北京交通大学

信号与系统

主讲人：陈后金

电子信息工程学院

连续时间LTI系统响应的时域分析

- 基于求解常系数线性微分方程的方法
- 基于零输入响应和零状态响应的方法

1.基于求解常系数线性微分方程的方法

连续LTI系统可由常系数线性微分方程描述

$$y^{(n)}(t)+a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+\cdots+a_1y'(t)+a_0y(t)$$
$$=b_mx^{(m)}(t)+b_{m-1}x^{(m-1)}(t)+\cdots+b_1x'(t)+b_0x(t)$$

微分方程的全解由齐次解$y_h(t)$和特解$y_p(t)$组成

$$y(t)=y_h(t)+y_p(t)$$

- ✓ 齐次解$y_h(t)$的形式由微分方程对应的特征根确定
- ✓ 特解$y_p(t)$的形式由方程右边激励信号的形式确定

微分方程的全解即为系统的输出响应。

1.基于求解常系数线性微分方程的方法

[例] 已知描述某连续时间LTI系统的微分方程为

$$y''(t)+6y'(t)+8y(t)=x(t),\ t>0$$

初始条件$y(0)=1$, $y'(0)=2$, 输入信号$x(t)=\mathrm{e}^{-t}u(t)$，求全解$y(t)$。

解: (1) 确定齐次方程 $y''(t)+6y'(t)+8y(t)=0$的齐次解$y_h(t)$的形式

特征方程为 $$s^2+6s+8=0$$

特征根为 $$s_1=-2,\quad s_2=-4$$

齐次解$y_h(t)$ $$y_h(t)=A\mathrm{e}^{-2t}+B\mathrm{e}^{-4t}\qquad t>0$$

1.基于求解常系数线性微分方程的方法

[例] 已知描述某连续时间LTI系统的微分方程

$$y''(t)+6y'(t)+8y(t)=x(t), t>0$$

初始条件$y(0)=1$, $y'(0)=2$, 输入信号$x(t)=e^{-t}u(t)$，求全解$y(t)$。

解： (2) 求微分方程$y''(t)+6y'(t)+8y(t)=x(t)$的特解$y_p(t)$

由输入$x(t)$的形式，设方程的特解为

$$y_p(t)=Ce^{-t} \qquad t>0$$

将特解带入原微分方程即可求得待定系数 $C=1/3$。

1.基于求解常系数线性微分方程的方法

[例] 已知描述某连续时间LTI系统的微分方程

$$y''(t)+6y'(t)+8y(t)=x(t), t>0$$

初始条件$y(0)=1$, $y'(0)=2$, 输入信号$x(t)=\mathrm{e}^{-t}u(t)$，求全解$y(t)$。

解： (3) 求微分方程的全解

$$y(t)=y_{\mathrm{h}}(t)+y_{\mathrm{p}}(t)=A\mathrm{e}^{-2t}+B\mathrm{e}^{-4t}+\mathrm{e}^{-t}/3$$

$$y(0)=A+B+1/3=1$$

$$y'(0)=-2A-4B-1/3=2$$

$\Rightarrow$ $A=5/2$，$B=-11/6$

$$y(t)=\frac{5}{2}\mathrm{e}^{-2t}-\frac{11}{6}\mathrm{e}^{-4t}+\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-t}, t>0$$

1.基于求解常系数线性微分方程的方法

若初始条件不变，输入信号改变为$x(t)=\mathrm{e}^{-2t}u(t)$，

则系统的完全响应 $y(t)=?$

1.基于求解常系数线性微分方程的方法

[例] 已知描述某连续时间LTI系统的微分方程

$$y''(t)+6y'(t)+8y(t)=x(t),\ t>0$$

初始条件$y(0)=1$, $y'(0)=2$, 输入信号$x(t)=e^{-2t}\,u(t)$，求全解$y(t)$。

解： (1) 确定齐次方程 $y''(t)+6y'(t)+8y(t)=0$的齐次解$y_h(t)$的形式

特征方程为 $s^2+6s+8=0$

特征根为 $s_1=-2$，$s_2=-4$

齐次解$y_h(t)$ $y_h(t)=Ae^{-2t}+Be^{-4t}$ $t>0$

1.基于求解常系数线性微分方程的方法

[例] 已知描述某连续时间LTI系统的微分方程

$$y''(t)+6y'(t)+8y(t)=x(t),\ t>0$$

初始条件$y(0)=1$, $y'(0)=2$, 输入信号$x(t)=\mathrm{e}^{-2t}u(t)$，求全解$y(t)$。

解： (2) 求方程 $y''(t)+6y'(t)+8y(t)=x(t)$的特解$y_p(t)$

由输入$x(t)$的形式，设方程的特解为

$$y_p(t)=Ct\mathrm{e}^{-2t}\qquad t>0$$

将特解带入原微分方程即可求得待定系数$C=1/2$。

1.基于求解常系数线性微分方程的方法

[例] 已知描述某连续时间LTI系统的微分方程

$$y''(t)+6y'(t)+8y(t)=x(t), t>0$$

初始条件$y(0)=1$, $y'(0)=2$, 输入信号$x(t)=\mathrm{e}^{-2t}u(t)$，求全解$y(t)$。

解： (3) 求方程的全解

$$y(t)=y_{\mathrm{h}}(t)+y_{\mathrm{p}}(t)=A\mathrm{e}^{-2t}+B\mathrm{e}^{-4t}+\frac{1}{2}t\,\mathrm{e}^{-2t},\quad t>0$$

$$y(0)=A+B=1$$

$$y'(0)=-2A-4B+\frac{1}{2}=2$$

$\Rightarrow$ $A=11/4$，$B=-7/4$

$$y(t)=\frac{11}{4}\mathrm{e}^{-2t}-\frac{7}{4}\mathrm{e}^{-4t}+\frac{1}{2}t\mathrm{e}^{-2t}, t>0$$

1.基于求解常系数线性微分方程的方法

若输入信号不变，初始条件 改变为$y(0)=-1, y'(0)=1,$

则系统的完全响应 $y(t)=?$

1.基于求解常系数线性微分方程的方法

[例] 已知描述某连续时间LTI系统的微分方程

$$y''(t)+6y'(t)+8y(t)=x(t), t>0$$

初始条件$y(0)=-1, y'(0)=1$, 输入信号$x(t)=\mathrm{e}^{-t}u(t)$，求全解$y(t)$。

解: (1) 确定齐次方程 $y''(t)+6y'(t)+8y(t)=0$的齐次解$y_h(t)$的形式

特征方程为 $$s^2+6s+8=0$$

特征根为 $$s_1=-2，\ s_2=-4$$

齐次解$y_h(t)$ $$y_h(t)=A\mathrm{e}^{-2t}+B\mathrm{e}^{-4t} \qquad t>0$$

1.基于求解常系数线性微分方程的方法

[例] 已知描述某连续时间LTI系统的微分方程

$$y''(t)+6y'(t)+8y(t)=x(t),\ t>0$$

初始条件$y(0)=-1,\ y'(0)=1$, 输入信号$x(t)=\mathrm{e}^{-t}u(t)$，求全解$y(t)$。

解: (2) 求方程$y''(t)+6y'(t)+8y(t)=x(t)$的特解$y_\mathrm{p}(t)$

由输入$x(t)$的形式，设方程的特解为

$$y_\mathrm{p}(t)=C\mathrm{e}^{-t} \qquad t>0$$

将特解带入原微分方程即可求得待定系数$C=1/3$。

1.基于求解常系数线性微分方程的方法

[例] 已知描述某连续时间LTI系统的微分方程

$$y''(t)+6y'(t)+8y(t)=x(t),\ t>0$$

初始条件$y(0)=-1,\ y'(0)=1$，输入信号$x(t)=\mathrm{e}^{-t}u(t)$，求全解$y(t)$。

解：(3) 求方程的全解

$$y(t)=y_\mathrm{h}(t)+y_\mathrm{p}(t)=A\mathrm{e}^{-2t}+B\mathrm{e}^{-4t}+\mathrm{e}^{-t}/3$$

$$y(0)=A+B+1/3=-1$$

$$y'(0)=-2A-4B-1/3=1$$

$\Rightarrow$ $A=-2$，$B=2/3$

$$y(t)=-2\mathrm{e}^{-2t}+\frac{2}{3}\mathrm{e}^{-4t}+\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-t},\ t>0$$

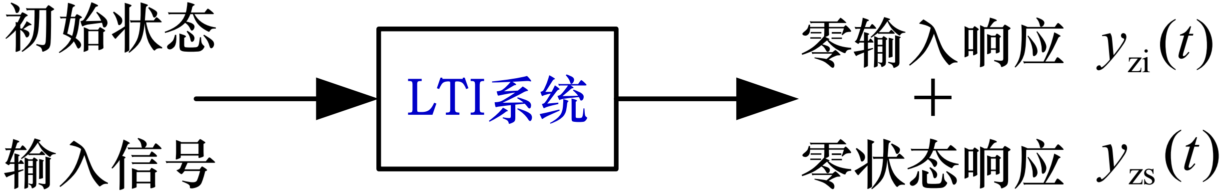
1.基于求解常系数线性微分方程的方法

基于求解常系数微分方程的方法不足之处

- 若输入信号发生变化，则须全部重新求解。
- 若初始条件发生变化，则须全部重新求解。
- 若微分方程右边激励项较复杂，则难以处理。

2.基于零输入响应和零状态响应的方法

根据LTI系统的线性特性，将系统响应看作是由系统的**初始状态**与**输入信号**分别单独作用于系统而产生的响应之叠加。



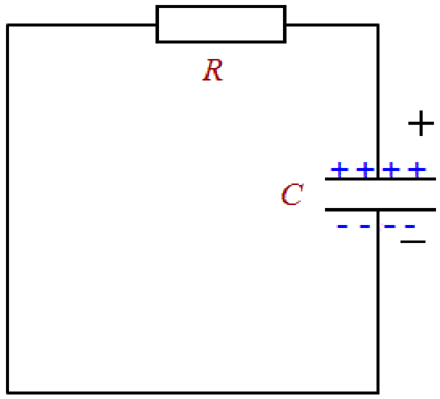
完全响应 $y(t)$ = **零输入响应** $y_{zi}(t)$ + **零状态响应** $y_{zs}(t)$

2.基于零输入响应和零状态响应的方法

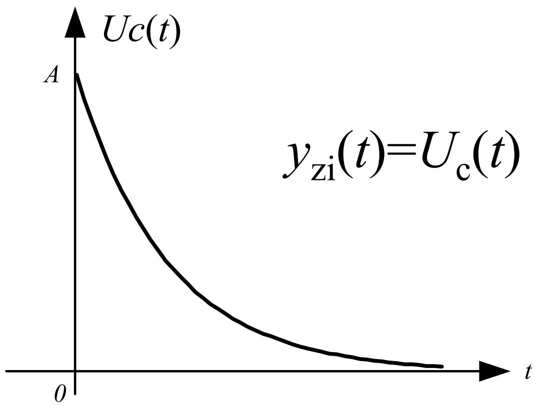
零输入响应

输入信号为零，仅由系统的初始状态单独作用于系统而产生的响应称为零输入响应，记为 $y_{zi}(t)$。

系统没有外部的输入，
只有电容的初始储能。



电容放电系统



电容电压示意图

2.基于零输入响应和零状态响应的方法

零输入响应

描述连续时间LTI系统一般用常系数线性微分方程

$$y^{(n)}(t)+a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+\cdots+a_1y'(t)+a_0y(t)$$
$$=b_mx^{(m)}(t)+b_{m-1}x^{(m-1)}(t)+\cdots+b_1x'(t)+b_0x(t)$$

当输入$x(t)$=0

$$y^{(n)}(t)+a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+\cdots+a_1y'(t)+a_0y(t)=0$$

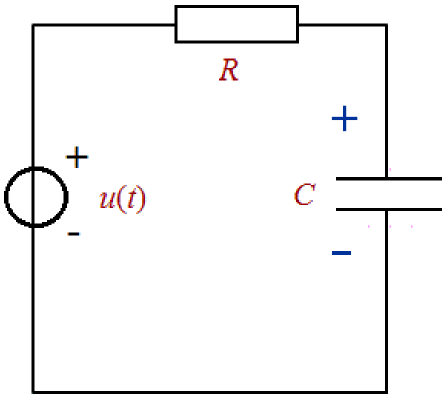
上式为齐次方程，因此零输入响应具有齐次解的形式

2.基于零输入响应和零状态响应的方法

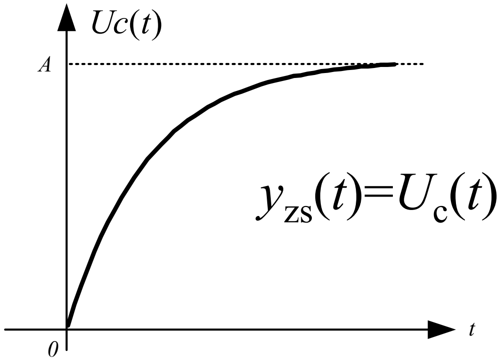
零状态响应

初始状态为零，仅由系统的外部信号$x(t)$产生的响应称为系统的零状态响应，用$y_{zs}(t)$表示。

电容的初始储能为零，仅由外部输入作用而产生的输出。



电容充电系统



电容电压示意图

2.基于零输入响应和零状态响应的方法

零状态响应分析方法

(1) 将输入信号表示为单位冲激信号的线性组合

(2) 求出单位冲激信号作用于系统产生的零状态响应

——冲激响应$h(t)$

(3) 利用线性非时变系统的特性，即可求出输入信号$x(t)$激励下系统的零状态响应$y_{zs}(t)$。

2.基于零输入响应和零状态响应的方法

零状态响应

$$\delta(t) \longrightarrow \boxed{连续LTI系统} \longrightarrow h(t)$$ 系统冲激响应

非时变特性：$$\delta(t-k\Delta\tau) \longrightarrow \boxed{连续LTI系统} \longrightarrow h(t-k\Delta\tau)$$

均匀性：$$x(k\Delta\tau)\Delta\tau\cdot\delta(t-k\Delta\tau) \longrightarrow \boxed{连续LTI系统} \longrightarrow x(k\Delta\tau)\Delta\tau\cdot h(t-k\Delta\tau)$$

叠加性：$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta\tau)\Delta\tau\cdot\delta(t-k\Delta\tau) \longrightarrow \boxed{连续LTI系统} \longrightarrow \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta\tau)\Delta\tau\cdot h(t-k\Delta\tau)$$

$\Delta\tau \to 0$ 时：$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)\mathrm{d}\tau \longrightarrow \boxed{连续LTI系统} \longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

$x(t)$

$$y_{zs}(t) = x(t) * h(t)$$

2.基于零输入响应和零状态响应的方法

系统响应 $y(t)$ = **零输入响应** $y_{zi}(t)$ + **零状态响应** $y_{zs}(t)$

求解齐次微分方程

$$y_{zs}(t) = x(t) * h(t)$$

※ 零输入响应求解

※ 冲激响应的求解

※ 零状态响应求解

谢 谢

本课程所引用的一些素材为主讲老师多年的教学积累，来源于多种媒体及同事、同行、朋友的交流，难以一一注明出处，特此说明并表示感谢！