北京交通大学

信号与系统

主讲人：陈后金

电子信息工程学院

信号的时域抽样

※ 什么是信号的抽样

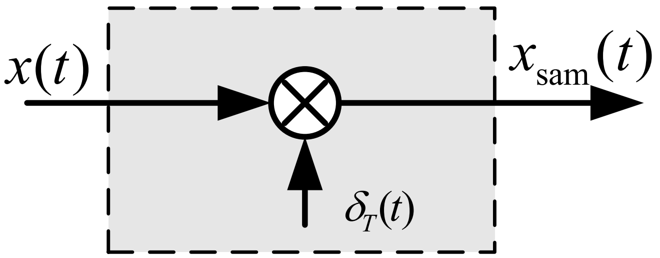
※ 为什么要进行抽样

※ 如何进行信号抽样

※ 信号抽样理论分析

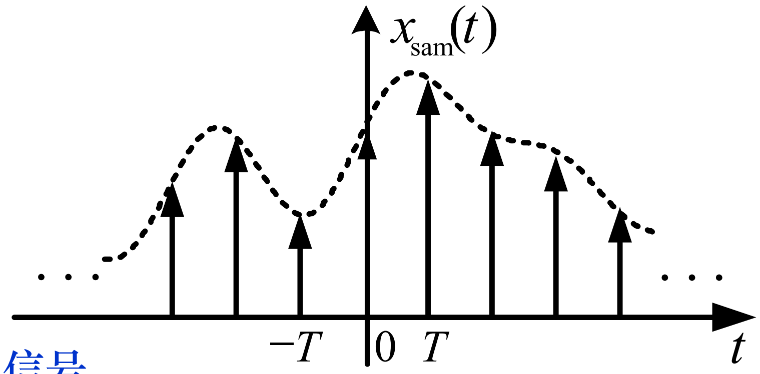
※ 抽样定理工程应用

4. 信号时域抽样理论分析

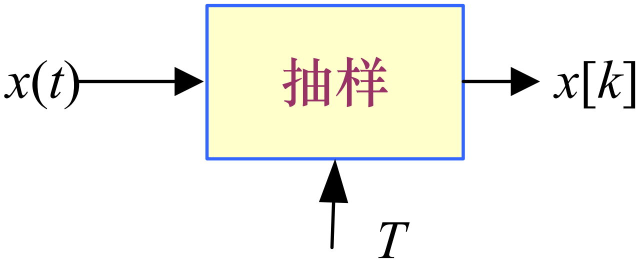


抽样定理证明模型

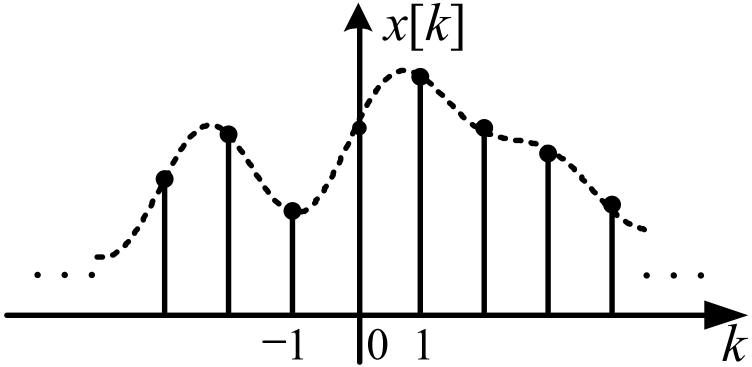
传统模型



输入和输出都是连续时间信号



新模型



输入是连续时间信号，输出是离散时间信号

4. 信号时域抽样理论分析

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
x(t) \arrow[r, shift left, "t=kT"] \arrow[d, leftrightarrow] & x[k] \arrow[l, shift left, "?"] \arrow[d, leftrightarrow] \\
X(\mathrm{j}\omega) & X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}) \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

$$x[k] = x(t)\big|_{t=kT}$$

$$(\Omega = \omega T)$$

连续信号$x(t)$的频谱为$X(\mathrm{j}\omega)$，

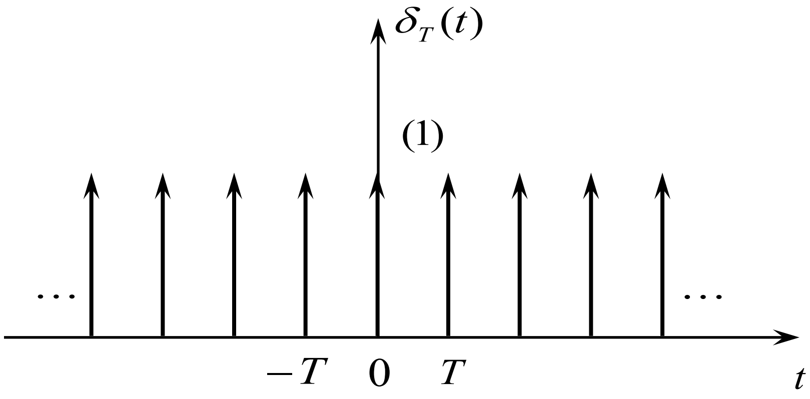
离散序列$x[k]$的频谱为 $X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})$。

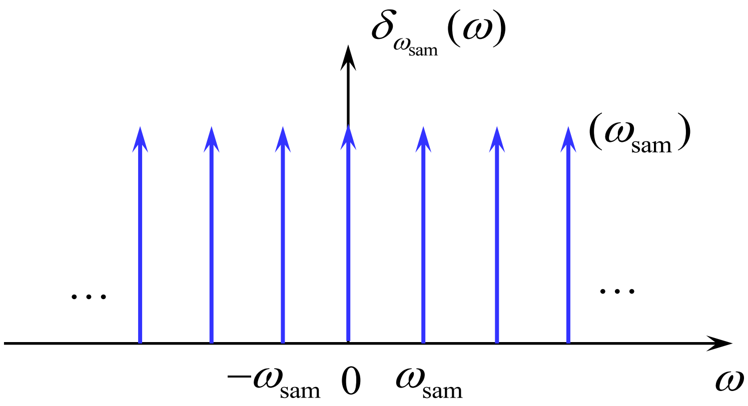
4. 信号时域抽样理论分析

$$\delta_T(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-kT)$$

$$\delta_{\omega_{\text{sam}}}(\omega)=\omega_{\text{sam}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-n\omega_{\text{sam}})$$

$$\omega_{\text{sam}}=2\pi/T$$

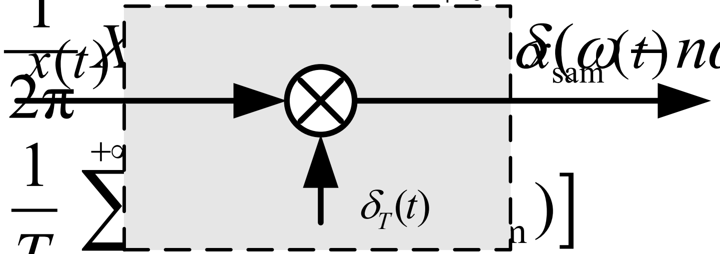




4. 信号时域抽样理论分析

$$x_{\rm sam}(t)=\underline{x(t)\delta_T(t)}=\underline{\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x(kT)\delta(t-kT)}$$

$$X_{\rm sam}(\mathrm{j}\omega)=\frac{1}{2\pi}X(\mathrm{j}\omega)*\omega_{\rm sam}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-n\omega_{\rm sam})=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}[X(\mathrm{j}(\omega-n\omega_{\rm sam}))]$$



抽样定理证明模型

$$X_{\rm sam}(\mathrm{j}\omega)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x(kT)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\omega T}=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\Omega}=X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})$$

4. 信号时域抽样理论分析

若连续信号$x(t)$的频谱为$X(\mathrm{j}\omega)$，离散序列$x[k]$的频谱为$X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})$，且存在

$$x[k]=x(t)\big|_{t=kT}$$

则有

$$X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} X\left[\mathrm{j}(\omega - n\omega_{\mathrm{sam}})\right] \qquad (\Omega=\omega T)$$

抽样定理的本质：信号时域的离散化导致其频域的周期化。

其中： T为抽样间隔，$\omega_{\mathrm{sam}}=2\pi/T$为抽样角频率。

4. 信号时域抽样理论分析

带限信号

若带限信号$x(t)$的最高角频率为ω_m，则在满足一定条件下，信号$x(t)$可以用等间隔T的抽样值唯一表示。

抽样间隔T需满足：

$$T \le \pi/\omega_m = 1/(2f_m)$$

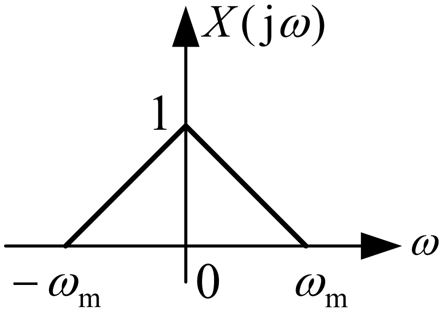
$$f_{sam} \ge 2f_m \quad （或\omega_{sam} \ge 2\omega_m）$$

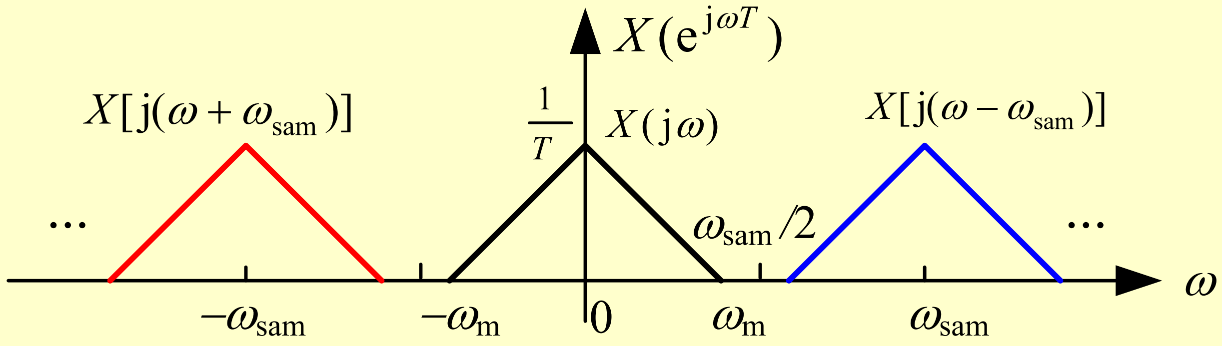
$f_{sam}=2f_m$ 为最小抽样频率，称为Nyquist Rate。

4. 信号时域抽样理论分析

离散序列$x[k]$频谱与抽样间隔T之间的关系

$$\omega_{sam} > 2\omega_m$$

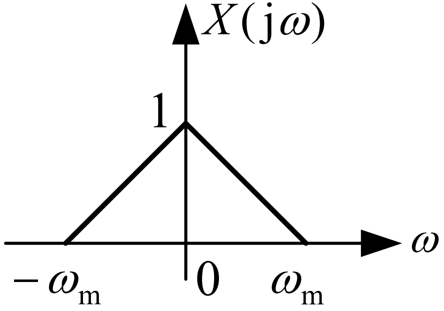


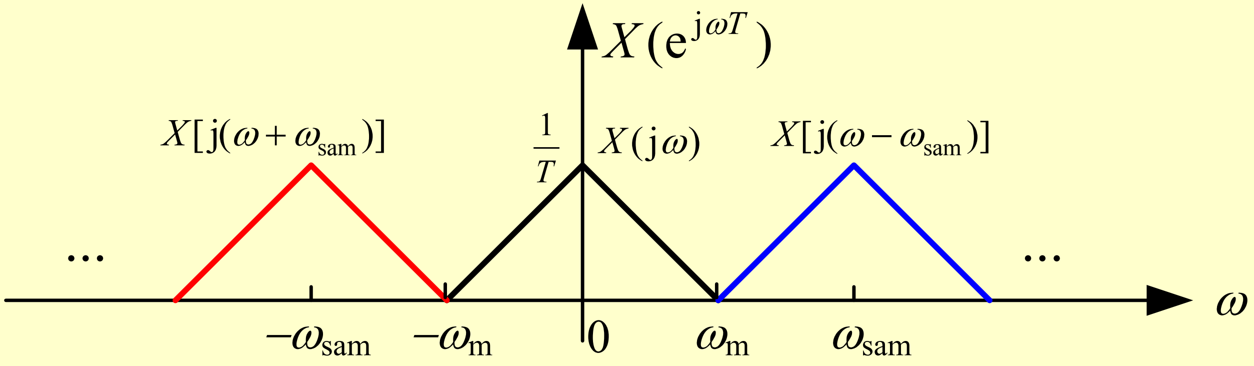


4. 信号时域抽样理论分析

离散序列$x[k]$频谱与抽样间隔T之间的关系

$$\omega_{sam} = 2\omega_m$$

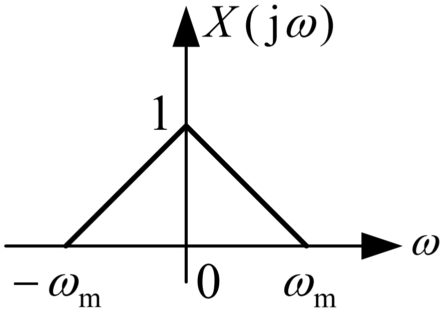


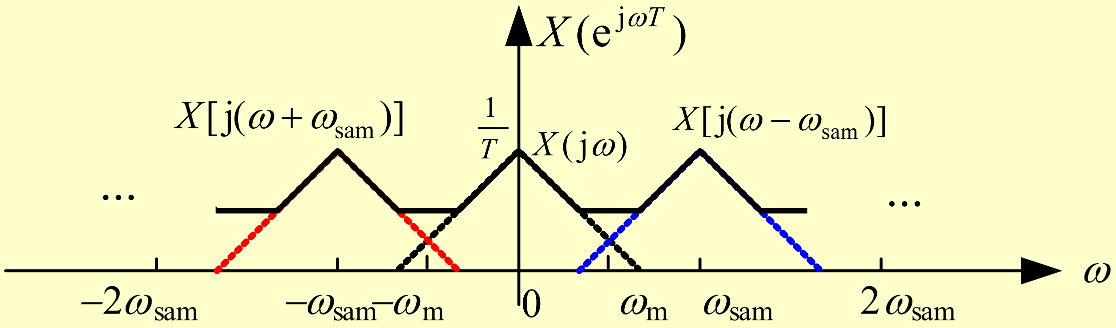


4. 信号时域抽样理论分析

离散序列$x[k]$频谱与抽样间隔T之间的关系

$\omega_{sam} < 2\omega_m$





混叠(aliasing)

例：已知实信号$x(t)$的最高频率为f_{m} (Hz)，计算对各信号$x(2t)$，$x(t)*x(2t)$，$x(t)\cdot x(2t)$抽样不混叠的最小抽样频率。

解：

根据信号时域与频域的对应关系及抽样定理得：

对信号$x(2t)$抽样时，最小抽样频率为$4f_{\mathrm{m}}$(Hz)；

对$x(t)*x(2t)$抽样时，最小抽样频率为$2f_{\mathrm{m}}$(Hz)；

对$x(t)\cdot x(2t)$抽样时，最小抽样频率为$6f_{\mathrm{m}}$(Hz)。

关于信号的时域抽样，……

(1) 非带限信号抽样不失真条件是否也必须满足$f_{\mathrm{sam}} \geq 2f_{\mathrm{m}}$？

(2) 对连续带限信号进行抽样时，只需抽样速率 $f_{\mathrm{sam}} \geq 2f_{\mathrm{m}}$。

在工程应用中，抽样速率为何常设为 $f_{\mathrm{sam}} \geq (3\sim5)f_{\mathrm{m}}$?

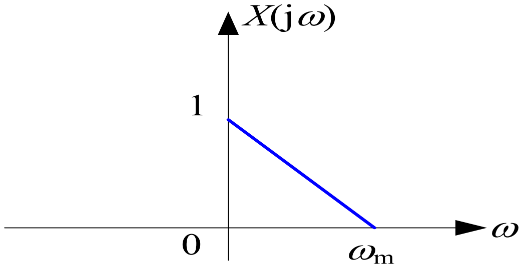
(3) 若连续时间信号 $x(t)$ 的最高频率未知，如何确定

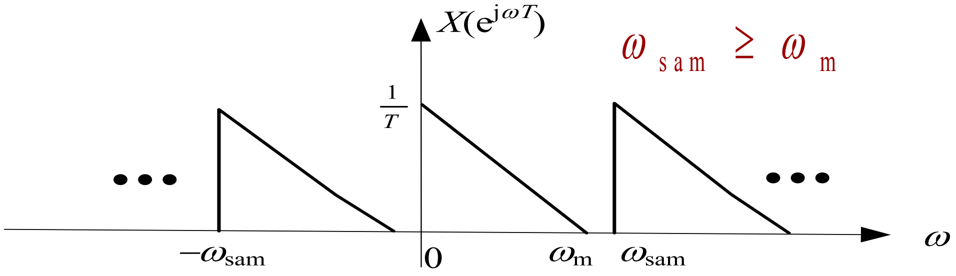
信号的抽样间隔T?

(4) 若抽样速率过高，如何降低已抽样信号的抽样速率?

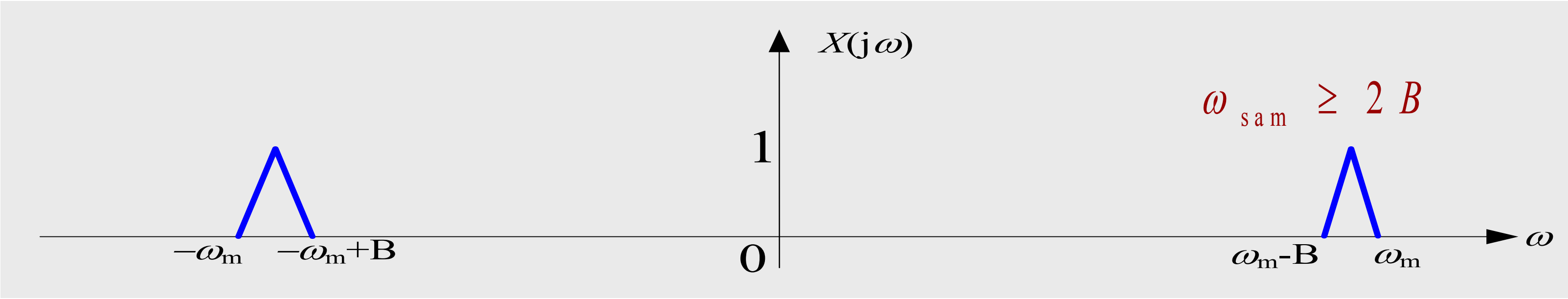
4. 信号时域抽样理论分析

单边带信号与窄带高频信号的抽样问题





$$\omega_{sam} \geq \omega_m$$

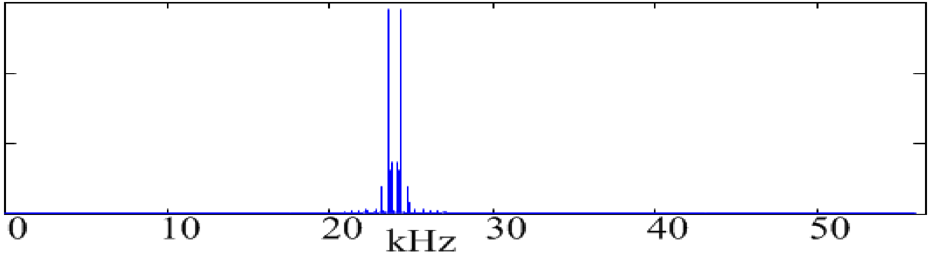


$$\omega_{sam} \geq 2B$$

$$\omega_m = 1000\text{k rad/s}, \quad B = 8\text{k rad/s}$$

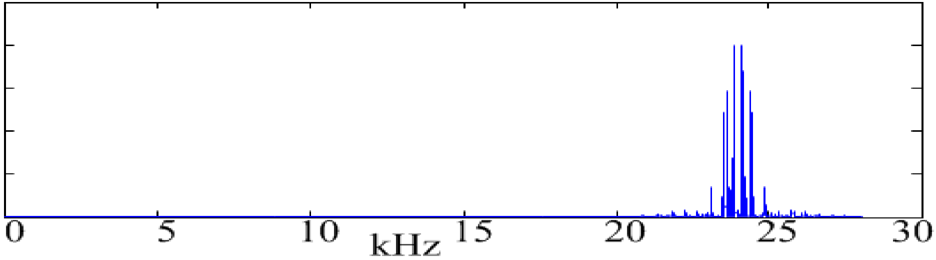
4. 信号时域抽样理论分析

窄带高频信号的抽样



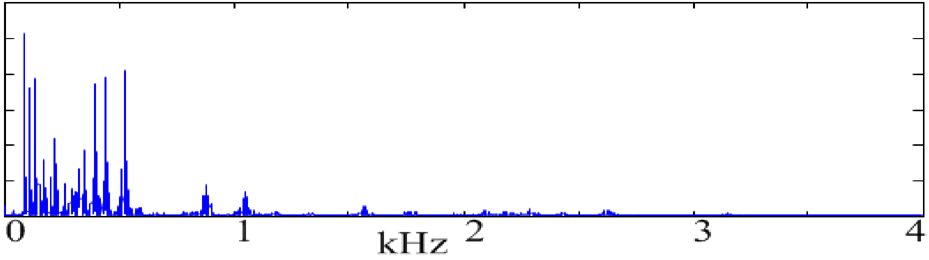
中心频率24kHz，带宽8kHz。

解调后语音信号



f_{sam}=56kHz 抽样后的频谱。

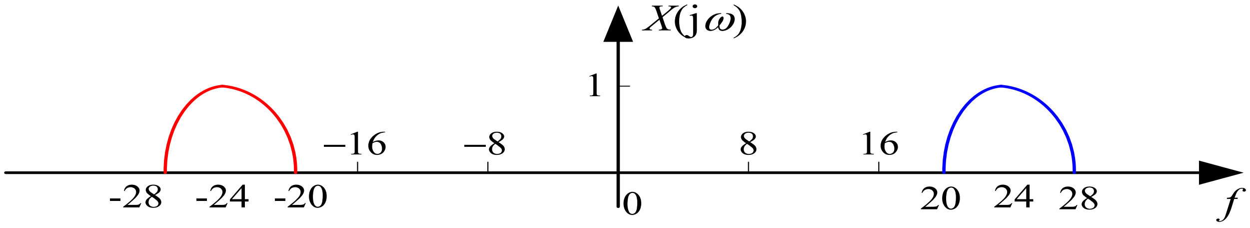
解调后语音信号



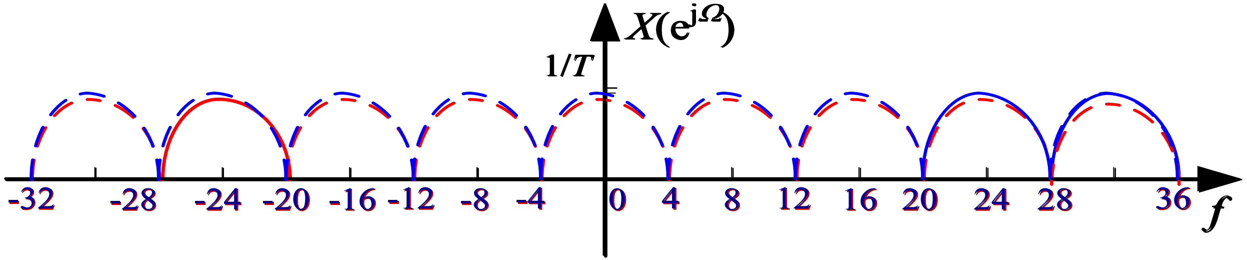
f_{sam}=8kHz 抽样后的频谱。

抽样后的语音信号(不解调)

4. 信号时域抽样理论分析



f_m=28 kHz



f_{sam}=8 kHz

谢 谢

本课程所引用的一些素材为主讲老师多年的教学积累，来源于多种媒体及同事、同行、朋友的交流，难以一一注明出处，特此说明并表示感谢！