北京交通大学

主讲人：陈后金

电子信息工程学院

连续LTI系统频率响应的计算方法

$$H(\mathrm{j}\omega)=\mathscr{F}\{h(t)\}=\int_{-\infty}^{\infty}h(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$$

- 由连续LTI系统冲激响应的傅里叶变换计算；
- 由描述连续时间LTI系统的微分方程计算；
- 由实际电路的频域等效电路模型进行计算。

连续LTI系统频率响应的计算方法

- 根据连续LTI系统的冲激响应，计算系统的频率响应

$$H(\mathrm{j}\omega)=\mathscr{F}\{h(t)\}=\int_{-\infty}^{\infty}h(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$$

例　已知某连续LTI系统的冲激响应为

$h(t) = (e^{-t} - e^{-2t})\, u(t)$，求该系统的频率响应$H(j\omega)$。

解：　利用$H(j\omega)$与$h(t)$的关系

$$H(j\omega) = \mathscr{F}\{h(t)\} = \frac{1}{j\omega + 1} - \frac{1}{j\omega + 2}$$

$$= \frac{1}{(j\omega)^2 + 3(j\omega) + 2}$$

连续LTI系统频率响应的计算方法

- 根据描述连续LTI系统的微分方程，计算系统的频率响应

若描述LTI系统的微分方程为

$$y'''(t)+a_2y''(t)+a_1y'(t)+a_0y(t)=b_2x''(t)+b_1x'(t)+b_0x(t)$$

利用Fourier变换的微分特性，微分方程的频域表示式为

$$[(\mathrm{j}\omega)^3+a_2(\mathrm{j}\omega)^2+a_1(\mathrm{j}\omega)+a_0]Y_{\mathrm{zs}}(\mathrm{j}\omega)=[b_2(\mathrm{j}\omega)^2+b_1(\mathrm{j}\omega)+b_0]X(\mathrm{j}\omega)$$

由频率响应的定义得

$$H(\mathrm{j}\omega)=\frac{Y_{\mathrm{zs}}(\mathrm{j}\omega)}{X(\mathrm{j}\omega)}=\frac{b_2(\mathrm{j}\omega)^2+b_1(\mathrm{j}\omega)+b_0}{(\mathrm{j}\omega)^3+a_2(\mathrm{j}\omega)^2+a_1(\mathrm{j}\omega)+a_0}$$

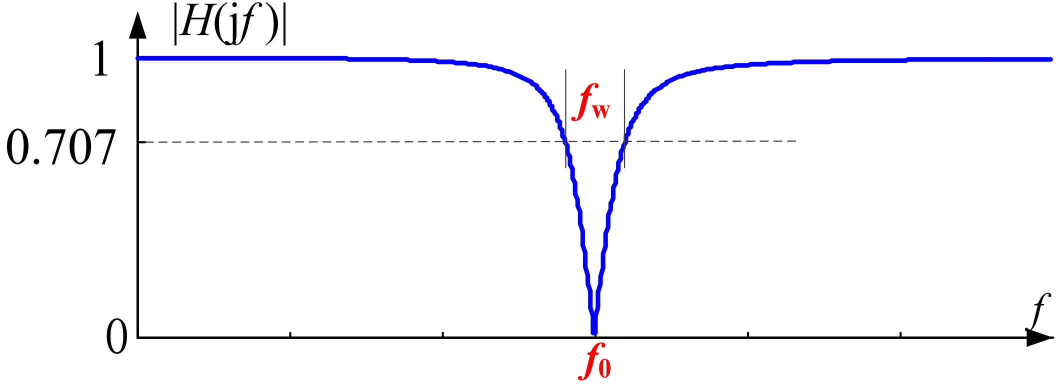
例　已知描述某连续LTI系统的微分方程为

$$y''(t)+(2\pi f_w)y'(t)+(2\pi f_0)^2 y(t)=x''(t)+(2\pi f_0)^2 x(t)$$

求系统的频率响应$H(j\omega)$。

解：由Fourier变换性质和频率响应的定义可得

$$H(j\omega)=\frac{(j\omega)^2+(2\pi f_0)^2}{(j\omega)^2+(2\pi f_w)(j\omega)+(2\pi f_0)^2}$$

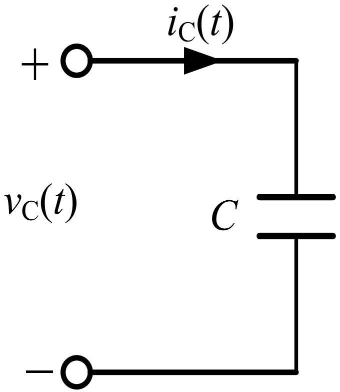


由幅度响应可见，这是一个中心频率为 f_0 Hz, 3dB带宽为 f_w Hz的带阻滤波器。

连续LTI系统频率响应的计算方法

- 根据电路的频域等效模型，计算系统频率响应

电容的频域模型



$$i_C(t) = C\frac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t}$$

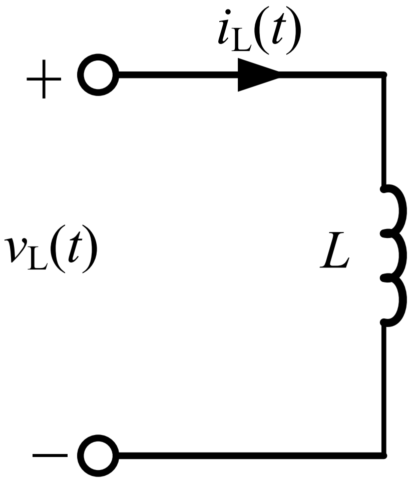
$$I_C(\mathrm{j}\omega) = C\mathrm{j}\omega V_C(\mathrm{j}\omega)$$

$$\frac{V_C(\mathrm{j}\omega)}{I_C(\mathrm{j}\omega)} = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}$$

连续LTI系统频率响应的计算方法

- 根据电路的频域等效模型，计算系统频率响应

电感的频域模型

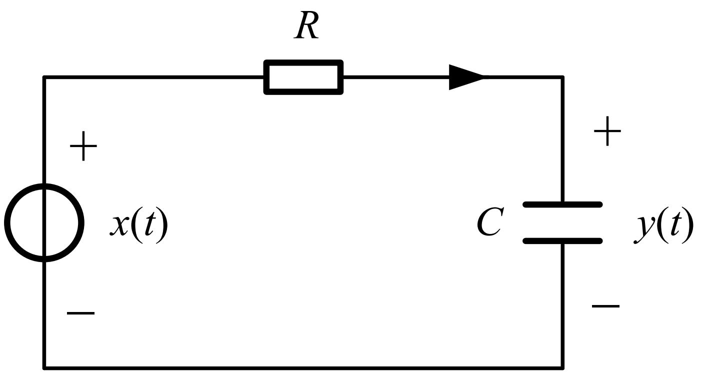


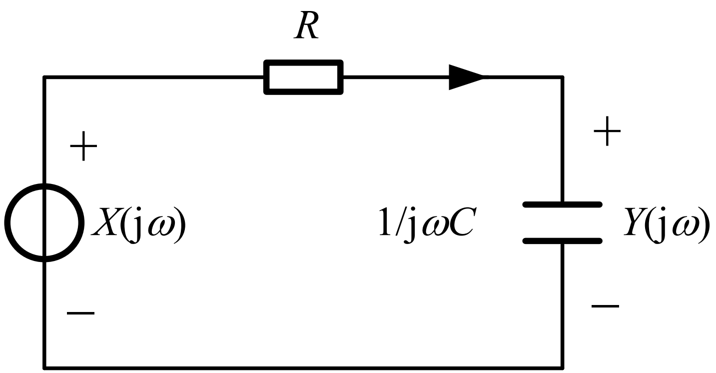
$$v_L(t) = L\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t}$$

$$V_L(\mathrm{j}\omega) = L\mathrm{j}\omega I_L(\mathrm{j}\omega)$$

$$\frac{V_L(\mathrm{j}\omega)}{I_L(\mathrm{j}\omega)} = \mathrm{j}\omega L$$

例　图示RC电路系统，激励电压源为$x(t)$，输出电压 $y(t)$ 电容两端的电压$v_C(t)$，电路的初始状态为零。求系统的**频率响应$H(j\omega)$**和**冲激响应$h(t)$**。





解：　RC电路的频域模型如图，　由电路的基本原理有

$$H(\mathrm{j}\omega)=\frac{Y(\mathrm{j}\omega)}{X(\mathrm{j}\omega)}=\frac{1/\mathrm{j}\omega C}{R+\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}}=\frac{1/RC}{\mathrm{j}\omega+1/RC}$$

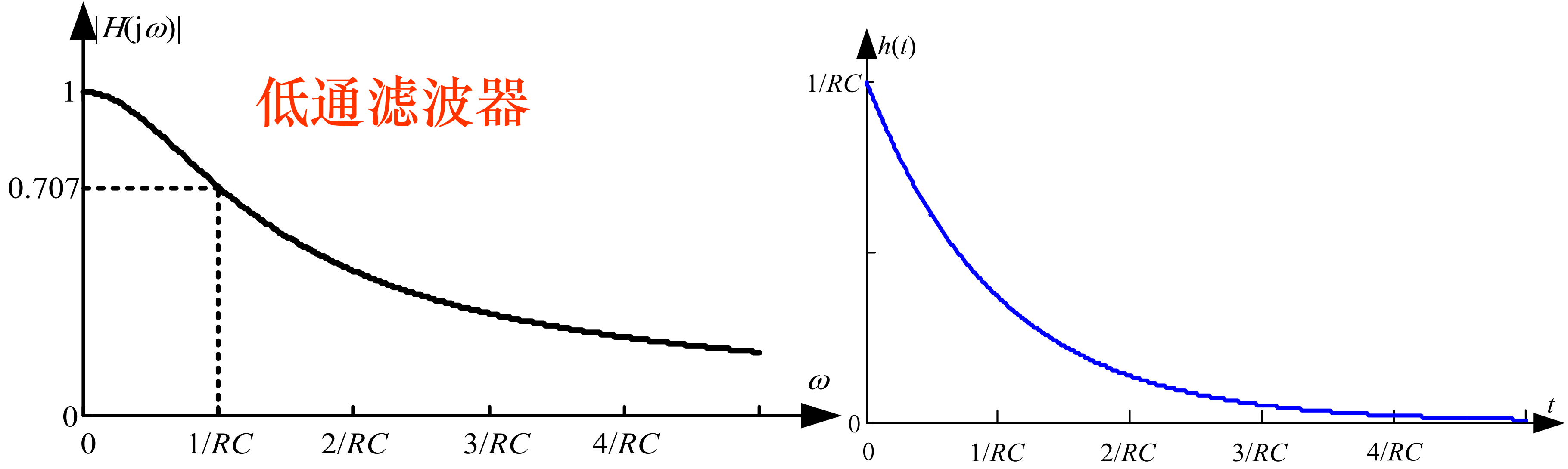
例 图示RC电路系统，激励电压源为$x(t)$，输出电压 $y(t)$ 电容两端的电压$v_C(t)$，电路的初始状态为零。求系统的频率响应$H(\mathrm{j}\omega)$和冲激响应$h(t)$。

解：
$$H(\mathrm{j}\omega)=\frac{1/RC}{\mathrm{j}\omega+1/RC}$$

由Fourier反变换，可得系统的冲激响应$h(t)$为

$$h(t)=\frac{1}{RC}\mathrm{e}^{-(1/RC)t}u(t)$$

RC电路系统的幅度响应和冲激响应



随着频率的增加，系统的幅度响应$|H(j\omega)|$不断减小，说明信号的频率越高，信号通过该系统的损耗也就越大。

由于$|H(j(1/RC))|\approx 0.7$，所以把$\omega_c=1/RC$称为该系统的3dB截频。

谢 谢

本课程所引用的一些素材为主讲老师多年的教学积累，来源于多种媒体及同事、同行、朋友的交流，难以一一注明出处，特此说明并表示感谢！