北京交通大學

信号与系统

主讲人：陈后金

电子信息工程学院

系统函数与系统特性

- 系统函数与系统时域特性
- 系统函数与系统频率响应
- 系统函数与系统的稳定性

1. 系统函数与系统时域特性

※ 系统函数*H*(s)的零极点分布图

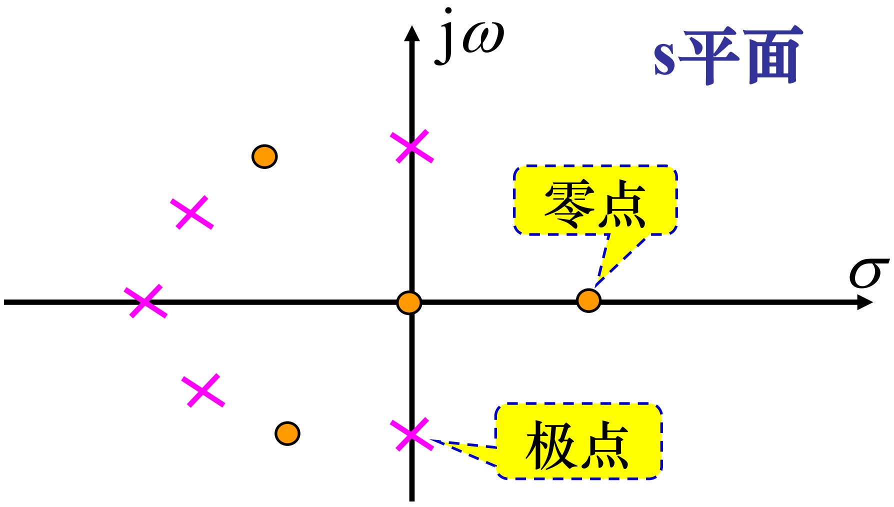
$$H(s)=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1 s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}=\frac{N(s)}{D(s)}$$

$$=K\frac{(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}$$

零极点增益形式

$z_1,z_2,\cdots,z_m$是系统函数的零点

$p_1,p_2,\cdots,p_n$是系统函数的极点

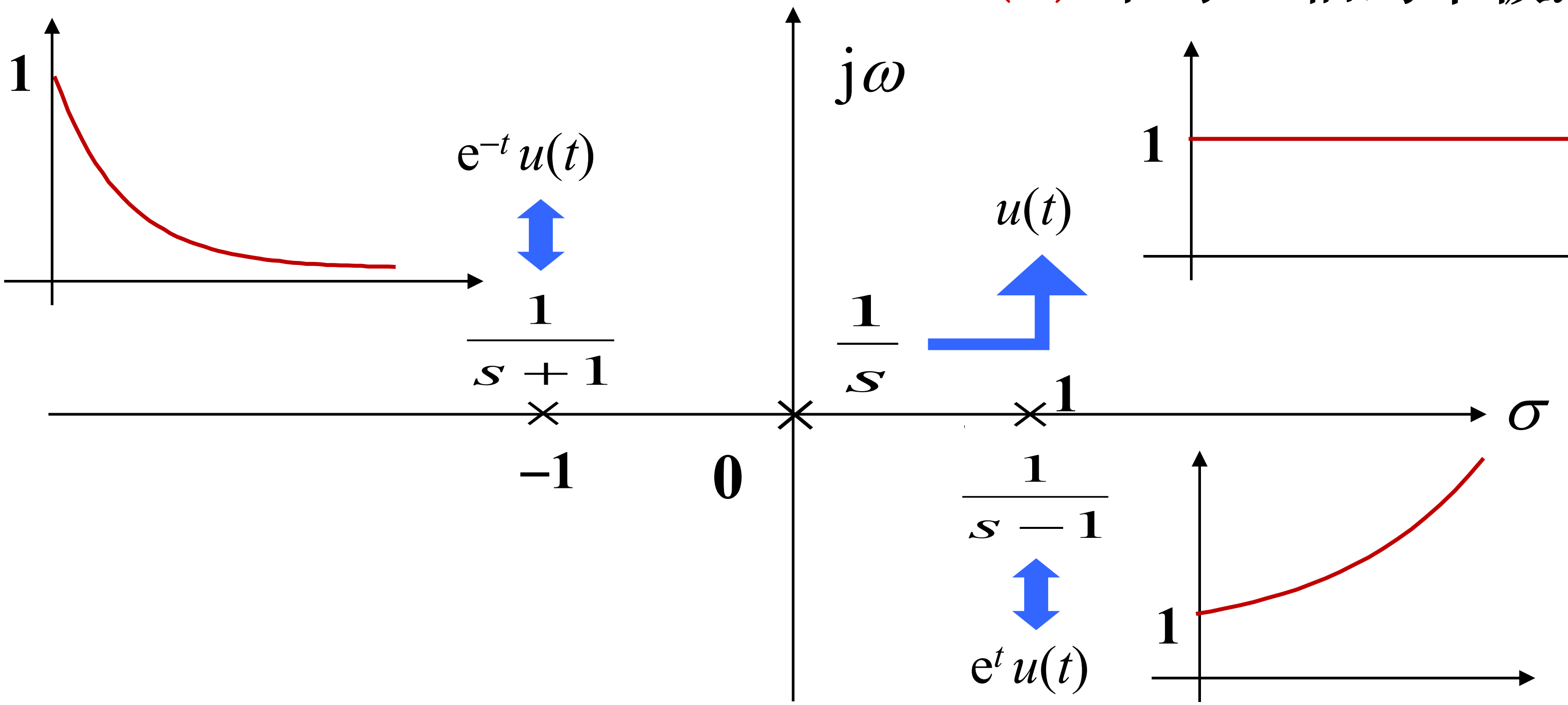


零极点分布图

1. 系统函数与系统时域特性

➢ 系统函数*H*(*s*)与冲激响应*h*(*t*)的关系

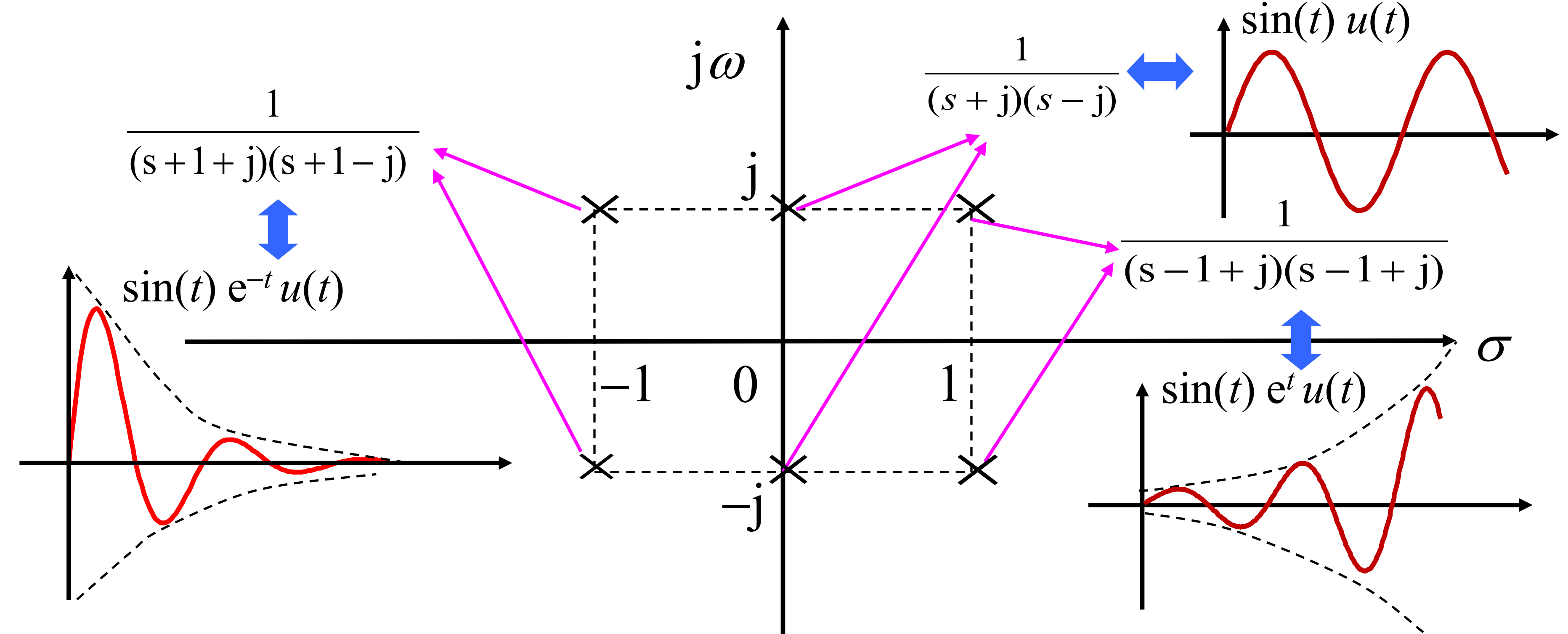
（1）位于σ轴的单极点



1. 系统函数与系统时域特性

➢ **系统函数*H*(*s*)与冲激响应*h*(*t*) 的关系**

（2）共轭复极点



2. 系统函数与系统频率响应

系统的频率响应$H(\mathrm{j}\omega)$是指系统在正弦信号激励下，系统的稳态响应随信号频率的变化情况。

对于稳定系统，令系统函数$H(s)$中$s=\mathrm{j}\omega$得到系统频率响应

$$H(\mathrm{j}\omega)=H(s)\big|_{s=\mathrm{j}\omega}$$

$$H(\mathrm{j}\omega)=\underbrace{|H(\mathrm{j}\omega)|}_{\text{幅度响应}}\mathrm{e}^{\overbrace{\mathrm{j}\phi(\omega)}^{\text{相位响应}}}$$

2. 系统函数与系统频率响应

系统频率响应$H(\mathrm{j}\omega)$

对于零极增益表示的系统函数

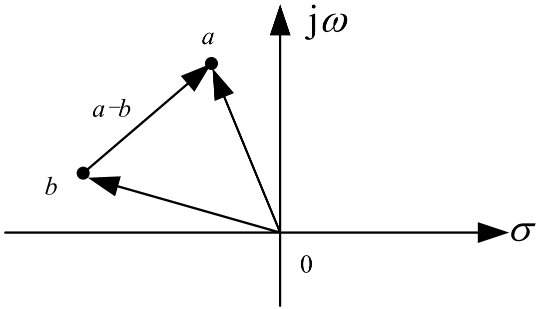
$$H(s)=K\frac{\prod_{j=1}^{m}(s-z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)}$$

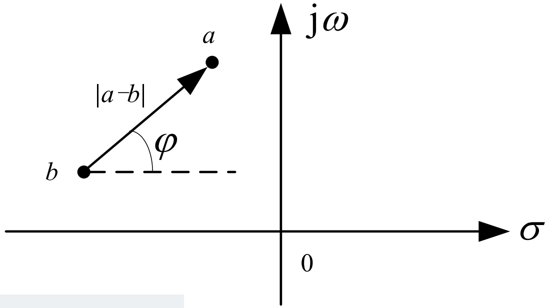
当系统稳定时，令s=jω，则得

$$H(\mathrm{j}\omega)=K\frac{\prod_{j=1}^{m}(\mathrm{j}\omega-z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(\mathrm{j}\omega-p_i)}$$

2. 系统函数与系统频率响应

复数a和b及$a-b$的向量表示

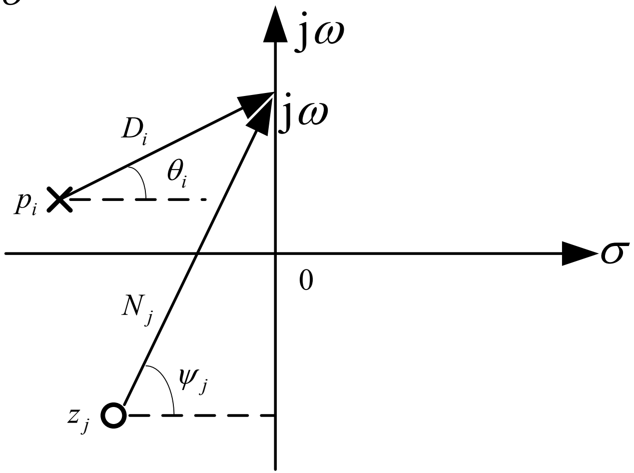




系统函数零极点的向量表示

$$(\mathrm{j}\omega - p_i) = D_i \mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_i}$$

$$(\mathrm{j}\omega - z_j) = N_j \mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi_j}$$



例：已知系统函数$H(s) = \dfrac{1}{s+1}$，求系统的频率响应。

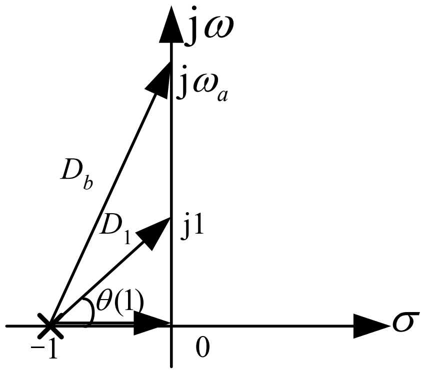
解：

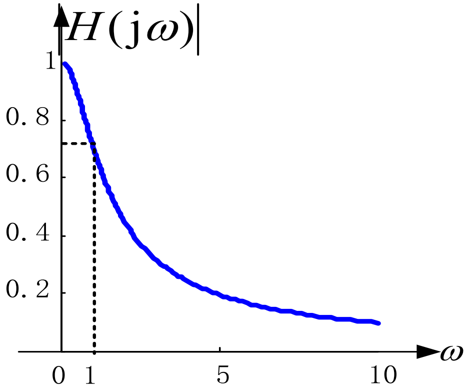
$$H(\mathrm{j}\omega) = H(s)\big|_{s=\mathrm{j}\omega} = \frac{1}{\mathrm{j}\omega + 1}$$

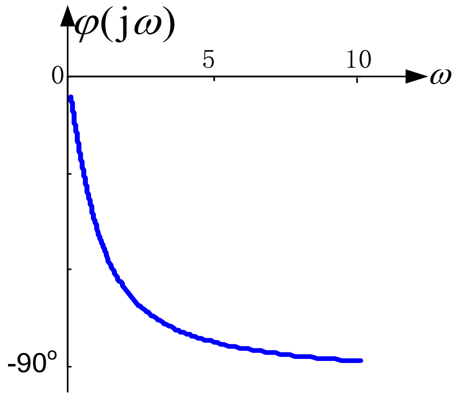
$$|H(\mathrm{j}\omega)|\big|_{\omega=0} = \frac{1}{D_0} = 1 \qquad \varphi(\mathrm{j}\omega)\big|_{\omega=0} = 0 - \theta_0 = 0$$

$$|H(\mathrm{j}\omega)|\big|_{\omega=1} = \frac{1}{D_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \varphi(\mathrm{j}\omega)\big|_{\omega=1} = 0 - \theta_1 = -\arctan 1 = -45^\circ$$

$$|H(\mathrm{j}\omega)|\big|_{\omega\to\infty} = \frac{1}{D_\infty} = 0 \qquad \varphi(\mathrm{j}\omega)\big|_{\omega=0} = 0 - \theta_\infty = -90^\circ$$



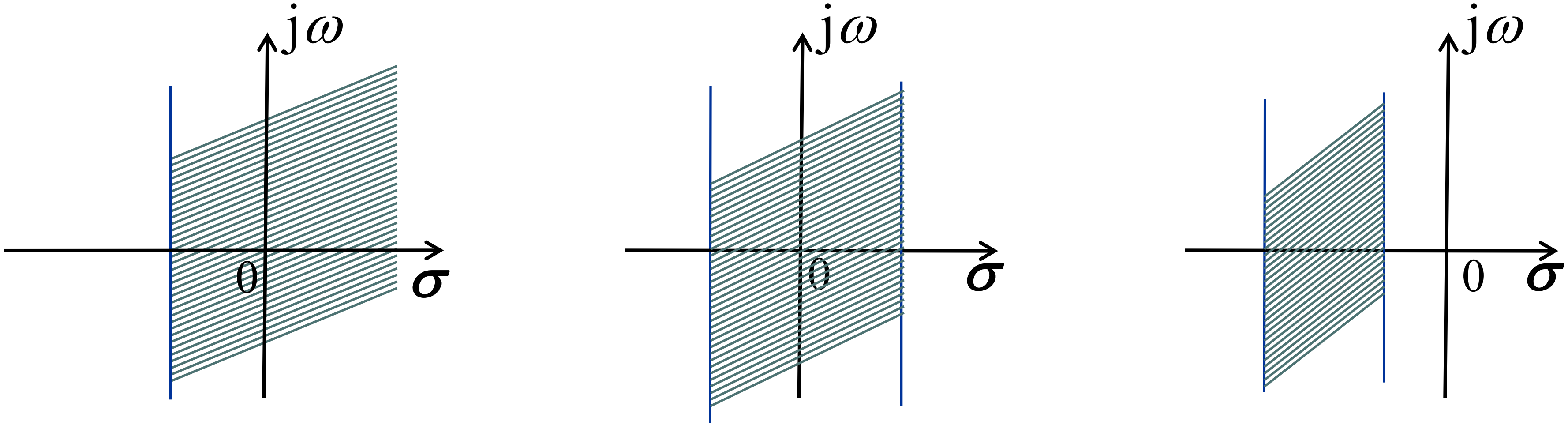




3. 系统函数与系统的稳定性

※ **连续时间LTI系统稳定的充要条件：**

系统函数$H(s)$的收敛域(ROC)包含s平面jω轴。



稳定系统　　稳定系统　　不稳定系统

例：根据系统函数$H(s)$收敛域，分析系统的稳定性与因果性

$$H(s)=\frac{6s}{(s+2)(s+1)}$$

解： $$H(s)=\frac{12}{s+2}+\frac{-6}{s+1}$$

（1）$\mathrm{Re}(s)>-1$ 系统因果、稳定

$$h(t)=12\mathrm{e}^{-2t}u(t)-6\mathrm{e}^{-t}u(t)$$

（2）$-2<\mathrm{Re}(s)<-1$ 系统非因果、不稳定

$$h(t)=12\mathrm{e}^{-2t}u(t)+6\mathrm{e}^{-t}u(-t)$$

（3）$\mathrm{Re}(s)<-2$ 系统非因果、不稳定

$$h(t)=-12\mathrm{e}^{-2t}u(-t)+6\mathrm{e}^{-t}u(-t)$$

3. 系统函数与系统的稳定性

※因果连续LTI系统：

系统BIBO稳定的充要条件是系统函数$H(s)$的全部极点位于左半s平面。

※ 连续LTI系统：

系统BIBO稳定的充要条件是系统函数$H(s)$的**收敛域**(ROC)**包含s平面$j\omega$轴。**

例：判断下述因果连续LTI系统是否稳定。

$$(1)H_1(s)=\frac{s+3}{(s+1)(s+2)},\mathrm{Re}(s)>-1 \qquad (2)H_2(s)=\frac{s}{s^2+\omega_0^2},\mathrm{Re}(s)>0$$

解：　由于是因果的连续LTI系统

(1) 极点为$s=-1$和$s=-2$，都在s左半平面。

所以该因果LTI系统稳定。

(2) 极点为$s=\pm j\omega_0$，是虚轴上的一对共轭极点。

所以该因果LTI系统不稳定。

综合题： 已知某连续时间LTI系统的零状态响应 $y_{zs}(t)=(0.5+e^{-t}-1.5e^{-2t})u(t)$，激励信号$x(t)=u(t)$，试求该系统的系统函数$H(s)$并画出零极点分布图，写出描述系统的微分方程、系统的冲激响应$h(t)$、并判断系统是否因果、稳定。

解：零状态响应和激励信号的拉氏变换分别为

$$Y_{zs}(s)=\frac{0.5}{s}+\frac{1}{s+1}-\frac{1.5}{s+2}=\frac{2s+1}{s(s+1)(s+2)},\qquad \mathrm{Re}(s)>0$$

$$X(s)=\frac{1}{s},\qquad \mathrm{Re}(s)>0$$

根据系统函数的定义，可得

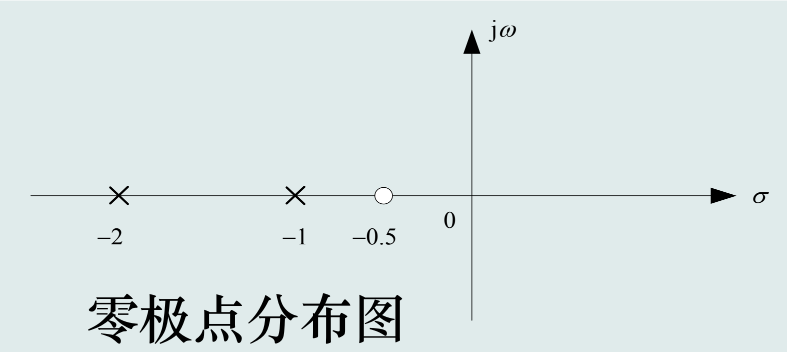
$$H(s)=\frac{Y_{zs}(s)}{X(s)}=\frac{2s+1}{(s+1)(s+2)}=\frac{2s+1}{s^2+3s+2},\qquad \mathrm{Re}(s)>-1 \qquad ①$$

综合题： 已知某连续时间LTI系统的零状态响应 $y_{zs}(t)=(0.5+e^{-t}-1.5e^{-2t})u(t)$,激励信号$x(t)=u(t)$,
试求该系统的**系统函数$H(s)$**并画出**零极点分布图**，写出描述系统的**微分方程**、系统的**冲激响应$h(t)$**、并判断系统是否**因果**、**稳定**。

解：

$$H(s)=\frac{Y_{zs}(s)}{X(s)}=\frac{2s+1}{s^2+3s+2},\qquad \mathrm{Re}(s)>-1 \qquad ①$$

系统函数的零点$z=-0.5$为，极点为$p_1=-1, p_1=-2$，



零极点分布图

综合题： 已知某连续时间LTI系统的零状态响应 $y_{zs}(t) = (0.5 + e^{-t} - 1.5e^{-2t})u(t)$,激励信号$x(t)=u(t)$,试求该系统的系统函数$H(s)$并画出零极点分布图，写出描述系统的微分方程、系统的冲激响应$h(t)$、并判断系统是否因果、稳定。

解： $H(s) = \dfrac{Y_{zs}(s)}{X(s)} = \dfrac{2s+1}{s^2+3s+2}$， $\mathrm{Re}(s) > -1$ ①

由①式可得系统微分方程的复频域表达式

$$(s^2+3s+2)Y_{zs}(s) = (2s+1)X(s)$$

两边进行拉氏反变换，可得描述系统的微分方程为

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 2x'(t) + x(t)$$

综合题： 已知某连续时间LTI系统的零状态响应 $y_{zs}(t)=(0.5+\mathrm{e}^{-t}-1.5\mathrm{e}^{-2t})u(t)$,激励信号$x(t)=u(t)$, 试求该系统的系统函数$H(s)$并画出零极点分布图，写出描述系统的微分方程、系统的冲激响应$h(t)$、并判断系统是否因果、稳定。

解： 将系统函数$H(s)$进行部分分式展开，可得

$$H(s)=\frac{2s+1}{s^2+3s+2}=\frac{-1}{s+1}+\frac{3}{s+2}$$

进行拉氏反变换，可得系统冲激响应为

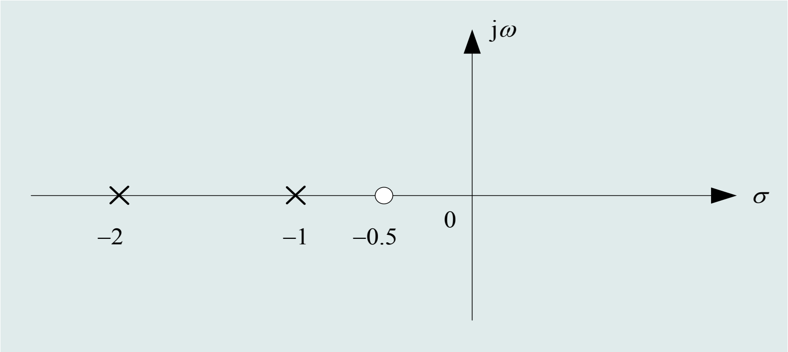
$$h(t)=(-\mathrm{e}^{-t}+3\mathrm{e}^{-2t})u(t)$$

由于该连续LTI系统的冲激响应满足 $h(t)=0, t<0$

故该连续LTI系统为因果系统

综合题： 已知某连续时间LTI系统的零状态响应 $y_{zs}(t)=(0.5+e^{-t}-1.5e^{-2t})u(t)$，激励信号$x(t)=u(t)$，试求该系统的系统函数$H(s)$并画出零极点分布图，写出描述系统的微分方程、系统的冲激响应$h(t)$、并判断系统是否因果、稳定。

解：



对于因果LTI系统，由零极点分布图可以看出，系统的极点全部位于s左半平面，故系统稳定。

谢 谢

本课程所引用的一些素材为主讲老师多年的教学积累，来源于多种媒体及同事、同行、朋友的交流，难以一一注明出处，特此说明并表示感谢！