北京交通大學

信号与系统

主讲人：陈后金
电子信息工程学院

连续周期信号的频域分析

- 连续周期信号的频域表示
- 连续周期信号的频谱
- 连续傅里叶级数的性质

连续傅里叶级数的性质

$$\tilde{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \, \mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_0 t}$$

$$C_n = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} \tilde{x}(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_0 t}\mathrm{d}t$$

$$C_n = \underbrace{|C_n|}_{\text{幅度频谱}} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\underbrace{\varphi_n}_{\text{相位频谱}}}$$

连续傅里叶级数的性质

- **线性特性**

  若 $\tilde{x}_1(t) \to C_{1n}$， $\tilde{x}_2(t) \to C_{2n}$

  则 $a_1 \cdot \tilde{x}_1(t) + a_2 \cdot \tilde{x}_2(t) \to a_1 \cdot C_{1n} + a_2 \cdot C_{2n}$

- **对称特性**

  若 $\tilde{x}(t)$ 为实信号

  则 $|C_n| = |C_{-n}|$ $\varphi_n = -\varphi_{-n}$

- **时移特性**

  若 $\tilde{x}(t) \to C_n$

  则 $\tilde{x}(t - t_0) \to \mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_0 t_0} C_n$

连续傅里叶级数的性质

◆ **频移特性**

若 $\tilde{x}(t) \to C_n$

则有 $\tilde{x}(t)e^{jM\omega_0 t} \longleftrightarrow C_{n-M}$

◆ **卷积特性**

若 $\tilde{x}_1(t)$和$\tilde{x}_2(t)$ 均是周期为T_0的周期信号，且

$\tilde{x}_1(t) \to C_{1n}$， $\tilde{x}_2(t) \to C_{2n}$

则有 $\tilde{x}_1(t) * \tilde{x}_2(t) \to T_0 C_{1n} \cdot C_{2n}$

◆ **微分特性**

若 $\tilde{x}(t) \to C_n$

则有 $\tilde{x}'(t) \to jn\omega_0 C_n$

连续傅里叶级数的性质

◆ 帕什瓦尔(Parseval)功率守恒定理

$$P=\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2}|\tilde{x}(t)|^2\,\mathrm{d}t=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|C_n|^2$$

周期信号的功率等于信号所包含的
直流、基波以及各次谐波的功率之和

周期信号的功率频谱：

$|C_n|^2$ 随 $n\omega_0$ 分布情况称为周期信号的功率频谱，简称功率谱。

连续傅里叶级数的性质

[例] $\tilde{x}(t)=4+6\cos(\omega_0 t)+4\cos(2\omega_0 t)$ ，求其功率。

解： 1）根据帕什瓦尔(Parseval)功率守恒定理 $P=\dfrac{1}{T_0}\displaystyle\int_{-T_0/2}^{T_0/2}\left|\tilde{x}(t)\right|^2\mathrm{d}t=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|C_n\right|^2$

$$\tilde{x}(t)=2\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\omega_0 t}+3\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 t}+4+3\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}+2\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\omega_0 t}$$

$$C_0=4 \qquad C_{\pm1}=3 \qquad C_{\pm2}=2$$

$$P=2^2+3^2+4^2+3^2+2^2=42$$

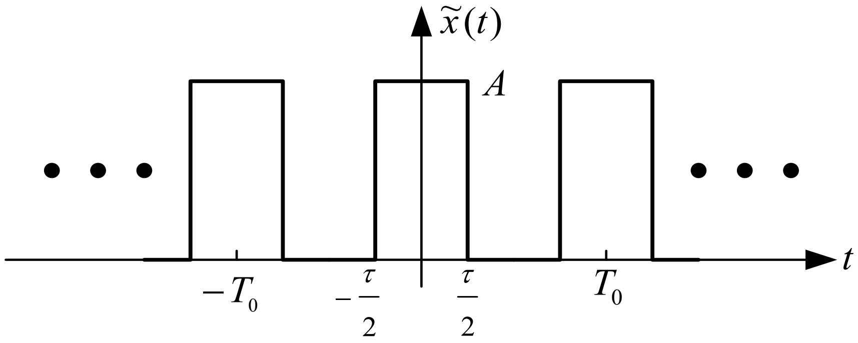
2） $\tilde{x}(t)=4+6\cos(\omega_0 t)+4\cos(2\omega_0 t)$

$$P=4^2+\frac{1}{2}\times6^2+\frac{1}{2}\times4^2=42$$

连续傅里叶级数的性质

[例] 试求周期矩形信号在其有效带宽($0\sim2\pi/\tau$)内谐波分量所具有的功率占整个信号功率的百分比。

其中: A=1， T_0=1/4， τ=1/20。

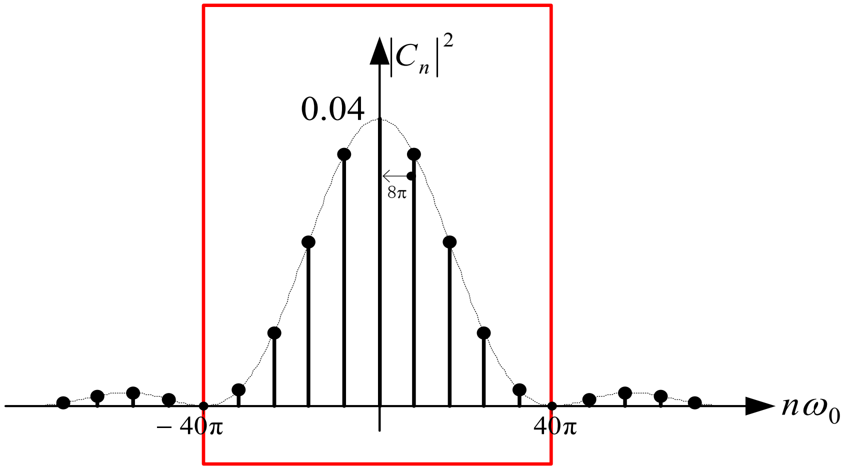


连续傅里叶级数的性质

$$C_n = \frac{A\tau}{T_0}\,\mathrm{Sa}(\frac{n\omega_0\tau}{2})$$

A=1， T_0=1/4， τ = 1/20， ω_0= 2π/T_0 = 8π

$$C_n = 0.2\,\mathrm{Sa}\,(n\omega_0 / 40) = 0.2\,\mathrm{Sa}\,(n\pi / 5)$$

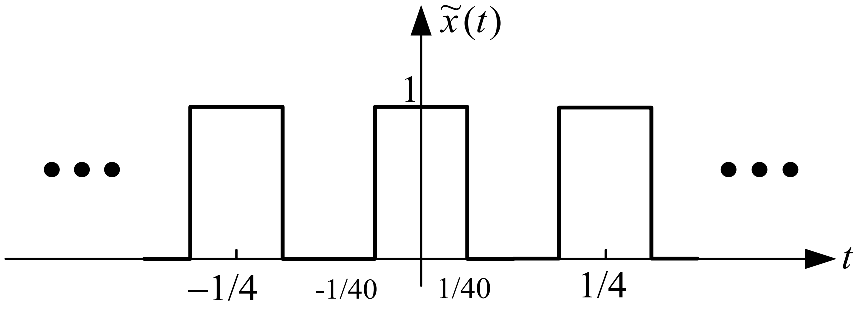


第一个零点出现在 $\frac{2\pi}{\tau} = 40\pi = 5\times 8\pi = 5\omega_0$

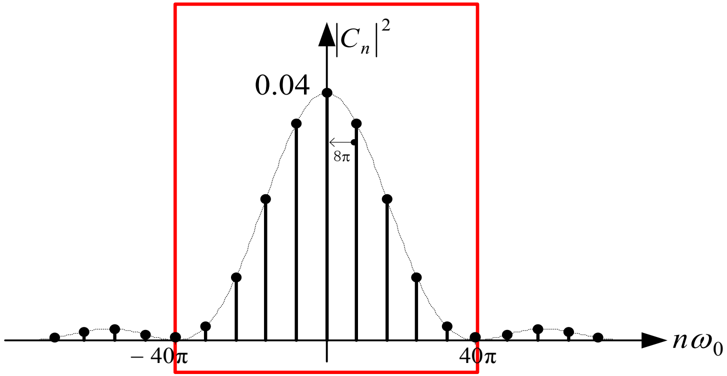
因此有效带宽内包含了直流分量和4个谐波分量

信号在有效带宽内的功率为 $P_1 = \sum_{n=-4}^{4} |C_n|^2 = C_0^2 + 2\sum_{n=1}^{4} |C_n|^2 = 0.1806$

连续傅里叶级数的性质



$(T_0=1/4，\ \tau=1/20，\ \omega_0=2\pi/T_0=8\pi)$



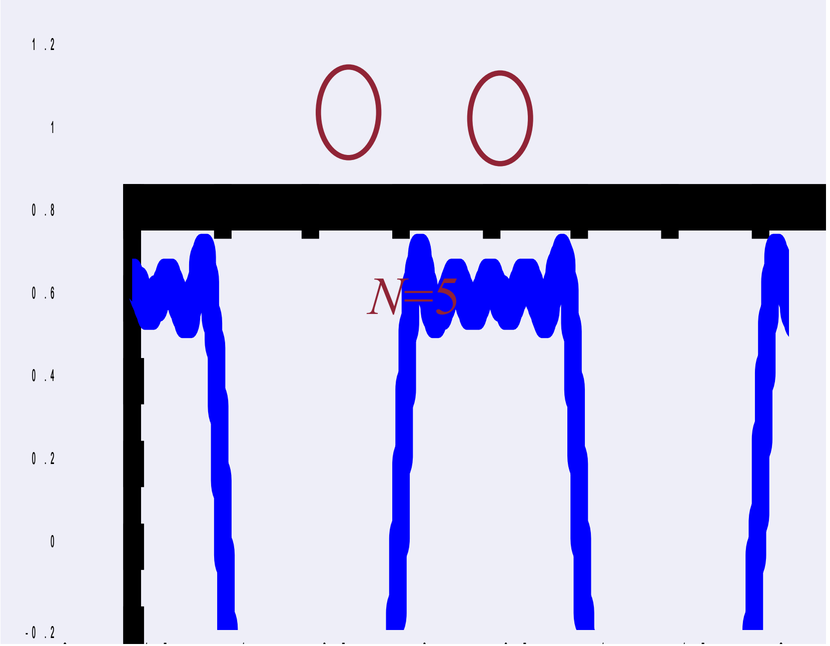
信号的功率为 $P=\dfrac{1}{T_0}\displaystyle\int_{-T_0/2}^{T_0/2}|\tilde{x}(t)|^2\,\mathrm{d}t=4\int_{-1/40}^{1/40}1^2\mathrm{d}t=\dfrac{1}{5}=0.2$

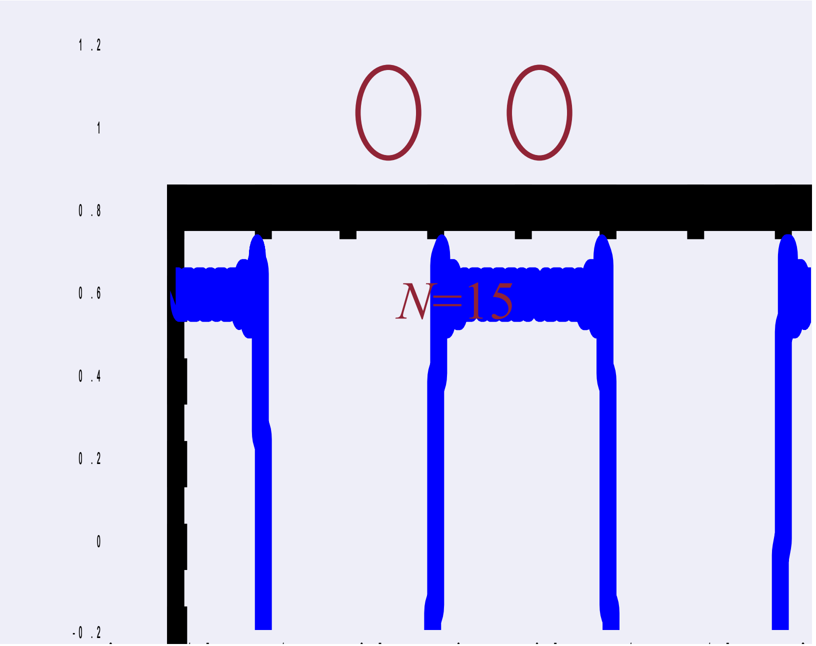
$$\frac{P_1}{P}=\frac{0.1806}{0.200}=90\%$$

周期矩形信号在有效带宽内各谐波分量的功率之和占整个信号功率的90%

吉布斯(Gibbs)现象

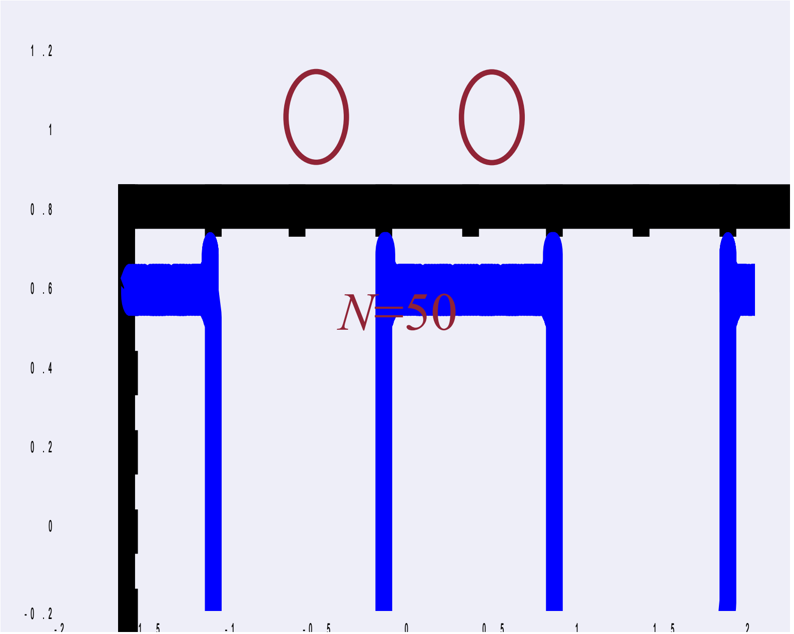
$$x_N(t)=\sum_{n=-N}^{N} C_n\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_0 t}=C_{-N}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}N\omega_0 t}+\ldots+C_{-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 t}+C_0+C_1\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}+\ldots+C_N\mathrm{e}^{\mathrm{j}N\omega_0 t}$$

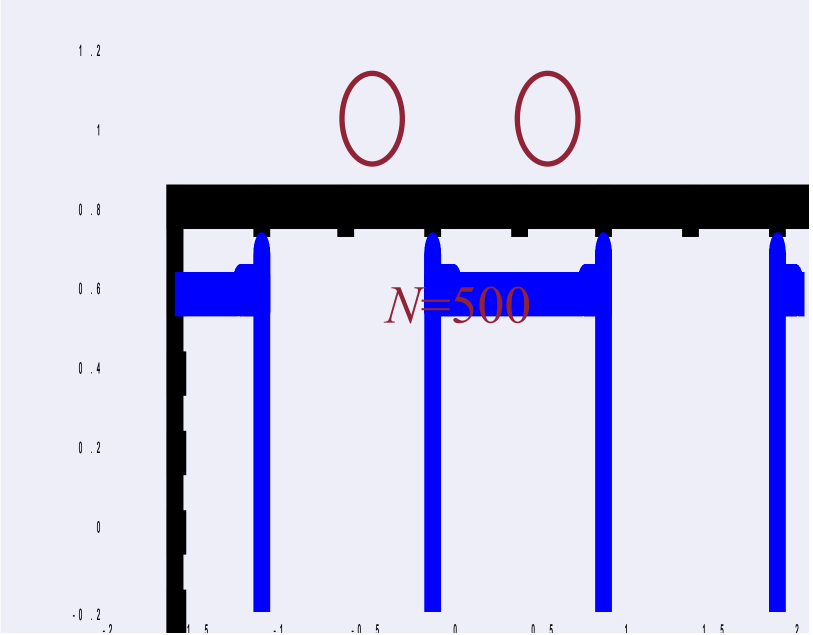




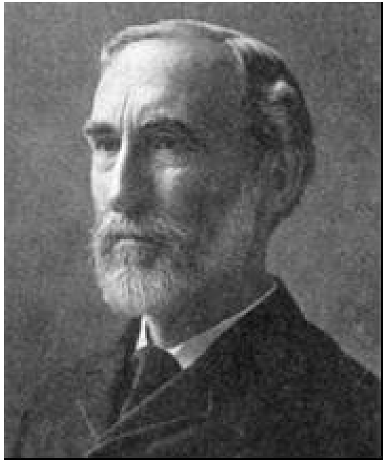
吉布斯(Gibbs)现象

$$x_N(t)=\sum_{n=-N}^{N} C_n \mathrm{e}^{jn\omega_0 t} = C_{-N}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}N\omega_0 t}+\ldots+C_{-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 t}+C_0+C_1\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}+\ldots+C_N\mathrm{e}^{\mathrm{j}N\omega_0 t}$$





吉布斯 (Josiah Gibbs, 1839-1903)



美国数学物理学家
耶鲁大学教授

1898年，美国物理学家米切尔森做了一个谐波分析仪，以计算任何一个周期信号$x(t)$的有限项(可达80项)傅里叶级数近似式。而当他测试方波信号时，得到一个令他吃惊的结果!

在不连续点附近部分和 $x_N(t)$ 呈现出起伏，起伏的峰值大小似乎不随N 增大而下降!他开始怀疑起他的仪器是否有不完善的地方，于是将这一问题写了一封信给吉布斯，吉布斯检查了这一结果，证明其正确，并于1899年发表了他的看法，即我们所说的吉布斯现象。

连续傅里叶级数的性质

谢　谢

本课程所引用的一些素材为主讲老师多年的教学积累，来源于多种媒体及同事、同行、朋友的交流，难以一一注明出处，特此说明并表示感谢！