

基于区间分析的 6 自由度并联机器人正解的研究

黄康¹, 王富雷¹, 邢健², 张建华¹

(1. 合肥工业大学 机械与汽车工程学院, 安徽 合肥 230009; 2. 北京化工大学 机电工程学院, 北京 100029)

摘要: 针对最普遍的 6-SPS 并联机器人运动学位置正解问题, 提出一种基于区间分析的数值求解方法。建立区间方程后, 通过区间分析确定机构配置的初始解区间; 然后, 将初始解区间不断对分, 并通过区间算子分析各对分出的子区间, 得到所有解的收敛区间; 最后, 以各收敛区间的中点为起点进行点迭代, 求出方程组的所有近似解。

关键词: 并联机器人; 区间分析; 运动分析; 位置正解

中图分类号: TP242 **文献标识码:** A **文章编号:** 1001-2354(2010)10-0047-04

1949 年 Stewart 为轮胎试验提出一个 6 自由度并联结构, 称为 Stewart 平台; 1956 年 Gough 将其用于设计飞行模拟器。从此, 并联机器人凭借刚度大、结构稳定、承载能力强、精度高、运动惯性小等优点获得了广泛的应用^[1-2]。但是, 由于并联机构位置正解是高次非线性问题, 求解困难, 一直是机构学的研究难点。一般 6-SPS 机构无法得到解析解, 通常采用符号运算和数值迭代进行求解。一般 6-SPS 机构已被证明存在不超过 40 组解^[3], 但是个数不确定。因此点迭代方法存在两点不足: 难以确定合适的迭代起点, 难以确定是否得到所有解。

文中提出的基于区间分析的求解方法, 将点方程转换成区间方程, 给出包含所有解的初始解区间, 并不断对分、检测各个子区间, 直至得到所有解的收敛子区间。各子区间的中点即为后续点迭代的起点, 解的精度在迭代中设定。因此, 该方法能够得到并联结构位置正解的所有近似解, 是并联结构位置正解全局解的有效求解方法。

1 6-SPS 并联机构及其位置正解

Stewart 平台是典型的 6-SPS 并联机构, 如图 1 所示。刚性固定面(在坐标系 $O-xyz$ 上)通过可以控制杆长的 6 个连杆连接刚性移动面(在坐标系 $O'-x'y'z'$ 上)。各杆通过球铰与两平台相连; 动平台具有 6 个自由度。给定杆长 l_i , 求解动平台的位置形态, 即 O 点相对于 O' 点的移动(c_x, c_y, c_z)和转动(φ, θ, ψ), 即为并联机构位置正解。

一般通过给定杆长 l_i 与求解杆长 $a_i b_i$ 相等建立求

解方程组。令 $x = (c_x, c_y, c_z, \varphi, \theta, \psi)$, $a_i b_i$ 可以表示为 x 的函数 $f(x)$, 因此, 求解方程为:

$$f(x) - l_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, 6)$$

上式为非线性方程组, 解的个数与并联机构位形数目相同。上文提到非线性方程组的点迭代方法存在着一定的不足, 下面介绍能够克服上述不足的基于区间分析的新算法。

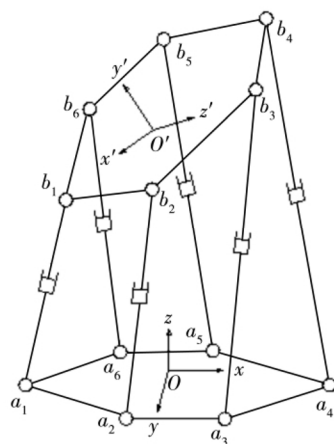


图 1 Stewart 平台结构

2 基于区间分析的求解方法

区间分析, 又称为区间数学, 最初是从计算数学的误差理论研究中发展起来, 是用区间变量代替点变量的数学分支^[4-5]。1966 年, R E Moore 在 Interval Analysis 一书中, 第一次系统地提出区间分析理论。在此, 对区间分析仅作简单介绍。

2.1 区间的基本概念

对于给定的数 $x, \bar{x} \in \mathbf{R}$, 若满足 $x \leq \bar{x}$, 则闭有界数

* 收稿日期: 2009-09-01; 修订日期: 2010-04-25

作者简介: 黄康(1968—), 男, 安徽泾县人, 教授, 博士, 主要从事机械强度、机械传动、CAD 与优化设计等方面的研究。

集合:

$$X = [\underline{x}, \bar{x}] = \{x \in \mathbf{R} \mid \underline{x} \leq x \leq \bar{x}\}$$

式中: \underline{x} ——区间的下界;

\bar{x} ——区间的上界。

上式称为有界闭区间。 \mathbf{R} 上所有有界闭区间组成的集合, 记为 $I(\mathbf{R})$ 。若 A 为 \mathbf{R} 的子集, 即 $A \subset \mathbf{R}$, 则 A 上所有有界闭区间所组成的集合, 可表示为 $I(A) = \{X \in I(\mathbf{R}) \mid X \subseteq A\}$ 。下面定义几个能够反映区间几何特征的基本量:

$$m([x]) = (\underline{x} + \bar{x}) / 2$$

$$u([x]) = \bar{x} - \underline{x}$$

$$|X| = \max(|\bar{x}|, |\underline{x}|)$$

式中: $m([x])$, $u([x])$, $|X|$ ——区间 X 的中点、宽度和绝对值。

区间的定义可以推广成向量形式和矩阵形式, 分别记为 $I(\mathbf{R}^n)$ 和 $I(\mathbf{R}^{m \times n})$, 在此不作展开。

对于任何二元操作 \diamond , $[x]$ 和 $[y]$ 在 $I(\mathbf{R})$ 域的区间运算 \diamond 定义为:

$$[x] \diamond [y] = \{x \diamond y \mid x \in [x], y \in [y]\}$$

这样, 实域的加减乘除、正余弦等初等运算及其运算性质都能引入区间。但分配率区间运算的依赖效应, 不再适用。详细运算及其性质参见文献 [4-5]。

实函数 $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ 同样可以推广到区间函数 $F: I\mathbf{R}^n \rightarrow I\mathbf{R}$ 。但由于区间运算对自变量具有依赖效应, 通常只能得到:

$$f(x) \subset F([x]) \quad (\forall x \in \mathbf{R}^n)$$

F 称为 f 的区间扩展。仅在一些特殊方程中, 才能够得到 $f(x) = F([x])$ 。从上式可以看出, 当 $0 \notin F([x])$ 时, $f(x)$ 在区间 $[x]$ 中无解。这在区间算法的对分、检测中用得到。

2.2 基于区间分析的求解方法

区间分析是针对区间函数进行的, 因此, 首先将上文建立的方程组扩展为区间方程组:

$$F([x]) - l_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, 6)$$

其中, 区间变量 $[x]$ 为 6 维区间向量。文中的区间方程将用于构建区间算子进行区间检测。

2.2.1 区间方程组初始求解域的确定

开始计算前, 必须找到一个包含并联机构的所有解的初始区间。最简单的初始求解域为: $[x]_0 = [-\infty, \infty] \times [-\infty, \infty] \times [-\infty, \infty] \times [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$, 显然, 需要进行进一步的简化。下面通过区间分析对前三维变量的区间范围进行简化。

如图 2, a_i 和 b_i 之间的距离为给定杆长 y_i ; O' 和 b_i 之间的距离可以由已知条件求出, 记为 $d(O', b_i)$; 平移向量 $c = \overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{Oa_i} + \overrightarrow{a_ib_i} + \overrightarrow{b_iO'}$ 改写为 $c = a_i +$

$(b_i - a_i) + (O' - b_i)$, 即:

$$\begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{x_i} \\ a_{y_i} \\ a_{z_i} \end{pmatrix} + (b_i - a_i) + (O' - b_i)$$

显然, $(b_i - a_i)$ 中的每一个元素都属于 $[-y_i, y_i]$; $(O' - b_i)$ 中的每一个元素都属于 $[-d(O', b_i), d(O', b_i)]$ 。因此, 对于 $i = 1, 2, \dots, 6$, 有:

$$\begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} a_{x_i} \\ a_{y_i} \\ a_{z_i} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} [-y_i, y_i] \\ [-y_i, y_i] \\ [-y_i, y_i] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} [-d(O', b_i), d(O', b_i)] \\ [-d(O', b_i), d(O', b_i)] \\ [-d(O', b_i), d(O', b_i)] \end{pmatrix}$$

求得上式中 6 个区间向量的交集即得到初始求解域的移动向量:

$$[c]_0 = \bigcap_{i \in \{1, \dots, 6\}} \begin{pmatrix} a_{x_i} + [-y_i, y_i] + [-d(O', b_i), d(O', b_i)] \\ a_{y_i} + [-y_i, y_i] + [-d(O', b_i), d(O', b_i)] \\ a_{z_i} + [-y_i, y_i] + [-d(O', b_i), d(O', b_i)] \end{pmatrix}$$

上式, 将平移向量的 3 个分量的初始区间由 \mathbf{R} 域正负无穷区间降下来, 使接下来的区间对分成为可能, 并减少了区间对分的次数和计算时间。另外, 由于结构运行的实际约束, c_z 分量一般取正值; 由于坐标系变换矩阵 $P(\varphi, \theta, \psi) = P(\varphi + \pi, -\theta, \psi + \pi)$, θ 分量取正值, 即 $\theta \in [0, \pi]$ 。

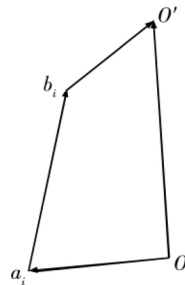


图 2 坐标系平移向量

2.2.2 区间对分与检验的递归算法

综上所述, 已经得到了非线性区间方程, 并已求得初始求解域。此节的区间对分与检测的递归算法能够为后续迭代提供具备唯一解的搜索区间, 过程如图 3 所示。首先, 将初始区间向量对分, 得到 2^6 个子区间; 然后, 分别对各个子区间进行检测, 结果分为 3 种情况: 若无解, 则舍弃相应子区间; 若有唯一解, 则保留相应子区间; 如存在多解, 则对相应子区间再次对分, 直至得到所有唯一解区间。

在上述算法中, 解的检测是其他方法所不能够完成的。在此, 引入 Krawczyk-Hanssen 算子:

$$H(y, X) = y - g(y) + L(X)(H' - y) + U(X)(X - y)$$

式中: $H' = H(y, X) \cap X$ 。

通过 Krawczyk-Hanssen 算子, 可以得到非线性方

程组 $f(x)$ 的如下几条性质^[5]:

- (1) 若 $X \cap H(y, X) = \emptyset$, 则方程组在 X 中无解。
- (2) 若 $H(y, X)$ 非空, 且 $H(y, X) \subseteq X$, 则方程组在 X 中有解, 且解存在于 $H(y, X)$ 中。
- (3) 若 $H(y, X)$ 非空, 且对给定的区间向量 $X \in I(D)$, $D \subseteq \mathbf{R}^n$ 满足 $H(y, X) \subseteq X$, $w(H) < w(X)$, 则方程组在 X 中有唯一解, 且解存在于 $H(y, X)$ 中。
- (4) 当区间 X 中存在唯一解时, 对于任何初始近似 $x \in H(X)$, 点迭代序列 $x^{(k+1)} = x^{(k)} - Yf(x^{(k)})$, $k = 1, 2, \dots$ 收敛于 $H(X)$ 中的唯一解。

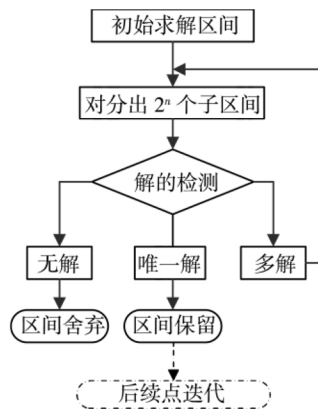


图3 区间对分与检测递归算法

性质(1) 用于无解判断, 性质(3) 用于唯一解判断, 是图3中解的判断的重要组成部分, 性质(4) 保证了后续点迭代在各个收敛区间中, 解的收敛性和唯一性。

德国汉堡工业大学对区间数学进行了大量的研究, 并在 Matlab 的基础上编写了用于区间数学的 Intlab 插件。通过上述软件, 按照基于区间分析的算法编写出能够求解并联机构位置正解的程序, 下面给出一个具体求解例子。

3 实例验证

为了验证文中提出的基于区间分析的算法, 下面给出一个 6-SPS 例证, 参数如表 1。其中, a 点坐标在坐标系 O 下; b 点坐标在坐标系 O' 下。

表1 给定坐标、杆长等参数

| i | a_x | a_y | a_z | b_x | b_y | b_z | y_i^2 |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|---------|
| 1 | -3 | 2 | 0 | -1 | 1 | 0 | 22 |
| 2 | 3 | 2 | 0 | 1 | 1 | 0 | 31 |
| 3 | 4 | 0 | 0 | 2 | -1 | 0 | 39 |
| 4 | 1 | -3 | 0 | 1 | -2 | 0 | 29 |
| 5 | -1 | -3 | 0 | -1 | -2 | 0 | 22 |
| 6 | -4 | 1 | 0 | -2 | -1 | 0 | 22 |

根据 2.2.1 节得出的结论, 初始求解区间为:

$$[-7.93, 3.99] \times [-4.99, 8.25] \times [0, 6.25] \times [-\pi, \pi] \times [0, \pi] \times [-\pi, \pi]$$

然后, 设定求解精度 10^{-5} , 在初始求解区间上运行区间对分、检测程序和点迭代程序后, 得实数域上固定平面上方的所有近似解, 如表 2。每组解对应于并联机构的一个实际位置形态。

表2 计算结果(固定平面上方的所有近似解)

| | c_x | c_y | c_z | ψ | θ | φ |
|---|----------|----------|---------|----------|----------|-----------|
| 1 | -0.412 4 | -0.409 6 | 1.161 6 | 1.652 6 | 0.993 7 | 1.509 1 |
| 2 | -0.365 6 | 0.027 2 | 4.680 9 | -1.962 3 | 2.747 5 | 1.826 9 |
| 3 | -1.199 7 | -0.617 0 | 0.883 9 | -1.284 9 | 1.216 6 | -1.905 6 |
| 4 | -1.100 8 | -2.365 8 | 2.835 4 | 0.040 4 | 1.698 1 | 2.781 6 |

4 结论

文中提出了并联机器人位置正解非线性方程组的区间解法, 主要包括: 建立区间方程, 通过区间运算获得解的初始域, 通过区间对分和区间算子检测获得所有的收敛子区间, 最后通过点迭代获得所有近似解。这种方法克服了一般点迭代方法全局搜索难以确定初始点的缺点, 是并联机器人求解的有效方法, 可以推广到类似的非线性方程组的求解中去。

参考文献

- [1] Stewart D. A platform with six degrees of freedom [J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineering, Part A: Journal of Power and Energy, 1965, 180 (15): 371-386.
- [2] Merlet J P. Parallel robots [M]. Boston: Kluwer Academic Publishers, 2000: 1-15.
- [3] Madhusudan Raghavan. The Stewart platform of general geometry has 40 configurations [J]. ASME J of Mech Des, 1993, 115: 277-280.
- [4] Luc Jaulin, Michel Kieffer, Oliver Didrit. Applied interval analysis [M]. Springer-Verlag: Springer, 2006: 12-43, 226-234.
- [5] 王德人, 张连生, 邓乃扬. 非线性方程的区间算法 [M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1987: 8-28, 51-114.

Study on direct kinematic solution for 6 DOF parallel robots based on interval analysis

HUANG Kang¹, WANG Fu-lei¹, XING Jian², ZHANG Jian-hua¹

基于 RBF 的机械手无需模型自适应控制研究^{*}

赵成秀¹, 张立红²

(1. 四川民族学院 数学系计算机科学系, 四川 康定 626001; 2. 西南科技大学 工程技术中心, 四川 绵阳 621010)

摘要: 针对机械手存在的扰动等未知模型, 提出了基于 RBF 神经网络的自适应控制策略。采用 RBF 神经网络对机械手动力学模型在线自学习, 并根据 Lyapunov 稳定性理论建立了网络权值自适应学习律, 确保了网络逼近误差的收敛及系统的稳定。以平面转动双臂机械手轨迹跟踪为例进行仿真, 结果表明该方法能够有效地补偿建模误差, 实现了无需模型的机械手自适应控制, 提高了系统的控制性能及对外部不确定扰动的鲁棒性, 对实际工业机械手的自适应控制具有一定的可操作性。

关键词: 扰动; 自适应; 逼近误差; 鲁棒性

中图分类号: TP241 **文献标识码:** A **文章编号:** 1001-2354(2010)10-0050-04

工业机器人是一个非线性、时变及强耦合系统, 对其有效的高性能控制策略一直是研究的热点。经典的控制算法有计算力矩方法、鲁棒自适应方法、滑模变结构方法、迭代学习方法等。其中基于逆控制思想的计算力矩法直接将输出作为系统的输入, 实现系统的解耦并使输入输出线性化。在机器人参数及扰动模型准确已知的条件下, 该方法能够很好地实现机械手轨迹跟踪。但是对于工业机械手, 由于存在摩擦力等不确定扰动, 名义模型与真实模型之间存在建模误差, 使得基于计算力矩控制策略的轨迹跟踪误差不能有效收敛。迭代学习法有当扰动变化时跟踪不再收敛于 0 的问题。滑模变结构方法存在滑模面的选择问题, 其中开关函数将引起机器人的抖振。

近年来, 基于神经网络的智能控制策略被应用于机械手自适应控制中。人工智能神经网络可以任意精度逼近非线性模型, 通过自适应学习提高了控制效果。文中针对机器人模型存在的建模误差, 利用 RBF 神经网络对未知动力学模型自适应学习, 根据 Lyapunov 稳定性理论给出了自适应学习律, 提出了一种基于 RBF 神经网络的机械手自适应控制策略。仿真结果表明,

通过对系统的自学习, 实现了无需模型的机械手自适应控制, 提高了系统对不确定扰动的鲁棒性, 同时使系统具有全局稳定性。

1 机械手动力学模型

设 n 关节机械手方程为:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) + F(\dot{q}) + \tau_d = \tau \quad (1)$$

式中: q ——关节角位移, $q \in \mathbf{R}^{n \times 1}$;

$M(q)$ —— $n \times n$ 阶正定惯性矩阵;

$C(q, \dot{q})\dot{q}$ —— $n \times 1$ 科氏力及向心力向量;

$G(q)$ —— $n \times 1$ 阶重力向量;

$F(\dot{q})$ ——摩擦力;

τ_d ——未知外部干扰;

τ ——控制输入。

定义跟踪误差为:

$$e(t) = q_d(t) - q(t)$$

式中: q_d ——关节目标角位移向量。

定义误差函数为: $r = \dot{e} + \Delta \cdot e$, 其中 $\Delta = \Delta^T > 0$, 则:

(1. School of Mechanical and Automotive Engineering, Hefei University of Technology, Hefei 230009, China; 2. School of Mechanical and Electrical Engineering, Beijing University of Chemical Technology, Beijing 100029, China)

Abstract: A new numerical method based on interval analysis is presented for direct kinematic solution of the most common 6-SPS parallel robots. After the interval equation is built, the initial solution interval of mechanism configuration can

be gained through interval analysis, which will be tested and bisected until all of the convergent intervals are obtained. Finally, the middle point of each convergent interval is used to get all the point Iteration and to solve all approximate solutions for the equation set.

Key word: parallel robot; interval analysis; kinematic analysis; position direct solution

Fig 3 Tab 2 Ref 5

“Jixie Sheji”9562

* 收稿日期: 2010-07-07; 修订日期: 2010-08-01

作者简介: 赵成秀(1972—), 女, 四川康定人, 讲师, 硕士, 主要研究方向: 机械制造工艺及设备、计算机辅助绘图与设计。