

文章编号 1004-924X(2021)08-1847-10

并联机器人工作空间的区间离散法

叶鹏达¹, 尤晶晶^{1,2*}, 仇鑫¹, 徐帅¹, 茹煜¹

(1. 南京林业大学 机械电子工程学院, 江苏 南京 210037;

2. 南京航空航天大学 江苏省精密与微细制造技术重点实验室, 江苏 南京 210016)

摘要: 鉴于运用传统的点离散法计算并联机器人的工作空间时存在计算精度低、有漏判点等不足, 以 3-RPR 平面并联机器人为研究对象, 基于区间数学理论提出一种高精度、无漏判点的区间离散法。推导了机器人运动学反解的解析表达式, 运用区间离散法计算其位置/姿态工作空间, 从效率、精度和误差灵敏度这三个方面对比了区间离散法和点离散法。结果显示: 随着计算精度的提高, 区间离散法的效率优势越来越明显; 区间离散法和点离散法的计算误差分别为 0.002% 和 0.272%; 区间离散法和点离散法对机器人结构尺寸误差的敏感度分别为 0.394 和 0.396。这表明区间离散法的数值性态明显优于点离散法。该研究方法及结论为并联机器人的拓扑优化、轨迹规划等工作提供了理论指导。

关键词: 并联机器人; 工作空间; 区间离散法; 点离散法; 数值性态

中图分类号: TP24 **文献标识码:** A **doi:** 10.37188/OPE.20212908.1847

Interval discretization method for workspace of parallel robot

YE Peng-da¹, YOU Jing-jing^{1,2*}, QIU Xin¹, XU Shuai¹, RU Yu¹

(1. College of Mechanical and Electronic Engineering, Nanjing Forestry University,
Nanjing 210037, China;

2. Jiangsu Key Laboratory of Precision and Micro-Manufacturing Technology, Nanjing University of
Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

* Corresponding author, E-mail: youjingjing251010@njfu.edu.cn

Abstract: The traditional point discretization method (PDM) for the workspace determination of parallel robots has some drawbacks such as low accuracy and missing points. In view of these, considering a 3-RPR planar parallel robot as the research object, an interval discretization method (IDM) with high accuracy and no point omission is proposed based on the interval mathematics theory. Firstly, an expression for the analytic inverse solution of the robot is derived. Then, the position/orientation workspace is obtained using the IDM. Subsequently, the efficiency, accuracy, and error sensitivity of the IDM and PDM are compared. The results indicate the following: (i) with the improvement of calculation accuracy, the efficiency advantage of the IDM becomes increasingly evident; (ii) the calculation error of the IDM and PDM are 0.002% and 0.272%, respectively; and (iii) the sensitivities of the IDM and PDM to the errors of structural size of the robot are 0.394 and 0.396, respectively. The research methods and conclusions provide theoretical guidance for topology optimization and trajectory planning of parallel robots.

收稿日期: 2021-01-11; 修订日期: 2021-03-16.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (No. 51405237); 国家留学基金资助项目 (No. 201908320035)

Key words: parallel robot; workspace; interval discretization method; point discretization method; numerical behavior

1 引言

“人工智能”这一词汇最早出现在 20 世纪 50 年代,它是科学家们用来讨论机器模拟人类智能时提出的^[1]。作为人工智能领域一个典型的产物,智能机器人能够代替人们完成复杂危险的任务,如远程医疗^[2]、焊接^[3]和卫星装配^[4]等。相比于串联机器人,并联机器人具有输出精度高、结构刚性好和承载能力强等优点^[5-6]。然而,由于结构上的复杂性,并联机器人普遍存在工作空间小和动平台转动能力差的缺点。工作空间是评价并联机器人能否完成某一作业的重要性能指标,是实现后续控制及应用的基础,因此,研究并联机器人的工作空间具有十分重要的意义^[7-8]。

一般而言,并联机器人工作空间的求解方法主要分为立体几何法,现代数学法和有限离散法三类^[9]。其中,有限离散法是常用方法,该方法主要包括网格法、Monte Carlo 法和优化法等方法。文献[10]以 3- $\underline{P}RR$ (\underline{P} 表示移动副,下划线表示驱动副, \underline{R} 表示转动副)平面并联机器人为研究对象,运用 Monte Carlo 法求出了不同姿态下的工作空间。文献[11]提出一种可用于微小零部件装配作业的双 SCARA 并联机器人,建立了运动学正解数学模型,基于 Monte Carlo 法得出了工作空间的点云图。文献[12]提出了一种结构简单的 2- $\underline{PSS}\&\underline{PPU}$ (\underline{S} 表示球面副, \underline{U} 表示万向铰)并联微动机器人,推导了工作空间解析表达式,利用三维离散点搜索法得到了机构的工作空间。文献[13]以 4- \underline{SPS} 并联机构为研究对象,计算得到机构的位置和姿态工作空间,并提出“点集”的方法近似计算位置工作空间的面积,最后探究了工作空间面积与机构尺度参数之间的关系。文献[14]提出了一种具有平转解耦特性的 3 \underline{SPS} +3(\underline{SP} - \underline{U})型六自由度并联机构,结合柔性铰链回转空间及支链行程范围,采用边界离散点搜索法得到了机构的位置和姿态可达工作空间。为改善移动机器人机械腿的灵活性并提高其地面适应能力,文献[15]提出一种基于可转轴线转

动副的 2- \underline{PrRS} + $\underline{PR(P)}$ \underline{S} 变胞并联机构,建立了反向运动学模型,确定出约束条件及主要参数的取值范围。采用 Monte Carlo 法得到该机构的工作空间点云图,并用自适应网格划分方法计算得到工作空间体积,最后分析了主要结构参数对工作空间体积的影响,为结构优化提供理论参考。从以上分析可以看出,这些方法的本质是将工作空间离散为点,然后通过约束条件筛选出满足要求的点,这些点的集合构成了并联机器人的工作空间,所以可统称为点离散法(Point Discretization Method, PDM)。PDM 操作简单,但也存在缺点:(1)工作空间的计算精度过度依赖于离散点的数目,当离散点的数目不充足时,生成的工作空间边界较粗糙,不光滑;(2)通过增加离散点的数目,在一定程度上能够改善工作空间边界点的缺失,然而,大多数离散点仍然集中在工作空间内部,这就导致离散点的浪费,影响计算效率;(3)运用 PDM 计算得到的工作空间,由于精确度不高,面积和体积的计算误差较大,不利于后续的优化设计。

在前期研究中,课题组发现运用区间分析方法能够得到计算结果的有限域,更重要的是该方法得到的结果中不存在漏解^[16]。鉴于此,本文引入区间数学的理论,提出一种适用于并联机器人工作空间计算的高精度、无漏判的区间离散法(Interval Discretization Method, IDM)。以 3- \underline{RPR} 平面并联机器人为研究对象,对比分析了 IDM 和 PDM 的数值性态,验证了所提方法的优越性。本文工作为并联机器人工作空间的计算提供了一种新思路。

2 区间分析理论

区间分析也称为区间数学,它是从计算数学的误差理论研究中发展而来。1966 年,Moore 首次系统地提出区间分析理论,这为后续对该理论的研究、应用和拓展奠定理论基础^[17]。目前,区间分析已经成为计算数学中一个较为活跃的分支,并且在许多领域得到了广泛的应用,如并联

机器人^[18]、六维加速度传感器^[19]和飞行器^[20]等。对于给定的数对 $\underline{x}, \bar{x} \in \mathbf{R}$,若满足 $\underline{x} \leq \bar{x}$,则闭有界数集合为:

$$X = [\underline{x}, \bar{x}] = \{x \in \mathbf{R} | \underline{x} \leq x \leq \bar{x}\}, \quad (1)$$

式中: \underline{x} 表示区间 X 的下界; \bar{x} 表示区间 X 的上界。式(1)称为有界闭区间^[21]。

令 \mathbf{R} 上所有有界闭区间所组成的集合记为 $I(\mathbf{R})$,因此,如果 A 为 \mathbf{R} 的子集 $A \subset \mathbf{R}$,则 A 上的所有有界闭区间所组成的集合可表示为:

$$I(A) = \{X \in I(\mathbf{R}) | X \subseteq A\}. \quad (2)$$

若区间 X 的上、下界相等,即 $\underline{x} = \bar{x} = x$,此时可定义为点区间:

$$x = [x, x]. \quad (3)$$

对于任意的 $X \in I(\mathbf{R})$,分别定义:

$$\begin{cases} m(X) = \text{mid}(X) = \frac{(\underline{x} + \bar{x})}{2} \\ W(X) = \bar{x} - \underline{x} \\ |X| = \max(|\underline{x}|, |\bar{x}|) \end{cases}, \quad (4)$$

式中: $m(X)$, $W(X)$ 和 $|X|$ 分别表示区间 X 的中点、宽度和绝对值; $\text{mid}(X)$ 表示区间 X 的中点; $\max(\cdot)$ 表示取各元素的最大值。

对于任意的区间 $X = [\underline{x}, \bar{x}]$ 和区间 $Y = [\underline{y}, \bar{y}]$,其四则运算定义如下:

$$\begin{cases} X + Y = [\underline{x}, \bar{x}] + [\underline{y}, \bar{y}] = [\underline{x} + \underline{y}, \bar{x} + \bar{y}] \\ X - Y = [\underline{x}, \bar{x}] - [\underline{y}, \bar{y}] = [\underline{x} - \bar{y}, \bar{x} - \underline{y}] \\ XY = [\min(S), \max(S)], S = \{\underline{x}\underline{y}, \underline{x}\bar{y}, \bar{x}\underline{y}, \bar{x}\bar{y}\} \\ \frac{X}{Y} = \frac{[\underline{x}, \bar{x}]}{[\underline{y}, \bar{y}]} = [\underline{x}, \bar{x}] \left[\frac{1}{\bar{y}}, \frac{1}{\underline{y}} \right], 0 \notin Y \end{cases}, \quad (5)$$

式中 $\min(\cdot)$ 表示取各元素的最小值。

另外,区间向量和区间矩阵分别定义为:

$$\begin{aligned} X &= (X_1, X_2, \dots, X_m)^T = \\ &= \left([\underline{x}_1, \bar{x}_1], [\underline{x}_2, \bar{x}_2], \dots, [\underline{x}_m, \bar{x}_m] \right)^T, \quad (6) \\ X &= \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1n} \\ X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{m1} & X_{m2} & \cdots & X_{mn} \end{pmatrix}. \quad (7) \end{aligned}$$

设实函数 $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 存在区间值映射,经过区间扩展可得 $F(X) = F(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 。以函数 $f(x) = x$ 为例,将区间 $[x]$ 代入后可得:

$$f(x) = f([x]) = [f(\underline{x}), f(\bar{x})] = [\underline{x}, \bar{x}]. \quad (8)$$

区间值的映射关系如图1所示。

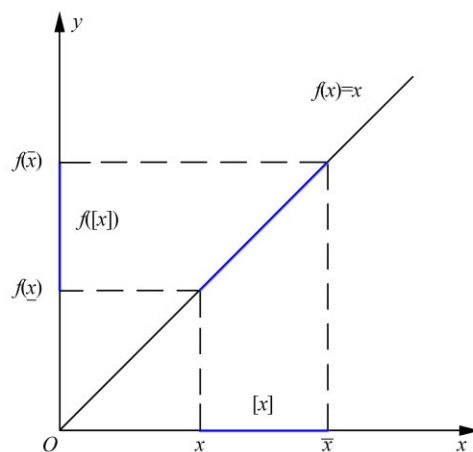


图1 区间值的映射关系

Fig. 1 Mapping relation of interval values

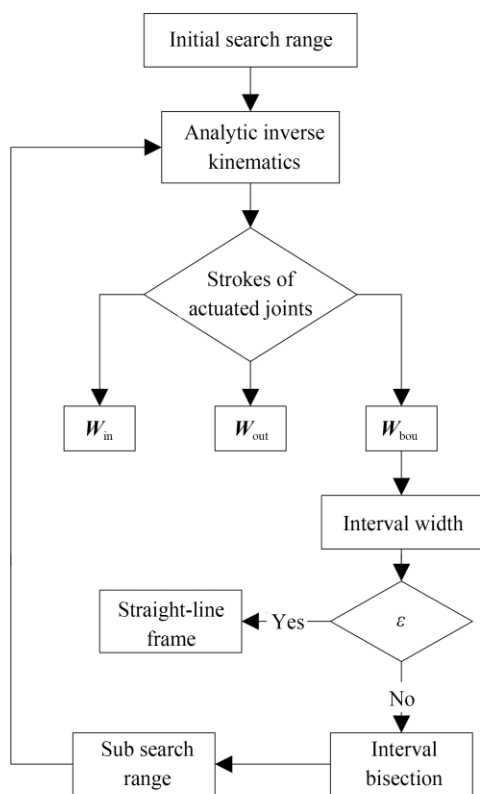
3 算法原理

通过引入区间分析,将点离散扩展为区间离散,这从原理上改进了算法,为后续的优化设计奠定理论基础。图2(a)和2(b)分别为IDM和PDM的算法流程。IDM共包含6个步骤,分别为:

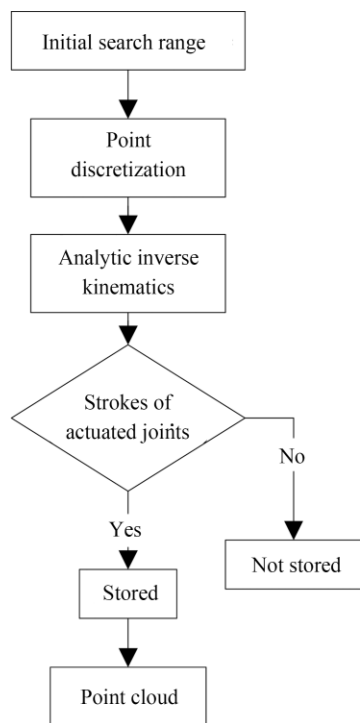
步骤1:根据机构的结构参数,确定机构的初始搜索区域(这里以二维搜索区域为例,也可为三维或更高维数)。该区域由两个区间构成(P , Q),这两个区间存在3种组合方式:两个区间均为位置变量、两个区间均为姿态变量以及位置和姿态区间变量的混合。所确定的初始搜索区域必须包含机构的真实工作空间,但范围不能过大,该区域的确定不影响工作空间确定的精度。

步骤2:根据机构尺度约束关系,推导出解析反解表达式,将区间 P 和区间 Q 代入表达式中,得到驱动副运动区间的计算值 $[L]$ 。

步骤3:将 $[L]$ 与驱动副行程 $[s]$ 进行比较,存在3种情况。(1)对于所有驱动副,如果 $[L]$ 全部位于 $[s]$ 内,即 $[L] \subseteq [s]$,表明该搜索区域位于工作



(a) 区间离散法
(a) IDM



(b) 点离散法
(b) PDM

图 2 区间离散法和点离散法的流程

Fig. 2 Flow charts of interval and point discretization algorithms

空间内部,则将该搜索区域存入内部区间集 W_{in} ; (2)至少存在一个驱动副,如果 $[l]$ 全部位于 $[s]$ 外,即 $[l] \cap [s] = \emptyset$,表明该搜索区域位于工作空间外部,则将该搜索区域存入外部区间集 W_{out} ; (3)该搜索区域位于工作空间边界,则将该搜索区域存入边界区间集 W_{bou} 。

步骤 4: 计算 W_{bou} 内区间的区间宽度,并与精度阈值 ϵ 进行比较,存在两种情况。(1)如果区间宽度小于或等于 ϵ ,则转至步骤 6; (2)如果区间宽度大于 ϵ ,则对 W_{bou} 内的所有区间进行一次区间二等分,产生若干个子搜索区域,并存入子边界区间集 w_{bou} 。

步骤 5: 清空 W_{bou} ,依次将 w_{bou} 内的子搜索区域代入步骤 2 得到的解析反解表达式中,计算得到 $[l]$,然后返回步骤 3。

步骤 6: 根据步骤 3 中得到的 W_{in} , W_{out} 和 W_{bou} ,用绘制直线框的方式将所有区域描绘出来,即为并联机器人的工作空间。

4 案例

4.1 结构模型描述与坐标系建立

本文以 3-RPR 平面并联机器人为研究对象,该机构主要由 1 个正三角形形状的动平台、1 个正三角形形状的静平台和 3 条完全相同的支链构成,如图 3 所示。每条支链均由 1 个移动副和固结于两端的 2 个转动副串联而成,其中,移动副为驱动副。通过驱动 3 个移动副实现动平台的三维运动,分别为平面内的二维移动和绕该平面法线

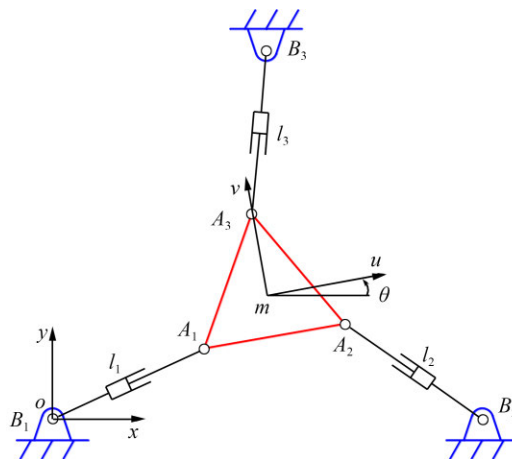


图 3 3-RPR 平面并联机器人的结构模型

Fig. 3 Structural model of 3-RPR planar parallel robot

的一维转动。静平台上3个顶点处的转动副几何中心分别记作 B_1, B_2 和 B_3 ,动平台上3个顶点处的转动副的几何中心分别记作 A_1, A_2 和 $A_3, l_i (i=1, 2, 3)$ 表示移动副的实时长度。静坐标系 $\{o-xy\}$ 与静平台相连,原点 o 与 B_1 重合, x 轴与静平台底边 B_1B_2 重合,其正方向由 B_1 指向 B_2 , y 轴正方向为竖直向上;动坐标系 $\{m-uv\}$ 与动平台相连,原点 m 位于动平台形心处, u 轴与动平台底边 A_1A_2 平行,其正方向由 A_1 指向 A_2 , v 轴正方向由 m 指向 A_3 。初始状态下,静坐标系和动坐标系的坐标轴方向一致;动平台绕 m 逆时针转过的角度记为 θ 。

4.2 位置反解推导

已知动平台的位置 (x, y) 和姿态 (θ) ,求解 l_1, l_2 和 l_3 。给定静平台和动平台的边长分别为 $2N_F$ 和 $2N_M$,因此,点 B_1, B_2, B_3 和 m 在静坐标系中的坐标表示为:

$$\begin{cases} B_1^o = (B_{1x}^o, B_{1y}^o)^T = (0, 0)^T \\ B_2^o = (B_{2x}^o, B_{2y}^o)^T = (2N_F, 0)^T \\ B_3^o = (B_{3x}^o, B_{3y}^o)^T = (N_F, \sqrt{3}N_F)^T \\ m^o = (m_x^o, m_y^o)^T = (x, y)^T \end{cases} \quad (9)$$

式中: B_i^o 表示点 B_i 在静坐标系中的坐标; m^o 表示点 m 在静坐标系中的坐标。

点 A_1, A_2 和 A_3 在动坐标系中的坐标表示为:

$$\begin{cases} A_1^m = (A_{1u}^m, A_{1v}^m)^T = \left(-N_M, -\frac{\sqrt{3}}{3}N_M\right)^T \\ A_2^m = (A_{2u}^m, A_{2v}^m)^T = \left(N_M, -\frac{\sqrt{3}}{3}N_M\right)^T \\ A_3^m = (A_{3u}^m, A_{3v}^m)^T = \left(0, \frac{2\sqrt{3}}{3}N_M\right)^T \end{cases}, \quad (10)$$

式中: A_i^m 表示点 A_i 在动坐标系中的坐标。

通过坐标转换,点 A_1, A_2 和 A_3 在静坐标系中的坐标可表示为:

$$A_i^o = RA_i^m + m^o, \quad (11)$$

其中:

$$R = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix},$$

式中: A_i^o 表示点 A_i 在静坐标系中的坐标; R 表示动坐标系相对于静坐标系的姿态矩阵。

将 A_i^m 和 m^o 代入式(11)可得:

$$\begin{cases} A_1^o = \begin{pmatrix} A_{1x}^o \\ A_{1y}^o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -N_M \cos \theta + \frac{\sqrt{3}}{3}N_M \sin \theta + x \\ -N_M \sin \theta - \frac{\sqrt{3}}{3}N_M \cos \theta + y \end{pmatrix} \\ A_2^o = \begin{pmatrix} A_{2x}^o \\ A_{2y}^o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_M \cos \theta + \frac{\sqrt{3}}{3}N_M \sin \theta + x \\ N_M \sin \theta - \frac{\sqrt{3}}{3}N_M \cos \theta + y \end{pmatrix} \\ A_3^o = \begin{pmatrix} A_{3x}^o \\ A_{3y}^o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2\sqrt{3}}{3}N_M \sin \theta + x \\ \frac{2\sqrt{3}}{3}N_M \cos \theta + y \end{pmatrix} \end{cases} \quad (12)$$

因此, l_i 的表达式为:

$$l_i = \sqrt{(A_{ix}^o - B_{ix}^o)^2 + (A_{iy}^o - B_{iy}^o)^2}. \quad (13)$$

至此,构建了3-RPR平面并联机器人的位置反解模型。

4.3 计算结果分析及对比

位置工作空间是指在给定姿态下动平台参考点能够达到的所有位置的集合,姿态工作空间是指在给定位置下动平台参考点能够达到的所有姿态的集合。本文对比分析了位置工作空间和姿态工作空间,给定机构的结构参数分别为: $N_F=3 \text{ mm}, N_M=1 \text{ mm}, 1.2 \text{ mm} \leq l_i \leq 8 \text{ mm}$,计算结果的三维立体图分别如图4和图5所示。观察图4可以看出,两种方法计算得到的位置工作空间的形状基本一致。从每个截面来看,位置工作空间具有对称性,但内部存在空洞,当 θ 接近 $\pm \pi \text{ rad}$ 时,空洞消失;从整体来看,位置工作空间呈现中间大两端小的形状,并且随着 θ 的增大,内部空洞有朝向边界偏移的趋势。观察图5可以看出,两种方法计算得到的姿态工作空间的形状基本一致。从每个截面来看,姿态工作空间具有对称性,但内部存在空洞,当 $y=0 \text{ mm}$ 时,姿态工作空间为三块不相连的区域;从整体来看,姿态工作空间的形状不规则,当 θ 位于 0 rad 附近时,动平台在 x 方向的运动范围达到最大。

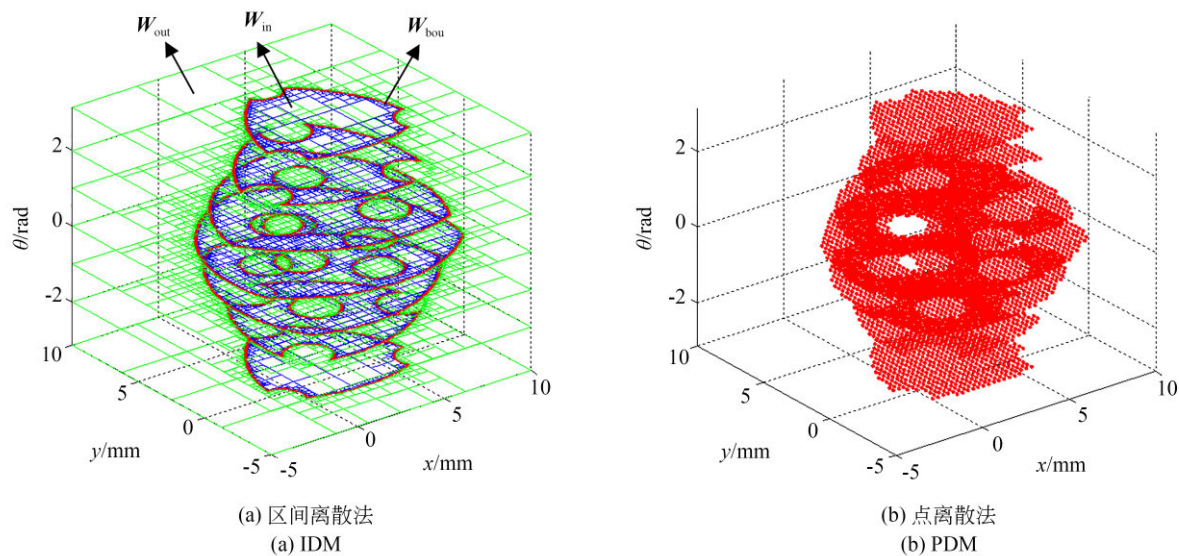


图4 位置 workspace

Fig. 4 Position workspace

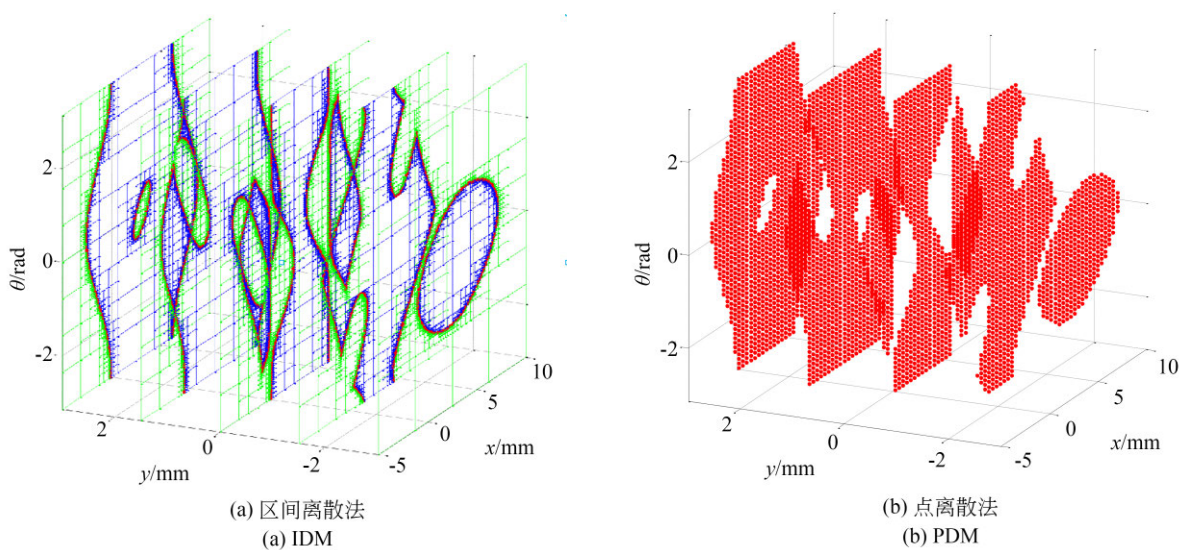


图5 姿态 workspace

Fig. 5 Orientation workspace

5 数值性态分析

由于算法原理上的差异, IDM 和 PDM 所体现的数值性态也有所不同。为了进一步探究两种方法的数值性态, 本文对比研究了两种方法在计算位置 workspace ($\theta=0$ rad) 时的效率、精度和误差灵敏度。所使用的软件为 Matlab R2012a 和 INTLAB_V6 工具箱, 计算机 CPU 为 Intel CORE I5-4200U, 主频为 2.30 GHz, 内存为 4 GB。

5.1 效率

效率 t (运行时间) 不仅与计算精度有关, 也与机构的结构参数有关。表 1 给出了 3-RPR 平面并联机器人 5 种不同的结构参数, 随着计算精度的提高, 每种结构参数所对应的算法运行时间如图 6 所示。观察图 6 可以看出, 不同结构参数下, 曲线的整体趋势大致相同, 并且随着计算精度的提高, IDM 的效率优势越来越明显。

表 1 3-RPR 平面并联机器人的相关参数统计

Tab. 1 Statistic of relevant parameters of 3-RPR planar parallel robot

Number	Structural parameters				Area and boundary length of workspaces			
	N_F/mm	N_M/mm	l_{\min}/mm	l_{\max}/mm	$A_{\text{int}}/\text{mm}^2$	B_{int}/mm	A_I/mm^2	A_P/mm^2
I	3	1	1.2	8	99.428 0	60.756 3	99.429 9	99.193 9
II	3	1	0	8	112.999 7	38.136 8	112.998 9	112.876 3
III	3	1	1.2	7	64.451 8	54.432 2	64.451 6	64.237 3
IV	3	1	1.2	8.5	119.285 7	63.913 0	119.290 0	119.039 3
V	3	1	2.5	8	60.049 8	67.754 2	60.051 2	59.765 0

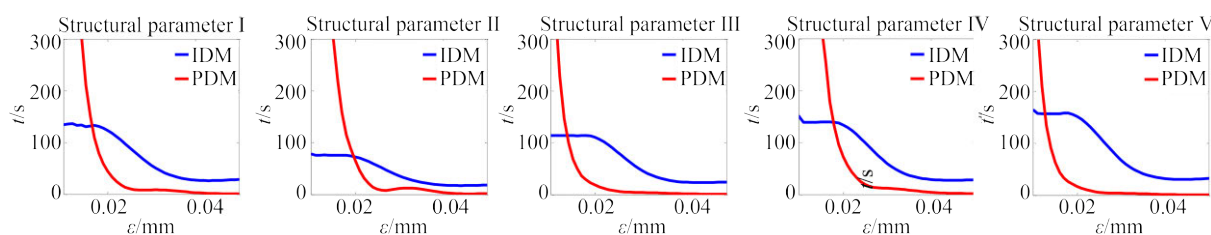


图 6 不同精度所对应的运行时间

Fig. 6 Elapsed time for different accuracies

为了进一步探究工作空间面积和边界长度对运行时间的影响,式(14)和式(15)给出了面积和边界长度理论值的计算公式:

$$A_{\text{int}} = \sum_{i=1}^n \int_{a_i}^{b_i} p_i(y) dy, \quad (14)$$

$$B_{\text{int}} = \sum_{i=1}^n \int_{a_i}^{b_i} \sqrt{1 + [p'_i(y)]^2} dy, \quad (15)$$

式中: A_{int} 表示由积分计算得到的面积理论值; a_i 和 b_i 分别表示积分的下限和上限; $p(y)$ 表示边界曲线表达式; B_{int} 表示由积分计算得到的边界长度理论值。

由于IDM和PDM算法的原理不同,前者计算得到的工作空间由直线框构成,后者的由离散点构成,因此,两种算法计算得到的工作空间面积实际值的计算公式分别定义为:

$$A_I = A_{W_{\text{in}}} + \lambda A_{W_{\text{bou}}}, \quad (16)$$

$$A_P = m A_s + n A_t, \quad (17)$$

式中: A_I 表示区间离散工作空间的面积; $A_{W_{\text{in}}}$ 表示 W_{in} 的面积; λ 为临界区间乘子,表示 W_{bou} 内的工作空间内部面积与外部面积的比值,这里取为0.5; $A_{W_{\text{bou}}}$ 表示 W_{bou} 的面积; A_P 表示点离散工作空间的面积; m 表示点离散工作空间内的正方形的个数; A_s 表示点离散工作空间内的每个正方形的面积; n 表示点离散工作空间内的三角形的个数;

A_t 表示点离散工作空间内的每个三角形的面积。

表1列出了5种不同结构参数下所对应工作空间的面积和边界长度,并且统计了算法的运行时间,如图7所示。观察图7可以发现,IDM的运行时间与边界长度有关,边界长度越长,运行时间也越长;PDM的运行时间与面积有关,面积越大,运行时间越长;而IDM的运行时间与面积之间的关系以及PDM的运行时间与边界长度之间的关系都不确定。从算法原理上分析:IDM的运行时间主要消耗在区间拆分过程中,而这一过程主要集中在边界处,因此,边界长度越长,区间拆分的过程也越多,导致运行时间变长;PDM的运行时间主要集中在位置点的判断和存储的过程中,因此,工作空间面积越大,离散点也越多,这

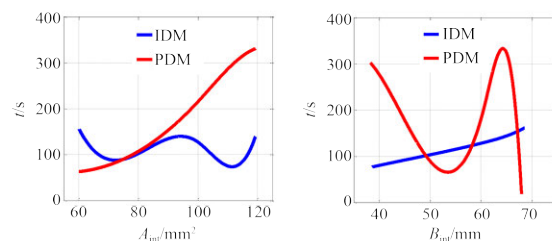


图 7 工作空间的面积与边界长度对运行时间的影响

Fig. 7 Influence of area and boundary length of workspace on elapsed time

就增加了判断和存储的过程,导致运行时间变长。

5.2 精 度

考虑到 IDM 和 PDM 计算得到的工作空间与理论(真实)的工作空间之间存在差异,为了定量对比它们之间的差异,给出了相对误差衡量指标:

$$RE = \frac{|A_{\text{int}} - A|}{A_{\text{int}}} \times 100\%, \quad (18)$$

式中: RE 表示相对误差; A 表示工作空间面积的实际值。

根据表 1 中的数据,统计了两种算法的相对误差,如表 2 所示。由表 2 可知,对于 5 种不同的结构参数,IDM 的相对误差较小,即计算得到的工作空间的精度较高。究其原因,可能源于边界差异,区间离散工作空间的边界由封闭的直线框构成,而点离散工作空间的边界由不封闭的离散点构成,这会造成边界的不确定,导致不精确的计算结果。

表 2 区间离散法和点离散法的相对误差对比

Tab. 2 Comparison of relative errors between interval and point discretization methods

Relative error	IDM / %	PDM / %
I	1.910×10^{-3}	0.235
II	7.080×10^{-4}	0.109
III	3.103×10^{-4}	0.333
IV	3.600×10^{-3}	0.207
V	2.330×10^{-3}	0.474
Average value	0.002	0.272

5.3 误差灵敏度

在实际计算过程中,机构的制造公差和装配误差对计算结果都会产生影响。为了探究两种算法对误差的敏感程度,本文分别研究了 3 种输入误差(动平台边长误差、静平台边长误差和移动副长度误差)的误差灵敏度,并将其平均值作为综合误差灵敏度,误差灵敏度为:

$$S_E = \frac{\Delta RE}{\Delta IE}, \quad (19)$$

式中: S_E 表示误差灵敏度; ΔRE 表示相对误差的变化量; ΔIE 表示输入误差的变化量。

图 8 给出了两种算法对 3 种输入误差的综合误差灵敏度,并且计算了 IDM 和 PDM 所对应 3 种输入误差的综合误差灵敏度的均值,分别为 0.394 和 0.396。可以发现,IDM 的综合误差灵敏度均小于 PDM,表明 IDM 对 3 种输入误差的敏感程度均较低。

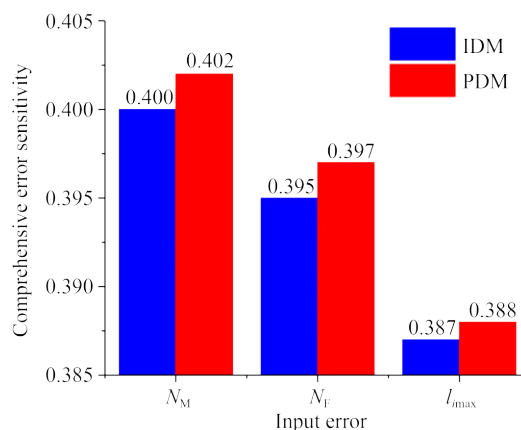


图 8 区间离散法和点离散法的综合误差灵敏度对比

Fig. 8 Comparison of comprehensive error sensitivity between interval and point discretization methods

6 结 论

本文基于区间分析提出一种工作空间的高精度求解方法。该方法将工作空间由传统的点离散扩展为区间离散,从原理上避免了位置点的漏判。以 3-RPR 平面并联机器人案例,计算得到其位置工作空间和姿态工作空间。进一步地,对比分析了 IDM 和 PDM 的数值性态,包括效率、精度和误差灵敏度。结果表明,IDM 和 PDM 的运行时间分别与工作空间的边界长度和面积成正比; IDM 和 PDM 的计算误差分别为 0.002% 和 0.272%; IDM 和 PDM 所对应 3 种输入误差的综合误差灵敏度的均值分别为 0.394 和 0.396。值得一提的是, IDM 不仅适用于 3-RPR 平面并联机器人,也适用于其他构型的并联机器人。

参考文献:

- [1] 姚锡凡,雷毅,葛动元,等. 驱动制造业从“互联网+”走向“人工智能+”的大数据之道[J]. 中国机械工程, 2019, 30(2): 134-142.
YAO X F, LEI Y, GE D Y, *et al.* On big data driving manufacturing from “Internet plus” to “AI plus”[J]. *China Mechanical Engineering*, 2019, 30(2): 134-142. (in Chinese)
- [2] PINTER C, LASSO A, CHOUEIB S, *et al.* SlicerVR for medical intervention training and planning in immersive virtual reality[J]. *IEEE Trans Med Robot Bionics*, 2020, 2(2): 108-117.
- [3] 王学武,汤彬,顾幸生. 焊接机器人避障策略研究[J]. 机械工程学报, 2019, 55(17): 77-84.
WANG X W, TANG B, GU X SH. Research on obstacle avoidance strategy for welding robot[J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2019, 55(17): 77-84. (in Chinese)
- [4] 胡瑞钦,隆昌宇,张立建. 视觉与力觉结合的卫星部件机器人装配[J]. 光学精密工程, 2018, 26(10): 2504-2515.
HU R Q, LONG CH Y, ZHANG L J. Robotic assembly technology for satellite components based on visual and force information [J]. *Opt. Precision Eng.*, 2018, 26(10): 2504-2515. (in Chinese)
- [5] 吴范徐齐,许菁,刘生,等. 3-UPS/RPP并联机构设计与运动特性研究[J]. 机械传动, 2020, 44(5): 59-64.
WU-FAN X Q, XU Q, LIU SH, *et al.* Research of design and kinematic characteristic of a 3-UPS/RPP parallel mechanism[J]. *Journal of Mechanical Transmission*, 2020, 44(5): 59-64. (in Chinese)
- [6] 叶鹏达,尤晶晶,沈惠平,等. 具有解析式正解的Stewart衍生型并联机构的位移输入协调关系[J]. 光学精密工程, 2020, 28(1): 151-165.
YE P D, YOU J J, SHEN H P, *et al.* Displacement input coordination of Stewart derivative parallel mechanism with analytical positive solution[J]. *Opt. Precision Eng.*, 2020, 28(1): 151-165. (in Chinese)
- [7] SCHREIBER L T, GOSSELIN C. Kinematically redundant planar parallel mechanisms: Kinematics, workspace and trajectory planning[J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2018, 119: 91-105.
- [8] 赵裕明,金振林,冯海兵. 1T2R三自由度海浪发电装置设计及运动学分析[J]. 光学精密工程, 2020, 28(9): 2035-2045.
ZHAO Y M, JIN ZH L, FENG H B. Design and kinematics of a 1T2R 3-DOF wave power generating device[J]. *Opt. Precision Eng.*, 2020, 28(9): 2035-2045. (in Chinese)
- [9] 叶鹏达,尤晶晶,仇鑫,等. 并联机器人运动性能的研究现状及发展趋势[J]. 南京航空航天大学学报, 2020, 52(3): 363-377.
YE P D, YOU J J, QIU X, *et al.* Status and development trend of motion performance in parallel robot [J]. *Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics*, 2020, 52(3): 363-377. (in Chinese)
- [10] 王波,刘向东,韩强,等. 三自由度平面并联机构位姿分析[J]. 机械制造与自动化, 2012, 41(1): 170-171, 182.
WANG B, LIU X D, HAN Q, *et al.* Pose analysis of 3-DOF planar parallel mechanism [J]. *Machine Building & Automation*, 2012, 41(1): 170-171, 182. (in Chinese)
- [11] 申浩宇,刘艳梨,吴洪涛. 双SCARA机器人的工作空间分析[J]. 自动化技术与应用, 2018, 37(10): 68-71.
SHEN H Y, LIU Y L, WU H T. Workspace analysis of double scara robot [J]. *Techniques of Automation and Applications*, 2018, 37(10): 68-71. (in Chinese)
- [12] 孙江宏,牛晓辉,贾晓丽,等. 2-PSS&PPU并联微动机器人的工作空间分析[J]. 机械设计与研究, 2015, 31(6): 4-7.
SUN J H, NIU X H, JIA X L, *et al.* Workspace analysis of 2-PSS & PPU parallel micromanipulator [J]. *Machine Design & Research*, 2015, 31(6): 4-7. (in Chinese)
- [13] 季晔,刘宏昭,原大宁. 4-SPS/PPU型并联机构工作空间与尺度分析[J]. 农业机械学报, 2013, 44(11): 322-328.
JI Y, LIU H ZH, YUAN D N. Workspace and scale analysis of 4-SPS /PPU parallel mechanism [J]. *Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery*, 2013, 44(11): 322-328. (in Chinese)
- [14] 程颖,杨德华,吴常铨,等. 新型六自由度微动并联机构的工作空间分析[J]. 机械科学与技术, 2019, 38(3): 433-439.
CHENG Y, YANG D H, WU CH CH, *et al.* Workspace analysis of a novel six DOFs parallel mechanism with micro displacement[J]. *Mechan-*

- cal Science and Technology for Aerospace Engineering*, 2019, 38(3): 433-439. (in Chinese)
- [15] 田海波, 马宏伟, 马琨, 等. 一种三构态变胞并联机构运动学及工作空间分析[J]. 机器人, 2019, 41(3): 414-424.
- TIAN H B, MA H W, MA K, *et al.* Kinematics and workspace analysis of a metamorphic parallel mechanism with three configurations [J]. *Robot*, 2019, 41(3): 414-424. (in Chinese)
- [16] MERLET J P. Interval analysis and robotics [J]. *Springer Tracts in Advanced Robotics*, 2010, 66 (STAR): 147-156.
- [17] MOORE R E. *Interval Analysis* [M]. New York: Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1966.
- [18] VARSHOVI-JAGHARGH P, TALE MASOULEH M, NADERI D. Forward kinematic analysis of parallel mechanisms in seven-dimensional kinematic space by considering limitation of passive joints motion [J]. *Iranian Journal of Science and Technology, Transactions of Mechanical Engineering*, 2019, 43(2): 315-329.
- [19] YOU J J, WANG L K, XI F F, *et al.* Decoupling algorithm and maximum operation frequency of a novel parallel type six-axis accelerometer [J]. *IEEE Sensors Journal*, 2020, 20(21): 12637-12651.
- [20] PAN Y L, HUANG J, LI F, *et al.* Aerodynamic robust optimization of flying wing aircraft based on interval method [J]. *Aircraft Engineering and Aerospace Technology*, 2017, 89(3): 491-497.
- [21] 王德人, 张连生, 邓乃扬. 非线性方程的区间算法 [M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1987.
- WANG D R, ZHANG L SH, DENG N Y. *Interval Algorithms of Nonlinear Equations* [M]. Shanghai: Shanghai Science and Technology Press, 1987. (in Chinese)

作者简介:



叶鹏达(1994—),男,江苏溧阳人,博士研究生,2017年于南京林业大学获得学士学位,主要从事并联机器人运动学与动力学的研究。E-mail: yepengda@njfu.edu.cn

通讯作者:



尤晶晶(1985—),男,江苏南通人,副教授,硕士生导师,2010年、2013年于南京航空航天大学分别获得硕士、博士学位,主要从事并联机器人和六维加速度传感器等方面的研究。E-mail: youjingjing251010@njfu.edu.cn