

叶鹏达, 尤晶晶, 仇鑫, 等. 10支链 Stewart 衍生型并联机构的位置正解及工作空间[J]. 机械科学与技术, 2021, 40(9): 1328-1337

10支链 Stewart 衍生型并联机构的位置正解及工作空间

叶鹏达¹, 尤晶晶^{1,2}, 仇鑫¹, 王林康¹, 茹煜^{*,1}

(1. 南京林业大学 机械电子工程学院, 南京 210037; 2. 江苏省精密与微细制造技术重点实验室, 南京 210016)

摘要: 冗余驱动具有刚度大、承载能力强和运动特性好等优点, 设计了 10-6、10-5 两类构型的 10 支链 Stewart 衍生构型, 构建了一种数值法和解析法相结合的位置正解半解析算法, 并分析了两类构型的工作空间。通过引入虚拟支链, 两类构型可进一步衍生为同一种 12 支链台体型拓扑构型。推导了 12 支链构型的协调方程, 并运用 Newton-Raphson 法得到虚拟支链的数值解; 构建了 12 支链构型位置正解的全解析数学模型。运用区间分析法研究了两类构型的位置工作空间和姿态工作空间。结果表明, 10-5 构型的工作空间较规则, 且具有良好的对称性。

关键词: 并联机构; 位置正解; 半解析算法; 区间分析; 工作空间

中图分类号: TH112 文献标识码: A

DOI: 10.13433/j.cnki.1003-8728.20200220 文章编号: 1003-8728(2021)09-1328-10



OSID 码

Forward Position Solution and Workspace of Ten-links Stewart Derivative Parallel Mechanism

YE Pengda¹, YOU Jingjing^{1,2}, QIU Xin¹, WANG Linkang¹, RU Yu^{*,1}

(1. College of Mechanical and Electronic Engineering, Nanjing Forestry University, Nanjing 210037, China;

2. Jiangsu Key Laboratory of Precision and Micro-Manufacturing Technology, Nanjing 210016, China)

Abstract: Redundant actuation has the advantages of high stiffness, strong load-carrying capacity and good motion performance. 10-6 and 10-5 configurations with ten links were designed, constructing a semi-analytic algorithm combining numerical method and analytical method, and workspace of the two configurations was analyzed. By adding two virtual links, the two configurations can be further derived into the 12 links topological configuration. Compatibility equations of the 12 links configuration were derived, and the numerical solutions of virtual links were obtained by Newton-Raphson method. Based on the geometric relationship between the characteristic points of the moving platform, the full analytic solution of the forward position solution of the 12 links configuration was derived. Furthermore, the position workspace and orientation workspace of the two configurations were studied by interval analysis method. The results show that the workspace of 10-5 configuration is regular and has good symmetry.

Keywords: parallel mechanism; forward position solution; semi-analytic algorithm; interval analysis; workspace

收稿日期: 2020-03-04

基金项目: 国家自然科学基金项目(51405237)、国家留学基金项目(201908320035)、“十三五”国家重点研发计划项目(2018YFD0600202)及江苏省农业科技自主创新基金项目(CX(18)1007)

作者简介: 叶鹏达(1994-), 博士研究生, 研究方向为并联机器人运动学与动力学, yepengda@126.com

*通信作者: 茹煜, 教授, 博士生导师, superchry@163.com

并联机构因其具有输出精度高、结构刚性好和承载能力强等优点, 在工业、医疗和娱乐等领域得到广泛应用, 成为国内外机构学研究热点^[1-2], 如力反馈装置^[3]、遥操作机器人^[4]和六维加速度传感器^[5]等。从几何构型着眼, Stewart 并联机构可以分为两大类, 分别为平台型和台体型, 相比于前者, 后者动、静平台上的铰链中心可在空间任意分布, 不局

限于同一平面上,因此后者具有更广泛的应用领域,但其理论研究难度也更大^[6]。

已知并联机构的输入求解动平台的位置和姿态称为位置正解问题。并联机构位置正解的核心是求解具有强非线性耦合的方程组,通常有两类求解方法——数值法和封闭解析法。数值法通用性较好,但每次迭代都需要给定初值,并且精度得不到保证,因此该方法并没有得到广泛应用;封闭解析法主要通过消元将多元非线性方程组化简成为一元高次方程,能够求出机构全部解,这对后续的研究具有很高的理论价值。文献[7-8]分别给出了6-3平台型和6-3台体型并联机构的位置正解解析解,并且二者都研究得出其位置正解在复数域范围内最多有16种构型的结论。文献[9]提出了一般6-6SPS并联机构运动学正解的解析化方法,运用Grobner基算法,将相容方程增加到15个,应用正交补方法,该机构的运动学正解问题最终可用一元20次的代数方程表达。文献[10]运用改进粒子群算法对6-6SPS并联机构的位置正解进行分析,得出该机构的位置正解可表示为一个非线性方程组,进而转化为无约束优化问题。文献[11]研究了6-5平台型并联机构的位置正解,应用结式消元,推出了一元20次方程,最终求得40组解。文献[12]针对6-6台体型Stewart并联机构,运用共形几何代数构建运动约束方程,通过构造9阶Sylvester结式,导出一元40次方程。不难看出,这些研究主要针对平台型并联机构,而对于台体型并联机构的研究相对较少,该类问题尚未完全解决。

文献[13]研究发现,并联机构位置正解的求解难易程度与机构的耦合度指标有关。为了构造低耦合度的并联机构,本文通过添加虚拟支链将10支链机构重构为12支链台体型并联机构^[14],并推导了位置正解全解析解。基于推导出的协调方程,运用Newton-Raphson法得到虚拟支链的数值解。进一步地,研究了虚拟支链数值解的方程组合优选问题,为提高算法的精度和效率提供指导。

一般而言,并联机器人工作空间的求解方法主要分为三类:立体几何法、有限离散法和现代数学法,其中有限离散法是较常用的方法,主要包括网格法、monte carlo法和优化法。文献[15]基于离散点搜索法分析了新型3SPS+3(SP-U)并联机构的工作空间,得到了零姿态位置可达工作空间和零位置姿态可达工作空间。文献[16]以直线驱动型并联机器人为研究对象,提出了一种极坐标变步长迭代搜索法求解并联机器人工作空间,并进一步探究了结构参数对工作空间的影响。文献[17]通过矢量代数法求解了4UPS-UPU并联机构运动学逆解,采用

边界搜索法分析了该并联机构定姿态时的工作空间,获得了工作空间的三维图形。文献[18]采用数值离散搜索法求解了3-UPS/RRR并联机构的可达姿态工作空间,并借助MATLAB软件对机构的工作空间进行仿真。文献[19]采用边界搜索法研究了一种新型三自由度并联机构的工作空间,绘制了工作空间的三维图和Z轴截面图,并分析得出工作空间在X轴和Z轴方向存在对称性。

不难看出,这些方法的本质是将工作空间离散为点,然后通过约束条件筛选出满足要求的点,这些点的集合构成了并联机器人的工作空间,这些方法可统称为点离散法。点离散法操作简单,但也存在缺点,随着计算精度的提高,点离散法的计算过程需要消耗大量时间,并且由于离散点的个数是有限的,因此存在微小的无离散区域,这就可能存在位置点的漏判,从而导致计算结果的不精确和不可靠。鉴于此,本文引入区间分析,计算了10-6、10-5两类构型的位置工作空间和姿态工作空间,从计算结果可以看出两类构型的工作空间内部不存在空洞,并且工作空间形状具有较好的对称性,这为机构后续的实际应用提供有利条件。

1 Stewart 衍生构型

Stewart机构是6自由度并联机构中最基本的构型^[20],在此基础上派生出的新构型称为Stewart衍生构型。本文提出两类10支链台体型Stewart衍生构型,分别是10-6构型和10-5构型(前、后数字分别代表静、动平台上的球铰链个数,下同),如图1所示。10支链衍生构型由1个边长为 $2N$ 的立方体状动平台、1个内边长为 $2(N+L)$ 的立方体空壳状静平台以及10条完全相同的SPS(Spherical-prismatic-spherical)支链构成,初始状态下,10条支链长度相等,动、静平台的几何中心重合,并且姿态完全相同。

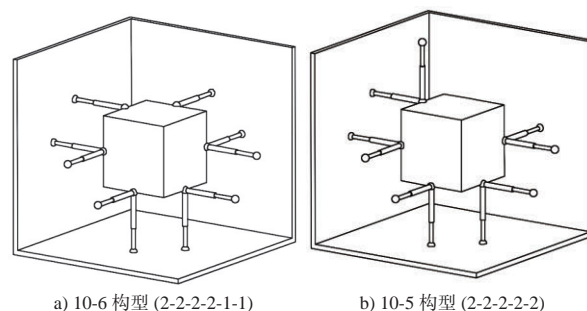


图1 10支链台体型Stewart衍生构型

12支链衍生构型在10支链衍生构型的基础上增加了2条虚拟支链,6个二重复合球铰链的几何中心分别固结在动平台6条棱边的中点,其初始状态

和 10 支链衍生构型的初始状态相同,如图 2 所示。取静平台的几何中心建立静坐标系 $O-XYZ$, X 、 Y 和 Z 轴分别垂直指向静平台的右侧面、顶面和前面;取动平台的几何中心建立动坐标系 $P-UVW$,在初始状态下,动坐标系与静坐标系完全重合,并且坐标轴方向一致。

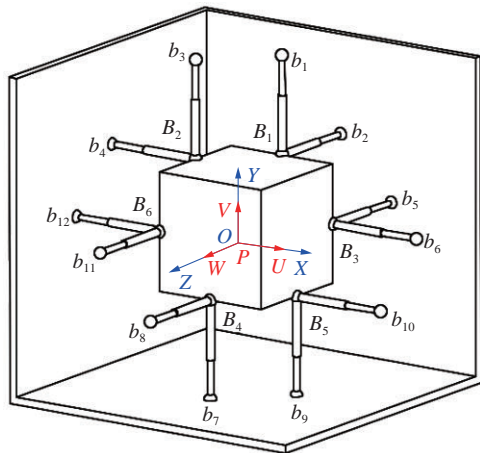


图2 12支链台型Stewart衍生构型

12支链衍生构型的三维模型和实物样机如图3和图4所示。

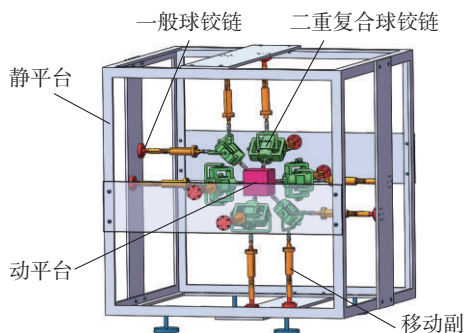


图3 12支链衍生构型的三维模型



图4 12支链衍生构型的实物样机

为了更简易的实现机构的重构,设计了一种可转换主动、从动模式的移动副^[21],其主要由4部分组成,分别为导杆、内套筒、外套筒和转换套筒,如图5所示。导杆与内套筒及内套筒与外套筒间分别为滑动连接和螺纹连接。当螺栓螺母连接在一起时,导杆和转换套筒也相连,移动副的长度会随着内套筒与外套筒之间的相对转动而发生改变,此时,该移动副处于主动模式;当拆掉螺栓螺母时,导杆与转换套筒分离,移动副的长度会随着内套筒与导杆之间的相对滑动而发生改变,此时,该移动副处于从动模式。

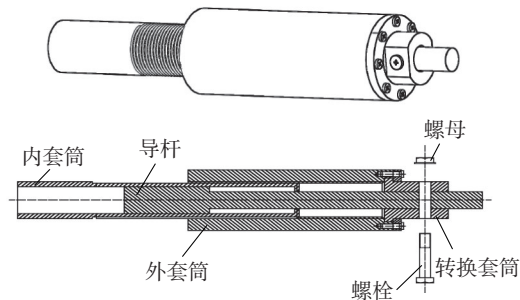


图5 移动副的三维图和剖面图

通过转换移动副的主动、从动模式,从而实现机构的重构。当2条虚拟支链的移动副都转换成从动模式时,该机构为10支链衍生构型;当2条虚拟支链的移动副都转换成主动模式时,该机构重构为12支链衍生构型。

2 半解析算法

2.1 基本思路

半解析算法是指数值法和解析法的相结合,基本思路为通过数值法求解出2条虚拟支链的长度,再运用解析法计算出12支链衍生构型的位置正解。半解析算法流程如图6所示。

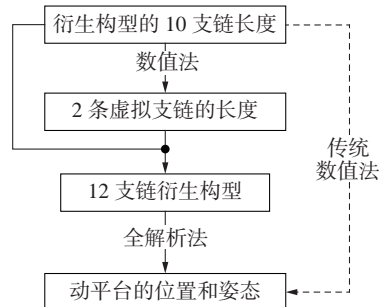


图6 半解析算法流程图

2.2 12支链衍生构型位置正解全解析解

12支链衍生构型的位置正解为:已知12条支链长度,计算动平台的位置与姿态。如图2所示,动平台几何中心为点 P ,其在静坐标系中的坐标设为 (x_0, y_0, z_0) ,二重复合球铰链中心点在静、动坐标系中的坐标分别设为 $\mathbf{B}_i = (x_i, y_i, z_i)^T$ 和 $\mathbf{B}_i^P = (u_{B_i}, v_{B_i}, w_{B_i})^T$ ($i=1, 2, \dots, 6$),12个一般球铰链中心点在静坐标系中的坐标设为 $\mathbf{b}_j = (x_{b_j}, y_{b_j}, z_{b_j})^T$ ($j=1, 2, \dots, 12$)。根据12支链衍生构型的尺度约束关系,建立二次相容方程:

$$\left| \mathbf{b}_j - \mathbf{B}_{\frac{j+1}{2}} \right| = l_j \quad j = 1, 3, 5, 7, 9, 11 \quad (1)$$

$$\left| \mathbf{b}_j - \mathbf{B}_{\frac{j}{2}} \right| = l_j \quad j = 2, 4, 6, 8, 10, 12 \quad (2)$$

$$\|\mathbf{B}_r - \mathbf{P}\| = \sqrt{2}N \quad r = 1, 2, 3 \quad (3)$$

将 15 个二次相容方程分成 3 组, 每组中的同构方程两两相减, 化简得到 12 个线性相容方程, 结合线性方程组的求解方法, 可以计算出点 P 、 B_1 、 B_2 和 B_3 的部分坐标表达式:

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \frac{1}{8L} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -l_1^2 + l_2^2 + l_7^2 - l_8^2 \\ l_5^2 - l_6^2 - l_{11}^2 + l_{12}^2 \\ -l_3^2 + l_4^2 + l_9^2 - l_{10}^2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = h_1 \begin{bmatrix} (l_2^2 - l_1^2) / (2L) \\ Nz_0 - (N+L)y_0 + (l_1^2 + l_7^2) / 4 - h_2 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = h_1 \begin{bmatrix} (l_4^2 - l_3^2) / (2L) \\ Nx_0 - (N+L)y_0 + (l_3^2 + l_9^2) / 4 - h_2 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ z_3 \end{bmatrix} = h_1 \begin{bmatrix} (l_5^2 - l_6^2) / (2L) \\ Nx_0 - (N+L)z_0 - (l_5^2 + l_{11}^2) / 4 + h_2 \end{bmatrix} \quad (7)$$

其中:

$$h_1 = \frac{1}{2N+L} \begin{bmatrix} N+L & 1 \\ N & -1 \end{bmatrix};$$

$$h_2 = \frac{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}{2} + \frac{3N^2}{2} + \frac{(N+L)^2}{2}.$$

观察动平台特征点之间的位置关系, 发现 P 、 B_1 、 B_2 和 B_3 这 4 点构成菱形, 因此可推出:

$$x_1 = x_2 + x_3 - x_0 \quad (8)$$

$$z_2 = z_1 + z_0 - z_3 \quad (9)$$

$$y_3 = y_1 + y_0 - y_2 \quad (10)$$

至此, 12 支链衍生构型的位置正解问题已经解决。

2.3 虚拟支链数值解

动平台在运动过程中, 杆长之间满足一定的几何约束关系, 考虑到虚拟支链求解的数值性态, 需要尽量挑选出次数较低、项数较少的协调方程。

支链 l_1 、 l_3 、 l_5 的解析表达式为:

$$|B_1 - b_1|^2 = x_1^2 + (y_1 - (N+L))^2 + (z_1 + N)^2 = l_1^2 \quad (11)$$

$$|B_2 - b_3|^2 = (x_2 + N)^2 + (y_2 - (N+L))^2 + z_2^2 = l_3^2 \quad (12)$$

$$|B_3 - b_5|^2 = (x_3 - N)^2 + y_3^2 + (z_3 + (N+L))^2 = l_5^2 \quad (13)$$

将式(3)展开:

$$|B_1 - P|^2 = x_1^2 - 2x_1x_0 + x_0^2 + y_1^2 - 2y_1y_0 + y_0^2 + z_1^2 - 2z_1z_0 + z_0^2 = 2N^2 \quad (14)$$

$$|B_2 - P|^2 = x_2^2 - 2x_2x_0 + x_0^2 + y_2^2 - 2y_2y_0 + y_0^2 + z_2^2 - 2z_2z_0 + z_0^2 = 2N^2 \quad (15)$$

$$|B_3 - P|^2 = x_3^2 - 2x_3x_0 + x_0^2 + y_3^2 - 2y_3y_0 + y_0^2 + z_3^2 - 2z_3z_0 + z_0^2 = 2N^2 \quad (16)$$

通过式(11)、式(14)相减, 式(12)、式(15)相减, 式(13)、式(16)相减, 可得到 6 个次数较低的协调方程, 即:

$$f(X) = x_1^2 + (y_1 - (N+L))^2 + (z_1 + N)^2 - l_1^2 = 0 \quad (17)$$

$$g(X) = (x_2 + N)^2 + (y_2 - (N+L))^2 + z_2^2 - l_3^2 = 0 \quad (18)$$

$$v(X) = (x_3 - N)^2 + y_3^2 + (z_3 + (N+L))^2 - l_5^2 = 0 \quad (19)$$

$$u(X) = 2x_1x_0 + 2y_1y_0 + 2z_1z_0 - x_0^2 - y_0^2 - z_0^2 + 3N^2 + (N+L)^2 - 2y_1(N+L) + 2z_1N - l_1^2 = 0 \quad (20)$$

$$w(X) = 2x_2x_0 + 2y_2y_0 + 2z_2z_0 - x_0^2 - y_0^2 - z_0^2 + 3N^2 + (N+L)^2 - 2y_2(N+L) + 2x_2N - l_3^2 = 0 \quad (21)$$

$$h(X) = 2x_3x_0 + 2y_3y_0 + 2z_3z_0 - x_0^2 - y_0^2 - z_0^2 + 3N^2 + (N+L)^2 + 2z_3(N+L) - 2x_3N - l_5^2 = 0 \quad (22)$$

可看出, 式(17)~式(19)的最高次数为 8 次, 式(20)~式(22)的最高次数为 6 次, 化简前后方程的最高次数和高次数的项数均有所降低。

不失一般性, 以 $f(X)$ 和 $g(X)$ 为例, 取 l_1 和 l_2 作为虚拟支链, 协调方程可写为

$$F(X) = [f(X) \quad g(X)]^T = 0 \quad (23)$$

式中 X 为 2 条虚拟支链。

将式(23)用泰勒公式展开, 即

$$F(X_n) + F'(X_n)(X - X_n) + \frac{F''(X_n)}{2!}(X - X_n)^2 + \dots + \frac{F^{(n)}(X_n)}{n!}(X - X_n)^n + o[(X - X_n)^n] = 0 \quad (24)$$

其中

$$F'(X_n) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(X)}{\partial l_1} & \frac{\partial f(X)}{\partial l_2} \\ \frac{\partial g(X)}{\partial l_1} & \frac{\partial g(X)}{\partial l_2} \end{bmatrix}$$

式中 $F'(X_n)$ 为 Jacobian 矩阵。

忽略高阶无穷小量后, 即

$$X_{n+1} = X_n - [F'(X_n)]^{-1} F(X_n) \quad (25)$$

为验证虚拟支链数值模型的正确性, 在 Mathematica 软件中构建了虚拟样机。动平台半边长 N 和移动副初始长度 L 分别设置为 15 mm 和 25 mm。通过数值仿真, 分别对比了虚拟支链在初始状态和任意状态时的计算结果, 表 1 列出了两种状态下虚拟支链数值解的误差。本文对误差 δ 进行了定义, 并将 2 条虚拟支链误差的平均值作为综合误差。误

差 δ 的表达式为

$$\delta_j = |l_j - l_j^*| \quad (26)$$

式中: l_j 为虚拟支链准确值; l_j^* 为虚拟支链数值计算值。

表1 虚拟支链数值结果的误差统计 mm

误差	初始状态	任意状态
δ_1	7.46×10^{-14}	4.67×10^{-10}
δ_2	3.52×10^{-13}	2.37×10^{-9}
综合误差	2.13×10^{-13}	1.42×10^{-9}

由表1可知,动平台位于初始状态和任意状态时,数值结果都会产生较小误差,该误差主要来源于计算机浮点运算中的舍入误差和泰勒展开时的截断误差,可忽略不计。误差统计结果验证了虚拟支链数值模型的正确性。

2.4 虚拟支链数值解的方程组合优选

在12条支链中,任意2条支链都可以作为虚拟支链,按照第2.3节中协调方程的顺序,对其从①~⑥进行编号,即 $f(\mathbf{X})=0$ 为协调方程①; $g(\mathbf{X})=0$ 为协调方程②; $v(\mathbf{X})=0$ 为协调方程③; $u(\mathbf{X})=0$ 为协调方程④; $w(\mathbf{X})=0$ 为协调方程⑤; $h(\mathbf{X})=0$ 为协调方程⑥。从6个协调方程中任意选取2个作为虚拟支链的求解方程,结合两类构型共有30种不同的组合形式。运用Newton-Raphson法,算法迭代精度控制为 1.0×10^{-6} ,结构参数与2.3节中的参数一致,得到虚拟支链数值解的初值偏差和迭代次数关系,分别如图7和图8所示。

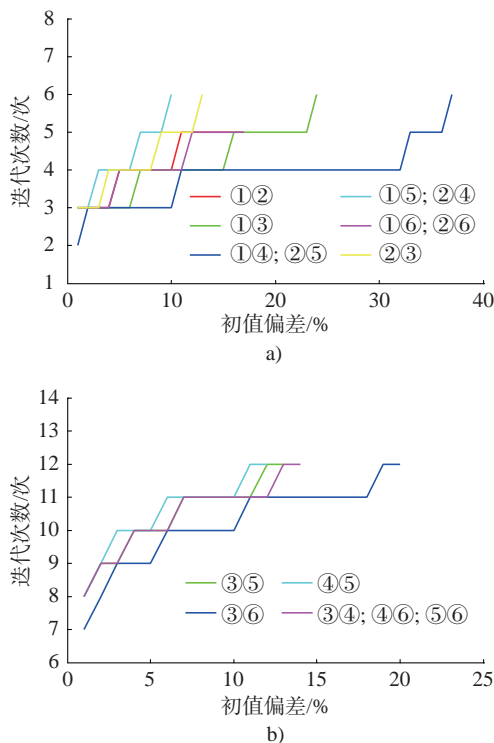


图7 10-6构型的初值偏差和迭代次数关系

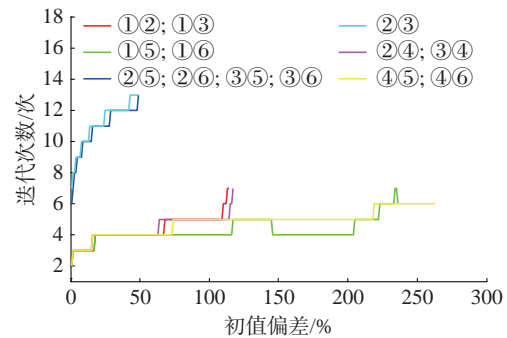


图8 10-5构型的初值偏差和迭代次数关系

观察并分析图7可知,对于10-6构型:协调方程④⑤组合求解的迭代次数较多(高于8次),并且收敛区间较小,只有12%;协调方程①④或②⑤组合求解的迭代次数较少(低于6次),并且拥有较大的收敛区间,达到37%;因此,仅从10-6构型的初值偏差和迭代次数关系来看,虚拟支链求解的最优方程组合为①④或②⑤。

观察并分析图8可知,对于10-5构型:协调方程②③组合求解的迭代次数较多(高于7次),收敛区间为49%;协调方程④⑤或④⑥组合求解的迭代次数较少(低于6次),收敛区间达到263%;因此,仅从10-5构型的初值偏差和迭代次数关系来看,虚拟支链求解的最优方程组合为④⑤或④⑥。

为了进一步对比不同方程组合对虚拟支链数值性能的影响,表2和表3列出了随着初值偏差的增大,不同方程组合数值计算结果的精度,取2条虚拟支链数值结果中误差较大的值作为该组合的计算误差。

观察并分析表2可知,对于10-6构型:15种方程组合都能求解虚拟支链;①⑤、②③、②④组合的收敛区间较小,只有10%左右;③⑥、④⑤、④⑥、⑤⑥组合的收敛区间较大,超过100%;结合收敛区间和综合精度来看,④⑤组合为最优组合。

观察并分析表3可知,对于10-5构型:①④、⑤⑥组合求解虚拟支链的数值解都发散,因此,这两种组合不适合10-5构型的虚拟支链求解;结合收敛区间和综合精度来看,④⑤、④⑥组合为最优组合。

综合两类构型来看,最优方程组合为④⑤组合,该组合不仅两类构型都适用,而且能够有效提高算法的效率、精度和收敛区间。从协调方程的角度分析,协调方程④和协调方程⑤的最高次数均为6次,低于最高次数均为8次的协调方程①、协调方程②和协调方程③。

表2 10-6 构型虚拟支链数值解的精度

mm

方程组合	初值偏差						综合精度
	5%	10%	15%	20%	50%	100%	
①②	2.84×10^{-14}	1.35×10^{-8}	1.55×10^{-9}	发散	发散	发散	5.02×10^{-9}
①③	1.47×10^{-8}	4.92×10^{-12}	2.73×10^{-10}	7.12×10^{-10}	发散	发散	3.92×10^{-9}
①④	3.76×10^{-11}	1.74×10^{-8}	2.49×10^{-14}	4.16×10^{-12}	发散	发散	4.36×10^{-9}
①⑤	6.53×10^{-10}	1.68×10^{-12}	发散	发散	发散	发散	3.27×10^{-10}
①⑥	2.84×10^{-14}	1.35×10^{-8}	1.55×10^{-9}	发散	发散	发散	5.02×10^{-9}
②③	1.84×10^{-12}	2.56×10^{-12}	发散	发散	发散	发散	2.20×10^{-12}
②④	6.53×10^{-10}	1.67×10^{-12}	发散	发散	发散	发散	3.27×10^{-10}
②⑤	3.77×10^{-11}	1.74×10^{-8}	1.78×10^{-14}	4.06×10^{-12}	发散	发散	4.36×10^{-9}
②⑥	3.55×10^{-15}	1.35×10^{-8}	1.55×10^{-9}	发散	发散	发散	5.02×10^{-9}
③④	1.27×10^{-3}	1.31×10^{-3}	8.65×10^{-4}	1.38×10^{-3}	9.23×10^{-4}	发散	1.15×10^{-3}
③⑤	1.27×10^{-3}	1.33×10^{-3}	1.03×10^{-3}	1.43×10^{-3}	1.08×10^{-3}	发散	1.23×10^{-3}
③⑥	2.56×10^{-3}	2.69×10^{-3}	2.11×10^{-3}	1.47×10^{-3}	2.36×10^{-3}	1.76×10^{-3}	2.16×10^{-3}
④⑤	1.27×10^{-3}	1.32×10^{-3}	1.03×10^{-3}	7.08×10^{-4}	1.04×10^{-3}	1.19×10^{-3}	1.09×10^{-3}
④⑥	1.27×10^{-3}	1.32×10^{-3}	1.03×10^{-3}	1.42×10^{-3}	1.04×10^{-3}	1.19×10^{-3}	1.21×10^{-3}
⑤⑥	1.27×10^{-3}	1.32×10^{-3}	1.03×10^{-3}	1.42×10^{-3}	1.04×10^{-3}	1.19×10^{-3}	1.21×10^{-3}

表3 10-5 构型虚拟支链数值解的精度

mm

方程组合	初值偏差						综合精度
	10%	20%	30%	100%	200%	300%	
①②	7.16×10^{-10}	7.11×10^{-15}	2.03×10^{-13}	3.83×10^{-10}	发散	发散	2.75×10^{-10}
①③	7.16×10^{-10}	0	2.03×10^{-13}	3.83×10^{-10}	发散	发散	2.75×10^{-10}
①④	发散	发散	发散	发散	发散	发散	发散
①⑤	4.50×10^{-10}	3.55×10^{-15}	2.84×10^{-14}	1.22×10^{-8}	1.11×10^{-9}	发散	2.75×10^{-9}
①⑥	4.50×10^{-10}	3.55×10^{-10}	2.84×10^{-14}	1.22×10^{-8}	1.11×10^{-9}	发散	2.82×10^{-9}
②③	2.69×10^{-3}	2.93×10^{-3}	2.38×10^{-3}	3.13×10^{-3}	2.48×10^{-3}	2.62×10^{-3}	2.71×10^{-3}
②④	1.92×10^{-9}	7.11×10^{-15}	7.11×10^{-13}	3.92×10^{-10}	发散	发散	5.78×10^{-10}
②⑤	2.69×10^{-3}	2.93×10^{-3}	2.38×10^{-3}	3.13×10^{-3}	2.48×10^{-3}	2.62×10^{-3}	2.71×10^{-3}
②⑥	2.69×10^{-3}	2.93×10^{-3}	2.38×10^{-3}	3.13×10^{-3}	2.48×10^{-3}	2.62×10^{-3}	2.71×10^{-3}
③④	1.92×10^{-9}	7.11×10^{-15}	7.11×10^{-13}	3.92×10^{-10}	发散	发散	5.78×10^{-10}
③⑤	2.69×10^{-3}	2.93×10^{-3}	2.38×10^{-3}	3.13×10^{-3}	2.48×10^{-3}	2.62×10^{-3}	2.71×10^{-3}
③⑥	2.69×10^{-3}	2.93×10^{-3}	2.38×10^{-3}	3.13×10^{-3}	2.48×10^{-3}	2.62×10^{-3}	2.71×10^{-3}
④⑤	1.32×10^{-9}	0	3.55×10^{-13}	3.20×10^{-14}	1.16×10^{-8}	3.27×10^{-13}	2.15×10^{-9}
④⑥	1.32×10^{-9}	0	3.55×10^{-13}	3.20×10^{-14}	1.16×10^{-8}	3.27×10^{-13}	2.15×10^{-9}
⑤⑥	发散	发散	发散	发散	发散	发散	发散

3 位置反解

中的位置和姿态,求各个杆长,即各移动副的位移。

以 X - Y - Z 型欧拉角为姿态变量,即先绕 X 轴旋

转角 α ,再绕 Y 轴旋转角 β ,最后绕 Z 轴旋转角 γ ,得

到动坐标系相对于静坐标系的旋转矩阵 \mathbf{R}_P^O , 即

$$\mathbf{R}_P^O = \mathbf{R}(Z, \gamma) \mathbf{R}(Y, \beta) \mathbf{R}(X, \alpha) = \begin{bmatrix} \cos\beta\cos\gamma & \cos\gamma\sin\alpha\sin\beta - \sin\gamma\cos\alpha & \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma + \sin\alpha\sin\gamma \\ \sin\gamma\cos\beta & \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma + \cos\alpha\cos\gamma & \sin\beta\sin\gamma\cos\alpha - \cos\gamma\sin\alpha \\ -\sin\beta & \cos\beta\sin\alpha & \cos\alpha\cos\beta \end{bmatrix} \quad (27)$$

因此, \mathbf{B}_i 可进一步表示为:

$$\mathbf{B}_i = \mathbf{R}_P^O \mathbf{B}_i^P + \mathbf{P} \begin{bmatrix} (\cos\beta\cos\gamma)u_{B_i} + (\cos\gamma\sin\alpha\sin\beta - \sin\gamma\cos\alpha)v_{B_i} + (\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma + \sin\alpha\sin\gamma)w_{B_i} + x_0 \\ (\sin\gamma\cos\beta)u_{B_i} + (\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma + \cos\alpha\cos\gamma)v_{B_i} + (\sin\beta\sin\gamma\cos\alpha - \cos\gamma\sin\alpha)w_{B_i} + y_0 \\ (-\sin\beta)u_{B_i} + (\cos\beta\sin\alpha)v_{B_i} + (\cos\alpha\cos\beta)w_{B_i} + z_0 \end{bmatrix} \quad (28)$$

再由杆长条件可以得到:

$$\begin{cases} l_j^2 = \left| \mathbf{R}_P^O \mathbf{B}_{\frac{j+1}{2}}^P + \mathbf{P} - \mathbf{b}_j \right|^2 & j \text{ 为奇数} \\ l_j^2 = \left| \mathbf{R}_P^O \mathbf{B}_{\frac{j}{2}}^P + \mathbf{P} - \mathbf{b}_j \right|^2 & j \text{ 为偶数} \end{cases} \quad (29)$$

限于篇幅, 以 l_1 杆为例, 将 \mathbf{R}_P^O 、 \mathbf{B}_1^P 、 \mathbf{P} 和 \mathbf{b}_1 代入式(29), 可得 l_1^2 的表达式为:

$$l_1^2 = [(\cos\beta\cos\gamma)u_{B_1} + (\cos\gamma\sin\alpha\sin\beta - \sin\gamma\cos\alpha)v_{B_1} + (\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma + \sin\alpha\sin\gamma)w_{B_1} + x_0]^2 + [N + L - (\sin\gamma\cos\beta)u_{B_1} - (\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma + \cos\alpha\cos\gamma)v_{B_1} - (\sin\beta\sin\gamma\cos\alpha - \cos\gamma\sin\alpha)w_{B_1} - y_0]^2 + [N + (-\sin\beta)u_{B_1} + (\cos\beta\sin\alpha)v_{B_1} + (\cos\alpha\cos\beta)w_{B_1} + z_0]^2 \quad (30)$$

从式(30)可以看出, 当给定机构动平台的位姿参数, 即可求出杆长值。至此, 已构建了 10 支链 Stewart 衍生构型的位置反解模型。

4 工作空间分析

考虑到 6 自由度并联机构位置与姿态之间的强耦合关系, 一般将工作空间分为位置工作空间和姿态工作空间, 位置工作空间能够直观地描绘出并联机构的工作范围, 姿态工作空间能够体现并联机构在该位置的灵活性。本文将分别对比分析两类 10 支链衍生构型的位置工作空间和姿态工作空间, 两类构型的结构参数均相同, 分别为 $N=15$ mm, $L=25$ mm, $l_j \in [15, 35]$ mm。

4.1 区间的基本概念

对于给定的数 \underline{x} , $\bar{x} \in \mathbf{R}$, 若满足 $\underline{x} \leq \bar{x}$, 则闭有界数集合:

$$\mathbf{X} = [\underline{x}, \bar{x}] = \{x \in \mathbf{R} | \underline{x} \leq x \leq \bar{x}\} \quad (31)$$

式中: \underline{x} 为区间的下界; \bar{x} 为区间的上界。

式(31)称为有界闭区间^[22]。令 \mathbf{R} 上所有有界闭区间所组成的集合记为 $I(\mathbf{R})$, 这样, 如果 \mathbf{A} 为 \mathbf{R} 的子集 $\mathbf{A} \subset \mathbf{R}$, 则 \mathbf{A} 上的所有有界闭区间所组成的集合可表示为

$$I(\mathbf{A}) = \{\mathbf{X} \in I(\mathbf{R}) | \mathbf{X} \subseteq \mathbf{A}\} \quad (32)$$

若区间 \mathbf{X} 的上、下界相等, 即 $\underline{x} = \bar{x}$, 此时可定义为点区间, 即

$$x = [x, x] \quad (33)$$

对于任意的 $\mathbf{X} \in I(\mathbf{R})$, 分别定义:

$$\begin{aligned} m(\mathbf{X}) &= \text{mid } \mathbf{X} = \frac{(\underline{x} + \bar{x})}{2} \\ W(\mathbf{X}) &= \bar{x} - \underline{x} \\ |\mathbf{X}| &= \max(|\underline{x}|, |\bar{x}|) \end{aligned} \quad (34)$$

式中: $m(\mathbf{X})$ 、 $W(\mathbf{X})$ 和 $|\mathbf{X}|$ 分别为区间 \mathbf{X} 的中点、宽度和绝对值。

4.2 算法原理

本文以动平台的中心点 P 为参考点, 计算 10-6 和 10-5 两类 Stewart 衍生构型的工作空间。通过引入区间分析理论, 将点离散扩展为区间离散, 这在一定程度上提高了算法的稳定性。算法流程图如图 9 所示。

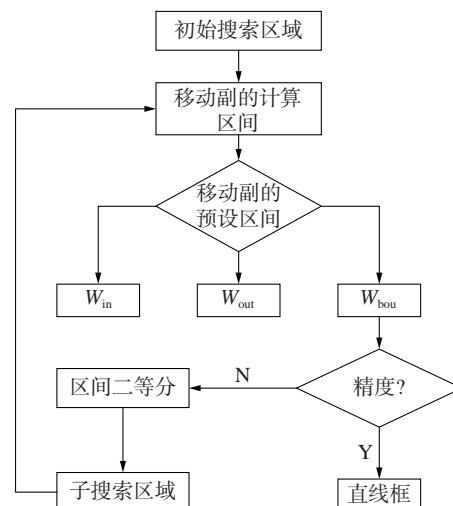


图 9 算法流程图

步骤1 根据机构的结构参数,确定机构的初始搜索区域,该区域由区间 $\mathbf{X} = [x, \bar{x}]$ 和区间 $\mathbf{Y} = [y, \bar{y}]$ 构成,所确定的初始搜索区域必须大于机构的真实工作空间;

步骤2 将区间 \mathbf{X} 和区间 \mathbf{Y} 代入式(29),计算得到移动副的计算区间 $\mathbf{l} = [\underline{l}, \bar{l}]$;

步骤3 将移动副的计算区间与移动副的预设区间 $\mathbf{l}_D = [\underline{l}_D, \bar{l}_D]$ 进行比较,存在三种情况:1) 对于所有移动副,如果移动副计算区间全部位于移动副预设区间内,即 $\mathbf{l} \subseteq \mathbf{l}_D$,表明该搜索区域位于工作空间内部,则将该搜索区域存入内部区间集 W_{in} ;2) 对于至少存在一个移动副,如果移动副计

算区间全部位于移动副预设区间外,即 $\mathbf{l} \cap \mathbf{l}_D = \emptyset$,表明该搜索区域位于工作空间外部,则将该搜索区域存入外部区间集 W_{out} ;3) 其它情况表明该搜索区域位于工作空间边界,则将该搜索区域存入边界区间集 W_{bou} 。

步骤4 计算边界区间集内区间的区间宽度,并将其与精度阈值 ε 进行比较;如果边界区间集内区间的区间宽度小于或等于 ε ,则转至步骤6;如果边界区间集内区间的区间宽度大于 ε ,则对边界区间集内的区间进行一次区间二等分,产生若干个子搜索区域,并将其存入子边界区间集 w_{bou} 。区间二等分过程示意图如图10所示。

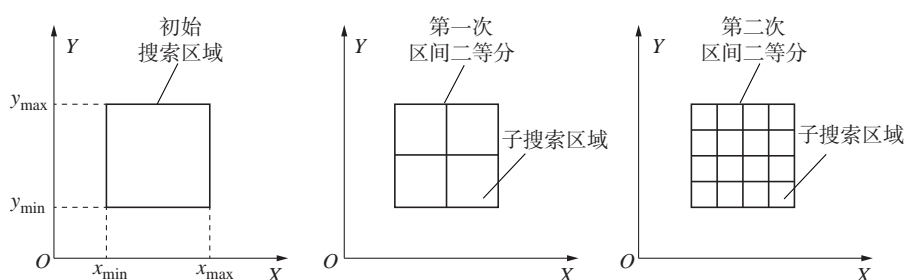


图10 区间二等分过程示意图

步骤5 清空边界区间集内的元素,将 w_{bou} 内的子搜索区域代入式(29),得到移动副的计算区间,然后返回步骤3;

步骤6 根据步骤3中得到的内部区间集、外部区间集和边界区间集,用绘制直线框的方式将其内的所有区域描绘出来,即为10支链衍生构型的工作空间。

4.3 位置工作空间

位置工作空间是指在给定姿态下,末端执行器参考点所能达到的所有位置的集合。对于给定结构参数的并联机构,当姿态矩阵 \mathbf{R}_p^O 确定时,即确定动平台的姿态,计算得到的工作空间为位置工作空间。

根据给定的并联机构结构参数,确定初始搜索区域为 $\mathbf{x} = [-15 \text{ mm}, 15 \text{ mm}]$ 和 $\mathbf{y} = [-15 \text{ mm}, 15 \text{ mm}]$,动平台位于初始姿态,即 $\alpha = 0, \beta = 0, \gamma = 0$,分别给出了 $z = -9 \text{ mm}, z = -5 \text{ mm}, z = 0, z = 5 \text{ mm}$ 和 $z = 9 \text{ mm}$ 截面的位置工作空间,如图11所示。

从图11可以看出,两类构型的位置工作空间整体呈中间大两端小的立体状,内部均不存在空洞;10-6构型的位置工作空间在 y 轴负方向有一定程度的内凹,并且该工作空间关于 xoy 和 yoz 平面对称;10-5构型的位置工作空间关于 xoy 、 yoz 和 xoz 平面均对称。

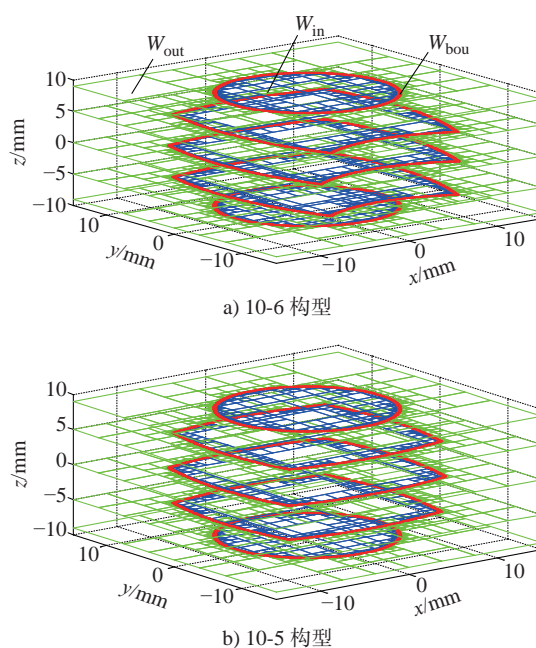


图11 两类构型的位置工作空间

4.4 姿态工作空间

姿态工作空间是指在给定位置下,末端执行器参考点所能达到的所有姿态的集合。对于一组结构参数固定的并联机构,当位置固定时,计算得到的工作空间为姿态工作空间。

根据给定的并联机构结构参数,确定初始

搜索区域为 $\alpha = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ rad, $\beta = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ rad 和 $\gamma = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ rad, 动平台位于初始位置, 即 $x_0=0, y_0=0, z_0=0$, 分别给出了 α 与 β , α 与 γ 以及 β 与 γ 之间的姿态工作空间, 如图 12 所示。

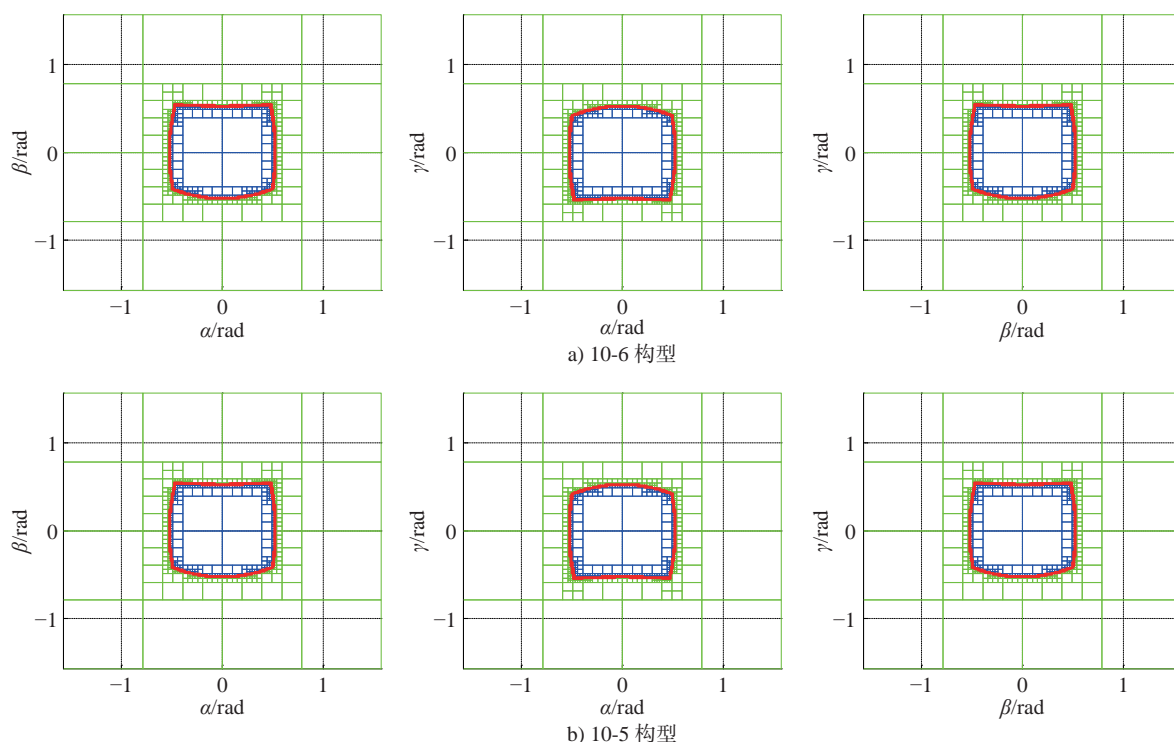


图 12 两类构型的姿态工作空间

从图 12 可以看出, 两类构型的姿态工作空间基本一致, 并且在竖直方向具有对称性; 动平台在 x 、 y 和 z 这 3 个方向的最大转角均达到 30° 左右。

5 结论

提出 10-6 和 10-5 两类构型的 10 支链 Stewart 衍生构型, 通过添加虚拟支链, 将 10 支链并联机构构造成为低耦合度的 12 支链衍生构型, 并构建了一种数值法和解析法相结合的位置正解半解析算法。结合虚拟支链推导出 12 支链衍生构型的协调方程, 运用 Newton-Raphson 法得到虚拟支链的数值解, 通过仿真计算验证了虚拟支链数值模型的正确性; 推导出 12 支链衍生构型位置正解的全解析解; 从迭代次数和初值偏差的关系以及虚拟支链数值解的误差两个方面探究了方程组合优选问题。推导出 10 支链衍生构型的位置反解, 通过引入区间分析, 计算得到两类构型的位置工作空间和姿态工作空间, 为 Stewart 衍生型并联机构的控制和应用奠定一定基础。本文的研究方法和思路同样适用于 7 支链、8 支链、9 支链和 11 支链的 Stewart 衍生构型。

[参考文献]

- [1] 张淑珍, 毕彦峰. 新型并联太阳跟踪装置的动力学分析[J]. 机械科学与技术, 2020, 39(1): 35-40
- ZHANG S Z, BI Y F. Analyzing dynamics of a novel parallel tracking solar device[J]. Mechanical Science and Technology for Aerospace Engineering, 2020, 39(1): 35-40 (in Chinese)
- [2] 吴范徐齐, 许嵩, 刘生, 等. 基于咀嚼特性的少自由度咀嚼机器人设计[J]. 机械传动, 2019, 43(8): 52-58
- WU-FAN X Q, XU Q, LIU S, et al. Design of chewing robot with less degrees of freedom based on chewing characteristic[J]. Journal of Mechanical Transmission, 2019, 43(8): 52-58 (in Chinese)
- [3] LATIFINAVID M, DONDER A, KONUKSEVEN E I. High-performance parallel hexapod-robotic light abrasive grinding using real-time tool deflection compensation and constant resultant force control[J]. The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 2018, 96(9-12): 3403-3416
- [4] KIM U, LEE D H, KIM Y B, et al. S-surge: novel portable surgical robot with multiaxis force-sensing capability for minimally invasive surgery[J]. IEEE/ASME Transactions on Mechatronics, 2017, 22(4): 1717-1727
- [5] 尤晶晶, 符周舟, 李成刚, 等. 并联式六维加速度传感器的解耦参数辨识及其扰动分析[J]. 振动与冲击, 2019, 38(1): 134-141
- YOU J J, FU Z Z, LI C G, et al. Parameter identification and perturbation algorithm of parallel type six-axis accelerometer[J]. Journal of Vibration

- and Shock, 2019, 38(1): 134-141 (in Chinese)
- [6] 张英, 廖启征, 魏世民. 一般6-4台体型并联机构位置正解分析[J]. 机械工程学报, 2012, 48(9): 26-32
ZHANG Y, LIAO Q Z, WEI S M. Forward displacement analysis of a general 6-4 in-parallel platform[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2012, 48(9): 26-32 (in Chinese)
- [7] GRIFFIS M, DUFFY J. A forward displacement analysis of a class of Stewart platforms[J]. Journal of Robotic Systems, 1989, 6(6): 703-720
- [8] INNOCENTI C, PARENTI-CASTELLI V. Direct position analysis of the Stewart platform mechanism[J]. Mechanism and Machine Theory, 1990, 25(6): 611-621
- [9] 程世利, 吴洪涛, 王超群, 等. 一般6-SPS并联机构运动学正解的解析化方法[J]. 中国机械工程, 2010, 21(11): 1261-1264
CHENG S L, WU H T, WANG C Q, et al. Analytical method for forward kinematics analysis of general 6-SPS parallel mechanisms[J]. China Mechanical Engineering, 2010, 21(11): 1261-1264 (in Chinese)
- [10] 李明磊, 贾育秦. 6-SPS并联机构位置正解的改进粒子群算法[J]. 现代制造工程, 2009(5): 106-110
LI M L, JIA Y Q. Improved particle swarm optimization algorithm for forward positional analysis of 6-SPS parallel manipulators[J]. Modern Manufacturing Engineering, 2009(5): 106-110 (in Chinese)
- [11] 王品, 李洪斌, 李刚. 6-5平台型并联机构的位置正解分析[J]. 机械科学与技术, 2013, 32(9): 1385-1388
WANG P, LI H B, LI G. Forward position analysis of 6-5 parallel mechanisms[J]. Mechanical Science and Technology for Aerospace Engineering, 2013, 32(9): 1385-1388 (in Chinese)
- [12] WEI F, WEI S M, ZHANG Y, et al. Algebraic solution for the forward displacement analysis of the general 6-6 Stewart mechanism[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2016, 29(1): 56-62
- [13] 沈惠平, 尹洪波, 王振, 等. 基于拓扑结构分析的求解6-SPS并联机构位置正解的研究[J]. 机械工程学报, 2013, 49(21): 70-80
SHEN H P, YIN H B, WANG Z, et al. Research on forward position solutions for 6-SPS parallel mechanisms based on topology structure analysis[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2013, 49(21): 70-80 (in Chinese)
- [14] 尤晶晶, 符周舟, 吴洪涛, 等. 12-6台体型Stewart冗余并联机构正向运动学研究[J]. 农业机械学报, 2017, 48(12): 395-402
YOU J J, FU Z Z, WU H T, et al. Forward kinematics of general 12-6 Stewart redundant parallel mechanism[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2017, 48(12): 395-402 (in Chinese)
- [15] 程颖, 杨德华, 吴常铨, 等. 新型六自由度微动并联机构的工作空间分析[J]. 机械科学与技术, 2019, 38(3): 433-439
CHENG Y, YANG D H, WU C C, et al. Workspace analysis of a novel six DOFs parallel mechanism with micro displacement[J]. Mechanical Science and Technology for Aerospace Engineering, 2019, 38(3): 433-439 (in Chinese)
- [16] 吴超宇, 钱小吾, 余伟, 等. 直线驱动型并联机器人工作空间分析与优化[J]. 农业机械学报, 2018, 49(1): 381-389
WU C Y, QIAN X W, YU W, et al. Workspace analysis and optimization of linear driven parallel robot[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2018, 49(1): 381-389 (in Chinese)
- [17] 雷静桃, 曹元龙, 王峰. 基于边界搜索法的4UPS-UPU并联机构工作空间分析[J]. 机械设计与研究, 2013, 29(1): 5-9
LEI J T, CAO Y L, WANG F. Workspace analysis of a 4UPS-UPU parallel mechanism based on the boundary search method[J]. Machine Design and Research, 2013, 29(1): 5-9 (in Chinese)
- [18] 刘芳芳, 周春国, 黄阳, 等. 一种并联脚踝康复机构的运动学与工作空间分析[J]. 机械设计, 2019, 36(1): 44-50
LIU F F, ZHOU C G, HUANG Y, et al. Kinematics and workspace analysis of a parallel mechanism for ankle rehabilitation[J]. Journal of Machine Design, 2019, 36(1): 44-50 (in Chinese)
- [19] 叶冬明, 李开明. 新型三自由度并联机构工作空间分析[J]. 机械设计与制造, 2012(2): 199-201
YE D M, LI K M. Workspace analysis for a novel 3-DOF parallel manipulator[J]. Machinery Design & Manufacture, 2012(2): 199-201 (in Chinese)
- [20] 黄真, 赵永生, 赵铁石. 高等空间机构学[M]. 2版. 北京: 高等教育出版社, 2014
HUANG Z, ZHAO Y S, ZHAO T S. Advanced spatial mechanism[M]. 2nd ed. Beijing: Higher Education Press, 2014 (in Chinese)
- [21] 尤晶晶, 仇鑫, 王林康, 等. 一种可以转换主、从移动的运动副: 中国, CN110159718A[P]. 2019-08-23
YOU J J, QIU X, WANG L K, et al. Movement pairs capable of converting main and auxiliary movement pairs: CN, CN110159718A[P]. 2019-08-23 (in Chinese)
- [22] 王德人, 张连生, 邓乃扬. 非线性方程的区间算法[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1987
WANG D R, ZHANG L S, DENG N Y. Interval algorithms of nonlinear equations[M]. Shanghai: Shanghai Science and Technology Press, 1987 (in Chinese)