↗10 pct. 04.10.2022

Examen: 2 ore fizic
cu materiale pe bancă 3-5 exerciții (cu subpct)
↙
curs + seminar + maxim 2 cărți

Bibliografie: curs + seminar + cărți format electronic
↑
Teams

răzvan.sfetcu@fmi.unibuc.ro
rezvan.sfetcu@fmi.unibuc.ro
0723032129

seminar: 0-1 pct pe activitate

9.5 → 10 Temă: prezentă
10 ← 9.4

Cursul I

- Șiruri de numere reale -

Def: Fie $A \subset \mathbb{N}$ o mulțime numărabilă (i.e. $\exists g: A \to \mathbb{N}$, g bijectivă) O funcție $f: A \to \mathbb{R}$ s.n. șir de numere reale.

Notații: 1) $f(n) \overset{not}{=} x_n \ \forall n \in A$

2) Ținând cont de def. prec. și de notație 1) obținem șirul de nr. reale $(x_n)_{n \in A}$

Obs 1) Atunci când A se subînțelege vom scrie $(x_n)_n$

$\frac{1}{n}$ x_n $\forall n \in \mathbb{N}^*$

2) În general, $A = \mathbb{N}$ sau $A = \mathbb{N}^*$, cazuri în care vom scrie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (sau $(x_n)_{n \geq 0}$

sau $(x_n)_n$), respectiv $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ (sau $(x_n)_{n\geq 1}$ sau $(x_n)_n$)

Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$

<u>Def</u> 1) Fie $l \in \mathbb{R}$. Spunem că șirul $(x_n)_n$ are limita l și scriem $\lim_{n\to\infty} x_n = l$ dacă $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq n_\varepsilon$ avem $\underline{|x_n - l| < \varepsilon}$ (i.e. $\underline{x_n \in (l-\varepsilon, l+\varepsilon)}$)

2) Spunem că șirul $(x_n)_n$ are limita $+\infty$ și scriem $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$ dacă $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq n_\varepsilon$, avem $x_n > \varepsilon$

3) Spunem că șirul $(x_n)_n$ are limita $-\infty$ și scriem $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$ dacă $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $n \geq n_\varepsilon$, avem $x_n < -\varepsilon$

<u>Def</u> 1) Spunem că șirul $(x_n)_n$ este convergent dacă are limită finită ($\exists\, l \in \mathbb{R}$ a.î. $\lim_{n\to\infty} x_n = l$

2) Spunem că șirul $(x_n)_n$ este divergent dacă $(x_n)_n$ nu este convergent

Șiruri de nr. reale
- cu limită
  - finită $\Rightarrow$ converg
  - $\pm\infty \Rightarrow$ diverg
- fără limită (diverg)

<u>Def</u>: 1) Spunem că șirul $(x_n)_n$ este crescător (resp. descrescător) dacă $x_n \leq x_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ (resp. $x_n \geq x_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$)

2) ~~strict~~ ~~descrescător~~ ~~crescător~~ dacă $x_n < x_{n+1}$ (resp. descrescător) $\forall n \in \mathbb{N}$ (resp $x_n > x_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$)

3) Spunem că şirul $(x_n)_n$ este monoton (resp. str. monoton), dacă $(x_n)_n$ este crescător sau descrescător (resp. $(x_n)_n$ este str. crescător / descresc).

4) Spunem că şirul $(x_n)_n$ este mărginit dacă $\exists M>0$ a.î. $|x_n| < M$ $\forall n \in \mathbb{N}$

<u>Teoremă (Criteriul lui Weierstrass)</u>

Orice şir de numere reale ~~este~~ monoton şi mărginit este conv.

<u>Obs.</u> Reciproca teoremei precedente este falsă.

<u>Ex.</u> Fie $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

a) Arătaţi că $(x_n)_n$ nu este monoton

b) Arătaţi că $(x_n)_n$ este conv.

<u>Sol</u>

a) Fie $k \in \mathbb{N}^*$.

$x_{2k} = \frac{(-1)^{2k}}{2k} = \frac{1}{2k}$, $x_{2k+1} = \frac{(-1)^{2k+1}}{2k+1} = -\frac{1}{2k+1}$, $x_{2k+2} = \frac{1}{2k+2}$

$x_{2k} > x_{2k+1}$ şi $x_{2k+1} < x_{2k+2}$

$\Rightarrow$ NU este monoton

b) Avem $\frac{-1}{n} \le x_n \le \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$

$$\underbrace{\frac{-1}{n}}_{\to 0} \le \frac{(-1)^n}{n} \le \underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0}$$

Conform criteriului cleştelui rezultă că $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, i.e $(x_n)_n$ este conv.

Prop. Orice șir de nr. reale convergent este mărg.

Teoremă (Criteriul cleștelui)

Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$, $(y_n)_n \subset \mathbb{R}$ și $(z_n)_n \subset \mathbb{R}$ a.î. $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ cu proprietatea că $\forall n \geq n_0$ avem $x_n \leq y_n \leq z_n$.

Presupunem că $\exists l \in \mathbb{R}$ a.î. $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \lim\limits_{n \to \infty} z_n = l$.

Atunci $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = l$

Prop. (Operații cu șiruri convergente)

Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$, $(y_n)_n \subset \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ și $y \in \mathbb{R}$ a.î. $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$ și $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = y$

Avem:

1) $\lim\limits_{n \to \infty} (x_n \pm y_n) = x \pm y$ 2) $\lim\limits_{n \to \infty} (x_n \cdot y_n) = x \cdot y$

3) $\lim\limits_{n \to \infty} (a \cdot x_n) = a \cdot x$

4) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{x}{y}$, cu presupunerea suplimentară $y \neq 0$

Prop. Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$ și $(y_n)_n \subset \mathbb{R}$.

Atunci:

1) $\left(\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0\right) \Leftrightarrow \left(\lim\limits_{n \to \infty} |x_n| = 0\right)$

2) Dacă $\exists x \in \mathbb{R}$ a.î. $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$, avem $\lim\limits_{n \to \infty} |x_n| = |x|$

3) Dacă $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0$ și $(y_n)_n$ este mărg., atunci $\lim\limits_{n \to \infty} (x_n \cdot y_n) = 0$ („0 · mărginit = 0")

Lema lui Cesaro: Din orice șir mărginit de nr. reale se poate extrage un subșir convergent (i.e.)
$\forall (x_n)_n \subset \mathbb{R}$, $(x_n)_n$ mărg. $\exists (x_{n_k})_k \subset (x_n)_n$ a.î. (x_{n_k}) este convergent

Șir Cauchy

Def. Spunem că $(x_n)_n$ este șir Cauchy dacă $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall m, n \in \mathbb{N}$, $m \geq n_\varepsilon$, $n \geq n_\varepsilon$, avem $|x_m - x_n| < \varepsilon$

Prop. Următoarele afirmații sunt echiv.
1) $(x_n)_n$ este șir Cauchy
2) $(x_n)_n$ este șir convergent

Exc. Fie $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
Arătați că $(x_n)_n$ nu este convergent

Sol: Arătăm că $(x_n)_n$ nu este șir Cauchy

$(x_n)_n$ șir Cauchy $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ a.î. $\forall m, n \in \mathbb{N}^*$, $m \geq n_\varepsilon$, $n \geq n_\varepsilon$, avem $|x_m - x_n| < \varepsilon$

$(x_n)_n$ nu este șir Cauchy $\Leftrightarrow \exists \varepsilon_0 > 0, \forall k \in \mathbb{N}$ $\exists m_k, n_k \in \mathbb{N}^*$
$m_k > k, n_k > k$ a.î. $|x_{m_k} - x_{n_k}| \geq \varepsilon_0$

Fie $m, n \in \mathbb{N}^*, m > n$
$$|x_m - x_n| = \left|\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{m}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right)\right| = \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{m}$$

Fixăm $n \in \mathbb{N}^*$ și alegem $m = 2n$

$$|x_m - x_n| = \left|\frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n}\right| \geq \underbrace{\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n}}_{n}$$

$$= \frac{1}{2}$$

Alegem $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$, Fie $k \in \mathbb{N}^*$, Alegem $m_k = 2k$ și $n_k = k$ ($m_k \geq k$, $n_k \geq k$)

Avem $|x_{m_k} - x_{n_k}| = |x_{2k} - x_k| \geq \frac{1}{2} = \varepsilon_0$

Deci $(x_n)_n$ nu este șir Cauchy.

Prin urmare $(x_n)_n$ nu este șir conv.

Terminologie. Șirurile Cauchy se mai numesc șiruri fundamentale

Limitele extreme ale unui șir de nr. reale

Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$

Def. Fie $x \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Spunem că x este pct. limită al șirului dacă $\exists$ $(x_{n_k})_k \subset (x_n)_n$ cu prop. că $\lim\limits_{k \to \infty} x_{n_k} = x$

Not. $\mathcal{L}((x_n)_n) = \{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid x \text{ pct. limită al șirului } (x_n)_n\}$

Prop. Există un cel mai mic pct. lim. (finit sau infinit) al șirului $(x_n)_n$ și un cel mai mare pct. limită (finit sau infinit) al șirului $(x_n)_n$

Def. 1) Cel mai mic pct. limită al șirului $(x_n)_n$ s.n. limita inferioară a se și se notează $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n$ sau $\underline{\lim}\, x_n$.

2) Cel mai mare pct limită al șirului $(x_n)_n$ s.n. limită superioară a sa și se not. $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n$ sau $\overline{\lim}\, x_n$.

Prop: 1) $\underline{\lim}\, x_n \leq \overline{\lim}\, x_n$

2) Șirul $(x_n)_n$ are limită dacă și numai dacă $\underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n$, caz în care avem
$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n$

Exe. Fie $x_n = \frac{1+(-1)^n}{2} + (-1)^n \frac{n}{2n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Sol: $x_{2n} = \frac{1+(-1)^{2n}}{2} + (-1)^{2n} \frac{2n}{4n+1}$

$= 1 + \frac{2n}{4n+1}$ $\lim\limits_{n} x_{2n} = \frac{3}{2}$

$x_{2n+1} = \frac{1+(-1)^{2n+1}}{2} + (-1)^{2n+1} \frac{2n+1}{4n+3}$

$\lim\limits_{n} x_{2n+1} = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$

Pt. că $\mathbb{N} = 2\mathbb{N} \cup (2\mathbb{N}+1) \Rightarrow \mathcal{L}((x_n)_n) = \{-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\}$

$\Rightarrow \underline{\lim}\, x_n = -\frac{1}{2}$

$\overline{\lim}\, x_n = \frac{3}{2}$

$\underline{\lim}\, x_n \neq \overline{\lim}\, x_n \Rightarrow \nexists \lim\limits_{n} x_n$