北京交通大学

信号与系统

主讲人：陈后金

电子信息工程学院

单边拉普拉斯变换的性质

- 线性特性
- 时移特性
- 展缩特性
- 卷积特性
- 乘积特性
- 指数加权特性
- 线性加权特性
- 微分特性
- 积分特性
- 初值及终值定理

6. 指数加权特性

▶ 指数加权特性

若 $x(t) \xleftrightarrow{\mathscr{L}} X(s), \quad \mathrm{Re}(s) > \sigma_0$

则 $\mathrm{e}^{-\lambda t}x(t) \xleftrightarrow{\mathscr{L}} X(s+\lambda)$

$$\mathrm{Re}(s) > \sigma_0 - \mathrm{Re}(\lambda)$$

例: 利用指数加权特性求解下列信号的单边Laplace变换:

$\mathrm{e}^{-\alpha t}\cos(\omega_0 t)u(t)$，$\alpha$为实数。

解：单边余弦信号的拉氏变换为

$$\cos(\omega_0 t)u(t) \xleftrightarrow{\mathscr{L}} \frac{s}{s^2+\omega_0{}^2}, \qquad \mathrm{Re}(s)>0$$

根据Laplace变换的指数加权特性，可得：

$$\mathscr{L}\{\mathrm{e}^{-\alpha t}\cos(\omega_0 t)u(t)\} = \frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega_0{}^2}, \qquad \mathrm{Re}(s)>-\alpha$$

7. 线性加权特性

▶ 线性加权特性

若 $x(t) \xleftrightarrow{\mathscr{L}} X(s), \quad \mathrm{Re}(s) > \sigma_0$

则 $tx(t) \xleftrightarrow{\mathscr{L}} -\dfrac{\mathrm{d}X(s)}{\mathrm{d}s}, \quad \mathrm{Re}(s) > \sigma_0$

例: 利用线性加权特性求解下列信号的单边Laplace变换:
$tu(t)$，$t^n u(t)$，$t\mathrm{e}^{-\lambda t}u(t)$，$t^n\mathrm{e}^{-\lambda t}u(t)$，$n$为正整数。

解:

$$u(t) \xleftrightarrow{\mathscr{L}} \frac{1}{s}, \quad \mathrm{Re}(s) > 0$$

根据单边Laplace变换的线性加权特性，可得:

$$\mathscr{L}\{tu(t)\} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{1}{s^2}, \quad \mathrm{Re}(s) > 0$$

重复利用线性加权特性，则可推得:

$$\mathscr{L}\{t^n u(t)\} = \mathscr{L}\{t \cdot t^{n-1}u(t)\} = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad \mathrm{Re}(s) > 0$$

例: 利用线性加权特性求解下列信号的单边Laplace变换:

$tu(t)$ ， $t^n u(t)$ ， $te^{-\lambda t}u(t)$ ， $t^n e^{-\lambda t}u(t)$ ， n为正整数。

解： $$e^{-\lambda t}u(t) \xleftrightarrow{\mathscr{L}} \frac{1}{s+\lambda}, \quad \mathrm{Re}(s) > -\mathrm{Re}(\lambda)$$

根据单边Laplace变换的线性加权特性，可得：

$$\mathscr{L}\{te^{-\lambda t}u(t)\} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{s+\lambda}\right) = \frac{1}{(s+\lambda)^2}, \quad \mathrm{Re}(s) > -\mathrm{Re}(\lambda)$$

重复利用线性加权特性，可得：

$$\mathscr{L}\{t^n e^{-\lambda t}u(t)\} = \frac{n!}{(s+\lambda)^{n+1}}, \quad \mathrm{Re}(s) > -\mathrm{Re}(\lambda)$$

8. 微分特性

▶ 微分特性

若 $x(t) \xleftrightarrow{\mathscr{L}} X(s),\quad \mathrm{Re}(s) > \sigma_0$

则 $\dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} \xleftrightarrow{\mathscr{L}} sX(s) - x(0^-),\quad \mathrm{Re}(s) > \sigma_0$

证明：$\mathscr{L}\left[\dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\right] = \displaystyle\int_{0^-}^{\infty} \dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} \mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t = x(t)\mathrm{e}^{-st}\Big|_{0^-}^{\infty} - \int_{0^-}^{\infty} x(t)(-s\mathrm{e}^{-st})\mathrm{d}t$

$$= -x(0^-) + s\int_{0^-}^{\infty} x(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t = sX(s) - x(0^-) \qquad \mathrm{Re}(s) > \sigma_0$$

8. 微分特性

▶ 微分特性

重复应用微分性质，可得：

$$\frac{\mathrm{d}^2 x(t)}{\mathrm{d}t^2} \xleftrightarrow{\mathscr{L}} s^2 X(s) - sx(0^-) - x'(0^-)$$

$$\frac{\mathrm{d}^n x(t)}{\mathrm{d}t^n} \xleftrightarrow{\mathscr{L}} s^n X(s) - s^{n-1} x(0^-) - \cdots - sx^{(n-2)}(0^-) - x^{(n-1)}(0^-)$$

斜坡信号$tu(t)$，阶跃信号$u(t)$，冲激信号$\delta(t)$ 及其n阶导数$\delta^{(n)}(t)$在S域的关系

斜坡信号$tu(t)$ $\xrightarrow{\text{微分}}$ 阶跃信号$u(t)$ $\xrightarrow{\text{微分}}$ 冲激信号$\delta(t)$ $\xrightarrow{\text{微分}}$ 冲激函数的n阶导数，$\delta^{(n)}(t)$

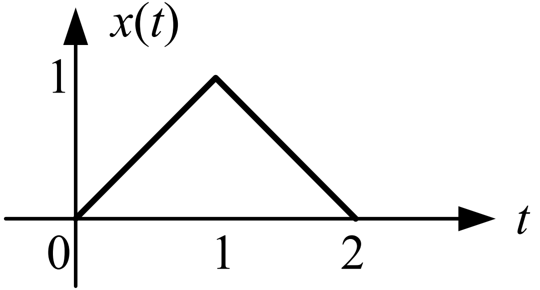
斜坡信号$tu(t)$ $\xrightarrow{\mathscr{L}}$ $\dfrac{1}{s^2}$, $\mathrm{Re}(s) > 0$

阶跃信号$u(t)$ $\xrightarrow{\mathscr{L}}$ $\dfrac{1}{s}$, $\mathrm{Re}(s) > 0$

冲激信号$\delta(t)$ $\xrightarrow{\mathscr{L}}$ 1, $\mathrm{Re}(s) > -\infty$

冲激函数的n阶导数，$\delta^{(n)}(t)$ $\xrightarrow{\mathscr{L}}$ s^n, $\mathrm{Re}(s) > -\infty$

例: 利用微分特性求解如图所示信号的单边Laplace变换:



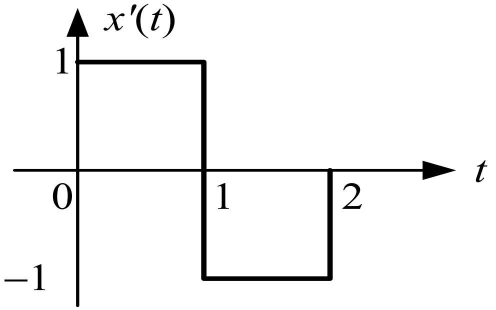
解：根据单边拉氏变换的微分特性：

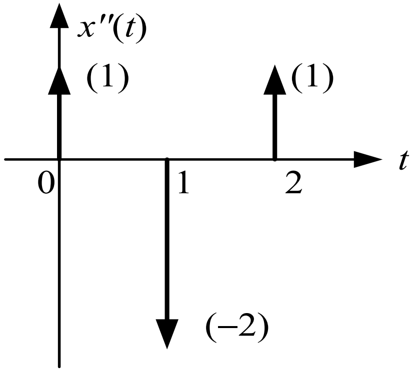
$$\frac{\mathrm{d}^2 x(t)}{\mathrm{d}t^2} \xleftrightarrow{\mathscr{L}} s^2 X(s) - s x(0^-) - x'(0^-)$$

$$= s^2 X(s) \ = 1 - 2\mathrm{e}^{-s} + \mathrm{e}^{-2s}$$

因此，$X(s) = \dfrac{1 - 2\mathrm{e}^{-s} + \mathrm{e}^{-2s}}{s^2}$

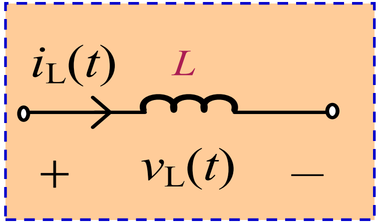
$\mathrm{Re}(s) > -\infty$



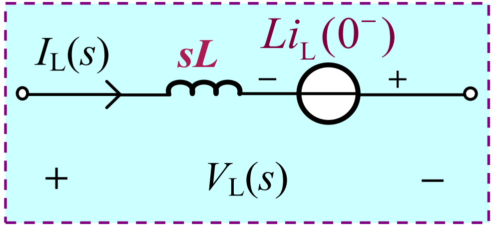


实际电路系统中微分性质的应用

电感器件



电感的s域模型



$$v_L(t) = L\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t} \longrightarrow \boxed{V_L(s) = sLI_L(s) - Li_L(0^-)}$$

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} \xleftrightarrow{\mathscr{L}} sX(s) - x(0^-)$$

9. 积分特性

▶ 积分特性

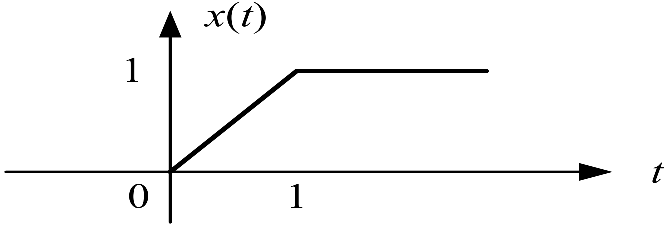
若 $x(t) \xleftrightarrow{\mathscr{L}} X(s),\quad \mathrm{Re}(s) > \sigma_0$

则 $\displaystyle\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\mathrm{d}\tau \xleftrightarrow{\mathscr{L}} \frac{X(s)}{s} + \frac{x^{(-1)}(0^-)}{s}$

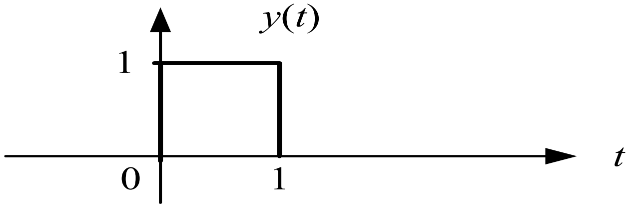
$\mathrm{Re}(s) > \max(\sigma_0, 0)$

若 $x^{(-1)}(0^-)=0$，则有 $\displaystyle\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\mathrm{d}\tau \xleftrightarrow{\mathscr{L}} \frac{X(s)}{s}$

例：求如图所示信号$x(t)$的单边Laplace 变换。



解： $x(t)=\int_{-\infty}^{t} y(t)\mathrm{d}t$



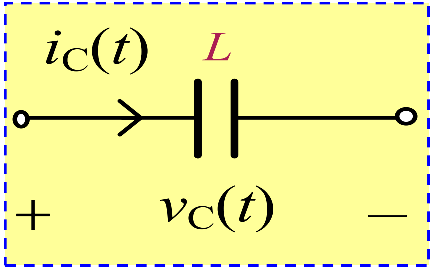
由于 $y(t)=u(t)-u(t-1)\xleftrightarrow{\mathscr{L}}\dfrac{1-\mathrm{e}^{-s}}{s},\quad \mathrm{Re}(s)>-\infty$

且 $x^{(-1)}(0^-)=\int_{-\infty}^{0^-} y(t)\mathrm{d}t=0$

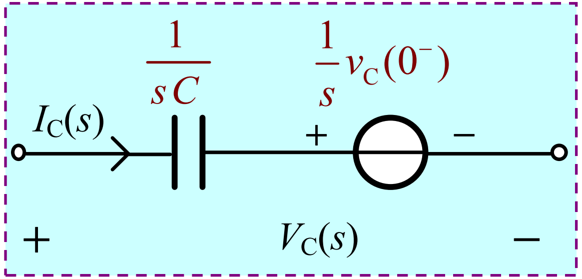
依据拉氏变换的**积分特性**：$X(s)=\dfrac{Y(s)}{s}=\dfrac{1-\mathrm{e}^{-s}}{s^2},\quad \mathrm{Re}(s)>0$

实际电路系统中积分性质的应用

电容



电容的s域模型



$$v_C(t)=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_C(\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$V_C(s)=\frac{1}{sC}I_C(s)+\frac{1}{s}v_C(0^-)$$

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\mathrm{d}\tau \xleftrightarrow{\mathscr{L}} \frac{X(s)}{s}+\frac{x^{(-1)}(0^-)}{s}$$

10. 初值定理和终值定理

▶ 初值及终值定理

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathscr{L}} X(s), \quad \mathrm{Re}(s) > \sigma_0$$

若$x(t)$在t=0时刻不包含冲激及其各阶导数，则

$$\lim_{t\to 0} x(t) = x(0^+) = \lim_{s\to +\infty} sX(s)$$

若$sX(s)$的收敛域包含jω轴，则

$$\lim_{t\to +\infty} x(t) = x(+\infty) = \lim_{s\to 0} sX(s)$$

例：已知$X(s)=\dfrac{1}{s+1}$, $\mathrm{Re}(s)>-1$, 求$x(t)$的初值和终值。

解：根据初值定理可得

$$x(0^+)=\lim_{s\to+\infty} sX(s)=1$$

$sX(s)$的收敛域包含jω轴，可直接应用终值定理得

$$x(+\infty)=\lim_{s\to 0} sX(s)=0$$

例：已知$X(s)=\dfrac{s}{s+1}$，　$\mathrm{Re}(s)>-1$，求$x(t)$的初值和终值。

解：由于$X(s)$不是真分式，因此$x(t)$在t=0时刻含冲激信号，不能直接应用初值定理

将$X(s)$ 改写为 $X(s)=\dfrac{s}{s+1}=1\boxed{-\dfrac{1}{s+1}}$ $X_1(s)$

对$X_1(s)$ 应用初值定理可得

$$x(0^+)=\lim_{s\to+\infty} sX_1(s)=-1$$

$sX(s)$的收敛域包含jω轴，可直接应用终值定理得

$$x(+\infty)=\lim_{s\to 0} sX(s)=0$$

谢　谢

本课程所引用的一些素材为主讲老师多年的教学积累，来源于多种媒体及同事、同行、朋友的交流，难以一一注明出处，特此说明并表示感谢!