Curs 3 18.10.2022

Relații de echivalență. Partiții

Teoremă (Cantor) $(\forall) A \neq \emptyset$ $\nexists f: A \to \mathcal{P}(A)$, f surj.

OBS $\mathcal{P}(\emptyset) = \emptyset$

(În particular $A \not\sim \mathcal{P}(A)$)
echipotente

Dem. Pp. $\exists \sigma: A \to \mathcal{P}(A)$

$$\Gamma = \{ x \in A \mid x \notin \sigma(x) \}$$

σ este surj. $\Rightarrow$ ~~$(\exists)\ \gamma \in \Gamma \Leftrightarrow \gamma \notin \sigma(\gamma) = \Gamma$~~

$\exists\ \gamma \in A$ a.î. $\sigma(\gamma) \in \Gamma$

Dem. Dc. $\gamma \in \Gamma \Leftrightarrow \gamma \notin \sigma(\gamma) = \Gamma$

contradicție (⚡)

Dc. $\gamma \notin \Gamma \Rightarrow \gamma \in \sigma(\gamma) = \Gamma$ ⚡

Deci $\nexists\ \sigma: A \to \mathcal{P}(A)$ surj.

Pt. $|A| < \infty \Rightarrow |\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$

Relații binare. Relații de echivalență

Def. O rel. binară este o submulțime a mult. $A \times A$ pe o mult. A. $\sim \subseteq A \times A$

Def. O rel. de echivalență este o rel. binară pe A care are prop.

- $x \sim x$ $\quad \forall x \in A$ $((x, x) \in \sim \subseteq A \times A)$

· simetrică $x \sim y \Rightarrow y \sim x$

· tranzitivitate $x \sim y$ și $y \sim z \Rightarrow x \sim z$

$\pi = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$; $O = (0,0) \notin \pi$

$P, Q \in \pi \stackrel{def}{=} P \sim Q \Leftrightarrow |OP| = |OQ|$

$P \sim P \ (|OP| = |OP|)$

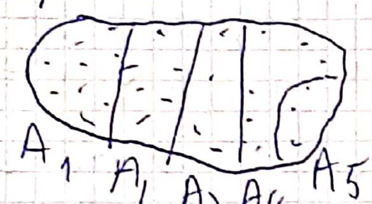
$P \sim Q \Rightarrow Q \sim P \ (|OP| = |OQ| \Leftrightarrow |OQ| = |OP|)$

$P \sim Q$ și $Q \sim R \Rightarrow P \sim R$ ($|OP| = |OQ|$, $|OQ| = |OR|$) $\Rightarrow$

$|OP| = |OR|$

Partiții

Exemplu

$A =$ 

Def. S.n. partiție a mulțimii A o familie de submulțimi disjuncte nevide ale lui A și a cărei reuniune este A

$$A = \bigcup_{i \in I} A_i$$

$A_i \neq \emptyset \ (\forall) i \in I$, $A_i \cap A_j = \emptyset \ (\forall) i, j \in I$

Exemplu: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$

$= \{0, 2, 4, \dots\} \sqcup \{1, 3, 5, \dots\}$

$$A = \bigsqcup_{i \in I} A_i$$

reuniune disjunctă

Def. Fie A pe care am def. "$\sim$" rel. de echivalență.

$[a] = \{x \in A \mid x \sim a\}$ = clasa de echival. a lui "a"

OBS. 1) ~~(A)~~ $(\forall)\ [a] \subset A \quad [a] \neq \emptyset$

pt că $a \sim a$

2) $(\exists)\ x \in [a] \cap [b] \Rightarrow [a] = [b]$

De aici $\Rightarrow (\forall)\ [a], [b] \left\langle \begin{array}{l} [a] = [b] \\ [a] \cap [b] = \emptyset \end{array} \right.$

Dem: $(\exists)\ x \in [a] \cap [b]$

Fie $z \in [a] \Leftrightarrow z \sim a \sim x \sim b$

$\Rightarrow z \sim b \Leftrightarrow z \in [b]$ $([a] \subseteq [b])$

Fie $y \in [b] \Leftrightarrow y \sim b \sim x \sim a \Rightarrow$

$y \in [a]$ $([b] \subseteq [a])$

Relație de echiv. $\longleftrightarrow$ clase de echiv.

$\Rightarrow$ partiție

partiție $\Rightarrow$ clase de echivalență

Dată o partiție pe A $= \bigsqcup_{i \in I} A_i \left(\begin{array}{l} A_i \neq \emptyset \\ A_i \cup A_j = \emptyset \end{array} \right)$

Def. $x \sim y \Leftrightarrow (\exists)\ i \in I$ a.î. $x, y \in A_i$

- $x \sim x$ ($x \in A_i \neq \emptyset$ pt. un singur i)
- $x \sim y \Rightarrow y \sim x$
- $x \sim y \Rightarrow \exists\ i$ a.î. $x, y \in A_i$
  $y \sim z \Rightarrow \exists\ j$ a.î. $y, z \in A_j$ $\Bigg| \Rightarrow y \in A_i \cup A_j = \emptyset$

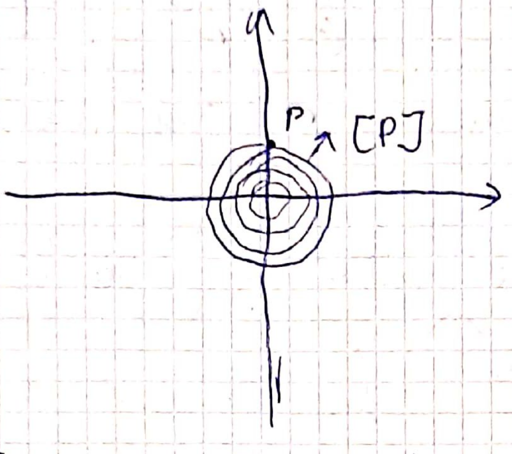
$\Rightarrow i = j$

OBS Prin def. "$\sim$" clasele de echivalență asociate sunt A_i

Exemplu. $P \sim Q$, $P, Q \in \Pi = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$|OP| = |OQ| \Rightarrow [P] = \{ Q \in \Pi \mid |OQ| = |OP| \}$

$$\Pi = \bigsqcup_{P \in \Pi} [P]$$



Teorema împărțirii cu rest

Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$

Atunci $(\forall)\ x \in \mathbb{Z}$ x are o scriere unică

$$x = nq + r, \quad q \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leq r < n$$

Def $x, y \in \mathbb{Z}$ $\quad x \equiv_n y \quad x \equiv y \pmod{n}$

$\overset{def}{\Leftrightarrow} n \mid (x - y)$

$(x - y) = nq, \ q \in \mathbb{Z}$

- $x \sim x \quad x - x = 0 = n \cdot 0$
- $x \sim y \Rightarrow y \sim x \quad x - y = nq \Leftrightarrow y - x = n(-q)$, $-q \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow q \in \mathbb{Z}$
- $\left.\begin{array}{l} x \sim y \Leftrightarrow x - y = nq \\ y \sim z \Leftrightarrow y - z = np \end{array}\right\} \Rightarrow x - z = x - y + y - z$

  $q, p \in \mathbb{Z}$

  $= nq + np$

  $= n(q + p)$

  $\in \mathbb{Z}$

$\mathbb{Z} = \hat{0} \sqcup \hat{1} \sqcup \ldots \sqcup \widehat{n-1}$

Notație $\hat{x} = \{ n\mathbb{Z} + x \mid x \in \mathbb{Z} \}$

Exemplu. Fie $f: A \to B$ funcție

Fie $x, y \in A$ $\quad x \sim y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$

$$A = \bigsqcup_{x \in A} \underbrace{f^{-1}(f(x))} \qquad y \in f^{-1}(f(x)) \Leftrightarrow f(y) = f(x)$$

Def. Fie A mulțime; $\sim$ rel. de echiv. pe A.

$A/_\sim$ = mulțimea factor $= \{ [a] \mid a \in A \}$

$$\mathbb{Z}_n = \{ \hat{0}, \hat{1}, \ldots, \widehat{n-1} \} = \mathbb{Z}/_{\equiv_n}$$

Operații (binare)

Def: Fie A o mulțime o ~~pereche~~ operație binară pe A este $*: A \times A \to A$

$$*(x, y) \overset{not}{=} x * y \in A$$

Def: $*$ s.n. ~~ob~~ asociativă $\Leftrightarrow (\forall) x, y, z \in A$,

$x * (y * z) = (x * y) * z$

$*$ are element neutru $\Leftrightarrow \exists\, e \in A$ a.î.

$e = a * e = e * a \quad \forall a \in A$

OBS. Dc. $(\exists)$ elt. neutru ac. este unic.

Dem. P.p. $(\exists)$ e, f elt. neutre pt. $*$

$$\underset{f \text{ elt. neutru}}{e =} e * f \underset{e \text{ elt. neutru}}{=} f$$

Exemple: $(\mathbb{N}, +)$ $+ : <$ asociativă / are elt. neutru 0.

$(\mathbb{N} \setminus \{0\}, +)$ — asociativă

$(\mathbb{N}^*, \cdot) <$ asociativă / elt. neutru

$(\mathbb{Z}, \cdot) <$ asociativă / elt. neutru / comutativă

Def: "$*$" s.n. comutativă

$\forall x, y \in A, x * y = y * x$

Def: $\emptyset \neq H \subseteq A$ s.n. parte stabilă a lui A în raport cu $* \Leftrightarrow \forall x, y \in H \Rightarrow x * y \in H$

"1" $\supset (\{0, 1\}, \cdot)$
parte stabilă

$\supset (\{0, \pm 1\}, \cdot)$
parte stabilă

Def. $(A, *)$ unde $*$ asociativă
$\parallel$
semigrup

$(A, *)$ este monoid ptr. $* \{$ asociat. / elt. neutru

$(A, \cdot)$ semigrup

$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) = x \cdot y \cdot z = xyz$

În general

$((x_1 \cdot x_2)(x_3 \cdot x_4) \ldots) x_n = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot \ldots x_n$

$x_i \in A \qquad i \in \{1, 2, \ldots, n\}$

Exemple. $(A, \cdot)$ semigrup

$(x_1 \cdot x_2) \cdot (x_3 \cdot x_4) = x_1 (x_2 (x_3 \cdot x_4)) = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4$

• Tabla înmulțirii pe $\{0, \pm 1\}$

$\cdot$	0	-1	1
0	0	0	0
-1	0	1	-1
1	0	-1	1

<u>Exemplu</u>: B, $B^B = \mathcal{F}(B) = \{f : B \to B \mid f \text{ funcție}\}$

$(\mathcal{F}(B), \circ)$ monoid

$f, g, h \in \mathcal{F}(B) \Rightarrow (f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h) = f \circ g \circ h$

$B \xrightarrow{h} B \xrightarrow{g} B \xrightarrow{f} B$

$1_B = \mathbb{1}_B = id_B : B \to B \quad id_B(x) = x$

"$\circ$" NU este comutativă! Fie $b_1 \neq b_2 \in B$

$f_i : B \to B \quad f_i(x) = b_i \quad i = 1, 2$
$(\forall) x \in B$

$(f_1 \circ f_2)(x) = f_1(f_2(x)) = f_1(b_2) = b_1$

$(f_2 \circ f_1)(x) = f_2(f_1(x)) = f_2(b_1) = b_2$ $\quad \neq \forall x \in B$

$\Rightarrow f_1 \circ f_2 \neq f_2 \circ f_1$

Tabla legii de compoziție pt. $(\mathcal{F}(B), \circ)$
unde $B = \{1, 2\} = [2]$

$|\mathcal{F}(B)| = |B|^{|B|} = 2^2$

pt. că $|B| = 2 < \infty$

$\mathcal{F}(B) = \{id_B, \sigma = (1\,2), u, d\}$

$id_B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad u = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$d = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\circ$	1_B	∇	u	d
1_B	1_B	∇	u	d
∇	∇	1_B	d	u
u	u	u	u	u
d	d	d	d	d