北京交通大學

信号与系统

主讲人：陈后金

电子信息工程学院

状态空间变量分析

※ 系统状态变量分析的基本概念和普遍形式

※ **连续时间系统状态方程和输出方程的建立**

※ 离散时间系统状态方程和输出方程的建立

※ 连续时间系统状态方程和输出方程的求解

※ 离散时间系统状态方程和输出方程的求解

连续时间系统状态方程和输出方程的建立

连续系统常以**电路**、**微分方程**、**系统函数**或**模拟框图**的方式描述，由此建立连续系统的状态方程和输出方程。

※ 由**电路**建立状态方程和输出方程

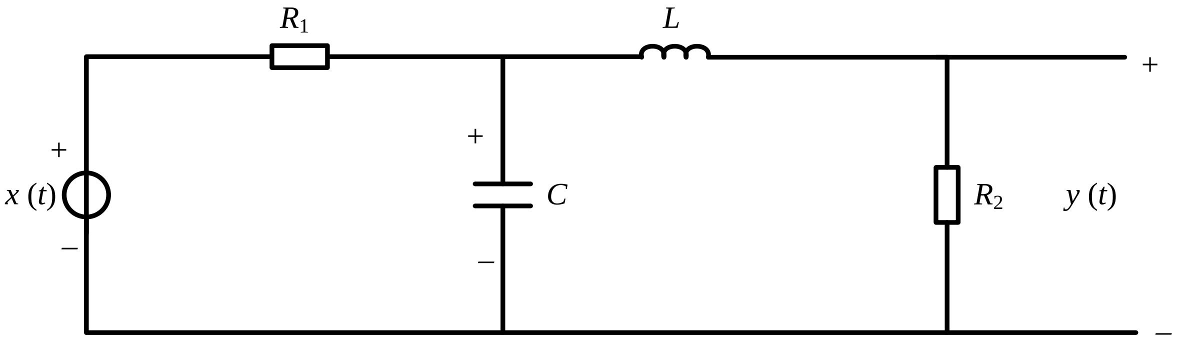
※ 由**微分方程**建立状态方程和输出方程

※ 由**模拟框图**建立状态方程和输出方程

※ 由**系统函数**建立状态方程和输出方程

由电路建立状态方程和输出方程

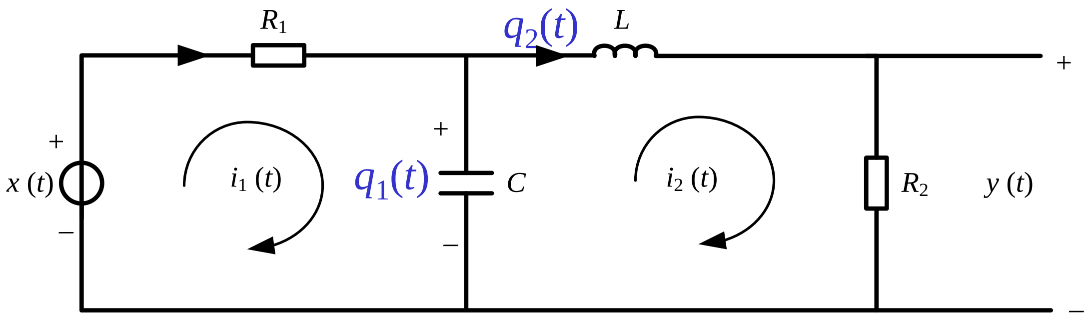
[例] 建立如下电路的状态方程和输出方程。



解：

该电路中有两个独立动态元件，故需两个状态变量。

由电路建立状态方程和输出方程



选取电容电压$v_c(t)$和电感电流$i_L(t)$为状态变量$q_1(t)$和$q_2(t)$

$$q_2(t) = i_2(t) \qquad C\dot{q}_1(t) = i_1(t) - i_2(t)$$

回路方程：

$$R_1 i_1(t) + q_1(t) = x(t)$$

$$L\dot{i}_2(t) + R_2 i_2(t) - q_1(t) = 0$$

由电路建立状态方程和输出方程

状态方程

$$\begin{cases} \dot{q}_1(t) = -\dfrac{1}{R_1C}q_1(t) - \dfrac{1}{C}q_2(t) + \dfrac{1}{R_1C}x(t) \\ \dot{q}_2(t) = \dfrac{1}{L}q_1(t) - \dfrac{R_2}{L}q_2(\mathrm{t}) \end{cases}$$

输出方程

$$y(t) = R_2q_2(t)$$

写成矩阵形式：

状态方程

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1(t) \\ \dot{q}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{R_1C} & -\dfrac{1}{C} \\ \dfrac{1}{L} & -\dfrac{R_2}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{R_1C} \\ 0 \end{bmatrix} x(t)$$

输出方程

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{bmatrix}$$

由电路建立状态方程和输出方程

(1) 一般选择**电感电流**和**电容电压**作为状态变量；

(2) 围绕电感电流的导数列回路电压方程；

(3) 围绕电容电压的导数列节点电流方程；

(4) 整理步骤(2)、(3)，即可得到状态方程；

(5) 求解输出与状态变量和输入关系，得到输出方程。

由微分方程建立状态方程和输出方程

[例] 已知描述某系统的微分方程为 $y''(t)+3y'(t)+2y(t)=x(t)$

试写出其状态方程和输出方程。

解: 选取 $y(t)$ 和 $y'(t)$ 为系统的状态变量 $q_1(t)$ 和 $q_2(t)$，

$$q_1(t)=y(t) \qquad q_2(t)=y'(t)$$

由微分方程得到系统的状态方程为

$$\begin{cases} \dot{q}_1(t)=q_2(t) \\ \dot{q}_2(t)=y''(t)=x(t)-2q_1(t)-3q_2(t) \end{cases}$$

输出方程 $\quad y(t)=q_1(t)$

由微分方程建立状态方程和输出方程

状态方程的矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1(t) \\ \dot{q}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x(t)$$

输出方程的矩阵形式为

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{bmatrix}$$

由微分方程建立状态方程和输出方程

(1) 选取 $y(t), y'(t), y''(t),\ldots$ 为系统的状态变量

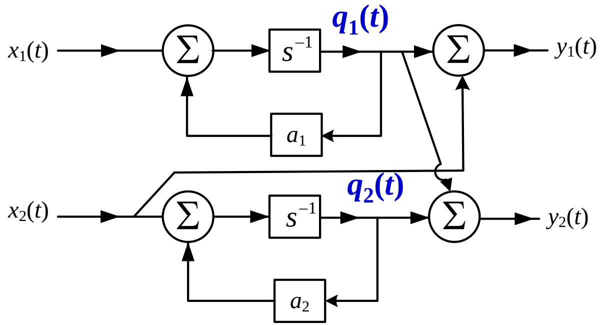
$$q_1(t),\ q_2(t),\ q_3(t),\ldots$$

n阶微分方程的状态变量的数目为n。

(2) 根据微分方程建立状态方程和输出方程。

由模拟框图建立状态方程和输出方程

[例] 已知某连续系统的模拟框图，建立其状态方程和输出方程。



解： 选取积分器输出端为状态变量$q_1(t)$和$q_2(t)$

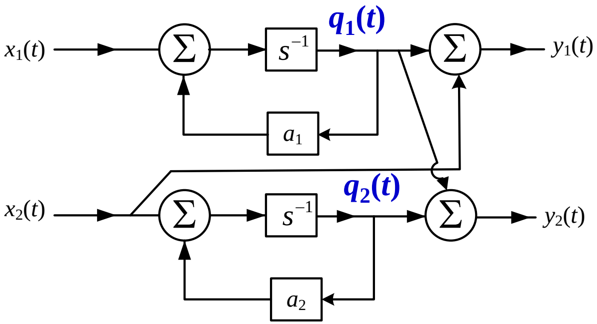
围绕积分器输入端列出状态方程：

$$\dot{q}_1(t) = x_1(t) + a_1 q_1(t) \qquad \dot{q}_2(t) = x_2(t) + a_2 q_2(t)$$

根据连续系统输出列出输出方程：

$$y_1(t) = q_1(t) + x_2(t) \qquad y_2(t) = q_1(t) + q_2(t)$$

由模拟框图建立状态方程和输出方程



写成矩阵形式：

状态方程

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1(t) \\ \dot{q}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

输出方程

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

由模拟框图建立状态方程和输出方程

(1) 选取积分器输出端作为状态变量；

(2) 围绕积分器输入端列写状态方程；

(3) 围绕连续系统输出列写输出方程。

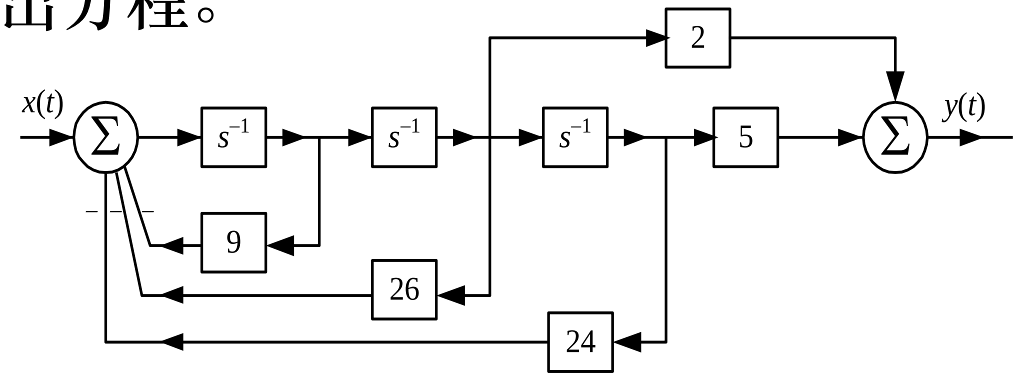
由系统函数建立状态方程和输出方程

[例] 已知描述某连续系统的系统函数为

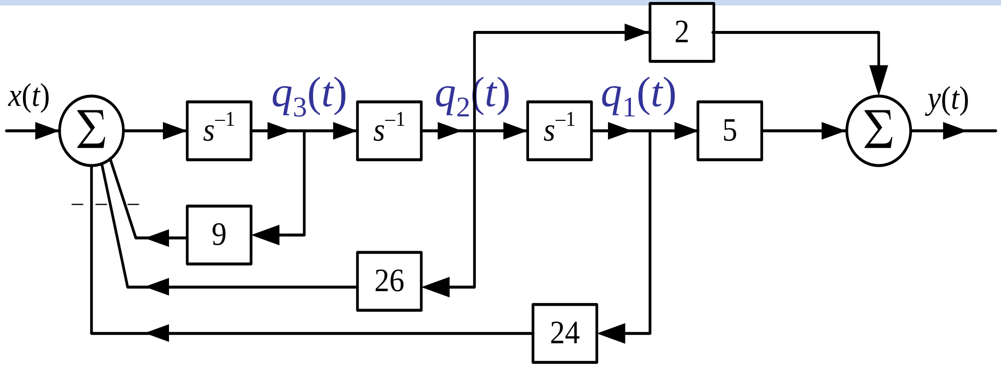
$$H(s)=\frac{2s+5}{s^3+9s^2+26s+24}$$

画出系统**直接型**、**级联型**和**并联型**结构模拟框图，并建立状态方程和输出方程。

解：(1)直接型框图



由系统函数建立状态方程和输出方程



选积分器输出为系统的状态变量$q_1(t)$，$q_2(t)$和$q_3(t)$，有

$$\dot{q}_1(t) = q_2(t) \qquad \dot{q}_2(t) = q_3(t)$$

$$\dot{q}_3(t) = -24q_1(t) - 26q_2(t) - 9q_3(t) + x(t)$$

$$y(t) = 5q_1(t) + 2q_2(t)$$

由系统函数建立状态方程和输出方程

状态方程的矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1(t) \\ \dot{q}_2(t) \\ \dot{q}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -24 & -26 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ q_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x(t)$$

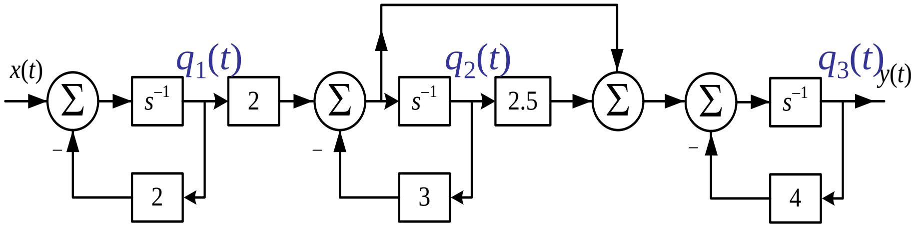
输出方程的矩阵形式:

$$y(t) = [5 \quad 2 \quad 0] \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ q_3(t) \end{bmatrix}$$

由系统函数建立状态方程和输出方程

(2) 级联型框图

$$H(s)=\left(\frac{2}{s+2}\right)\left(\frac{s+2.5}{s+3}\right)\left(\frac{1}{s+4}\right)$$



选取积分器输出端为系统的状态变量$q_1(t)$，$q_2(t)$和$q_3(t)$，

$$\dot{q}_1(t)=-2q_1(t)+x(t)$$

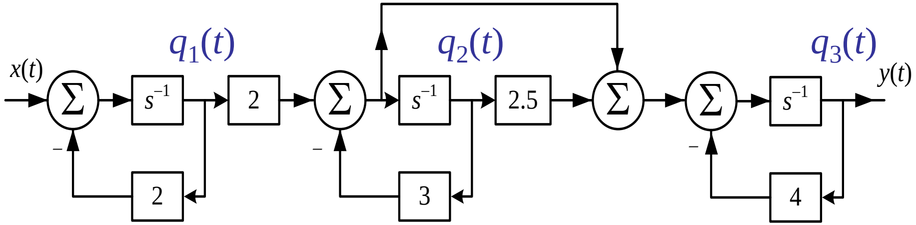
$$\dot{q}_2(t)=2q_1(t)-3q_2(t)$$

$$\dot{q}_3(t)=2.5q_2(t)+\dot{q}_2(t)-4q_3(t)=2q_1(t)-0.5q_2(t)-4q_3(t)$$

$$y(t)=q_3(t)$$

由系统函数建立状态方程和输出方程

(2) 级联型框图



状态方程的矩阵形式

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1(t) \\ \dot{q}_2(t) \\ \dot{q}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 2 & -0.5 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ q_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x(t)$$

输出方程的矩阵形式

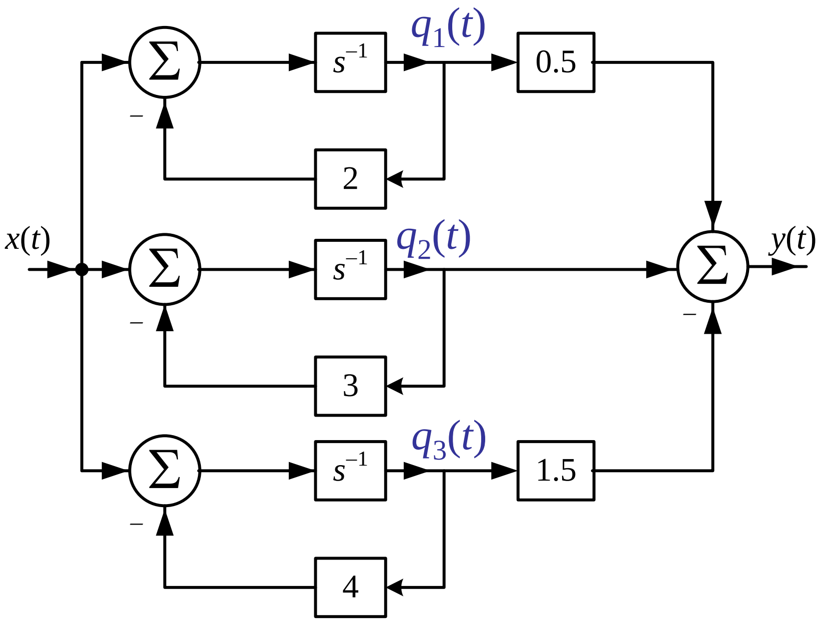
$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ q_3(t) \end{bmatrix}$$

由系统函数建立状态方程和输出方程

(3) 并联型框图

$$H(s)=\frac{0.5}{s+2}+\frac{1}{s+3}-\frac{1.5}{s+4}$$

选取积分器输出端为系统的状态变量$q_1(t)$、$q_2(t)$和$q_3(t)$：



由系统函数建立状态方程和输出方程

(3) 并联型框图

$$H(s)=\frac{0.5}{s+2}+\frac{1}{s+3}-\frac{1.5}{s+4}$$

状态方程:

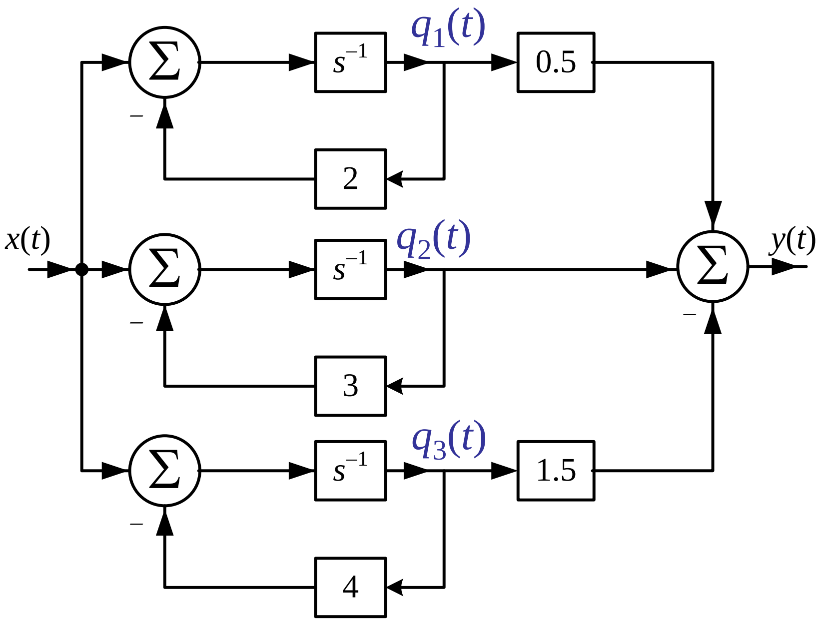
$$\dot{q}_1(t)=-2q_1(t)+x(t)$$

$$\dot{q}_2(t)=-3q_2(t)+x(t)$$

$$\dot{q}_3(t)=-4q_3(t)+x(t)$$

输出方程:

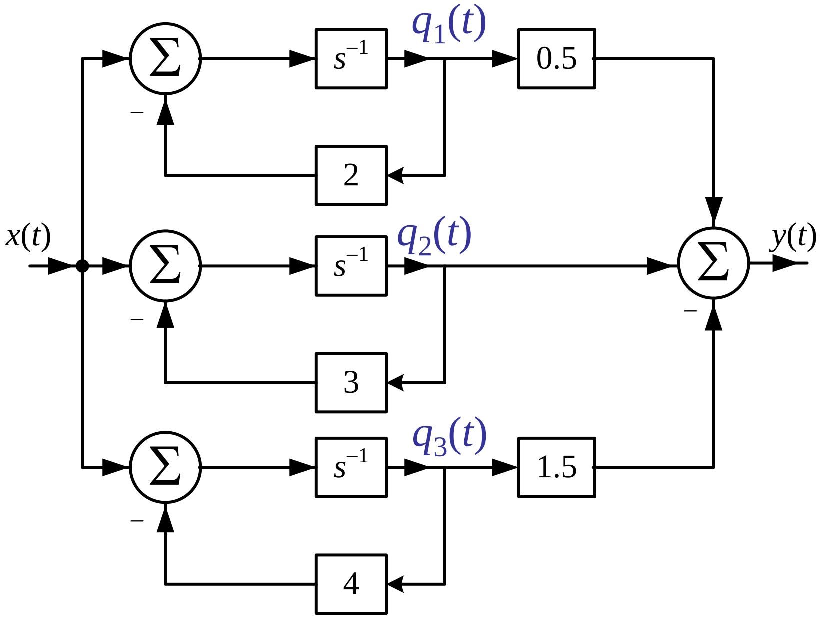
$$y(t)=0.5q_1(t)+q_2(t)-1.5q_3(t)$$



由系统函数建立状态方程和输出方程

(3)并联型

$$H(s)=\frac{0.5}{s+2}+\frac{1}{s+3}-\frac{1.5}{s+4}$$



状态方程的矩阵形式

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\\ \dot{x}_3(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q_1(t)\\ q_2(t)\\ q_3(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}x(t)$$

输出方程的矩阵形式

$$y(t)=\begin{bmatrix}0.5 & 1 & -1.5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q_1(t)\\ q_2(t)\\ q_3(t)\end{bmatrix}$$

由系统函数建立状态方程和输出方程

由**系统函数**画出连续系统的模拟框图；

由**模拟框图**建立系统的状态方程和输出方程。

不同结构的模拟框图，得到的状态方程和输出方程不同。

谢 谢

本课程所引用的一些素材为主讲老师多年的教学积累，来源于多种媒体及同事、同行、朋友的交流，难以一一注明出处，特此说明并表示感谢！