北京交通大学

信号与系统

主讲人：陈后金

电子信息工程学院

常见序列单边z变换

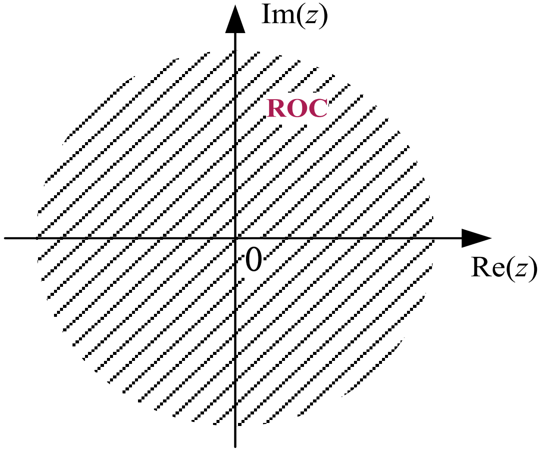
- 单位脉冲序列
- 单位阶跃序列
- 指数序列
- 虚指数序列
- 正弦类序列

常见序列单边z变换

1. 单位脉冲序列$\delta[k]$的z变换

$$\mathscr{Z}\{\delta[k]\} = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[k] \cdot z^{-k} = 1$$

$$|z| \geq 0$$



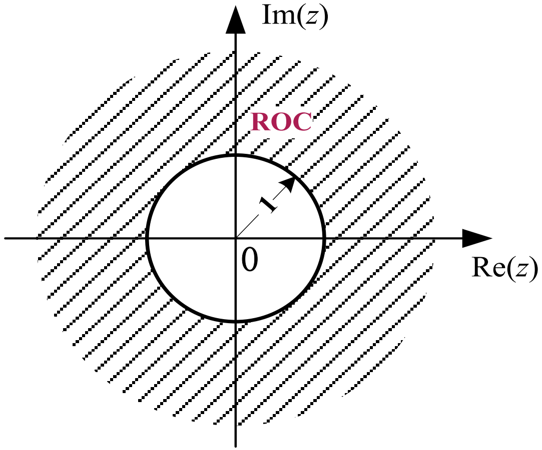
$$\delta[k] \xleftrightarrow{\mathscr{Z}} 1, \quad |z| \geq 0$$

常见序列单边z变换

2. 单位阶跃序列$u[k]$的z变换

$$\mathscr{Z}\{u[k]\}=\sum_{k=0}^{\infty}u[k]\,z^{-k}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}z^{-k}=\frac{1}{1-z^{-1}}=\frac{z}{z-1},\qquad |z|>1$$



$$u[k]\xleftrightarrow{\mathscr{Z}}\frac{1}{1-z^{-1}}=\frac{z}{z-1},\qquad |z|>1$$

同理可得：

$$ku[k]\xleftrightarrow{\mathscr{Z}}\frac{z^{-1}}{\left(1-z^{-1}\right)^{2}}=\frac{z}{(z-1)^{2}},\qquad |z|>1$$

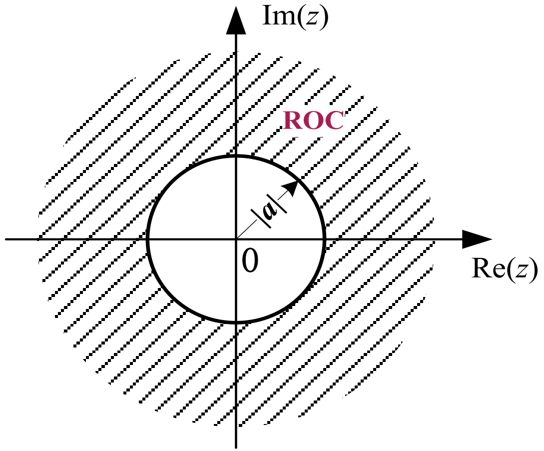
常见序列单边z变换

3. 指数序列$a^k u[k]$的z变换

$$\mathscr{Z}\{a^k u[k]\} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k u[k]\, z^{-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (az^{-1})^k = \frac{1}{1-az^{-1}}, \qquad |z|>|a|$$

$$a^k u[k] \xleftrightarrow{\mathscr{Z}} \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}, \qquad |z|>|a|$$



同理可得：

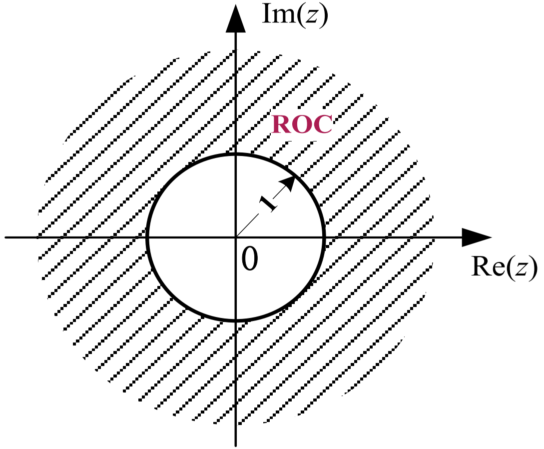
$$ka^k u[k] \xleftrightarrow{\mathscr{Z}} \frac{az^{-1}}{\left(1-az^{-1}\right)^2} = \frac{az}{(z-a)^2}, \quad |z|>|a|$$

常见序列单边z变换

4. 虚指数序列$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega_0 k}u[k]$的$z$变换

$$\mathscr{Z}\left\{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega_0 k}u[k]\right\}=\sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega_0 k}u[k]z^{-k}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega_0}z^{-1})^k=\frac{1}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega_0}z^{-1}},\quad |z|>1$$



$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega_0 k}u[k]\overset{\mathscr{Z}}{\longleftrightarrow}\frac{1}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega_0}z^{-1}},\quad |z|>1$$

同理可得:

$$\mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{j}\Omega_0)k}u[k]\overset{\mathscr{Z}}{\longleftrightarrow}\frac{1}{1-\mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{j}\Omega_0)}z^{-1}},\quad |z|>\left|\mathrm{e}^{\alpha}\right|$$

常见序列单边z变换

5. 正弦类序列$\cos(\Omega_0 k)\, u[k]$和$\sin(\Omega_0 k)\, u[k]$的z变换

$$\mathscr{Z}\{\cos(\Omega_0 k)u[k]\}=\mathscr{Z}\{e^{j\Omega_0 k}u[k]\}/2+\mathscr{Z}\{e^{-j\Omega_0 k}u[k]\}/2$$

Euler公式

$$=\frac{1}{2}\frac{1}{1-e^{j\Omega_0}z^{-1}}+\frac{1}{2}\frac{1}{1-e^{-j\Omega_0}z^{-1}}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-z^{-1}\cos(\Omega_0)-jz^{-1}\sin(\Omega_0)}+\frac{1}{1-z^{-1}\cos(\Omega_0)+jz^{-1}\sin(\Omega_0)}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\frac{2-2z^{-1}\cos(\Omega_0)}{1-2z^{-1}\cos(\Omega_0)+z^{-2}}=\frac{1-z^{-1}\cos(\Omega_0)}{1-2z^{-1}\cos(\Omega_0)+z^{-2}}$$

常见序列单边z变换

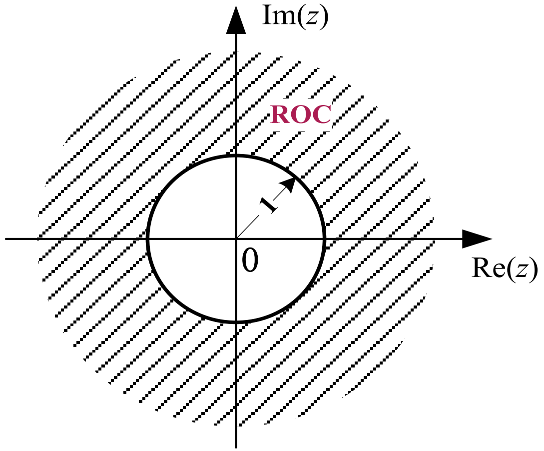
5. 正弦类序列$\cos(\Omega_0 k)\,u[k]$和$\sin(\Omega_0 k)\,u[k]$的z变换

$$\cos(\Omega_0 k)u[k] \xleftrightarrow{\mathscr{Z}} \frac{1-\cos(\Omega_0)z^{-1}}{1-2\cos(\Omega_0)z^{-1}+z^{-2}}, \quad |z|>1$$

$$= \frac{z^2-\cos(\Omega_0)z}{z^2-2\cos(\Omega_0)z+1}, \quad |z|>1$$

$$\sin(\Omega_0 k)u[k] \xleftrightarrow{\mathscr{Z}} \frac{\sin(\Omega_0)z^{-1}}{1-2\cos(\Omega_0)z^{-1}+z^{-2}}, \quad |z|>1$$

$$= \frac{\sin(\Omega_0)z}{z^2-2\cos(\Omega_0)z+1}, \quad |z|>1$$



谢 谢

本课程所引用的一些素材为主讲老师多年的教学积累，来源于多种媒体及同事、同行、朋友的交流，难以一一注明出处，特此说明并表示感谢！