北京交通大學

信号与系统

主讲人：陈后金

电子信息工程学院

离散时间LTI系统响应的频域分析

- 非周期序列通过离散LTI系统的响应
- 周期序列通过离散LTI系统的响应

离散时间LTI系统响应的频域分析

➢ 非周期序列通过离散LTI系统的响应

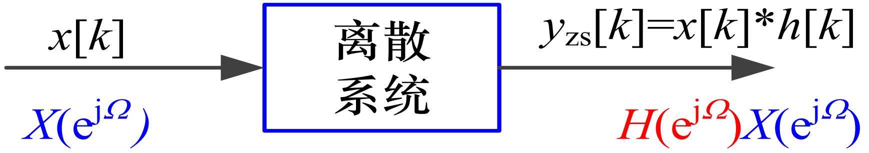
$$x[k] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\Omega})\, \underline{e^{j\Omega k}}\, d\Omega$$

$$y_{zs}[k] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\Omega})\, \underline{H(e^{j\Omega})e^{j\Omega k}}\, d\Omega$$

$$Y_{zs}(e^{j\Omega}) = H(e^{j\Omega})X(e^{j\Omega})$$

离散时间LTI系统响应的频域分析

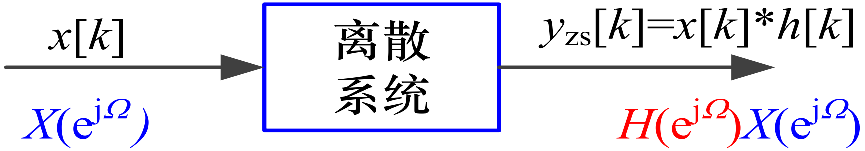
✓ 系统零状态响应频域分析方法与卷积积分法的关系：



- 两种分析方法实质相同，只不过是表达信号的基本信号不同。
- DTFT的时域卷积定理是联系两者的桥梁。

离散时间LTI系统响应的频域分析

➢ $H(e^{j\Omega})$ 的物理意义



离散LTI系统把输入信号频谱$X(e^{j\Omega})$ 改变成$H(e^{j\Omega})$ $X(e^{j\Omega})$，改变的规律完全由$H(e^{j\Omega})$ 决定。

$H(e^{j\Omega})$反映了系统对输入信号不同频率分量的传输特性。

例： 已知描述某离散时间LTI系统的差分方程为

$$y[k]-0.75y[k-1]+0.125y[k-2]=4x[k]+3x[k-1],$$

输入 $x[k]=(0.75)^k u[k]$，求该系统的零状态响应 $y_{zs}[k]$。

解： 对差分方程两边进行DTFT可得

$$(1-0.75\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega}+0.125\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\Omega})Y_{zs}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})=(4+3\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega})X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})$$

根据离散系统频率响应的定义

$$H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})=\frac{Y_{zs}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})}{X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})}=\frac{4+3\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega}}{1-0.75\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega}+0.125\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\Omega}}$$

例： 已知描述某离散时间LTI系统的差分方程为

$$y[k]-0.75y[k-1]+0.125y[k-2]=4x[k]+3x[k-1],$$

输入 $x[k]=(0.75)^k u[k]$，求该系统的零状态响应 $y_{zs}[k]$。

解： 系统的零状态响应 $y_{zs}[k]$ 的频谱函数 $Y_{zs}(e^{j\Omega})$ 为

$$Y_{zs}(e^{j\Omega})=H(e^{j\Omega})X(e^{j\Omega})=\frac{4+3e^{-j\Omega}}{(1-0.25e^{-j\Omega})(1-0.5e^{-j\Omega})(1-0.75e^{-j\Omega})}$$

$$=\frac{8}{1-0.25e^{-j\Omega}}+\frac{-40}{1-0.5e^{-j\Omega}}+\frac{4.5}{1-0.75e^{-j\Omega}}$$

对 $Y_{zs}(e^{j\Omega})$ 进行IDTFT可得

$$y_{zs}[k]=8(0.25)^k u[k]-40(0.5)^k u[k]+4.5(0.75)^k u[k]$$

离散时间LTI系统响应的频域分析

➢ 周期序列通过LTI系统的响应

$$\tilde{x}[k] = \frac{1}{N}\sum_{m=<N>} \tilde{X}[m]\,\underline{e^{j\frac{2\pi m}{N}k}}$$

$$\tilde{y}[k] = \frac{1}{N}\sum_{m=<N>} \tilde{X}[m]\;\underline{H(e^{j\frac{2\pi m}{N}})e^{j\frac{2\pi m}{N}k}}$$

离散时间LTI系统响应的频域分析

- 优点：求解系统的零状态响应时，可以直观地体现信号通过系统后信号频谱的改变，解释激励与响应时域波形的差异，物理概念清楚。
- 不足：

（1）只能求解系统的零状态响应，系统的零输入响应仍需按时域方法求解。

（2）若系统频率响应(或激励信号)的傅里叶变换不存在，则无法利用频域分析法。

- 解决方法：采用z变换

谢 谢

本课程所引用的一些素材为主讲老师多年的教学积累，来源于多种媒体及同事、同行、朋友的交流，难以一一注明出处，特此说明并表示感谢！