

MÉCANIQUE DES FLUIDES. — Sur les conditions hydrodynamiques au voisinage d'une interface milieu fluide-milieu poreux : application à la convection naturelle.

Note de **Eric Arquis** et **Jean-Paul Caltagirone**, présentée par Michel Combarous.

Remise le 19 mars 1984.

Le problème des conditions aux limites hydrodynamiques à l'interface milieu fluide-milieu poreux est abordé globalement en considérant une couche intermédiaire où la perméabilité varie continûment dans un fluide fictif ayant des comportements limites correspondants aux deux milieux considérés. Cette approche est appliquée au cas de la convection naturelle dans une cavité occupée par moitié par le milieu poreux.

MECHANICS OF FLUIDS. — On the Hydrodynamical Boundary Conditions along a Fluid Layer-Porous Medium Interface: Application to the Case of Free Convection.

The hydrodynamical boundary conditions problem along a fluid layer-porous medium interface is studied globally. We consider an intermediate layer where permeability continuously varies in a fictitious fluid with limit behaviour corresponding to considered media. This model is applied to a case of a natural convection flow in a vertical enclosure half occupied by the two media.

1. Les phénomènes hydrodynamiques à l'interface entre un fluide et un milieu poreux ouvert sont mal connus à ce jour, or leur importance est certaine dans de nombreuses applications telles que séchage, isolation... Certes un modèle semi-empirique de conditions à la limite a été proposé par Beavers et Joseph [1] dans le cas d'un écoulement laminaire établi parallèle à une couche poreuse. La condition à la limite est écrite sous la forme :

$$(1) \quad dv/dx = \alpha (v - V)/K^{1/2},$$

v désigne la vitesse tangentielle dans le fluide, V la vitesse de filtration dans le milieu poreux, x l'axe normal à l'interface, K la perméabilité du milieu poreux supposé isotrope et homogène et α un paramètre dont la signification physique n'apparaît pas complètement établie, mais des travaux récents [2] ont permis de progresser dans sa connaissance.

La forme de cette relation a été, par la suite, justifiée expérimentalement puis validée par des études théoriques [3] faisant notamment appel aux techniques d'homogénéisation [4]. La condition (1) porte uniquement sur la composante tangentielle de la vitesse : on ne dispose, à ce jour, d'aucune information sur la composante normale.

Pour le problème de la convection naturelle dans une cavité fluide verticale jouxtée par une couche poreuse, l'hypothèse couramment admise dans les études de stabilité en couche horizontale et qui laisse libre la condition sur la vitesse normale est irrecevable dans le cas de phénomènes convectifs amplifiés non linéaires. Notre objectif est d'établir une méthode nous permettant de combler cette carence.

D'une manière plus globale, le passage de l'équation de quantité de mouvement en fluide, dite de Navier-Stokes, à celle de Darcy en milieu poreux, étudié par Brinkman pour l'écoulement d'un fluide dans un milieu dispersé [5] a été repris récemment [6].

2. LE CONCEPT DE ZONE DE TRANSITION A PERMÉABILITÉ VARIABLE. — Le moyen retenu pour nous affranchir de conditions à la limite est de décrire par une équation unique, le passage d'un milieu à l'autre se faisant continûment par le concept de zone intermédiaire.

En pratique, l'équation de conservation de la quantité de mouvement devient une combinaison de l'équation de Navier-Stokes et de celle de Darcy, le paramètre de

transition étant la perméabilité K fonction d'espace :

$$(2) \quad \rho(DV/Dt) = \mu \nabla^2 V - (\mu/K(x) V - \nabla p + \rho g).$$

Lorsque la perméabilité est très grande, le terme de Darcy est négligeable devant celui de diffusion, et réciproquement. Pour des valeurs intermédiaires de K , les deux termes coexistent : on retrouve une écriture qui évoque l'équation de Brinkman.

De la même façon, l'équation de l'énergie s'écrit, si l'on suppose une variation de la conductivité, isotrope, λ et de la chaleur massique ρC avec l'abscisse x :

$$(3) \quad (\rho C)(x)(DT/Dt) = \lambda(x) \nabla^2 T + (d\lambda/dx)(\partial T/\partial x).$$

La représentativité de l'équation (2) a été éprouvée en unidimensionnel dans le cas d'un conduit contenant les deux milieux disposés parallèlement à un écoulement forcé. Le profil obtenu par la résolution de cette équation permet de retrouver les profils parabolique et plat caractéristiques des deux milieux raccordés continûment dans la zone intermédiaire.

3. APPLICATION : CONVECTION NATURELLE DANS UNE CAVITÉ VERTICALE. — Un des problèmes les plus étudiés dans le domaine de la convection naturelle correspond à la cavité verticale chauffée différentiellement tant en milieu fluide qu'en milieu poreux. Les résultats numériques et expérimentaux sont nombreux.

Un modèle numérique aux différences finies basé sur l'algorithme des directions alternées intègre le système d'équations suivant (4). Les variables d'espace sont rendues adimensionnelles par la largeur totale L , le temps par le rapport de la diffusivité thermique du fluide à L^2 et la température par l'écart entre les deux parois verticales extrêmes.

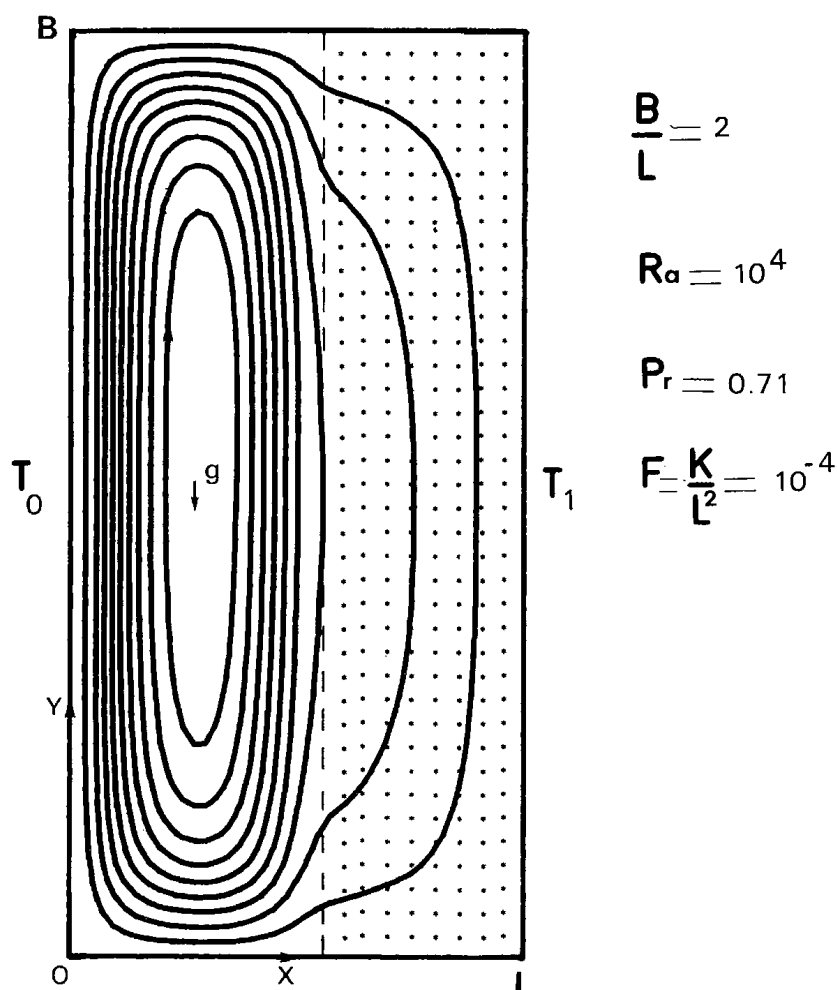
$$(4) \quad \begin{cases} \nabla^2 T + (dN/dx)(\partial T/\partial x) = M(DT/Dt), \\ \nabla^2 \omega - H^{-1} \omega + (H^{-2} dH/dx) V + Ra(\partial T/\partial x) = Pr^{-1}(D\omega/Dt), \end{cases}$$

avec les conventions : $U = -\partial\psi/\partial y$; $V = \partial\psi/\partial x$; $\omega = -\nabla^2 \psi$ et $N(x) = \lambda(x)/\lambda_f$, $M(x) = (\rho C)(x)/(\rho C)_f$ et $H(x) = K(x)L^{-2}$.

Dans cette écriture, apparaissent les paramètres de similitude de Rayleigh $Ra = g\beta\Delta TL^3/\nu a$ et de Prandtl, $Pr = \nu/a$ ainsi que les rapports $A = B/L$, facteur de forme et, implicitement $F = K^*/L^2$, finesse du milieu poreux, et $\Lambda = \lambda^*/\lambda_f$, rapport des conductivités du milieu poreux et du fluide, pris par la suite égal à 1, comme d'ailleurs $M(x)$.

Le modèle a d'abord été testé pour validation sur les cas limites correspondant au milieu fluide seul d'une part, et au milieu poreux d'autre part. La quantité H est alors prise constante et égale respectivement à 10^{-2} et 10^{-6} . Un balayage systématique sur H nous a permis de constater que le passage de Navier-Stokes à Darcy se faisait pour une valeur avoisinant 10^{-3} , limite à la loi de Darcy que donnent certains auteurs [7].

Puis, nous avons résolu le problème avec une variation continue de la perméabilité. H passe de la valeur fictive 10^{-2} à la finesse F du milieu poreux, la zone de transition occupant dans cet exemple numérique 10% de la largeur totale. La figure montre un écoulement typique obtenu pour un Rayleigh de 10^4 , un Prandtl de 0,71, un allongement de 2 et une finesse F de 10^{-4} .



Lignes de courant dans une cavité verticale (fluide à gauche, milieu poreux à droite).
Streamlines in a vertical enclosure (fluid to left, porous medium to right).

Les lignes de courant sont concentrées évidemment dans la partie fluide de la couche : on remarque une pénétration de certaines lignes de courant dans la partie poreuse, avec une réfraction notable. Le module de la vitesse maximale verticale est de 3 dans le fluide pour 0,5 dans le milieu poreux, mais la finesse est ici très grande. Pour des finesse plus faibles telles que 10^{-8} , l'écoulement reste pratiquement confiné dans le fluide.

4. La méthode proposée, décrite ici sur un problème d'écoulement de convection naturelle à l'interface entre un fluide et un milieu poreux, est en fait très générale.

Nous l'avons appliquée dans un premier temps à des problèmes pour lesquels existent une solution analytique : conduction dans des solides adjoints, écoulement d'un fluide de viscosité variable... Si l'accord est excellent pour un cas simple, il convient d'être plus prudent pour généraliser : une expérimentation et un approfondissement restent indispensables pour valider cette modélisation.

Si la réponse à ces interrogations était positive, on pourrait alors concevoir le traitement de nombreux problèmes, en particulier ceux à une géométrie complexe : la position et la nature d'une singularité par exemple étant très simple à injecter dans un modèle numérique.

Les auteurs expriment leur reconnaissance à Guy Lauriat pour ces remarques précieuses et fructueuses.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] G. S. BEAVERS et D. D. JOSEPH, *J. Fluid. Mech.*, 30, part 1, 1967, p. 197-207.
- [2] S. M. ROSS, *A.I.C.H.E. J.*, 29, n° 5, 1983, p. 840-846.
- [3] P. G. SAFFMAN, *Stu. Appl. Math.*, 50, 1971, p. 93-101.
- [4] H. I. ENE et E. SANCHEZ-PALENCIA, *J. Mécan.*, 14, n° 1, 1975, p. 73-108.
- [5] M. C. BRINKMAN, *Appl. Sc. Res.*, A 1, 1947, p. 81-86.
- [6] D. A. NIELD, *J. Fluid. Mech.*, 128, 1983, p. 37-46.
- [7] Y. KATTO et T. MASUOKA, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 10, 1967, p. 297-309.

*Laboratoire Energétique et Phénomènes de Transfert,
L.E.P.T.-E.N.S.A.M., Unité associée au C.N.R.S.,
Esplanade des Arts et Métiers, 33405 Talence Cedex.*