北京交通大学

信号与系统

主讲人：陈后金

电子信息工程学院

系统响应的z域分析

➢ 离散时间LTI系统响应求解思路：

$$
\begin{tikzcd}
\text{时域差分方程} \arrow[r, "\text{解差分方程}"] \arrow[d, "z\text{变换}"'] & \text{时域响应}y[k] \\
z\text{域代数方程} \arrow[r, "\text{解代数方程}"'] & z\text{域响应}Y(z) \arrow[u, "z\text{反变换}"']
\end{tikzcd}
$$

例：描述某离散时间LTI系统差分方程为：$y[k]+3y[k-1]+2y[k-2]=x[k]$，已知初始状态$y[-1]=1$ ，$y[-2]=3$， $x[k]=(4)^k u[k]$，由z域求解系统响应。

解：令 $\mathscr{Z}\{y[k]\}=Y(z)$, $\mathscr{Z}\{x[k]\}=X(z)$ 利用z变换的位移特性，

$$\mathscr{Z}\{y[k-1]u[k]\}=z^{-1}Y(z)+y[-1]$$

$$\mathscr{Z}\{y[k-2]u[k]\}=z^{-2}Y(z)+z^{-1}y[-1]+y[-2]$$

代入差分方程有，

$$Y(z)+3(z^{-1}Y(z)+y[-1])+2(z^{-2}Y(z)+z^{-1}y[-1]+y[-2])=X(z)$$

整理得，

$$Y(z)(1+3z^{-1}+2z^{-2})=-3y[-1]-2z^{-1}y[-1]-2y[-2]+X(z)$$

例：描述某离散时间LTI系统差分方程为：$y[k]+3y[k-1]+2y[k-2]=x[k]$，已知初始状态$y[-1]=1$，$y[-2]=3$，$x[k]=(4)^k u[k]$，由$z$域求解系统响应。

$$Y(z)(1+3z^{-1}+2z^{-2})=-3y[-1]-2z^{-1}y[-1]-2y[-2]+X(z)$$

等式两边同除 $(1+3z^{-1}+2z^{-2})$，

$$Y(z)=\underbrace{\frac{-3y[-1]-2z^{-1}y[-1]-2y[-2]}{1+3z^{-1}+2z^{-2}}}_{Y_{zi}(z)}+\underbrace{\frac{X(z)}{1+3z^{-1}+2z^{-2}}}_{Y_{zs}(z)}$$

例：描述某离散时间LTI系统差分方程为：$y[k]+3y[k-1]+2y[k-2]=x[k]$，已知初始状态$y[-1]=1$，$y[-2]=3$，$x[k]=(4)^k u[k]$，由$z$域求解系统响应。

系统零状态响应：
$$Y_{zs}(z)=\frac{X(z)}{1+3z^{-1}+2z^{-2}}$$

对于系统输入$x[k]=(4)^k u[k]$，
$$X(z)=\mathscr{Z}\{(4)^k u[k]\}=\frac{z}{z-4}$$

$$Y_{zs}(z)=\frac{z^2X(z)}{z^2+3z+2}=\frac{z^2\cdot z}{(z+1)(z+2)(z-4)}=\frac{-\frac{1}{5}z}{z+1}+\frac{\frac{2}{3}z}{z+2}+\frac{\frac{8}{15}z}{z-4}$$

$$\Rightarrow\quad y_{zs}[k]=[\frac{2}{3}(-2)^k+\frac{8}{15}(4)^k-\frac{1}{5}(-1)^k]u[k]$$

例：描述某离散时间LTI系统差分方程为：$y[k]+3y[k-1]+2y[k-2]=x[k]$，已知初始状态$y[-1]=1$，$y[-2]=3$，$x[k]=(4)^k u[k]$，由$z$域求解系统响应。

系统零输入响应：
$$Y_{zi}(z)=\frac{-3y[-1]-2z^{-1}y[-1]-2y[-2]}{1+3z^{-1}+2z^{-2}}$$

对于系统输入$y[-1]=1$，$y[-2]=3$，

$$Y_{zi}(z)=z\cdot\frac{-2-9z}{z^2+3z+2}=\frac{7z}{z+1}+\frac{-16z}{z+2}$$

$$\Rightarrow y_{zi}[k]=[7(-1)^k-16(-2)^k]u[k]$$

系统完全响应：

$$y[k]=y_{zs}[k]+y_{zi}[k]=[\frac{46}{3}(-2)^k+\frac{8}{15}(4)^k+\frac{34}{5}(-1)^k]u[k]$$

谢 谢

本课程所引用的一些素材为主讲老师多年的教学积累，来源于多种媒体及同事、同行、朋友的交流，难以一一注明出处，特此说明并表示感谢！