$n=1$ $n=1$ dar, dacă $n\in[3,\infty)$

25.10.2022

Curs 4

$\sigma(n)$ = suma div. lui n

$d(n)$ = nr. div. lui n

Def. (Adaptarea def. interiorului, aderenței etc. în spații metrice)

Fie (X,d) un sp. metric, $A\subset X$ și $x_0\in X$. Spunem că x_0 este:

1) pct. interior al lui A dacă $\exists\, r>0$ a.î. $B(x_0,r)\subset A$

2) pct. aderent al lui A dacă $\forall\, r>0$, avem $B(x_0,r)\cap A\neq\emptyset$

3) pct. de acumulare al lui A dacă $\forall\, R>0$, avem $B(x_0,r)\cap(A\setminus\{x_0\})\neq\emptyset$

4) pct. frontieră al lui A dacă x_0 este pct. aderent al lui A și nu este pct. interior al lui A.

5) pct. izolat al lui A și nu este pct. de acumulare al lui A.

Obs. Vom folosi aceleași notații pt. mulțimea pct. int, mult. pct. aderente etc. ca la spații topologice.

Prop. de interiorului unei mulțimi

Fie (X, τ) un spațiu topologic și $A \subset X$, $B \subset X$.

1. $\mathring{A} \subset A$

Justificare:

Fie $x \in \mathring{A}$. Atunci $A \in \mathcal{V}_x$. Deci $\exists\, D \in \tau$ a.î. $x \in D \subset A$.
Așadar $x \in A$, i.e. $\mathring{A} \subset A$. $\square$

2. $\mathring{A} = \bigcup\limits_{\substack{D \in \tau \\ D \subset A}} D$

Justificare

„$\subset$"

Fie $x \in \mathring{A}$. Atunci $A \in \mathcal{V}_x$. Deci $\exists\, D \in \tau$ a.î. $x \in D \subset A$. Așadar $x \in \bigcup\limits_{\substack{D \in \tau \\ D \subset A}} D$, i.e. $\mathring{A} \subset \bigcup\limits_{\substack{D \in \tau \\ D \subset A}} D$

„$\supset$"

Fie $x \in \bigcup\limits_{\substack{D \in \tau \\ D \subset A}} D$. Atunci $\exists\, D \in \tau$, $D \subset A$ a.î. $x \in D$. Atunci $x \in D \subset A$, deci $A \in \mathcal{V}_x$, i.e. $x \in \mathring{A}$, i.e. $\bigcup\limits_{\substack{D \in \tau \\ D \subset A}} D \subset \mathring{A}$

Prin urmare $\mathring{A} = \bigcup\limits_{\substack{D \in \tau \\ D \subset A}} D$ $\square$

3. $\mathring{A}$ este mulțime deschisă.

Justificare

Conform zoren $\mathring{A} = \bigcup_{\substack{D \in \mathcal{G} \\ D \subset A}} D$ (reuniune arb. de mulțimi deschise).

Deci $\mathring{A}$ este mulțime deschisă. $\square$

[Obs. Din prop. 2 și 3 rezultă că $\mathring{A}$ este cea mai mare (în sensul incluziunii) mulțime deschisă inclusă în A).

$\overset{\circ}{\overbrace{[0,2)}} = (0,2)$

4. A deschisă $\Leftrightarrow A = \mathring{A}$

Justificare. „$\Leftarrow$"

$\left.\begin{array}{l} \mathring{A} \text{ deschisă} \\ A = \mathring{A} \end{array}\right| \Rightarrow A$ deschisă

„$\Rightarrow$"

$\left.\begin{array}{l} \mathring{A} \text{ este cea mai mare mult. deschisă inclusă în } A \\ A \subset A \\ A \text{ deschisă} \end{array}\right| \Rightarrow A \subset \mathring{A}$

Conform prop. 1) avem că $\left.\begin{array}{l} \mathring{A} \subset A \\ A \subset \mathring{A} \end{array}\right| \Rightarrow A = \mathring{A}$

5. Dacă $A \subset B$, atunci $\mathring{A} \subset \mathring{B}$

Justificare: Rezolvați voi! $\square$

6. a) $\mathring{A} \cap \mathring{B} = \overset{\circ}{\overbrace{A \cap B}}$

b) $\mathring{A} \cup \mathring{B} \subseteq \overset{\circ}{\overbrace{A \cup B}}$

Justificare: Rezolvați voi! $\square$

OBS. „$\subset$" de la 6. b) poate fi strictă

Propr. ale aderenței unei mulțimi

Fie (X, τ) un sp. top. și $A \subset X$, $B \subset X$.

1. $A \subset \bar{A}$

Fie $x \in A$. Fie $V \in \mathcal{V}_x$

Avem $x \in V \cap A$, deci $V \cap A \neq \emptyset$

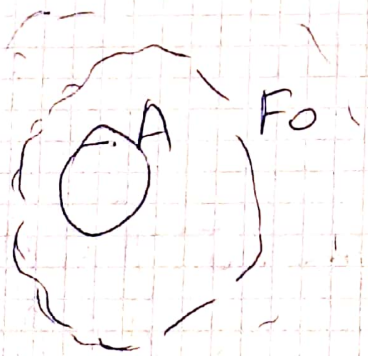
Așadar $x \in \bar{A}$, i.e. $A \subset \bar{A}$. $\square$

2. $\bar{A} = \bigcap\limits_{\substack{F \text{ închisă} \\ F \supset A}} F$

Justificare:

„$\subset$"

Fie $x \in \bar{A}$. P.p. prin absurd că $\exists\, F_0$ închisă, $F_0 \supset A$ a.î. $x \notin F_0$. Deci $x \in C_{F_0}$.



F_0 închisă $\Rightarrow C_{F_0}$ deschisă $\Rightarrow C_{F_0} \in \mathcal{V}_x$.

Deci $C_{F_0} \cap A \neq \emptyset$, contradicție cu $A \subset F_0$.

Așadar $x \in \bigcap\limits_{\substack{F \text{ închisă} \\ F \supset A}} F$, i.e. $\bar{A} \subset \bigcap\limits_{\substack{F \text{ închisă} \\ F \supset A}} F$

"$\supset$"

Fie $x \in \bigcap_{\substack{F \text{ închisă} \\ F \supset A}} F$ P.p prin absurd că $x \notin \overline{A}$

$\exists V_0 \in \mathcal{V}_x$ a.î. $V_0 \cap A = \emptyset$

$V_0 \in \mathcal{V}_x \Leftrightarrow \exists D_0 \in \mathcal{T}$ a.î. $x \in D_0 \subset V_0$

Avem $D_0 \cap A = \emptyset$, deci $A \subset CD_0$

$D_0 \in \mathcal{T} \Rightarrow CD_0$ închisă

$x \in \bigcap_{F \text{ închisă}} F \Rightarrow x \in CD_0$, contradicție cu $x \in D_0$

Prin urmare $x \in \overline{A}$ i.e. $\bigcap_{\substack{F \text{ închisă} \\ F \supset A}} F \subset \overline{A}$

Așadar $\overline{A} = \bigcap_{\substack{F \text{ închisă} \\ F \supset A}} F$

3. $\overline{A}$ este închis

<u>Justificare</u>

$$C\overline{A} \overset{2.}{=} C\Big(\bigcap_{\substack{F \text{ închisă} \\ F \supset A}} F\Big) = \bigcup_{\substack{F \text{ închisă} \\ F \supset A}} C_F \in \mathcal{T}$$

$\Rightarrow \overline{A}$ închisă $\square$.

4. A închisă $\Leftrightarrow A = \overline{A}$

"$\Leftarrow$"

$\left.\begin{array}{l} A = \overline{A} \\ \overline{A} \text{ închisă} \end{array}\right\} \Rightarrow A$ închisă

"$\Rightarrow$"

Din prop. 2 și 3 avem că $\overline{A}$ este cea mai mică (în sensul incluziunii) mulțime închisă ce conține A

$\Rightarrow$ " A închisă
" $A \supset A$
$\bar{A}$ este cea mai mică mult. închisă ce conține A | $\Rightarrow A \supset \bar{A}$ dar $A \subset \bar{A}$ | $\Rightarrow$

$\Rightarrow A = \bar{A}$ $\square$

5. Dacă $A \subset B$, at. $\bar{A} \subset \bar{B}$

Rezolvați voi! $\square$

6. a) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

b) $\overline{A \cap B} \subseteq \bar{A} \cap \bar{B}$

<u>Justificare</u> Rezolvați voi! $\square$

<u>OBS.</u> Incluziunea de la 6. b) poate fi strictă

<u>OBS</u>: Din prop. 2 și 3 avem că $\bar{A}$ este cea mai mică (în sensul incluziunii) mult. închisă ce include A.

<u>Prop.</u> Fie (X, τ) un sp. topologic și $A \subset X$

<u>Atunci</u>:

1) $\overline{C_A} = C_{\overset{\circ}{A}}$

2) $\overset{\circ}{C_A} = C_{\bar{A}}$

<u>Prop. de mult. pct. de acumulare</u>

Fie (X, τ) un sp. topologic și $A \subset X$.

1. $A' \subset \bar{A}$

<u>Justificare</u> Fie $x \in A'$ Fie $V \in \mathcal{V}_x$

$V \cap A \neq \emptyset$

$x \in A' \Rightarrow V \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset \Rightarrow V \cap A \neq \emptyset$

Deci $x \in \bar{A}$

2. $\bar{A} = A \cup A'$

<u>Justificare</u>

„$\supset$"

$$\left.\begin{array}{l} A \subset \bar{A} \\ A' \subset \bar{A} \end{array}\right| \Rightarrow A \cup A' \subset \bar{A}$$

„$\subset$" Fie $x \in \bar{A}$

I. P.p. că $x \in A$. Atunci $x \in A \cup A'$

i.e $\bar{A} \subset A \cup A'$

II P.p. că $x \notin A$

Arătăm că $x \in A'$

Fie $V \in \mathcal{V}_x$

$$x \in \bar{A} \Rightarrow V \cap A \neq \emptyset \underset{x \notin A}{\Rightarrow} V \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$$

$\Rightarrow x \in A' \Rightarrow x \in A \cup A' \Rightarrow \underline{\bar{A} \subset A \cup A'}$

<u>Prop</u>. Fie (X, d) un sp. metric, $A \subset X$ și $x \in X$.

1) $x \in \bar{A} \Leftrightarrow \exists (x_n)_n \subset A$ a.î.

$\lim\limits_{n \to \infty} x_n \overset{d}{=} x$

2) $x \in A' \Leftrightarrow \exists (x_n)_n \subset A \setminus \{x\}$ a.î. $\lim\limits_{n \to \infty} x_n \overset{d}{=} x$

Obs: $(\mathbb{R}, d)$ este sp. metric, unde $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $d(x, y) = |x - y|$

Obs: Considerăm spațiul metric $(\mathbb{R}, d)$, $x \in \mathbb{R}$ și $r > 0$

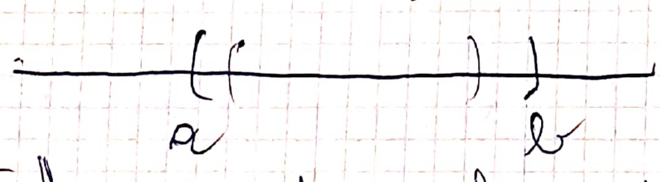
1) $B(x, r) = \{ y \in \mathbb{R} \mid d(x, y) < r \}$
$= \{ y \in \mathbb{R} \mid |x - y| < r \} = \{ y \in \mathbb{R} \mid -r < x - y < r \}$
$= \{ y \in \mathbb{R} \mid -x - r < -y < -x + r \}$
$= (x - r, x + r)$

2) $B[x, r] = \overline{B(x, r)} = [x - r, x + r]$

Obs. În spațiul metric $(\mathbb{R}, d)$:

1) Intervalele de forma $(-\infty, +\infty)$, $(a, +\infty)$, (a, b) sunt mulțimi deschise unde $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$.

2) Intervalele de forma $(-\infty, a]$, $[a, +\infty)$, $[a, b]$ sunt mulțimi închise unde $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$.



Ex: Faceți analiza topologică a mulțimii $A \subset \mathbb{R}$ (i.e. det. $\mathring{A}$, $\bar{A}$, A', $Fr(A)$, $Izo(A)$) unde:

a) $A = \cancel{\mathbb{R}}\ \mathbb{Q}$

Sol: $x \in \mathring{A} \Leftrightarrow \exists\ r > 0$ a.î. $B(x, r) \subset A$

$B(x, r) = (x - r, x + r) \not\subset \mathbb{Q}$

Deoarece intervalul $(x-r, x+r)$ conține o inf. de nr. raționale și o inf. de nr. iraționale avem că $\mathring{A} = \mathring{\mathbb{Q}} = \emptyset$

2) $\bar{A} = ?$

$x \in \bar{A} \Leftrightarrow \forall r > 0$, avem $B(x,r) \cap A \neq \emptyset$

$(x-r, x+r) \cap \mathbb{Q}$

Avem $\bar{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{R}$

Fie $x \in \mathbb{R}$ și $r > 0$

$(x-r, x+r) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$, deoarece între orice două numere reale există o infinitate de nr. raționale și o inf. de nr. iraționale.

Deci $x \in \bar{\mathbb{Q}}$, i.e. $\mathbb{R} \subset \mathbb{Q}$

Prin urmare $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$

3) $A' = ?$

$x \in A' \Leftrightarrow \forall r > 0$, avem $B(x,r) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$

$(x-r, x+r) \cap (\mathbb{Q} \setminus \{x\})$.

$A' = \mathbb{Q}' \subset \mathbb{R}$

Fie $x \in \mathbb{R}$ și $r > 0$.

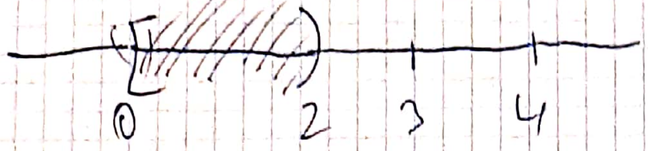
$(x-r, x+r) \cap (\mathbb{Q} \setminus \{x\}) \neq \emptyset$, deoarece între ~~orice~~ două nr. reale există o inf. de nr. raționale și

4) $\mathrm{Fr}(A) = \partial A = \bar{A} \setminus \mathring{A} = \mathbb{R} \setminus \emptyset = \mathbb{R}$

5) $\mathrm{Izo}(A) = A = \bar{A} \setminus A' = \mathbb{R} \setminus \mathbb{R} = \emptyset$ $\square$

Sol:

b) $A = [0,2) \cup \{3,4\}$



1) $\mathring{A} = ?$

$x \in \mathring{A} \iff \exists\, r > 0$ a.î. $B(x,r) \subset A$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \| $

$\qquad\qquad\qquad (x-r, x+r) \subset [0,2) \cup \{3,4\}$

$(0,2) \subset A \Rightarrow (0,2) \subset \mathring{A}$
deschisă

$\mathring{A} \subset A$

$\Rightarrow (0,2) \subset \mathring{A} \subset [0,2) \cup \{3,4\}$

Studiem dacă $0, 3, 4 \in \mathring{A}$

$0 \in \mathring{A} \iff \exists\, r > 0$ a.î. $(0-r, 0+r) \subset A$

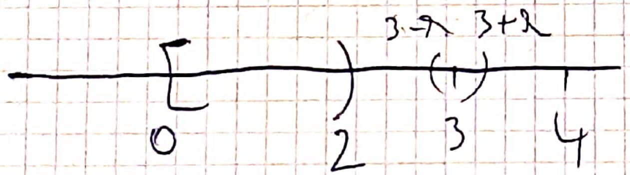
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \| $

$\qquad\qquad\qquad\qquad (-r, r)$

$0 \notin \mathring{A}$

analog $3 \notin \mathring{A}$, $4 \notin \mathring{A}$

$3 \in \mathring{A} \iff \exists\, r > 0$ a.î. $(3-r, 3+r) \subset A$



Deci $3 \notin \mathring{A}$

Deci $\mathring{A} = (0,2)$

2) $\bar{A} = ?$

$x \in \bar{A} \iff \forall\, r > 0$ avem $B(x,r) \cap A \neq \emptyset$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \| $

$\qquad (x-r, x+r) \cap ([0,2) \cup \{3,4\})$

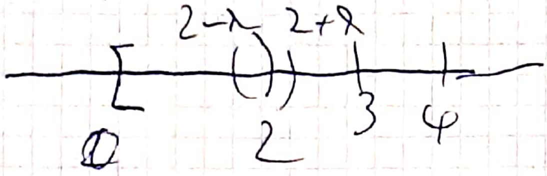
$A \subset \bar{A}$

$[0,2] \cup \{3,4\}$ închisă
$A \subset [0,2] \cup \{3,4\}$ $\Big| \Rightarrow \bar{A} \subset [0,2] \cup \{3,4\}$

$\Rightarrow [0,2) \cup \{3,4\} \subset \bar{A} \subset [0,2] \cup \{3,4\}$

Studiem dacă $2 \in \bar{A}$

$2 \in \bar{A} \Leftrightarrow \forall r > 0$, avem $(2-r, 2+r) \cap A \neq \emptyset$



Deci $2 \in \bar{A}$
Analog $\bar{A} = [0,2]$

3) $A' = ?$

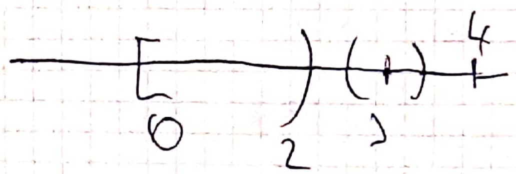
$x \in A' \Leftrightarrow \forall r > 0$, avem $B(x,r) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$

$(x-r, x+r) \cap \left([0,2) \cup \{3,4\} \setminus \{x\} \right)$

$A' \subset \bar{A} = [0,2] \cup \{3,4\}$

Fie $x \in [0,2]$
$x \in A' \Leftrightarrow \forall r > 0$, avem $(x-r, x+r) \cap (A \setminus \{x\})$
$\neq \emptyset$ Deci $x \in A'$

$3 \in A' \Leftrightarrow \forall r > 0$ avem $(3-r, 3+r) \cap (A \setminus \{3\})$
$\neq \emptyset$



Dacă $r = \frac{1}{2}$, avem
$(3-r, 3+r) \cap (A \setminus \{3\}) = \emptyset$
Deci $3 \notin A'$
Analog $4 \notin A'$

$A' = [0,2]$

4) $Fr(A) = \partial A = \bar{A} \setminus \mathring{A} = \{0, 2, 3, 4\}$.

5) $Izo(A) = {}^{i}A = \bar{A} \setminus A' = \{3, 4\}$

Seminar 4

1. a) Arătați că $\lim \frac{1-\cos x}{\ldots} = \frac{1}{2}$