Curs 3.

Topologie

Def. Fie $X \neq \emptyset$ și $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$

Spunem că $\mathcal{T}$ este topologie pe X dacă:

1) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$
2) $\forall D_1, D_2 \in \mathcal{T}$, avem $D_1 \cap D_2 \in \mathcal{T}$
3) $\forall (D_i)_{i \in I} \subset \mathcal{T}$ avem $\bigcup_{i \in I} D_i \in \mathcal{T}$

$\{D_i \mid i \in I\}$

Def: Fie $X \neq \emptyset$ și $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ o topologie pe ~~perechea~~ X. Perechea $(X, \mathcal{T})$ s.n. spațiu topologic

Exemple: 1) Fie $X \neq \emptyset$ și $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$

Perechea $(X, \mathcal{T})$ este sp. top.

2) Fie $X \neq \emptyset$ și $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$. Perechea $(X, \mathcal{T})$ s.n. top.

3) Fie $X = \mathbb{R}$ și $\mathcal{T} = \{(-\infty, a) \mid a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$

Perechea $(X, \mathcal{T})$ este sp. top.

Justificare pt. 3)

Arătăm că sunt îndeplinite prop. 1), 2), 3) din definiția unei topologii.

1) $\emptyset, \mathbb{R} \in \mathcal{T}$ (evident)

2) Fie $D_1, D_2 \in \mathcal{T}$

Dacă $D_1 = \emptyset$ sau $D_2 = \emptyset$, atunci $D_1 \cap D_2 = \emptyset \in \mathcal{T}$

Dacă $D_1 = \mathbb{R}$ sau $D_2 = \mathbb{R}$, atunci $D_1 \cap D_2 = D_2 \in \mathcal{T}$ respectiv $D_1 \cap D_2 = D_1 \in \mathcal{T}$

Fie $D_1 = (-\infty, a_1) \in \mathcal{T}$ și $D_2 = (-\infty, a_2) \in \mathcal{T}$

$D_1 \cap D_2 = (-\infty, \min\{a_1, a_2\}) \in \mathcal{T}$

3) Fie $(D_i)_{i \in I} \subset \mathcal{T}$

Dacă $\bigcup_{i \in I} D_i = \emptyset$, atunci $\bigcup_{i \in I} D_i \in \mathcal{T}$

Dacă $\exists\, i_0 \in I$ a.î. $D_{i_0} = \mathbb{R}$, atunci $\bigcup_{i \in I} D_i = \mathbb{R} \in \mathcal{T}$

P.P. fără a restrânge generalitatea că $D_i = (-\infty, a_i)$ $\forall i \in I$

$\bigcup_{i \in I} D_i = (-\infty, \sup_{i \in I} a_i) \in \mathcal{T}$

$\sup\{a_i \mid i \in I\}$

$\sup (0,3) = 3$

$\sup [0,3] = 3$ $= \max[0,3]$

Deci $\mathcal{T}$ este topologie i.e $(X, \mathcal{T})$ este sp. top $\square$

<u>Def.</u> 1) O mulțime $D \subset X$ s.n. mulțime deschisă dacă $D \in \mathcal{T}$

2) O mulțime $F \subset X$ s.n. mulțime închisă dacă $X \setminus F = C_F \in \mathcal{T}$ (i.e. complementara lui F este mulțime deschisă)

3) Fie $x \in X$. O mulțime $V \subseteq X$ s.n. vecinătate a lui x dacă $\exists\, D \in \mathcal{T}$ a.î.

$x \in D \subset V$.

Notație Fie $x \in X$. Notăm $\mathcal{V}_x = \{V \subset X \mid V$ este vecinătate a lui $x\}$

OBS Orice mulțime deschisă este vecinătate pentru toate punctele sale.

Def. Fie $(x_n)_n \subset X$ și $x \in X$. Spunem că x este limita șirului $(x_n)_n$ în raport cu topologia τ și scriem $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ sau $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{\tau} x$ dacă $\cancel{\exists}$ $\forall V \in \mathcal{V}_x, \exists n_V \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq n_V$, avem $x_n \in V$

OBS În general, într-un spațiu topologic oarecare, limita unui șir nu este unică.

OBS Sintagma „în raport cu topologia τ" poate fi înlocuită cu sintagma „în spațiul topologic (X, τ)"

Def. O mulțime $K \subset X$ s.n. mulțime compactă dacă din orice acoperire cu mulțimi ~~distincte~~ deschise a sa se poate extrage o subacoperire ~~a sa~~ finită (i.e. $\forall (D_i)_{i\in I} \subset \tau$ a.î. $K \subset \bigcup\limits_{i\in I} D_i$, $\exists J \subset I$, J finită cu prop. că avem $K \subset \bigcup\limits_{j\in J} D_j$

Aderența topologică a unei mulțimi

Def Fie (X, τ) un sp. topologic, $A \subset X$ și $x_0 \in X$

Spunem că x_0 este:

1) punct interior al lui A dacă $A \in \mathcal{V}_{x_0}$

2) pct. aderent (sau de aderență) al lui A dacă $\forall V \in \mathcal{V}_{x_0}$, avem $V \cap A \neq \emptyset$

3) pct. de acumulare al lui A dacă $\forall V \in \mathcal{V}_{x_0}$, avem $V \cap (A \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset$

4) pct. frontieră al lui A dacă x_0 este pct. aderent al lui A și nu este pct. interior al lui A.

5) pct. izolat al lui A dacă x_0 este pct. aderent al lui A și nu este pct. de acumulare al lui A.

__Notații__

Fie (X, τ) un sp. top., $A \subset X$ și $x_0 \in X$

1) $\mathring{A} = \{x \in X \mid x$ pct. interior al lui $A\}$ (interiorul lui A)

2) $\bar{A} = \{x \in X \mid x$ pct. aderent al lui $A\}$ (închiderea lui A sau aderența lui A)

3) $A' = \{x \in X \mid x$ pct. de acumulare al lui $A\}$ (mulțimea derivată a lui A)

4) $Fr(A) = \partial A = \{x \in X \mid x$ pct. frontieră al lui $A\}$ (frontiera lui A)

5) $Iz(A) = {}'A = \{x \in X \mid x$ pct. izolat al lui $A\}$

(mulțimea pct. izolate ale lui A

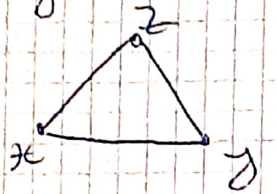
__Def.__ Fie $X \neq \emptyset$. O funcție $d: X \times X \to \mathbb{R}$ s.n. metrică (sau distanță) pe X dacă:

1) $d(x, y) \geq 0$ $\forall x, y \in X$

2) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$, $\forall x, y \in X$

3) $d(x,y)=d(y,x),\ \forall x,y\in X$

4) $d(x,z)\le d(x,y)+d(y,z)\ \forall x,y,z\in X$
(ineg. triunghiului)



Def. ~~Spațiu~~ Fie $X\neq\emptyset$ și ~~$d: X\to X$~~
$d: X\times X\to\mathbb{R}$ o metrică pe X. Perechea (X,d)
s.n. sp. metric

Exemple

1) Fie $X=\mathbb{R}$ și $d: X\times X\to\mathbb{R}$
$d(x,y)=|x-y|$

2) Fie $X=\mathbb{R}^n$ și $d_1: X\times X\to\mathbb{R}$, $d_1(x,y)$
$=\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|=|x_1-y_1|+\dots+|x_n-y_n|$ $(x_1,\dots,x_n)(y_1,\dots,y_n)$

3) Fie $X=\mathbb{R}^n$ și $d_2: X\times X\to\mathbb{R}$, $d_2(x,y)$
$=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}=((x_1-y_1)^2+\dots+(x_n-y_n)^2)^{\frac{1}{2}}$

4) Fie $X=\mathbb{R}^n$ și $d_\infty: X\times X\to\mathbb{R}$, $d_\infty(x,y)$
$=(x_1,\dots,x_\infty)(y_1,\dots,y_\infty)$
$=\max\{|x_i-y_i| \mid i=\overline{1,n}\}$

5) Fie $X\neq\emptyset$ și $d: X\times X\to\mathbb{R}$

$$d(x,y)=\begin{cases}1; & x\neq y\\ 0; & x=y\end{cases}$$

Def. Fie (X, d) un sp. metric, $(x_n)_n \subset X$ și $x \in X$. Spunem că șirul $(x_n)_n$ are limita x și în raport cu metrica d și scriem $\lim_{n\to\infty} x_n \overset{d}{=} x$ (sau $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} x$) dacă $d(x_n, x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ (i.e. $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq n_\varepsilon$, avem $d(x_n, y) < \varepsilon$)

OBS. 1) Într-un spațiu metric, limita unui șir este unică.
2) Sintagma „în raport cu metrica d" poate fi înlocuită cu sintagma „în spațiul metric (X, d)".

Def. Fie (X, d) un sp. metric, $x \in X$ și ~~$x > 0$~~ $r > 0$.

1) $B(x, r) = \{y \in X \mid d(x, y) < r\} \subset X$
(bila deschisă de centru x și rază r)

2) $B[x, r] = \overline{B}(x, r) = \{y \in X \mid d(x, y) \leq r\} \subset X$ (bila închisă de centru x și rază r)

Teoremă. Fie (X, d) un sp. metric și
$\mathcal{T}_d = \{\emptyset\} \cup \{A \subset X \mid \forall x \in A, \exists r > 0$ a.î. $B(x, r) \subset A\}$. Atunci $(X, \mathcal{T}_d)$ e sp. top.

Dem.

Arătăm că sunt îndeplinite cele 3 condiții din definiția unei topologii.

1) $\emptyset \in \mathcal{T}_d$ (evident)

$\underline{X \in \mathcal{T}_d}$ Fie $x \in X$

Avem $\forall r > 0, B(x, r) \subset X$, deci $\exists r > 0$

a. î. $B(x,r) \subset X$, i.e $X \in \mathcal{T}_d$

2) Fie $D_1, D_2 \in \mathcal{T}_d$

Dacă $D_1 = \emptyset$ sau $D_2 = \emptyset$, atunci $D_1 \cap D_2 = \emptyset \in \mathcal{T}_d$.

P.p. că $D_1 \neq \emptyset$ și $D_2 \neq \emptyset$

Dacă $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ atunci $D_1 \cap D_2 \in \mathcal{T}_d$

P.p. că $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$

Fie $x \in D_1 \cap D_2 \Rightarrow x \in D_1$ și $x \in D_2$

$x \in D_1 \in \mathcal{T}_d \Rightarrow \exists\, r_1 > 0$ a. î. $B(x, r_1) \subset D_1$

$x \in D_2 \in \mathcal{T}_d \Rightarrow \exists\, r_2 > 0$ a. î. $B(x; r_2) \subset D_2$

Alegem $r = \min\{r_1, r_2\} > 0$

Avem $B(x, r) \subset B(x, r_1) \cap B(x, r_2) \subset D_1 \cap D_2$

Deci $D_1 \cap D_2 \in \mathcal{T}_d$

3) Fie $(D_i)_{i \in I} \subset \mathcal{T}_d$

Dacă $\bigcup_{i \in I} D_i \neq \emptyset$, atunci $\bigcup_{i \in I} D_i \in \mathcal{T}_d$

P.p. că $\bigcup_{i \in I} D_i \neq \emptyset$

Fie $x \in \bigcup_{i \in I} D_i \Rightarrow \exists\, i_0 \in I$ a. î. $x \in D_{i_0}$

$x \in D_{i_0} \in \mathcal{T}_d \Rightarrow \exists\, r_0 > 0$ a. î. $B(x, r_0) \subset D_{i_0} \subset \bigcup_{i \in I} D_i$

Deci $\bigcup_{i \in I} D_i \in \mathcal{T}_d$. Așadar, $\mathcal{T}_d$ e topologie pe X

Def. Topologia τ_d din def. precedentă se numește topologie indusă de metrica d.

OBS. Dându-se un spațiu metric (X, d) putem construi spațiul topologic (X, τ_d)

Ca atare, are sens să vorbim despre mulțimi deschise, vecinătăți etc. într-un spațiu metric (referindu-ne la topologia indusă de acea metrică)

20.10.2022