要运用Picard定理来解决给定的二阶常微分方程初值问题，我们需要将其转换为一阶微分方程组的形式。

给定的初值问题是： $y'' + y'^2 - 2y = 0 \, y(0) = 1, y'(0) = 0$

第一步：将二阶ODE转换为一阶ODE系统

令 $y_1 = y$ 令 $y_2 = y'$

则： $y_1' = y_2 \, y_2' = y''$

将原方程移项得到 $y'' = 2y - y'^2$。代入 y_1, y_2： $y_2' = 2y_1 - y_2^2$

所以，我们得到以下一阶ODE系统： $y_1' = y_2 \, y_2' = 2y_1 - y_2^2$

初始条件为： $y_1(0) = y(0) = 1 \, y_2(0) = y'(0) = 0$

我们将此系统写成向量形式。令 $Y(x) = (y_1(x) \, y_2(x))$。则 $Y'(x) = F(x, Y(x))$，其中 $F(x, Y) = (f_1(x, y_1, y_2) \, f_2(x, y_1, y_2)) = \left(y_2 \, 2y_1 - y_2^2\right)$。初始条件为 $Y(0) = Y_0 = (1 \, 0)$。

第二步：确定Picard定理的解存在区间

Picard定理要求函数 $F(x, Y)$ 在初始点 (x_0, Y_0) 附近的某个矩形区域 $R = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_{1,0} - b_1, y_{1,0} + b_1] \times [y_{2,0} - b_2, y_{2,0} + b_2]$ 上连续且关于 Y 满足Lipschitz条件。在我们的问题中，$x_0 = 0, y_{1,0} = 1, y_{2,0} = 0$。

选择一个区域 $R = [-a, a] \times [1 - b, 1 + b] \times [-b, b]$，其中 $a, b > 0$。函数 $F(x, Y) = \left(y_2 \, 2y_1 - y_2^2\right)$ 是连续的。我们还需要计算 $M = \max_{(x,Y) \in R} ||F(x, Y)|| *\infty。 //F(x, Y)//*\infty = \max(|y_2|, |2y_1 - y_2^2|)$。

在区域 R 中： $|y_2| \leq b$ 对于 $|2y_1 - y_2^2|$： 由于 $1 - b \leq y_1 \leq 1 + b$ 且 $-b \leq y_2 \leq b$，所以 $0 \leq y_2^2 \leq b^2$。因此，$2(1 - b) - b^2 \leq 2y_1 - y_2^2 \leq 2(1 + b) - 0 = 2 + 2b$。所以 $|2y_1 - y_2^2| \leq \max(|2(1 - b) - b^2|, |2 + 2b|) = \max(|2 - 2b - b^2|, 2 + 2b)$。

所以 $M = \max(b, |2 - 2b - b^2|, 2 + 2b)$。由于 $b > 0$，显然 $2 + 2b > b$。因此 $M = \max(|2 - 2b - b^2|, 2 + 2b)$。

Picard定理给出的解存在区间长度 h 为 $h = \min(a, b/M)$。为了求最大可能的解存在区间，我们通常让 $a \to \infty$，使得 $h = b/M$。我们需要找到一个 b 值来最大化 $h(b) = b/M$。

分析 $M = \max(|2-2b-b^2|, 2+2b)$：1. **当 $2-2b-b^2 \geq 0$ 时**：即 $b^2+2b-2 \leq 0$。求根公式 $b = \frac{-2\pm\sqrt{4-4(1)(-2)}}{2} = \frac{-2\pm\sqrt{12}}{2} = -1 \pm \sqrt{3}$。由于 $b > 0$，此条件成立当 $0 < b \leq \sqrt{3}-1$ (约 0.732)。在此区间内，$M = \max(2-2b-b^2, 2+2b)$。比较 $2-2b-b^2$ 和 $2+2b$：$(2+2b)-(2-2b-b^2) = b^2+4b$。对于 $b > 0$，此差值恒大于0。所以，当 $0 < b \leq \sqrt{3}-1$ 时，$M = 2+2b$。此时 $h(b) = b/(2+2b)$。求导 $h'(b) = \frac{(2+2b)-2b}{(2+2b)^2} = \frac{2}{(2+2b)^2} > 0$。所以 $h(b)$ 在此区间内是增函数。最大值在 $b = \sqrt{3}-1$ 处取到：$h(\sqrt{3}-1) = \frac{\sqrt{3}-1}{2+2(\sqrt{3}-1)} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{3-\sqrt{3}}{6} \approx 0.2113$

。

1. **当 $2-2b-b^2 < 0$ 时**：即 $b > \sqrt{3}-1$。此时 $|2-2b-b^2| = -(2-2b-b^2) = b^2+2b-2$。所以 $M = \max(b^2+2b-2, 2+2b)$。比较 b^2+2b-2 和 $2+2b$：令 $b^2+2b-2 = 2+2b$，则 $b^2 = 4$，所以 $b = 2$ (因为 $b > 0$)。

   - **当 $\sqrt{3}-1 < b \leq 2$ 时**：$b^2+2b-2 \leq 2+2b$。所以 $M = 2+2b$。此时 $h(b) = b/(2+2b)$。同样是增函数。所以最大值在 $b = 2$ 处取到：$h(2) = 2/(2+2*2) = 2/6 = 1/3 \approx 0.3333$。这个值比之前的大。

   - **当 $b > 2$ 时**：$b^2+2b-2 > 2+2b$。所以 $M = b^2+2b-2$。此时 $h(b) = b/(b^2+2b-2)$。求导：$h'(b) = \frac{(b^2+2b-2)\cdot 1 - b\cdot(2b+2)}{(b^2+2b-2)^2} = \frac{b^2+2b-2-2b^2-2b}{(b^2+2b-2)^2} = \frac{-b^2-2}{(b^2+2b-2)^2}$。由于 $-b^2-2 < 0$ 且分母大于0，所以 $h'(b) < 0$。所以 $h(b)$ 在此区间是减函数。

综合上述分析，函数 $h(b)$ 的最大值在 $b = 2$ 时取到，为 $h = 1/3$。因此，解的存在区间为 $[x_0 - h, x_0 + h] = [-1/3, 1/3]$。

第三步：利用Picard序列求第二次近似解

Picard迭代公式为 $Y_{k+1}(x) = Y_0 + \int_{x_0}^{x} F(t, Y_k(t))dt$。这里 $x_0 = 0, Y_0 = (1\ 0)$。$F(t, Y(t)) = (y_2(t)\ 2y_1(t) - y_2(t)^2)$。

1. **零次近似解 $Y_0(x)$：** $Y_0(x) = Y_0 = (1\ 0)$ 即 $y_{1,0}(x) = 1, y_{2,0}(x) = 0$。

2. **第一次近似解 $Y_1(x)$：** $Y_1(x) = Y_0 + \int_0^x F(t, Y_0(t))dt$
$Y_1(x) = (1\ 0) + \int_0^x \left(y_{2,0}(t)\ 2y_{1,0}(t) - y_{2,0}(t)^2\right)dt$
$Y_1(x) = (1\ 0) + \int_0^x (0\ 2(1) - (0)^2)dt\ Y_1(x) = (1\ 0) + \int_0^x (0\ 2)dt$
$Y_1(x) = (1\ 0) + \left(\int_0^x 0dt\ \ \int_0^x 2dt\right) = (1\ 0) + (0\ 2x) = (1\ 2x)$ 即
$y_{1,1}(x) = 1, y_{2,1}(x) = 2x$。

3. **第二次近似解 $Y_2(x)$：** $Y_2(x) = Y_0 + \int_0^x F(t, Y_1(t))dt$
$Y_2(x) = (1\ 0) + \int_0^x \left(y_{2,1}(t)\ 2y_{1,1}(t) - y_{2,1}(t)^2\right)dt$
$Y_2(x) = (1\ 0) + \int_0^x (2t\ 2(1) - (2t)^2)dt$
$Y_2(x) = (1\ 0) + \int_0^x (2t\ 2 - 4t^2)dt$
$Y_2(x) = (1\ 0) + \left(\int_0^x 2tdt\ \ \int_0^x (2 - 4t^2)dt\right)$
$Y_2(x) = (1\ 0) + \left([t^2]_0^x\ [2t - \frac{4}{3}t^3]_0^x\right)$
$Y_2(x) = (1\ 0) + \left(x^2\ 2x - \frac{4}{3}x^3\right) = \left(1 + x^2\ 2x - \frac{4}{3}x^3\right)$

因此，第二次近似解为 $Y_2(x) = \left(1 + x^2\ 2x - \frac{4}{3}x^3\right)$。由于 $y_1(x) = y(x)$，所以原问题 $y'' + y'^2 - 2y = 0$ 的第二次近似解是 $y_2(x) = 1 + x^2$。

总结： 1. **Picard定理解的存在区间：** $[-1/3, 1/3]$。2. **第二次近似解 $y_2(x)$：** $y_2(x) = 1 + x^2$。