北京交通大学


主讲人：陈后金

电子信息工程学院

# 为何进行离散信号与系统的$z$域分析

已知描述某离散LTI系统的差分方程 $y[k] + 3\,y[k-1] + 2\,y[k-2] = x[k]$，输入信号 $x[k] = u[k]$，初始状态为 $y[-1] = 0$， $y[-2] = 0.5$，则：

- 如何分析离散LTI系统的完全响应?

时域：
零输入响应（齐次解）
+零状态（$x[k]*h[k]$）

频域：
仅零状态响应，且要求输入信号绝对可和、系统稳定

- 如何分析离散LTI系统的系统特性?

时域：
由系统单位脉冲响应$h[k]$描述

频域：
由系统的频率响应$H(e^{j\Omega})$描述
但只适用于稳定系统

$z$域分析将有效解决以上问题

# 离散时间信号与系统的$z$域分析

**离散时间信号的$z$域分析：**

- 离散信号的$z$域表示
- 常见序列单边$z$变换
- 单边$z$变换的性质
- 单边$z$反变换

**离散时间LTI系统的$z$域分析：**

- 离散系统的$z$域描述
- 系统函数与系统特性
- 系统响应的$z$域分析
- 离散LTI系统的模拟

# 离散信号的$z$域表示

- 离散时间信号$z$变换
- 单边$z$变换的定义
- 单边$z$变换的收敛域

# 1. 离散时间信号z变换

离散时间信号的z域表示：信号$x[k]$表示成复指数$z^k$的线性组合，信号不同只是加权函数$X(z)$不同。

$$x[k]=\frac{1}{2\pi \mathrm{j}}\oint_{c} X(z)z^{k-1}\mathrm{d}z$$

其中，$C$为$X(z)$ 的收敛域(ROC )中的一闭合曲线

※双边z正变换：
$$X(z)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\,z^{-k}$$

※双边z反变换：
$$x[k]=\frac{1}{2\pi \mathrm{j}}\oint_{c} X(z)z^{k-1}\mathrm{d}z$$

# 2. 单边$z$变换的定义

※单边$z$正变换： $X(z)=\sum_{k=0}^{+\infty}x[k]\,z^{-k}$

※单边$z$反变换： $x[k]=\dfrac{1}{2\pi \mathrm{j}}\oint_{c}X(z)z^{k-1}\mathrm{d}z$

$C$为$X(z)$ 的收敛域中一闭合曲线

※符号表示： $x[k]\xleftrightarrow{\mathscr{Z}}X(z)$

正变换：$X(z)=\mathscr{Z}\{x[k]\}$

反变换： $x[k]=\mathscr{Z}^{-1}\{X(z)\}$

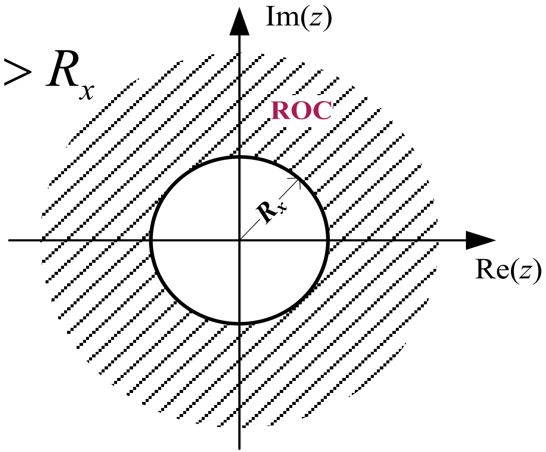
# 3. 单边$z$变换的收敛域

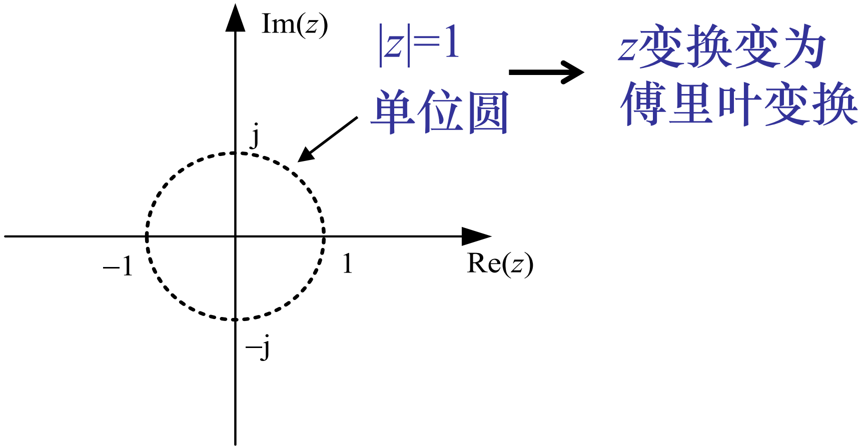
※单边$z$变换： $X(z)=\sum_{k=0}^{\infty} x[k]z^{-k}$  $X(z)$是复变量$z^{-1}$的幂级数

收敛域： 使上式级数收敛的所有$z$的范围称为$X(z)$的收敛域

右边序列的收敛域为$z$平面中的一圆外区域

$|z|>R_x$



[例] 求序列$x[k]=\begin{cases}1, & 0\le k\le N-1\\ 0, & 其它\end{cases}$的单边$z$变换及其收敛域。

解：　由单边$z$变换的定义及等比级数求和公式，可得

$$X(z)=\sum_{k=0}^{\infty}x[k]z^{-k}=\sum_{k=0}^{N-1}z^{-k}$$

$$=1+z^{-1}+\cdots+z^{-(N-1)}=\frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}}$$

此级数为有限项等比级数，当满足$|z|>0$时，级数收敛。

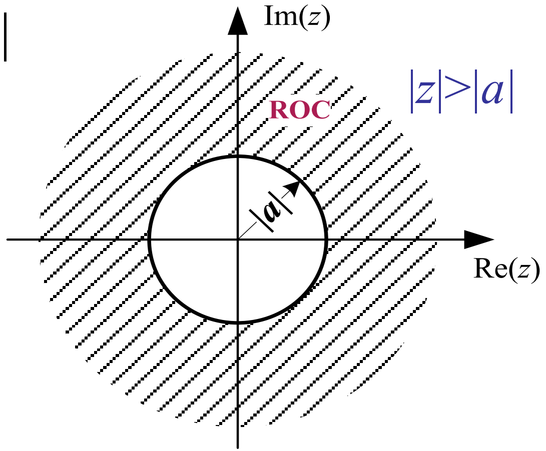
# [例]求序列 $x[k]=a^k u[k]$ 的单边$z$变换及其收敛域

解：由单边$z$变换的定义可得

$$X(z)=\sum_{k=0}^{\infty}x[k]z^{-k}=\sum_{k=0}^{\infty}a^k z^{-k}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}(az^{-1})^k=\frac{1}{1-az^{-1}}, \quad |z|>|a|$$

当满足$|z|>|a|$时，此级数为无穷递降等比级数，级数收敛。



# 谢 谢

本课程所引用的一些素材为主讲老师多年的教学积累，来源于多种媒体及同事、同行、朋友的交流，难以一一注明出处，特此说明并表示感谢！