北京交通大學

信号与系统

主讲人：陈后金

电子信息工程学院

单边z变换的性质

- ▶ 线性特性
- ▶ 位移特性
- ▶ 卷积特性
- ▶ 求和特性
- ▶ 指数加权特性
- ▶ z域微分特性
- ▶ 初值和终值特性

单边z变换的性质

▶ 指数加权特性

$$x[k]u[k] \xleftrightarrow{\mathscr{Z}} X(z)\,, \qquad |z| > R_x$$

$$a^k x[k]u[k] \xleftrightarrow{\mathscr{Z}} X(z/a)\,, \qquad |z| > |a|R_x$$

若序列被指数a^k加权, 则加权序列的z变换展缩 a 倍，因此也称为z域尺度变换特性。

[例] 试求指数加权余弦序列的z变换 $\mathscr{Z}\left\{\alpha^k \cos(\Omega_0 k)u[k]\right\}$

解：因为

$$\cos(\Omega_0 k)u[k] \xleftrightarrow{\mathscr{Z}} \frac{1-z^{-1}\cos\Omega_0}{1-2z^{-1}\cos\Omega_0+z^{-2}}, \qquad |z|>1$$

根据指数加权特性，可得

$$\alpha^k\cos(\Omega_0 k)u[k] \xleftrightarrow{\mathscr{Z}} \frac{1-(z/\alpha)^{-1}\cos\Omega_0}{1-2(z/\alpha)^{-1}\cos\Omega_0+(z/\alpha)^{-2}}$$

$$=\frac{1-\alpha z^{-1}\cos\Omega_0}{1-2\alpha z^{-1}\cos\Omega_0+\alpha^2 z^{-2}}, \quad |z|>|\alpha|$$

单边z变换的性质

► z域微分特性

$$x[k]u[k] \xleftrightarrow{\mathscr{Z}} X(z), \qquad |z| > R_x$$

$$kx[k] \xleftrightarrow{\mathscr{Z}} -z\frac{\mathrm{d}[X(z)]}{\mathrm{d}z}, \qquad |z| > R_x$$

若序列$x[k]$被序列k线性加权，则线性加权后序列的z变换为原序列z变换的微分乘以$-z$。

[例] 求序列$x[k]=ka^ku[k]$的单边z变换及其收敛域。

解：

$$a^k u[k] \xleftrightarrow{\mathscr{Z}} \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}, \qquad |z|>|a|$$

利用z域微分特性，可得

$$\mathscr{Z}\{ka^k u[k]\} = -z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{z}{z-a}\right)$$

$$= \frac{az}{(z-a)^2} = \frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}, \quad |z|>|a|$$

单边z变换的性质

▶ 初值和终值定理

若 $x[k]u[k] \xleftrightarrow{\mathscr{Z}} X(z) \quad |z| > R_x$

则 $x[0] = \lim\limits_{z \to +\infty} X(z)$

若$(z-1)X(z)$的收敛域包含单位圆，则

$$x[+\infty] = \lim_{z \to 1}(z-1)X(z)$$

单边z变换的性质

▶ 初值和终值定理

$$x[0]=\lim_{z\to\infty}X(z)$$

证明：
$$X(z)=\sum_{k=0}^{\infty}x[k]z^{-k}=x[0]+x[1]z^{-1}+x[2]z^{-2}+\cdots$$

当$z\to+\infty$时，上式右边只剩下一项$x[0]$，因此有

$$x[0]=\lim_{z\to+\infty}X(z)$$

[例] 已知$X(z) = 1/(1-a z^{-1})$， $|z| > |a|$, 求$x[0]$， $x[1]$和 $x[\infty]$。

解： $$x[0]=\lim_{z\to+\infty}X(z)=\lim_{z\to+\infty}\frac{1}{1-az^{-1}}=1$$

根据位移特性有

$$x[k+1]u[k] \xleftrightarrow{\mathscr{Z}} z\{X(z)-x[0]\}$$

对上式应用初值定理，有

$$x[1]=\lim_{z\to+\infty}z\{X(z)-x[0]\}=\lim_{z\to+\infty}\frac{a}{1-az^{-1}}=a$$

当$|a|<1$时，$(z-1)X(z)$的收敛域包含单位圆，由终值定理

$$x[+\infty]=\lim_{z\to 1}(z-1)X(z)=\lim_{z\to 1}\frac{z-1}{1-az^{-1}}=0$$

[例] 求以下单边周期序列的单边z变换

$$(1)\quad x[k]=\begin{cases}1, & k=2n, \quad n=0,\ 1,\ 2,\cdots \\ 0, & k=2n+1, \quad n=0,\ 1,\ 2,\cdots\end{cases}$$

$$(2)\quad y[k]=\sum_{i=0}^{k}(-1)^{i}x[k-i]$$

解:

(1) $x[k]$可表示为

$$x[k]=\delta[k]+\delta[k-2]+\delta[k-4]+\cdots$$

利用$\delta[k]$的z变换及因果序列的位移特性，可得

$$X(z)=1+z^{-2}+z^{-4}+\cdots=\frac{1}{1-z^{-2}}\qquad |z|>1$$

[例] 求以下单边周期序列的单边z变换

$$(1)\quad x[k]=\begin{cases}1, & k=2n, \quad n=0,\ 1,\ 2,\cdots \\ 0, & k=2n+1, \quad n=0,\ 1,\ 2,\cdots\end{cases}$$

$$(2)\quad y[k]=\sum_{i=0}^{k}(-1)^{i}x[k-i]$$

解：

(2) 将$y[k]$改写为

$$y[k]=\sum_{i=0}^{k}(-1)^{i}x[k-i]=(-1)^{k}u[k]*x[k]$$

由(1)题的结果及卷积特性，可得

$$Y(z)=\frac{1}{(1+z^{-1})(1-z^{-2})} \qquad |z|>1$$

[例] 求以下单边周期序列的单边z变换

$$(1)\quad x[k]=\begin{cases}1, & k=2n, \quad n=0,\ 1,\ 2,\cdots\\ 0, & k=2n+1, \quad n=0,\ 1,\ 2,\cdots\end{cases}$$

$$(2)\quad y[k]=\sum_{i=0}^{k}(-1)^{i}x[k-i]$$

解：周期为N的单边周期序列$x_N[k]u[k]$可以表示为第一个周期序列$x_1[k]$及其位移序列$x_1[k-lN]$的线性组合，即

$$x_N[k]u[k]=\sum_{l=0}^{\infty}x_1[k-lN]$$

若计算出$x_1[k]$的z变换$X_1(z)$，利用因果序列的位移特性和线性特性，可求得其单边周期序列的z变换为

$$\mathcal{Z}\{x_N[k]u[k]\}=\sum_{l=0}^{\infty}X_1(z)z^{-Nl}=\frac{X_1(z)}{1-z^{-N}}, \quad |z|>1$$

谢 谢

本课程所引用的一些素材为主讲老师多年的教学积累，来源于多种媒体及同事、同行、朋友的交流，难以一一注明出处，特此说明并表示感谢！