

# 基于二维搜索的 Stewart 平台工作空间分析方法

杨 宇, 黄其涛, 韩俊伟

(哈尔滨工业大学 机电工程学院, 哈尔滨 150001)

**摘 要:** 为了在不影响分析精度的前提下, 减小利用空间搜索法进行 Stewart 平台工作空间分析过程中的计算量, 提出一种利用 Newton-Raphson 方法对 Stewart 平台单自由度运动范围进行求解的数值方法. 将该方法应用在 Stewart 平台工作空间的研究中, 实现了利用二维空间搜索法对工作空间的分析, 与传统空间搜索方法相比, 减小了搜索维数和计算量. 通过算例证明, 二维空间搜索法能够快速准确地计算出 Stewart 平台在不同位姿下的工作空间, 利用二维空间搜索法可以对工作空间的其他子空间进行分析, 并且该方法还可以应用在其他形式并联机构的工作空间分析中.

**关 键 词:** 并联机构; Stewart 平台; 工作空间; 可达空间; 二维搜索; 雅克比矩阵; Newton-Raphson 法; 收敛性

**中图分类号:** TP 273 **文献标志码:** A

## Analysis method for Stewart platform workspace based on two-dimension search

YANG Yu, HUANG Qi-tao, HAN Jun-wei

(School of Mechatronics Engineering, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China)

**Abstract:** To decrease the calculation load using space search method in the Stewart platform workspace analysis procedure without reducing the analysis precision, a numerical method to calculate the Stewart platform single freedom motion range using Newton-Raphson method was proposed. The present method was used to study the Stewart platform workspace and realize the workspace analysis by two dimension search method. Compared with the traditional space search method, the two-dimension search method can reduce the search dimension and calculation load. The computation examples prove that the two-dimension search method can rapidly and accurately calculate the reachable workspace of Stewart platform in different postures. The two-dimension search method can be used to analyze other subspace of Stewart platform workspace. And this method can also be used for the workspace analysis of other parallel mechanisms.

**Key words:** parallel mechanism; Stewart platform; workspace; reachable workspace; two-dimension search; Jacobian matrix; Newton-Raphson method; convergence

并联机器人具有刚度大、承载能力强、惯量小和精度高等特点<sup>[1-2]</sup>. Stewart 平台以其上述特点被广泛应用于飞行模拟器、并联加工机床和航天器对接机构等领域<sup>[3-4]</sup>, 但并联机器人工作空间相对较小是限制其应用的主要因素之一<sup>[5]</sup>. 国内外很多学者都在并联机构工作空间方面进行了研究, 包括可达空间和姿态空间<sup>[6-7]</sup>, 希望能够通过

对并联机构工作空间的研究来改进并联机构的结构参数, 使其工作空间满足需求<sup>[8]</sup>.

工作空间求解方法主要分两类, 一类是解析法; 另一类是数值法<sup>[9]</sup>. Gosselin, Merlet 和黄田等许多学者都利用解析法对并联机构的工作空间进行了研究<sup>[10-12]</sup>, Gosselin 利用几何法将固定动平台姿态时的工作空间边界问题归结为对 12 张球

收稿日期: 2009-12-21.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(50975055); 教育部新世纪优秀人才支持计划项目(NCET-04-0325).

作者简介: 杨 宇(1980-), 男, 辽宁沈阳人, 博士生, 主要从事计算机伺服控制与仿真技术等方面的研究.

面片求交问题;数值法则是利用运动学反解和并联机构的约束条件,在三维空间中进行工作空间的边界搜索<sup>[13]</sup>. Stewart 平台的工作空间比较复杂,目前对其研究大多数采用数值法.

为了在不影响搜索精度的条件下减小空间搜索方法的计算量,本文提出一种 Stewart 平台单自由度运动范围的数值解法,该方法能够根据 Stewart 平台其他自由度的状态计算出某一自由度的运动范围,并且将该方法应用在 Stewart 平台工作空间的计算中,以此减少了空间搜索的维数.

## 1 运动学分析

### 1.1 位置反解

Stewart 平台的结构简图如图 1 所示. 图 1 中,  $O_b$ -XYZ 为静坐标系,与地面固连;  $O_p$ - $X_1Y_1Z_1$  为连体坐标系,随上平台一起运动.

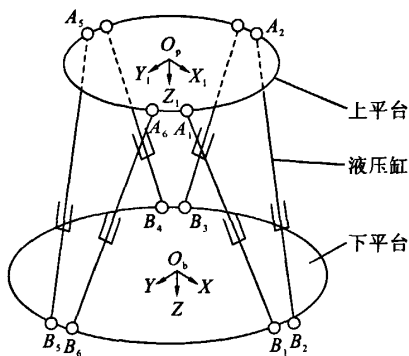


图 1 Stewart 平台结构简图

Fig. 1 Structural diagram of Stewart platform

上平台的位姿可以用广义坐标  $q = [q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6]^T$  来描述. 其中, 前 3 个元素表示连体坐标系原点在静坐标系中的位置, 后 3 个元素表示连体坐标系相对于静坐标系的欧拉角, 则连体坐标系相对于静坐标系方向的余弦阵  $R$  为

$$R = \begin{bmatrix} cq_4cq_6 & -cq_4sq_6 + sq_4sq_5cq_6 & sq_4sq_6 + cq_4sq_5cq_6 \\ cq_5sq_6 & cq_4cq_6 + sq_4sq_5sq_6 & -sq_4cq_6 + cq_4sq_5sq_6 \\ -sq_5 & sq_4cq_5 & cq_4cq_5 \end{bmatrix} \quad (1)$$

式中,  $sq_i$  为  $\sin q_i$  的缩写,  $cq_i$  为  $\cos q_i$  的缩写.

对某一个作动筒, 设其上铰点在连体坐标系中的坐标为  $a_i = [a_{xi}, q_{yi}, q_{zi}]^T$ ; 下铰点在静坐标系中的坐标为  $b_i = [b_{xi}, b_{yi}, b_{zi}]^T$ , 则 Stewart 平台的位置反解的矢量表达式为

$$L_i = Rb_i + s - a_i \quad (i = 1, 2, \dots, 6) \quad (2)$$

式中:  $s$ ——连体坐标系原点在静坐标系中的坐标,  $s = [q_1, q_2, q_3]^T$ ;

$L_i$ ——作动筒在固定坐标系里的位置矢量.

对矢量  $L_i$  取模可以得到作动筒的长度, 以此可以判断该作动筒是否满足作动筒行程的约束条件.  $L_i$  的模可表示为

$$|L_i| = \sqrt{(Ra_i + s - b_i)^T (Ra_i + s - b_i)} \quad (i = 1, 2, \dots, 6) \quad (3)$$

### 1.2 雅克比矩阵

Stewart 平台的雅克比矩阵  $J$  反映了平台的广义速度和作动筒伸缩速度之间的关系

$$\dot{l} = J\dot{q} \quad (4)$$

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial l_1}{\partial q_1} & \frac{\partial l_1}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial l_1}{\partial q_6} \\ \frac{\partial l_2}{\partial q_1} & \frac{\partial l_2}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial l_2}{\partial q_6} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial l_6}{\partial q_1} & \frac{\partial l_6}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial l_6}{\partial q_6} \end{bmatrix} \quad (5)$$

式中:  $\dot{l}$ ——作动筒伸缩速度矢量;

$\dot{q}$ ——Stewart 平台广义速度矢量.

雅克比矩阵可以被看作广义速度和作动筒伸缩速度的传动比. 在某一时刻将式 (4) 的两边同时乘以很小的时间  $\Delta t$ , 则雅克比矩阵可以看作在当前位姿下, Stewart 平台广义坐标和作动筒伸缩位移之间的线性化关系.

## 2 单自由度运动范围的计算

Stewart 平台的某一自由度运动范围的计算是在其他自由度状态不变的条件下计算该自由度的运动范围. Stewart 平台的工作空间通常受到作动筒行程、铰点的角度和干涉限制等因素的影响. 由于铰点的角度限制和干涉限制在 Stewart 平台结构设计过程中是可以避免的, 因此, 本文只考虑作动筒行程限制对 Stewart 平台工作空间的影响.

利用 Newton-Raphson 方法对单自由度运动范围进行迭代求解. 求解过程如图 2 所示. 图 2 为每一迭代步长进行的计算流程. 首先将所要计算自由度的位姿赋予 0 初值, 然后与其他 5 个自由度的位姿一起作为输入计算该自由度所能运动到的最大位姿, 在将计算得到的值与其他 5 个自由度的位姿一起作为输入进行下一步迭代计算, 直到满足至少有一个作动筒达到极限位置, 其他作动筒在其运动范围内为止.

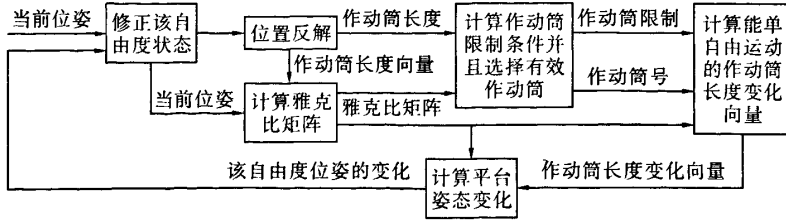


图2 单自由度运动范围计算流程图

Fig. 2 Calculation procedure for single freedom motion range

## 2.1 计算作动筒限制条件

由于作动筒伸出和缩回都能够达到运动限制,所以选择作动筒的运动限制是首先要解决的问题。

雅克比矩阵中的元素  $\partial l_i / \partial q_j$  可以被看作当前时刻第  $i$  个动筒和平台位姿  $q_j$  之间的线性关系,通过判断  $\partial l_i / \partial q_j$  的符号可以选择作动筒的运动限制。如果  $\partial l_i / \partial q_j$  是负数,则当  $q_j$  正向移动到极限值时,作动筒  $l_i$  将缩回达到运动限制;当  $q_j$  负向移动到极限值时,作动筒  $l_i$  将伸出达到运动限制。如果  $\partial l_i / \partial q_j$  是正数,则恰恰相反。所以当计算  $q_j$  的正向极限值时,作动筒所能够运动的长度  $\Delta L_{iLIMIT}$  可表示为

$$\begin{cases} \Delta L_{iLIMIT} = l_{MAX} - l_i & (\partial l_i / \partial q_j \geq 0) \\ \Delta L_{iLIMIT} = l_{MIN} - l_i & (\partial l_i / \partial q_j < 0) \end{cases} \quad (6)$$

式中,  $l_{MAX}$ 、 $l_{MIN}$  为作动筒伸出和缩回的极限值。当计算  $q_j$  的负向极限值时,  $\Delta L_{iLIMIT}$  可表示为

$$\begin{cases} \Delta L_{iLIMIT} = l_{MIN} - l_i & (\partial l_i / \partial q_j \geq 0) \\ \Delta L_{iLIMIT} = l_{MAX} - l_i & (\partial l_i / \partial q_j < 0) \end{cases} \quad (7)$$

## 2.2 计算作动筒长度变化向量

为了使运动平台能够实现单个自由度的运动,每个液压缸的伸缩量应该符合 Stewart 平台的运动学关系。从式(5)中可以看出,雅克比矩阵的某一行表示的是平台这一位姿与 6 个作动筒之间的线性关系,因此,只要保证 6 个作动筒的伸缩量与雅克比矩阵的对应列的元素成比例,就能够保证 Stewart 平台只在这一自由度上运动,即

$$\frac{\Delta l_i}{\partial l_i / \partial q_j} = c \quad (i = 1, 2, \dots, 6) \quad (8)$$

## 2.3 选择有效作动筒

式(8)中,常数  $c$  值的选取对 Newton-Raphson 方法的计算效率有很大的影响。为了能够减小迭代次数提高计算效率,在计算  $c$  值时通常要选取作动筒所能够运动的长度  $\Delta L_{iLIMIT}$  比较小的作动筒,并且该作动筒的伸缩变化对平台所计算的自由度影响比较大,即对雅克比矩阵的元素  $\partial l_i / \partial q_j$  影响比较

大。综合以上因素,本文选取  $\Delta L_{iLIMIT}$  与  $\partial l_i / \partial q_j$  比值的绝对值较小的作动筒,并且  $c$  值也随之确定。

## 2.4 计算平台姿态变化

计算平台姿态的变化可以利用 6 个作动筒的伸缩量和雅克比矩阵来实现。将式(4)两边同时乘以很小的时间  $\Delta t$ ,得到在当前时刻作动筒的伸缩量 ( $\Delta l$ ) 和平台位姿变化 ( $\Delta q$ ) 之间的关系,即

$$\Delta l = \dot{l} \Delta t = J \dot{q} \Delta t = J \Delta q \quad (9)$$

通过解线性方程式(9)可以得到  $\Delta q$ 。利用  $\Delta q$  再对当前的位姿进行修正,新得到的位姿作为下一个迭代步长的当前位姿,进行下一次迭代。

利用上述方法分别计算该自由度在正负两个方向上的运动极限值,这两个极限值就组成了 Stewart 平台在该自由度上的运动范围。

## 2.5 算法的收敛性

为了保证这种单自由度运动范围计算的收敛性,需要满足以下 4 个条件:① 有解的存在;② 平台姿态和作动筒伸长量所满足的方程要单调;③ 方程凹向不变性;④ 每次迭代结果都在运动范围可能域内。

在各作动筒行程范围内,只要 Stewart 平台不处于奇异位型就能够保证一组作动筒长度对应一个平台姿态,因此能够保证解的存在。此时雅克比矩阵的行列式不等于 0,保证了动筒长度与平台姿态关系的单调性。在 Stewart 平台某一个自由度单调运动过程中,各个作动筒伸长量的凹向都保持不变,并且通过对每一步迭代中作动筒伸长量的计算,保证了线性方程组解出的姿态变化量只在该自由度内有变化。

综上所述,在 Stewart 平台有限的运动空间内,只要 Stewart 平台不存在奇异位型,利用 Newton-Raphson 方法求解单自由度运动范围的迭代过程就能够收敛。

# 3 Stewart 平台可达空间分析

## 3.1 工作空间的二维空间搜索方法

利用单自由度运动范围计算方法实现 Stewart

平台可达空间的二维空间搜索方法描述如下:

1) 确定 Stewart 平台可能的可达空间. 为了保证 Stewart 平台的可达空间在搜索的区域内, 首先要根据 Stewart 平台的结构参数估计一个  $X$ - $Y$  平面的空间范围, 这个范围要比 Stewart 平台的可达空间在  $X$ - $Y$  平面的投影大, 即确定  $X_{\min}$ 、 $X_{\max}$ 、 $Y_{\min}$  和  $Y_{\max}$  的值.

2) 确定搜索步长. 选择沿  $X$  轴和  $Y$  轴的搜索步长  $\Delta X$  和  $\Delta Y$ , 将  $X$ - $Y$  平面划分成搜索网格.

3) 计算可达空间的边界. 利用单自由度运动范围计算方法计算  $X$ - $Y$  平面中的每一个搜索网格  $Z$  向的最大位置点  $Z_{ij\max}$  和最小位置点  $Z_{ij\min}$ . 对于在一定的迭代次数内没有计算出结果的  $X$ - $Y$  平面中的点则将其视为 Stewart 平台可达空间以外的点, 这些  $Z$  方向上的最大位置点和最小位置点的集合就是 Stewart 平台可达空间的边界.

4) 计算可达空间的体积. 利用  $X$ - $Y$  平面中的每一个搜索网格对应的  $Z$  方向上最大位置点和最小位置点, 可以计算出可达空间的体积

$$V = \sum_{X_{\min}}^{X_{\max}} \sum_{Y_{\min}}^{Y_{\max}} (|Z_{ij\max} - Z_{ij\min}| \Delta X \Delta Y) \quad (10)$$

对于计算姿态空间, 二维搜索方法与可达空间的相似. 给定平台位置条件下, 在俯仰角和横滚角组成的二维平面内以搜索步长  $\Delta P$  和  $\Delta Q$  划分网格, 在利用单自由度运动范围的计算方法计算在每一个网格点上计算偏航角的最大运动范围. 如果能够计算出来, 则这个运动范围就是该网格点上的工作空间, 这些网格点所组成的工作空间就是给定位置下的姿态工作空间.

3.2 算例

以结构参数如表 1 所示的 Stewart 平台为例, 应用二维空间搜索方法对其工作空间进行分析.

表 1 Stewart 平台结构参数表

Tab. 1 Configuration parameters of Stewart platform

名称	数值/mm
上铰支座分度圆半径	560
上铰点短边间距	260
下铰支座分度圆半径	1 200
下铰点短边间距	450
作动筒中位长度	1 830
作动筒工作行程	700

利用二维空间搜索方法对 Stewart 平台在俯仰角  $\theta$  为  $10^\circ$ , 横滚角  $\phi$  和偏航角  $\psi$  均为  $0^\circ$  状态下的工作空间的计算结果如图 3 所示; 利用二维空间搜索方法对 Stewart 平台在 0.2 m 升降状态下工作空间的计算结果如图 4 所示.

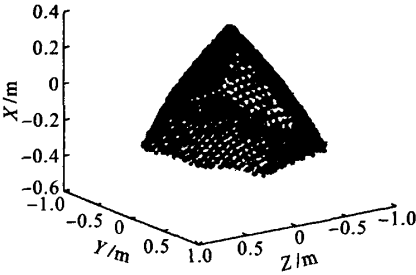


图 3  $\phi=0^\circ, \theta=10^\circ, \psi=0^\circ$  状态下 Stewart 平台可达空间

Fig. 3 Reachable workspace of Stewart platform with  $\phi=0^\circ, \theta=10^\circ, \psi=0^\circ$

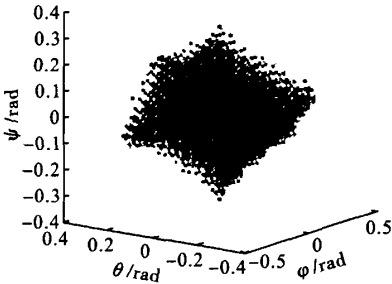


图 4  $X=0\text{ m}, Y=0\text{ m}, Z=0.2\text{ m}$  状态下 Stewart 平台姿态空间

Fig. 4 Orientation workspace of Stewart platform with  $X=0\text{ m}, Y=0\text{ m}, Z=0.2\text{ m}$

以上工作空间分析结果表明, 二维空间搜索方法能够正确地计算出 Stewart 平台在任意姿态下的可达空间和姿态空间, 并且利用该方法可以分析 Stewart 平台位姿对工作空间的影响, 同时也可以计算不同姿态下可达空间的体积, 用以衡量工作空间的大小.

3.3 二维空间搜索法的精度和效率

三维搜索方法的精度取决于网格划分的分辨率, 网格越密精度越高, 计算量也越大. 而二维搜索方法只在  $XY$  平面内进行二维的网格划分, 在每一个二维网格内利用数值方法对  $Z$  向的边界进行计算. 迭代次数与计算精度有关, 对于 5 mm 的计算精度通常只需 3~4 次迭代, 而三维搜索方法在  $Z$  向  $\pm 1\text{ m}$  的搜索范围要达到这个精度需要 400 次计算. 虽然每一次迭代中的计算量比三维搜索方法每一个网格的计算量要高, 但综合考虑二维空间搜索方法的计算效率还是要比三维空间搜索方法高. 在 CPU 主频为 2.8 GHz, 内存为 1 GB 的计算机上对上述 2 种方法分析工作空间所需要的时间进行测试, 每一种姿态测试 5 次取平均值, 结果如表 2 所示. 可以看出, 二维空间搜索方法的计算效率要高得多, 并且两种方法在  $X$  和  $Y$  向的精度相同, 均

为20 mm,Z向的精度二维空间搜索方法达到5 mm,而三维搜索方法的精度只有20 mm.

表2 两种方法分析工作空间所需的时间

Tab.2 Elapsed time for workspace analysis using two methods

搜索方法	计算时间/标准差		
	零姿态	10°俯仰	10°横滚
二维	8.940 s/0.013	11.13 s/0.022	11.35 s/0.014
三维	465.9 s/49.2	437.8 s/11.2	539.6 s/22.3

## 4 结 论

利用Newton-Raphson方法对Stewart平台的单自由度运动范围进行了研究,这种计算单自由度运动范围的方法实现了利用二维空间搜索方法对Stewart平台的工作空间进行分析.分析结果表明,二维空间搜索法能够准确快速地计算出Stewart平台在不同状态下的工作空间,而且计算效率远高于三维空间搜索方法.这种二维空间搜索法还可以应用于其他形势的并联机构,并且由于单自由度运动范围计算方法可以计算任意自由度的运动范围,因此,这种方法也可以用于并联机构其他子工作空间的分析和研究.

### 参考文献(References):

- [1] Yiu Y K. Geometry, dynamics and control of parallel manipulators [D]. Hong Kong: The Hong Kong University of Science and Technology, 2002.
- [2] Dasgupta B, Mruthyunjaya T S. The Stewart platform manipulator: a review [J]. Mechanism and Machine Theory, 2000, 35(1): 15-40.
- [3] Lansdaal M, Lewis L, Bezdek W J. The history of commercial simulators and the Boeing 777 systems integration lab [C]//AIAA Modeling and Simulation Technologies Conference and Exhibit. Rhode Island, USA, 2004: 594-607.
- [4] 袁立鹏, 赵克定, 许宏光. Stewart平台铰点工作空间的研究[J]. 航空学报, 2006, 27(5): 979-984.  
(YUAN Li-peng, ZHAO Ke-ding, XU Hong-guang. Study on vertex space of Stewart platform [J]. Acta

Aeronautica ET Astronautica Sinica, 2006, 27(5): 979-984.)

- [5] 刘玉旺, 余晓流, 储刘火, 等. 并联机构工作空间及参数优化研究[J]. 机械科学与技术, 2006, 25(2): 184-188.  
(LIU Yu-wang, YU Xiao-liu, CHU Liu-huo, et al. Study on the workspace and parameter optimum of parallel mechanisms [J]. Mechanical Science and Technology, 2006, 25(2): 184-188.)
- [6] Bonev I A, Ryu J. A new approach to orientation workspace analysis of 6-DOF parallel manipulators [J]. Mechanism and Machine Theory, 2001, 36(1): 15-28.
- [7] Jiang Q, Gosselin C M. Determination of the maximal singularity-free orientation workspace for the Gough-Stewart platform [J]. Mechanism and Machine Theory, 2009, 44(6): 1281-1293.
- [8] 曹永刚, 张玉茹, 马运忠. 6-RSS型并联机构的工作空间分析与参数优化[J]. 机械工程学报, 2008, 44(1): 19-24.  
(CAO Yong-gang, ZHANG Yu-ru, MA Yun-zhong. Workspace analysis and parameter optimization of 6-RSS parallel mechanism [J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2008, 44(1): 19-24.)
- [9] 高洪, 赵韩. 6-3-3 并联机构工作空间分析与仿真[J]. 系统仿真学报, 2007, 19(24): 5806-5808.  
(GAO Hong, ZHAO Han. Workspace analysis and simulation of 6-3-3 parallel mechanism [J]. Journal of System Simulation, 2007, 19(24): 5806-5808.)
- [10] Gosselin C. Determination of the workspace of 6-dof parallel manipulators [J]. Transactions of the ASME, Journal of Mechanical Design, 1990, 112(3): 331-336.
- [11] Merlet J P. Determination of 6D workspaces of Gough-type parallel manipulator and comparison between different geometries [J]. The International Journal of Robotics Research, 1999, 18(9): 902-916.
- [12] 姜兵, 黄田. 6-PSS 并联机器人操作机平动工作空间解析[J]. 机器人, 2000, 22(2): 136-142.  
(JIANG Bing, HUANG Tian. Closed form solution to translational workspace of 6-PSS parallel manipulators [J]. Robot, 2000, 22(2): 136-142.)
- [13] 于晖, 孙立宁, 刘品宽, 等. 新型6-HTRT 并联机器人工作空间和参数研[J]. 机器人, 2002, 24(4): 293-298.  
(YU Hui, SUN Li-ning, LIU Pin-kuan, et al. Study on the workspace and parameter of novel 6-HTRT parallel robot [J]. Robot, 2002, 24(4): 293-298.)  
(责任编辑: 景 勇 英文审校: 王丽梅)