北京交通大学

信号与系统

主讲人：陈后金

电子信息工程学院

为何进行连续时间信号与系统的复频域分析

已知描述某连续LTI系统的微分方程为$y''(t)+2y'(t)-3y(t)=x(t)$，输入信号 $x(t)=\mathrm{e}^{-t}u(t)$，初始状态为$y(0^-)=4$， $y'(0^-)=2$，则：

※ 如何分析连续时间LTI系统的完全响应?

时域：
零输入响应（齐次解）
+零状态响应 $[x(t)*h(t)]$

频域：
仅零状态响应，且要求输入信号绝对可积、系统稳定

※ 如何分析连续时间LTI系统的系统特性?

时域：
由系统的冲激响应$h(t)$描述

频域：
由系统的频率响应$H(\mathrm{j}\omega)$描述
但只适用于稳定系统.

复频域分析将有效解决上述问题

连续时间信号与系统的复频域分析

连续时间信号的复频域分析:

- ◆连续信号的复频域表示
- ◆常用单边拉普拉斯变换
- ◆单边拉普拉斯变换的性质
- ◆单边拉普拉斯反变换

连续时间LTI系统的复频域分析:

- ◆连续系统的复频域描述
- ◆系统函数与系统特性
- ◆系统响应的复频域分析
- ◆连续时间系统的模拟

连续时间信号的复频域表示

- 连续时间信号拉普拉斯变换
- 单边拉普拉斯变换的定义
- 单边拉普拉斯变换的收敛域

1．连续时间信号拉普拉斯变换

连续时间信号的复频域表示:信号$x(t)$表示成复指数e^{st}的线性组合。

$$x(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}X(s)e^{st}ds$$

$$s=\sigma+j\omega$$

$$X(s)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-st}dt$$

$X(s)$ 是复频率s的函数，称为信号的复频谱。

1. 连续时间信号拉普拉斯变换

拉普拉斯正变换：$X(s)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t$

拉普拉斯反变换：$x(t)=\dfrac{1}{2\pi\mathrm{j}}\int_{\sigma-\mathrm{j}\infty}^{\sigma+\mathrm{j}\infty}X(s)\mathrm{e}^{st}\,\mathrm{d}s$

※符号表示： $x(t)\xleftrightarrow{\mathscr{L}}X(s)$

$X(s)=\mathscr{L}[x(t)]$ $x(t)=\mathscr{L}^{-1}[X(s)]$

拉普拉斯（Laplace,Pierre-Simon,1749-1827）

法国数学家、天文学家。家境贫寒，靠邻居资助上学，1816年成为法兰西学院院士，次年任该院院长。主要研究天体力学和物理学，认为数学只是一种解决问题的工具，但在运用数学时创造和发展了许多新的数学方法。

主要成就：在《天体力学》中阐述了天体运行、地球形状、行星摄动、月离理论和三体问题等，引入著名的拉普拉斯方程。在《概率的分析理论》中，总结了当时整个概率论的研究，论述了概率在选举、审判调查、气象等方面的应用。

2. 单边拉普拉斯变换的定义

为了便于描述因果系统以及分析系统的完全响应，

常采用以下单边拉普拉斯(Laplace)变换:

$$X(s) = \int_{0^-}^{\infty} x(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t \qquad s = \sigma + \mathrm{j}\omega$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi\mathrm{j}} \int_{\sigma-\mathrm{j}\infty}^{\sigma+\mathrm{j}\infty} X(s)\mathrm{e}^{st}\mathrm{d}s$$

3. 单边拉普拉斯变换的收敛域

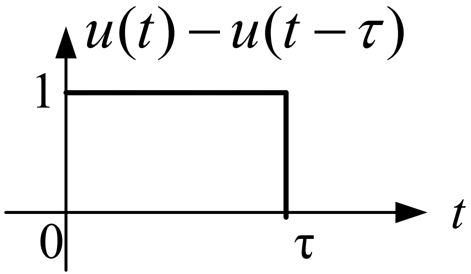
$$X(s)=\int_{0^-}^{\infty}x(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

- 若$x(t)$的单边拉普拉斯变换存在，上式积分需收敛。因此，单边拉普拉斯变换存在的充要条件为：

$$\int_{0^-}^{\infty}|x(t)\mathrm{e}^{-st}|\mathrm{d}t=\int_{0^-}^{\infty}|x(t)\mathrm{e}^{-\sigma t}|\mathrm{d}t=C,\qquad \sigma=\mathrm{Re}(s)$$

- 上式成立的σ的取值范围称为Laplace变换的收敛域，简称为ROC(Region Of Convergence)。

例：试求连续信号$u(t)-u(t-\tau)$ 的单边拉氏变换及其收敛域。



解：
$$X(s)=\int_{0^-}^{\infty}[u(t)-u(t-\tau)]\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

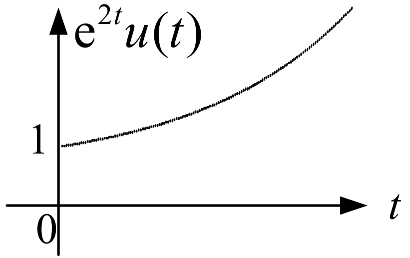
$$=\int_{0^-}^{\tau}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=-\frac{1}{s}\mathrm{e}^{-st}\Big|_{0^-}^{\tau}$$

$$=\frac{1}{s}(1-\mathrm{e}^{-s\tau})$$

$u(t)-u(t-\tau)$ 的收敛域为s全平面，即： $\mathrm{Re}(s)>-\infty$

例：试求解信号$e^{2t}u(t)$的单边拉氏变换及其收敛域。

解： $X(s)=\int_{0-}^{\infty} e^{2t}u(t)e^{-st}dt$



$$=\frac{1}{2-s}e^{(2-s)t}\Big|_{0^-}^{\infty}$$

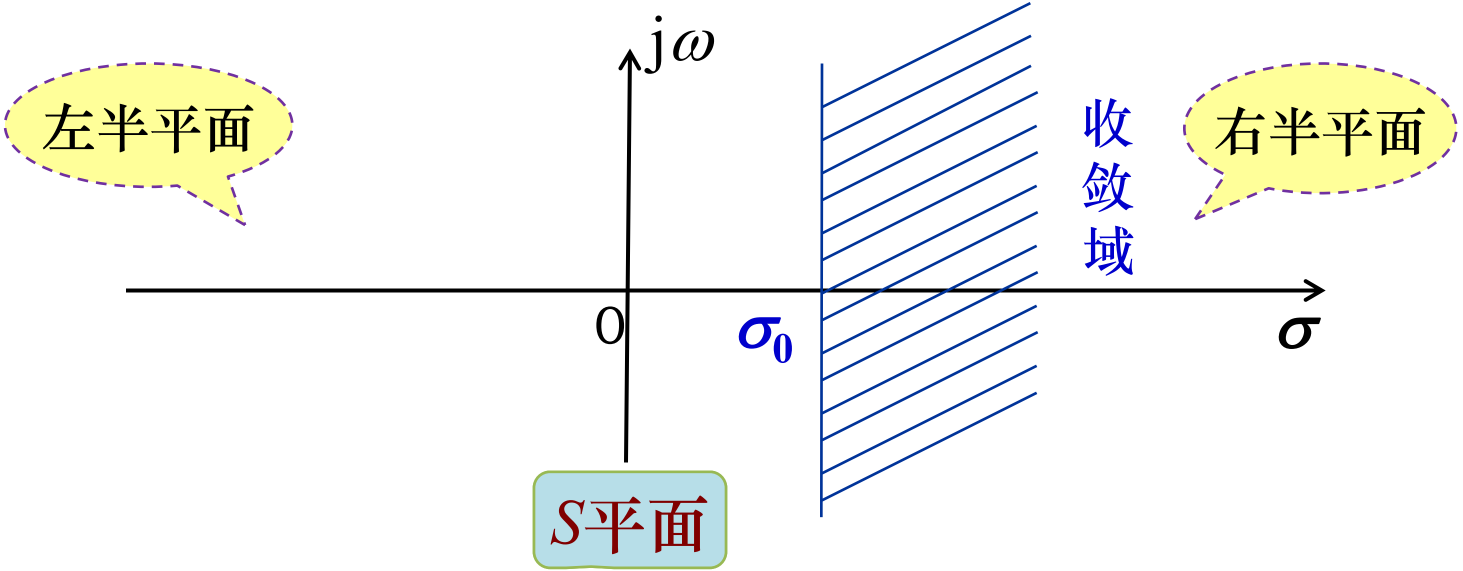
$$=\frac{1}{s-2} \qquad \mathrm{Re}(s)>2$$

$e^{2t}u(t)$的拉氏变换存在当且仅当 $\mathrm{Re}(s)>2$

3. 单边拉普拉斯变换的收敛域

☼ 单边拉氏变换的收敛域表示为$\mathrm{Re}(s) > \sigma_0$ (σ_0为实常数).

☼ 收敛域(ROC)可使用S复平面进行可视化表示.



谢 谢

本课程所引用的一些素材为主讲老师多年的教学积累，来源于多种媒体及同事、同行、朋友的交流，难以一一注明出处，特此说明并表示感谢!