2020年7月28日

微分方程式I: 第12回

提出課題2の採点済の答案をWebClass上で返却しています.

「成績 > マイレポート」から確認して下さい.

担当教員: 三鍋聡司

12．2階の微分方程式の応用例：電気回路

- 図1のRLC回路を考える．抵抗$R\,[\Omega]$の抵抗，インダクタンス$L\,[H]$のコイル，キャパシタンス$C\,[F]$のコンデンサーが直列で起電力$E(t)\,[V]$の電源と繋がっている．ここでtは時刻を表す．

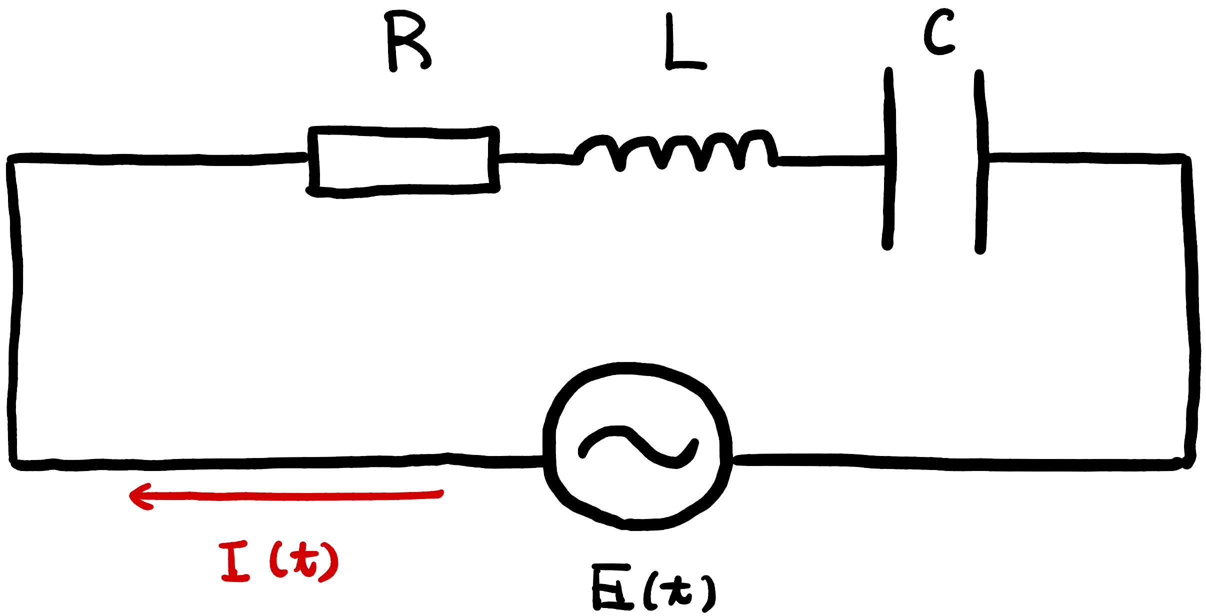

図1　RLC直列回路

- この回路の電流 $I(t)\ [A]$ が満たす微分方程式を導く.
  - まず抵抗, コイル, コンデンサーにおける電圧降下を考えると,
    - 抵抗における電圧降下は $RI(t)$ (オームの法則),
    - コイルにおける電圧降下は $LI'(t)$,
    - コンデンサーにおける電圧降下は $\dfrac{Q(t)}{C}$,

      ここで, $Q(t) = \displaystyle\int_0^t I(t)\,dt$ はコンデンサーの電荷.
  - これら 3 つの和は起電力 $E(t)$ に等しい (キルヒホッフの第 2 法則) ので,

$$LI'(t) + RI(t) + \frac{1}{C}\int_0^t I(t)\,dt = E(t).$$

– 積分を含まない形にするために両辺を t で微分すると,

$$\boxed{LI''(t) + RI'(t) + \frac{1}{C}I(t) = E'(t)}$$

- この定数係数の 2 階線形方程式を解けば電流 $I(t)$ が求まる.

例題

$R = 2,\ L = 1,\ C = 0.5,\ E(t) = 50\sin t$ のとき, 回路に流れる電流 $I(t)$ を, 初期条件 $I(0) = 0,\ I'(0) = 0$ の下で求める.

[解答]　$E'(t) = 50\cos t$ より, 解くべき微分方程式は次の非同次方程式である:

$$\boxed{I'' + 2I' + 2I = 50\cos t.} \quad (*)$$

一般解を求める．特性方程式を解くと，$\lambda^2+2\lambda+2=0$**より，**
$\lambda=-1\pm i$．**よって特殊解は，**$\eta(t)=A\cos t+B\sin t$**の形．これを方程式**$(*)$**に代入すると，**

$$\eta'=-A\sin t+B\cos t,\quad \eta''=-A\cos t-B\sin t$$

より，

$$\begin{aligned}\eta''+2\eta'+2\eta&=(-A+2B+2A)\cos x+(-B-2A+2B)\sin t\\&=(A+2B)\cos x+(-2A+B)=50\cos t.\end{aligned}$$

よって$\begin{cases}A+2B=50\\-2A+B=0\end{cases}$ **より，**$A=10,\ B=20.$

$$\therefore\ \eta(t)=10\cos t+20\sin t.$$

同次方程式 $I'' + 2I' + 2I = 0$ の基本解は $e^{-t}\cos t,\ e^{-t}\sin t$ なので, $(*)$ の一般解は, C_1, C_2 を任意定数として,

$$I(t) = e^{-t}\left(C_1\cos t + C_2\sin t\right) + 10\cos t + 20\sin t.$$

初期条件を代入すると, $I(0) = 0$ より $C_1 + 10 = 0$. また,

$$I'(t) = e^{-t}\left\{(-C_1 + C_2)\cos t + (-C_1 - C_2)\sin t\right\} - 10\sin t + 20\cos t$$

に $I'(0) = 0$ を代入すると $-C_1 + C_2 + 20 = 0$.

よって $\begin{cases} C_1 + 10 = 0 \\ -C_1 + C_2 + 20 = 0 \end{cases}$ より, $C_1 = -10,\ C_2 = -30.$

従って, 求める初期値問題の解は,

$$I(t) = e^{-t}\left(-10\cos t - 30\sin t\right) + 10\cos t + 20\sin t.$$

$\square$

解についての考察

得られた解からどんなことが読み取れるか考えてみよう.

$$I(t) = e^{-t}(-10\cos t - 30\sin t) + 10\cos t + 20\sin t \quad (**)$$

- 指数関数 e^{-t} は急激に減少し,

$$\lim_{t\to\infty} e^{-t}\cos t = \lim_{t\to\infty} e^{-t}\sin t = 0$$

である. よって, $(**)$ の第 1 項は $t \to \infty$ で 0 に収束する. つまり, 十分時間が経った時に回路を流れる電流は, 事実上

$$\eta(t) = 10\cos t + 20\sin t$$

で与えられる.

- $\eta(t)$ は**定常電流**と呼ばれ, $(**)$ は**過渡電流**と呼ばれる.

$$I(t) = \underbrace{\overbrace{e^{-t}\,(-10\cos t - 30\sin t)}^{t\to\infty\text{ で }0\text{ になる項}}\overbrace{+10\cos t + 20\sin t}^{\text{定常電流}}}_{\text{過渡電流}}.$$

- 三角関数の合成により, $\eta(t)$ は次のように表せる:

$$\eta(t) = 10\cos t + 20\sin t = 10\sqrt{5}\sin(t+\alpha)$$

ただし, $\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{5}}, \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

これより, 定常電流(回路の出力) $\eta(t)$ は, 振幅が $10\sqrt{5}$ で, 周期が 2π [$\leftarrow$ 電源の起電力(入力) $E(t) = 50\sin t$ と同じ周期] の単振動になることが分かる.

今回の内容

- 2階の微分方程式の応用例(RLC回路).
- 教科書: p.79 問題 $\boxed{7}$, $\boxed{8}$.
- 自主課題: 教科書: p.79 問題 $\boxed{7}$, $\boxed{8}$ を解く.
  (力学の知識がある人はp.78の問題 $\boxed{5}$, $\boxed{6}$ も解くとよい.)

参考図書の紹介

2階の微分方程式の応用例についてさらに知りたい人には,

- クライツィグ 著「常微分方程式（技術者のための高等数学 1)」培風館, 1987.

を参照することを勧めます.

今後の予定

- 次週 8月4日(火)が授業最終回です.
- 期末考査(レポート形式)の問題は, 次週の授業時に提示します.
  - 答案提出期限: 8月10日(月) 23:59
  - 提出場所: WebClass.