北京交通大學

信号与系统

主讲人：陈后金

电子信息工程学院

单边拉普拉斯变换的性质

- 线性特性
- 时移特性
- 展缩特性
- 卷积特性
- 乘积特性
- 指数加权特性
- 线性加权特性
- 微分特性
- 积分特性
- 初值及终值定理

1．线性特性

▶ 线性特性

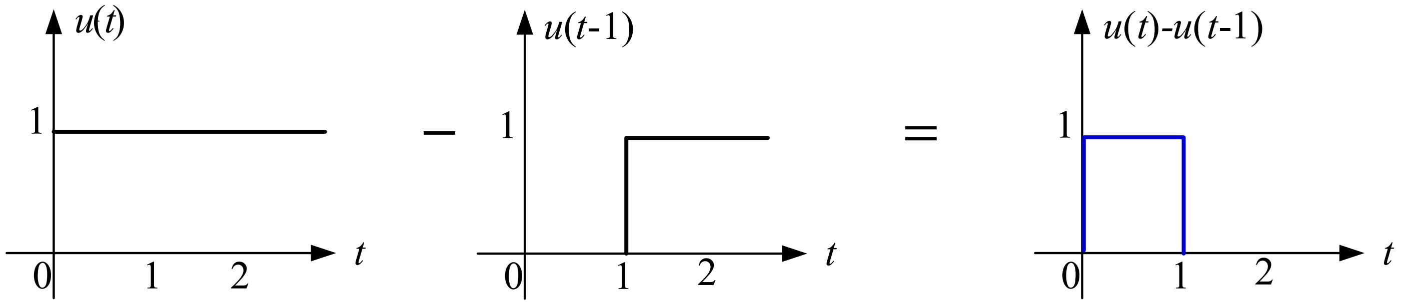
若 $$x_1(t) \xleftrightarrow{\mathscr{L}} X_1(s),\quad \mathrm{Re}(s) > \sigma_1$$

$$x_2(t) \xleftrightarrow{\mathscr{L}} X_2(s),\quad \mathrm{Re}(s) > \sigma_2$$

则 $$\alpha x_1(t) + \beta x_2(t) \xleftrightarrow{\mathscr{L}} \alpha X_1(s) + \beta X_2(s)$$

$$\mathrm{Re}(s) > \max(\sigma_1, \sigma_2)$$

例：试利用线性特性求解$u(t)-u(t-1)$的单边Laplace变换。



由于 $u(t) \xleftrightarrow{\mathscr{L}} \frac{1}{s}$, $\mathrm{Re}(s) > 0$ 且 $u(t-1) \xleftrightarrow{\mathscr{L}} \frac{1}{s}\mathrm{e}^{-s}$, $\mathrm{Re}(s) > 0$

利用拉氏变换的线性特性,可得

$$u(t)-u(t-1) \xleftrightarrow{\mathscr{L}} \frac{1}{s}-\frac{1}{s}\mathrm{e}^{-s}=\frac{1-\mathrm{e}^{-s}}{s}, \qquad \mathrm{Re}(s) > -\infty$$

2. 时移特性

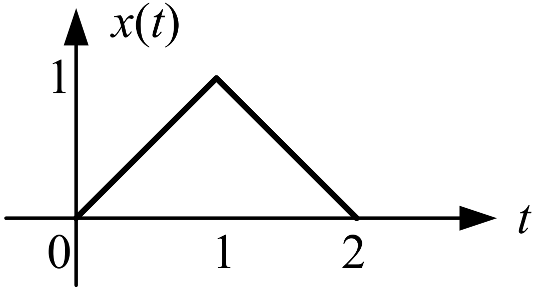
▶ 时移特性

若 $x(t) \xleftrightarrow{\mathscr{L}} X(s)$， $\mathrm{Re}(s) > \sigma_0$

则 $x(t-t_0)u(t-t_0) \xleftrightarrow{\mathscr{L}} \mathrm{e}^{-st_0}X(s) \qquad (t_0 > 0)$

$$\mathrm{Re}(s) > \sigma_0$$

例：利用时移特性和线性特性，求解$x(t)$的单边Laplace变换。



解：$x(t)$可用基本信号表达为

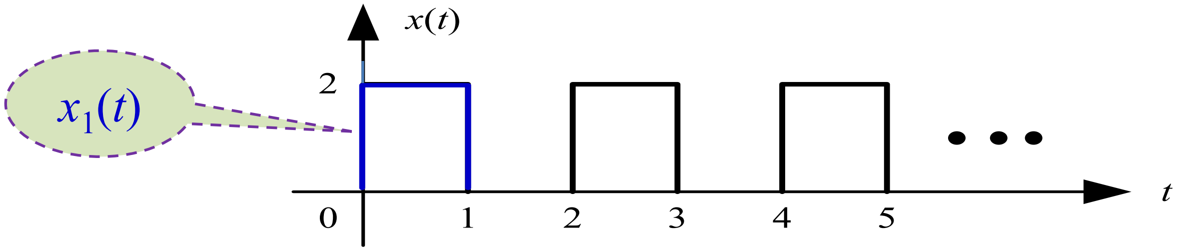
$$x(t)=r(t)-2r(t-1)+r(t-2)$$

已知 $r(t)=tu(t)\xleftrightarrow{\mathscr{L}}\frac{1}{s^2}$ ， $\mathrm{Re}(s)>0$

利用拉氏变换的时移特性和线性特性，可得:

$$X(s)=\frac{1}{s^2}(1-2e^{-s}+e^{-2s})=\frac{1-2e^{-s}+e^{-2s}}{s^2}\qquad \mathrm{Re}(s)>-\infty$$

例：试求如图所示信号的单边Laplace变换。



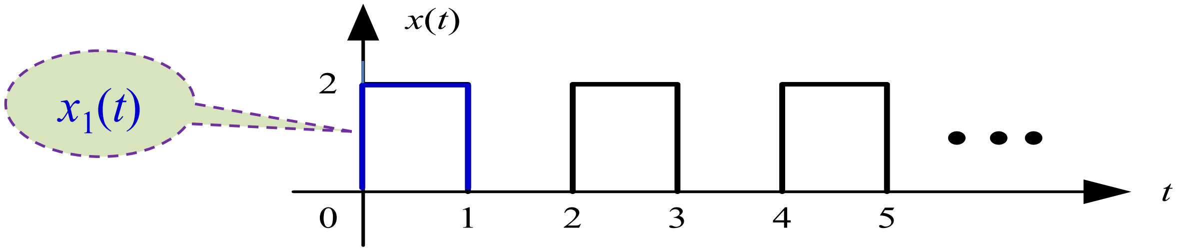
分析：周期为T的单边周期信号$x(t)$可以表示为第一个周期号$x_1(t)$及其时移$x_1(t-kT)$的线性组合，即

$$x(t)=\sum_{n=0}^{\infty}x_1(t-nT)$$

若计算出$x_1(t)$的Laplace变换$X_1(s)$，利用Laplace变换的时移特性和线性特性，即可求得所给信号的Laplace变换为

$$\mathscr{L}[x(t)]=\sum_{n=0}^{\infty}X_1(s)\cdot \mathrm{e}^{-snT}=\frac{X_1(s)}{1-\mathrm{e}^{-sT}}\qquad \mathrm{Re}(s)>0$$

例：试求如图所示信号的单边Laplace变换。



解： $x_1(t) = 2[u(t) - u(t-1)]$

且 $\xleftrightarrow{\mathscr{L}} \dfrac{2}{s}(1-\mathrm{e}^{-s}), \qquad \mathrm{Re}(s) > -\infty$

由于 $x(t) = x_1(t) + x_1(t-2) + x_1(t-4) + \cdots$

所以 $X(s) = X_1(s)(1+\mathrm{e}^{-2s}+\mathrm{e}^{-4s}+\cdots) = \dfrac{X_1(s)}{1-\mathrm{e}^{-2s}} \qquad \mathrm{Re}(s) > 0$

3. 展缩特性

▶ 展缩特性

若 $$x(t) \xleftrightarrow{\mathscr{L}} X(s) \quad \mathrm{Re}(s) > \sigma_0$$

则 $$x(at) \xleftrightarrow{\mathscr{L}} \frac{1}{a} X\left(\frac{s}{a}\right), \qquad (a > 0)$$

$$\mathrm{Re}(s) > a\sigma_0$$

4. 卷积特性

▶ 卷积特性

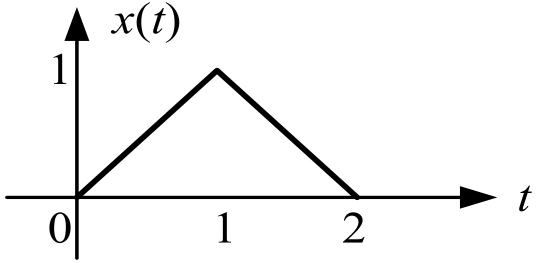
若 $x_1(t) \xleftrightarrow{\mathscr{L}} X_1(s),\quad \mathrm{Re}(s) > \sigma_1$

$x_2(t) \xleftrightarrow{\mathscr{L}} X_2(s),\quad \mathrm{Re}(s) > \sigma_2$

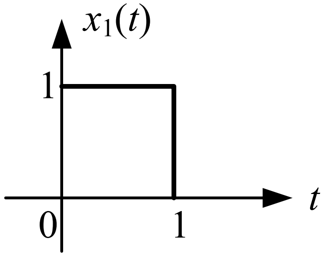
则 $x_1(t) * x_2(t) \xleftrightarrow{\mathscr{L}} X_1(s) X_2(s)$

$\mathrm{Re}(s) > \max(\sigma_1, \sigma_2)$

例: 试利用卷积特性求解如图所示信号的单边Laplace变换:



解: $x(t)$可以表达为 $x(t)=x_1(t)*x_1(t)$



其中，$x_1(t)=u(t)-u(t-1)$

$$x_1(t) \xleftrightarrow{\mathscr{L}} X_1(s)=\frac{1-e^{-s}}{s}, \quad \mathrm{Re}(s)>-\infty$$

因此，利用拉氏变换的卷积特性,可得

$$X(s)=X_1(s)\cdot X_1(s)=(\frac{1-e^{-s}}{s})^2, \quad \mathrm{Re}(s)>-\infty$$

5. 乘积特性

▶ 乘积特性

若 $$x_1(t) \overset{\mathscr{L}}{\longleftrightarrow} X_1(s), \quad \mathrm{Re}(s) > \sigma_1$$

$$x_2(t) \overset{\mathscr{L}}{\longleftrightarrow} X_2(s), \quad \mathrm{Re}(s) > \sigma_2$$

则 $$x_1(t)x_2(t) \overset{\mathscr{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{2\pi \mathrm{j}}[X_1(s) * X_2(s)]$$

$$\mathrm{Re}(s) > \sigma_1 + \sigma_2$$

谢　谢

本课程所引用的一些素材为主讲老师多年的教学积累，来源于多种媒体及同事、同行、朋友的交流，难以一一注明出处，特此说明并表示感谢！