北京交通大學

信号与系统

主讲人：陈后金

电子信息工程学院

离散时间LTI系统响应的时域分析

- 迭代法
- 基于求解常系数线性差分方程的方法
- 基于零输入响应和零状态响应的方法

1. 迭代法

[例]线性常系数差分方程$y[k]-0.5y[k-1]=u[k]$, $y[-1]=1$,求差分方程。

解： 将差分方程写成 $y[k]=u[k]+0.5y[k-1]$

代入初始状态 $\longrightarrow$ $y[0]=u[0]+0.5y[-1]=1+0.5\times 1=1.5$

依此类推 $y[1]=u[1]+0.5y[0]=1+0.5\times 1.5=1.75$

$y[2]=u[2]+0.5y[1]=1+0.5\times 1.75=1.875$

$\vdots$

已知 n 个初始状态$\{y[-1], y[-2], y[-2],\cdots, y[-n]\}$和输入，由差分方程迭代出系统的输出，称为迭代法。

优点：简单直接，适合计算机计算； 缺点：很难得到闭合形式的解。

2.基于求解常系数线性差分方程的方法

描述离散LTI系统使用常系数线性差分方程

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y[k-i] = \sum_{j=0}^{m} b_j x[k-j]$$

差分方程的全解由齐次解$y_{\mathrm{h}}[k]$和特解$y_{\mathrm{p}}[k]$组成

$$y[k] = y_{\mathrm{h}}[k] + y_{\mathrm{p}}[k]$$

- ✓ 齐次解$y_{\mathrm{h}}[k]$的形式由差分方程对应的特征根确定
- ✓ 特解$y_{\mathrm{p}}[k]$的形式由方程右边激励信号的形式确定

差分方程的全解即为系统的输出响应。

2.基于求解常系数线性差分方程的方法

[例]已知描述某离散时间LTI系统的差分方程 为

$$y[k]-5y[k-1]+6y[k-2]=x[k],\quad k\geq 0$$

初始条件$y[0]=0, y[1]=-1$, 输入信号$x[k]=4^k u[k]$，求全解$y[k]$。

解： (1) 确定齐次方程

$$y[k]-5y[k-1]+6y[k-2]=0$$ 齐次解$y_h[k]$的形式

特征方程为 $\qquad r^2-5r+6=0$

特征根为 $\qquad r_1=2, r_2=3$

齐次解$y_h[k]$ $\qquad y_h[k]=C_1 2^k+C_2 3^k,\quad k\geq 0$

2.基于求解常系数线性差分方程的方法

[例]已知描述某离散时间LTI系统的差分方程 为

$$y[k]-5y[k-1]+6y[k-2]=x[k]，k\geq 0$$

初始条件$y[0]=0, y[1]=-1$, 输入信号$x[k]=4^k u[k]$，求全解$y[k]$。

解：(2) 求差分方程$y[k]-5y[k-1]+6y[k-2]=x[k]$的特解$y_p[k]$

由输入$x[k]$的形式，设方程的特解为

$$y_p[k]=A\cdot 4^k,\quad k\geq 0$$

将特解带入原差分方程即可求得待定系数$A=8$。

2.基于求解常系数线性差分方程的方法

[例]已知描述某离散时间LTI系统的差分方程 为

$$y[k]-5y[k-1]+6y[k-2]=x[k],\quad k\geq 0$$

初始条件$y[0]=0$, $y[1]=-1$, 输入信号$x[k]=4^k u[k]$，求全解$y[k]$。

解： (3) 求方程的全解

$$y[k]=y_{\mathrm{h}}[k]+y_{\mathrm{p}}[k]=C_1 2^k+C_2 3^k+8\cdot 4^k,\quad k\geq 0$$

$$\left.\begin{aligned} y[0]&=C_1+C_2+8=0\\ y[1]&=2C_1+3C_2+32=-1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow C_1=9,\quad C_2=-17$$

$$y[k]=9\cdot 2^k-17\cdot 3^k+8\cdot 4^k,\quad k\geq 0$$

2.基于求解常系数线性差分方程的方法

若初始条件不变，输入信号$x[k]=3^k u[k]$，则系统的完全响应 $y[k]$= ?

2.基于求解常系数线性差分方程的方法

[例]已知描述某离散时间LTI系统的差分方程 为

$$y[k]-5y[k-1]+6y[k-2]=x[k],\quad k\geq 0$$

初始条件$y[0]=0, y[1]=-1$, 输入信号$x[k]=3^k u[k]$，求全解$y[k]$。

解：(1) 确定齐次方程

$y[k]-5y[k-1]+6y[k-2]=0$齐次解$y_h[k]$的形式

特征方程为 $r^2-5r+6=0$

特征根为 $r_1=2, r_2=3$

齐次解$y_h[k]$ $y_h[k]=C_1 2^k+C_2 3^k,\quad k\geq 0$

2.基于求解常系数线性差分方程的方法

[例]已知描述某离散时间LTI系统的差分方程 为

$$y[k]-5y[k-1]+6y[k-2]=x[k],\quad k\geq 0$$

初始条件$y[0]=0, y[1]=-1$, 输入信号$x[k]=3^k u[k]$，求全解$y[k]$。

解： (2) 求差分方程$y[k]-5y[k-1]+6y[k-2]=x[k]$的特解$y_p[k]$

由输入$x[k]$的形式，设方程的特解为

$$y_p[k]=Ak3^k,\quad k\geq 0$$

将特解带入原差分方程即可求得待定系数$A=3$。

2.基于求解常系数线性差分方程的方法

[例]已知描述某离散时间LTI系统的差分方程 为

$$y[k]-5y[k-1]+6y[k-2]=x[k],\quad k\geq 0$$

初始条件$y[0]=0, y[1]=-1$, 输入信号$x[k]=3^k u[k]$，求全解$y[k]$。

解： (3) 求方程的全解

$$y[k]=y_{\mathrm{h}}[k]+y_{\mathrm{p}}[k]=C_1 2^k+C_2 3^k+3k3^k$$

$$y[0]=C_1+C_2=0$$

$$y[1]=2C_1+3C_2+9=-1$$

$$\Rightarrow \quad C_1=10,\quad C_2=-10$$

$$y[k]=10\cdot 2^k-10\cdot 3^k+3k3^k,\quad k\geq 0$$

2.基于求解常系数线性差分方程的方法

若输入信号不变，初始条件 $y[0]=0, y[1]=1$, 则系统的完全响应 $y[k]=?$

2.基于求解常系数线性差分方程的方法

[例]已知描述某离散时间LTI系统的差分方程 为

$$y[k]-5y[k-1]+6y[k-2]=x[k], \quad k\geq 0$$

初始条件$y[0]=0, y[1]=1$, 输入信号$x[k]=4^k u[k]$，求全解$y[k]$。

解：(1) 确定齐次方程

$$y[k]-5y[k-1]+6y[k-2]=0$$ 齐次解$y_h[k]$的形式

特征方程为 $r^2-5r+6=0$

特征根为 $r_1=2, r_2=3$

齐次解$y_h[k]$ $y_h[k]=C_1 2^k+C_2 3^k, \quad k\geq 0$

2.基于求解常系数线性差分方程的方法

[例]已知描述某离散时间LTI系统的差分方程 为

$$y[k]-5y[k-1]+6y[k-2]=x[k], \quad k\geq 0$$

初始条件$y[0]=0, y[1]=1$, 输入信号$x[k]=4^k u[k]$，求全解$y[k]$。

解： (2) 求差分方程$y[k]-5y[k-1]+6y[k-2]=x[k]$的特解$y_p[k]$

由输入$x[k]$的形式，设方程的特解为

$$y_p[k]=A\cdot 4^k, \quad k\geq 0$$

将特解带入原差分方程即可求得待定系数$A=8$。

2.基于求解常系数线性差分方程的方法

[例]已知描述某离散时间LTI系统的差分方程 为

$$y[k]-5y[k-1]+6y[k-2]=x[k]，\ k\geq 0$$

初始条件$y[0]=0,\ y[1]=1$, 输入信号$x[k]=4^k u[k]$，求全解$y[k]$。

解： (3) 求方程的全解

$$y[k]=y_{\mathrm{h}}[k]+y_{\mathrm{p}}[k]=C_1 2^k+C_2 3^k+8\cdot 4^k,\quad k\geq 0$$

$$y[0]=C_1+C_2+8=0$$

$$y[1]=2C_1+3C_2+32=1$$

$\Rightarrow$ $C_1=7$，$C_2=-15$

$$y[k]=7\cdot 2^k-15\cdot 3^k+8\cdot 4^k,\quad k\geq 0$$

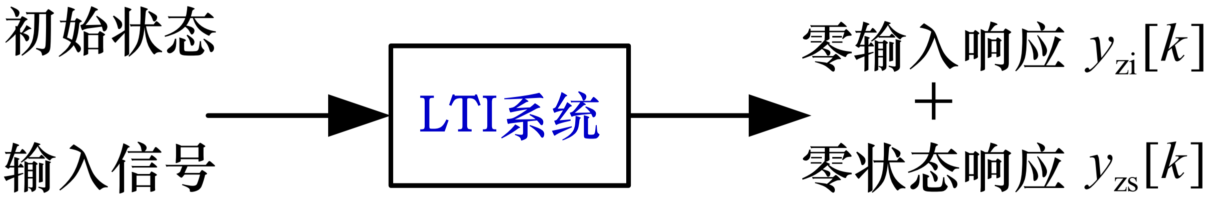
2.基于求解常系数线性差分方程的方法

基于求解常系数差分方程的方法不足之处

- 若输入信号发生变化，则须全部重新求解。
- 若初始条件发生变化，则须全部重新求解。
- 若差分方程右边激励项较复杂，则难以处理。

3.基于零输入响应和零状态响应分解的方法

根据离散LTI系统的线性特性，将系统响应看作是由**初始状态**与**输入信号**分别单独作用于系统而产生的响应之叠加。



完全响应 $y[k]$ = **零输入响应** $y_{zi}[k]$ + **零状态响应** $y_{zs}[k]$

3.基于零输入响应和零状态响应分解的方法

零输入响应

输入信号为零，仅由系统的初始状态单独作用而产生的响应称为零输入响应，记为$y_{zi}[k]$。

描述LTI系统使用常系数线性差分方程

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y[k-i] = \sum_{j=0}^{m} b_j x[k-j]$$

当输入$x[k]$=0

$$\downarrow$$

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y[k-i] = 0$$

上式为齐次方程，因此零输入响应具有齐次解的形式

3.基于零输入响应和零状态响应分解的方法

零状态响应

初始状态为零，仅由系统的外部信号$x[k]$产生的响应称为系统的零状态响应，用$y_{zs}[k]$表示。

零状态响应分析方法

(1) 将输入信号表示为单位脉冲序列的线性组合

(2) 求出单位脉冲序列作用于系统产生的零状态响应

——单位脉冲响应$h[k]$

(3) 利用线性非时变系统的特性，即可求出输入信号$x[k]$激励下系统的零状态响应$y_{zs}[k]$。

3.基于零输入响应和零状态响应分解的方法

零状态响应

$\delta[k] \longrightarrow$ 离散LTI系统 $\longrightarrow h[k]$ 单位脉冲响应

非时变性： $\delta[k-n] \longrightarrow$ 离散LTI系统 $\longrightarrow h[k-n]$

均匀性： $x[n]\delta[k-n] \longrightarrow$ 离散LTI系统 $\longrightarrow x[n]h[k-n]$

叠加性： $\underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\delta[k-n]}_{x[k]} \longrightarrow$ 离散LTI系统 $\longrightarrow \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]h[k-n]}_{y_{zs}[k]=x[k]*h[k]}$

3.基于零输入响应和零状态响应分解的方法

系统响应 $y[k]$ = **零输入响应** $y_{zi}[k]$ + **零状态响应** $y_{zs}[k]$

求解齐次差分方程

$y_{zs}[k]=x[k]*h[k]$

※ 零输入响应的求解

※ 单位脉冲响应求解

※ 零状态响应的求解

谢 谢

本课程所引用的一些素材为主讲老师多年的教学积累，来源于多种媒体及同事、同行、朋友的交流，难以一一注明出处，特此说明并表示感谢！