北京交通大学

信号与系统

主讲人：陈后金

电子信息工程学院

连续系统的复频域描述

※ 连续时间LTI系统的系统函数

若描述连续LTI系统的微分方程为

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = b_m x^{(m)}(t) + b_{m-1} x^{(m-1)}(t) + \cdots + b_1 x'(t) + b_0 x(t)$$

利用Laplace变换微分特性，可得描述该系统的复频域方程

$$[a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0] Y_{zs}(s) = [b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0] X(s)$$

连续系统的复频域描述

※ 连续时间LTI系统的系统函数

$$[a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0] Y_{zs}(s) =$$
$$[b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0] X(s)$$

系统函数定义为

$$H(s) = \frac{Y_{zs}(s)}{X(s)} = \boxed{\frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}}$$

连续系统的复频域描述

▶ **系统函数*H*(*s*)与冲激响应*h*(*t*) 的关系**

$$H(s)=\frac{Y_{zs}(s)}{X(s)}=\frac{\mathscr{L}[h(t)]}{\mathscr{L}[\delta(t)]}=\mathscr{L}[h(t)]$$

$$h(t)=\mathscr{L}^{-1}[H(s)]$$

连续系统的复频域描述

▶ **系统函数$H(s)$与零状态响应$Y_{zs}(s)$ 的关系**

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\begin{matrix} h(t) \\ H(s) \end{matrix}} \longrightarrow y_{zs}(t) = x(t) * h(t)$$

$$X(s) \qquad\qquad Y_{zs}(s) = X(s)H(s)$$

连续系统的复频域描述

▶ **求解系统函数*H*(s)的主要方法**

① 由系统的冲激响应求解：$H(s)=\mathscr{L}\,[h(t)]$

② 由系统的输入-输出计算: $H(s)=\dfrac{\mathscr{L}[y_{zs}(t)]}{\mathscr{L}[x(t)]}$

③ 由描述连续时间系统的微分方程计算

例：试求理想积分器和理想微分器的系统函数$H(s)$

解：(1) 理想积分器的输入输出关系为

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\mathrm{d}\tau$$

系统的冲激响应为

$$h(t)=\delta^{(-1)}(t)=u(t)$$

因此，理想积分器的系统函数为

$$H(s)=\mathscr{L}[h(t)]=\frac{1}{s}$$

例：试求理想积分器和理想微分器的系统函数$H(s)$

解：(2) 理想微分器的输入输出关系为

$$y(t)=\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}$$

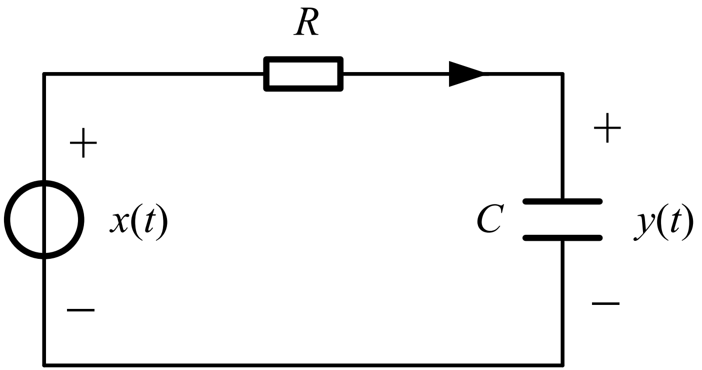
系统的冲激响应为

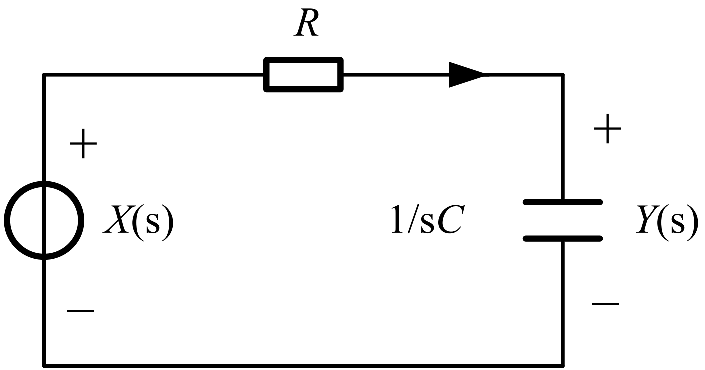
$$h(t)=\frac{\mathrm{d}\delta(t)}{\mathrm{d}t}$$

因此，理想积分器的系统函数为

$$H(s)=\mathscr{L}[h(t)]=s$$

例：图示RC电路系统，激励电压源为$x(t)$，输出电压 $y(t)$ 电容两端的电压$v_C(t)$，电路的初始状态为零。求系统的系统函数$H(s)$和冲激响应$h(t)$。





解： RC电路的复频域模型如图，由电路的基本原理可得

$$H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{1/sC}{R+\dfrac{1}{sC}}=\frac{1/RC}{s+1/RC}$$

例：图示RC电路系统，激励电压源为$x(t)$，输出电压 $y(t)$ 电容两端的电压$v_C(t)$，电路的初始状态为零。求系统的系统函数$H(s)$和冲激响应$h(t)$。

解：
$$H(s)=\frac{1/RC}{s+1/RC}$$

由Laplace反变换，可得RC系统的冲激响应$h(t)$为

$$h(t)=\frac{1}{RC}\mathrm{e}^{-(1/RC)t}u(t)$$

例：已知描述某连续时间LTI系统的微分方程为

$$y''(t)+3y'(t)+2y(t)=3x(t)+2x'(t) \quad t \geq 0$$

试求该系统的系统函数$H(s)$和单位冲激响应$h(t)$。

解：对微分方程两边进行Laplace变换得

$$(s^2+3s+2)Y_{zs}(s)=(2s+3)X(s)$$

根据系统函数的定义可得

$$H(s)=\frac{Y_{zs}(s)}{X(s)}=\frac{2s+3}{s^2+3s+2}=\frac{1}{s+1}+\frac{1}{s+2}$$

进行Laplace反变换，可得 $h(t)=(\mathrm{e}^{-t}+\mathrm{e}^{-2t})u(t)$

谢 谢

本课程所引用的一些素材为主讲老师多年的教学积累，来源于多种媒体及同事、同行、朋友的交流，难以一一注明出处，特此说明并表示感谢！