1 个平面或 1 个双曲抛物面,甚至是 3 个相交平面。

3.4 现代数学法

现代数学法蕴含复杂的数学基础难以理解,因此很少使用。Collins^[69]使用 Clifford 代数法研究了 Stewart 并联机构的奇异位形,得出了无奇异工作空间,该方法就是现在所说的几何代数。Bonev 等^[70]提出了三自由度平面并联机构的所有构型,在此基础上运用螺旋理论研究了机构的奇异性,得到了机构两种形式的奇异轨迹,这为三自由度并联机构的设计和应用奠定基础。Zhao 等^[71]运用螺旋理论研究了空间混联机构的奇异性,考虑机构运动学和几何学特征,将混合支链的运动螺旋等效替换为纯串联结构,降低了复杂性,这也适用于其他空间混联机构的奇异性分析。沈辉等^[72]利用拓扑学和微分几何的概念,提出了针对一般并联机构的奇异位形分类和判定方法,该方法基于位形空间拓扑几何性质,深刻揭示了机构奇异时的几何特性和瞬时运动学特性,具有明显的几何和物理意义,并且在奇异位形的判断上,采用了 1 次外微分式,所得结论与机构参考坐标系的选取无关,体现了奇异位形与参考坐标系无关的机构特性。

螺旋理论法通常与几何法一起使用,具有直观的特点,但是该方法在很大程度上基于观察,很难找出并联机构的全部奇异位形,但是对于一些少自由度并联机构,利用观察法还是能够找全其奇异位形的。除此以外,还有学者运用 Grassmann-Cayley 代数法^[73-75]、矩阵分析方法^[76]以及黎曼几何和微分流形相结合的方法^[77]。考虑到 Jacobian 矩阵的复杂性,马嘉熠^[78]运用几何代数分析了 6-3 和 6-6 Stewart 并联机构的位置奇异和姿态奇异,并且提出了“对称奇异位形”的概念,该方法避免了 Jacobian 矩阵的出现,简化了计算,式(9)为各分支所在的线矢量线性相关时的几何代数表示,图 13 为向量

外积的几何表示。
$$S_1 \wedge S_2 \wedge S_3 \wedge S_4 \wedge S_5 \wedge S_6 = 0 \tag{9}$$
式中: S_i 为分支*i*所在的线矢量在几何代数框架下的表示。

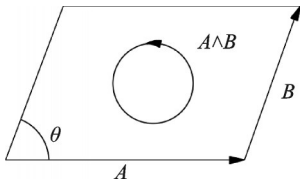


图 13 外积图示
Fig.13 Outer product diagram

4 工作空间和奇异位形求解方法特性对比

在工作空间分析方面,立体几何法具有较高的精度和较好的通用性,但是操作复杂,不利于程式化分析计算;有限离散法便于程式化,并且通用性较好,但是随着求解精度的提高,需要计算的离散点也增多,这就导致计算过程需要消耗大量的时间;现代数学法是将现代数学理论方法运用于并联机构工作空间的求解,这只是一项探索性的研究工作,在一定程度上优化了求解性能,但由于蕴含复杂的数学理论基础,这类方法并没有得到广泛应用。表 1 列出了工作空间求解方法的特性对比。对于机构工作空间的求解,目前应用较广泛的方法是有限离散法,该方法的研究思路主要分为两类:一类是运用正解;另一类是运用反解。对于大多数并联机构而言,其正解表达式都是一组具有强耦合的非线性方程组,输入输出之间的求解较复杂,因此大多数学者更青睐于运用反解计算工作空间。首先给定末端执行器的位姿,计算出机构输入变量,然后将输入变量与机构结构参数进行对比,最后得到满足条件的离散点。不难看出,这一过程需要固定末端执行器的位置和姿态,因此存在适用性差和求解过程较复杂等缺点,从另一方面也可以看出并联机构具有解析正解的重要性。

在奇异位形研究方面,代数法的计算过程较复

表 1 工作空间求解方法特性对比

Table 1 Characteristic comparison of workspace solution methods			
特性	立体几何法	有限离散法	现代数学法
精度	高	低	中
效率	中	低	低
稳定性	优	优	较优
程式化	复杂	简单	较复杂
通用性	较优	优	优
复杂程度	复杂	简单	较复杂

杂并且无法体现奇异的物理本质和发生奇异的普遍性条件,但其适用性好,能够掌握机构奇异轨迹在工作空间内的分布情况;几何法的操作过程较简单,并且适用性好,能够直观地找出机构的奇异位形,但是该方法只能确定离散的奇异位形,不能得出整个奇异轨迹,而并联机器人的奇异位形通常是多维的连续曲线或连续曲面,因此该方法并不适用于整个奇异轨迹的确定,该方法对于奇异点的判断以及与其他方法进行对比是一个不错的选择;运动学法深刻揭示了机构产生奇异的物理意义;现代数学法所包含的数学理论方法很多,从目前所运用的研究方法来看,该方法体现了代数法与几何法相融合的特性,并且基于拓扑学的引入,也揭示出机构的奇异位形与参考坐标系无关的特性^[79],然而,对于多自由度的并联机构,该方法很难找出机构在工作空间内的全部奇异位形,而且诸如 Grassmann-Cayley 代数、Clifford 代数和现代微分几何等方法蕴含复杂的数学基础,较难理解。表 2 列出了奇异位形求解方法的特性对比。对于机构奇异位形的求解,目前应用较普遍的方法是代数法,通过建立机构输入输出构件之间的运动关系,得出机构的 Jacobian 矩阵,机构的奇异位形可以根据 Jacobian 矩阵行列式的值是否为零进行判断,可以看出,代数法的核心是要推导出机构的 Jacobian 矩阵,而建立 Jacobian 矩阵较普遍的方法是运动学方程求导法,运动学方程的构建是并联机构研究中的基础性工作,并且得到的奇异轨迹能够通过固定变量法在软件中进行图形化描绘,因此代数法得到了众多学者的青睐。

表 2 奇异位形求解方法特性对比
Table 2 Characteristic comparison of singularity solution methods

特性	代数法	几何法	运动学法	现代数学法
效率	差	优	较优	较优
复杂性	复杂	简单	较复杂	较复杂
全局性	优	差	较优	较优
直观性	差	优	优	较优
适用性	优	较优	较优	优
物理含义	模糊	模糊	清晰	模糊

5 结 论

随着并联机器人应用领域的不断壮大,对其运动性能提出了更高的要求,而并联机器人的运动学是影响其运动性能优劣的主要因素,其中包括工作空间和奇异位形的研究。纵观并联机器人工作空间和奇异位形的研究现状,到目前为止还没有一种普遍、通用的计算方法,这仍是一项处于探索阶段

的研究课题。通过深入剖析已有的研究成果,不难发现,从结构综合和理论创新两个方面进行突破能够为并联机器人的发展提供强劲动力。

由于并联机构运动副、运动链以及构成形式的多样性,新构型的并联机器人层出不穷,因而其工作空间和奇异位形就更难求解,因此有必要探究并联机构构型与工作空间和奇异位形求解之间的关联程度,并联机构正解求解的难易程度可以通过耦合度指标衡量^[80],工作空间和奇异位形的求解难易程度以及不同构型之间最优求解方法的选择是否也可以通过定量的指标衡量,这就有必要针对并联机构工作空间和奇异位形的求解难易程度给出定性的评价指标,结合这些评价指标综合出所需要的构型。随着新兴产业的兴起,用于工业装备、运动娱乐类装置等的一些新型装备,都需要用较少的输入来产生多向的空间运动,以达到结构简单、制造方便以及节能减排的目的,而少输入多输出机构恰好迎合这些要求,如振动筛、混合机等,因此综合出更多的少输入、多输出机构是一个不错的发展方向^[81]。考虑到串、并联机器人在性能上的互补性,串并混联式结构是未来的发展方向,可能会出现融合两者优点于一体甚至更好的效果,实现单个机构无法实现的功能;并且可以在不影响机构输出功能的基础上增加若干相同驱动支链,通过冗余驱动减少机构产生的奇异位形,也可以通过改变驱动模式,使奇异的类别及状态发生改变,实现无奇异工作空间的最大化。

并联机器人工作空间和奇异位形的研究都存在尚未攻克的难题,这很大程度上与理论研究不成熟有关,因此工作空间和奇异位形研究的突破口在于理论创新。通过深入剖析已有的研究成果,不难发现,并联机器人工作空间和奇异位形的研究瓶颈在于两个方面:一是求解的精度与效率之间的矛盾;二是参数化表示与图形化描绘之间的矛盾。精度与效率决定了并联机器人的操作性能,参数化表示与图形化描绘决定了能否直观反映并联机器人的工作空间和奇异位形。人们往往通过降低求解精度来获得较高的效率,或者降低效率来获得较高的精度,正是它们之间的矛盾关系制约了并联机器人工作空间和奇异位形的研究进程。缓解、甚至彻底解决蕴藏在并联机器人工作空间和奇异位形背后的两大矛盾是学者们梦寐以求的奋斗目标和基本出发点。从研究并联机器人工作空间和奇异位形的目的来看,最终是为了实现无奇异的工作空间和无奇异的路径规划,进而能够为并联机器人的广泛应用奠定基础。然而,由于存在尚未攻克的难题以及新构型的层出不穷,目前尚未形成一套完整成

熟的理论体系,因而可以从以下两个着眼点进行探讨:一是从构型着眼,深入研究各种构型之间不同方法的适应度,从而找到最优的求解方法;二是从理论着眼,单纯依靠某种算法可能很难满足并联机器人较高的运动性能要求,综合考虑各种算法的优缺点,多种算法的集成将会是一种可选策略^[36,82]。一般情况下,并联机器人在奇异位形附近工作时,机构的输入与输出运动之间的传递关系会严重失真,其失真程度可用可操作度评价指标来衡量,因此,不但应该避免奇异位形,而且要在远离奇异位形的区域工作。评价机构工作空间和奇异位形的指标有很多,如工作空间的体积、转动能力、灵巧度和最大无奇异内切球等,不难看出,这些指标都是在固定位置或者固定姿态的情况下所确定,因此,如何整体描绘出机构工作空间和奇异位形的超曲面轨迹,进而分析各种奇异位形对工作空间的影响程度,最终描绘出在任务空间内的奇异轨迹影响机构的可控程度,在此基础上得出普遍、统一的评价指标,这是一个值得深入研究的问题。

纵观并联机器人的发展现状,目前正处于瓶颈期,制约和阻碍并联机器人发展的根本原因是结构综合和理论研究上的不成熟。除此以外,并联机器人是一项多学科融合的庞大而极富挑战性的课题,因此,它的发展还依赖于其他相关学科和技术的进步与支持。中国制造2025是中国的发展目标,中国要从制造大国发展成为制造强国,这就给并联机器人的发展带来了空前的机遇,同时也对技术研究提出了不小的挑战,其关键在于创新,特别是制造领域的高端装备,而机构的创新发挥着不可替代的作用,因此要坚持结构综合和理论研究上的不断开拓创新,争取让中国的并联机器人技术赶上甚至超越国际先进水平。随着并联机器人技术的不断发展,相信在未来10年,甚至更长时间,其应用领域将更为广阔,为中国的现代化建设扮演越来越重要的角色。

参考文献:

- [1] 姚燕安,张迪,李晔卓,等.多面体网型空间抓捕机构的设计与分析[J].南京航空航天大学学报,2019,51(3): 263-271.
YAO Yan'an, ZHANG Di, LI Yezhuo, et al. Design and analysis of polyhedral net space capture mechanism[J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2019, 51(3): 263-271.
- [2] 吴范徐齐,许嵩,刘生,等.3-UPS/RPP并联机构设计与运动特性研究[J].机械传动,2020,44(5): 59-64.

search of design and kinematic characteristic of a 3-UPS/RPP parallel mechanism[J]. Journal of Mechanical Transmission, 2020, 44(5): 59-64.

- [3] 田海波,马宏伟,马琨,等.一种三构态变胞并联机构运动学及工作空间分析[J].机器人,2019,41(3): 414-424.
TIAN Haibo, MA Hongwei, MA Kun, et al. Kinematics and workspace analysis of a metamorphic parallel mechanism with three configurations[J]. Robot, 2019, 41(3): 414-424.
- [4] GWINNETT J E. Amusement device: United States, US1789680[P]. 1931-1-20.
- [5] POLLARD W L G. Spray painting machine: US2213108[P]. 1940-8-27.
- [6] STEWART D. A platform with six degrees of freedom[J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, 1965, 180(15): 371-386.
- [7] HUNT K H. Kinematic geometry of mechanisms[M]. Oxford, UK: Clarendon, 1978.
- [8] MACCALLION H, PHAM D T. The analysis of a 6-DOF work station for mechanized assembly[C]//Proceedings of the 5th World Congress on Theory of Machines and Mechanisms. Montreal, Canada: ASME, 1979: 611-616.
- [9] ARONSON R B. Hexapods: Hot of ho hum?[J]. Manufacturing Engineering, 1997, 119(4): 60-67.
- [10] 吴海兵,刘远伟,左敦稳.交叉式并联机床工作空间分析[J].机械科学与技术,2009,28(4): 472-475.
WU Haibing, LIU Yuanwei, ZUO Dunwen. Workspace analysis of a cross-legged parallel machine tool[J]. Mechanical Science and Technology for Aerospace Engineering, 2009, 28(4): 472-475.
- [11] KIM S H, SHIN H P, IN W S, et al. Design of a 6 DOF. flight simulator based on a full spinning parallel mechanism platform[C]//Proceedings of AIAA Modeling and Simulation Technologies Conference and Exhibit. California, USA: AIAA, 2005: 1-8.
- [12] 李祥春,李杨民,丁冰晓,等.新型3-PRC柔性并联微操作平台的研究[J].机械科学与技术,2018,37(5): 709-714.
LI Xiangchun, LI Yangmin, DING Bingxiao, et al. An investigation on a novel 3-PRC compliant parallel micromanipulator[J]. Mechanical Science and Technology for Aerospace Engineering, 2018, 37(5): 709-714.
- [13] 张崇峰,刘志.空间对接机构技术综述[J].上海航天,2016,33(5): 1-11.
ZHANG Chongfeng, LIU Zhi. Review of space docking mechanism and its technology[J]. Aerospace Shanghai, 2016, 33(5): 1-11.

- [14] 尤晶晶,李成刚,吴洪涛.六维加速度传感器的性能建模及结构优化[J].南京航空航天大学学报,2013,45(3): 380-389.
- YOU Jingjing, LI Chenggang, WU Hongtao. Performance modeling and structure optimizing of six-axis accelerometer[J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2013, 45(3): 380-389.
- [15] 吴生富,王洪波,黄真.并联机器人工作空间的研究[J].机器人,1991,13(3): 33-39.
- WU Shengfu, WANG Hongbo, HUANG Zhen. Study of workspace in parallel robot manipulator[J]. Robot, 1991, 13(3): 33-39.
- [16] JI Z M. Workspace analysis of stewart platforms via vertex space[J]. Journal of Robotic Systems, 1994, 11(7): 631-639.
- [17] KUMAR V. Characterization of workspace of parallel manipulators[J]. Journal of Mechanical Design, 1992, 114(3): 368-375.
- [18] KUMAR V. Instantaneous kinematics of parallel chain robotic mechanisms[J]. Journal of Mechanical Design, 1992, 114(3): 349-358.
- [19] 赵新华.一种新型具有三维移动自由度并联机器人运动学分析[J].天津理工大学学报,1999,15(2): 51-53.
- ZHAO Xinhua. Kinematics of a novel three DOF translational parallel manipulator[J]. Journal of Tianjing Institute of Technology, 1999, 15(2): 51-53.
- [20] 张立杰,刘辛军.球面三自由度并联机器人可达工作空间的研究[J].中国机械工程,2001,12(10): 1122-1125.
- ZHANG Lijie, LIU Xinjun. The atlases of reachable workspace for spherical 3-DOF parallel manipulators[J]. China Mechanical Engineering, 2001, 12(10): 1122-1125.
- [21] 张立杰,刘辛军.平面2自由度驱动冗余并联机器人的机构设计[J].机械工程学报,2002,38(12): 49-53.
- ZHANG Lijie, LIU Xinjun. On the design of the planar 2-DOF parallel manipulators with actuation redundancy[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2002, 38(12): 49-53.
- [22] GOSSELIN C M. Determination of the workspace of 6-DOF parallel manipulators[J]. Journal of Mechanical Design, 1990, 112(3): 331-336.
- [23] MERLET J P. Détermination de l'espace de travail d'un robot parallèle pour une orientation constante[J]. Mechanism and Machine Theory, 1994, 29(8): 1099-1113.
- [24] 刘辛军,张立杰,高峰.基于AutoCAD平台的六自由度并联机器人位置工作空间的解析求解方法[J].机器人,2000,22(6): 457-464.
- LIU Xinjun, ZHANG Lijie, GAO Feng. Geometrical determination of workspace for 6-DOF parallel manipulators based on autocad platform[J]. Robot, 2000, 22(6): 457-464.
- [25] 张立杰,刘辛军.一种并联机构最大内切工作空间的几何求解[J].机械设计与研究,2002,18(1): 20-22.
- ZHANG Lijie, LIU Xinjun. Geometric description of the maximum inscribed workspace for a DELTA parallel robot[J]. Machine Design and Research, 2002, 18(1): 20-22.
- [26] LU Yi, BI Cuicui, YE Nijia, et al. Auto-establishing simulation parallel manipulators with linear legs and auto-solving their workspaces by utilizing CAD variation geometry[J]. International Journal of Computers and Applications, 2017, 39(4): 220-233.
- [27] FICHTER E F. A Stewart platform-based manipulator: General theory and practical construction[J]. The International Journal of Robotics Research, 1986, 5(2): 157-182.
- [28] MASORY O, WANG J. Workspace evaluation of Stewart platforms[J]. Advanced Robotics, 1994, 9(4): 443-461.
- [29] 高峰,黄玉美,史文浩,等.3-RPS并联机构工作空间分析的球坐标搜索法[J].西安理工大学学报,2001,17(3): 239-242.
- GAO Feng, HUANG Yumei, SHI Wenhao, et al. The sphere-coordinate searching method of the workspace analysis of the 3-RPS parallel mechanism[J]. Journal of Xi'an University of Technology, 2001, 17(3): 239-242.
- [30] BONEV I A, RYU J. A geometrical method for computing the constant-orientation workspace of 6-PPRS parallel manipulators[J]. Mechanism and Machine Theory, 2001, 36(1): 1-13.
- [31] 曹永刚,张玉茹,马运忠.6-RSS型并联机构的工作空间分析与参数优化[J].机械工程学报,2008,44(1): 19-24.
- CAO Yonggang, ZHANG Yuru, MA Yunzhong. Workspace analysis and parameter optimization of 6-RSS parallel mechanism[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2008, 44(1): 19-24.
- [32] 吴超宇,钱小吾,余伟,等.直线驱动型并联机器人工作空间分析与优化[J].农业机械学报,2018,49(1): 381-389.
- WU Chaoyu, QIAN Xiaowu, YU Wei, et al. Workspace analysis and optimization of linear driven parallel robot[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2018, 49(1): 381-389.
- [33] 黄田,汪劲松,WHITEHOUSE D J. Stewart 并联机器人位置空间解析[J].中国科学(E辑),1998, 28

- (2): 136-145.
- HUANG Tian, WANG Jinsong, WHITEHOUSE D J. Position space analysis of Stewart parallel robot[J]. Science in China(series E), 1998, 28(2): 136-145.
- [34] 陈在礼, 陈学生, 谢涛. 用遗传算法解具有给定工作空间的并联机构综合问题[J]. 中国机械工程, 2002, 13(3): 187-190.
- CHEN Zaili, CHEN Xuesheng, XIE Tao. The synthesis of spatial parallel manipulators for a specific workspace with a genetic algorithm[J]. China Mechanical Engineering, 2002, 13(3): 187-190.
- [35] ALP H, ANLI E, ÖZKOL I. Neural network algorithm for workspace analysis of a parallel mechanism[J]. Aircraft Engineering and Aerospace Technology, 2007, 79(1): 35-44.
- [36] KUZECI Z E, OMURLU V E, ALP H, et al. Workspace analysis of parallel mechanisms through neural networks and genetic algorithms[C]//Proceedings of the 12th IEEE International Workshop on Advanced Motion Control. Sarajevo, Bosnia and Herzegovina: IEEE Press, 2012: 1-6.
- [37] FARZANEH K M, MASOULEH M T, CARO S. Collision-free workspace of parallel mechanisms based on an interval analysis approach[J]. Robotica, 2016, 35(8): 1747-1760.
- [38] HUNT K H. Structural kinematics of in-parallel-actuated robot-arms[J]. Journal of Mechanical Design, 1983, 105(4): 705-712.
- [39] 黄真, 曲义远. 空间并联机器人机构的特殊位形分析[J]. 东北重型机械学院学报, 1989, 13(2): 1-6.
- HUANG Zhen, QU Yiyuan. Special configuration analysis of spatial parallel manipulators[J]. Journal of Northeast Institute of Heavy Machinery, 1989, 13(2): 1-6.
- [40] GOSSELIN C M, ANGELES J. Singularity analysis of closed-loop kinematic chains[J]. IEEE Transactions on Robotics and Automation, 1990, 6(3): 281-290.
- [41] SEFRIQUI J, GOSSELIN C M. On the quadratic nature of the singularity curves of planar three-degree-of-freedom parallel manipulators[J]. Mechanism and Machine Theory, 1995, 30(4): 533-551.
- [42] ST-ONGE B M, GOSSELIN C M. Singularity analysis and representation of the general Gough-Stewart platform[J]. The International Journal of Robotics Research, 2000, 19(3): 271-288.
- [43] HUANG Zhen, CAO Yi, LI Yanwen, et al. Structure and property of the singularity loci of the 3/6-Stewart-Gough platform for general orientations[J]. Robotica, 2006, 24(1): 75-84.
- [44] HUANG Zhen, CAO Yi. Property identification of the singularity loci of a class of Gough-Stewart manipulators[J]. The International Journal of Robotics Research, 2005, 24(8): 675-685.
- [45] LI Baokun, CAO Yi, ZHANG Qiuju, et al. Position-singularity analysis of a special class of the Stewart parallel mechanisms with two dissimilar semi-symmetrical hexagons[J]. Robotica, 2013, 31(1): 123-136.
- [46] PERNKOPF F, HUSTY M L. Singularity analysis of spatial Stewart-Gough platforms with planar base and platform[C]//Proceedings of Design Engineering Technical Conference. Montreal, Canada: ASME, 2002: 593-600.
- [47] 曹毅, 黄真, 丁华锋, 等. 6/6型Stewart机构姿态奇异及非奇异姿态工作空间分析[J]. 机械工程学报, 2005, 41(8): 50-55.
- CAO Yi, HUANG Zhen, DING Huafeng, et al. Orientation-singularity and nonsingular orientation-workspace analysis of the 6/6-Stewart manipulator[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2005, 41(8): 50-55.
- [48] LI Haidong, GOSSELIN C M, RICHARD M J, et al. Analytic form of the six-dimensional singularity locus of the general Gough-Stewart platform[J]. Journal of Mechanical Design, 2006, 128(1): 279-287.
- [49] LI Haidong, GOSSELIN C M, RICHARD M J. Determination of the maximal singularity-free zones in the six-dimensional workspace of the general Gough-Stewart platform[J]. Mechanism and Machine Theory, 2007, 42(4): 497-511.
- [50] JIANG Qimi, GOSSELIN C M. The maximal singularity-free workspace of the Gough-Stewart platform for a given orientation[J]. Journal of Mechanical Design, 2008, 130(11): 112304.
- [51] MA Jianming, HUANG Qitao, XIONG Haiguo, et al. Analysis and application of the singularity locus of the Stewart platform[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2011, 24(1): 133-140.
- [52] CAO Yi, HUANG Zhen, ZHOU Hui, et al. Orientation workspace analysis of a special class of the Stewart-Gough parallel manipulators[J]. Robotica, 2010, 28(7): 989-1000.
- [53] CAO Yi, GOSSELIN C M, ZHOU Hui, et al. Orientation-singularity analysis and orientationability evaluation of a special class of the Stewart-Gough parallel manipulators[J]. Robotica, 2013, 31(8): 1361-1372.
- [54] INNOCENT C, PARENTI-CASTELLI V. Singularity-free evolution from one configuration to another in serial and fully-parallel manipulators[J]. Journal of Mechanical Design, 1998, 120(1): 73-79.
- [55] 白志富, 陈五一. 并联机构不同正解间无奇异转换问

题探讨[J]. 机器人, 2006, 28(5): 463-469.

BAI Zhifu, CHEN Wuyi. On the non-singular path between different forward kinematic configurations of parallel mechanisms[J]. Robot, 2006, 28(5): 463-469.

[56] LI Baokun, CAO Yi, HUANG Zhen, et al. Orientation-singularity and orientation-workspace analyses of the Stewart platform using unit quaternion[C]//Proceedings of ICIRA. Berlin, Germany: Springer, 2008: 131-140.

[57] CHENG Shili, WU Hongtao, WANG Chaoqun, et al. A novel method for singularity analysis of the 6-SPS parallel mechanisms[J]. Science China Technological Sciences, 2011, 54(5): 1220-1227.

[58] DOYON K, GOSSELIN C M, CARDOU P. A vector expression of the constant-orientation singularity locus of the Gough-Stewart platform[J]. Journal of Mechanisms and Robotics, 2013, 5(3): 034502.

[59] MERLET J P. Singular configurations of parallel manipulators and grassmann geometry[J]. International Journal of Robotics Research, 1989, 8(5): 194-212.

[60] WOLF A, OTTAVIANO E, SHOHAM M, et al. Application of line geometry and linear complex approximation to singularity analysis of the 3-DOF CaPa-Man parallel manipulator[J]. Mechanism and Machine Theory, 2004, 39(1): 75-95.

[61] 方斌, 李剑锋, 卿建喜. 同构支链 H4 并联机构的奇异性分析[J]. 机械工程学报, 2010, 46(21): 42-47.
FANG Bin, LI Jianfeng, QING Jianxi. Singularity analysis of the H4 parallel mechanisms with isomorphic sub-chains[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2010, 46(21): 42-47.

[62] PENDAR H, MAHNAMA M, ZOHOOR H. Singularity analysis of parallel manipulators using constraint plane method[J]. Mechanism and Machine Theory, 2011, 46(1): 33-43.

[63] HUANG Zhen, ZHAO Yongsheng, WANG Jing, et al. Kinematic principle and geometrical condition of general-linear-complex special configuration of parallel manipulators[J]. Mechanism and Machine Theory, 1999, 34(8): 1171-1186.

[64] 黄真, 杜雄. 3/6-SPS 型 Stewart 机器人的一般线性丛奇异分析[J]. 中国机械工程, 1999, 10(9): 997-1000.

HUANG Zhen, DU Xiong. General-linear-complex special configuration analysis of 3/6-SPS Stewart parallel manipulator[J]. China Mechanical Engineering, 1999, 10(9): 997-1000.

[65] KONG Xianwen, GOSSELIN C M. Uncertainty singularity analysis of parallel manipulators based on the instability analysis of structures[J]. The International

Journal of Robotics Research, 2001, 20(11): 847-856.

[66] HUANG Zhen, CHEN Longhui, LI Yanwen. The singularity principle and property of Stewart parallel manipulator[J]. Journal of Field Robotics, 2003, 20(4): 163-176.

[67] LI Yanwen, HUANG Zhen, CHEN Longhui. Singular loci analysis of 3/6-Stewart manipulator by singularity-equivalent mechanism[C]//Proceedings of the 2003 IEEE International Conference on Robotics and Automation. Taipei, China: IEEE Press, 2003: 1881-1886.

[68] CAO Yi, ZHOU Hui, SHEN Long, et al. Singularity kinematics principle and position-singularity analyses of the 6-3 Stewart-Gough parallel manipulators[J]. Journal of Mechanical Science and Technology, 2011, 25(2): 513-522.

[69] COLLINS C L. Singularity analysis and design of parallel manipulators[D]. California: University of California Irvine, 1997.

[70] BONEV L A, ZLATANOV D, GOSSELIN C M. Singularity analysis of 3-DOF planar parallel mechanisms via screw theory[J]. Journal of Mechanical Design, 2003, 125(3): 573-581.

[71] ZHAO Jingshan, ZHOU Kai, FENG Zhijing, et al. The singularity study of spatial hybrid mechanisms based on screw theory[J]. International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 2005, 25(9/10): 1053-1059.

[72] 沈辉, 吴学忠, 刘冠峰, 等. 并联机构中奇异位形的分类与判定[J]. 机械工程学报, 2004, 40(4): 26-31.
SHEN Hui, WU Xuezhong, LIU Guanfeng, et al. Classification and identification of singularities of parallel mechanism[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2004, 40(4): 26-31.

[73] BEN-HORIN P, SHOHAM M. Singularity analysis of a class of parallel robots based on Grassmann-Cayley algebra[J]. Mechanism and Machine Theory, 2006, 41(8): 958-970.

[74] KANAAN D, WENGER P, CHABLAT D. Singularity analysis of limited-dof parallel manipulators using Grassmann-Cayley algebra[J]. IEEE Transactions on Robotics, 2008, 25(5): 995-1004.

[75] AMINE S, MASOULEH M T, CARO S, et al. Singularity analysis of 3T2R parallel mechanisms using Grassmann-Cayley algebra and Grassmann geometry[J]. Mechanism and Machine Theory, 2012, 52: 326-340.

[76] 赵新华, 彭商贤. 并联机器人奇异位形研究[J]. 机械工程学报, 2000, 36(5): 35-37.

- ZHAO Xinhua, PENG Shangxian. Research on the singular configuration of parallel manipulators[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2000, 36(5): 35-37.
- [77] PARK F C, KIM J W. Singularity analysis of closed kinematic chains[J]. Journal of Mechanical Design, 1999, 121(1): 32-38.
- [78] 马嘉熠. 基于几何代数的六自由度并联机构奇异分析[D]. 杭州: 浙江理工大学, 2017.
- MA Jiayi. Singularity analysis of six degrees of freedom of parallel manipulators using geometric algebra[D]. Hangzhou: Zhejiang Sci-Tech University, 2017.
- [79] 杨廷力. 机器人机构拓扑结构设计[M]. 北京: 科学出版社, 2012.
- YANG Tingli. Theory and application of robot mechanism topology[M]. Beijing: Science Press, 2012.
- [80] 沈惠平, 尹洪波, 王振, 等. 基于拓扑结构分析的求解6-SPS并联机构位置正解的研究[J]. 机械工程学报, 2013, 49(21): 70-80.
- SHEN Huiping, YIN Hongbo, WANG Zhen, et al. Research on forward position solutions for 6-SPS parallel mechanisms based on topology structure analysis[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2013, 49(21): 70-80.
- [81] 沈惠平, 邓嘉鸣, 孟庆梅, 等. 少输入-多输出并联机构的设计方法及其应用[J]. 机械工程学报, 2018, 54(1): 223-232.
- SHEN Huiping, DENG Jiaming, MENG Qingmei, et al. Design methods and applications for the fewer input-more output parallel mechanisms[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2018, 54(1): 223-232.
- [82] 叶鹏达, 尤晶晶, 沈惠平, 等. 6支链台体型Stewart衍生构型位置正解半解析算法[J]. 农业机械学报, 2019, 50(4): 393-400.
- YE Pengda, YOU Jingjing, SHEN Huiping, et al. Semi-analytic algorithm for forward displacement analysis of six links Stewart derivative configurations[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2019, 50(4): 393-400.

(编辑: 刘彦东)