北京交通大学

信号与系统

主讲人：陈后金

电子信息工程学院

离散时间LTI系统的零状态响应

※ 系统零状态响应

※ 离散卷积和计算

※ 离散卷积和性质

1. 零状态响应

若输入信号为$x[k]$，离散时间LTI系统的单位脉冲响应为$h[k]$，则系统的零状态响应$y_{zs}[k]$为：

$$y_{zs}[k] = x[k] * h[k] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]h[k-n] \qquad \text{（卷积和）}$$

由此可见，离散时间LTI系统的零状态响应是输入信号与系统单位脉冲响应的卷积和，此揭示了信号与系统在时域相互作用的机理。

2. 卷积和的计算

解析方法： 直接按照卷积和的表达式进行计算

$$x[k]*h[k]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]h[k-n]$$

若信号$x[k]$与$h[k]$可用解析函数式表达，

则可以利用解析方法来计算卷积和 。

2. 卷积和的计算

[例] 计算$x[k]=\alpha^k u[k]$与$h[k]=\beta^k u[k]$的卷积和。

解: $\alpha^k u[k] * \beta^k u[k]$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha^n u[n] \cdot \beta^{k-n} u[k-n]$$

$$= \begin{cases} \sum_{n=0}^{k} \alpha^n \cdot \beta^{k-n} & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{\beta^{k+1}-\alpha^{k+1}}{\beta-\alpha} u[k] & \alpha \neq \beta \\ (k+1)\alpha^k u[k] & \alpha = \beta \end{cases}$$

2. 卷积和的计算

图形方法： $x[k]*h[k]=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]h[k-n]$

图形法计算卷积和的步骤：

(1) 将$x[k]$、$h[k]$中的自变量由k改为n；

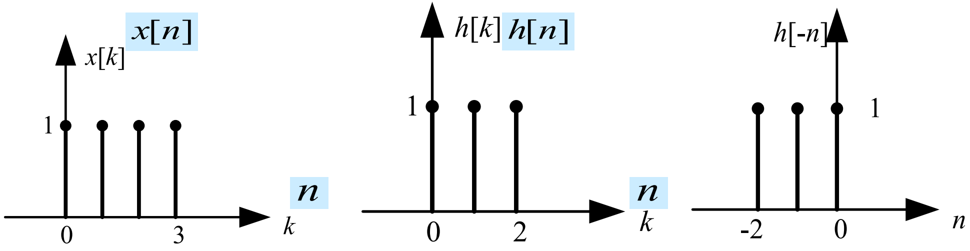
(2) 把其中一个信号翻转，如将$h[n]$翻转得 $h[-n]$；

(3) 把$h[-n]$平移k，k是参变量。$k>0$图形右移，$k<0$图形左移。

(4) 将$x[n]$与 $h[k-n]$ 相乘；

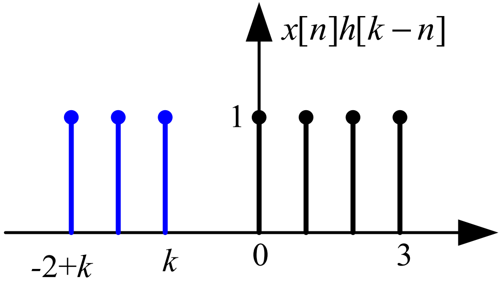
(5) 对乘积后的图形求和。

[例] 计算 $y[k] = x[k] * h[k]$。



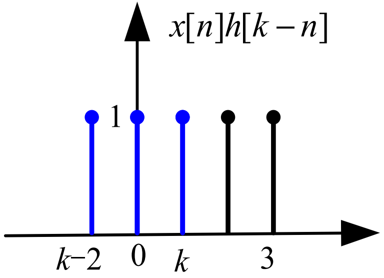
解:

(a) $k < 0$



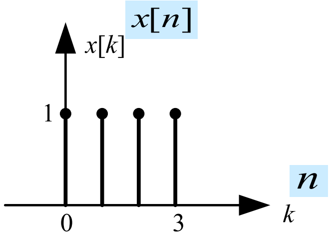
$$y[k] = 0$$

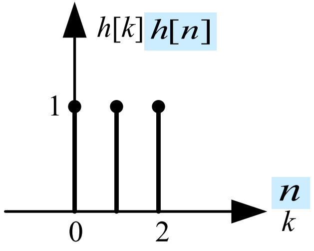
(b) $0 \le k < 2$

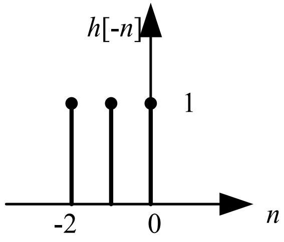


$$y[k] = \sum_{n=0}^{k} 1 = k + 1$$

[例] 计算 $y[k]=x[k]*h[k]$。

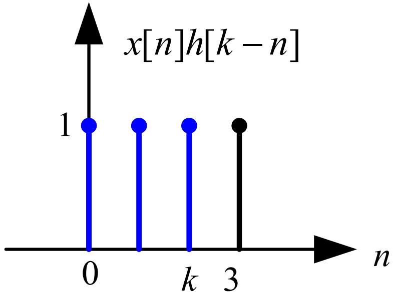






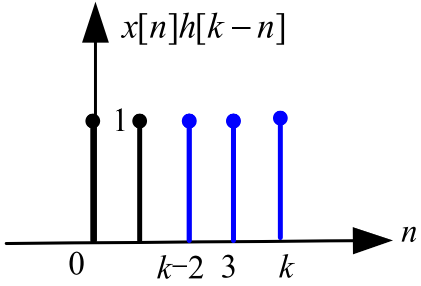
解:

(c) $2\leq k\leq 3$



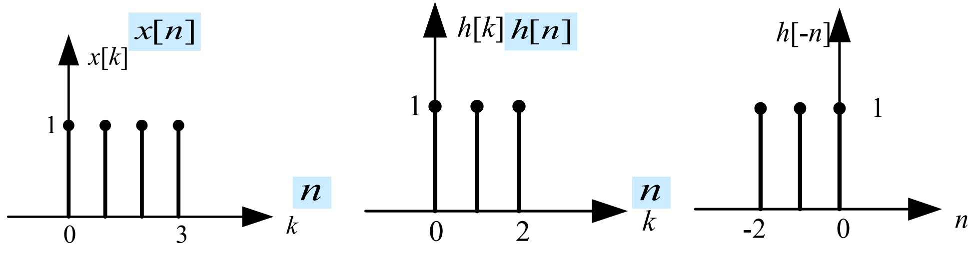
$$\Rightarrow\ y[k]=\sum_{n=k-2}^{k}1=3$$

(d) $3<k\leq 5$



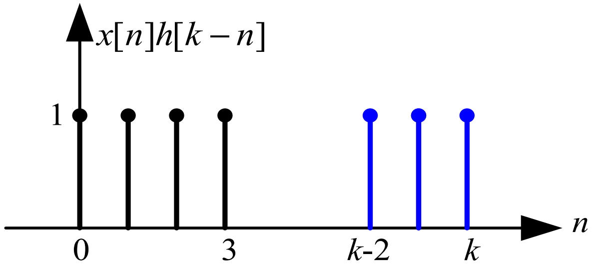
$$\Rightarrow\ y[k]=\sum_{n=k-2}^{3}1=6-k$$

[例] 计算 $y[k] = x[k] * h[k]$。



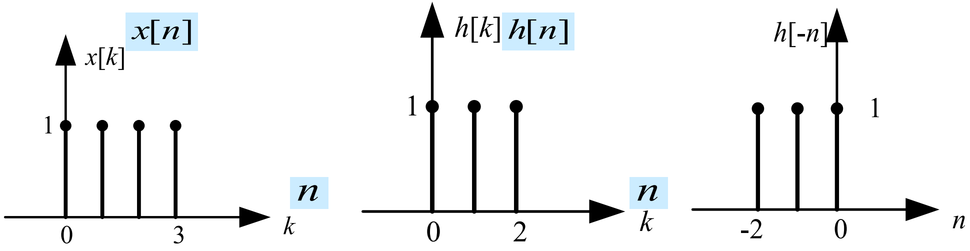
解:

(e) $5 < k$



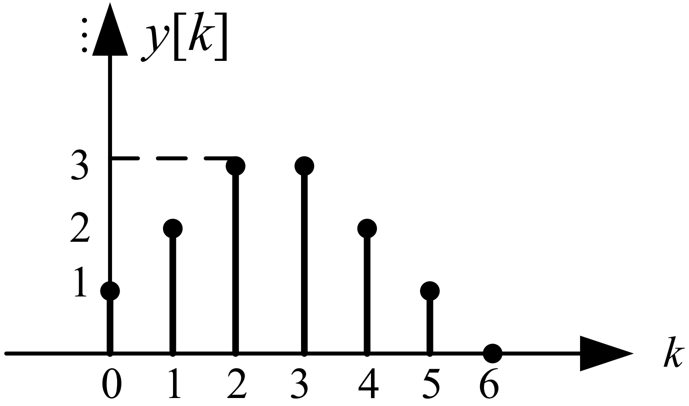
$$y[k] = 0$$

[例] 计算 $y[k]=x[k]*h[k]$。



解：

综上可知：



两个信号的卷积和，卷积和结果仍为一个信号。该信号的起点等于那两个信号起点之和，终点等于那两个信号的终点之和。

2. 卷积和的计算

列表法： 设$x[k]$和$h[k]$都是因果序列，则有

$$y[k]=x[k]*h[k]=\sum_{n=0}^{k}x[n]h[k-n],k\geq 0$$

- 当$k=0$时， $y[0]=x[0]h[0]$
- 当$k=1$时， $y[1]=x[0]h[1]+x[1]h[0]$
- 当$k=2$时， $y[2]=x[0]h[2]+x[1]h[1]+x[2]h[0]$
- 当$k=3$时， $y[3]=x[0]h[3]+x[1]h[2]+x[2]h[1]+x[3]h[0]$

$$\vdots$$

以上求解过程可以归纳成列表法。

2. 卷积和的计算

将$h[k]$ 的值顺序排成一行，将$x[k]$的值顺序排成一列，行与列的交叉点记入相应$x[k]$与$h[k]$的乘积，

	$h[0]$	$h[1]$	$h[2]$	$h[3]$	$\cdots$
$x[0]$	$x[0]\ h[0]$	$x[0]\ h[1]$	$x[0]\ h[2]$	$x[0]\ h[3]$	$\cdots$
$x[1]$	$x[1]\ h[0]$	$x[1]\ h[1]$	$x[1]\ h[2]$	$x[1]\ h[3]$	$\cdots$
$x[2]$	$x[2]\ h[0]$	$x[2]\ h[1]$	$x[2]\ h[2]$	$x[2]\ h[3]$	$\cdots$
$x[3]$	$x[3]\ h[0]$	$x[3]\ h[1]$	$x[3]\ h[2]$	$x[3]\ h[3]$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$

对角斜线上各数值就是 $x[n]h[k-n]$的值。

对角斜线上各数值的和就是$y[k]$各项的值。

2. 卷积和的计算

[例] 计算$x[k]=\{1,2,\overset{\downarrow}{0},3,2\}$ 与$h[k]=\{1,\overset{\downarrow}{4},2,3\}$的卷积和。

解:

		$x[-2]$	$x[-1]$	$x[0]$	$x[1]$	$x[2]$
		1	2	0	3	2
$h[-1]$	1	1	2	0	3	2
$h[0]$	4	4	8	0	12	8
$h[1]$	2	2	4	0	6	4
$h[2]$	3	3	6	0	9	6

$$y[k]=\{1,6,10,\overset{\downarrow}{10},20,14,13,6\}$$

利用卷积和的起点坐标等于待卷积两序列起点之和，确定卷积和的原点。

3. 卷积和的性质

(1) 交换律: $x[k] * h[k] = h[k] * x[k]$

(2) 结合律: $x[k] * \{ h_1[k] * h_2[k]\} = \{ x[k] * h_1[k] \} * h_2[k]$

(3) 分配律: $x[k] * \{ h_1[k] + h_2[k] \} = x[k] * h_1[k] + x[k] * h_2[k]$

3. 卷积和的性质

(4) 位移特性： $x[k] * \delta[k-n] = x[k-n]$

推论： 若$x[k]*h[k]=y[k]$，则

$$x[k-n] * h[k-l] = y[k-(n+l)]$$

(5) 差分与求和特性： 若$x[k]*h[k]=y[k]$

$$\nabla x[k] * h[k] = x[k] * \nabla h[k] = \nabla y[k]$$

$$x[k] * \sum_{n=-\infty}^{k} h[n] = \left(\sum_{n=-\infty}^{k} x[n]\right) * h[k] = \sum_{n=-\infty}^{k} y[n]$$

3. 卷积和的性质

[例] 计算 $x[k]=\{1,0,\overset{\downarrow}{2},4\}$与 $h[k]=\{1,\overset{\downarrow}{4},5,3\}$的卷积和。

解: $x[k]=\delta[k+2]+2\delta[k]+4\delta[k-1]$

利用分配律和位移特性

$$x[k]*h[k]=\{\delta[k+2]+2\delta[k]+4\delta[k-1]\}*h[k]$$

$$=h[k+2]+2h[k]+4h[k-1]$$

$$y[k]=x[k]*h[k]=\{1,4,7,\overset{\downarrow}{15},26,26,12\}$$

谢 谢

本课程所引用的一些素材为主讲老师多年的教学积累，来源于多种媒体及同事、同行、朋友的交流，难以一一注明出处，特此说明并表示感谢!