1 泰勒展開：多項式逼近函數

多項式是一個很棒的函數，好處之一是它可以求導無限多次。這種函數應該發予良民證，實在太棒了！不過就這點而言還不夠特別，指數函數、三角函數也都可以發予良民證。

多項式還有一個好處是比較好代值，譬如說 $p(x) = x^{23} - 5x^{18} + 7x^{11} + 6x^3 - 8$，如果我們要算 $p(3.01)$，很煩，但起碼還能算。那如果是遇到其它函數呢？譬如說 $\sin(1)$，就不會算那麼久了，因為根本不會。

數學上常常是化繁為簡、化未知為已知。所以就有個想法，當我遇到一個函數 $f(x)$，可不可以寫出一個多項式 $p(x)$，是可以跟它非常接近的呢？至少，在我要算的點的附近是很接近的。譬如說剛剛的 $\sin(1)$，如果我的多項式只能在 $[-1,2]$ 上跟 $\sin(x)$ 很接近，那其實也夠用了。待我將這個多項式寫出來之後，凡是在這「附近」裡面，我就可以將原本想對 $f(x)$ 做的事情，改對 $p(x)$ 做，舉凡加、減、乘、除、次方、代入、微分、積分等等。所以當然，這個「附近」的範圍，能越大就越好。

舉個例子，下圖有條曲線 $f(x) = \frac{x^3-6x^2+9x+3}{1.58^x}$，它並不是多項式。現在，我找到一個三次多項式 $p(x) = 12.241687 - 8.2648x + 1.7988x^2 - 0.1065x^3$，它與 $f(x)$ 在 $x = 3$ 的附近還蠻接近的。離 $x = 3$ 遠一點之後，兩條曲線才越差越多。千萬不要被我的例子的函數長相嚇到了，在後面我們並不需要找出長這麼醜的多項式。

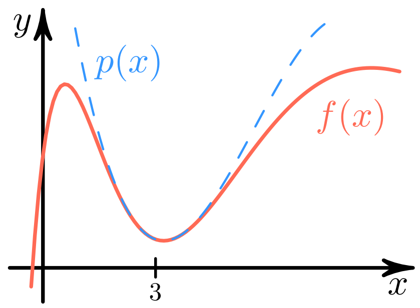

圖 1: 以多項式逼近函數

牛頓在處裡某些函數時，用了一些奇技淫巧寫出多項式來逼近 [1]。後來他的一個學生，Brook Taylor，在 1715 年時，提出一般性的理論，探討求出一個函數的多項式逼近的一般方法。

如果我們現在想找個 $p(x)$ 在 $x = a$ 的附近去逼近 $f(x)$。這個逼近的想法是這樣的：首先，兩個函數值 $f(a)$ 與 $p(a)$ 當然希望能一樣。接著，假如 $f(x)$ 可導的話，若它們在 $x = a$ 處的切線斜率也能夠一樣，那麼這兩個就更接近了。也就是說，兩者一階導數相等 $f'(a) = p'(a)$，這叫做一階切近。再來，假如 $f(x)$ 二階可導，如果又有 $f''(a) = p''(a)$，那麼這兩個便更加接近了，這叫做二階切近。以此類推、得寸進尺。只要 $f(x)$ 是 k 階可導，我都希望 $f^{(k)}(a)$ 與 $p^{(k)}(a)$ 能夠相等，這叫做 k 階切近。如果 $f(x)$ 在 $x = a$ 處無窮可導的話，那我就希望寫一個冪級數，可以與 $f(x)$ 在 $x = a$ 處的任意階導數都相等。

[1]事實上，在微積分草創時期，除了牛頓也有其它許多數學家諸如 Gregory、萊布尼茲、Johan Bernoulli、棣美弗等等，都寫出某些函數的多項式逼近。

k 階切近		
$f(x)$		$p(x)$
$f(a)$	$=$	$p(a)$
$f'(a)$	$=$	$p'(a)$
	$\vdots$	
$f^k(a)$	$=$	$f^k(a)$

按此想法，便可以將一個無窮可導的函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 處展開成：

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \end{aligned} \tag{1.1}$$

它的一般項形式是 $\frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n$。為什麼會這樣呢？為了檢驗等號右邊的確就是我們理想中的 $p(x)$，我們試著在等號右邊代 $x=a$、微分之後代 $x=a$、微分兩次之後代 $x=a$、⋯看看是否分別都等於 $f(a)$、$f'(a)$、$f''(a)$、⋯。

直接代 a，一次項以上全部都有 $(x-a)$，所以代入以後全是零，只剩 $f(a)$：

$$f(a)=f(a)+0+0+\cdots \tag{1.2}$$

若是我們對等號兩邊先微分一次，得到

$$f'(x)=0+f'(a)+\frac{f''(a)}{2!}\times 2(x-a)+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}\times n(x-a)^{n-1}+\cdots \tag{1.3}$$

此時常數項 $f(a)$ 微分後不見了。至於二次以上的項，微分完都至少還有一個 $(x-a)$。接著代 $x=a$，得到

$$f'(a)=0+f'(a)+0+\cdots+0+\cdots \tag{1.4}$$

所以在微分完之後代 a 時，二次以上的項也全跟著不見了，於是只剩一次項。而原來一次項 $f'(a)(x-a)$ 微分後，就是 $f'(a)$。

一般而言，微分 n 次後

$$f^{(n)}(x)=0+0+\cdots+f^{(n)}(a)+f^{(n+1)}(a)\times(x-a)+\cdots \tag{1.5}$$

再代 a。微分 n 次以後所有 $n-1$ 次以下的項全部變成零，而 $n+1$ 次以上的項，在微分完以後全部都還有至少一個 $(x-a)$，所以之後再代 a 時，它們也全跟著不見了，於是只剩 n 次項。而 n 次項 $\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ 微分 n 次以後，也成為常數。值是多少呢？因為微分 n 次以後會乘以 $n!$ [2]，所以就是 $\frac{f^{(n)}(a)}{n!}\times n!=f^{(n)}(a)$。在以上的檢驗過程中，你大概就能明白為什麼一般項長那樣了，擺個 $n!$ 在分母就是特意要拿來消的。

現在知道用 k 階切近的辦法來將函數展開成多項式了，刻不容緩，我們馬上來試刀吧！

[2]微分第一次會乘以 n，微分第二次乘以 $n-1$，微分第三次乘以 $n-2$，⋯

例題 11 試求 e^x 的馬克勞林展開。

解

所謂的馬克勞林 (Maclaurin) 展開，意思只不過是在 $x=0$ 處的泰勒展開，也就是說

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots \tag{1.6}$$

我們想要寫出這個出來，就必須知道 e^x 在 $x=0$ 處的各階導數。不過這太容易了，e^x 不管怎麼微分都還是 e^x，代 0 以後就是 1。於是有

$$\begin{aligned} e^x &= 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \end{aligned}$$

例題 12 試求 $\sin(x)$ 的馬克勞林展開。

解

$\sin(x)$ 的高階導函數具有規律

$$\begin{array}{rclrcl} f(x) &=& \sin(x) & f'(x) &=& \cos(x) \\ f''(x) &=& -\sin(x) & f^{(3)}(x) &=& -\cos(x) \\ f^{(4)}(x) &=& \sin(x) & f^{(5)}(x) &=& \cos(x) \\ & \vdots & & & \vdots & \end{array}$$

再配合 $\sin(0)=0$、$\cos(0)=1$，便易知

$$\begin{aligned} \sin(x) &= x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \end{aligned}$$

$\cos(x)$ 的情況十分類似，你就自己動手寫吧！

e^x 與 $\sin(x)$ 及 $\cos(x)$ 的高階導函數都有很簡單的規律，所以用一般的方法寫出馬克勞林展開都是很容易的。而且收斂區間都是整個實數 $\mathbb{R}$[3]，所以就算代一百萬，兩邊也是相等的。現在我們來檢查一件事，我剛剛說，只要在收斂區間內，本來想對 $f(x)$，做的一些事，可以改對 $p(x)$ 做。我們知道 e^x 求導後是自己，於是我們將

$$1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$$

作**逐項求導**，得到

$$0+1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$$

[3]判斷收斂區間的方法留待後面介紹。

真的等於自己。我們再檢查 $\sin(x)$ 求導後是 $\cos(x)$，將

$$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots$$

作逐項求導，得到

$$1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots$$

果然就是 $\cos(x)$ 的展開。

式子 (1.1) 好用在它具有一般性。一般而言，只要 $f(x)$ 能夠求導 k 次，我就可以照著操作寫出一個 k 次多項式來逼近它。卻不代表我們只能這樣做，有時候用這個方法會因為高階導數不太好寫而變得較為繁複。

事實上，我們還是可以根據各種不同函數的不同長相，用一些特殊的方法來寫出逼近多項式出來。在 Brook Taylor 於 1715 年提出他的理論以前，那些十七世紀的微積分先鋒們就各自寫出 $\sin(x)$、$\cos(x)$、$\arctan(x)$ 等等函數的展開，各自用了些奇奇怪怪的辦法。不過放心，在此我們只介紹些基本、好掌握的辦法。

譬如說 $\frac{1}{1-x}$，除了用那個一般的做法外，也可直接寫出

$$1+x+x^2+x^3+\ldots+x^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$$

為什麼呢？因為這就是無窮等比級數的和呀。從此還得知了，收斂區間就是 $-1<x<1$ [4]。

那麼 $\frac{1}{1+2x}$ 呢？把它看成 $\frac{1}{1-(-2x)}$ 就可以了，也就是說，將 $-2x$ 代在 $\frac{1}{1-x}$ 中的 x 裡面。於是就成為

$$1+(-2x)+(-2x)^2+\ldots+(-1)^n2^nx^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n2^nx^n$$

至於收斂區間，我們也將 $-2x$ 代入 $-1<x<1$，得到 $-1<-2x<1$，再化簡成 $-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$。

至於 $\ln(1+x)$ 呢？我們知道它的導函數是 $\frac{1}{1+x}$，所以我們先寫出

$$1-x+x^2-x^3+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^n$$

然後作逐項積分，得到

$$C+x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots=C+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nx^{n+1}}{n+1}$$

為了決定 C 是多少，代 $x=0$，得到 $\ln(1+0)=0=C+0+0+\ldots$，所以 $C=0$。於是

$$\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nx^{n+1}}{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$$ [5]

[4] 公比的絕對值要小於 1

[5] 這裡對足碼做了一點平移，新的 n 是舊的 n 加上 1，原來的 n 從 0 開始，那麼新的 n 就會從 1 開始。而 $(-1)^{n-1}$ 若改寫成 $(-1)^{n+1}$ 亦可，畢竟 $(-1)^2=1$。

至於收斂區間的問題，原本 $\frac{1}{1+x}$ 的收斂區間是 $-1<x<1$，我們是拿它作積分來的，所以範圍大致一樣，唯有端點可能發生改變，變成 $-1<x\leq 1$ [6]。如果你想知道為什麼會多個 1，你可以將 1 代入冪級數，得到 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$，交錯級數收斂 [7]。

那如果是 $\sin(x)\cos(x)$ 呢？可以先各自展開再相乘。也可以看成 $\frac{\sin(2x)}{2}$，所以從 $\sin(x)$ 的展開用 $2x$ 代，然後整個除以 2，便有

$$\frac{\sin(2x)}{2}=\frac{1}{2}\left(2x-\frac{2^3x^3}{3!}+\dots\right)=\left(x-\frac{2^2x^3}{3!}+\dots\right)$$

那如果是 $\arctan(x)$ 怎麼辦呢？它求導後是 $\frac{1}{1+x^2}$ 嘛，所以我們先寫出

$$1-x^2+x^4-\dots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$$

然後做逐項積分，得到

$$C+x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\dots=C+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

為了決定 C 是多少，代 $x=0$，得到

$$\arctan(0)=C+0+0+\dots$$

所以 $C=0$，便知 $\arctan(x)$ 的展開就是

$$\arctan(x)=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\dots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

接著各自將 -1 和 1 代入冪級數，都有交錯級數收斂，因此收斂區間也是從原本的 $-1<x<1$ 變成 $-1\leq x\leq 1$。

那如果是 $\sqrt{1+x}$ 又怎麼辦呢？它就是 $(1+x)^{\frac{1}{2}}$，高中曾學過二項式定理

$$(x+y)^n=C_0^n y^n+C_1^n y^{n-1}x+C_2^n y^{n-2}x^2+\dots+C_n^n x^n \tag{1.7}$$

若 $y=1$ 就是

$$(x+1)^n=C_0^n+C_1^n x+C_2^n x^2+\dots+C_n^n x^n$$

那是用在次方 n 是正整數的情況，我們現在次方不是正整數，也可以用嗎？牛頓在處理這問題的時候，將二項式定理推廣了，所以答案是可以的！所以我重寫一次

$$(x+1)^\alpha=C_0^\alpha+C_1^\alpha x+C_2^\alpha x^2+\dots \tag{1.8}$$

這對任何實數 α 都成立。這樣你可能產生一個問題，像 $C_3^{\frac{1}{2}}$ 該如何計算？回想一下，

$$C_3^7=\frac{7\times6\times5}{1\times2\times3}$$

[6]不包含 -1 是顯而易見的，因為代入 $\ln(1+x)$ 會變成 $\ln 0$，然而對數裡必須是正的。

[7]一般來說，冪級數收斂不代表它就會收斂到原來函數，後面會再談這部份。

推廣方法就是照著寫

$$C_3^{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}\times(-\frac{1}{2})\times(-\frac{3}{2})}{1\times2\times3} = \frac{1}{16}$$

從這推廣方法也可得知，本來式子 (1.7) 的寫法會停在 $C_n^n x^n$。但次方非正整數的時候，式子 (1.8) 可以一直寫下去，無窮多項。

於是我們現在就來處理 $\sqrt{1+x}$，寫成

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = C_0^{\frac{1}{2}} + C_1^{\frac{1}{2}}x + C_2^{\frac{1}{2}}x^2 + C_3^{\frac{1}{2}}x^3 + \dots$$

前兩項的係數都不須特地算，因為任何數取 0 都是 1、任何數取 1 都是自己。另外算一下

$$C_2^{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}\times(-\frac{1}{2})}{1\times2} = -\frac{1}{8}$$
$$C_3^{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}\times(-\frac{1}{2})\times(-\frac{3}{2})}{1\times2\times3} = \frac{1}{16}$$

假如你還要繼續多算幾項的話，其實不須要慢慢寫，只要每次都在分子分母各補一項就好了。以 $C_4^{\frac{1}{2}}$ 為例，

$$C_4^{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}\times(-\frac{1}{2})\times(-\frac{3}{2})\times(-\frac{5}{2})}{1\times2\times3\times4} = \frac{1\times(-\frac{5}{2})}{16\times4}$$

以此類推，要計算 $C_5^{\frac{1}{2}}$ 時，就分子補上 $-\frac{7}{2}$，分母補上 5。所以

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{\frac{1}{2}} x^n$$

至於 $\arcsin(x)$，它求導後是 $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，我們可以先做 $(1+t)^{-\frac{1}{2}}$ 的展開

$$1 - \frac{t}{2} + C_2^{-\frac{1}{2}}t^2 + C_3^{-\frac{1}{2}}t^3 + \dots = 1 - \frac{t}{2} + \frac{3t^2}{8} - \frac{5t^3}{16} + \dots$$

接著代 $t=-x^2$，便有

$$1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + \frac{5x^6}{16} + \dots$$

好啦，接著可以做逐項積分啦，

$$C + x + \frac{x^3}{2\cdot3} + \frac{x^5}{8\cdot5} + \frac{5x^7}{16\cdot7} + \dots$$

代 $x=0$，得到

$$\arcsin(0) = 0 = C + 0 + 0 + \dots$$

所以 $C=0$，於是 $\arcsin(x)$ 的展開就是

$$\arcsin(x) = x + \frac{x^3}{2\cdot3} + \frac{x^5}{8\cdot5} + \frac{5x^7}{16\cdot7} + \dots$$

收斂區間由 $-1<x<1$ 變成 $-1\le x\le 1$。判斷方法較難，但不知道亦無妨。

目前為止寫了這一堆，就是想呈現給你看，在許多時候我們都避開了需要高階求導的辦法。因為那好用歸好用，但寫起來常常很麻煩。幸好我們常可以透過求導、積分、代入、加減乘除等等手段，來將所要處理的函數，用更基本、我們知道如何展開的函數來導出它的展開。以下將一些基本常見的函數展開整理在下面：

	函數	冪級數展開	收斂區間
★	e^x	$1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$	$\mathbb{R}$
★	$\sin(x)$	$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots$	$\mathbb{R}$
★	$\cos(x)$	$1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots$	$\mathbb{R}$
★	$\frac{1}{1-x}$	$1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots$	$(-1,1)$
⋆	$\frac{1}{1+x}$	$1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n+\cdots$	$(-1,1)$
⋆	$\ln(1+x)$	$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots$	$(-1,1]$
	$\arctan(x)$	$x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots$	$[-1,1]$
★	$(x+1)^\alpha$	$C_0^\alpha+C_1^\alpha x+C_2^\alpha x^2+\cdots$	$(-1,1)$
	$\sqrt{1+x}$	$1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}-\cdots$	$[-1,1]$
	$\arcsin(x)$	$x+\frac{x^3}{2\cdot3}+\frac{x^5}{8\cdot5}+\cdots$	$[-1,1]$

★ 請你背起來，其它的便可由這些推得。

⋆ 可以不背，能背起來更好。

只有五個要背而已，而且第一個實在很好記，第二、三個長得和第一個很像可以一起背，第四個是無窮等比級數，第五個也只是二項式定理的推廣，所以記誦的負擔並不大。

例題 13 試求 xe^x 的馬克勞林展開。

解

先展開

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$$

接著整個乘以 x，便有

$$xe^x=x+x^2+\frac{x^3}{2!}+\frac{x^4}{3!}+\cdots$$

例題 14 求 e^{-x^2} 的馬克勞林展開。

解

先展開

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \cdots$$

接著用 $t = -x^2$ 代入，便有

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots$$

例題 15 求 $\frac{x^2}{1+x^3}$ 的馬克勞林展開。

解

我們可以將 $\frac{x^2}{1+x^3}$ 拆成 $x^2 \cdot \frac{1}{1+x^3}$，所以先展開

$$\frac{1}{1-(-x^3)} = 1 - x^3 + x^6 - x^9 + \cdots$$

然後跟 x^2 相乘，也就是說每一項的次方都增加二，變成

$$\frac{x^2}{1+x^3} = x^2 - x^5 + x^8 - x^{11} + \cdots$$

也可以將其視為 $\ln(1+x^3)$ 的導函數再除以 3，但應該還是前一個方法快些。

這題若以 $\sum$ 的形式來寫，就是

$$x^2 \cdot \frac{1}{1+x^3} = x^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-x^3)^n = x^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{3n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{3n+2}$$

例題 16 求 $\frac{1}{3-2x}$ 的馬克勞林展開。

解

注意分母那邊是 3 不是 1，所以沒辦法直接套我們有背的那個。但這很容易解決，只要將 3 提出來，便有

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{2x}{3}} = \frac{1}{3} \cdot \left(1 + (\frac{2x}{3}) + (\frac{2x}{3})^2 + (\frac{2x}{3})^3 + \cdots\right)$$

例題 17 將 e^x 於 $x = 2$ 處做泰勒展開。

解

這次不是馬克勞林展開了，而是要在 $x = 2$ 的地方展開。有個小技巧！我先設 $t = x - 2$，那麼 $e^x = e^{t+2}$，在 $x = 2$ 處就是在 $t = 0$ 處。因此我們就有

$$e^{t+2} = e^2 \cdot e^t = e^2\left(1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \ldots\right)$$

此時再用 $t=x-2$ 代回去

$$e^2+e^2(x-2)+\frac{e^2}{2!}(x-2)^2+\frac{e^2}{3!}(x-2)^3+\dots$$

若以 $\sum$ 的形式來寫，就是

$$e^2\cdot e^t=e^2\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}$$

用 $t=x-2$ 代回去

$$e^2\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^2}{n!}(x-2)^n$$

例題 18 將 $\ln(x)$ 於 $x=3$ 處做泰勒展開。

解

這題也類似，在 $x=3$ 處做泰勒展開會做出形如 $\sum a_n(x-3)^n$ 的冪級數，所以我們就設 $t=x-3$，使 $\ln(x)$ 變成 $\ln(t+3)$，然後作馬克勞林展開，做完再代回 x。由於是 $t+3$ 不是 $t+1$，所以寫成

$$\begin{aligned}\ln(t+3)&=\ln 3+\ln\left(1+\frac{t}{3}\right)\\&=\ln 3+\left((\frac{t}{3})-\frac{(\frac{t}{3})^2}{2}+\frac{(\frac{t}{3})^3}{3}-\cdots\right)\end{aligned}$$

接著代 $t=x-3$ 回去

$$\begin{aligned}&=\ln 3+\frac{(x-3)}{3}-\frac{(\frac{(x-3)}{3})^2}{2}+\frac{(\frac{(x-3)}{3})^3}{3}+\cdots\\&=\ln 3+\frac{(x-3)}{3}-\frac{(x-3)^2}{18}+\frac{(x-3)^3}{81}+\cdots\end{aligned}$$

若以 $\sum$ 的形式來寫，就是

$$\begin{aligned}\ln(t+3)&=\ln 3+\ln(1+\frac{t}{3})\\&=\ln 3+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3n}t^n\end{aligned}$$

接著代 $t=x-3$ 回去

$$=\ln 3+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3n}(x-3)^n$$

用這樣寫好像比較好喔。不但寫的人比較簡便，看的人也較一目了然。

例題 19　求 $\ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)$ 的馬克勞林展開。

解

不要被 $\ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)$ 的長相嚇到了，對數裡的乘除就是加減、對數裡的次方就是乘。所以

$$\begin{aligned}\ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right) &= \frac{1}{2}\cdot\Big(\ln(1+x)-\ln(1-x)\Big)\\ &= \frac{1}{2}\cdot\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-x^n}{n}\right)\\ &= \frac{1}{2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}+1}{n}x^n\end{aligned}$$

觀察當 n 是奇數的時候，$(-1)^{n+1}+1=1+1=2$，然而當 n 是偶數的時候，$(-1)^{n+1}+1=-1+1=0$。所以

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{2n+1}x^{2n+1}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\end{aligned}$$

例題 110　求 $\tan(x)$ 的馬克勞林展開。

解

由於 $\tan(x)=\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ 所以可以拿 $\sin(x)$ 與 $\cos(x)$ 的展開來相除。這裡介紹另外一招，**待定係數法**。就是先設

$$\tan(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots$$

注意到 $\tan(x)$ 是奇函數，所以它必然只有奇次項。於是可以寫成

$$\tan(x)=a_1x+a_3x^3+\cdots$$

沒注意到也沒關係，等下還是會解出 $a_0=a_2=\cdots=0$。然後我們寫成

$$\sin(x)=\tan(x)\cdot\cos(x)$$

所以就有

$$x-\frac{x^3}{3!}+\cdots=\Big(a_1x+a_3x^3+\cdots\Big)\cdot\left(1-\frac{x^2}{2!}+\cdots\right)$$

比較等號兩邊的一次項，我們有

$$1=a_1\times 1$$

接著再比較三次項，我們有

$$-\frac{1}{6}=a_1\times\left(-\frac{1}{2}\right)+a_3\times 1$$

看我們需要將 $\tan(x)$ 展開到幾次項，就比較到幾次項。

2 泰勒展開的應用

在一開始介紹為什麼要做泰勒展開時，便已提過我們可以很好代值。譬如說 $\sin(1)$，我們可以寫出它的泰勒展開

$$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots$$

然後將 $x=1$ 代入

$$1-\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}-\frac{1}{7!}+\cdots$$

你如果做這無窮多次的加減乘除，便可以得到 $\sin(1)$ 的精確值了。當然，我是說笑的，實務上怎麼可能真的做無窮多項。實際上我們可以只做幾項就好，雖然只做前幾項就不是 $\sin(1)$ 的精確值了，但所做出來的近似值與精確值通常相差不遠 [8]。

例題 21 估計 e 的近似值。

解

我們可以利用 $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots$，代入 $x=1$，便有

$$\begin{aligned}e&=1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\cdots\\&\doteqdot 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}=2.7083\end{aligned}$$

只取前五項加起來是 2.7083，而精確值是 2.718281828...，看起來已經頗為接近。

例題 22 估計 $\ln 2$ 的近似值。

解

從 $\ln(1+x)$ 代 $x=1$ 之後就是 $\ln 2$ 了。檢查一下收斂區間，的確有包含到 1，所以可以代。假使要估計 $\ln 3$，便不可以直接從 $\ln(1+x)$ 代了，因為 $x=2$ 並不在收斂區間內。

$$\begin{aligned}\ln 2&=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\\&\doteqdot 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\\&=\frac{7}{12}\end{aligned}$$

[8]實際上有些級數可能會收斂得很慢，以致於我們要算很多項才有辦法讓誤差夠小。因此在微積分課程裡我們要學會估算誤差大約是多少，這留待後面介紹。

但這個級數收斂得很慢，$\ln 2$ 的精確值大約是 0.693，然而我們只算前四項的結果 $\frac{7}{12}$ 約是 0.583，這誤差有點大。若想估得更精確的話，須要算很多項才行。

例題 23 估計 π 的近似值。

解

想估計 π 有很多種辦法，其中一個方法是利用 $\arctan(1)=\frac{\pi}{4}$，也就是說 $\pi = 4\arctan(1)$，所以我們先做 $\arctan(x)$ 的展開

$$x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots$$

然後代 $x=1$，再乘以 4，於是

$$\begin{aligned}\pi &= 4\arctan(1)\\ &= 4\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots\right)\end{aligned}$$

不過用這個方法也是有收斂得很慢的問題，算到一千項了才精確到小數點後三位。想估計 π 還可以有很多其它辦法，譬如說 $\sin(\frac{\pi}{2})=1$，那麼 $\pi = 2\cdot\arcsin(1)$。於是就可以先將 $\arcsin(x)$ 展開後代 1，再兩倍。但很不幸地，這個方法也收斂得挺慢。

例題 24 估計 $\int_0^1 e^{x^2}dx$ 的近似值。

解

e^{x^2} 並沒有初等反導函數，所以我們無法利用微積分基本定理，來求出這個積分的精確值。但是我們可以利用泰勒展開，計算前幾項，來求近似值:

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^{x^2}dx &= \int_0^1\left(1+x^2+\frac{x^4}{2!}+\cdots\right)dx\\ &= \left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5\cdot 2!}+\cdots\right)\Big|_0^1\\ &= 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5\cdot 2!}+\cdots\\ &\doteqdot 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5\cdot 2!}+\frac{1}{7\cdot 3!}+\frac{1}{9\cdot 4!}\\ &\doteqdot 1.4618\end{aligned}$$

用數學軟體去估這個積分，大約是 1.46265，我們取前五項做起來就已經頗接近了。

例題 25 求 $\lim_{x\to 0}\frac{\tan(x)-\sin(x)}{x^3}$。

解

我們將 $\tan(x)$ 與 $\sin(x)$ 都展開，得到

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0}\frac{\left(x+\frac{x^3}{3}+\cdots\right)-\left(x-\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)}{x^3}\\ =&\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{2}+\cdots}{x^3}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

因為 $x\to 0$，所以我們直接只比較次方最小的，因此展開到三次項就可以了。

由此題可見，在做極限時使用泰勒展開，可能會簡化不少過程。反觀羅必達法則，它許多時候好用，但有一些缺點。其一是，你可能事先不知道要求導幾次才結束，甚至可能根本沒有結束的時候。其二是，就算你知道要求導七次好了，你有那個勇氣做下去嗎？等你做完一題，秦始皇都已經把萬里長城蓋好了。因此，許多時候用泰勒展開也是處理極限式的一個好選擇。

例題 26 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{e^x-1}$。

解

這題用羅必達也可很快做出來，不過沒關係，我們還是拿來練習用泰勒展開解。上下各展開成

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\cdots}{\left(1+x+\cdots\right)-1}=1$$

實在很快，才展開到一次項而已。像這種題目簡直可以不拿筆算，直接盯著題目就心算出來了。然後對著題目說：「我一眼就把你看穿了！」。

例題 27 判斷級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\sqrt[n]{n}-1\right]$ 的斂散性。

解

$$\begin{aligned}n^{\frac{1}{n}}-1&=e^{\frac{\ln n}{n}}-1\\ &=\left[1+\frac{\ln n}{n}+\frac{1}{2}\left(\frac{\ln n}{n}\right)^2+\cdots\right]-1\\ &=\frac{\ln n}{n}+\frac{1}{2}\left(\frac{\ln n}{n}\right)^2+\cdots>\frac{\ln n}{n}>\frac{1}{n}\end{aligned}$$

因 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 發散，故原級數發散。

高階導數的規律有時是不容易找出來的，所以前面便演示了，如何一直避開高階求導來泰勒展開。而巧妙地，我們卻可因此回頭來解決高階導數問題。就是說，若展開出

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$$

而如果我們要用一般的方法

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x+\cdots$$

也會做出一樣的展開。於是，我可以兩相比較，得到

$$\begin{aligned} f(0) &= a_0 \\ f'(0) &= a_1 \\ \frac{f''(0)}{2!} &= a_2 \\ &\vdots \\ \frac{f^{(n)}(0)}{n!} &= a_n \end{aligned}$$

所以，如果我們想知道 $f^{(23)}(0)$，我就可以將 $f(x)$ 做馬克勞林展開，然後將第 23 階係數乘以 23!，便會等於 $f^{(23)}(0)$。這是因為

$$\frac{f^{(23)}(0)}{23!} = a_{23}$$

而如果是想知道 $f^{(23)}(3)$，便不能用馬克勞林展開，必須使用 $a = 3$ 的泰勒展開

$$f(x) = f(3) + f'(3)(x-3) + \frac{f''(3)}{2!}(x-3)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(3)}{n!}(x-3)^n + \dots$$

接著因為

$$\frac{f^{(23)}(3)}{23!} = a_{23}$$

所以將第 23 階係數乘以 23!，便是 $f^{(23)}(3)$。

例題 28 若 $f(x) = x^6 e^{x^3}$，求 $f^{(60)}(0)$。

解

先展開出

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \cdots + \frac{t^n}{n!} + \cdots$$

然後代 $t = x^3$，得到

$$e^{x^3} = 1 + x^3 + \frac{x^6}{2!} + \cdots + \frac{x^{3n}}{n!} + \dots$$

再整個乘以 x^6，也就是每一項的次方都加 6，得到

$$x^6 e^{x^3} = x^6 + x^9 + \frac{x^{12}}{2!} + \cdots + \frac{x^{3n+6}}{n!} + \dots$$

從中找出第 60 階，就是 $\frac{x^{60}}{18!}$。將它的係數乘以 60!，得到

$$f^{(60)}(0) = \frac{1}{18!} \times 60!$$

3 泰勒定理與餘項

如前所示，雖然我們實際上沒辦法寫出無窮多項出來，但常常只要寫個前幾項就已有不錯的近似，寫越多項就越逼近。如下圖所示，$\sin(x)$ 的馬克勞林展開，寫得越多項，在 $x=0$ 附近就與 $\sin(x)$ 越像。

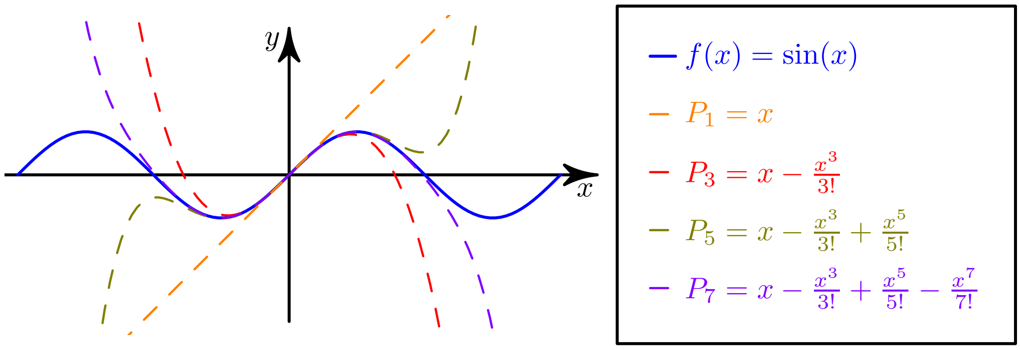

圖 2: $\sin(x)$ 與 k 階切近

現在我們來討論，如果我們預想好要近似到某種準確度，譬如說想要準確到小數點後四位，那我們能不能在展開前，預先估一下我們大概要算幾項呢？或者是，當我寫了 n 項出來，我如何知道我估的近似值跟精確值的誤差有多少呢 [9]？

定理 3.1　泰勒定理

若 $f(x)$ 在某個包含 a 點的開區間 I 上 $n+1$ 階可導，則對於任意的 $x \in I$，$f(x)$ 都可以展開為

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x)$$

其中

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-a)^{n+1} \quad ,c\text{ 介於 } x \text{ 和 } a \text{ 之間}$$

這個定理告訴我們，如果一個函數在某個開區間上可以求導 17 次的話，那麼我們就可以照著這個一般式來寫出泰勒展開，寫到第 16 階。至於它與原來的函數的差，我們就用 $R_{16}(x)$ 來代表這個差。就是說

$$R_{16}(x) = f(x) - p_{16}(x), \quad p_{16}(x)\text{ 是展開到第 16 階的泰勒多項式}$$

一般來說，展開出 n 階的話，便有 $R_n(x)$ 來代表差。也就是說

$$R_n(x) = f(x) - p_n(x), \quad p_n(x)\text{ 是展開到第 } n \text{ 階的泰勒多項式}$$

這叫做**餘項** (remainder)，也可稱之為**誤差項** (error term)。在這定理中還告訴我們餘項長什麼樣子，只要先照著泰勒多項式的一般項寫法，寫出下一項

$$\frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

[9]在前面幾題我們直接列出精確值與近似值作比較，那是因為我用數學軟體跑出來的。實際上我們紙筆計算時，當然不知道精確值是多少。

但注意 $f^{n+1}()$ 裡面，那邊不是照著抄 a，而是改成某一個 c。這個 c 是介於 x 和 a 之間的某個數。這樣寫就剛好會是原函數與 n 階泰勒多項式之間的差。接著再把這個差，掛上絕對值，就是誤差。也就是說

$$\text{誤差} = \left|R_n(x)\right| = \left|f(x) - p_n(x)\right| = \left|\frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}\right|$$

至於 c，我們只知道是 x 和 a 間的某個數，並不知道到底是多少，這樣有用嗎？實際上我們可以用估計的方式，來說：無論 c 是何值，這個誤差都小於等於某個值，如此一來雖無法確知誤差是多少，但至少可確定誤差不會超過那個值。

來點實際的例子讓你更了解我在說什麼。

例題 31 以 5 階泰勒多項式估計 sin(1) 的近似值時，誤差大約是多少？

解

$\sin(x)$ 的 5 階馬克勞林展開是

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

代入 $x = 1$，得到

$$1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} = \frac{101}{120} \doteqdot 0.8416667$$

這就是我們對 $\sin(1)$ 的估計值。現在我們想知道，這個估計值與精確值的誤差大概是多少。我們知道餘項

$$R_5(x) = \frac{f^{(6)}(c)}{6!}x^6$$

因是馬克勞林展開所以 $a = 0$，接著代 $x = 1$，並且誤差要掛絕對值，所以應該寫

$$\left|R_5(1)\right| = \left|\frac{f^{(6)}(c)}{6!}\right|$$

而 $\sin(x)$ 的六階導函數就是 $-\sin(x)$，所以是

$$\left|R_5(1)\right| = \left|\frac{\sin(c)}{6!}\right|$$

不知道 c 是多少沒有關係，反正我們知道 $|\sin(x)| \le 1$ 恆成立，所以我們可以說

$$\left|R_5(1)\right| = \left|\frac{\sin(c)}{6!}\right| \le \frac{1}{6!} \doteqdot 0.0013889$$

這樣寫的意思是說，我不知道誤差的大小究竟如何。但最少最少，可以確定的是它不會超過 0.0013889。也許事實上 c 離 0 很近，使得 $\sin(c)$ 很小，也就是說誤差值實際上又遠小於 0.0013889。但我不管那麼多，反正我也求不出 c。至少我能確定，它一定不會超過 0.0013889 就對了。

實際用數學軟體去求 $\left|\sin(1) - \frac{101}{120}\right|$，得到大約是 0.000195682。還真的比 0.0013889 小了許多，不到它的六分之一。

例題 32 以 4 階泰勒多項式估計 e 的近似值時，誤差大約是多少?

解

e^x 的 4 階馬克勞林展開，並且代 $x=1$，得到

$$1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!} \doteqdot 2.708333333$$

誤差則是

$$\left|R_4(1)\right| = \left|\frac{e^c}{5!}\right|$$

e^x 的 5 階導函數仍是 e^x，接著代 c。x 是代 1，所以 $0<c<1$，這代表 $e^0<e^c<e^1$。e 大約是 2.7，為了簡便，我說它小於 3 也沒關係。所以

$$\left|R_4(1)\right| = \left|\frac{e^c}{5!}\right| < \frac{e}{5!} < \frac{3}{5!} = 0.025$$

我們不知道誤差是多少，但至少有信心說誤差不超過 0.025。而精確誤差值是 $2.718281828-2.708333333 \doteqdot 0.009948495$，的確沒有超過。

例題 33 請估計 $\sin(1)$ 的近似值使誤差小於 0.0001。

解

剛剛是指定寫出 5 階泰勒展開，估計誤差是多少。現在是反過來，指定誤差應控制在一定範圍內，我們要估一下我們必須至少寫到幾階。

我們知道誤差

$$\left|R_{2k+1}(1)\right| = \left|\frac{\sin(c)}{(2k+2)!}\right| < \frac{1}{(2k+2)!}$$

所以只要 $\frac{1}{(2k+2)!}<0.0001$，便可確保誤差也小於 0.0001。所以我們解

$$\frac{1}{(2k+2)!} < \frac{1}{10000} \quad \Rightarrow (2k+2)! > 10000$$

動手算算看，$6!=720$ 不夠，$8!=720\times 56 >$[a] $700\times 50 = 35000 > 10000$。所以只要 $2k+2=8$ 就可滿足誤差要求，也就是說 $2k+1=7$，我們要寫出 7 階泰勒展開。

[a] 只是要確認大於 10000，並不關心精確值。所以不必傻傻地慢慢算，直接說它大於某個好算的值。

例題 34 請估計 $\int_0^1 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ 使其誤差小於 0.001。

解

e^{-x^2} 並沒有初等反導函數，所以我們沒辦法套用微積分基本定理來做出這個積

分的精確值。但我們可以將它展開

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 \left(1-x^2+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\cdots\right) \mathrm{d}x \\
=&x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5\cdot 2!}-\frac{x^7}{7\cdot 3!}+\cdots\Big|_0^1 \\
=&1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5\cdot 2!}-\frac{1}{7\cdot 3!}+\frac{1}{9\cdot 4!}-\cdots \\
\doteqdot&0.7475
\end{aligned}
$$

最後那個無窮級數，它是個交錯級數，我只加到 $\frac{1}{9\cdot 4!}$ 那一項。而根據交錯級數的誤差估計法，誤差會小於將下一項掛絕對值，所以我們這裡的誤差會小於

$$\frac{1}{11\cdot 5!}=\frac{1}{1320}<0.001$$

這樣的確就確保誤差值小於 0.001 了。

你可能有疑問，我怎麼那麼厲害知道要加到 $\frac{1}{9\cdot 4!}$ 那一項？這是因為我首先知道交錯級數的誤差估計法，誤差會小於將下一項掛絕對值。於是我就直接看看哪一項我是可以很確定它掛絕對值會小於 0.001 的，便看到 $-\frac{1}{11\cdot 5!}$ 這一項。既然這一項掛絕對值會小於 0.001，那麼我加到它的前一項，誤差就會小於 0.001 了。

現在知道餘項該怎寫，便可以用它來看收斂區間了。首先必須慎重強調的是，同樣是「收斂區間」，泰勒展開的收斂區間 與冪級數的收斂區間，意義並不相同。

冪級數的收斂區間是指，只要 x 在這區間內，代入冪級數以後，所形成的無窮級數會收斂。而泰勒展開的收斂區間是指，只要 x 在這區間內，代入泰勒級數以後，所形成的無窮級數不但會收斂，還要等於直接將 x 代在原函數。

兩者真的有區別嗎？舉例來說，這個函數

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & ,\ x\neq 0 \\ 0 & ,\ x=0 \end{cases} \tag{3.1}$$

它在 $x=0$ 處的各階導數都是 0

$$f(0)=f'(0)=f''(0)=\cdots=0$$

於是它的馬克勞林展開便是

$$0+0+0+\cdots$$

這個長相很特別的「冪級數」，不管 x 代多少，都是每項皆 0，所以冪級數的收斂區間是 $\mathbb{R}$。但函數 $f(x)$ 只有在 $x=0$ 的時候函數值才是 0，其它時候函數值皆不為 0，所以泰勒展開的收斂區間只有 $x=0$ 處。

例題 35 求 $\sin(x)$ 馬克勞林展開的收斂區間。

解

將 $\sin(x)$ 展開至第 $2k+1$ 階 [a]，則餘項為

$$R_{2k+1}(x)=\frac{\sin(c)}{(2k+2)!}x^{2k+2}$$

所以 $2k+1$ 階泰勒多項式與原函數的誤差是

$$\left|R_{2k+1}(x)\right| = \left|\frac{\sin(c)}{(2k+2)!}\,x^{2k+2}\right| \le \left|\frac{x^{2k+2}}{(2k+2)!}\right|$$

如果我們做出無窮多項，那麼誤差便是

$$\lim_{k\to\infty}\left|R_{2k+1}\right| \le \lim_{k\to\infty}\left|\frac{x^{2k+2}}{(2k+2)!}\right| = 0$$

這意思是說，無論 x 是多少，餘項都會隨著 k 越來越大而趨近到 0。也就是收斂區間是整個實數。

[a]因為 $\sin(x)$ 的泰勒展開只有奇次項。

前面在求泰勒展開的收斂區間時，直接求展開出來的冪級數收斂區間。但現在又說，泰勒展開的收斂區間與冪級數收斂區間是不同一回事，應該要用 $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = 0$ 來確認。這並不是因為我還沒介紹餘項，所以前面姑且用錯誤的方法求出錯誤的區間。而是因為，雖然對於有些函數，例如前面的 (3.1)，其泰勒展開的收斂區間與冪級數收斂區間並不相同，但還是有某些函數，這兩區間是一模一樣的。像這種函數，實在太棒了！將它寫出泰勒級數出來，只要冪級數收斂的地方，也必然就收斂到原來的函數。這種函數，我們稱之為**解析函數**，並且頒予特級良民證，以資感謝。一般常見的多項式、指數函數、對數函數、三角函數等等，都是解析函數。而解析函數彼此拿來做加減乘除、合成，出來的結果也是解析函數。既然是解析函數，那我只須求泰勒級數的冪級數收斂區間，就會等同於泰勒展開的收斂區間了。

最後做點補充，一般讀者不一定要看。其實，餘項有不止一種寫法。前面所介紹的，叫做**拉格朗日型餘項** (Lagrange form of the remainder)。我們回想一下拉格朗日均值定理:

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)\text{，}\ b > c > a$$

仔細一看，它根本就是做零階泰勒展開

$$f(x) = f(a) + R_0(x)$$

然後再代 $x = b$ 嘛！所以帶有拉格朗日型餘項的泰勒定理，其實就是更高階的均值定理。

餘項的另一種寫法，叫做**皮亞諾型餘項** (Peano form of the remainder)。

定理 3.2　皮亞諾型餘項的泰勒定理

若 $f(x)$ 在某個包含 a 點的開區間 I 上 $n+1$ 階可導，則對於任意的 $x \in I$，$f(x)$ 都可以展開為

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x)$$

其中

$$R_n(x) = o\big((x-a)^n\big)$$

這個寫法，涉及了 Landau **小 o 記號**，這是德國數學家 Edmund Landau 用來描述函數的漸近行為的符號。如果 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^3} = 0$，我們就記為 $f(x) = o(x^3)$，意思是說 $f(x)$ 是比 x^3 更高階的無窮小。換句話說，$f(x)$ 跑到 0 比 x^3 跑到 0 還快！

所以說，佩亞諾型餘項的寫法是簡單標註高階無窮小。例如原本寫

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

帶有佩亞諾型餘項的寫法就寫成

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + o\left(x^4\right)$$

口語來說，$\frac{x^4}{4!}$ 這一項之後那些我所沒寫出的，是比 x^4 更高階的無窮小啦！

之前介紹過利用泰勒展開求極限：

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x) - \sin(x)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(x + \frac{x^3}{3} + \cdots\right) - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{2} + \cdots}{x^3} = \frac{1}{2}$$

現在可寫成帶有佩亞諾型餘項的寫法：

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x) - \sin(x)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(x + \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right)\right) - \left(x - \frac{x^3}{3!} + o\left(x^3\right)\right)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{2} + o\left(x^3\right)}{x^3} = \frac{1}{2}$$

比起原本寫點點點，現在的寫法明確指出那些是更高階的無窮小，所以在做極限時是可以略去不看的。

Peano 型餘項的另外一個好處是簡便地處理極大極小理論：

例題 36 試證：若函數 f 在 $x = a$ 處 n 階可導，且

$$f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{n-1}(a) = 0,\ f^{(n)}(a) \neq 0$$

則當 n 為奇數時，$x = a$ 不是極值點；當 n 為偶數時，若 $f^{(n)}(a) < 0$，$x = a$ 是極大點。若 $f^{(n)}(a) > 0$，$x = a$ 是極小點。

解

根據已知作泰勒展開：

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n + o\left((x-a)^n\right) \\ &= f(a) + 0 + 0 + \cdots + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n + o\left((x-a)^n\right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(x) - f(a) = (x-a)^n \left[\frac{1}{n!} f^{(n)}(a) + o(1)\right]$$

由於 $o(1)$ 是比 1 還高階的無窮小，它不會改變 $\frac{1}{n!} f^{(n)}(a)$ 的正負號。換句話說，$\frac{1}{n!} f^{(n)}(a) + o(1)$ 與 $f^{(n)}(a)$ 同號。故當 n 為奇數，$(x-a)^n$ 在 $x = a$ 的左右兩側異號，即 $f(x) - f(a)$ 在 $x = a$ 的左右兩側異號，$x = a$ 處不是極值；當 n 為偶數，$(x-a)^n$ 在 $x = a$ 的左右兩側皆正，則若 $f^{(n)}(a) > 0$，$f(x) - f(a)$ 在 $x = a$ 的左右兩側皆為正，$x = a$ 處是極小值。同理，若 $f^{(n)}(a) < 0$，$x = a$ 處是極大值。

另外，還有個**積分型餘項** (integral form of the remainder)。

定理 3.3　積分型餘項的泰勒定理

若 $f(x)$ 在某個包含 a 點的開區間 I 上 $n+1$ 階可導，並且 $f^{n+1}(x)$ 在此區間上連續，則對於任意的 $x \in I$，$f(x)$ 都可以展開為

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x)$$

其中

$$R_n(x) = \int_a^x \frac{f^{(n+1)(t)}}{n!}(x-t)^n \, \mathrm{d}t$$

由微積分基本定理：

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) \, \mathrm{d}t$$

接著做分部積分

$$\begin{aligned} &= f(a) + \Big[(t-x)f'(t)\Big]_{t=a}^{t=x} - \int_a^x (t-x)f''(t) \, \mathrm{d}t \\ &= f(a) + (x-a)f'(a) - \int_a^x (t-x)f''(t) \, \mathrm{d}t \end{aligned}$$

繼續做分部積分

$$\begin{aligned} &= f(a) + (x-a)f'(a) - \left[\frac{(t-x)^2}{2}f''(t)\right]_{t=a}^{t=x} + \int_a^x \frac{(t-x)^2}{2}f'''(t) \, \mathrm{d}t \\ &= f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2}f''(a) + \int_a^x \frac{(t-x)^2}{2}f'''(t) \, \mathrm{d}t \end{aligned}$$

如此反復做分部積分，便有

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2}f''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + R_n(x)$$

其中

$$R_n(x) = (-1)^n \int_0^x \frac{(t-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) \, \mathrm{d}t = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) \, \mathrm{d}t$$

由微積分基本定理出發，反復做分部積分，便得到帶有積分型餘項的泰勒定理。所以，泰勒定理也可看成微積分基本定理的推廣。

泰勒理論是微分學的巔峰。它是高階切近，比起作切線的一階切近，是更高階的近似；它是微積分基本定理的推廣；它是高階的拉格朗日均值定理。應用上，它可以輕易作出極限、估計函數值、估計積分，又可證明極大極小理論。一學到泰勒理論，當有種「會當凌絕頂，一覽眾山小。」[10]之感！

[10]杜甫《望岳》。