indusă de seria notării)

Seminar 3 20.10.2022

1. Studiați converg. (natura) seriilor de mai jos:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+3^n}$

Sol: $x_n = \frac{1}{2^n+3^n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

$\frac{1}{2^n+3^n} < \frac{1}{2^n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Fie $y_n = \frac{1}{2^n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

$x_n < y_n \; \forall n \in \mathbb{N}$

$\sum_{n=1}^{\infty} x_n < \sum_{n=1}^{\infty} y_n$

$\sum_{n=1}^{\infty} y_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ conv. (serie geo cu $q = \frac{1}{2}$

Conf. crit. de comp. cu inegalități avem că $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converg.

b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$

c) $\sum\limits_{n=1} \dfrac{7\cdot 13\cdot 19\cdot \ldots\cdot (6n+1)}{8\cdot 13\cdot 18\cdot \ldots\cdot (5n+3)}\, x^n,\ x>0$

Considerăm $a_n = \dfrac{7\cdot 13\cdot \ldots\cdot (6n+1)}{8\cdot 13\cdot 18\cdot \ldots\cdot (5n+3)}\cdot x^n$

$\forall\, n \in \mathbb{N}^*$

Aplicăm criteriul raportului

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{7\cdot 13\cdot 19\cdot \ldots\cdot (6n+7)}{8\cdot 13\cdot 18\cdot \ldots\cdot (5n+8)}\cdot \dfrac{x^{n+1}}{x^n}$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{6n+7}{5n+8}\cdot x = \dfrac{6}{5}\cdot x$

i) Dacă $\dfrac{6}{5}x < 1 \Rightarrow x < \dfrac{5}{6}$
atunci seria este convergentă

ii) Dacă $\dfrac{6}{5}x > 1$ (i.e. $x > \dfrac{5}{6}$)
Atunci seria este divergentă

iii) Dacă $x = \dfrac{5}{6}$ criteriul nu decide

Fie $x = \dfrac{5}{6} \Rightarrow a_n = \dfrac{7\cdot 13\cdot 19\cdot \ldots\cdot (6n+7)}{8\cdot 13\cdot 18\cdot \ldots\cdot (5n+8)}\left(\dfrac{5}{6}\right)^n$

Aplicăm criteriul R.D.

$\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{5n+8}{6n+7}\cdot\dfrac{6}{5} - 1\right)$

$= \lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{30n+48}{30n+35} - 1\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{13n}{30n+35} = \dfrac{13}{30} < 1$

$\Rightarrow$ seria este divergentă

d) $\sum\limits_{n=1} d(n)\, x^n$, unde $x>0$ și $d(n)$ reprez. nr. de divizori ai lui n.

$\sqrt[n]{x^n} \le \sqrt[n]{d(n)\, x^n} \le \sqrt[n]{n}\, x^n$

$x \leftarrow \sum d(n)$

Sol:

$x_n = d(n)\, x^n \ \forall n \in \mathbb{N}^*$

$1 \le d(n) \le n$

$x^n \le d(n)\, x^n \le n\, x^n \ \forall n \in \mathbb{N}^*$

$\Rightarrow \sqrt[n]{x^n} \le \sqrt[n]{d(n)\, x^n} \le \sqrt[n]{n\, x^n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

$\Rightarrow x \le \sqrt[n]{x_n} \le x \cdot \sqrt[n]{n}$

$n \to \infty$; x ; $n \to \infty$

Conform criteriului cleștelui $\sqrt[n]{x_n} \to x$

Conform crit. radicalului

I $x < 1$ atunci $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converg.

II $x > 1$ atunci seria este divergentă

III $x = 1$ crit. nu decide

Fie $x = 1$

$x_n = \sigma(n), \forall n \in \mathbb{N}^*$

$\sigma(n) \ge 1, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \lim_{n \to \infty} x_n \ne 0$

$\Rightarrow$ seria este div.

crit. suficient de div.

Obs: Fie $\sum_n x_n$ și $\sum_n y_n$ două serii de nr. reale

1) Dacă $\sum_n x_n$ și $\sum_n y_n$ conv. at. $\sum_n (x_n \pm y_n)$ e conv.

2) Dacă $\sum x_n$ e conv și $\sum y_n$ e div. (sau invers) atunci $\sum_n (x_n \pm y_n)$ e div.

3) Dacă ambele sunt div., atunci $\sum_n (x_n \pm y_n)$ este sau conv sau div.

2. Studiați natura seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n + n}{3^n + n^3}, a > 0$

$x_n = \frac{a^n + n}{3^n + n^3} = \frac{a^n}{3^n + n^3} + \frac{n}{3^n + n^3}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Fie $y_n = \frac{a^n}{3^n + n^3}$, $z_n = \frac{n}{3^n + n^3}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Studiem converg. seriei $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$

$z_n < \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

$\sum_n \frac{1}{n^2}$ = conv. (serie armonică generalizată cu $\alpha = 2$)

Conf. crit. de comp. cu inegalități avem:

$\sum_{n=1} z_n$ - conv

Pt. a studia converg. seriei $\sum x_n$ este suficient să stud. conv. seriei $\sum_n y_n$.

Fie $t_n = \frac{a^n}{3^n} = \left(\frac{a}{3}\right)^n, \forall n \in \mathbb{N}^*, a > 0$

$\lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{t_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{a^n}{3^n + n^3}}{\frac{a^n}{3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{3^n + n^3}$

$= 1 \in (0, +\infty)$, deoarece $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{3^n} = 0$ (din crit. rap. pt. șiruri cu termeni strict pozitivi)

Conform crit. de comp. cu limită avem că $\sum_n y_n \sim \sum_n t_n$

$$\sum_{n=1}^{\infty} t_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{3}\right)^n \begin{cases} \text{conv. dc. } \frac{a}{3} \in (-1,1) \\ \text{div, dacă } \frac{a}{3} \in \mathbb{R} \setminus (-1,1) \end{cases}$$

Dar $a > 0$

Deci, $$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \sim \sum_{n=1}^{\infty} y_n \sim \sum_{n=1}^{\infty} t_n \begin{cases} \text{conv. dacă } a \in (0,3) \\ \text{div, dacă } a \in [3,\infty) \end{cases}$$

<u>Curs 4</u> <u>25.10.2022</u>