

Métodos Numéricos - Integração Numérica

Gustavo Aparecido de Souza Viana

Abstract—Métodos numéricos são utilizados a fim de aproximar a solução de um determinado problema, como por exemplo resolução de integral, derivada e entre outros. De contra partida, esse método de resolução é mais custoso do que soluções fechadas. Neste trabalho será abordado a implementação da resolução de Integral utilizando técnicas de Integração Numérica. Os resultados mostraram que é possível estimar o valor da integral, mas dependendo do quantidade de divisões aplicadas a integral que é utilizado pode ser que a resposta não apresente a acurácia desejada.

I. INTRODUÇÃO

Métodos numéricos são utilizados em diversas áreas como por exemplo em redes neurais para saber se a rede converge ou não, e para resolver problemas computacionais mas não de forma exata, ou seja, métodos numéricos chegam a solução desejada com uma taxa de erro, assim o usuário minimizará o erro para que seja irrelevante.

Métodos numéricos pelo fato de serem métodos de otimização, ou seja, necessitam de diversas iterações para se aproximarem da solução desejada. Ou seja, a cada iteração irá se aproximando da solução final, consequentemente são métodos que possuem um alto custo computacional.

Neste trabalho foi abordado a implementação de métodos de Integração Numérica com objetivo de resolver integral, as técnicas utilizadas foram: Ponto Médio, Trapezoidal e Simpson.

II. CONCEITOS FUNDAMENTAIS

Nesta seção, será apresentado os conceitos básicos de Quadratura Numérica, Ponto Médio ou Retângulos, Trapezoidal e Simpson utilizados na integração numérica.

A. Quadratura Numérica

O método consiste em aproximar a resolução da integral, por meio de otimização, ou seja, iterar N vezes até que o método utilizado (Ponto Médio, Trapezoidal ou Simpson) supra o erro máximo desejado. Representação da Quadratura Numérica na Equação 1.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^n \alpha_i f(x_i) \quad (1)$$

B. Ponto Médio ou Retângulos

Na Figura 1 podemos ver que o valor da integral é aproximada por meio de divisões em formatos de retângulos. A Equação 2 representa a fórmula para integrar e a Equação 3 a fórmula para aproximar o erro.

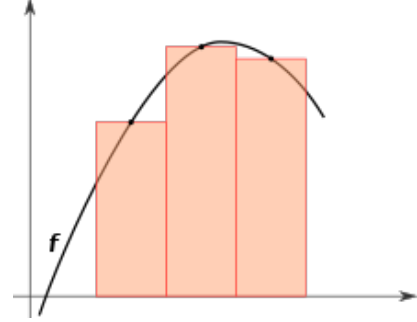


Fig. 1: Representação da Regra Ponto Médio ou Retângulos

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) \quad (2)$$

$$\frac{\left(\frac{b-a}{n}\right)^3}{24} f''\left(\frac{b-a}{2}\right) \quad (3)$$

C. Trapezoidal

Na Figura 2 podemos ver que o valor da integral é aproximada por meio de divisões em formatos de trapézios. A Equação 4 representa a fórmula para integrar e a Equação 5 a fórmula para aproximar o erro.

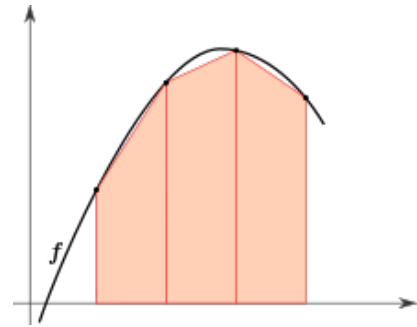


Fig. 2: Representação da Regra Trapezoidal

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} \quad (4)$$

$$\frac{-\left(\frac{b-a}{n}\right)^3}{12} f''\left(\frac{b-a}{2}\right) \quad (5)$$

D. Simpson

Na Figura 3 podemos ver que o valor da integral é aproximada por meio de divisões em formatos curvos mais precisos. A Equação 6 representa a fórmula para integrar e a Equação 7 a fórmula para aproximar o erro.

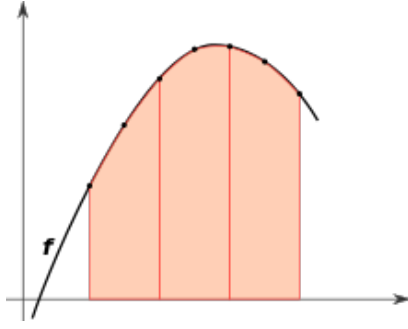


Fig. 3: Representação da Regra de Simpson

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a) \frac{f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)}{6} \quad (6)$$

$$-\frac{(\frac{b-a}{n})^5}{90} f'''(\frac{b-a}{2}) \quad (7)$$

III. METODOLOGIA

Nesta seção será apresentado a metodologia utilizada para implementar regra de Ponto médio, Trapezoidal e Simpson utilizando Quadratura Numérica, implementados em C++. O código fonte pode ser encontrado em <https://github.com/aparecido/ProgramacaoCientifica>.

Grande maioria dos métodos utilizaram função como parâmetros, para isso foi utilizado o método *bind* para passar a função como parâmetro e para receber a classe *function* da biblioteca do C++ chamada *functional.h*.

Para cada técnica, foram implementados dois métodos com a responsabilidade de calcular a integral e o outro calcular a taxa de erro. Ambos métodos seguem as fórmulas citadas na sessão de Conceitos Fundamentais.

O método para calcular a integral, chamado de "mid-point" ou "trapezoidal" ou "simpson", recebe somente um parâmetro, consiste em ser a função que deverá ser integrada.

O método para calcular o erro, chamado de "mid-point_error" ou "trapezoidal_error" ou "simpson_error", recebe dois parâmetros, sendo que o primeiro consiste em ser a função que deverá ser integrada e o segundo na quantidade de divisões que a região de integração deverá ser dividida.

O método que implementa a Quadratura Numérica chamado de "numeric_square_by_divisions" que recebe três parâmetros, o primeiro sendo a função de integração, o segundo o método numérico, e o terceiro a quantidade de divisões que será feita na região de integração. Como podemos ver no pseudocódigo 1.

Algorithm 1: numeric_square_by_divisions(Func f, Func method, int divisions)

```

result = 0.0;
count = 0;
interval = (_b - _a) / divisions;
DynamicQueue queue;
while count < divisions do
    _b = _a + interval;
    queue.enqueue(method(f));
    _a += interval;
    count++;
end
while !queue.is_empty() do
    result += queue.dequeue();
end
return result;

```

Outro método que implementa a Quadratura Numérica chamado de "numeric_square_by_error" usa como referência erro máximo que a técnica utilizada deverá apresentar para achar a solução final. O método recebe quatro parâmetros, o primeiro sendo a função de integração, o segundo o método numérico, o terceiro a função de cálculo de erro, e o quarto sendo o erro máximo. Como podemos ver no pseudocódigo 2.

Algorithm 2: numeric_square_by_error_rate(Func f, Func method, Func error_method, double error_rate)

```

result = 0.0;
error = 0.0;
int divisions = 1;
error = numeric_error(f, divisions); while error >
    error_rate do
        error = numeric_error(f, divisions); divisions++;
    end
;
result = numeric_square_by_divisions(f,
    numeric_method, divisions);
return result;

```

IV. EXPERIMENTOS E RESULTADOS

Nesta seção será apresentado os experimentos e seus respectivos resultados.

A Figura 4 representa os resultados contendo o valor de integração, erro e quantidade de divisões na região de integração, representando a Equação 8, Equação 9 e Equação 10 respectivamente. O experimento feito utilizou uma taxa de erro máximo de 0.05.

$$\int_0^1 e^x dx \quad (8)$$

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx \quad (9)$$

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx \quad (10)$$

```

Error rate: 0.05

f(x) = e^x
Error: 0.00859482 - Divisions: 2 - Midpoint: 1.70051
Error: -0.137517 - Divisions: 1 - Trapezoidal: 1.85914
Error: -0.018343 - Divisions: 1 - Simpson: 1.71886

f(x) = square(1-x^2)
Error: -0.0642658 - Divisions: 1 - Midpoint: 0.866025
Error: 0.0160665 - Divisions: 2 - Trapezoidal: 0.683013
Error: 0.00577084 - Divisions: 2 - Simpson: 0.770899

f(x) = e^(-x^2)
Error: -0.032304 - Divisions: 1 - Midpoint: 0.778801
Error: 0.008076 - Divisions: 2 - Trapezoidal: 0.73137
Error: -0.00801329 - Divisions: 1 - Simpson: 0.74718

```

Fig. 4: Representação dos resultados para cada Equação e seus respectivos métodos

V. CONCLUSÃO

Após a análise do conceito e resultados obtidos após a aplicação dos métodos comparando os mesmos, podemos concluir que todas as técnicas utilizadas conseguiram atingir o objeto de integração e que dependendo do número de divisões que é feita na região de integração temos uma precisão com uma maior acurácia.

REFERENCES