

Mécanique des fluides/*Fluid Mechanics*

## Sur l'interaction fluide-milieu poreux; application au calcul des efforts exercés sur un obstacle par un fluide visqueux

Jean-Paul CALTAGIRONE

**Résumé** – La détermination de la pression à l'intérieur d'un obstacle solide est obtenue à partir de la résolution simultanée de l'équation de Navier-Stokes pour la partie fluide et d'une équation du mouvement de type Brinkman pour la partie solide. La connaissance de la distribution dans l'obstacle permet de calculer les différentes contributions de la traînée et de la portance.

### Fluid-porous media interaction; application to the determination of the forces exerted by a viscous fluid on an obstacle

**Abstract** – The determination of the pressure inside a solid obstacle is obtained by a coupled resolution of the Navier-Stokes equation in the fluid domain and the Brinkman equation in the solid. Knowledge of the pressure distribution in the solid enables us to calculate the different contributions of the drag and lift forces.

**Abridged English Version** – The flow of a viscous fluid around an obstacle is obtained by solving the Navier-Stokes-Brinkman equations. These equations governing momentum characterize the flow of a newtonian fluid that contains fixed solid particles. The diameter of these particles has an order of magnitude less than the distance between them. When this distance tends to zero, the behaviour of the fluid becomes closer to that of the solid. With knowledge of the pressure and the velocity fields inside the obstacle, it is easy to determine the forces exerted by the external fluid on the obstacle boundary.

This methodology is applied to a homogenization problem on a periodic cell. The goal is to calculate the equivalent permeability tensor and the different constraint components on the solid.

The modelization of such a problem is performed in the following way. The obstacle is represented by a set of particles of diameter  $d$  which are separated by a distance of length  $l$ , with  $\varepsilon = d/l \ll 1$ . Each particle applies on the fluid a drag which can be estimated by Stokes hypothesis ( $Re = \rho V_0 d/\mu \ll 1$ ). For example, if the particles are spherical, the force exerted by each particle is equal to  $\tilde{f} = 3\pi\mu V_0 d$ . It is then possible to determine a volumic force  $f = 3\pi\mu V_0 d/l^3$ .

The global force is expressed by:

$$F = -\frac{3\pi\varepsilon}{l^2} \iiint_{\Omega_p} \mu V dv$$

We can identify the ratio in front of the integral with the porous medium permeability  $K \propto l^2/3\pi\varepsilon$ . When the distance between particles tends to zero while keeping  $\varepsilon$  constant, the behaviour of this cluster tends to that of the solid, proportionally as the square of the distance between particles. The velocity within this set of particles tends to zero too, particularly on the boundary where there is adhesion. The external flow becomes completely independent of the structure and of the internal variables of the cluster.

The contributions of the pressure and the viscous constraints on the total drag can be expressed with this present method, by integration on the surface obstacle, or by using the

Note présentée par Évariste SANCHEZ-PALENCIA.

divergence theorem on the volume obstacle. The latter form allows a precise estimation of the total adimensional constraint:

$$F_t = F_p + F_v = \iiint_{\Omega_p} \frac{V}{\text{Re Da K}} dv = - \iiint_{\Omega_p} \nabla p dv + \iiint_{\Omega_p} \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 V dv$$

Each integral can be computed easily and accurately. In the first integral, the velocity and the permeability both tend to zero, but the ratio is still perfectly determined and is of order one. We note that the integral of the pressure gradient over the complementary of  $\Omega_p$  gives the viscous drag.

The equations are discretized with a finite volume method, on a cartesian mesh where the obstacle is approximated by cartesian rectangular meshes. The Navier-Stokes-Brinkman equations are solved by an augmented lagrangian technique. That leads to a coupled non-symmetric linear system for the velocity components the resolution of such a system is performed by a preconditioned conjugate gradient method (BI-CGSTAB + MILU).

We show the efficiency of this method in the following homogenization numerical test: an incompressible flow, periodic in an elementary square cell as shown in figure 1. The calculations are performed on a network of square meshes, including a cylinder of radius equal to 0.25. We study first the influence of the Reynolds number on the permeability (fig. 2). The results we obtain are in agreement with previous ones (Gipouloux *et al.*, 1991; Gipouloux, 1992). Figure 3 shows an example of result of the pressure field obtained for a Reynolds number based on the pressure gradient. The velocity inside the cylinder inclusion is of magnitude order  $10^{-20}$ , although the average velocity is of order one.

The simultaneous resolution of Navier-Stokes equations in the fluid domain and the Brinkman equation inside the solid, enables the prolongation of the pressure within the obstacle. The applications of such pressure calculations inside obstacles are numerous; such as, drag and lift profiles, or interactions between particles.

1. INTRODUCTION. – L'écoulement d'un fluide visqueux autour d'un obstacle ou d'un profil est généralement obtenu par la résolution des équations de Navier-Stokes et des conditions aux limites traduisant l'adhérence du fluide sur la surface sans nécessité de connaître les propriétés physiques de ce corps. On suppose généralement que le profil est rigide et indéformable. La connaissance du champ de vitesse autour d'un obstacle solide permet de calculer la force exercée par l'écoulement du fluide visqueux sur celui-ci. La détermination numérique de cette force reste toutefois peu précise puisqu'elle fait intervenir la répartition de la pression et les gradients de vitesse à la surface de l'obstacle.

L'idée proposée ici consiste à affecter à l'obstacle des propriétés particulières sauvegardant bien entendu l'adhérence du fluide visqueux à la paroi. La notion de pression dans le solide peut permettre d'améliorer l'évaluation de l'action du fluide sur celui-ci et de calculer toutes les composantes de la traînée et de la portance.

L'introduction d'un terme de traînée volumique de type Darcy dans l'équation de Navier-Stokes permet de rendre compte des écoulements de fluide dans des systèmes mixtes fluide-poreux (Arquis *et al.*, 1974; Le Breton *et al.*, 1991). Cette équation du mouvement de type Navier-Stokes-Brinkman représente en fait l'écoulement d'un fluide fictif composé d'un fluide newtonien parsemé de particules solides, fixes, dont le diamètre est d'ordre de grandeur très inférieur à la distance entre les particules (Levy, 1981). Tout

en restant dans cette hypothèse, le rapprochement des particules permet de faire tendre le comportement de ce fluide vers celui du solide; le paramètre indépendant contrôlant l'évolution vers le solide est la perméabilité  $K$ .

Une autre approche est proposée : elle consiste à trouver la solution globale, vitesses et pression, dans un système composite fluide-solide, en résolvant l'équation de Navier-Stokes dans la zone fluide et l'équation de Brinkman dans le milieu poreux dont la perméabilité tend vers zéro.

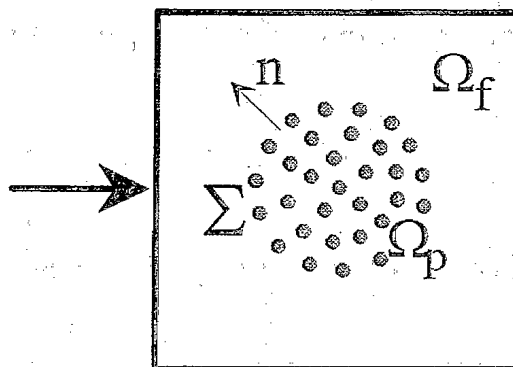
De la connaissance des champs de pression et de vitesses dans l'obstacle, il est alors aisé de déterminer les forces appliquées sur sa frontière par le fluide extérieur.

L'application de cette méthode est effectuée sur un problème d'homogénéisation classique sur une cellule élémentaire; l'objet est entre autres de calculer le tenseur de perméabilité et d'évaluer les différentes composantes de la traînée des particules solides dans un volume élémentaire représentatif.

2. FORMULATION DU PROBLÈME. — Considérons un écoulement périodique incompressible de fluide newtonien dans un réseau représentant un milieu poreux modèle. La cellule de base de longueur caractéristique  $L$  contient un obstacle immobile représenté par un volume de contrôle  $\Omega_p$  limité par une surface  $\Sigma$  munie d'un vecteur normal unitaire extérieur  $n$  (fig. 1). Le fluide de viscosité  $\mu$  et de masse volumique  $\rho$  sature complètement le milieu poreux.

Fig. 1. — Cellule périodique élémentaire.

Fig. 1. — Elementary periodic cell.



La modélisation de ce problème est effectuée de la manière suivante :

L'obstacle est constitué par un ensemble de particules de diamètre  $d$  et distantes d'une longueur  $l$  avec  $\varepsilon = d/l \ll 1$ . L'écoulement dans un tel milieu est représenté par une loi de Brinkman. Chaque particule produit sur le fluide une traînée qui peut-être calculée dans l'hypothèse de Stokes ( $Re = \rho V_0 d / \mu \ll 1$ ) où  $V_0$  est la vitesse en amont de chacune des particules). Par exemple s'il s'agit de particules sphériques, la particule exerce une force égale à  $\tilde{f} = 3\pi\mu V_0 d$ . Il est alors possible de définir une force volumique égale à  $f = 3\pi\mu V_0 d / l^3$ .

La force appliquée par cet amas de particules sur le fluide est alors :

$$\mathbf{F} = -\frac{3\pi\varepsilon}{l^2} \iiint_{\Omega_p} \mu \mathbf{V} dv$$

Il est possible d'identifier alors le groupement devant l'intégrale à la perméabilité du milieu poreux :  $K \propto l^2 / 3\pi\varepsilon$ . Lorsque la distance entre particules tend vers zéro à  $\varepsilon$  constant, le comportement de cet agrégat tend, comme le carré de la distance inter-particules, vers celui du solide. La vitesse au sein de cet ensemble de particules tend aussi vers zéro, notamment à la frontière vérifiant ainsi la condition d'adhérence à la paroi.

L'écoulement externe devient complètement indépendant de la structure et des variables internes de l'agrégat.

La quantité d'accélération de cet ensemble de particules fixes étant nulle, le principe de la dynamique s'écrit :

$$-\iiint_{\Omega_p} \frac{\mu}{K} \mathbf{V} dv + \iint_{\Sigma} \mathbf{T} ds = 0$$

En exprimant la contrainte, on aboutit à la loi locale de Brinkman. Les conditions aux limites à l'interface entre l'écoulement de fluide pur et l'écoulement interne à l'amas sont des conditions de raccordement de la pression et des contraintes normale et tangentielle. Les efforts visqueux ou de pression peuvent ainsi être calculés à l'intérieur du domaine.

Les contributions de la pression et des tensions visqueuses sur la traînée totale peuvent, à l'aide de la méthode présentée, être évaluées aisément soit par intégration sur la surface de l'obstacle, soit, en utilisant le théorème de la divergence, sur le volume de celui-ci. Cette dernière forme permet une évaluation précise de la contrainte adimensionnelle totale :

$$\mathbf{F}_t = \mathbf{F}_p + \mathbf{F}_v = \iiint_{\Omega_p} \frac{\mathbf{V}}{\text{Re Da K}} dv = - \iiint_{\Omega_p} \nabla p dv + \iiint_{\Omega_p} \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \mathbf{V} dv$$

Chacune de ces intégrales peut-être évaluée aisément et précisément. Dans la première intégrale, la vitesse et la perméabilité tendent simultanément vers zéro mais le rapport reste parfaitement déterminé et d'ordre un. Il est à remarquer que l'intégrale du gradient de pression dans le complémentaire de  $\Omega_p$  donne la traînée visqueuse.

L'objectif de cette étude est la résolution simultanée des équations de Navier-Stokes dans le fluide et de la loi de Brinkman dans le milieu poreux pseudo-solide. Le système d'équations correspondant s'écrit :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{V} &= 0 \quad \text{dans } \Omega_p \cup \Omega_f \\ \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} - \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \mathbf{V} + \nabla p &= 0 \quad \text{dans } \Omega_f \\ \frac{1}{\text{Re Da}} \frac{\mathbf{V}}{K} - \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \mathbf{V} + \nabla p &= 0 \quad \text{dans } \Omega_p \end{aligned}$$

où  $\text{Da} = K_0/L^2$  est le nombre de Darcy traduisant les effets visqueux de Brinkman par rapport aux effets de traînée de Darcy. Il est à noter que lorsque le nombre de Darcy tend vers zéro, la dernière équation dégénère vers la loi de Darcy.

La résolution de l'équation de Navier-Stokes avec la contrainte d'incompressibilité permet de trouver les champs de pression et de vitesses en tenant compte des conditions aux limites adéquates sur le domaine  $\Omega_p$ . Si l'obstacle est solide la condition est l'adhérence à la paroi, si, par contre, l'obstacle est de forte perméabilité, la condition à la limite traduit la continuité des contraintes normale et tangentielle et de la pression à l'interface.

**3. RÉSOLUTION NUMÉRIQUE.** — La simulation numérique est effectuée par une méthode de volumes finis sur un maillage cartésien et décalé en vitesse-pressure. L'obstacle est alors approché par une succession de mailles rectangulaires. Les volumes de contrôle d'une seule espèce, solide ou fluide, prennent les propriétés : masse volumique, perméabilité, etc. du sous-domaine correspondant.

L'algorithme de résolution simultanée des composantes de la vitesse et de la pression est une méthode de Lagrangien Augmenté correspondant au traitement implicite de la méthode classique de compressibilité artificielle (Fortin *et al.*, 1982).

Cette méthode conduit à un système linéaire couplé dont les inconnues sont les composantes ( $u, v, w$ ) de la vitesse  $V$ . La résolution de celui-ci est effectuée par la méthode de gradient conjugué Bi-CGSTAB (Van Der Vorst *et al.*, 1990) préconditionné par une factorisation incomplète de Gauss. La résolution spatiale adoptée est de  $32^2$  ou de  $64^2$ . La divergence de la vitesse a été dans chacun des cas inférieure à  $10^{-12}$ .

4. RÉSULTATS SUR UNE CELLULE ÉLÉMENTAIRE. — On montre la validité et l'efficacité de la méthodologie proposée sur un cas test est étudié ayant fait l'objet de nombreux travaux (Coulaud *et al.*, 1988; Gipouloux *et al.*, 1991; Gipouloux, 1992), dans le cadre de l'homogénéisation : il s'agit d'un écoulement incompressible, périodique dans une cellule élémentaire carrée présentée sur la figure 1.

Le problème consiste à décomposer la pression (Sanchez-Palencia, 1980) en une partie linéaire et une perturbation de pression périodique  $\bar{p}$  :

$$p = \bar{p} + \langle \nabla p \rangle \cdot x$$

L'homogénéisation des équations de Navier-Stokes conduit à la détermination d'un pseudo-tenseur de perméabilité, dépendant du nombre de Reynolds et non symétrique dans le cas général.

Les calculs ont été effectués sur un réseau à mailles carrées et pour une inclusion cylindrique de rayon égal à 0,25. Dans un premier temps l'influence du nombre de Reynolds sur la perméabilité a été étudiée (fig. 2); elle est en très bon accord avec les résultats obtenus antérieurement (Gipouloux *et al.*, 1991; Gipouloux, 1992). La résolution d'une équation de Brinkman dans l'inclusion n'affecte en rien l'écoulement au sein de la cellule.

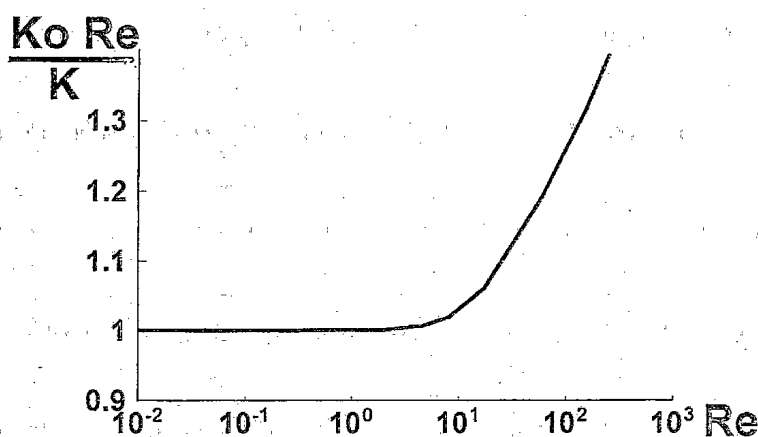


Fig. 2. — Écart à la loi de Darcy; Évolution du groupement  $K_0 Re/K$  où  $K_0$  est la perméabilité intrinsèque en régime de Stokes.

Fig. 2. — Difference from Darcy law; Evolution of  $K_0 Re/K$  where  $K_0$  is the intrinsic permeability in Stokes regime.

Avec la méthodologie numérique mise au point, le calcul de la traînée totale et de la traînée de pression ne pose aucune difficulté et ne nécessite aucune extrapolation de la pression ou des gradients de vitesse à l'interface. Elle est de plus tout à fait conforme à la discrétisation spatiale dans le domaine. La figure 3 montre les évolutions des traînées de pression et totale en fonction du nombre de Reynolds basé sur la vitesse de débit. Lorsque le nombre de Reynolds augmente au-delà de l'unité, la pression augmente alors

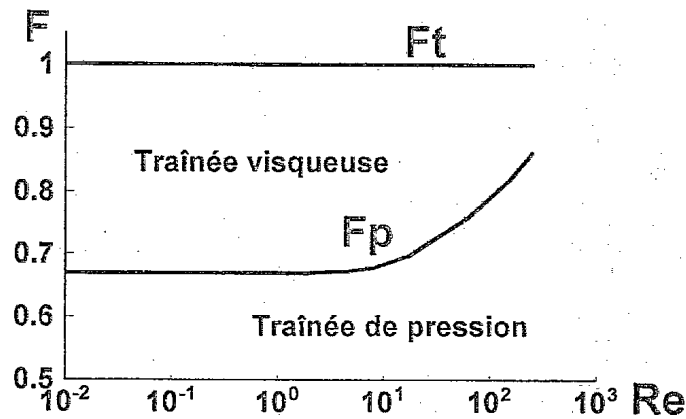


Fig. 3. — Représentation des différentes contributions de la traînée réduite.

*Fig. 3. — Different contributions of adimensional drag.*

que les effets visqueux diminuent relativement. La traînée totale calculée à l'aide de  $V/K$  est très précisément égale à l'unité.

La somme des traînées visqueuses et de pression, dans ce cas où la traînée induite est négligeable, est égale évidemment au gradient de pression unitaire imposé par la section de la cellule (unitaire aussi). Dans le cas d'une cellule anisotrope la méthode permettrait de calculer les portances visqueuses et de pression.

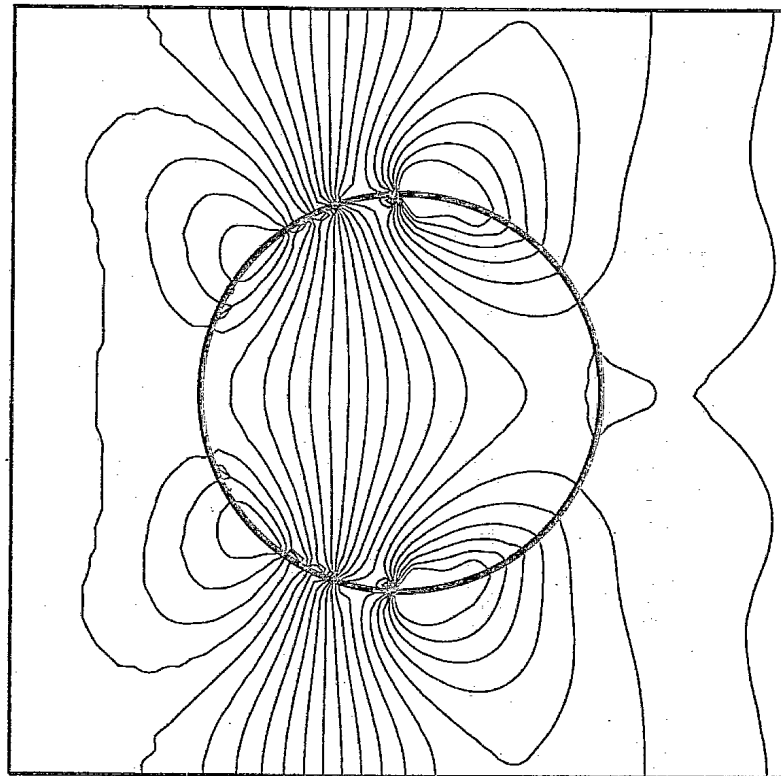


Fig. 4. — Isobares pour une inclusion cylindrique de rayon 0,25 et  $Re_p = 80$ .

*Fig. 4. — Isobars for a particle of radius 0.25 and  $Re_p = 80$ .*

La figure 4 donne un exemple de résultat sous la forme d'un champ de pression obtenu pour un nombre de Reynolds de pression égal à 80 et une inclusion cylindrique de rayon 0,25. La vitesse dans l'inclusion pseudo-solide est de l'ordre de  $10^{-20}$  alors que la vitesse moyenne de l'écoulement est d'ordre un. Le champ de pression dans l'inclusion est cohérent avec celui de l'écoulement externe qui montre l'existence de zones de recirculations isobares dans la partie médiane entre les cylindres.

5. CONCLUSIONS. — La résolution simultanée des équations de Navier-Stokes dans le fluide et de Brinkman dans l'obstacle solide permet le prolongement de la pression dans celui-ci. Cette méthodologie peut aussi être utilisée avec des équations d'Euler ou de Stokes résolues sur des sous-domaines différents par des méthodes locales ou multi-domaines. Les applications potentielles de la détermination de la pression dans les obstacles sont nombreuses : traînée et portance de profils, interactions entre particules, etc. La résolution numérique couplée des équations comporte aussi quelques avantages tels que la précision ou la continuité de toutes les variables du problème.

Note remise le 12 octobre 1993, acceptée le 26 janvier 1994.

#### RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- E. ARQUIS et J. P. CALTAGIRONE, Sur les conditions hydrodynamiques au voisinage d'une interface milieu fluide-milieu poreux : application à la convection naturelle, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 299, série II, 1984, p. 1-4.  
O. COULAUD, P. MOREL et J. P. CALTAGIRONE, Numerical modelling of nonlinear effects in laminar flows through a porous medium, *J. of Fluid Mech.*, 190, 1988, p. 393-407.  
M. FORTIN et R. GLOWINSKI, Méthodes de Lagrangien Augmenté; Application à la résolution numérique de problèmes aux limites, Méthodes Mathématiques de l'Informatique, Dunod, 1982.  
O. GIPOULOUX, J. P. CALTAGIRONE et P. MOREL, Approche numérique du comportement de la loi de Darcy en fonction du nombre de Reynolds, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 313, série II, 1991, p. 1493-1498.  
O. GIPOULOUX, Contribution numérique à l'homogénéisation des équations de Stokes et de Navier-Stokes en milieu poreux, Thèse, Université Bordeaux-I, 1992.  
P. LE BRETON, J. P. CALTAGIRONE et E. ARQUIS, Natural convection in a square cavity with thin porous layers on its vertical walls, *J. of Heat Transfer*, 113, 1991, p. 892-898.  
Th. LEVY, Loi de Darcy ou loi de Brinkman, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 292, série II, 1981, p. 871-874.  
E. SANCHEZ-PALENCIA, Non homogeneous media and vibration theory, *Lectures Notes in Physics*, Springer, 1980, p. 127.  
H. A. VAN DER VORST et P. SONNEVELD, CGSTAB : A more smoothly converging variant of CG-S, Delft University of Technology, 1990.

Laboratoire MASTER-ENSCPB,  
351, cours de la Libération, 33405 Talence Cedex, France.