北京交通大學

信号与系统

主讲人：陈后金

电子信息工程学院

连续时间LTI系统响应的频域分析

- 非周期信号通过连续LTI系统的频域响应
- 周期信号通过连续LTI系统的频域响应
- 连续时间LTI系统的频域分析应用举例

连续时间LTI系统响应的频域分析

➢ 非周期信号通过连续LTI系统的零状态响应

$$e^{j\omega t} \longrightarrow \boxed{H(j\omega)} \longrightarrow e^{j\omega t}H(j\omega)$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)\,\underline{e^{j\omega t}}\,d\omega$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$y_{zs}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)\,\underline{H(j\omega)e^{j\omega t}}\,d\omega$$

$$\begin{array}{ccc} x(t) & & y_{zs}(t) \\ \longrightarrow & \boxed{H(j\omega)} & \longrightarrow \\ \mathbf{X(j\omega)} & & \mathbf{H(j\omega)X(j\omega)} \end{array}$$

$$Y_{zs}(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega)$$

例　已知描述某LTI系统的微分方程为

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 3x'(t)+4x(t),$$

输入激励 $x(t) = \mathrm{e}^{-3t}u(t)$，求系统的零状态响应$y_{zs}(t)$。

解：　由于输入激励$x(t)$的频谱函数为

$$X(\mathrm{j}\omega) = \frac{1}{\mathrm{j}\omega + 3}$$

系统的频率响应由微分方程可得

$$H(\mathrm{j}\omega) = \frac{3(\mathrm{j}\omega)+4}{(\mathrm{j}\omega)^2 + 3(\mathrm{j}\omega) + 2} = \frac{3(\mathrm{j}\omega)+4}{(\mathrm{j}\omega+1)(\mathrm{j}\omega+2)}$$

例 已知描述某LTI系统的微分方程为

$$y''(t)+3y'(t)+2y(t)=3x'(t)+4x(t),$$

输入激励 $x(t)=\mathrm{e}^{-3t}u(t)$，求系统的零状态响应$y_{zs}(t)$。

解：系统的零状态响应$y_{zs}(t)$的频谱函数$Y_{zs}(\mathrm{j}\omega)$为

$$Y_{zs}(\mathrm{j}\omega)=X(\mathrm{j}\omega)H(\mathrm{j}\omega)=\frac{3(\mathrm{j}\omega)+4}{(\mathrm{j}\omega+1)(\mathrm{j}\omega+2)(\mathrm{j}\omega+3)}$$

$$=\frac{1/2}{\mathrm{j}\omega+1}+\frac{2}{\mathrm{j}\omega+2}-\frac{5/2}{\mathrm{j}\omega+3}$$

$$y_{zs}(t)=\mathscr{F}^{-1}[Y_{zs}(\mathrm{j}\omega)]=[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}+2\mathrm{e}^{-2t}-\frac{5}{2}\mathrm{e}^{-3t}]u(t)$$

例 已知描述某LTI系统的微分方程为

$$y''(t)+3y'(t)+2y(t)=3x'(t)+4x(t),$$

输入激励(1)$x_1(t)=\cos(2t)u(t)$ (2)$x_2(t)=\mathrm{e}^{2t}u(t)$,

试利用频域法分析系统的零状态响应。

分析: (1)由于 $$X_1(\mathrm{j}\omega)=\frac{\pi}{2}[\delta(\omega-2)+\delta(\omega+2)]+\frac{\mathrm{j}\omega}{4-\omega^2}$$

所以

$$Y_{1,\mathrm{zs}}(\mathrm{j}\omega)=X_1(\mathrm{j}\omega)H(\mathrm{j}\omega)$$

$$=\frac{\pi\delta(\omega-2)H(\mathrm{j}2)}{2}+\frac{\pi\delta(\omega+2)H(-\mathrm{j}2)}{2}+\frac{\mathrm{j}\omega H(\mathrm{j}\omega)}{4-\omega^2}$$

对上式中的第三项进行Fourier反变换是一项困难的任务。

例　已知描述某LTI系统的微分方程为

$$y''(t)+3y'(t)+2y(t)=3x'(t)+4x(t),$$

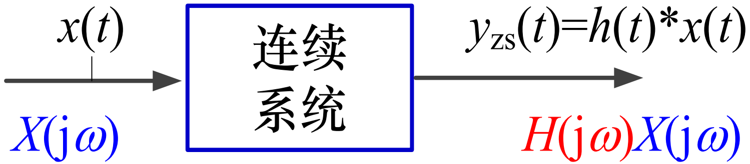
输入激励(1)$x_1(t)=\cos(2t)u(t)$ (2)$x_2(t)=\mathrm{e}^{2t}u(t)$，试利用频域法分析系统的零状态响应。

分析: (2) 由于$x_2(t)=\mathrm{e}^{2t}u(t)$ 的Fourier变换**不存在**，

所以不能用频域法求解系统的零状态响应。

连续时间LTI系统响应的频域分析

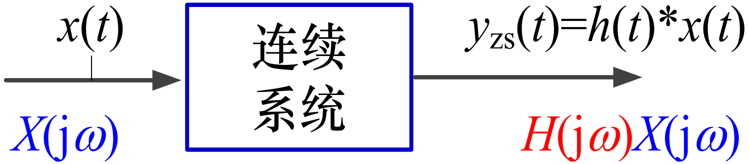
✓ 系统零状态响应频域分析方法与卷积积分法的关系：



- 两种分析方法实质相同，只不过是表达信号的基本信号不同。
- Fourier变换的时域卷积定理是联系两者的桥梁。

连续时间LTI系统响应的频域分析

- $H(\mathrm{j}\omega)$ 的物理意义

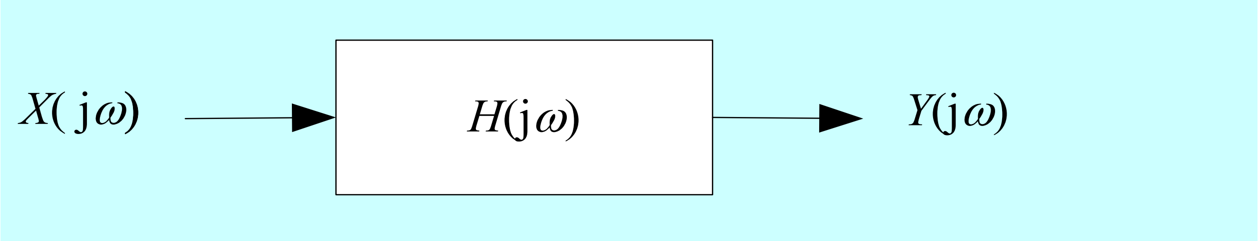


LTI系统把输入信号频谱$X(\mathrm{j}\omega)$ 改变成$H(\mathrm{j}\omega)$ $X(\mathrm{j}\omega)$ ，改变的规律完全由$H(\mathrm{j}\omega)$ 决定。

$H(\mathrm{j}\omega)$反映了系统对输入信号不同频率分量的传输特性。

连续时间LTI系统响应的频域分析

➢ 模拟滤波器

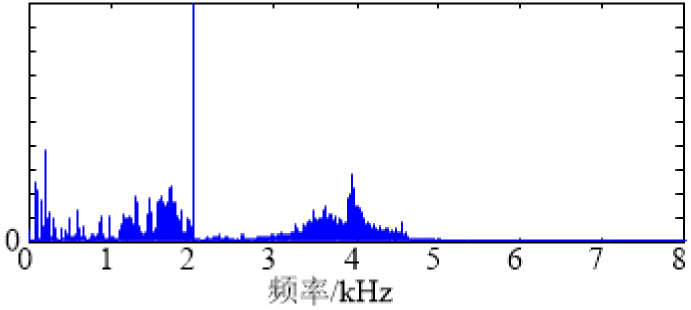


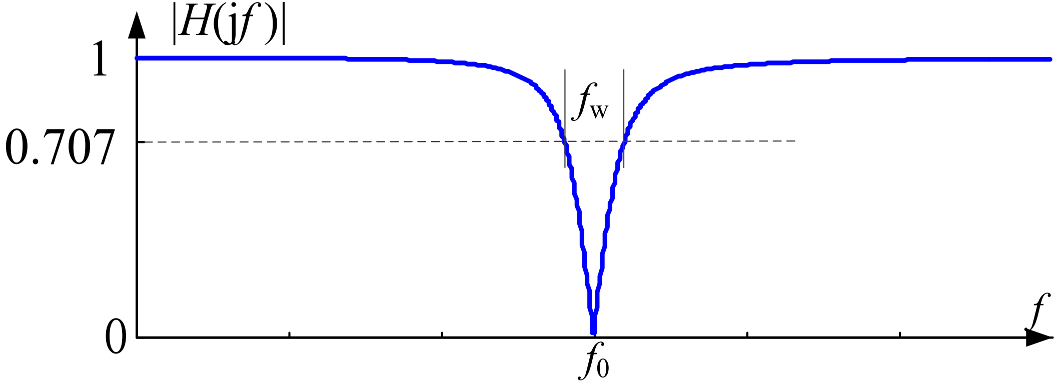
$$Y(\mathrm{j}\omega)=H(\mathrm{j}\omega)X(\mathrm{j}\omega)$$

模拟滤波器是指能使连续信号中一部分频率分量通过，而使另一部分频率分量很少通过或不能通过的连续系统。

例：某段被2kHz噪声干扰的音乐信号频谱如下图所示，试用滤波器滤除噪声的影响。

被噪声干扰的音乐信号频谱

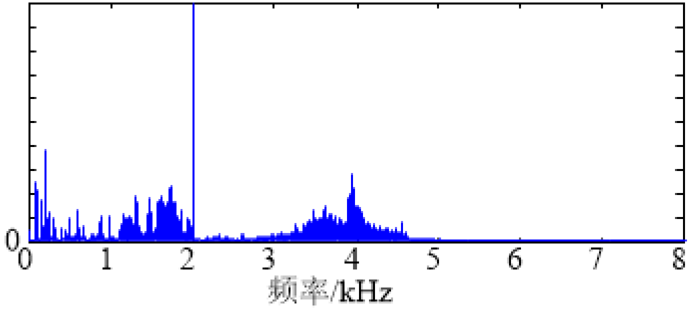


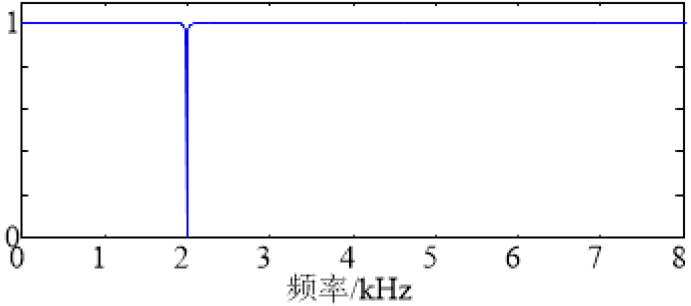


二阶带阻滤波器的幅度响应

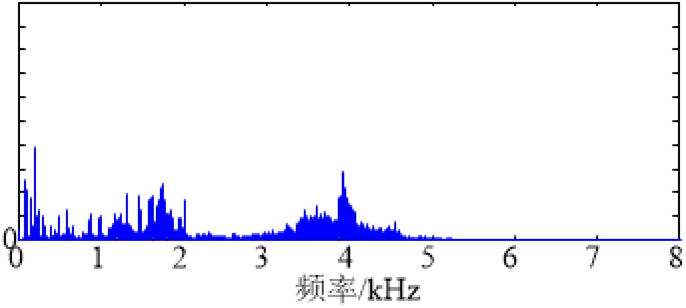
例：某段被2kHz噪声干扰的音乐信号频谱如下图所示，试用滤波器滤除噪声的影响。

被噪声干扰的音乐信号频谱





f_0=2kHz, f_w=10Hz的2阶带阻滤波器幅度响应



滤波后音乐信号频谱

连续时间LTI系统响应的频域分析

- 周期信号通过LTI系统的零状态响应

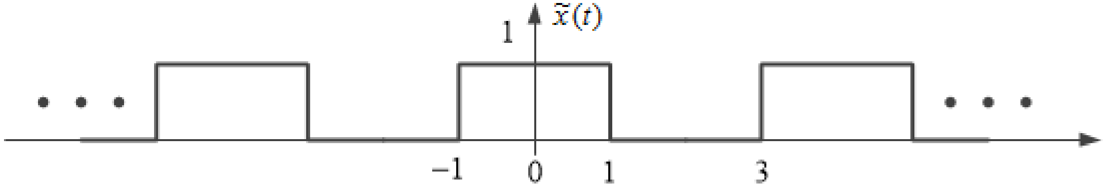
$$e^{j\omega t} \longrightarrow \boxed{\text{LTI}} \longrightarrow e^{j\omega t}H(j\omega)$$

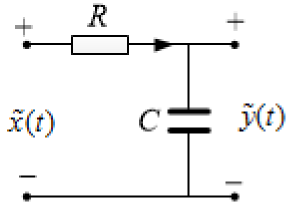
$$\tilde{x}(t) = \sum_{n} C_n\, e^{jn\omega_0 t}$$

$$\Downarrow$$

$$\tilde{y}_{zs}(t) = \sum_{n} C_n\, H(jn\omega_0)e^{jn\omega_0 t}$$

例：试求如图所示周期为4的矩形波通过系统的响应。





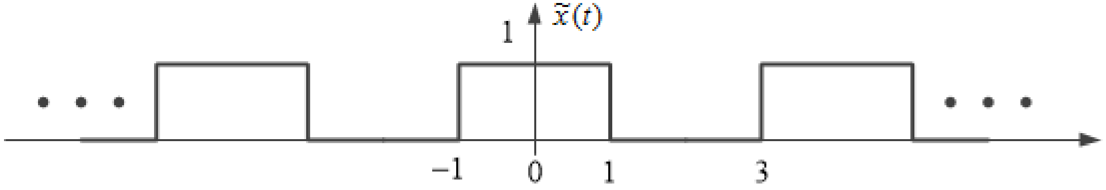
解： 对于周期矩形信号，其Fourier系数为 $C_n = 0.5\mathrm{Sa}\left(0.5\pi n\right)$

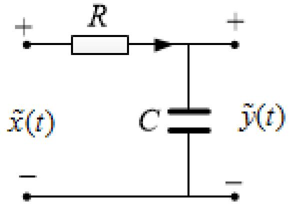
系统的频率响应 $H(\mathrm{j}\omega) = \dfrac{1/\,\mathrm{j}\omega C}{R+1/\,\mathrm{j}\omega C} = \dfrac{1}{1+\mathrm{j}\omega RC}$

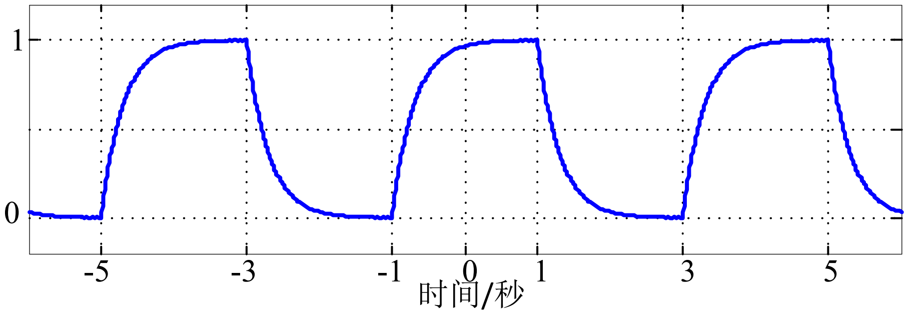
系统的输出 $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} C_n \cdot H(\mathrm{j}n\omega_0)\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_0 t}$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} 0.5\mathrm{Sa}(0.5\pi n)e^{\mathrm{j}n\pi t/2}/(1+\mathrm{j}0.5n\pi RC)$$

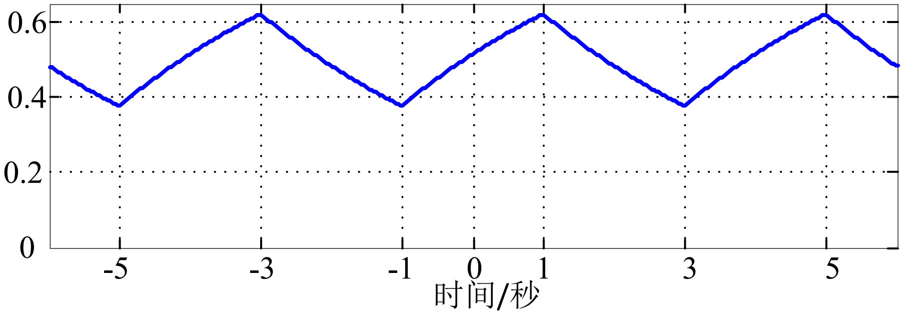
例：试求如图所示周期为4的矩形波通过系统的响应。







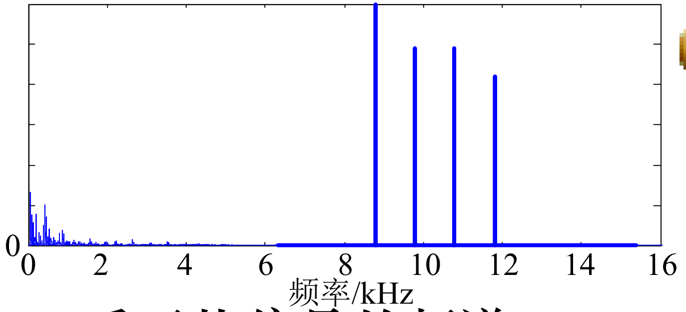
RC=0.3 秒时系统的输出响应



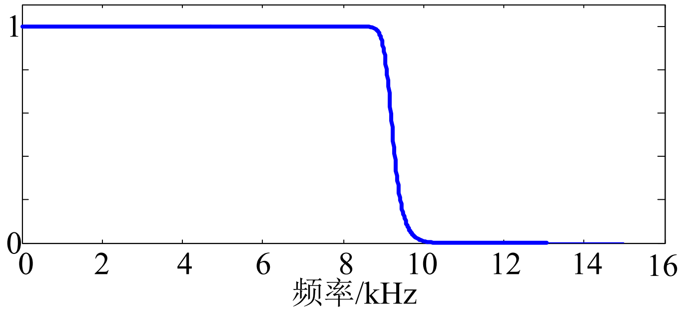
RC=4 秒时系统的输出响应

连续时间LTI系统的频域分析应用举例

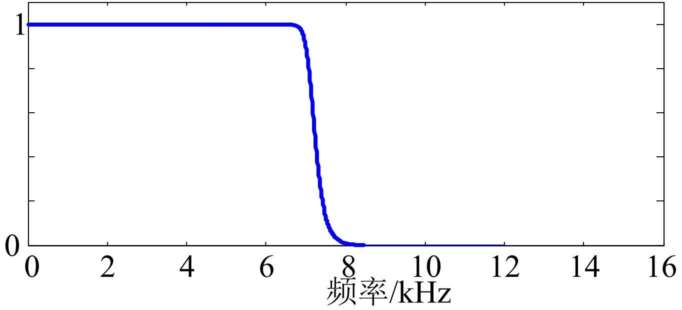
系统的频域特性对滤波结果的影响



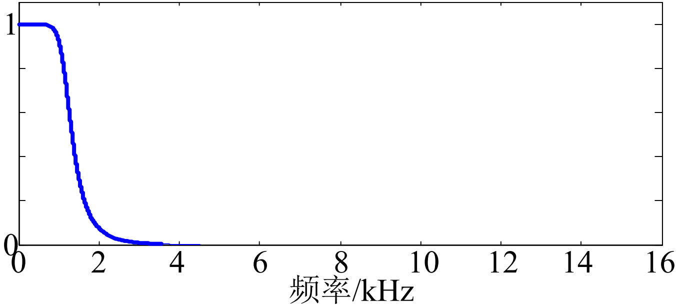
受干扰信号的频谱



系统1的幅度响应

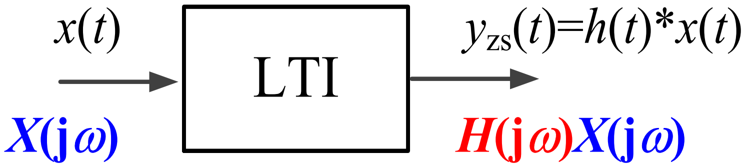


系统2的幅度响应

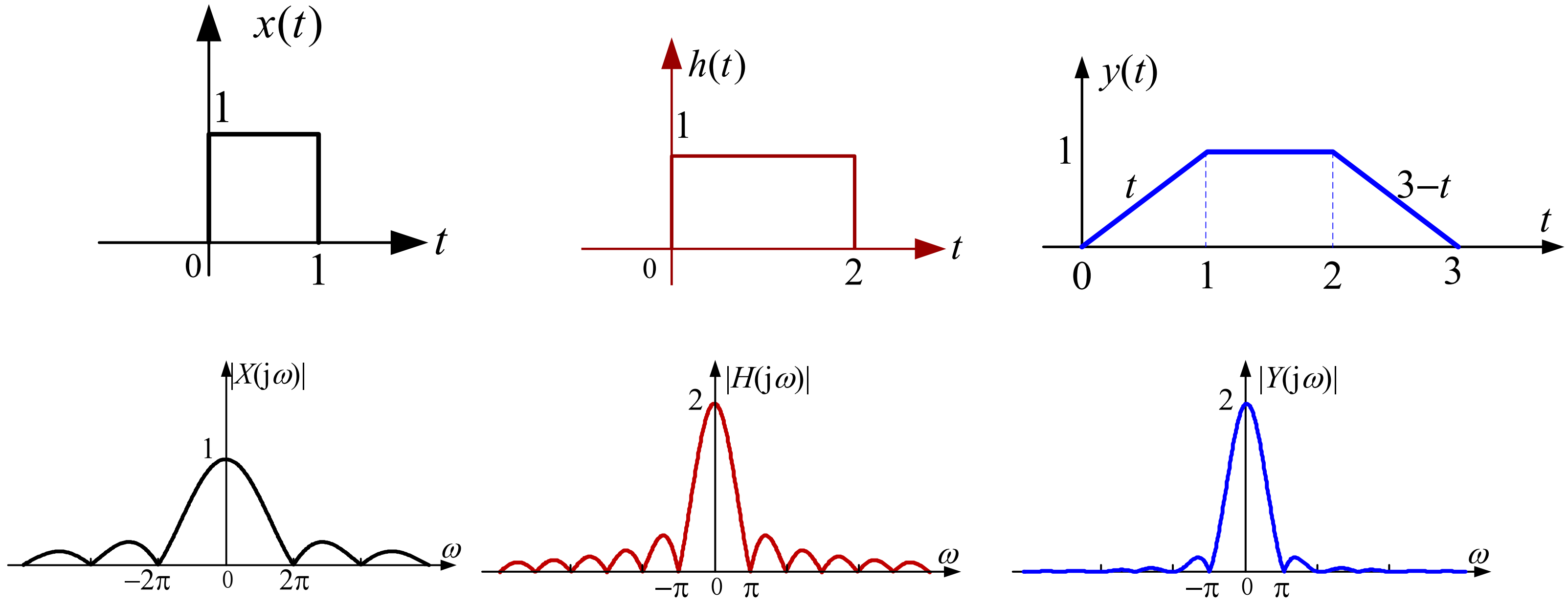


系统3的幅度响应

连续时间LTI系统的频域分析应用举例



信号传输



连续时间LTI系统响应的频域分析

- 优点：求解系统的零状态响应时，可以直观地体现信号通过系统后信号频谱的改变，解释激励与响应时域波形的差异，物理概念清楚。
- 不足：

（1）只能求解系统的零状态响应，系统的零输入响应仍需按时域方法求解。

（2）若系统频率响应(或激励信号)的傅里叶变换不存在，则无法利用频域 分析法。

- 解决方法：采用拉普拉斯变换

谢 谢

本课程所引用的一些素材为主讲老师多年的教学积累，来源于多种媒体及同事、同行、朋友的交流，难以一一注明出处，特此说明并表示感谢！