北京交通大学

主讲人：陈后金

电子信息工程学院

离散非周期序列DTFT的性质

※ 线性特性

※ 对称特性

※ 位移特性

※ 卷积特性

※ 微分特性

※ Parseval定理

离散非周期序列DTFT的性质

1. 线性特性

若

$$x_1[k] \xleftarrow{\text{DTFT}} \xrightarrow{} X_1(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})$$

$$x_2[k] \xleftarrow{\text{DTFT}} \xrightarrow{} X_2(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})$$

则

$$ax_1[k]+bx_2[k] \xleftarrow{\text{DTFT}} \xrightarrow{} aX_1(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})+bX_2(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})$$

离散非周期序列DTFT的性质

2. 对称特性

$$x^*[k] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} X^*(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega}) \qquad x^*[-k] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} X^*(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})$$

当 $x[k]$是实序列时

$$X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}) = X^*(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega})$$

幅度与相位

$$\left|X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})\right| = \left|X(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega})\right|$$

$$\varphi(\Omega) = -\varphi(-\Omega)$$

实部与虚部

$$X_{\mathrm{R}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}) = X_{\mathrm{R}}(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega})$$

$$X_{\mathrm{I}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}) = -X_{\mathrm{I}}(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega})$$

例：求序列$x[k]=\{1,2,1;\ k=0,1,2\}$的幅度谱和相位谱。

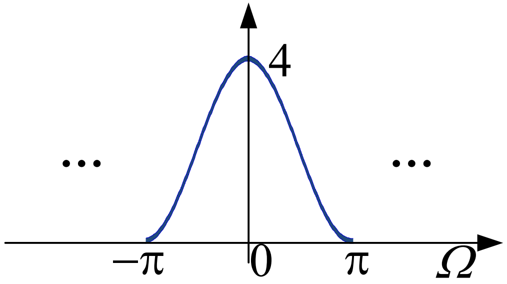
解：

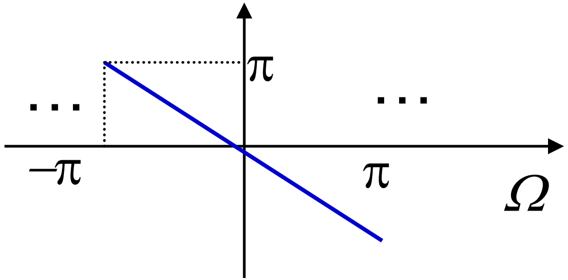
$$X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})=1+2\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\Omega}=(1+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega})^2$$

$$=4\cos^2(\Omega/2)\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega}$$

$$\left|X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})\right|=4\cos^2(\Omega/2)$$

$$\varphi(\Omega)=-\Omega$$





离散非周期序列DTFT的性质

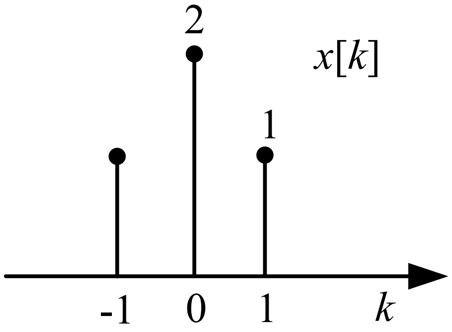
3. 位移特性

(a) 时域位移特性

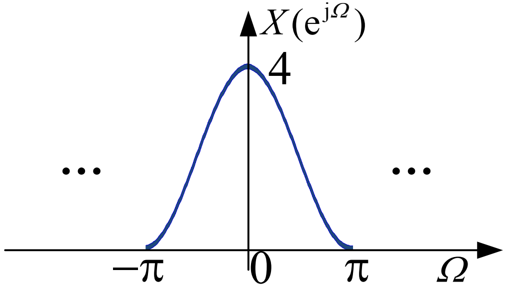
$$x[k-n] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega n}$$

序列在时域的位移，对应其频域的相移。

例：已知$x[k]$如图所示，求$y[k]=x[k-1]$的频谱。

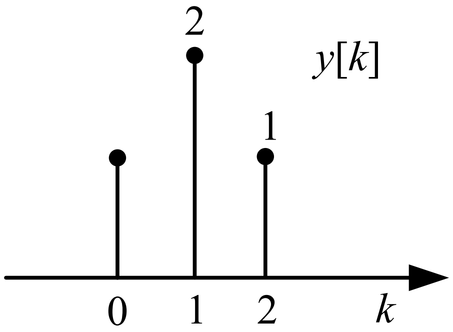


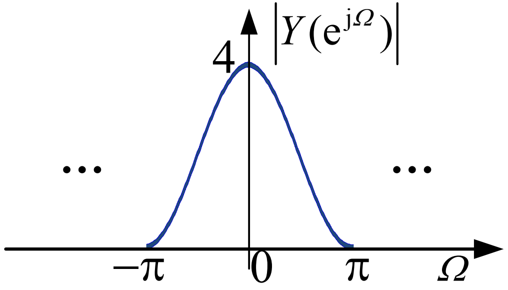
$$X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})=2(1+\cos\Omega)$$

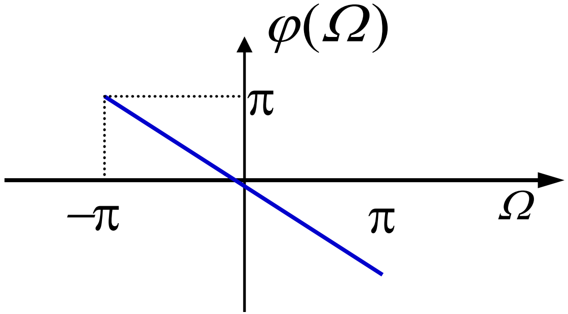


解：

$$Y(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega}X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})$$







离散非周期序列DTFT的性质

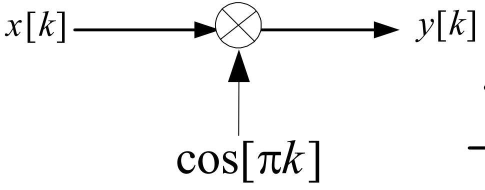
3. 位移特性

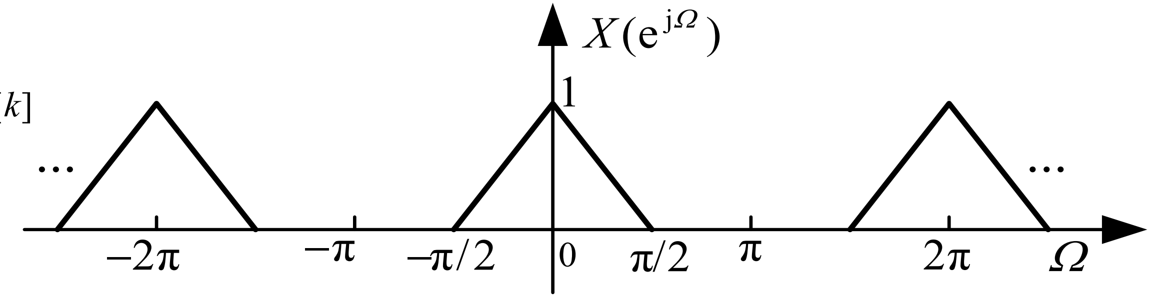
(b) 频域位移特性

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega_0 k}x[k] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\Omega-\Omega_0)})$$

序列在时域的相移，对应其频域的频移。

例：已知$x[k]$的频谱如图所示，求$y[k]$的频谱。



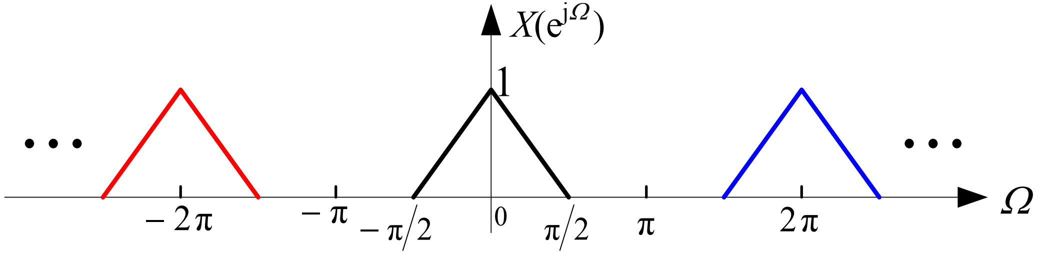


解：

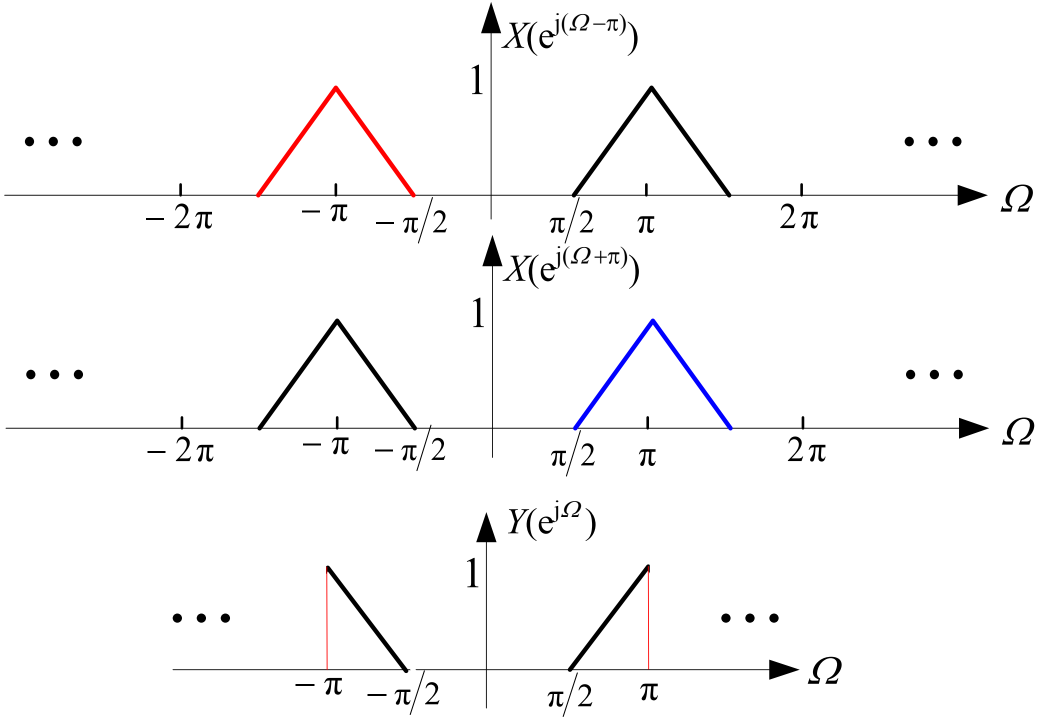
$$y[k]=x[k]\cos\left[\pi k\right]=x[k](\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi k}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi k})/2$$

$$Y(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})=\left\{X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\Omega-\pi)})+X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\Omega+\pi)})\right\}/2$$

例：已知$x[k]$的频谱如图所示，求$y[k]$的频谱。



解：



离散非周期序列DTFT的性质

4. 卷积特性

(a) 时域卷积特性

$$x[k]*h[k] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})$$

序列时域的卷积对应频域的乘积。

离散非周期序列DTFT的性质

4. 卷积特性

(b) 频域卷积特性

$$x[k]h[k] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta})H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\Omega-\theta)})\mathrm{d}\theta$$

序列时域的乘积对应频域的卷积。

离散非周期序列DTFT的性质

5. 频域微分特性

$$kx[k] \xleftrightarrow{\mathrm{DTFT}} \mathrm{j}\frac{\mathrm{d}X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})}{\mathrm{d}\Omega}$$

离散非周期序列DTFT的性质

6. Parseval定理

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left|x[k]\right|^2=\frac{1}{2\pi}\int_{\langle 2\pi\rangle}\left|X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})\right|^2\mathrm{d}\Omega$$

序列时域的能量等于频域的能量。

证明：

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left|x[k]\right|^2=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]x^*[k]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{\langle 2\pi\rangle}X^*(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega k}\,\mathrm{d}\Omega\right\}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{\langle 2\pi\rangle}X^*(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega k}\right\}\mathrm{d}\Omega=\frac{1}{2\pi}\int_{\langle 2\pi\rangle}X^*(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})\mathrm{d}\Omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{\langle 2\pi\rangle}\left|X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})\right|^2\mathrm{d}\Omega$$

例：已知$x[k]$为一有限长序列且 $x[k]=\{\underset{\downarrow}{1},2,3,4\}$，不计算$x[k]$的频谱 $X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})$，直接确定下列表达式的值。

解：(1) $X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}0})=\sum_{k=0}^{3}x[k]\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k0}=\sum_{k=0}^{3}x[k]=1+2+3+4=10$

(2) $X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi})=\sum_{k=0}^{3}x[k]\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\pi}=\sum_{k=0}^{3}x[k]\cdot(-1)^{k}=1-2+3-4=-2$

(3) $\int_{-\pi}^{\pi}X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})\,\mathrm{d}\Omega=2\pi x[0]=2\pi$

(4) $\int_{-\pi}^{\pi}\left|X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})\right|^{2}\mathrm{d}\Omega=2\pi\sum_{k=0}^{3}\left|x[k]\right|^{2}=60\pi$

谢 谢

本课程所引用的一些素材为主讲老师多年的教学积累，来源于多种媒体及同事、同行、朋友的交流，难以一一注明出处，特此说明并表示感谢!