北京交通大學

主讲人：陈后金

电子信息工程学院

离散时间LTI系统的频域描述

- 离散时间LTI系统的频率响应
- 系统的幅度响应与相位响应

离散时间LTI系统的频域描述

➢ 离散时间LTI系统的频率响应

若描述离散LTI系统的差分方程为

$$y[k]+a_1y[k-1]+\cdots+a_{n-1}y[k-n+1]+a_ny[k-n]=$$
$$b_0x[k]+b_1x[k-1]+\cdots+b_{m-1}x[k-m-1]+b_mx[k-m]$$

利用DTFT位移特性，可得描述该系统的频域方程

$$[1+a_1\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega}+\cdots+a_n\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\Omega}]Y_{zs}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})=$$
$$[b_0+b_1\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega}+\cdots+a_m\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}m\Omega}]X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})$$

离散时间LTI系统的频域描述

➢ 离散时间LTI系统的**频率响应**

$$[1+a_1\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega}+\cdots+a_n\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\Omega}]Y_{zs}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})$$

$$=[b_0+b_1\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega}+\cdots+a_m\mathrm{e}^{-\mathrm{j}m\Omega}]Y_{zs}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})$$

系统的频率响应定义为

$$H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})=\frac{Y_{zs}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})}{X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})}=\frac{b_0+b_1\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega}+\cdots+b_{m-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega(m-1)}+b_m\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega m}}{1+a_1\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega}+\cdots+a_{n-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega(n-1)}+a_n\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega n}}$$

离散时间LTI系统的频域描述

➢ **频率响应$H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})$与脉冲响应$h[k]$ 的关系**

$$\delta[k] \longrightarrow \boxed{\text{离散系统}} \longrightarrow h[k]$$

$$H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}) = \frac{Y_{zs}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})}{X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})} = \frac{\mathrm{DTFT}\{h[k]\}}{\mathrm{DTFT}\{\delta[k]\}} = \mathrm{DTFT}\{h[k]\}$$

$$\boxed{H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}) = \mathrm{DTFT}\{h[k]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega k}}$$

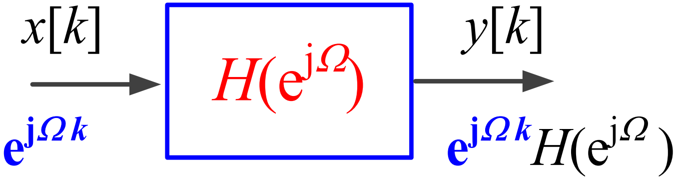
离散时间LTI系统的频域描述

➢ **虚指数信号 $e^{j\Omega k}$通过离散LTI系统的响应**

$$y[k]=e^{j\Omega k}*h[k]=\sum_{n}e^{j\Omega(k-n)}h[n]$$

$$=e^{j\Omega k}\underbrace{\sum_{n}e^{-j\Omega n}h[n]}_{H(e^{j\Omega})}$$

$$=e^{j\Omega k}H(e^{j\Omega})$$



离散时间LTI系统的频域描述

➢ $H(e^{j\Omega})$ 的物理意义

$$x[k] \longrightarrow \boxed{H(e^{j\Omega})} \longrightarrow y[k]$$

$$e^{j\Omega k} \longrightarrow \boxed{H(e^{j\Omega})} \longrightarrow e^{j\Omega k}H(e^{j\Omega})$$

频率为Ω的虚指数信号 $e^{j\Omega k}$ 通过离散LTI系统的响应仍为同频率的虚指数信号。信号的改变由$H(e^{j\Omega})$ 确定。

$H(e^{j\Omega})$反映了离散系统对不同频率虚指数信号的传输特性。

离散时间LTI系统的频域描述

➢ 幅度响应与相位响应

$$H(e^{j\Omega}) = |H(e^{j\Omega})| e^{j\varphi(\Omega)}$$

幅度响应　　　　相位响应

若$h[k]$是实信号时，则

幅度响应$|H(e^{j\Omega})|$是Ω的偶函数，

相位响应 $\varphi(\Omega)$ 是Ω的奇函数。

离散时间LTI系统的频域描述

➢ **余弦信号$\cos(\Omega_0 k+\theta)$通过系统的响应**

由Euler公式可得

$$\cos(\Omega_0 k+\theta)=(\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\Omega_0 k+\theta)}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\Omega_0 k+\theta)})/2$$

利用虚指数信号$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega_0 k}$响应的特点及系统的线性特性，可得

$$y[k]=\left[H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega_0})\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\Omega_0 k+\theta)}+H(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega_0})\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\Omega_0 k+\theta)}\right]/2$$

$\left|H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega_0})\right|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(\Omega_0)}$

$\left|H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega_0})\right|\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi(\Omega_0)}$

$$=\left|H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega_0})\right|\cos(\Omega_0 k+\varphi(\Omega_0)+\theta)$$

离散时间LTI系统的频域描述

➢ **余弦信号$\cos(\Omega_0 k+\theta)$通过系统的响应**

$$\cos(\Omega_0 k+\theta) \longrightarrow \left|H(e^{j\Omega_0})\right| \cos\left[\Omega_0 k+\varphi(\Omega_0)+\theta\right]$$

频率为Ω_0的余弦信号通过离散LTI系统的响应仍为同频率的余弦信号。

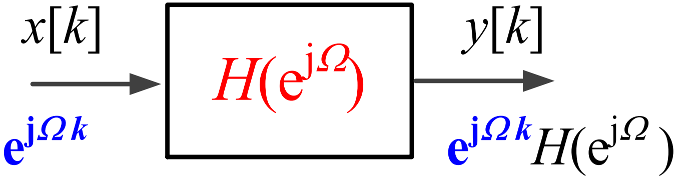
响应的幅度改变由$|H(e^{j\Omega_0})|$确定，
响应的相位改变由$\varphi(\Omega_0)$确定。

离散时间LTI系统的频域描述

- 系统频率响应的定义

$$H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}) = \frac{Y_{zs}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})}{X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})} = \mathrm{DTFT}\{h[k]\}$$

- 系统频率响应的意义



- 系统频率响应的表示

$$H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}) = |H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})|\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(\Omega)}$$

幅度响应

相位响应

谢 谢

本课程所引用的一些素材为主讲老师多年的教学积累，来源于多种媒体及同事、同行、朋友的交流，难以一一注明出处，特此说明并表示感谢！