北京交通大学

信号与系统

主讲人：陈后金

电子信息工程学院

状态空间变量分析

※ 系统状态变量分析的基本概念和普遍形式

※ 连续时间系统状态方程和输出方程的建立

※ 离散时间系统状态方程和输出方程的建立

※ 连续时间系统状态方程和输出方程的求解

※ **离散时间系统状态方程和输出方程的求解**

离散时间系统状态方程和输出方程的求解

※ **时域**求解状态方程和输出方程

※ **z域**求解状态方程和输出方程

※ 状态方程和输出方程的Matlab求解

离散系统的状态方程和输出方程的时域求解

[例] 已知描述某离散系统的状态方程和输出方程为

$$\begin{bmatrix} q_1[k+1] \\ q_2[k+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1[k] \\ q_2[k] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x[k]$$

$$\begin{bmatrix} y_1[k] \\ y_2[k] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1[k] \\ q_2[k] \end{bmatrix}$$

系统状态变量的初始状态及系统输入为：

$$\begin{bmatrix} q_1[0] \\ q_2[0] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad x[k] = u[k]$$

在时域求解该系统的状态变量和输出。

离散系统的状态方程和输出方程的时域求解

解：状态方程和输出方程写成矩阵形式：

$$\begin{cases} \boldsymbol{q}[k+1] = \boldsymbol{A}\boldsymbol{q}[k] + \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}[k] \\ \boldsymbol{y}[k] = \boldsymbol{C}\boldsymbol{q}[k] + \boldsymbol{D}\boldsymbol{x}[k] \end{cases}$$

其中 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} \end{bmatrix}$　$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$　$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

离散系统的状态方程和输出方程的时域求解

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\frac{1}{6} & \frac{5}{6}\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{q}[0]=\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}\quad x[k]=u[k]$$

求解状态方程： $\boldsymbol{q}[k+1]=\boldsymbol{A}\boldsymbol{q}[k]+\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}[k]$

k=0代入得： $\boldsymbol{q}[1]=\boldsymbol{A}\boldsymbol{q}[0]+\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}[0]$

$$=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\frac{1}{6} & \frac{5}{6}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\cdot 1=\begin{bmatrix}3\\ \frac{19}{6}\end{bmatrix}$$

k=1代入得： $\boldsymbol{q}[2]=\boldsymbol{A}\boldsymbol{q}[1]+\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}[1]$

$$=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\frac{1}{6} & \frac{5}{6}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\ \frac{19}{6}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\cdot 1=\begin{bmatrix}\frac{19}{6}\\ \frac{113}{36}\end{bmatrix}$$

k=2代入得： $\boldsymbol{q}[3]=\boldsymbol{A}\boldsymbol{q}[2]+\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}[2]$

$\vdots$

$$=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\frac{1}{6} & \frac{5}{6}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{19}{6}\\ \frac{113}{36}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\cdot 1=\begin{bmatrix}\frac{113}{36}\\ \frac{667}{216}\end{bmatrix}$$

便于计算机迭代求解

离散系统的状态方程和输出方程的时域求解

$$C=\begin{bmatrix}-1 & 5\\ 2 & 0\end{bmatrix}\quad D=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

$$q[0]=\begin{bmatrix}2\\ 3\end{bmatrix}\quad x[k]=u[k]$$

求解输出方程： $y[k]=Cq[k]+Dx[k]$

k=0代入得： $y[0]=Cq[0]+Dx[0]$

$$=\begin{bmatrix}-1 & 5\\ 2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}13\\ 4\end{bmatrix}$$

k=1代入得： $y[1]=Cq[1]+Dx[1]$

$$=\begin{bmatrix}-1 & 5\\ 2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\ \frac{19}{6}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{77}{6}\\ 6\end{bmatrix}$$

k=2代入得： $y[2]=Cq[2]+Dx[2]$

$$=\begin{bmatrix}-1 & 5\\ 2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{19}{6}\\ \frac{113}{36}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{451}{36}\\ \frac{19}{3}\end{bmatrix}$$

⋮

便于计算机迭代求解

离散系统的状态方程和输出方程的时域求解

离散系统的状态方程为：

$$\boldsymbol{q}[k+1]=\boldsymbol{A}\boldsymbol{q}[k]+\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}[k]$$

在给定系统的初始状态$\boldsymbol{q}[k_0]$后，可直接用迭代法进行求解。

$$\boldsymbol{q}[k_0+1]=\boldsymbol{A}\boldsymbol{q}[k_0]+\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}[k_0]$$

$$\boldsymbol{q}[k_0+2]=\boldsymbol{A}\boldsymbol{q}[k_0+1]+\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}[k_0+1]$$

$$=\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{q}[k_0]+\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}[k_0]+\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}[k_0+1]$$

$$\vdots$$

离散系统的状态方程和输出方程的时域求解

$$\boldsymbol{q}[k_0+k]=\boldsymbol{A}\boldsymbol{q}[k_0+k-1]+\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}[k_0+k-1] \qquad k>k_0$$

$$=\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{q}[k_0]+\sum_{i=0}^{k-1}\boldsymbol{A}^{k-1-i}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}[i]$$

若初始时刻k_0=0，则有:

$$\boldsymbol{q}[k]=\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{q}[0]+(\sum_{i=0}^{k-1}\boldsymbol{A}^{k-1-i}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}[i])\boldsymbol{u}[k-1]$$

离散系统的状态方程和输出方程的时域求解

将上式代入系统的输出方程得:

$$\boldsymbol{y}[k] = \boldsymbol{C}\boldsymbol{q}[k] + \boldsymbol{D}\boldsymbol{x}[k]$$

$$= \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{k}\boldsymbol{q}[0] + \left(\sum_{i=0}^{k-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{k-1-i}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}[i]\right)\boldsymbol{u}[k-1] + \boldsymbol{D}\boldsymbol{x}[k]$$

$$= \underbrace{\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{k}\boldsymbol{q}[0]}_{\boldsymbol{y}_{\mathrm{zi}}[k]} + \underbrace{\left(\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}[k-1] + \boldsymbol{D}\delta[k]\right) * \boldsymbol{x}[k]}_{\boldsymbol{y}_{\mathrm{zs}}[k]}$$

离散系统的状态方程和输出方程的时域求解

$\boldsymbol{q}[0]=0$时，系统的零状态响应为：

$$y_{zs}[k]=\left(\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}[k-1]+\boldsymbol{D}\delta[k]\right)*\boldsymbol{x}[k]$$

$\boldsymbol{h}[k]$

离散系统的状态方程和输出方程的z域求解

状态方程和输出方程：
$$\begin{cases} \boldsymbol{q}[k+1] = \boldsymbol{A}\boldsymbol{q}[k] + \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}[k] \\ \boldsymbol{y}[k] = \boldsymbol{C}\boldsymbol{q}[k] + \boldsymbol{D}\boldsymbol{x}[k] \end{cases}$$

将上式两边取z变换，得:
$$\begin{cases} z\boldsymbol{Q}(z) - z\boldsymbol{q}[0] = \boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}(z) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{X}(z) \\ \boldsymbol{Y}(z) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{Q}(z) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{X}(z) \end{cases}$$

$\boldsymbol{H}(z)$

整理得
$$\begin{cases} \boldsymbol{Q}(z) = (z\mathbf{I} - \boldsymbol{A})^{-1} z\boldsymbol{q}[0] + (z\mathbf{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}(z) \\ \boldsymbol{Y}(z) = \boldsymbol{C}(z\mathbf{I} - \boldsymbol{A})^{-1} z\boldsymbol{q}[0] + [\boldsymbol{C}(z\mathbf{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D}]\boldsymbol{X}(z) \end{cases}$$

$\boldsymbol{Y}_{\text{zi}}(z)$ $\quad$ $\boldsymbol{Y}_{\text{zs}}(z)$

然后再对$\boldsymbol{Q}(z)$和$\boldsymbol{Y}(z)$进行z反变换即可得到$\boldsymbol{q}[k]$和$\boldsymbol{y}[k]$。

离散系统的状态方程和输出方程的z域求解

[例] 已知描述某离散系统的状态方程和输出方程为

$$\begin{bmatrix} q_1[k+1] \\ q_2[k+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{1}{6} & \dfrac{5}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1[k] \\ q_2[k] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x[k]$$

$$\begin{bmatrix} y_1[k] \\ y_2[k] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1[k] \\ q_2[k] \end{bmatrix}$$

系统状态变量的初始状态及系统输入为:

$$\begin{bmatrix} q_1[0] \\ q_2[0] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad x[k] = u[k]$$

在z域求解该系统的完全响应。

离散系统的状态方程和输出方程的z域求解

解：状态方程和输出方程写成矩阵形式：

$$\begin{cases} \boldsymbol{q}[k+1] = \boldsymbol{A}\boldsymbol{q}[k] + \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}[k] \\ \boldsymbol{y}[k] = \boldsymbol{C}\boldsymbol{q}[k] + \boldsymbol{D}\boldsymbol{x}[k] \end{cases}$$

其中 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} \end{bmatrix}$ $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ $\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

离散系统的状态方程和输出方程的z域求解

解：零输入响应 $\quad Y_{zi}(z)=C(zI-A)^{-1}zq[0]$

$$=\begin{bmatrix}-1 & 5\\ 2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z & -1\\ \frac{1}{6} & z-\frac{5}{6}\end{bmatrix}^{-1}z\begin{bmatrix}2\\ 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{21}{1-\frac{z^{-1}}{2}}-\dfrac{8}{1-\frac{z^{-1}}{3}}\\ \dfrac{28}{1-\frac{z^{-1}}{2}}-\dfrac{24}{1-\frac{z^{-1}}{3}}\end{bmatrix}$$

z反变换得：

$$y_{zi}[k]=\begin{bmatrix}21\times(\frac{1}{2})^k-8\times(\frac{1}{3})^k\\ 28\times(\frac{1}{2})^k-24\times(\frac{1}{3})^k\end{bmatrix},k\geq 0$$

离散系统的状态方程和输出方程的z域求解

零状态响应：$Y_{zs}(z)=[C(z\mathbf{I}-A)^{-1}B+D]X(z)$

$$=\begin{bmatrix}-1 & 5\\ 2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z & -1\\ \frac{1}{6} & z-\frac{5}{6}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{1-z^{-1}}$$

即：

$$Y_{zs}(z)=\begin{bmatrix}\dfrac{12}{1-z^{-1}}+\dfrac{-18}{1-\dfrac{z^{-1}}{2}}+\dfrac{6}{1-\dfrac{z^{-1}}{3}}\\ \dfrac{6}{1-z^{-1}}+\dfrac{-24}{1-\dfrac{z^{-1}}{2}}+\dfrac{18}{1-\dfrac{z^{-1}}{3}}\end{bmatrix}$$

z反变换得：

$$y_{zs}[k]=\begin{bmatrix}[12-18\times(\frac{1}{2})^k+6\times(\frac{1}{3})^k]u[k]\\ [6-24\times(\frac{1}{2})^k+18\times(\frac{1}{3})^k]u[k]\end{bmatrix}$$

离散系统的状态方程和输出方程的z域求解

系统完全响应：$y[k] = y_{zi}[k] + y_{zs}[k]$

$$= \begin{bmatrix} 12 + 3\times(\frac{1}{2})^k - 2\times(\frac{1}{3})^k \\ 6 + 4\times(\frac{1}{2})^k - 6\times(\frac{1}{3})^k \end{bmatrix}, k \geq 0$$

离散系统的状态方程和输出方程的Matlab求解

[例] 已知描述某离散系统的状态方程和输出方程为

$$\begin{bmatrix} q_1[k+1] \\ q_2[k+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1[k] \\ q_2[k] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x[k]$$

$$\begin{bmatrix} y_1[k] \\ y_2[k] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1[k] \\ q_2[k] \end{bmatrix}$$

系统状态变量的初始状态及系统输入为:

$$\begin{bmatrix} q_1[0] \\ q_2[0] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad x[k] = u[k]$$

利用MATLAB计算该系统的**状态变量**和**输出**。

离散系统的状态方程和输出方程的Matlab求解

1.首先由sys=ss(A, B, C, D, [])获得状态方程的计算机表示模型。

2.由dlsim获得离散系统状态方程和输出方程的数值解。

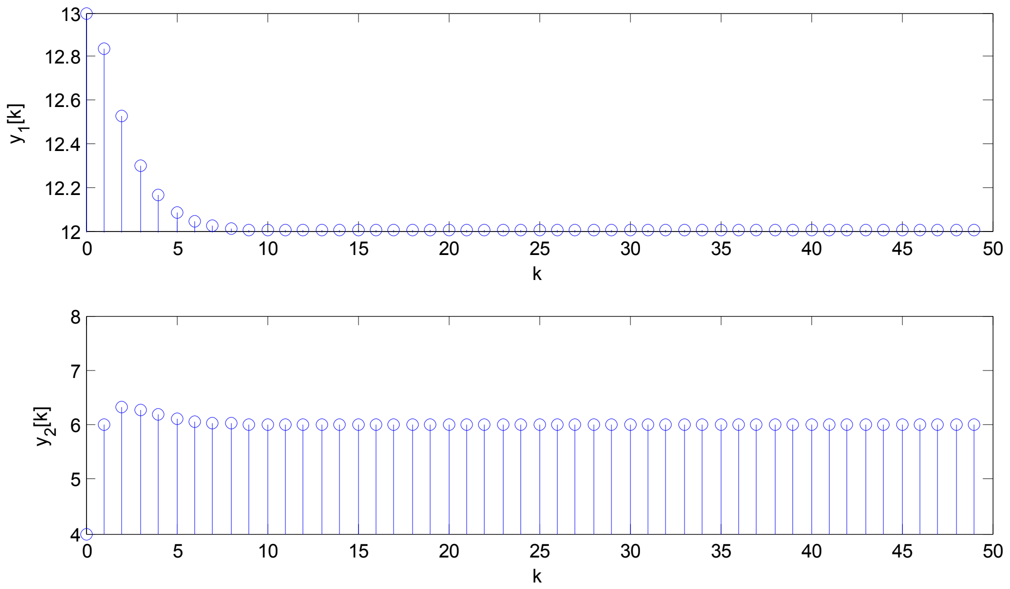
dlsim的调用形式为：[y, n, q]=dlsim(A, B, C, D, x, q0);

（或者sys=ss(A, B, C, D),然后dlsim(sys, x, q0)）

sys	由函数ss构造的状态方程模型
x(:,k)	系统第k个输入序列
q0	系统的初始状态(可缺省)
y (:,k)	系统的第k个输出
n	序列的下标
q	系统的状态

离散系统的状态方程和输出方程的Matlab求解

```
%上例利用Matlab求解，源程序如下：
A=[0 1;-1/6  5/6];B=[0;1];
C=[-1 5; 2 0];D=zeros(2,1);
q0=[2;3];
N=50;k=0:N-1;x=ones(1,N);
[y q]=dlsim(A,B,C,D,x,q0);
subplot(2,1,1);
y1=y(:,1)';
stem(k,y1);
xlabel('k');
ylabel('y_{1}[k]');
subplot(2,1,2);
y2=y(:,2)';
stem(k,y2);
xlabel('k');
ylabel('y_{2}[k]');
```



*q*和*y*即为状态变量和系统输出的数值解。

在Matlab的工作区，可见*q*和*y*是50x2的矩阵。

谢 谢

本课程所引用的一些素材为主讲老师多年的教学积累，来源于多种媒体及同事、同行、朋友的交流，难以一一注明出处，特此说明并表示感谢！