04.10.2022

Ileana Dumitrescu - Algebră
Bazele algebrei - Năstăsescu
Băetică, Boboc, Dăscălescu, Mircea - Bibl. de alg.

Mulțimi și funcții

Mulțime = colecție de elemente

$\{1, 2, 3\} = \{x \in \mathbb{R} \mid (x-1)(x-2)(x-3)=0\}$

$\underbrace{\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}}_{\text{infinite numărabile}} \subset \underbrace{\mathbb{R} \subset \mathbb{C}}_{\text{infinite nenumărabile}}$

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$

$n \to n+1$

Submulțime A

$X \subseteq A$

$\forall x \in X \Rightarrow x \in A$

Exemplu $A = \{1, 2, 3\}$

$X = \emptyset \subseteq A$

$X = \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \subseteq A$

$X \subset A \Leftrightarrow X \subseteq A$ și $X \neq A$

(incluziune strictă)

Def. $\mathcal{P}(A)$ = mulțimea submulțimilor lui A.
$\hookrightarrow$ părțile mulțimii lui A

$A = \{1, 2, 3\}$

$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$

Def $|A|$ = cardinalul mulțimii A = nr. de elemente.

$\Rightarrow |\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$ pt. $|A| < \infty$

A este o mult. finită

Def $A = B$ două mult. sunt egale dacă au aceleași elemente

$A \subseteq B$ și $B \subseteq A$ "$A = B$"

$\forall x \in A \Rightarrow x \in B$ "$x \in A \Leftrightarrow x \in B$"

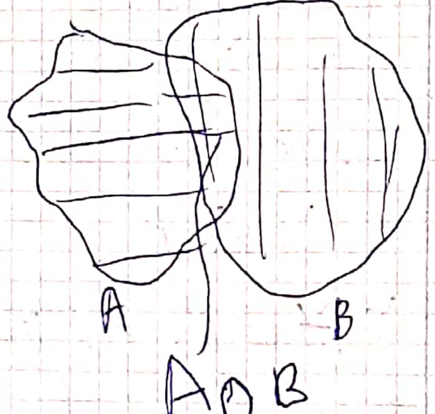
$\Leftarrow$

Operații

"$\cap$" intersecție — toate elt. comune

$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \underset{\text{și}}{\wedge} x \in B$

Obs. În orice mulțime ele. sunt menționate o singură dată!



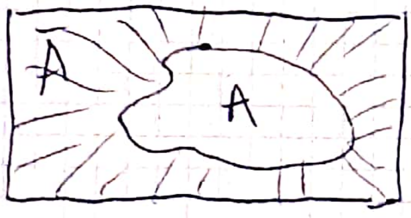
"$\cup$" reuniunea = elt. din ambele mulțimi (menționate o singură dată)

$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \underset{\text{sau}}{\vee} x \in B$

Diferența $A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$

Complementara $A \subset U$ = univers

$C_U A = C_A = \bar{A} = \{x \in U \mid x \notin A\} = U \setminus A$



Prop: (De Morgan) Fie A și B mult.

Atunci ① $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

② $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Dem. ① $x \in \overline{A \cup B} \Leftrightarrow x \notin A \cup B \Rightarrow x \notin A \wedge x \notin B$

$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$

$\Leftrightarrow x \in \overline{A} \cap \overline{B}$

Teoremă (proprietăți de $\cup, \cap$)

Fie A, B, C mulțimi. Atunci

① $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$, $A \cap B \subseteq B \subseteq A \cup B$

② $A \cap B = B \cap A$

$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \Leftrightarrow x \in B \wedge x \in A$

$\Leftrightarrow x \in B \wedge A$

③ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$

④ $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$ } Asoc.

⑤ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

⑥ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Dem. ⑥

$x \in A \cup (B \cap C) \Leftrightarrow x \in A \vee (x \in B \cap C)$

$\Leftrightarrow x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C) \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge$
$(x \in A \vee x \in C) \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \wedge (A \cup C)$

$\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$

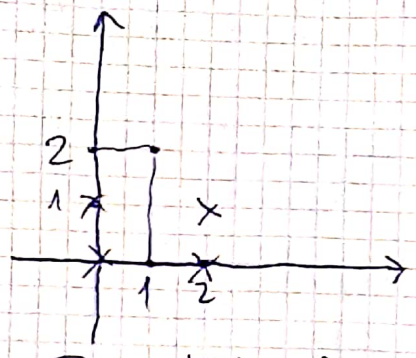
Produsul cartezian a două mulțimi

$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ și } b \in B\} \neq B \times A$

Exemplu: $A = \{0, 1\}$; $B = \{0, 2\}$

$A \times B = \{(0,0), (0,2), (1,0), (1,2)\}$

$B \times A = \{(0,0), (0,1), (2,0), (2,1)\}$

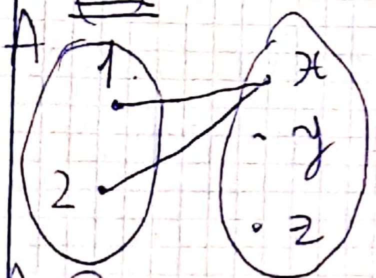


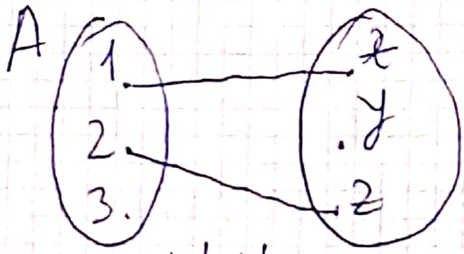
$C = [0,1]$, $D = [0,2]$

$C \times D = [0,1] \times [0,2] \supset A \times B$

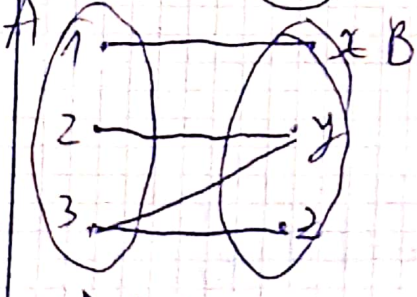
Funcții O funcție este formată din 2 mulțimi A, B (domeniului respectiv codomeniului) și o anumită relație $A \xrightarrow{f} B$ $(f: A \to B)$

$\underline{(\forall)}\ x \in A \xrightarrow{f}$ un **unic** $f(x) \in B$





NU



NU

Def. Graficul unei funcții $f: A \to B$, $G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in A\}$

$G_f \subseteq A \times B$

Def. $f: A \to B$ s.n. **injectivă**

$\forall x, y \in A \quad x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$

$(P \to Q \Leftrightarrow \overline{Q} \to \overline{P})$ $\quad f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

Def. $f: A \to B$ e surjectivă

$(\forall)\, y \in B\ \exists\, x \in A$ a.î. $f(x) = y$

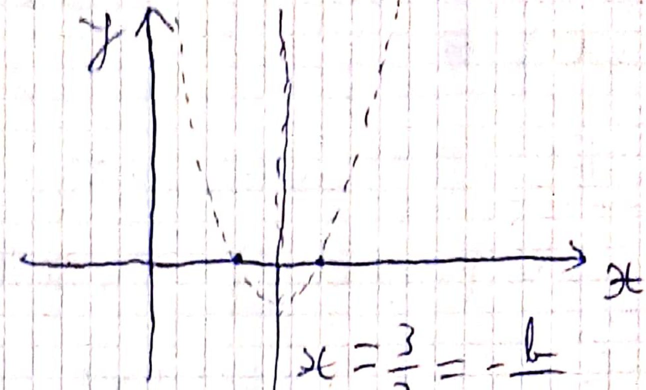
Exemplu: Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$$

Este inj, surj

NU este inj

$f(1) = f(2) = 0$



$$Y_{min} = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{1}{4} \qquad x = \frac{3}{2} = -\frac{b}{2a}$$

$f(x) = -1 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 3 = 0 \Rightarrow x \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

$f: [\frac{3}{2}, +\infty) \to [-\frac{1}{4}, +\infty)$

$$f(x) = x^2 - 3x + 2$$

$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1^2 - 3x_1 + 2 = x_2^2 - 3x_2 + 2$

$\Leftrightarrow x_1^2 - x_2^2 - 3(x_1 - x_2) = 0$

$(x_1 - x_2)(x_1 + x_2 - 3) = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$

sau $\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1, x_2 \geq \frac{3}{2} \end{array}\right| \Rightarrow x_1 = x_2 = \frac{3}{2}$

Deci $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$
(f este injectivă)

f surj

$(\forall)\, y \geq -\frac{1}{4}\ (\exists)?\ x \in [\frac{3}{2}, +\infty)$ a.î. $f(x) = y$

$x^2 - 3x + 2 = y \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 - y = 0$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4(2-y)}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{1+4y}}{2}$$

$y \geq -\frac{1}{4} \Leftrightarrow 4y \geq -1 \Leftrightarrow 1 + 4y \geq 0$

$\Rightarrow x = \dfrac{3+\sqrt{1+4y}}{2} \in \left[\dfrac{3}{2}, +\infty\right)$

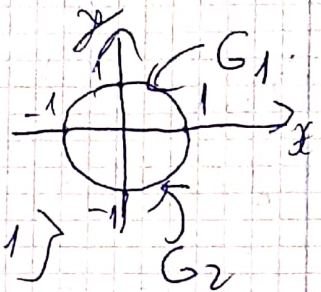
Def: f s.n. bijectivă $\Leftrightarrow$ este atât inj cât și surj.

$A \xrightarrow{f} B$ bij $\Leftrightarrow (\forall) y \in B, (\exists)!\, x \in A$ a.î. $f(x) = y$

unică

OBS: NU orice curbă din $\mathbb{R}^2$ este graficul unei funcții $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\mathcal{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$



$x = 0 \Rightarrow 0^2 + y^2 = 1 \Rightarrow y = \{\pm 1\}$

$0 \begin{cases} \nearrow 1 \\ \searrow -1 \end{cases}$

$f_1(x) = \sqrt{1-x^2}$

$f_2(x) = -\sqrt{1-x^2}$

Compunerea funcțiilor

$$\underbrace{A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g}}_{g \circ f} C \qquad g \circ f : A \to C$$

$(g \circ f)(x) = g(f(x))$
$x \in A$

OBS: Compunerea NU este comutativă

Exemplu: $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$

$f(x) = \sin x;\ g(z) = z^2$

$f \circ g \neq g \circ f$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = \sin(x^2)$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sin x) = \sin^2(x)$

Pt $x = \pi$

$\sin(\pi^2) \neq 0 = \sin^2(\pi)$

<u>PROP</u>: Compunerea funcțiilor este asociativă

Fie f, g, h funcții $A \xrightarrow{h} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{f} D$

$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h) \overset{notatie}{=} f \circ g \circ h$

<u>Dem</u>: $(f \circ g) \circ h(x) = (f \circ g)(h(x)) = f \circ g \circ h$
$x \in A$

$= f(g(h(x)))$

$(f \circ (g \circ h))(x) = f((g \circ h)(x)) = f(g(h(x)))$

<u>Teoremă</u>: Fie $A \underset{f'}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B \underset{g'}{\overset{g}{\rightrightarrows}} C$ Atunci

1. f, g injective $\Rightarrow g \circ f$ injectivă
2. f, g surjective $\Rightarrow g \circ f$ surjectivă
3. f, g bijective $\Rightarrow g \circ f$ bijective
4. $g \circ f$ inj $\Rightarrow f$ inj
5. $g \circ f$ surj $\Rightarrow g$ surj

<u>Definiție</u> $h: X \to Y$, $h': X' \to Y'$

$$h' = h \Leftrightarrow \begin{cases} X = X' \\ Y = Y' \\ h(x) = h'(x) \ (\forall) x \in X = X' \end{cases}$$

Atunci

6. g inj $\Rightarrow$, $g \circ f = g \circ f' \Rightarrow f = f'$