北京交通大學

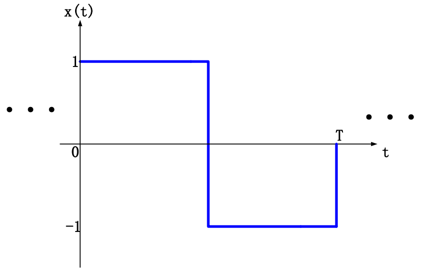
信号与系统

主讲人：陈后金
电子信息工程学院

连续周期信号的频域分析

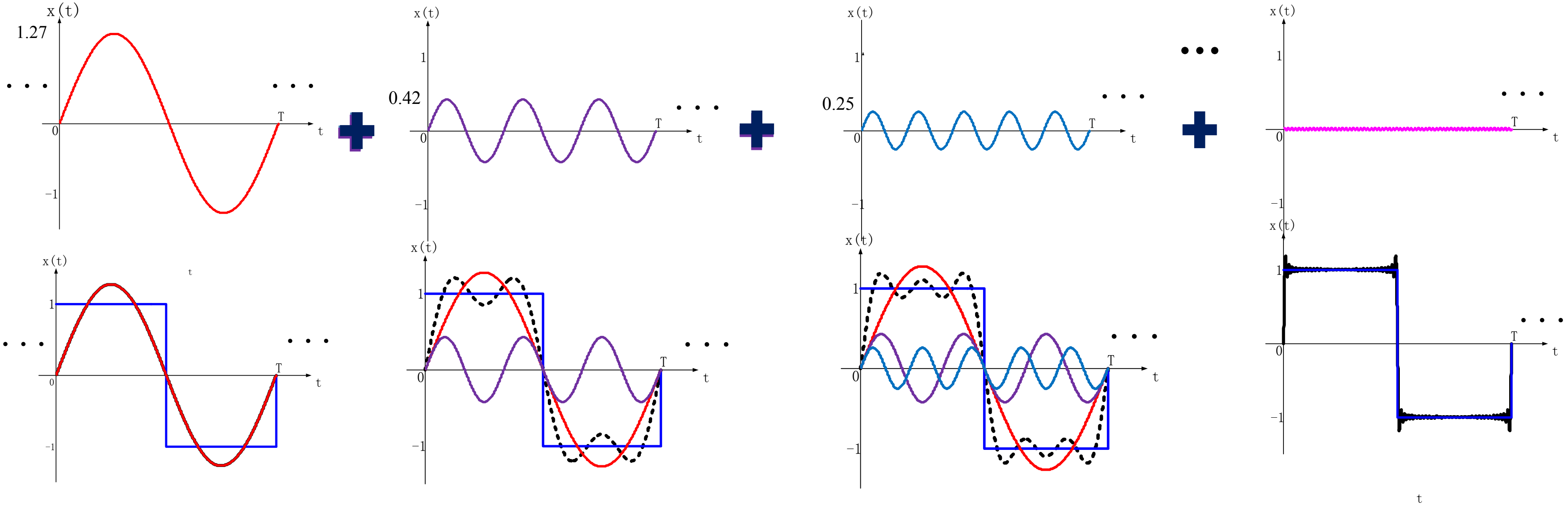
- 连续周期信号的频域表示
- 连续周期信号的频谱
- 连续傅里叶级数的性质

连续周期信号的频域表示



连续周期信号可以表示为

一系列不同频率的正弦波的线性叠加



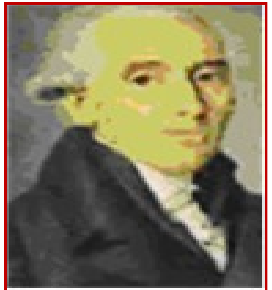
傅里叶（ Fourier, 1768-1830 ）

法国数学家、物理学家。主要贡献是在研究热的传播时创立了一套数学理论。

1807年向巴黎科学院呈交《热的传播》论文，推导出著名的热传导方程，并在求解该方程时发现函数可以由三角函数构成的级数形式表示，从而提出**周期函数可以展成三角函数的无穷级数**。1822 年在代表作《热的分析理论》中解决了热在非均匀加热的 固体中分布传播问题，成为分析学在物理中应用的最早例证之一，对19世纪数学和理论物理学的发展产生深远影响 。傅立叶级数（即三角级数）、傅立叶分析等理论由此创始。

连续周期信号的频域表示

周期函数可以表示为三角函数的无穷级数

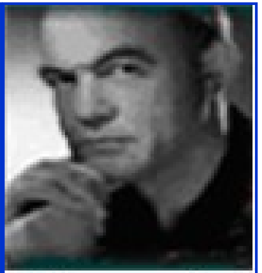


Lagrange

×

Fourier

Laplace



Lacroix

√

Monge

连续周期信号的频域表示

※ 指数形式的傅里叶级数

$$\tilde{x}(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_0 t}$$

- 周期信号$\tilde{x}(t)$可以表示为无数个**虚指数信号**的**线性叠加**
- T_0 为周期信号 $\tilde{x}(t)$ 的**周期**, ω_0 为 $\tilde{x}(t)$ 的**角频率**
- C_n 是$n\omega_0$ 的函数$C_n=C_n(n\omega_0)$,简写为 C_n

连续周期信号的频域表示

周期信号 $\tilde{x}(t)$展开为傅里叶级数(Dirichlet)条件:

(1) 在一个周期内绝对可积，即满足

$$\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \left|\tilde{x}(t)\right| \mathrm{d}t < \infty$$

(2) 在一个周期内只有有限个不连续点;

(3) 在一个周期内只有有限个极大值和极小值。

连续周期信号的频域表示

$$\tilde{x}(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \, \mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_0 t}$$

$$\tilde{x}(t)=\ldots+C_{-N}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}N\omega_0 t}+\ldots+C_{-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 t}+C_0+C_1\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}+\ldots+C_N\mathrm{e}^{\mathrm{j}N\omega_0 t}+\ldots$$

※ $\mathrm{e}^{\pm\mathrm{j}N\omega_0 t}$的周期为$T_0/N$，函数集在区间$[0, T_0]$上相互正交。

$$\int_0^{T_0}\mathrm{e}^{\mathrm{j}N\omega_0 t}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}M\omega_0 t}\mathrm{d}t=\begin{cases}T_0, & N=M\\ 0, & N\neq M\end{cases}$$

$$C_n=\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}\tilde{x}(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_0 t}\mathrm{d}t=\frac{1}{T_0}\int_{t_1}^{t_1+T_0}\tilde{x}(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_0 t}\mathrm{d}t$$

正交分解与傅里叶级数

- 正交函数集 $\{\cdots, f_1(t), f_2(t), f_3(t), \ \cdots\}$ 相互正交

$$\int_{t_1}^{t_2} f_i(t) f_j^*(t)\mathrm{d}t = \begin{cases} m & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

- 信号$x(t)$可以用正交函数集表示为:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n f_n(x) = \cdots + c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \ldots + c_N f_N(x) + \cdots, \qquad t_1 < t < t_2$$

$$c_n = \frac{\int_{t_1}^{t_2} x(t) f_n^*(t)\mathrm{d}t}{\int_{t_1}^{t_2} f_n(t) f_n^*(t)\mathrm{d}t}$$

(基函数)

正交分解与傅里叶级数

- 若只用有限项表示信号$x(t)$，其近似表示为：

$$x(t) \approx c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) + \ldots + c_N f_N(t) = \sum_{n=1}^{N} c_n f_n(t) = \hat{x}(t)$$

$$\text{MSE} = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} [x(t) - \hat{x}(t)]^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} [x(t) - \sum_{n=1}^{N} c_n f_n(t)]^2 \mathrm{d}t$$

- 当选取下列系数时，由正交函数集近似表示的信号$\hat{x}(t)$与信号$x(t)$之间的均方误差(MSE)为最小

$$c_n = \frac{\int_{t_1}^{t_2} x(t) f_n^*(t)\mathrm{d}t}{\int_{t_1}^{t_2} f_n(t) f_n^*(t)\mathrm{d}t}$$

正交分解与傅里叶级数

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n f_n(x)=\cdots+c_1 f_1(x)+c_2 f_2(x)+\ldots+c_N f_N(x)+\cdots,\qquad t_1<t<t_2$$

当 $f_n(t)=\mathrm{e}^{jn\omega_0 t}$ $\qquad \tilde{x}(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n\,\mathrm{e}^{jn\omega_0 t}$

根据均方误差最小准则，可求得C_n

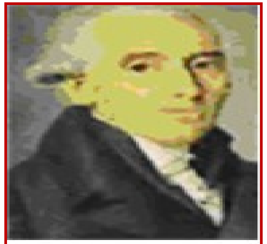
$$C_n=\frac{\int_{t_1}^{t_2}x(t)f_n^*(t)\mathrm{d}t}{\int_{t_1}^{t_2}f_n(t)f_n^*(t)\mathrm{d}t}=\frac{\int_{t_1}^{t_1+T_0}x(t)\mathrm{e}^{-jn\omega_0 t}\mathrm{d}t}{\int_{t_1}^{t_1+T_0}\mathrm{e}^{jn\omega_0 t}\mathrm{e}^{-jn\omega_0 t}\mathrm{d}t}=\frac{1}{T_0}\int_{t_1}^{t_1+T_0}x(t)\mathrm{e}^{-jn\omega_0 t}\mathrm{d}t$$

连续周期信号的频域表示

$$\tilde{x}(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_0 t}$$

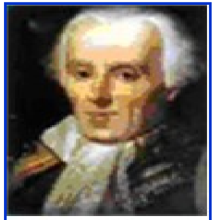
$$C_n=\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}\tilde{x}(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_0 t}\mathrm{d}t$$

Fourier

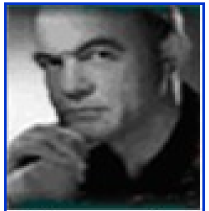


Lagrange

×



Laplace



Lacroix

√

Monge

三角形式傅里叶级数

若 $\tilde{x}(t)$ 为实信号，则C_n具有共轭偶对称性。即 $C_n = C_{-n}^*$

$$\tilde{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_0 t} = C_0 + \sum_{n=-\infty}^{-1} C_n \mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_0 t} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_0 t}$$

$$= C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n \mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_0 t} + C_{-n} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_0 t} \right)$$

令 $C_n = \dfrac{a_n - \mathrm{j}b_n}{2}$ 则有 $C_{-n} = \dfrac{a_n + \mathrm{j}b_n}{2}$

三角形式傅里叶级数

$$\tilde{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \, \mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_0 t} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t)$$

其中：$$a_0 = \frac{2}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} \tilde{x}(t) \mathrm{d}t$$

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} \tilde{x}(t) \cos(n\omega_0 t) \mathrm{d}t \qquad (n = 1, 2 \cdots)$$

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} \tilde{x}(t) \sin(n\omega_0 t) \mathrm{d}t \qquad (n = 1, 2 \cdots)$$

三角形式傅里叶级数

$$\tilde{x}(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega_0 t+b_n\sin n\omega_0 t)$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos(n\omega_0 t+\phi_n)$$ (纯余弦形式)

其中 $A_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2}$　　$\phi_n=\arctan\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$

$a_0/2$称为信号的直流分量，

$A_n\cos(n\omega_0 t+\phi_n)$ 称为信号的n次谐波分量。

谢 谢

本课程所引用的一些素材为主讲老师多年的教学积累，来源于多种媒体及同事、同行、朋友的交流，难以一一注明出处，特此说明并表示感谢！