概率论第 4 次作业

2019011986　　数 91　　董浚哲

2022 年 4 月 25 日

1 A

1.1 (A1)

(i) 正确。对 a 验证，b 的情形是类似的。$\mu(a,b)=F(b-)-F(a-)=\mu[a,b)$

(ii) 正确，是 (i) 的直接推论。

(iii) 正确。因 X_n, X 是随机变量，$\mu_{X_n}, \mu_X \subset \mathrm{PM}$，再由讲义推论 3.12 即得。

(iv) 正确。由定理 3.8，只需证明 $\forall f \in C_c, \exists f_n \in C_c^{\infty}$ s.t. $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[f_n(X)\right]=\mathbb{E}\left[f(X)\right]$。因 f 可测，故 $\exists \hat{f}_n \in \mathrm{SP} \cap C_c$ s.t. $f=\sup \hat{f}_n$。用无穷光滑的函数连接 $\hat{f}_n$ 的间断点即得 f_n 且 $f=\sup f_n$ 仍然成立，故得。

(v) 错误。设 X_n 服从 $(0,\frac{1}{n})$ 上的均匀分布，即 $F_{X_n}(w)=nw \quad w\in[0,\frac{1}{n}]$，而 X 服从 0 处的 Dirac 测度，则 $X_n \Rightarrow X$，但显然 X 不是绝对连续的。

(vi) 错误。反例同上，$G=(0,+\infty)$

(vii) 错误。取 X_n, X, Y 为 $[0,1]$ 上的均匀分布，Y_n 为 $[2,3]$ 上的均匀分布，则 $F_{X+Y}(1)=\frac{1}{2}, F_{X_n+Y_n}(1)=1$，故命题不成立。

(viii) 错误。在上例中对换 X_n, Y_n 即是反例。

(ix) 错误。反例同上。

(x) 正确。由卷积公式：

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} F_{X_n+Y_n}(a)\\
=&\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} p_{X_n}(a-s)p_{Y_n}(s)\,\mathrm{d}s\\
=&\int_{\mathbb{R}} p_X(a-s)p_Y(s)\,\mathrm{d}s\\
=&F_{X+Y}(a)
\end{aligned}
$$

再由 (iii) 即得。

(xi) 正确。由 Borel-Cantelli 第一引理，$\mathbb{P}[\{|X_n|>\varepsilon \quad \text{i.o.}\}]=\mathbb{P}\left[\varlimsup_{n\to\infty}\{|X_n|>\varepsilon\}\right]=\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left[\{\sup_{m\geq n}|X_n|\geq\varepsilon\}\right]=0$，由命题 2.14 即得。

(xii) 正确。由三级数定理 $\sum_n X_n$ a.s. $\Leftrightarrow \forall C>0,\sum_n \mathbb{P}[|X_n|>C]<\infty, \mathbb{E}\left[X_n\mathbf{1}_{|X_n|<C}\right]<\infty, \sum \mathrm{Var}(X_n\mathbf{1}_{|X_n|\leq C})<\infty$。由条件，在上述三级数中将 X_n 替换为 Y_n 级数的收敛性不变，故得。

(xiii) 正确。反设该级数不收敛，则由独立性与 Borel-Cantelli 第二引理，$\mathbb{P}[|X_n|\geq n \quad \text{i.o.}]=1$，即 $\mathbb{P}\left[\varlimsup_{n\to\infty}\frac{|X_n|}{n}\geq 1\right]=1$。结合题设，这唯有 $\varlimsup_{n\to\infty}\frac{|X_n|}{n}=1 \quad$ a.s. ，故 $\sum_n \mathbb{P}[|X_n|\geq n]\leq e^{-n}E[|\exp(X_n)|]\leq C\sum e^{-n+2}<\infty$，矛盾！故该级数收敛。

1.2 (A2)

(i)

证明. 由 (A1)(ii), x 是原子当且仅当它是 F_μ 的间断点。但 F_μ 是单增函数其间端点之多可数，故得。 □

(ii)

证明. 必要性由定义显然，下证充分性：

$\forall a<b\in\mathcal{C}_X$，因 D 离散，故因有界数列必有收敛子列知其中只有 D 中有限多个元素 $p_1,\dots,p_k$。则 $\mu_X[a,b]=\sum_{i=1}^k\mathbb{P}[X=p_i]=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^k\mathbb{P}[X_n=p_i]=\lim_{n\to\infty}\mu_{X_n}[a,b]$，得证。 □

(iii)

证明. 由 L^p 空间的包含关系，$Y\in L^\infty\subset L^2$。

由独立性，$\forall i\neq j, \mathbb{E}[X_iX_j]=\mathbb{E}[X_i]\mathbb{E}[X_j]=0$，故 $\{X_n\}$ 是规范正交集。故由 Bessel 不等式：

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{E}[X_nY]^2\leq\mathbb{E}\left[Y^2\right]<\infty$$

故 $\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}[X_nY]^2=0\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}[X_nY]=0$ □

(iv) 对随机变量 X_n 构造序列 a_{nk}, b_{nk} 再取对角线 $a_n = a_{nn}, b_n = b_{nn}$ 即得。下面是对任意的随机变量 X 的相应序列 a_k, b_k 的构造过程，对所有随机变量的构造是类似的。

分 X 为正部、负部：$X = X^+ - X^- \quad X^\pm \geq 0$。$\exists \phi_n^+, \phi_n^- \subset \mathrm{SP} \cap \mathcal{L}^+$ s.t. $\phi^\pm \leq X^\pm, \sup\limits_n \phi^\pm = X^\pm$。取 $b_n = 0, a_n = n \max\{\max|\phi_n^+|, \max|\phi_n^-|\}$ 即得

(v)

证明. 注意到 $\varliminf\limits_{n\to\infty} = \sup\limits_n \inf\limits_{m\geq n}$。故

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[|X|] &= \sup_{\mathbb{E}[|Y|]=1} |\mathbb{E}[XY]| \\
&= \sup_{\mathbb{E}[|Y|]=1} \left|\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n Y]\right| \\
&= \sup_{\mathbb{E}[|Y|]=1} \left|\lim_{n\to\infty} \inf_{m\geq n} \mathbb{E}[X_m Y]\right| \\
&\leq \sup_{\mathbb{E}[|Y|]=1} \left|\sup_n \inf_{m\geq n} \mathbb{E}[X_m Y]\right| \\
&= \varliminf_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n]
\end{aligned}
$$

得证。 □

(vi)

证明. 在三级数定理中取 $C = 0$ 即得该命题（其余两级数自然地为 $0 < \infty$） □

1.3 (A3)

(i) $N_t = n$，即 S_n 是 $\{S_k\}$ 中不大于 t 的最大者。一方面，$S_n \leq t$；另一方面，最大性说明 $S_{n+1} > t$，综上 $\{N_t = n\} = \{S_n \leq t < S_{n+1}\}$

$\{N_t < n\} = \bigcup\limits_{k<n} \{N_t = k\} = \bigcup\limits_{k<n} \{S_{k-1} \leq t < S_k\} = \{S_n > t\}$

(ii) 只需证明对于任意有限值 $n < \infty$，$\mathbb{P}\left[\lim\limits_{t\to\infty} N_t < n\right] = 0$。

$$
\mathbb{P}\left[\lim_{n\to\infty} N_t < n\right] = \mathbb{P}\left[\lim_{t\to\infty} S_n > t\right] \leq \lim_{t\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{E}[X_k]}{t} = 0
$$

得证。

(iii) 因 $X_n > 0, \mathbb{E}[X_n] < \infty$，故 $X_n \in L^1$。故由 SLLN，$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = m$ a.s. 。

对于固定的 t，由 (i) 知 $S_{N_t} \leq t < S_{N_t+1}$，故

$$
\frac{S_{N_t}}{N_t} \leq \frac{t}{N_t} \leq \frac{S_{N_t+1}}{N_t+1} \frac{N_t+1}{N_t}
$$

由 SLLN，$\exists \tilde{\Omega} \subset \Omega$ s.t. $\mathbb{P}\left[\tilde{\Omega}\right] = 1, \forall \omega \in \tilde{\Omega}, \lim\limits_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} \to m$。故由夹逼定理，$\forall \omega \in \tilde{\Omega}, \lim\limits_{t\to\infty} \frac{N_t}{t} = \frac{1}{m}$

(iv) 既知 a.s. 收敛，为证明 L^1 收敛，只需证明 $\left\{\frac{N_t}{t}|t \in \mathbb{R}_+\right\}$ 一致可积。

因 $X_1 > 0$ a.s. ，故 $\exists\delta > 0$ s.t. $\mathbb{P}[X_1 \geq \delta] = p > 0$。设 $X_n' = \delta\mathbf{1}_{\{X_n \geq \delta\}}$，则 $X_n' \leq X_n, \{X_n'\}$i.i.d.，且服从分布伯努利分布 $\mathbb{P}[X_1 = \delta] = p, \mathbb{P}[X_1 = 0] = 1 - p$。对于 X_n' 定义相应的 $S_n' \leq S_n, N_t' \geq N_t$

断言：$\mathbb{E}\left[(\frac{N_t'}{t})^2\right]$ 关于 t 一致有界。

断言的证明. 注意到

$$\mathbb{P}[N_t' \geq n] = \begin{cases} 1 & t \geq n \\ \mathbb{P}[S_n \leq t] = \sum_{j=0}^{\lfloor t \rfloor} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} & \end{cases}$$

故有估计：

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[N_t'^2\right] &= \sum_{n \in \mathbb{N}} n^2 \mathbb{P}[N_t' = n] \\
&= \sum_{n \geq 1} n^2 \mathbb{P}[N_t \geq n] - \sum_{n \geq 1} n^2 \mathbb{P}[N_t \geq n+1] \\
&= \sum_{n \geq 1} (2n-1) \mathbb{P}[N_t \geq n] \\
&= O(t^2) + \sum_{n \geq t} (2n-1) \sum_{j=0}^{\lfloor t \rfloor} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} = O(t^2)
\end{aligned}$$

得证。 □

既知断言之成立，$\mathbb{E}\left[(\frac{N_t}{t})^2\right] \leq \mathbb{E}\left[(\frac{N_t'}{t})^2\right]$ 也关于 t 一致有界。再由 L^p 空间的包含关系得知 $\frac{N_t}{t}$ 在 L^1 中一致有界。又已知 $\frac{N_t}{t}$ a.s. 收敛，故知其 L^1 收敛。

1.4 (A4)

证明. $\forall n \in \mathbb{N}, X_{nk} = X_k \mathbf{1}_{|X_k| < b_n}$

$\forall \epsilon > 0$

$$\mathbb{P}\left[|\frac{1}{b_n}\sum_{j=1}^n (X_j - \mathbb{E}[X_{jn}] | > \varepsilon)\right] \leq \sum_{j=1}^n \frac{1}{b_n^2 \varepsilon^2} \mathbb{E}\left[(X_j - \mathbb{E}[X_{jn}])^2\right] \leq \frac{1}{\varepsilon^2 b_n^2}\left(\sum_{j=1}^n \mathrm{Var}(X_{jn}) + \sum_{j=1}^n \mathbb{E}\left[(X_j - X_{nj})^2\right]\right) = I_1 + I_2$$

- $I_1 \leq \varepsilon^{-2} \frac{1}{b_n^2} \sum_{j=1}^n \mathbb{E}\left[X_{nj}^2\right] \to 0 \quad (n \to \infty)$
- $I_2 = \frac{1}{\varepsilon^2 b_n^2} \sum_{j=1}^n \mathbb{E}\left[X_j \mathbf{1}_{X_j > b_n}\right] \geq \varepsilon^{-2} \sum_{j=1}^n \mathbb{P}[X_j > b_n] \to 0$

综上命题得证。

□

2 B

2.1 (B1)

是均匀分布。$\forall a \in [0,1]$，取其二进制表示 $a = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}$，则 $F_{X_n}(a) = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{2^k} \to a \quad (n \to \infty)$。故 $F_X(a) = a \quad \forall a \in [0,1]$，即 X 服从均匀分布。

2.2 (B2)

0 处的 Dirac 分布。

由对称性只需考虑 $X_n > 0$ 的部分,断言:$\forall [a,b] \subset \mathbb{R}_+, \mu_X\left([a,b]\right) = 0$。$\mu_{X_n}\left([a,b]\right) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp(-\frac{x^2}{2})\,\mathrm{d}x \leq \frac{b-a}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp(-\frac{a^2}{2}) \to 0 \quad (n \to \infty)$，断言得证。

故 $\mu_X\left([a,b]\right) = \begin{cases} 1 & 0 \in [a,b] \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$，即 $X \sim \delta_0$

2.3 (B3)

证明. 在三级数收敛定理中取 $C = 0$，则只需验证 $\mathbb{E}\left[\sum_{n \in \mathbb{N}} X_n X_{n+1}\right] < \infty$. 因 $\sum_{k=1}^{n} X_k X_{k+1}$ 单调增，故由 MCT，上式中极限可以交换：$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{\infty} X_n X_{n+1}\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}\left[X_n X_{n+1}\right] = \sum_{n=1}^{\infty} p_n p_{n+1} < \infty$，故得。 □

2.4 (B4)

(i) WLOG 设 $p \in \mathbb{N}$，其余情况由 L^p 空间的包含关系得到。

之前作业已经算得对于 $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$，$\mathbb{E}\left[X^{2k}\right] = (2k-1)!!\sigma^2 \leq (2k)^k \sigma^{2k}$，故

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[X_n^{2k}\right] =& \leq \mathbb{E}\left[(2(X^2 + \mu_n^2))^k\right] \\
=& 2^k \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \mu_n^{2(k-j)} \mathbb{E}\left[X^{2j}\right] \\
\leq& 2^k \sum_{j=1}^{n} \binom{k}{j} \mu_n^{2(k-j)} (2j)^j \sigma^{2j} \\
\leq& 2^k \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \mu_n^{2(k-j)} (2k)^j \sigma^{2j} \\
=& (4k)^k (\sigma^2 + \mu_n^2)^k = (4k)^k E[X^2]^k
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^{N} X_j^2\right]^p &= \sum_{|\alpha|=p} \binom{p}{\alpha} \prod_{i=1}^{N} \mathbb{E}\left[X_i^{2\alpha_i}\right] \\ &\leq \sum_{|\alpha|=p} = C_\alpha \prod_{i=1}^{N} (4\alpha_i)^{\alpha_i} \mathbb{E}\left[X_i^2\right]^{\alpha_i} \\ &\leq \sum_{|\alpha|=p} = C_\alpha \prod_{i=1}^{N} (4p)^{\alpha_i} \mathbb{E}\left[X_i^2\right]^{\alpha_i} = (4p)^p \left(\mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^{N} X_j^2\right]\right)^2\end{aligned}$$

因 $\sum_{n\in\mathbb{N}} X_n^2 L^1$ 收敛，故上式在 $n \to \infty$ 时 $< \infty$，故由 DCT $\sum\limits_{n\in Nat} X_n^2 L^p$ 收敛。

(ii)

证明. $\mathbb{E}\left[\exp(-\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} X_n^2)\right] \leq \prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\left[(1+X_n^2)^{-1}\right] = \prod_{n\in\mathbb{N}}(1+\sigma_n^2)^{-1}$。因 $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \sigma^2 = \infty$，故上述无穷乘积发散至 0。而这唯有 $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} X_n = \infty$ a.s. 才有可能。 □

2.5 (B5)

注意到 Poisson 分布具有性质 $X_1 \sim P(\lambda_1), X_2 \sim P(\lambda_2) \Rightarrow X_1 + X_2 \sim P(\lambda_1 + \lambda_2)$。故 WLOG 设 $\forall n \in \mathbb{N}, \lambda_n \in (0,1)$，否则取 $k_n > \lambda_n$，并以 $X_n^i \sim P(\frac{\lambda_n}{k_n}) \quad 1 \leq i \leq k_n$ 替代 X_n，此时 $S_n, \sum \lambda_n$ 都保持不变。

取 $n_k = \inf\left\{n : k^2 \leq \mathbb{E}\left[S_n\right] < k^2+1\right\}$ （由上述假设这样的 n_k 总是存在的）。则 $\forall \varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[\left|\frac{S_{n-k}}{\mathbb{E}\left[S_{n_k}\right]} - 1\right| > \varepsilon\right] =&\mathbb{P}\left[\left|S_{n_k} - \mathbb{E}\left[S_{n_k}\right]\right| > \mathbb{E}\left[S_{n_k}\right]\right] \\ \leq&\frac{\mathrm{Var}(S_{n_k})}{\varepsilon^2 \mathbb{E}\left[S_{n_k}\right]^2} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n_k} \lambda_i}{\varepsilon^2 \mathbb{E}\left[S_{n_k}\right]^2} \\ \leq&\frac{\mathbb{E}\left[S_{n_k}\right]}{\varepsilon^2 \mathbb{E}\left[S_{n_k}\right]^2} = \frac{1}{\varepsilon^2 \mathbb{E}\left[S_{n_k}\right]} \leq \frac{1}{\varepsilon^2 k^2}\end{aligned}$$

故 $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{P}\left[\left|\frac{S_{n_k}}{\mathbb{E}[S_{n_k}]} - 1\right| > \varepsilon\right] \leq \sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{\varepsilon^2 k^2} < \infty$。由 Borel-Cantelli 第一引理, $\mathbb{P}\left[\left|\frac{S_{n_k}}{\mathbb{E}[S_{n_k}]} - 1\right| > \varepsilon \quad \text{i.o.}\right] = 0$，即 $\frac{S_{n_k}}{\mathbb{E}[S_{n_k}]} \to 1 \quad$ a.s. 对于一般的 $\frac{S_n}{\mathbb{E}[S_n]}$，我们有如下估计：

$$\frac{S_{n_k}}{\mathbb{E}\left[S_{n_k}\right]} \frac{\mathbb{E}\left[S_{n_k}\right]}{\mathbb{E}\left[S_{n_k+1}\right]} \leq \frac{S_n}{\mathbb{E}\left[S_n\right]} \leq \frac{S_{n_k+1}}{\mathbb{E}\left[S_{n_k+1}\right]} \frac{\mathbb{E}\left[S_{n_k+1}\right]}{\mathbb{E}\left[S_{n_k}\right]}$$

故由夹逼定理结论仍然成立，得证。

2.6 (B6)

(i)

证明. 反设 $X_1 \in L^1$，则注意到 $X_1 > 0$，$\sum\limits_{n=3}^{\infty} \mathbb{P}\left[X_1 > n\right] \le \mathbb{E}\left[X_1\right] < \infty$。但

$$\sum_{n=3}^{\infty} \mathbb{P}\left[X_1 > n\right] = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{e}{n\log(n)} \sim \int_3^{\infty} \frac{e}{x\log(x)}\,\mathrm{d}x = e\log\log(x)|_3^{\infty} = \infty$$

矛盾！命题得证。 □

(ii) 用 Kolmogorov-Feller 引理（即 (A4)）。取 $b_n = n$，考察其条件是否满足：

- $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{j=1}^{n} \mathbb{P}\left[X_j > b_n\right] = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{e}{\log(n)} = 0$，条件满足。
- 不难算得 X^2 的概率密度函数：$p_{X^2}(x) = \frac{e(\log(x)+2)}{x^{\frac{3}{2}}\log^2(x)}$。故 $\mathbb{E}\left[X_j^2 \mathbf{1}_{|X_j|\le n}\right] = \frac{1}{e} - \frac{e}{n\log(n)}$，故

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}\left[X_j^2 \mathbf{1}_{|X_j|\le b_n}\right]\\ =&\lim_{n\to\infty} (\frac{1}{ne} - \frac{e}{n^2\log(n)}) = 0\end{aligned}$$

故引理条件满足，只需取 $\mu_n = \frac{1}{n}\mathbb{E}\left[X_j \mathbf{1}_{|X_j|\le n}\right] = \frac{e\log\log(n)}{n}$ 即可。

2.7 (B7)

$t \in \mathbb{Z}$ 的情形平凡地成立。再由周期性与奇偶性，只需考察 $t \in (0,1)$。记 $Y_n = X_n \cdot \frac{\sin(n\pi t)}{n}$。简记 $\sigma_n = \frac{\sin(n\pi t)}{n}$，则 $Y_n \sim \mathcal{N}(0, \sigma_n)$

在三级数定理中取 $C > 1$，分别考察三级数：

1. 当 $\sigma_n \ne 0$ 时：

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[|Y_n| > C\right] =& 2\mathbb{P}\left[Y_n > C\right] && (1)\\ =& 2\int_C^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp(-\frac{x^2}{2\sigma_n^2})\,\mathrm{d}x && (2)\\ \le& 2\int_C^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} x\exp(-\frac{x^2}{2\sigma_n^2})\,\mathrm{d}x && (3)\\ =& \frac{n}{\sqrt{2\pi}\sin(n\pi t)} \exp(-\frac{C^2n^2}{2\sin(n\pi t)^2}) && (4)\end{aligned}$$

- 若 $t \in \mathbb{Q}$，不妨设 $t = \frac{p}{q}$ $p < q$ 且互质，则原级数 =

$$\sum_{n \mod q \ne 0} \mathbb{P}\left[|Y_n| > C\right] = \sum_{1\le l<q} \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}\left[X_{kq+l} > \frac{(kq+l)C}{\sin(\frac{pl}{q}\pi)}\right]$$

只要这 $q-1$ 个级数都收敛，那么原级数就收敛。记 $C_l = \frac{C}{\sin(\frac{pl}{q}\pi)}$，则只需证明：$\forall 1 \le l < q$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}\left[X_{kq+l} > (kq+l)C_l\right] < \infty$$

用与上面的计算相似的方法得到 $\mathbb{P}[X_{kq+l} > (kq+l)C] \le \exp(-\frac{(kq+l)^2C_l^2}{2}) = O(\exp(-k^2))$，故该级数收敛。

- 若 $t \in (0,1)\setminus\mathbb{Q}$，则由 Weil 等分布定理，$nt \mod 1$ 在 $(0,1)$ 内是等分布的。故 $\forall\varepsilon > 0, \mathbb{P}[\sin(n\pi t) < \varepsilon] = \frac{\arcsin(\varepsilon)}{\pi}$。于是原级数 =

$$\sum_{\sin(n\pi t)<\varepsilon} \mathbb{P}[|Y_n| > C] + \sum_{\sin(n\pi t)\ge\varepsilon} \mathbb{P}[|Y_n| > C] =: I_1 + I_2$$

分别考察 I_1, I_2：

  - 对于 $I_1, |\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{X_n}{n}\sin(n\pi t)| \le \varepsilon\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|X_n|}{n}$。由 SLLN，该级数 a.s. 收敛，故由三级数定理 $I_1 < \infty$
  - 对于 I_2，可将1中的估计进一步放缩为：

$$\mathbb{P}[|Y_n| > C] \le \frac{n}{\sqrt{2\pi}\varepsilon} + \exp(-\frac{n^2C}{2\varepsilon^2}) = O(\exp(-n^2))$$

故 I_2 收敛。

（或注意到 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\pi t)}{n} = \frac{\pi}{2}(1-t) \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty}|X_n\frac{\sin(n\pi t)}{n}| < 2|\frac{\pi}{2}1-t| < \infty$ 得该级数一致收敛，推出其仍具有连续性，再由连续性即得。）

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{E}\left[Y_n\mathbf{1}_{|Y_n|<C}\right] = 0 < \infty$

3. $$\sum_{n=1}^{\infty} Var(Y_n\mathbf{1}_{|Y_n|\le C}) \le \sum_{n=1}^{\infty} Var(Y_n) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2(n\pi t)}{n^2} \le \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} < \infty$$

综上，由三级数定理，命题成立。

2.8 (B8)

$(i) \Rightarrow (ii)$ 在三级数定理中取 $C = 1$ 再将前两个级数相加即得。

$(ii) \Rightarrow (iii)$ $\mathbb{E}\left[\frac{X_n}{1+X_n}\right] = \mathbb{E}\left[\frac{X_n}{1+X_n}\mathbf{1}_{X_n<1}\right] + \mathbb{E}\left[\frac{X_n}{1+X_n}\mathbf{1}_{X_n>1}\right] \le \mathbb{P}[X_n > 1] + \mathbb{E}[X_n\mathbf{1}_{X_n\le 1}]$。求和，即由条件知其收敛。

$(iii) \Rightarrow (i)$ $\mathbb{E}\left[\frac{X_n}{1+X_n}\right] \ge \mathbb{E}\left[\frac{X_n}{1+X_n}\mathbf{1}_{X_n<1}\right] \ge \frac{1}{2}\mathbb{E}[X_n]$。故 $\mathbb{E}[X_n]$ 收敛，由 (A2)(vi) 即得。