北京交通大学

信号与系统

主讲人：陈后金

电子信息工程学院

离散周期信号的频域分析

※ 离散周期信号的频域表示

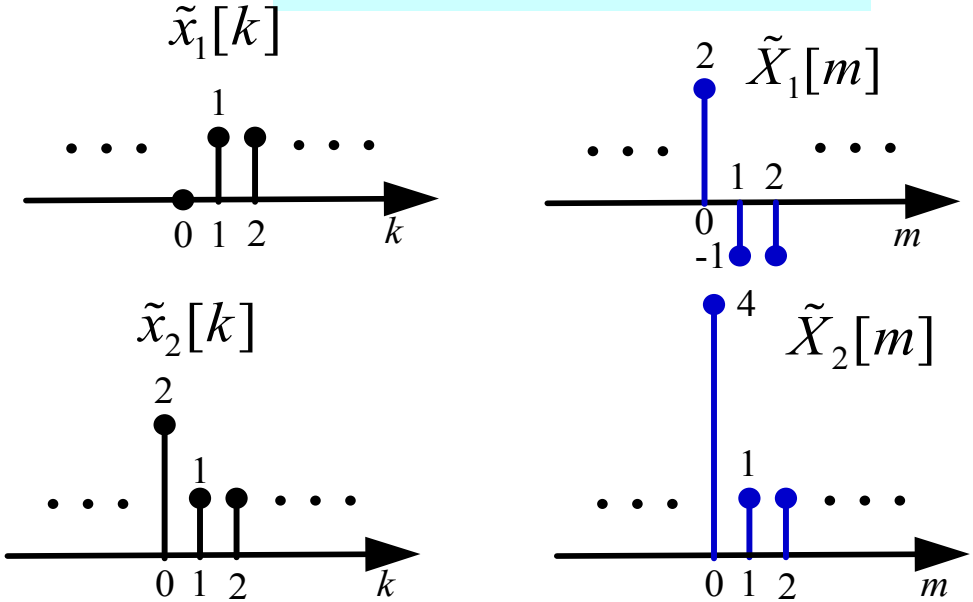
※ 离散周期信号的频谱

1. 离散周期信号的频域表示

周期为N的离散周期信号$\tilde{x}[k]$可用虚指数序列表示为

$$\tilde{x}[k]=\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}\tilde{X}[m]\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega_m k}$$

$$\Omega_m=\frac{2\pi}{N}m \qquad m=0,1,\cdots,N-1$$



时域信号不同，虚指数序列前面的加权系数$\tilde{X}[m]$不同。

1. 离散周期信号的频域表示

IDFS

$$\tilde{x}[k]=\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}\tilde{X}[m]\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega_m k}$$

$$\Omega_m=\frac{2\pi}{N}m \qquad m=0,1,\cdots,N-1$$

DFS

$$\tilde{X}[m]=\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{x}[k]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega_m k}$$

$\tilde{X}[m]$称为离散周期信号 $\tilde{x}[k]$ 的频谱。

$$\tilde{x}[k]\xleftrightarrow{\text{DFS}}\tilde{X}[m]$$

2.离散周期信号的频谱

$\tilde{X}[m]$ 特点：

(1) $\tilde{X}[m]$ 是离散谱

(2) $\tilde{X}[m]$ 是周期为 N 的周期序列

$$\tilde{X}[m+N]=\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{x}[k]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}(m+N)k}=\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{x}[k]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}mk}=\tilde{X}[m]$$

$$\tilde{X}[m]=\left|\tilde{X}[m]\right|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi[m]}$$

幅度频谱

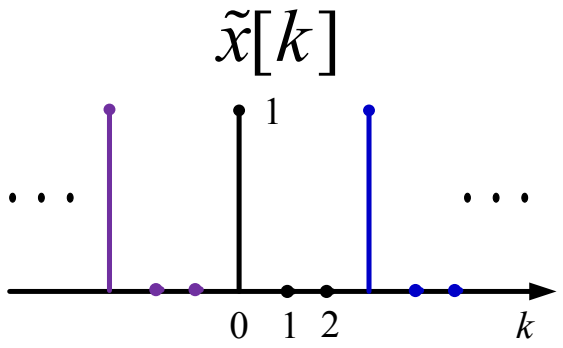
相位频谱

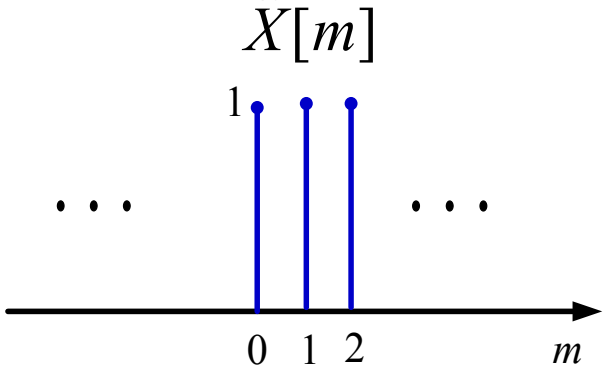
2.离散周期信号的频谱

周期单位脉冲序列

求如图所示周期为3的周期单位脉冲序列的频谱。

解：$$\tilde{X}[m]=\sum_{k=0}^{2}\tilde{x}[k]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{3}mk}=1\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{3}m\cdot 0}=1$$

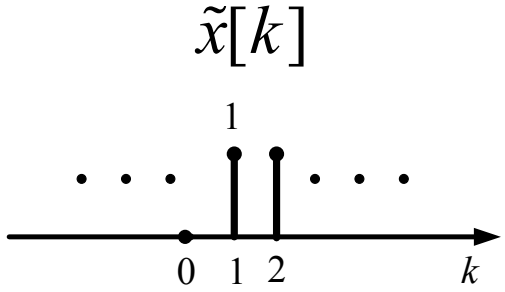




2.离散周期信号的频谱

例：求周期为3的序列 $\tilde{x}[k]=\{\cdots,\underset{\downarrow}{0},1,1,\cdots\}$ 的频谱。

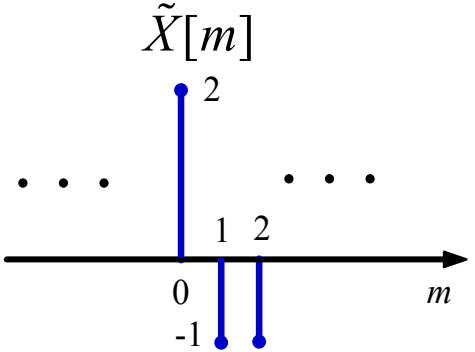
解：$$\tilde{X}[m]=\sum_{k=0}^{2}\tilde{x}[k]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{3}mk}$$



$$\tilde{X}[0]=\tilde{x}[0]+\tilde{x}[1]+\tilde{x}[2]=2$$

$$\tilde{X}[1]=\tilde{x}[0]+\tilde{x}[1]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{3}\cdot1\cdot1}+\tilde{x}[2]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{3}\cdot1\cdot2}=-1$$

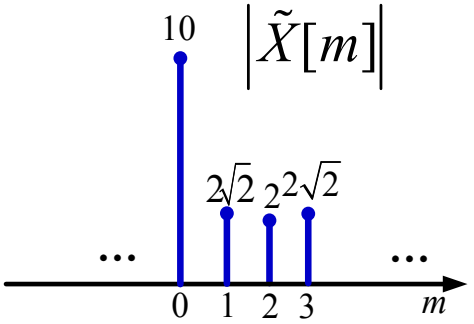
$$\tilde{X}[2]=\tilde{x}[0]+\tilde{x}[1]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{3}\cdot2\cdot1}+\tilde{x}[2]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{3}\cdot2\cdot2}=-1$$



2.离散周期信号的频谱

例：求周期为4的序列$\tilde{x}[k]=\{\cdots,\underset{\downarrow}{1},2,3,4,\cdots\}$的频谱。

解：$$\tilde{X}[m]=\sum_{k=0}^{3}\tilde{x}[k]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{4}mk}$$

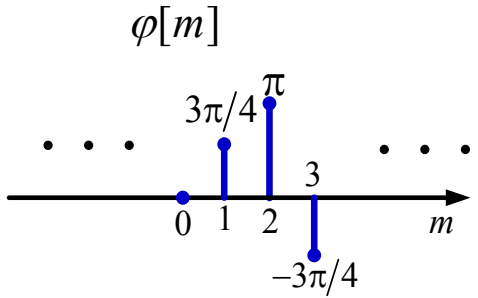


$$\tilde{X}[0]=\tilde{x}[0]+\tilde{x}[1]+\tilde{x}[2]+\tilde{x}[3]=10$$

$$\tilde{X}[1]=\tilde{x}[0]+\tilde{x}[1]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{4}\cdot1\cdot1}+\tilde{x}[2]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{4}\cdot1\cdot2}+\tilde{x}[3]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{4}\cdot1\cdot3}=-2+2\mathrm{j}$$

$$\tilde{X}[2]=\tilde{x}[0]+\tilde{x}[1]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{4}\cdot2\cdot1}+\tilde{x}[2]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{4}\cdot2\cdot2}+\tilde{x}[3]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{4}\cdot2\cdot3}=-2$$

$$\tilde{X}[3]=\tilde{x}[0]+\tilde{x}[1]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{4}\cdot3\cdot1}+\tilde{x}[2]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{4}\cdot3\cdot2}+\tilde{x}[3]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{4}\cdot3\cdot3}=-2-2\mathrm{j}$$



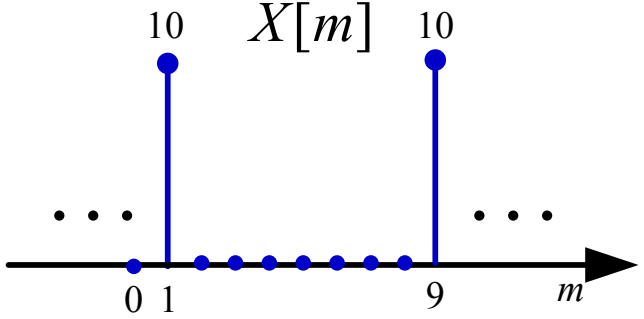
2.离散周期信号的频谱

例：求周期序列 $\tilde{x}[k]=2\cos\left[\pi k/5\right]$ 的频谱。

解：周期序列 $\tilde{x}[k]=2\cos\left[\pi k/5\right]$ 的周期为10。

$$\tilde{x}[k]=\frac{1}{10}\left(10\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{10}k}+10\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{10}k}\right)$$

$$=\frac{1}{10}\left[10\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{10}k}+10\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{10}(10-1)k}\right]$$



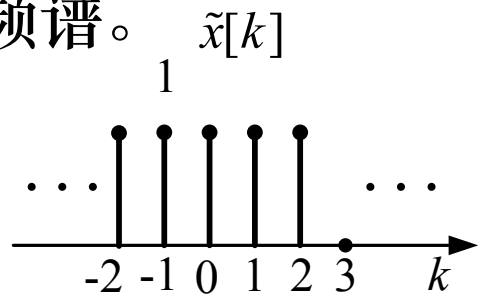
对比IDFS表达式，可得周期序列$\tilde{x}[k]$的DFS系数为

$$\tilde{X}[m]=\begin{cases}10 & m=1,\ 9\\ 0 & m=0,2\le m\le 8\end{cases}$$

2.离散周期信号的频谱

周期矩形序列

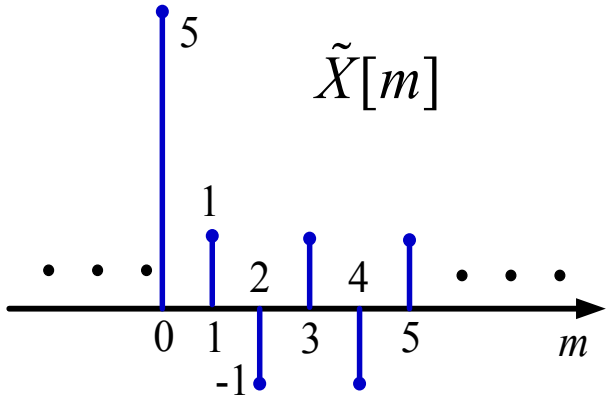
求如图所示周期为6的周期矩形序列的频谱。



解：

$$\tilde{X}[m]=\sum_{k=-2}^{3}\tilde{x}[k]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega_m k}$$

$$=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{6}2m}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{6}3m}}{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{6}m}}=\frac{\sin\left(\frac{5\pi}{6}m\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{6}m\right)}$$



谢　谢

本课程所引用的一些素材为主讲老师多年的教学积累，来源于多种媒体及同事、同行、朋友的交流，难以一一注明出处，特此说明并表示感谢！