北京交通大学

信号与系统

主讲人：陈后金

电子信息工程学院

连续非周期信号的频域分析

- 连续非周期信号的频域表示
- 典型连续非周期信号的频谱
- 连续时间傅里叶变换的性质

连续时间傅里叶变换的性质

※ 线性特性
※ 共轭对称特性
※ 互易对称特性
※ 展缩特性
※ 时移特性
※ 频移特性
※ 时域积分特性
※ 时域微分特性
※ 频域微分特性
※ 时域卷积特性
※ 频域卷积特性
※ 能量守恒定理

连续时间傅里叶变换的性质

9. 频域微分特性

若 $x(t) \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} X(\mathrm{j}\omega)$

则 $$t \cdot x(t) \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} \mathrm{j}\frac{\mathrm{d}X(\mathrm{j}\omega)}{\mathrm{d}\omega}$$

$$t^n x(t) \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} \mathrm{j}^n \frac{\mathrm{d}X^n(\mathrm{j}\omega)}{\mathrm{d}\omega^n}$$

连续时间傅里叶变换的性质

[例] 试求单位斜坡信号 $tu(t)$ 的频谱。

解： 已知单位阶跃信号傅里叶变换为

$$\mathscr{F}[u(t)] = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{\mathrm{j}\omega}$$

故利用频域微分特性可得:

$$\mathscr{F}[tu(t)] = \mathrm{j}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{\mathrm{j}\omega}] = \mathrm{j}\pi\delta'(\omega) - \frac{1}{\omega^2}$$

连续时间傅里叶变换的性质

10. 时域卷积特性

若 $x_1(t) \xleftrightarrow{\mathscr{F}} X_1(\mathrm{j}\omega)$ $\quad x_2(t) \xleftrightarrow{\mathscr{F}} X_2(\mathrm{j}\omega)$

则 $x_1(t) * x_2(t) \xleftrightarrow{\mathscr{F}} X_1(\mathrm{j}\omega) \cdot X_2(\mathrm{j}\omega)$

连续时间傅里叶变换的性质

[例] 求如图所示信号的频谱。

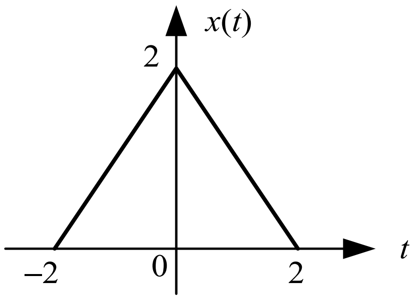
解：

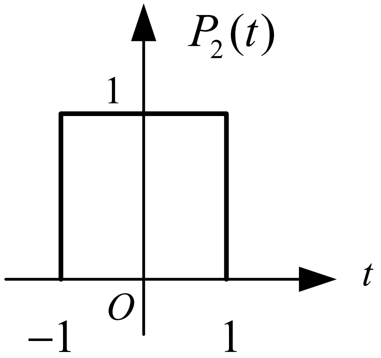
$$x(t)=p_2(t)*p_2(t)$$

$$p_2(t)\xleftrightarrow{\mathscr{F}}2\mathrm{Sa}(\omega)$$

根据时域卷积特性

$$X(\mathrm{j}\omega)=4\mathrm{Sa}^2(\omega)$$





连续时间傅里叶变换的性质

11．频域卷积特性

若 $x_1(t) \xleftrightarrow{\mathscr{F}} X_1(\mathrm{j}\omega)$ $\quad x_2(t) \xleftrightarrow{\mathscr{F}} X_2(\mathrm{j}\omega)$

则 $$x_1(t)\cdot x_2(t) \xleftrightarrow{\mathscr{F}} \frac{1}{2\pi}[X_1(\mathrm{j}\omega) * X_2(\mathrm{j}\omega)]$$

连续时间傅里叶变换的性质

非周期信号$x(t)$ 的能量谱

$$W=\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2\,\mathrm{d}t$$

$|X(\mathrm{j}\omega)|^2$---- 能量谱

$$=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X^*(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega]\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X^*(\mathrm{j}\omega)[\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t]\,\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X^*(\mathrm{j}\omega)\cdot X(\mathrm{j}\omega)\mathrm{d}\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|X(\mathrm{j}\omega)|^2\,\mathrm{d}\omega$$

连续时间傅里叶变换的性质

12．能量守恒定理　（帕什瓦尔能量守恒定理）

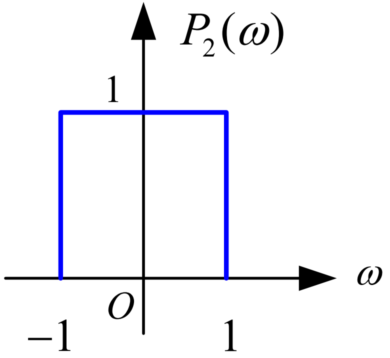
$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(\mathrm{j}\omega)|^2 \, \mathrm{d}\omega$$

非周期能量信号在时域中的归一化能量等于其在频域中的归一化能量，**能量保持守恒**。

连续时间傅里叶变换的性质

[例] 计算 $\int_{-\infty}^{\infty}(\frac{\sin t}{t})^2\mathrm{d}t$

解: $\mathscr{F}\{\frac{\sin t}{t}\}=\pi p_2(\omega)$



根据Parseval能量守恒定理，可得

$$\int_{-\infty}^{\infty}(\frac{\sin t}{t})^2\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|\pi p_2(\omega)|^2\,\mathrm{d}\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\pi^2\mathrm{d}\omega=\pi$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}(\frac{\sin 2t}{2t})^2\mathrm{d}t=?\qquad\qquad\int_{-\infty}^{\infty}(\frac{\sin 4t}{4t})^2\mathrm{d}t=?$$

谢　谢

本课程所引用的一些素材为主讲老师多年的教学积累，来源于多种媒体及同事、同行、朋友的交流，难以一一注明出处，特此说明并表示感谢！