概率论 (1) section 2
Homework assignment 4
Due: 周二下午, 4/26

注意：请使用钢笔、圆珠笔、签字笔而非铅笔，用中文作答。建议用 *A4* 纸写作业，提交时如果有多页请装订。**做作业前请认真阅读讲义，复习所学知识。**

注意: 讲义中的定理和结论可以直接应用（除非题目本身是为了补充这些证明的细节）。入无特别说明，随机变量都在 $\mathbb{R}$ 中取值。

A. 知识点拾零和证明题

(A1) 判断下列命题的正误，正确的**简要**证明之，错误的试举反例。

(i) 如果 $\mu \in \mathrm{SPM}$, $F(x) = \mu(-\infty, x]$ 是它的次概率分布函数, 则 $a, b \in \mathcal{C}_\mu = \mathcal{C}_F$(假设 $a < b$) 当且仅当 $\mu(a, b] = \mu(a, b) = \mu[a, b] = \mu[a, b)$.

改为：a是\mu的不连续点 (ii) 如果 $\mu \in \mathrm{SPM}$, 则 $\cancel{a \in \mathcal{C}_\mu}$ 当且仅当 $\mu\{a\} > 0$.

(iii) $X_n \overset{\mathrm{d}}{\Longrightarrow} X$, 当且仅当它们的概率分布函数 F_n, F 满足：对任意的 $x \in \mathcal{C}_F$, 都有 $F_n(x) \to F(x)$.

(iv) $X_n \overset{\mathrm{d}}{\Longrightarrow} X$, 当且仅当对任意的 $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$(即在 $\mathbb{R}$ 上光滑且有紧支集的 f) 都有 $\mathbb{E}[f(X_n)] \to \mathbb{E}[f(X)]$.

(v) 如果 $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 都是绝对连续型随机变量，并且 $X_n \overset{\mathrm{d}}{\Longrightarrow} X$, 则 X 也是绝对连续型的。

(vi) 如果 $X_n \overset{\mathrm{d}}{\Longrightarrow} X$, $G \subset \mathbb{R}$ 为闭集, $\mathbb{P}\{X_n \in G\} = 1$, 则 $\mathbb{P}\{X \in G\} = 1$.

(vii) 如果 $X_n \overset{\mathrm{d}}{\Longrightarrow} X$, $Y_n \overset{\mathrm{d}}{\Longrightarrow} Y$, 则 $X_n + Y_n \overset{\mathrm{d}}{\Longrightarrow} X + Y$.

(viii) 如果 $X_n \overset{\mathrm{d}}{\Longrightarrow} X$, $Y_n \xrightarrow{\text{a.s.}} Y$, 则 $X_n + Y_n \overset{\mathrm{d}}{\Longrightarrow} X + Y$.

(ix) 如果 $X_n \overset{\mathrm{d}}{\Longrightarrow} X$, $Y_n \overset{\mathrm{d}}{\Longrightarrow} Y$, $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 和 $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 独立，则 X, Y 也独立。

(x) 如果 $X_n \overset{\mathrm{d}}{\Longrightarrow} X$, $Y_n \overset{\mathrm{d}}{\Longrightarrow} Y$, $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 和 $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 独立，并且假设这些随机变量的概率密度函数都在 $C_0(\mathbb{R})$ 中，且 $p_{X_n} \to p_X$, $p_{Y_n} \to p_Y$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛, 则 $X_n + Y_n \overset{\mathrm{d}}{\Longrightarrow} X + Y$.

(xi) 设 $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是一族随机变量序列，如果对任意的 $\varepsilon > 0$ 都有 $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}\{|X_n| \geq \varepsilon\} < \infty$, 则 $X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} 0$.

(xii) 如果随机变量序列 $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 和 $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 满足 $\mathbb{P}\{X_n \neq Y_n, \text{ i.o.}\} = 0$, 则 $\sum_{n\in\mathbb{N}} X_n$ 几乎处处收敛当且仅当 $\sum_{n\in\mathbb{N}} Y_n$ 几乎处处收敛。

(xiii) (Wu Ex.2.6.13, 丘赛 2016) 如果随机变量族 $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 独立，且 $\mathbb{P}\{\limsup_{n\to\infty} \frac{|X_n|}{n} \leq 1\} = 1$, 则 $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}\{|X_n| \geq n\}$ 收敛。

(A2) 试简要证明下面的结论。

(i) 对于 $\mu \in \mathrm{PM}$, 我们称 $x \in \mathbb{R}$ 是 μ 的一个原子 (item), 如果 $\mu\{x\} > 0$. 则，对任意的 $\mu \in \mathrm{PM}$, μ 至多有可数多个原子。

加上“并且D没有聚点”这个条件 (ii) 设 $D \subset \mathbb{R}$ 是一个可数集，如果 $X, \{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是一族在 D 中取值的随机变量，则 $X_n \overset{\mathrm{d}}{\Longrightarrow} X$ 当且仅当，对每个 $p \in D$, $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\{X_n = p\} = \mathbb{P}\{X = p\}$.

(iii) 设 $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是一族独立的随机变量，并且 $\mathbb{E}[X_n] = 0$ 和 $\mathrm{var}[X_n] = 1$ 对所有 n 成立。则，如果 $Y \in L^\infty$, 总有 $\mathbb{E}[X_n Y] \to 0$.

(iv) 对任何的随机变量序列 X_n, 存在数列 $\{a_n\}_n \subset (0,\infty)$ 和数列 $\{b_n\}_n \subset \mathbb{R}$, 使得 $\frac{1}{a_n}(X_n - b_n) \xrightarrow{\text{a.s.}} 0$.

(v) 对于 $1 \le p < \infty$, 我们称 X_n 在 L^p 中弱收敛到 X, 记为 $X_n \xrightarrow{L^p} X$, 如果 $X_n, X \in L^p, (n \in \mathbb{N})$, 并且对任意的 $Y \in L^q$(其中 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$), 都有 $\mathbb{E}[X_nY] \to \mathbb{E}[XY]$. 设 $X_n \xrightarrow{L^p} X$, 则 $\mathbb{E}[|X|] \le \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}[|X_n|]$.

(vi) 设随机变量族 $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 满足 $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}[|X_n|] < \infty$, 则 $\sum_{n\in\mathbb{N}} X_n$ 几处处处收敛。

(A3) (Renewal theory(更新理论),Wu Example 3.3.5) 设 $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1(\Omega)$ 是一族独立同分布的随机变量，满足 $\mathbb{P}\{X_1 > 0\} = 1$, $m := \mathbb{E}[X_1] > 0$. 定义 $S_0 = 0$, $S_n = \sum_{j=1}^n X_j, (n \ge 1)$. 对于每个 $t \in [0,\infty)$, 我们定义随机变量（t 只是一个参数）:

$$N_t := \max\{n \in \mathbb{N}\cup\{0\} : S_n \le t\} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{S_n \le t}(\omega).$$

*说明：我们实际上定义了一个以 t 为时间变量的***随机过程***, 称为* **Renewal process***. 上面的模型的一个实例是：考虑光顾一个商场的顾客流（仅记录顾客进入商场的时间）, $\{X_n\}_n$ 中的每个 X_n 表示第 n 个顾客进入商场距离前一个顾客进入商场的时间 (inter-arrival times). 则 S_n 表示第 n 个顾客光临的时间，N_t 是在 t 时刻已经光临商场的总顾客数。参见 Wu Example 3.3.5 所举的其他实例。*

(i) 试简要说明

$$\{N_t = n\} = \{S_n \le t < S_{n+1}\}, \quad \{N_t < n\} = \{S_n > t\}, \quad \forall n \in \mathbb{N}\cup\{0\}, t \in [0,\infty).$$

(ii) 证明：$\lim_{t\to\infty} N_t = \infty$, $\mathbb{P}$-a.s.

(iii) 证明：$\lim_{t\to\infty}(N_t/t) = 1/m$, $\mathbb{P}$-a.s.

(iv) 证明：$\lim_{t\to\infty}(\mathbb{E}[N_t]/t) = 1/m$.

(A4) (Kolmogorov-Feller 引理) 设 $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是一族独立随机变量，$\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset (0,\infty)$ 满足 $b_n \to \infty$, 以及

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{j=1}^n \mathbb{P}\{|X_j| > b_n\}\right) = 0, \qquad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{b_n^2}\sum_{j=1}^n \mathbb{E}[X_j^2 \mathbf{1}_{|X_j|\le b_n}]\right) = 0.$$

证明：

$$\frac{1}{b_n}\sum_{j=1}^n \left(X_j - \mathbb{E}[X_j \mathbf{1}_{|X_j|\le b_n}]\right) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0.$$

B. 应用和计算题

(B1) 对每个 $n \in \mathbb{N}$, X_n 的分布满足 $\mathbb{P}\{X_n = \frac{j}{2^n}\} = \frac{1}{2^n}, \forall 1 \le j \le 2^n$. 试求 X 使得 $X_n \xRightarrow{\text{d}} X$.

(B2) 设 $\sigma_n > 0, (\forall n \in \mathbb{N})$, 并且 $\lim_{n\to\infty}\sigma_n = 0$. 设 $X_n \sim \mathcal{N}(0, \sigma_n^2)$(即服从 Gauss 分布), 求 X_n 依分布收敛的极限。

(B3) (Wu Ex.2.6.9, 丘赛 2015) 设 $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是一族独立随机变量, 每个 X_n 服从 Bernoulli 分布 $\mathbb{P}\{X_n = 1\} = p_n = 1 - \mathbb{P}\{X_n = 0\}$. 假设 $\sum_{n=1}^\infty p_n p_{n+1} < \infty$, 证明：$\sum_{n=1}^\infty X_n X_{n+1}$ 几乎处处收敛。

(B4) (Wu Ex.2.6.11, 丘赛 2015) 设 $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是一族独立随机变量, 每个 X_n 服从 Gauss 分布 $\mathcal{N}(\mu_n, \sigma_n^2)$.

(i) 证明，如果 $\sum_{n\in\mathbb{N}} X_n^2$ 在 L^1 中收敛，那么 $\forall p \in [1,\infty)$, 该级数也在 L^p 中收敛。

(ii) 设 $\mu_n = 0, (\forall n)$, 证明：如果 $\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n^2 = \infty$, 则 $\mathbb{P}\{\sum_{n\in\mathbb{N}} X_n^2 = \infty\} = 1$.

(B5) (Wu Ex.3.4.3) 设 $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是一族独立随机变量，每个 X_n 服从 Poisson 分布并且 $\mathbb{E}[X_n] = \lambda_n$.

改成X_j 定义 $S_n = \sum_{j=1}^{n} \cancel{X+j}$. 证明：如果 $\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n = \infty$, 则 $S_n/\mathbb{E}[S_n] \xrightarrow{\text{a.s.}} 1$.

(B6) 设 $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是一族 i.i.d. 随机变量，并且 $\mathbb{P}\{X_1 > x\} = \frac{e}{x\log x}, (\forall x \geq e)$.

(i) 验证：$X_1 \notin L^1$.

(ii) 试构造 μ_n, 使得 $S_n/n - \mu_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$.

(B7) 设 $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是一族 i.i.d. 随机变量，$X_1 \sim \mathcal{N}(0,1)$. 证明：对所有的 $t \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} X_n \cdot \frac{\sin(n\pi t)}{n} \quad \text{几乎处处收敛.}$$

加上“并且它们独立”这个条件

(B8) 设 $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是一族非负随机变量，证明：以下命题等价。

(i) $\sum_{n\in\mathbb{N}} X_n$ 几乎处处收敛;

(ii) $\sum_{n\in\mathbb{N}}(\mathbb{P}\{X_n > 1\} + \mathbb{E}[X_n \mathbf{1}_{X_n\leq 1}])$ 收敛;

(iii) $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}[X_n/(1+X_n)]$ 收敛。