北京交通大学

信号与系统

主讲人：陈后金

电子信息工程学院

常见信号单边拉普拉斯变换

- 冲激信号
- 阶跃信号
- 指数类信号
- 正弦信号
- 斜坡信号

1. 冲激信号

※ 冲激信号 $\delta(t)$, $\delta^{(n)}(t)$

$$\mathscr{L}[\delta(t)] = \int_{0^-}^{\infty} \delta(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-st}\Big|_{t=0} = 1 \qquad \mathrm{Re}(s) > -\infty$$

$$\delta(t) \xleftrightarrow{\mathscr{L}} 1, \qquad \mathrm{Re}(s) > -\infty$$

同理可得:

$$\delta^{(n)}(t) \xleftrightarrow{\mathscr{L}} s^n, \qquad \mathrm{Re}(s) > -\infty$$

2. 阶跃信号

※ 阶跃信号 $u(t)$

$$\mathscr{L}[u(t)] = \int_{0^-}^{\infty} u(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t = \int_{0^-}^{\infty} \mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

$$= -\frac{1}{s}\mathrm{e}^{-st}\Big|_{0^-}^{\infty} = \frac{1}{s} \qquad \mathrm{Re(s)} > 0$$

$$u(t) \xleftrightarrow{\mathscr{L}} \frac{1}{s}, \qquad \mathrm{Re}(s) > 0$$

3. 指数类信号

※ 指数类信号 $e^{\lambda t}u(t)$， λ可为任一复数

$$\mathscr{L}[e^{\lambda t}u(t)] = \int_{0^-}^{\infty} e^{\lambda t} e^{-st} dt$$

$$= -\frac{1}{s-\lambda} e^{(\lambda - s)t} \Big|_{0^-}^{\infty} = \frac{1}{s-\lambda} \qquad \mathrm{Re}(s) > \mathrm{Re}(\lambda)$$

$$e^{\lambda t}u(t) \xleftrightarrow{\mathscr{L}} \frac{1}{s-\lambda}, \quad \mathrm{Re}(s) > \mathrm{Re}(\lambda)$$

3. 指数类信号

$$e^{\lambda t}u(t) \xleftrightarrow{\mathscr{L}} \frac{1}{s-\lambda}, \quad \mathrm{Re}(s) > \mathrm{Re}(\lambda)$$

当$\lambda=\alpha$时， 实指数信号

$$e^{\alpha t}u(t) \xleftrightarrow{\mathscr{L}} \frac{1}{s-\alpha} \qquad \mathrm{Re}(s) > \alpha$$

当$\lambda=\mathrm{j}\omega_0$时，虚指数信号

$$e^{\mathrm{j}\omega_0 t}u(t) \xleftrightarrow{\mathscr{L}} \frac{1}{s-\mathrm{j}\omega_0} \qquad \mathrm{Re}(s) > 0$$

当$\lambda=\alpha+\mathrm{j}\omega_0$时，复指数信号

$$e^{(\alpha+\mathrm{j}\omega_0)t}u(t) \xleftrightarrow{\mathscr{L}} \frac{1}{s-(\alpha+\mathrm{j}\omega_0)} \qquad \mathrm{Re}(s) > \alpha$$

4. 正弦信号

※ 正弦信号 $\cos(\omega_0 t)u(t), \sin(\omega_0 t)u(t)$

$$\cos(\omega_0 t)\,u(t) = \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}u(t)$$

$$\xleftrightarrow{\mathscr{L}} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s - j\omega_0} + \frac{1}{s + j\omega_0}\right) = \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}, \quad \mathrm{Re}(s) > 0$$

$$\sin(\omega_0 t)\,u(t) = \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j}u(t)$$

$$\xleftrightarrow{\mathscr{L}} \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{s - j\omega_0} - \frac{1}{s + j\omega_0}\right) = \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}, \quad \mathrm{Re}(s) > 0$$

5. 斜坡信号

※ 斜坡信号 $tu(t)$

$$\mathscr{L}[tu(t)] = \int_{0^-}^{\infty} t\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

$$= -\frac{t}{s}(\mathrm{e}^{-st})\Big|_{0^-}^{\infty} + \frac{1}{s}\int_{0^-}^{\infty} \mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{s}\int_{0^-}^{\infty} \mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t = -\frac{1}{s^2}\mathrm{e}^{-st}\Big|_{0^-}^{\infty} = \frac{1}{s^2} \qquad \mathrm{Re}(s) > 0$$

$$tu(t) \xleftrightarrow{\mathscr{L}} \frac{1}{s^2}, \quad \mathrm{Re}(s) > 0$$

谢 谢

本课程所引用的一些素材为主讲老师多年的教学积累，来源于多种媒体及同事、同行、朋友的交流，难以一一注明出处，特此说明并表示感谢！