北京交通大学

信号与系统

主讲人：陈后金

电子信息工程学院

连续周期信号的频域分析

- 连续周期信号的频域表示
- 连续周期信号的频谱
- 连续傅里叶级数的性质

连续周期信号的频谱

$$\tilde{x}(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \, \mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_0 t}$$

指数形式的傅里叶级数

$$\Updownarrow$$

$$C_n=\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}\tilde{x}(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_0 t}\,\mathrm{d}t$$

- 周期信号 $\tilde{x}(t)$ 可以表示为无数个**虚指数信号**的**线性叠加**
- C_n 是$n\omega_0$的函数，$C_n=C_n(n\omega_0)$简写为 C_n

连续周期信号的频谱

$$\tilde{x}(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_0 t}$$

$$\tilde{x}(t)=C_0+C_{-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 t}+C_1\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}+C_{-2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\omega_0 t}+C_2\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\omega_0 t}+\ldots+C_{-N}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}N\omega_0 t}+C_N\mathrm{e}^{\mathrm{j}N\omega_0 t}+\ldots$$

直流分量

基波分量

N 次谐波分量

- C_n 反映了周期信号 $\tilde{x}(t)$ 中各次谐波的分布

C_n 称为周期信号 $\tilde{x}(t)$ 的频谱，$\tilde{x}(t)$ 与 C_n 存在一一对应关系。

连续周期信号的频谱

$$\tilde{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \,\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_0 t}$$

$$C_n = \frac{1}{T_0}\int_{t_0}^{T_0+t_0} \tilde{x}(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_0 t}\mathrm{d}t$$

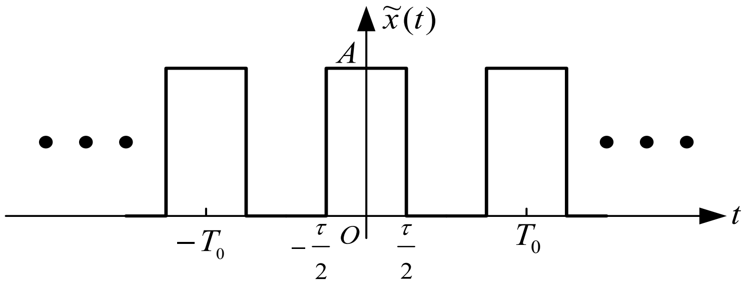
$$C_n = \underbrace{|C_n|}_{\text{幅度频谱}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\overbrace{\varphi_n}^{\text{相位频谱}}}$$

连续周期信号的频谱

[例] 计算周期矩形信号指数形式的傅里叶级数，并画出频谱图。

解：周期矩形信号在一个周期内的定义为：

$$\tilde{x}(t)=\begin{cases} A, & |t|\le \dfrac{\tau}{2} \\ 0, & |t|>\dfrac{\tau}{2} \end{cases}$$

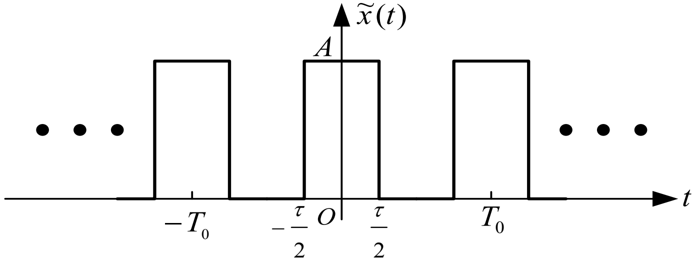


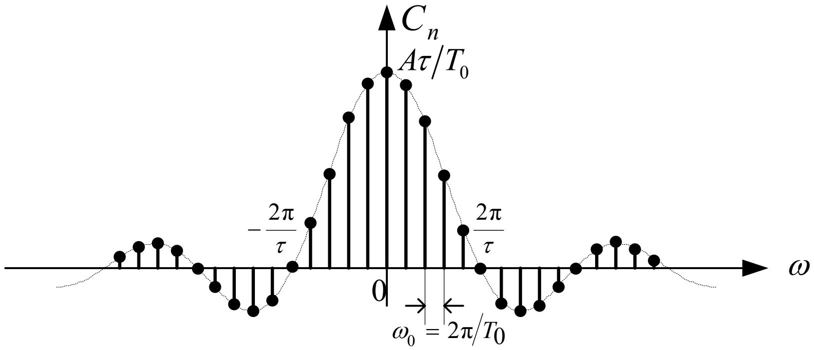
$$C_n=\frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}}\tilde{x}(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_0 t}\mathrm{d}t=\frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}}A\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_0 t}\mathrm{d}t=\frac{A}{T_0(-\mathrm{j}n\omega_0)}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_0 t}\Big|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}=\frac{A\tau\sin(n\omega_0\frac{\tau}{2})}{T_0 n\omega_0\frac{\tau}{2}}$$

$$\boxed{C_n=\frac{A\tau}{T_0}\,\mathrm{Sa}(\frac{n\omega_0\tau}{2})}$$

连续周期信号的频谱

[例] 计算周期矩形信号指数形式的傅里叶级数，并画出频谱图。





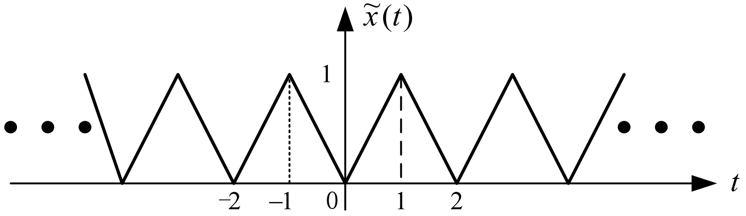
$$\tilde{x}(t) = \begin{cases} A, & |t| \le \frac{\tau}{2} \\ 0, & |t| > \frac{\tau}{2} \end{cases}$$

$$C_n = \frac{A\tau}{T_0}\,\mathrm{Sa}\left(\frac{n\omega_0\tau}{2}\right)$$

周期矩形信号的频谱

连续周期信号的频谱

[例] 计算周期三角波信号指数形式的傅里叶级数展开式。

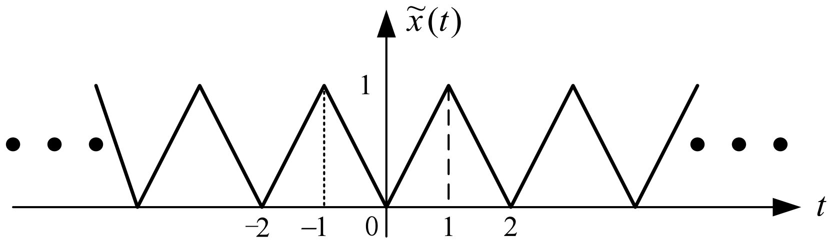


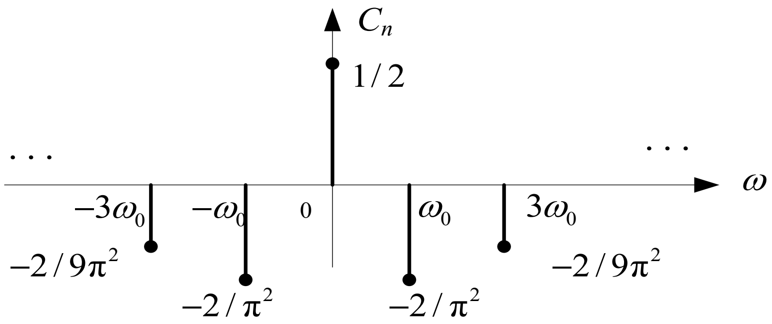
解: $C_n = \dfrac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \tilde{x}(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_0 t}\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2}\int_{-1}^{1}\tilde{x}(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_0 t}\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2}\left[\int_{-1}^{0}(-t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_0 t}\mathrm{d}t + \int_{0}^{1}t\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_0 t}\mathrm{d}t\right]$

$$C_n = \frac{1}{(n\pi)^2}(\cos n\pi - 1) = \begin{cases} -2/(n\pi)^2, & n\text{为奇数} \\ 1/2, & n = 0 \end{cases}$$

连续周期信号的频谱

[例] 计算周期三角波信号指数形式的傅里叶级数展开式。





$$C_n=\frac{1}{(n\pi)^2}(\cos n\pi-1)=\begin{cases}-2/(n\pi)^2, & n\text{为奇数}\\ 1/2, & n=0\end{cases}$$

周期三角波信号的频谱

$$\tilde{x}(t)=\frac{1}{2}-\frac{2}{\pi^2}e^{-j\omega_0 t}-\frac{2}{\pi^2}e^{j\omega_0 t}-\frac{2}{9\pi^2}e^{-j3\omega_0 t}-\frac{2}{9\pi^2}e^{j3\omega_0 t}-\dots \qquad \omega_0=\pi$$

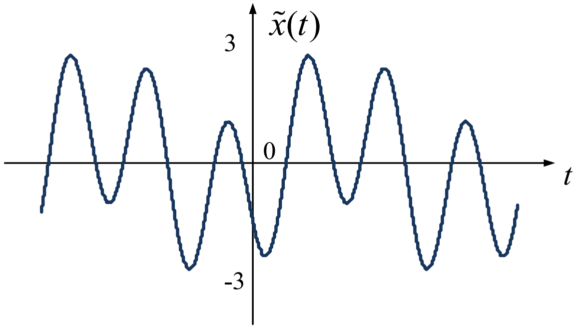
连续周期信号的频谱

[例] 已知周期信号 $\tilde{x}(t)=\cos(\omega_0 t+4)+2\cos(3\omega_0 t+2)$，求其频谱$C_n$。

解: $\tilde{x}(t)=\cos(\omega_0 t+4)+2\cos(3\omega_0 t+2)$

$$=\frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega_0 t+4)}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\omega_0 t+4)}\right]+\left[\mathrm{e}^{\mathrm{j}(3\omega_0 t+2)}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(3\omega_0 t+2)}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}4}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}4}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 t}+\mathrm{e}^{\mathrm{j}2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}3\omega_0 t}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}3\omega_0 t}$$

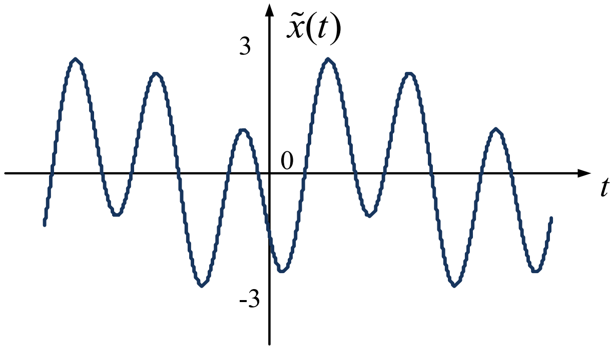


根据指数形式傅里叶级数的定义可得

$$C_1=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}4},\quad C_{-1}=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}4},\quad C_3=\mathrm{e}^{\mathrm{j}2},\quad C_{-3}=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2}$$

$$C_n=0,\quad n\neq\pm1;\quad n\neq\pm3.$$

连续周期信号的频谱

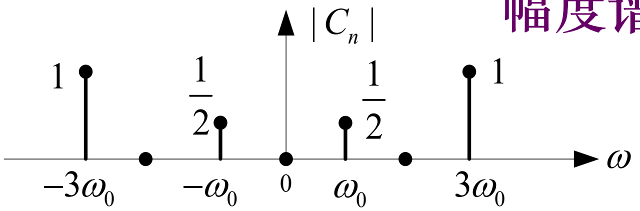


$$\tilde{x}(t)=\cos(\omega_0 t+4)+2\cos(3\omega_0 t+2)$$

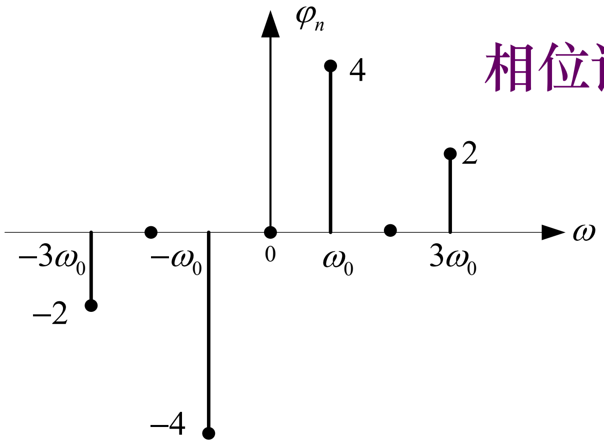
$$C_1=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}4},\quad C_{-1}=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}4},\quad C_3=\mathrm{e}^{\mathrm{j}2},\quad C_{-3}=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2}$$

$$C_n=0,\quad n\neq\pm1;\quad n\neq\pm3.$$

幅度谱

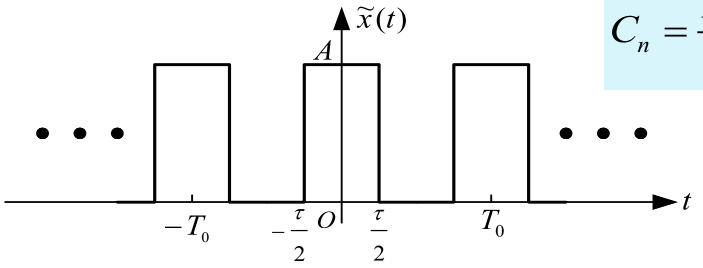


相位谱

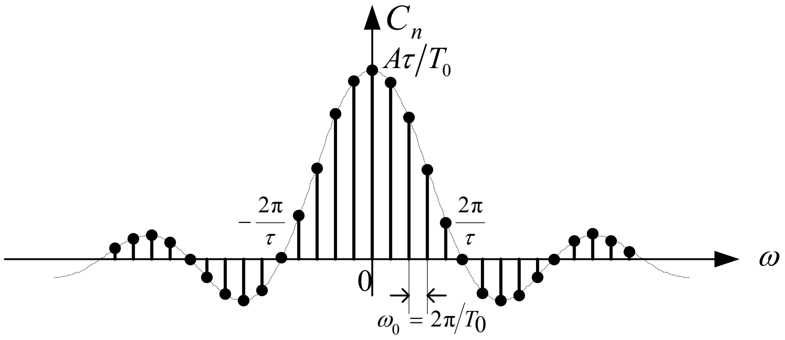


连续周期信号的频谱

$$C_n = \frac{A\tau}{T_0}\,\mathrm{Sa}\left(\frac{n\omega_0\tau}{2}\right)$$

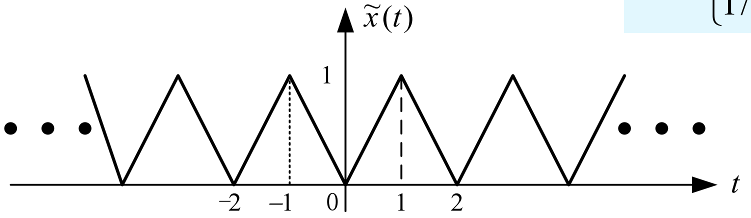


周期矩形信号的时域波形

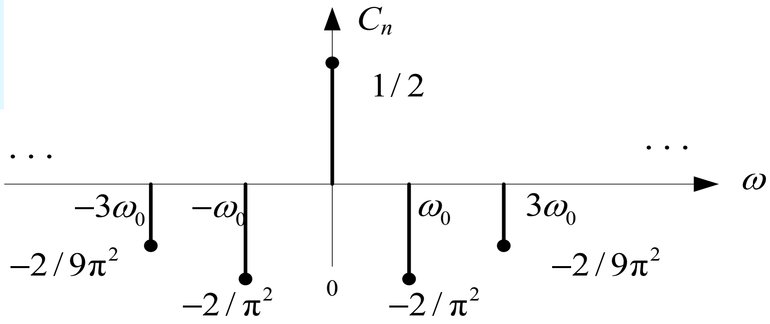


周期矩形信号的频谱

$$C_n = \begin{cases} -2/(n\pi)^2, & n\text{为奇数} \\ 1/2, & n = 0 \end{cases}$$

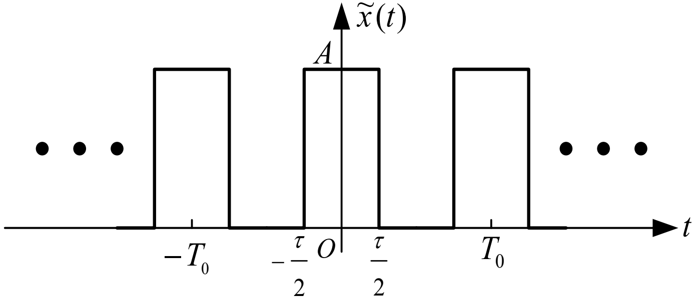


周期三角波信号的时域波形

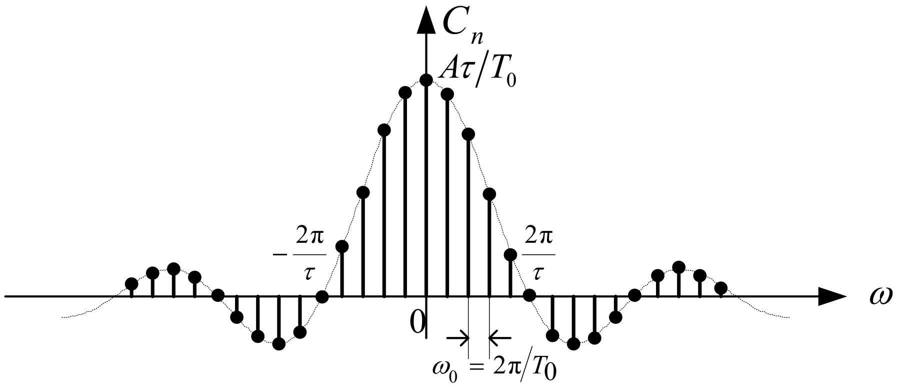


周期三角波信号的频谱

连续周期信号的频谱特性



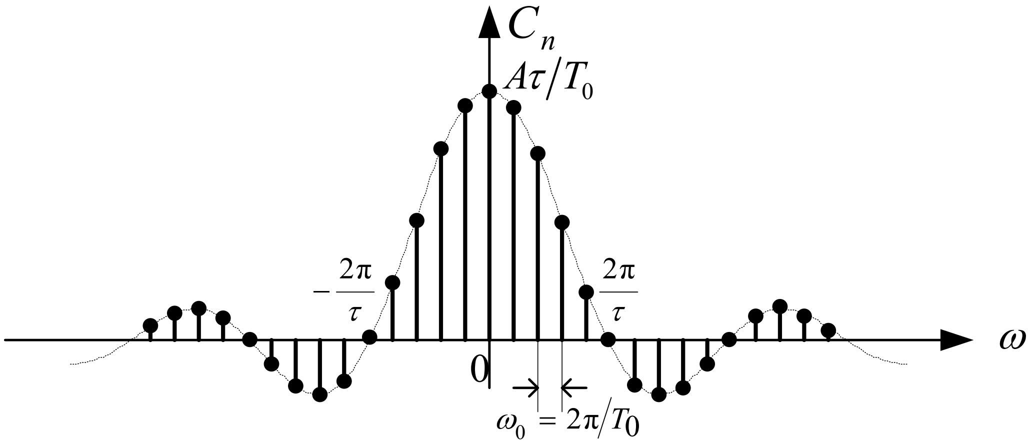
$$C_n = \frac{A\tau}{T_0}\ \mathrm{Sa}(\frac{n\omega_0\tau}{2})$$



周期矩形信号的频谱

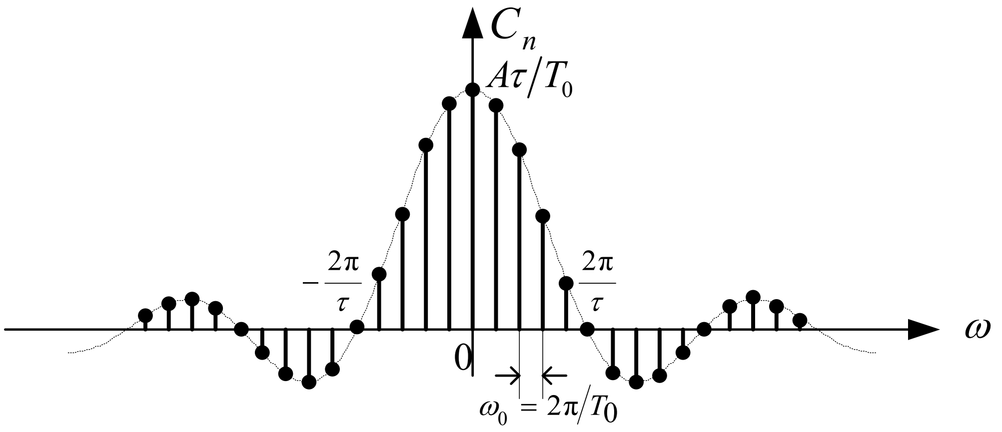
连续周期信号的频谱特性

◆ **离散特性：** 周期信号的频谱是由间隔为ω_0 的谱线组成



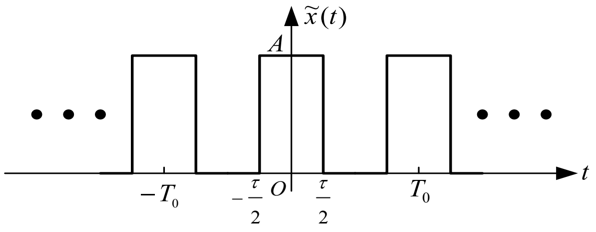
连续周期信号的频谱特性

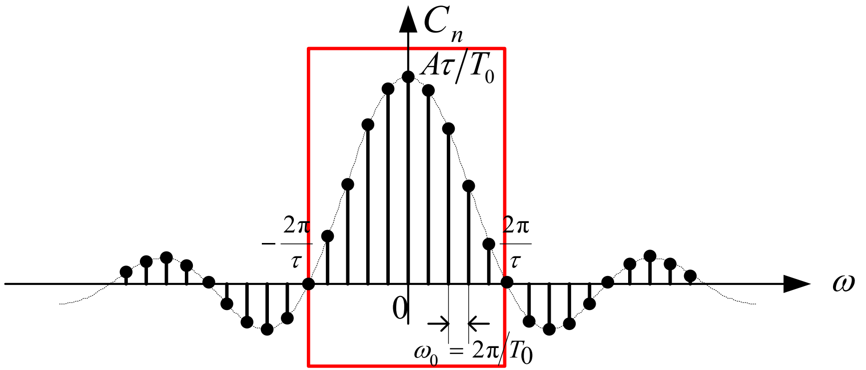
- **衰减特性：** 幅度频谱$|C_n|$随谐波$n\omega_0$增大时逐渐衰减，并最终趋于零



连续周期信号的频谱特性

有效带宽





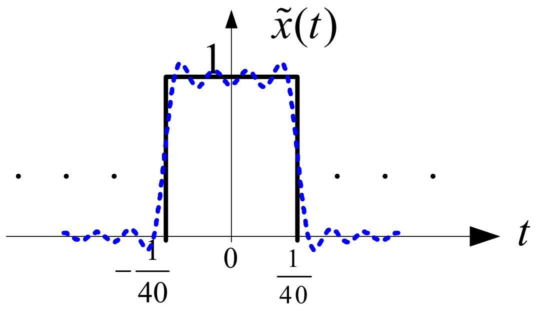
通常将包含主要谐波分量的频率范围$(0 \sim 2\pi/\tau)$

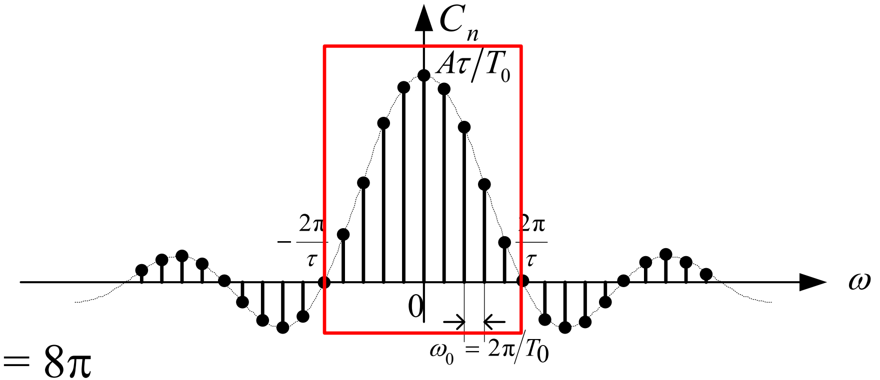
称为周期矩形信号的有效频带宽度 $\omega_B = \dfrac{2\pi}{\tau}$

信号的有效带宽和时域持续时间成反比。

连续周期信号的频谱特性

◆ 丢失有效带宽以外的谐波成分，不会对信号产生明显影响





A=1， T_0=1/4， $\tau = 1/20$， $\omega_0 = 2\pi/T_0 = 8\pi$

$$C_n = 0.2\,\mathrm{Sa}(n\omega_0/40) = 0.2\,\mathrm{Sa}(n\pi/5)$$

第一个零点出现在 $\dfrac{2\pi}{\tau} = 40\pi = 5\times 8\pi = 5\omega_0$

连续周期信号的频谱

谢 谢

本课程所引用的一些素材为主讲老师多年的教学积累，来源于多种媒体及同事、同行、朋友的交流，难以一一注明出处，特此说明并表示感谢！