~~08~~ 18.10.2022

Serii de numere reale

Curs 2

Def. Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{N}$ și $s_n = x_p + x_{p+1} + \dots + x_n = \sum_{k=p}^{n} x_k \ \forall n \geq p$

Perechea $((x_n)_{n\geq p}, (s_n)_{n\geq p})$ s.n. serie de nr. reale

Notație În contextul definiției precedente perechea $((x_n)_{n\geq p}, (s_n)_{n\geq p})$ se notează $\sum_{n=p}^{\infty} x_n$ sau $\sum_{n\geq p} x_n$ sau $\sum_n x_n$.

Obs. În general $p=0$ sau $p=1$, cazuri pe care le vom considera de acum înainte în definiții, teoreme etc.

Fie $\sum_n x_n$ o serie de numere reale
$(s_n = x_0 + x_1 + \dots + x_n \ \forall n \in \mathbb{N})$

Def. 1) Elem. șirului $(x_n)_n$ s.n. termenii seriei $\sum_n x_n$.

2) S_n: elementele șirului $(s_n)_n$ sumele parțiale ale seriei $\sum_n x_n$.

3) Dacă există $\underbrace{\lim_{n\to\infty} s_n}_{\overset{\text{not}}{=} l} \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, acest l s.n. suma seriei $\sum x_n$ și vom scrie $\sum_n x_n = l$

4) Spunem că seria $\sum x_n$ e convergentă dacă $(s_n)_n$ este convergentă.

5) Spunem că seria $\sum_n x_n$ este divergentă dacă $(s_n)_n$ este div.

Prop. Dacă $\sum_n x_n$ e conv., atunci $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$

Corolar (Criteriul suficient de divergență)

Dacă $\lim_{n\to\infty} x_n \neq 0 \Rightarrow \sum_n x_n$ e divergentă

$\sum_n n$

Obs. Folosind doar afirmația „$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$" nu putem decide dacă seria $\sum_n x_n$ este conv. sau div.

$\sum_n \frac{1}{n}$

Ex. Det. sumele seriilor de mai jos și prec. dacă sunt conv. sau div.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$; b) $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$, $q \in \mathbb{R}$

($0^0 = 1$ prin convenție)

Sol. a) $x_n = \frac{1}{n(n+1)}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$s_n = \sum_n \frac{1}{n(n+1)}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{n+1} = 1$

$\lim\limits_{n\to\infty}$ Avem $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1 \in \mathbb{R} \Rightarrow$ serie este convergentă

b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n, q \in \mathbb{R}$

$x_n = q^n \ \forall n \in \mathbb{N}$

$s_n = x_0 + x_1 + \ldots + x_n = 1 + q + \ldots + q^n$

$\lim\limits_{n\to\infty} s_n = ?$

$$s_n = \begin{cases} n+1, & q = 1 \\ \dfrac{q^{n+1} - 1}{q - 1}, & q \neq 1 \end{cases}$$

Dacă $q = 1$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} (n+1) = +\infty$

deci $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n = +\infty$, serie fiind divergentă

Fie $q \neq 1$

$$\lim_{n\to\infty} q^{n+1} = \begin{cases} \nexists, & \text{dacă } q \le -1 \\ 0, & \text{dacă } q \in (-1, 1) \\ +\infty, & \text{dacă } q > 1 \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} = \begin{cases} \nexists, & \text{dacă } q \le -1 \\ \dfrac{1}{1-q}, & \text{dacă } q \in (-1, 1) \\ +\infty, & \text{dacă } q > 1 \end{cases}$$

Dacă $q \leq -1$, ~~avem~~ atunci seria $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ nu are sumă, fiind div.

Dacă $q \in (-1, 1)$, atunci $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$, seria fiind convergentă

Dacă $q > 1$, atunci seria $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = +\infty$, seria fiind divergentă

Dacă $q > 1$, atunci $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = +\infty$, seria $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ fiind div

<u>Obs.</u> În aplicații putem folosi (fără justificare) convergențele următoarelor serii de nr. reale:

1) $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ — conv, dacă $q \in (-1, 1)$; div, dacă $q \in \mathbb{R} \setminus (-1, 1)$

(Serie geometrică)

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ — conv, dacă $\alpha > 1$; div, dacă $\alpha \leq 1$

(Serie armonică generalizată)

<u>Obs:</u> Numerele reale q și α din obs. precedentă nu depind de n.

<u>Prop. (Operații cu serii conv.)</u>

Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$, $(y_n)_n \subset \mathbb{R}$ și $c \in \mathbb{R}$. Presupunem că $\sum_n x_n$ și $\sum_n y_n$ sunt conv. Atunci:

1) $\sum_n (x_n + y_n) = \sum_n x_n \pm \sum_n y_n$

2) $\sum_n (c \cdot x_n) = c \cdot \sum_n x_n$.

$\sum_n (c \cdot x_n) = c \sum_n x_n$

Criteriul lui Cauchy pt. serii de nr. reale

Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ o serie de nr. reale.

Sunt echiv:

1) $\sum_{n=0} x_n$ e conv.

2) $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq n_\varepsilon, \forall m \in \mathbb{N}^*$ avem $|x_{n+1} + \ldots + x_{n+m}| < \varepsilon$

Criterii de conv. pt. serii cu termeni pozitivi

1. Criteriul raportului. Fie seria $\sum x_n$, $x_n > 0 \; \forall n \in \mathbb{N}$ a.î. $\exists \lim_{n \to \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} \overset{not}{=} l$

1) Dacă $l < 1$, atunci $\sum x_n$ e conv.

2) Dacă $l > 1$, atunci $\sum_n^n x_n$ e div.

3) Dacă $l = 1$, atunci acest criteriu nu decide

2. Criteriul radicalului Fie seria $\sum x_n$, $x_n \geq 0 \; \forall n \in \mathbb{N}$ a.î. $\exists \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{x_n} \overset{notam}{=} l$

1) Dacă $l < 1$, atunci $\sum x_n$ e conv.

2) Dacă $l > 1$, atunci $\sum x_n$ e div

3) Dacă $l = 1$, atunci criteriul nu decide

3. Criteriul Raabe-Duhamel

Fie seria $\sum\limits_n x_n$, $x_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ a.î.

$\exists \lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) \overset{not}{=} l$

1) Dacă $l < 1$, div.

2) Dacă $l > 1$, conv.

3) Dacă $l = 1$, nu decide

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n \underset{?}{\sim} \sum_{n=5000}^{\infty} x_n$$

4)

4. Criteriul condensării. Fie seria $\sum x_n$, $x_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ a.î. $(x_n)_n$ este descrescător. Atunci $\sum\limits_n x_n \sim \sum 2^n \cdot x_{2^n}$

(i.e $\sum\limits_n x_n$ și $\sum\limits_n 2^n \cdot x_{2^n}$ sunt ambele convergente sau ambele divergente).

5. Criteriul de comparație cu inegalități

Fie seriile $\sum x_n$ și $\sum\limits_n y_n$, $x_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $y_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$

P.p. că $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq n_0$, avem $x_n \leq y_n$

1) Dacă $\sum\limits_n y_n$ e conv., atunci $\sum\limits_n x_n$ e conv.

2) Dacă $\sum_n x_n$ e div, atunci $\sum_n y_n$ e div.

6. Criteriul de comparație cu inegalități

Fie seriile $\sum_n x_n$ și $\sum_n y_n$, $x_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ și $y_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Pp. că $\exists \lim_{n \to \infty} \frac{x_n}{y_n} \overset{not}{=} l \in [0, \infty]$

1) Dacă $l \in (0, +\infty)$, atunci $\sum_n x_n \sim \sum_n y_n$

2) Dacă $l = 0$ și $\sum_n y_n$ e convergentă, atunci $\sum_n x_n$ e conv.

3) Dacă $l = +\infty$ și $\sum_n y_n$ e div, atunci $\sum_n x_n$ e div.

Criterii de convergență pt. serii cu termeni oarecare.

Fie $\sum_n x_n$ o serie de nr. reale

Def. Spunem că $\sum_n x_n$ este absolut conv. dacă $\sum_n |x_n|$ e conv.

Prop. Orice serie de nr. reale absolut convergentă este convergentă.

Obs. Reciproca afirmației de mai sus nu este, în general, adevărată)

1. Criteriile Abel - Dirichlet

I. Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$ și $(y_n)_n \subset \mathbb{R}$ a.î.

1) $(x_n)_n$ este descrescător și $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$

2) $\exists M > 0$ a.î. $\forall n \in \mathbb{N}$ avem
$|y_0 + y_1 + \ldots + y_n| \le M$

Atunci $\sum_n x_n y_n$ este conv.

II. Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$ și $(y_n)_n \subset \mathbb{R}$ a.î.

1) $(x_n)_n$ este monoton și mărginit

2) $\sum_n y_n$ e convergentă

Atunci $\sum_n x_n y_n$ e conv.

2 <u>Criteriul lui Leibniz</u>. Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$ a.î. $(x_n)_n$ este descrescător și $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$

Atunci $\sum_n (-1)^n \cdot x_n$ e conv

<u>Exerc.</u> Fie $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Arătam că a) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e conv.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ e div.

<u>Sol:</u> a) Fie $x_n = \frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$(x_n)_n$ descresc. și $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x_n$ e conv.

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e conv.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergentă (serie armonică generalizată, cu $\alpha = 1$)

Exc Studiați conv. (natura) seriilor de mai jos

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n-1}}{n^2}$ –

Sol: $x_n = \frac{\sqrt{n-1}}{n^2}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{\sqrt{n-1}}{n^2} \leq \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{n^{\frac{1}{2}}}{n^2} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Fie $y_n = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

$x_n < y_n \ \forall n \in \mathbb{N}^*$

$\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ e conv. (serie armonică gen. cu $\alpha = \frac{3}{2}$)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ e conv.

Crit. de comp. cu ineg.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (3n-2)}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot 3n} \cdot \frac{1}{2^n} =$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3n-2}{3n} \cdot \frac{3n+1}{3n+3} \cdot \frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{3n-2}{3n} \cdot \frac{1}{2^n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{3n+3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$