北京交通大學

信号与系统

主讲人：陈后金

电子信息工程学院

双边z变换及反变换

- 双边z变换
- 双边z反变换

双边z变换

z正变换：$$X(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]\,z^{-k}$$

z反变换：$$x[k]=\frac{1}{2\pi \mathrm{j}}\oint_{C}X(z)z^{k-1}\mathrm{d}z$$

C为$X(z)$ 的收敛域中的一闭合曲线

双边z变换

$$X(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]\,z^{-k}$$

- 能够使上式收敛的z值区域称为z变换的收敛域，简称为ROC(Region Of Convergence)。

收敛域 (ROC): $R_{-}<|z|<R_{+}$

双边z变换

（1）有限长序列

$$X(z) = \sum_{k=N_1}^{N_2} x[k]\, z^{-k} \qquad \text{ROC} \quad 0 < |z| < \infty$$

例：试求矩形脉冲序列$R_N[k]$的双边z变换及其收敛域

解：$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} R_N[k]\, z^{-k} = \sum_{k=0}^{N-1} 1\cdot z^{-k} = \frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}}, \quad |z| > 0$$

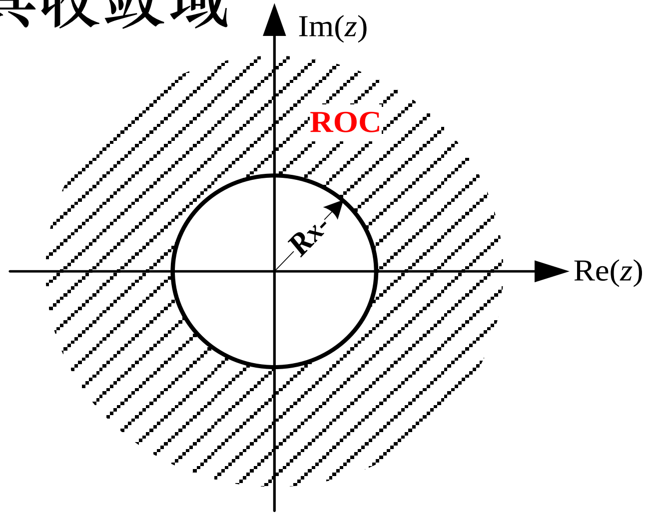
有限长序列的z变换的收敛域都是 $|z| > 0$或者 $|z| \geq 0$

双边z变换

（2）右边序列

$$X(z)=\sum_{k=N_1}^{\infty}x[k]\,z^{-k}$$

例：试求指数序列 $2^k u[k]$ 的双边z变换及其收敛域



解：$X(z)=\sum_{k=0}^{\infty}2^k z^{-k}=\dfrac{1}{1-2z^{-1}}$， $|z|>2$

收敛域是以$R_{x-}=2$为半径的圆外区域

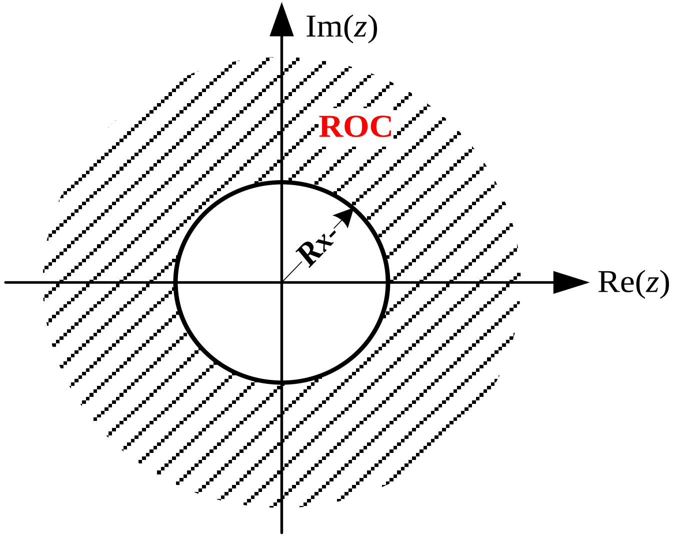
双边z变换

（2）右边序列

$$X(z) = \sum_{k=N_1}^{\infty} x[k]\, z^{-k}$$

当$N_1 \geq 0$时，右边序列z变换的收敛域是 $|z| > R_{x-}$

当$N_1 < 0$时，右边序列z变换的收敛域是 $R_{x-} < |z| < \infty$



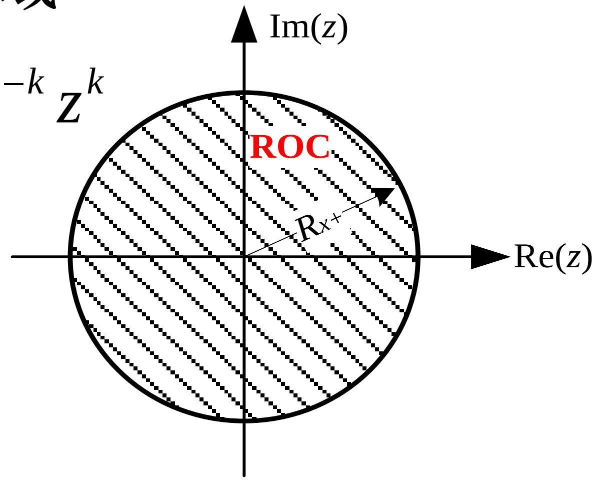
（3）左边序列

$$X(z)=\sum_{k=-\infty}^{N_2} x[k]\, z^{-k}$$

例：试求 $-4^k u[-k-1]$的双边z变换及其收敛域

解：$X(z)=\sum_{k=-\infty}^{-1} -4^k z^{-k}=\sum_{k=1}^{\infty} -4^{-k} z^{k}=1-\sum_{k=0}^{\infty} 4^{-k} z^{k}$

$$=1-\frac{1}{1-4^{-1}z}=\frac{1}{1-4z^{-1}},\quad |z|<4$$



收敛域是以$R_{x+}=4$为半径的圆内区域

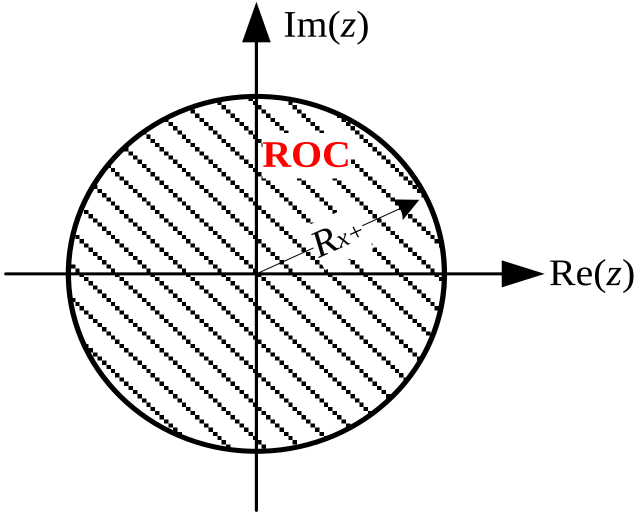
双边z变换

(3) 左边序列

$$X(z)=\sum_{k=-\infty}^{N_2} x[k]\, z^{-k}$$

当$N_2 \le 0$时，左边序列z变换的收敛域为 $|z| < R_{x+}$

当$N_2 > 0$时，左边序列z变换的收敛域为 $0 < |z| < R_{x+}$



双边z变换

（4）双边序列

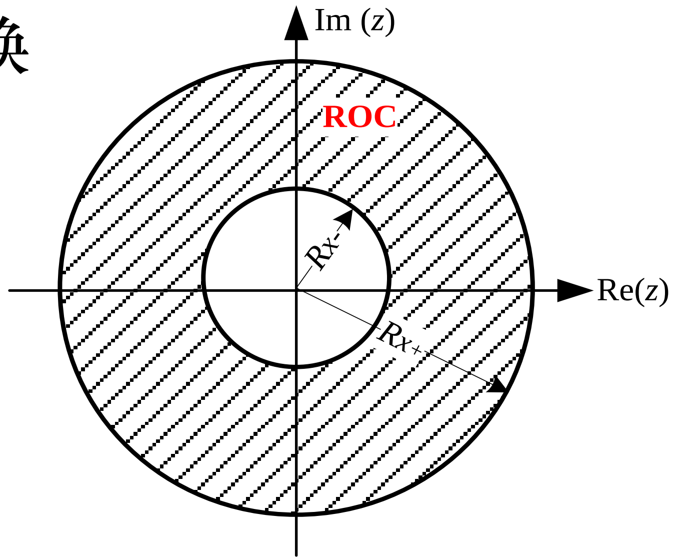
$$X(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]\,z^{-k}$$

例：试求 $2^k u[k]-4^k u[-k-1]$的双边z变换

解：$$X(z)=\frac{1}{1-2z^{-1}}+\frac{1}{1-4z^{-1}}$$

双边z变换收敛域是圆环区域

$$2<|z|<4$$

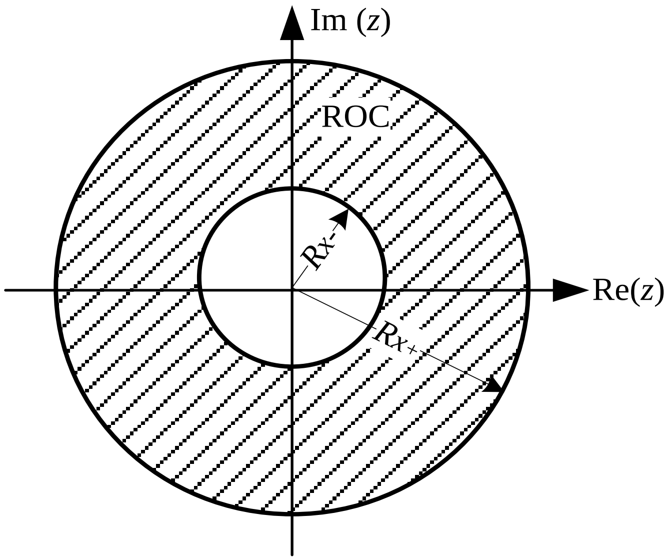


双边z变换

（4）双边序列

$$X(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]\,z^{-k}$$

双边序列z变换的收敛域为：$R_{x-}<|z|<R_{x+}$



双边z反变换

$$x[k]=\frac{1}{2\pi j}\oint_{C} X(z)z^{k-1}\mathrm{d}z$$

C为$X(z)$ 的ROC中的一闭合曲线

※ **留数法**

留数法计算比较复杂，但适用范围较广。

※ **部分分式展开法**

部分分式法求解较为简便，但一般只适用于有理分式。

双边z反变换

※ 部分分式展开法求z反变换

① 序列z变换分解为部分分式之和

② 求解各部分分式对应的z反变换

$$a^k u[k] \xleftrightarrow{\mathscr{Z}} \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}, \qquad |z|>|a|$$

$$-b^k u[-k-1] \xleftrightarrow{\mathscr{Z}} \frac{1}{1-bz^{-1}} = \frac{z}{z-b}, \qquad |z|<|b|$$

[例] 已知 $X(z)=\dfrac{z^2}{(z-2)(z-3)}$ ，求不同收敛域对应的$x[k]$。

解：

$$X(z)=\underbrace{\frac{-2z}{z-2}}_{X_1(z)}+\underbrace{\frac{3z}{z-3}}_{X_2(z)}$$

(1) $|z|>3$ ，$X_1(z)$和 $X_2(z)$均对应右边序列

$$x[k]=-2\cdot 2^k u[k]+3\cdot 3^k u[k]$$

(2) $2<|z|<3$，$X_1(z)$对应右边序列， $X_2(z)$ 对应左边序列

$$x[k]=-2\cdot 2^k u[k]-3\cdot 3^k u[-k-1]$$

(3) $|z|<2$ ，$X_1(z)$和 $X_2(z)$均对应左边序列

$$x[k]=2\cdot 2^k u[-k-1]-3\cdot 3^k u[-k-1]$$

谢 谢

本课程所引用的一些素材为主讲老师多年的教学积累，来源于多种媒体及同事、同行、朋友的交流，难以一一注明出处，特此说明并表示感谢！