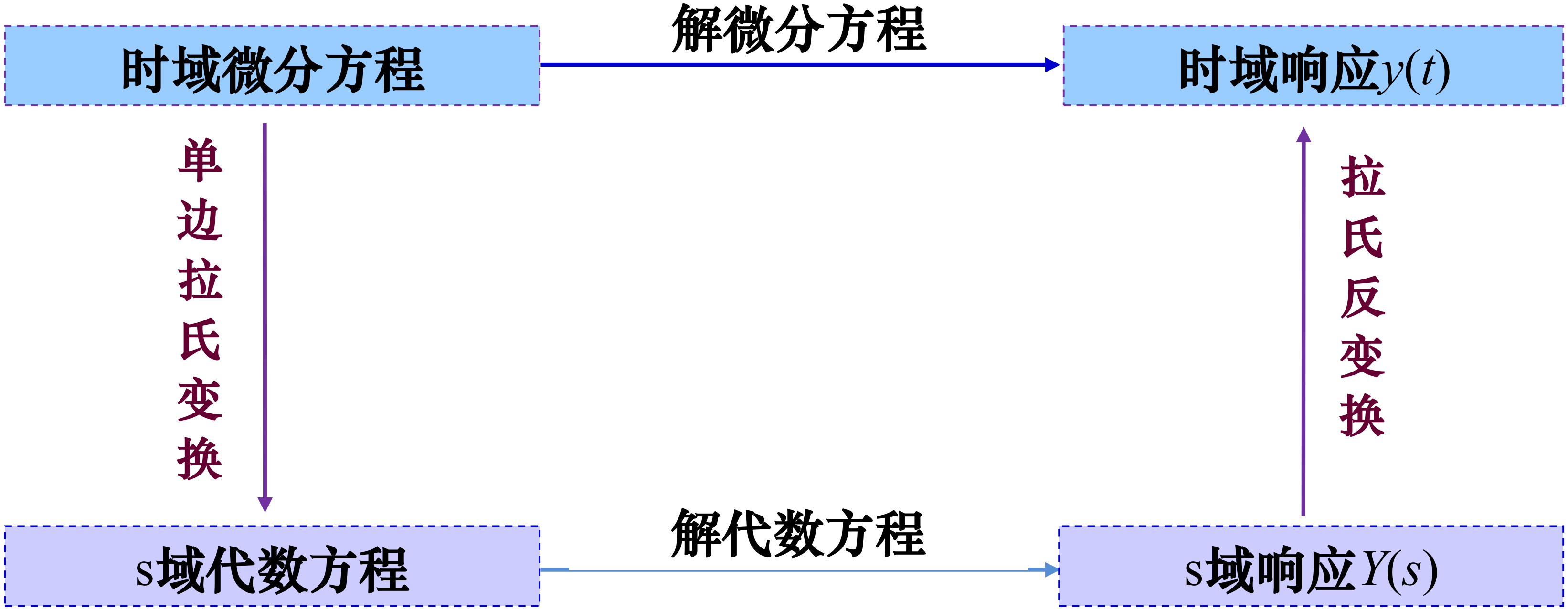
北京交通大學

信号与系统

主讲人：陈后金

电子信息工程学院

系统响应的复频域分析



系统响应的复频域分析

例：二阶系统响应的s域求解

$$\frac{\mathrm{d}^2 y(t)}{\mathrm{d}t^2}+5\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}+6y(t)=2\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}+8x(t)$$

已知 $x(t)=\mathrm{e}^{-t}u(t)$，$y(0^-)=3$，$y'(0^-)=2$，求$y(t)$。

求解步骤:

- ☼ 由拉氏变换将时域微分方程变换为s域代数方程
- ☼ 求解s域代数方程，求出$Y_{zi}(s)$, $Y_{zs}(s)$
- ☼ 拉氏反变换，求出响应的时域表示式

系统响应的复频域分析

$$y''(t) \leftrightarrow [s^2Y(s)-sy(0^-)-y'(0^-)]$$

$$5y'(t) \leftrightarrow +5[sY(s)-y(0^-)]$$

$$6y(t) \leftrightarrow +6Y(s)$$

$$=2sX(s)+8X(s) \leftarrow 2x'(t)+8x(t)$$

$$Y(s)=\underbrace{\frac{sy(0^-)+y'(0^-)+5y(0^-)}{s^2+5s+6}}_{Y_{zi}(s)}+\underbrace{\frac{2s+8}{s^2+5s+6}X(s)}_{Y_{zs}(s)}$$

$$Y_{zi}(s)=\frac{3s+17}{s^2+5s+6}=\frac{11}{s+2}-\frac{8}{s+3}$$

$$y_{zi}(t)=\mathscr{L}^{-1}\{Y_{zi}(s)\}=11\mathrm{e}^{-2t}-8\mathrm{e}^{-3t},\quad t\geq 0$$

系统响应的复频域分析

$$Y_{zs}(s)=\frac{2s+8}{s^2+5s+6}\cdot\frac{1}{s+1}=\frac{2s+8}{(s+2)(s+3)}\cdot\frac{1}{s+1}$$

$$=\frac{3}{s+1}-\frac{4}{s+2}+\frac{1}{s+3}$$

$$y_{zs}(t)=\mathscr{L}^{-1}\{Y_{zs}(s)\}=(3\mathrm{e}^{-t}-4\mathrm{e}^{-2t}+\mathrm{e}^{-3t})\cdot u(t)$$

$$y(t)=y_{zi}(t)+y_{zs}(t)=3\mathrm{e}^{-t}+7\mathrm{e}^{-2t}-7\mathrm{e}^{-3t},t\geq 0$$

系统响应的复频域分析

[练习1] $$\frac{\mathrm{d}^2 y(t)}{\mathrm{d}t^2}+7\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}+12y(t)=x(t)$$

已知 $x(t)=u(t)$，$y(0^-)=1$，$y'(0^-)=2$，求$y(t)$。

[答案]

$$y_{\mathrm{zi}}(t)=6\mathrm{e}^{-3t}-5\mathrm{e}^{-4t},t\geq 0$$

$$y_{\mathrm{zs}}(t)=(\frac{1}{12}-\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-3t}+\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-4t})u(t)$$

$$y(t)=\frac{1}{12}+\frac{17}{3}\mathrm{e}^{-3t}-\frac{19}{4}\mathrm{e}^{-4t},t\geq 0$$

系统响应的复频域分析

[练习2] $\dfrac{\mathrm{d}^2 y(t)}{\mathrm{d}t^2}+4\dfrac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}+4y(t)=3\dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}+2x(t)$

已知 $x(t) = 4u(t)$，$y(0^-) =-2$，$y'(0^-) =3$，求$y(t)$。

[答案] $y_{zi}(t)=-2\mathrm{e}^{-2t}-t\mathrm{e}^{-2t},\quad t\geq 0$

$$y_{zs}(t)=(2+8t\mathrm{e}^{-2t}-2\mathrm{e}^{-2t})u(t)$$

$$y(t)=2-4\mathrm{e}^{-2t}+7t\mathrm{e}^{-2t},\quad t\geq 0$$

系统响应的复频域分析

[练习3] $$\frac{\mathrm{d}^2 y(t)}{\mathrm{d}t^2}+4\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}+8y(t)=3\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}+x(t)$$

已知 $x(t)=\mathrm{e}^{-t}u(t)$，$y(0^-)=5$，$y'(0^-)=3$，求$y(t)$。

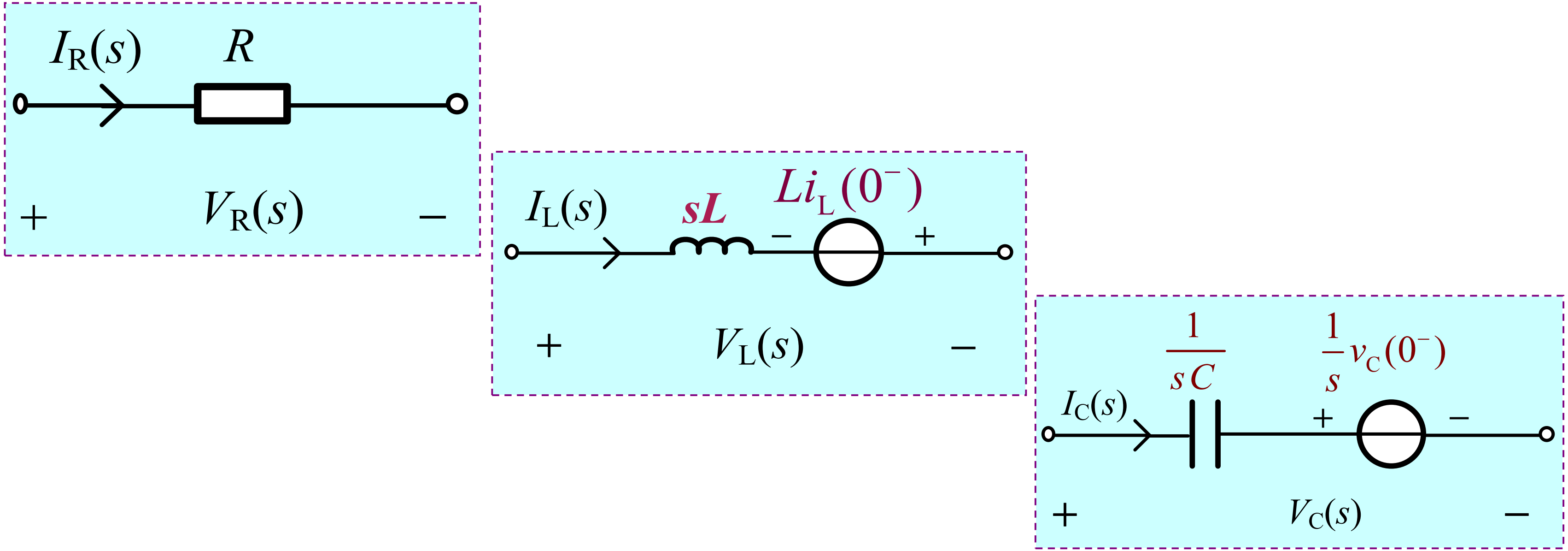
[答案] $$y_{zi}(t)=5\mathrm{e}^{-2t}\cos(2t)+\frac{13}{2}\mathrm{e}^{-2t}\sin(2t),\quad t\geq 0$$

$$y_{zs}(t)=\left[-0.4\mathrm{e}^{-t}+0.4\mathrm{e}^{-2t}\cos(2t)+1.7\mathrm{e}^{-2t}\sin(2t)\right]u(t)$$

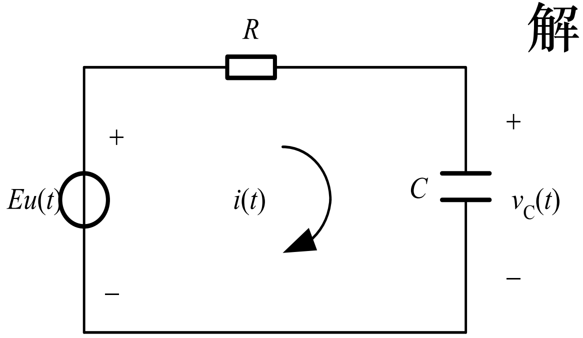
$$y(t)=-0.4\mathrm{e}^{-t}+5.4\mathrm{e}^{-2t}\cos(2t)+8.2\mathrm{e}^{-2t}\sin(2t),\quad t\geq 0$$

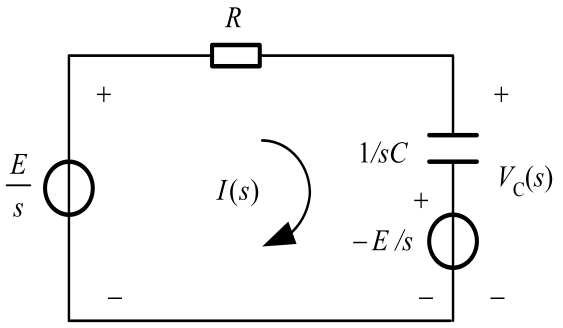
系统响应的复频域分析

R、L、C复频域模型



例：图示电路初始状态为$v_C(0^-)=-E$, 求电容两端电压$v_C(t)$。





解：建立电路的**复频域模型**

由复频域模型写回路方程 $(R+\frac{1}{sC})I(s)=\frac{E}{s}+\frac{E}{s}$

求出回路电流 $I(s)=\dfrac{2E}{s(R+\frac{1}{sC})}$

电容电压为 $V_C(s)=\dfrac{I(s)}{sC}-\dfrac{E}{s}=E(\dfrac{1}{s}-\dfrac{2}{s+\frac{1}{RC}})$

$$v_C(t)=E(1-2e^{-\frac{1}{RC}t}),t\geq 0$$

综合题：描述某连续时间LTI因果系统的微分方程为

$$y''(t)+7y'(t)+10y(t)=2x'(t)+3x(t)$$

已知 $x(t)=\mathrm{e}^{-t}u(t)$，$y(0^-)=1, y'(0^-)=1$ ，由复频域求解：

(1)零输入响应 $y_{zi}(t)$，零状态响应 $y_{zs}(t)$ ，完全响应 $y(t)$ 。

(2)系统函数$H(s)$，单位冲激响应$h(t)$，并判断系统是否稳定。

(3)画出系统的直接型模拟框图。

综合题：描述某连续时间LTI因果系统的微分方程为

$$y''(t)+7y'(t)+10y(t)=2x'(t)+3x(t)$$

已知 $x(t)=\mathrm{e}^{-t}u(t)$， $y(0^-)=1, y'(0^-)=1$,由复频域求解：

(1)零输入响应 $y_{zi}(t)$，零状态响应 $y_{zs}(t)$， 完全响应 $y(t)$ 。

解： (1) 对微分方程两边进行单边拉普拉斯变换得

$$s^2Y(s)-sy(0^-)-y'(0^-)+7sY(s)-7y(0^-)+10Y(s)=(2s+3)X(s)$$

$$Y(s)=\frac{sy(0^-)+y'(0^-)+7y(0^-)}{s^2+7s+10}+\frac{2s+3}{s^2+7s+10}X(s)$$

零输入响应的复频域表达式为 $Y_{zi}(s)=\dfrac{s+8}{s^2+7s+10}=\dfrac{2}{s+2}+\dfrac{-1}{s+5}$

进行单边拉普拉斯反变换可得 $y_{zi}(t)=\mathscr{L}^{-1}\{Y_{zs}(s)\}=2\mathrm{e}^{-2t}-\mathrm{e}^{-5t}, t\geq 0$

综合题：描述某连续时间LTI因果系统的微分方程为

$$y''(t)+7y'(t)+10y(t)=2x'(t)+3x(t)$$

已知 $x(t)=\mathrm{e}^{-t}u(t)$，$y(0^-)=1, y'(0^-)=1$ ，由复频域求解：

(1)零输入响应 $y_{zi}(t)$，零状态响应 $y_{zs}(t)$，完全响应 $y(t)$ 。

解： $$Y(s)=\frac{sy(0^-)+y'(0^-)+7y(0^-)}{s^2+7s+10}+\frac{2s+3}{s^2+7s+10}X(s)$$

零状态响应的复频域表达式为

$$Y_{zs}(s)=\frac{2s+3}{(s^2+7s+10)(s+1)}=\frac{1/4}{s+1}+\frac{1/3}{s+2}+\frac{-12/7}{s+5}$$

进行拉普拉斯反变换可得

$$y_{zs}(t)=\mathscr{L}^{-1}\{Y_{zs}(s)\}=(\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-t}+\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-2t}-\frac{7}{12}\mathrm{e}^{-5t})u(t)$$

完全响应为 $y(t)=y_{zi}(t)+y_{zs}(t)$ $=\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-t}+\frac{7}{3}\mathrm{e}^{-2t}-\frac{19}{12}\mathrm{e}^{-5t}, t>0$

综合题：描述某连续时间LTI因果系统的微分方程为

$$y''(t)+7y'(t)+10y(t)=2x'(t)+3x(t)$$

已知 $x(t)=\mathrm{e}^{-t}u(t)$，$y(0^-)=1, y'(0^-)=1$ ，由复频域求解：

(2)系统函数$H(s)$，单位冲激响应$h(t)$，并判断系统是否稳定。

解：

$$Y_{zs}(s)=\frac{2s+3}{(s^2+7s+10)}X(s)$$

(2) 根据系统函数的定义，可得

$$H(s)=\frac{Y_{zs}(s)}{X(s)}=\frac{2s+3}{s^2+7s+10}=\frac{-1/3}{s+2}+\frac{7/3}{s+5}$$

进行拉普拉斯反变换即得

$$h(t)=\mathscr{L}^{-1}[H(s)]=(-\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-2t}+\frac{7}{3}\mathrm{e}^{-5t})u(t)$$

对于因果系统，系统函数的极点为−2,−5位于左半s平面，故系统稳定。

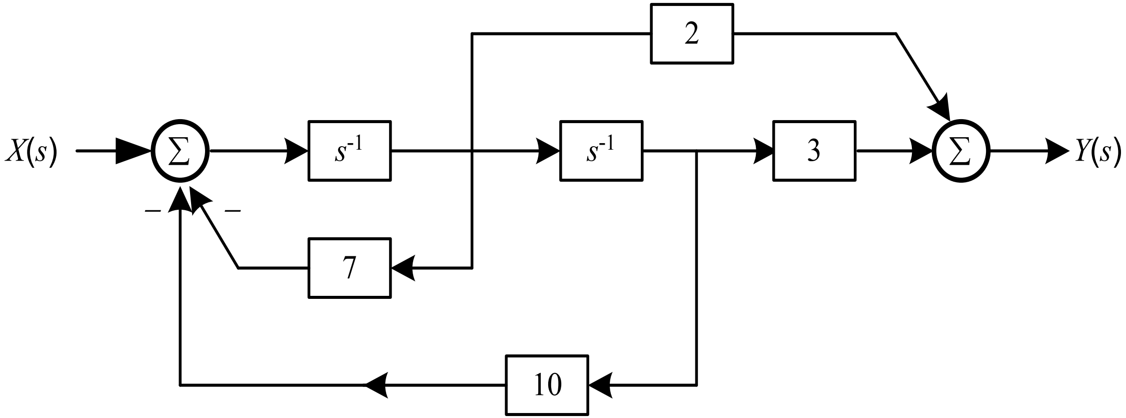
综合题：描述某连续时间LTI因果系统的微分方程为

$$y''(t)+7y'(t)+10y(t)=2x'(t)+3x(t)$$

已知 $x(t)=e^{-t}u(t)$，$y(0^-)=1, y'(0^-)=1$ ，由复频域求解：

(3)画出系统的直接型模拟框图。

解： (3) 将系统函数改写为$H(s)=\dfrac{2s^{-1}+3s^{-2}}{1+7s^{-1}+10s^{-2}}$



谢 谢

本课程所引用的一些素材为主讲老师多年的教学积累，来源于多种媒体及同事、同行、朋友的交流，难以一一注明出处，特此说明并表示感谢！