北京交通大学

信号与系统

主讲人：陈后金

电子信息工程学院

离散信号与系统的复频域分析举例

例：已知描述某离散因果LTI系统的差分方程为：

$y[k]-3y[k-1]+2y[k-2]=x[k]$，激励信号$x[k]=3^k u[k]$，

初始状态$y[-1]=3$，$y[-2]=1$，试求：

(1) 系统函数$H(z)$，并画出系统函数零极点分布图；

(2) 单位脉冲响应$h[k]$，判断系统稳定性；

(3) 系统的零输入响应$y_{zi}[k]$、零状态响应$y_{zs}[k]$；

(4) 画出系统的模拟框图。

例：已知描述某离散因果LTI系统的差分方程为：

$y[k]-3y[k-1]+2y[k-2]=x[k]+x[k-1]$，激励信号$x[k]=3^k u[k]$，

初始状态$y[-1]=3$，$y[-2]=1$，试求：

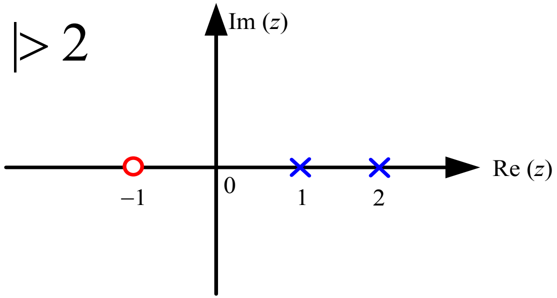
(1) 系统函数$H(z)$，并画出系统零极点分布图；

解：对差分方程两边进行单边z变换，可得

$$Y(z)-3(z^{-1}Y(z)+y[-1])+2(z^{-2}Y(z)+z^{-1}y[-1]+y[-2])=X(z)+z^{-1}X(z)$$

$$Y(z)=\frac{3y[-1]-2z^{-1}y[-1]-2y[-2]}{1-3z^{-1}+2z^{-2}}+\boxed{\qquad\qquad}X(z)$$

$$H(z)=\frac{(1+z^{-1})}{1-3z^{-1}+2z^{-2}}=\frac{(1+z^{-1})}{(1-z^{-1})(1-2z^{-1})},\quad |z|>2$$



零极点图：零点为-1；

极点分别为：1, 2

例：已知描述某离散因果LTI系统的差分方程为：

$y[k]-3y[k-1]+2y[k-2]=x[k]+x[k-1]$，激励信号$x[k]=3^k u[k]$，

初始状态$y[-1]=3$，$y[-2]=1$，试求：

(2) 单位脉冲响应$h[k]$，判断系统稳定性；

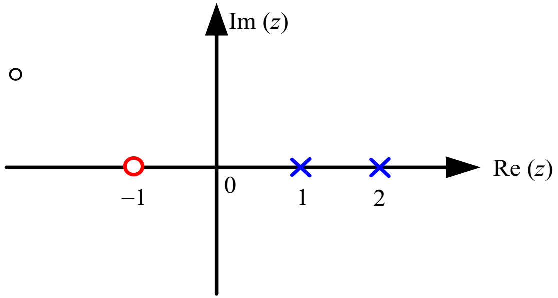
解：根据系统函数$H(z)$

$$H(z)=\frac{(1+z^{-1})}{(1-z^{-1})(1-2z^{-1})}=\frac{-2}{(1-z^{-1})}+\frac{3}{(1-2z^{-1})},\quad |z|>2$$

$$h[k]=-2u[k]+3(2)^k u[k]$$

收敛域不包含单位圆，极点在单位圆外。

所以该离散因果LTI系统不稳定



例：已知某离散时间因果LTI系统差分方程为：

$y[k]-3y[k-1]+2y[k-2]=x[k]+x[k-1]$，激励信号$x[k]=3^k u[k]$，$k\geq 0$，初始状态$y[-1]=3$，$y[-2]=1$，试求：

(3) 系统的零输入响应$y_{zi}[k]$、零状态响应$y_{zs}[k]$；

解：

$$Y(z)= \qquad + \frac{(1+z^{-1})}{1-3z^{-1}+2z^{-2}}X(z)$$

$$Y_{zi}(z)=\frac{3y[-1]-2z^{-1}y[-1]-2y[-2]}{1-3z^{-1}+2z^{-2}}=\frac{9-6z^{-1}-2}{1-3z^{-1}+2z^{-2}}$$

$$=\frac{-1/2}{1-z^{-1}}+\frac{8}{1-2z^{-1}}$$

$$y_{zi}[k]=-\frac{1}{2}u[k]+8(2)^k u[k]$$

例：已知某离散时间因果LTI系统差分方程为：

$y[k]-3y[k-1]+2y[k-2]=x[k]+x[k-1]$，激励信号$x[k]=3^k u[k]$，$k\geq 0$，初始状态$y[-1]=3$，$y[-2]=1$，试求：

(3) 系统的零输入响应$y_{zi}[k]$、零状态响应$y_{zs}[k]$；

解：
$$Y(z)=\frac{3y[-1]-2z^{-1}y[-1]-2y[-2]}{1-3z^{-1}+2z^{-2}}+$$

$$Y_{zs}(z)=\frac{(1+z^{-1})}{1-3z^{-1}+2z^{-2}}X(z)=\frac{(1+z^{-1})}{1-3z^{-1}+2z^{-2}}\cdot\frac{1}{1-3z^{-1}}$$

$$=\frac{(1+z^{-1})}{(1-z^{-1})(1-2z^{-1})}\cdot\frac{1}{1-3z^{-1}}=\frac{1}{1-z^{-1}}+\frac{-6}{1-2z^{-1}}+\frac{6}{1-3z^{-1}}$$

$$y_{zs}[k]=u[k]-6(2)^k u[k]+6(3)^k u[k]$$

例：已知某离散时间因果LTI系统差分方程为：

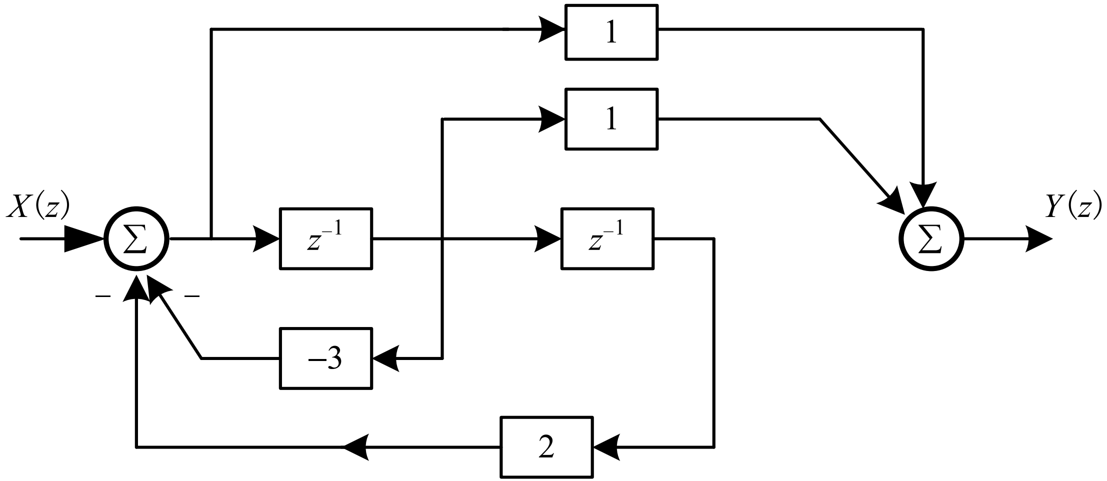
$y[k]-3y[k-1]+2y[k-2] = x[k]+x[k-1]$，激励信号$x[k] = 3^k u[k]$，$k\geq 0$，初始状态$y[-1]=3$，$y[-2] =1$，试求：

(4) 画出系统的模拟框图。

解：

$$H(z) = \frac{(1+z^{-1})}{1-3z^{-1}+2z^{-2}}$$

系统模拟框图为：



例题：已知某离散因果LTI系统的零状态响应

$y_{zs}[k]=[3-3(0.5)^k+(1/3)^k]u[k]$, 激励信号$x[k]=u[k]$,

试求该系统的系统函数$H(z)$并画出零极点分布图，

写出描述该系统的差分方程，求解系统的单位脉冲响应$h[k]$,

并判断系统是否稳定。

解: 零状态响应和激励信号的z变换分别为

$$Y_{zs}(z)=\frac{3}{1-z^{-1}}+\frac{-3}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1-z^{-1}\right)},\quad |z|>1$$

$$X(z)=\frac{1}{1-z^{-1}},\quad |z|>1$$

根据系统函数的定义，可得

$$H(z)=\frac{Y_{zs}(z)}{X(z)}=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)},\quad |z|>\frac{1}{2}$$

例题：已知某离散因果LTI系统的零状态响应

$y_{zs}[k]=[3-3(0.5)^k+(1/3)^k]u[k]$, 激励信号$x[k]=u[k]$,

试求该系统的系统函数$H(z)$并画出零极点分布图，

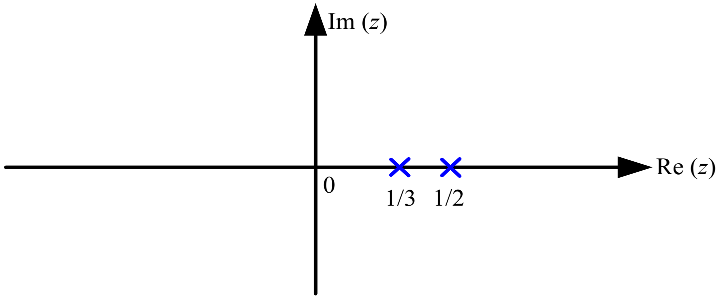
写出描述该系统的差分方程，求解系统的单位脉冲响应$h[k]$,

并判断系统是否稳定。

解：

$$H(z)=\frac{Y_{zs}(z)}{X(z)}=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)},\quad |z|>\frac{1}{2}$$

系统函数的极点为 $p_1=1/2$, $p_2=1/3$



零极点分布图

例题：已知某离散因果LTI系统的零状态响应

$y_{zs}[k]=[3-3(0.5)^k+(1/3)^k]u[k]$, 激励信号$x[k]$=$u[k]$,

试求该系统的系统函数$H(z)$并画出零极点分布图，

写出描述该系统的差分方程，求解系统的单位脉冲响应$h[k]$,

并判断系统是否稳定。

解：

$$H(z)=\frac{Y_{zs}(z)}{X(z)}=\frac{1}{1-\frac{5}{6}z^{-1}+\frac{1}{6}z^{-2}}, \qquad |z|>\frac{1}{2}$$

展开可得：

$$\left(1-\frac{5}{6}z^{-1}+\frac{1}{6}z^{-2}\right)Y_{zs}(z)=X(z)$$

两边进行z反变换，可得描述该离散LTI系统的差分方程为

$$y[k]-\frac{5}{6}y[k-1]+\frac{1}{6}y[k-2]=x[k]$$

例题：已知某离散因果LTI系统的零状态响应

$y_{zs}[k]=[3-3(0.5)^k+(1/3)^k]u[k]$, 激励信号$x[k]=u[k]$,

试求该系统的系统函数$H(z)$并画出零极点分布图，

写出描述该系统的差分方程，求解系统的单位脉冲响应$h[k]$、

并判断系统是否稳定。

解：对系统函数$H(z)$进行部分分式展开，可得

$$H(z)=\frac{1}{1-\frac{5}{6}z^{-1}+\frac{1}{6}z^{-2}}=\frac{3}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}-\frac{2}{\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)},\qquad |z|>\frac{1}{2}$$

进行z反变换，可得系统单位脉冲响应为

$$h[k]=3\left(\frac{1}{2}\right)^k u[k]-2\left(\frac{1}{3}\right)^k u[k]$$

例题：已知某离散因果LTI系统的零状态响应

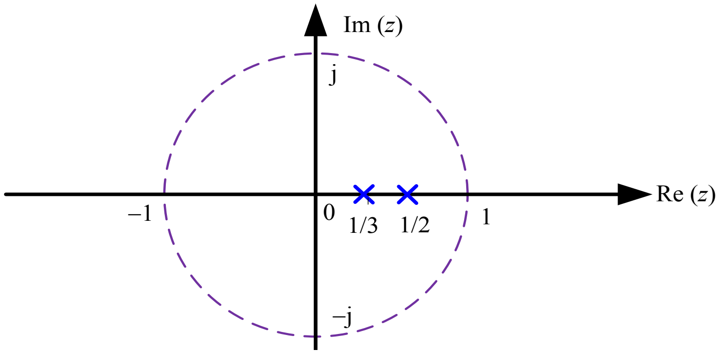
$y_{zs}[k]=[3-3(0.5)^k+(1/3)^k]u[k]$, 激励信号$x[k]=u[k]$,

试求该系统的系统函数$H(z)$并画出零极点分布图，

写出描述该系统的差分方程，求解系统的单位脉冲响应$h[k]$,

并判断系统是否稳定。

解：



对于离散因果LTI系统，由系统函数的零极点分布图可以看出，

其极点全部位于z平面单位圆内，故该离散因果LTI系统稳定。

谢　谢

本课程所引用的一些素材为主讲老师多年的教学积累，来源于多种媒体及同事、同行、朋友的交流，难以一一注明出处，特此说明并表示感谢！