テンプレート

書いた人

2022 年 7 月 1 日

LaTeX は，始めは難しいですが，慣れると楽しいです．

1 定義

定義 1 (偏導関数): $f(x, y)$ の (x_0, y_0) における**偏微分係数**を次のように定義する．

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} \tag{1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{k \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k} \tag{2}$$

これを領域の各点で考えると，関数を定義できる．これを**偏導関数**という．$\frac{\partial f}{\partial x}$ のことを，$\partial_x f$ や f_x，$\frac{\partial}{\partial x} f$ と書くこともある．

定義は 1 変数での導関数定義とよく似ている．

y を定数とみて x の関数だと思って計算すればよい．

例 1: あ

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + 1, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2$$

高階の偏導関数も定義される．ただしその順序に気を付ける必要がある．

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}, \quad \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy}, \quad \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{yx},$$

∂ で書くなら，左に付け足し，下付き文字で書くなら右に付け足していく，と覚えれば良い．

命題 1.1 (偏微分の順序変更): (x_0, y_0) の近傍で，$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ と $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ がともに存在して，(x_0, y_0) においてこれらが連続ならば,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$$

実は，上の定理より弱い条件でも偏微分の順序変更が可能である．それが次のシュワルツの定理である．

定理 1.2 (シュワルツの定理): (x_0, y_0) の近傍で，$\frac{\partial f}{\partial x}$ と $\frac{\partial f}{\partial y}$ がともに連続で，$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ と $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ のどちらかが存在して，(x_0, y_0) において連続であるとする．このとき，もう一方の偏微分係数も存在して，

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$$

定義 2: $\phi(x, y, z)$ を実数値関数,
$\boldsymbol{A}(x, y, z) = (A_x(x, y, z), A_y(x, y, z), A_z(x, y, z))$ とする．
（この添え字はベクトルの各成分を表す.）

$$\mathrm{grad}\ \phi = \boldsymbol{\nabla}\phi \overset{\mathrm{def}}{=} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z}\right) \tag{3}$$

$$\mathrm{div}\ \boldsymbol{A} = \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A} \overset{\mathrm{def}}{=} \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{4}$$

$$\mathrm{rot}\ \boldsymbol{A} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A} \overset{\mathrm{def}}{=} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) \tag{5}$$

$$\Delta\phi = \nabla^2\phi \overset{\mathrm{def}}{=} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \tag{6}$$

$\mathrm{grad}\ \phi$ は**勾配**，div は**発散**，rot は **回転**と呼ばれる．

基本的には $\boldsymbol{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ というベクトルを考えるイメージ.
※ $\mathrm{grad}\ \phi, \mathrm{rot}\ \boldsymbol{A}$ はベクトル値関数．$\mathrm{rot}\ \boldsymbol{A}, \Delta\ \phi$ はスカラー関数.

2 問題

1. $f(x, y) = x^3y^2$，$g(x, t) = \sin(kx - \omega t)$ とする．
   各々の変数での偏導関数を求めよ.
2. 次の関数について (1) と (2) では $\boldsymbol{\nabla}\phi$ と $\nabla^2\phi$ を，(3) と (4) では $\mathrm{div}\ \boldsymbol{A}$ と $\mathrm{rot}\ \boldsymbol{A}$ を計算せよ.
   (1) $\phi(x, y, z) = e^{-(x^2+y^2+z^2)}$
   (2) $\phi(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$
   (3) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = (2x, 2y, 2z)$
   (4) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = (z, x, y)$

3. 以下の問題では，$\phi, A_i(\ i = x, y, z)$ について，シュワルツの定理が成り立つことを仮定する.
   (1) $\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla}\phi) = \boldsymbol{0}$ を示せ.
   (2) $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A} = 0$ を示せ.
   (3) $\boldsymbol{\nabla} \times (\phi\boldsymbol{A}) = (\boldsymbol{\nabla}\phi) \times \boldsymbol{A} + \phi(\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A})$ を示せ.
   (4) $\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A}) - \nabla^2\boldsymbol{A}$ を示せ．$\nabla^2\boldsymbol{A} = \left(\nabla^2 A_x, \nabla^2 A_y, \nabla^2 A_z\right)$ に注意せよ.

4. 幾何光学や波線理論で登場するアイコナール方程式を導こう．
複素平面上での指数関数 e^z について実関数の時と同じように $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}e^z = e^z$ が成立することは用いてよい．

(1) スカラー波の波動方程式 $\nabla^2\phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0$ について考える．この解として，

$$\phi(\boldsymbol{x}, t) = A(\boldsymbol{x}) \exp(i\omega(T(\boldsymbol{x}) - t))$$

を与えたとき，$\boldsymbol{\nabla}\phi$ と $\nabla^2\phi$ を計算せよ．$T(\boldsymbol{x})$ は $\boldsymbol{x}$ における位相項である．

(2) 次の等式を導け：

$$\nabla^2 A - \omega^2 A|\boldsymbol{\nabla} T|^2 - i\Big(2\omega\boldsymbol{\nabla} A\cdot\boldsymbol{\nabla} T + \omega A\nabla^2 T\Big) = -\frac{A\omega^2}{c^2}$$

(3) (2) の両辺の実部について，$\omega \to \infty$ とすることで，アイコナール方程式 $|\boldsymbol{\nabla} T|^2 = \frac{1}{c^2}$ を導け．

ところで，[1] は，楕円関数について丁寧に描かれている本である．[2] は，それより易しい内容で，最初に読むと良い．

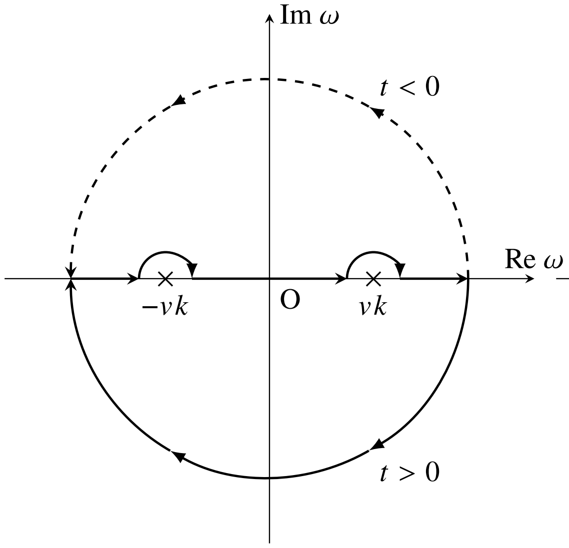

図 1　遅延グリーン関数の積分経路

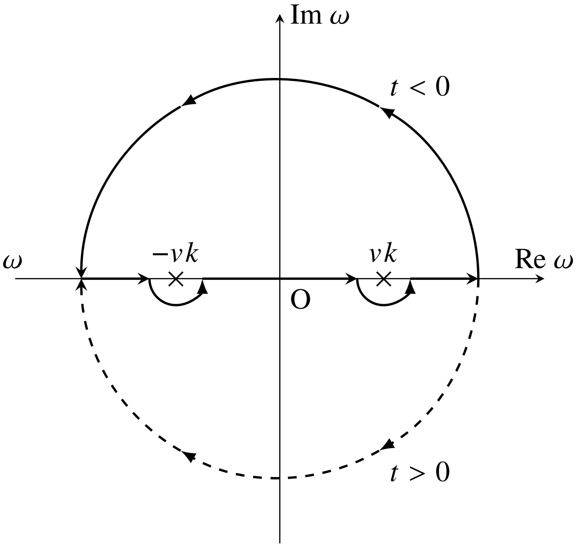

図 2　先進グリーン関数の積分経路

参考文献

[1] 梅村浩，『楕円関数論』，東京大学出版会，2000.
[2] 戸田盛和，『楕円関数入門』，日本評論社，1991.