北京交通大學

信号与系统

主讲人：陈后金

电子信息工程学院

连续时间LTI系统的频域描述

- 为什么进行系统的频域分析
- 连续时间LTI系统频率响应
- 系统的幅度响应与相位响应

为什么进行系统的频域分析?

信号去噪

受噪声干扰的信号

系统1处理(滤波)后的结果

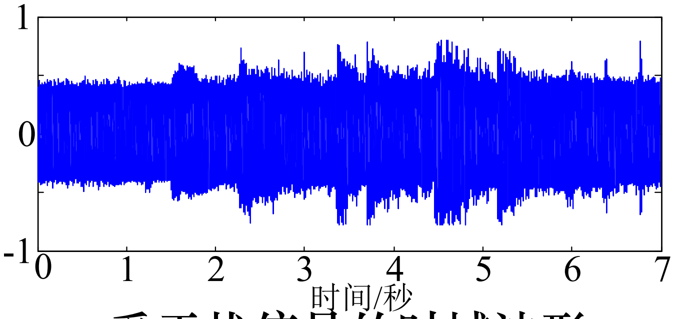
系统2处理(滤波)后的结果

系统3处理(滤波)后的结果

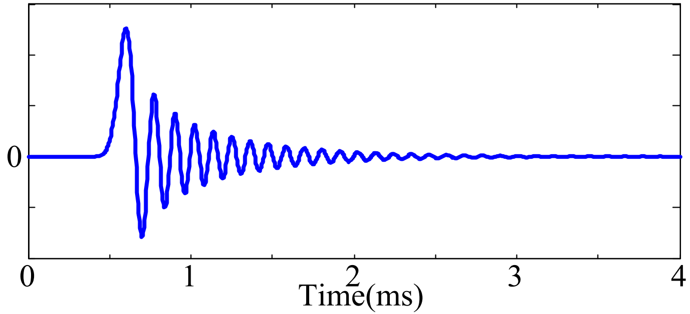
为什么不同系统处理的效果会不一样?

为什么进行系统的频域分析?

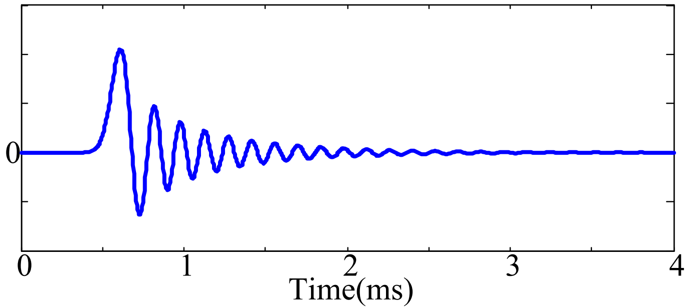
信号去噪



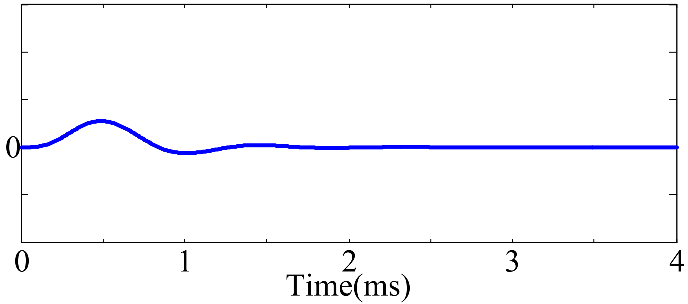
受干扰信号的时域波形



系统1的冲激响应



系统2的冲激响应



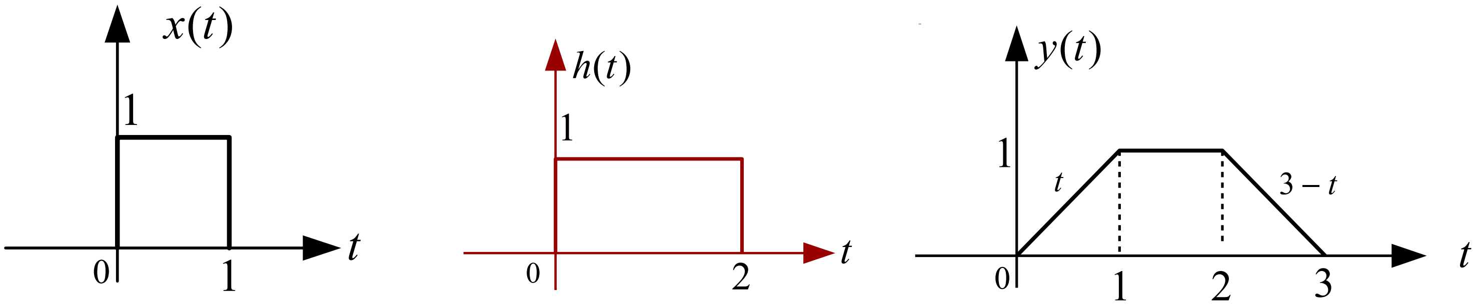
系统3的冲激响应

处理结果的时域解释——难

为什么进行系统的频域分析?

信号传输

$$y(t)=x(t)*h(t)$$



连续时间LTI系统的频域描述

➢ 连续时间LTI系统的频率响应

若描述连续LTI系统的微分方程为

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = b_m x^{(m)}(t) + b_{m-1} x^{(m-1)}(t) + \cdots + b_1 x'(t) + b_0 x(t)$$

利用Fourier变换微分特性，可得描述该系统的频域方程

$$[a_n(\mathrm{j}\omega)^n + a_{n-1}(\mathrm{j}\omega)^{n-1} + \cdots + a_1(\mathrm{j}\omega) + a_0]Y_{zs}(\mathrm{j}\omega) = [b_m(\mathrm{j}\omega)^m + b_{m-1}(\mathrm{j}\omega)^{m-1} + \cdots + b_1(\mathrm{j}\omega) + b_0]X(\mathrm{j}\omega)$$

连续时间LTI系统的频域描述

➢ 连续时间LTI系统的频率响应

$$[a_n(\mathrm{j}\omega)^n + a_{n-1}(\mathrm{j}\omega)^{n-1} + \cdots + a_1(\mathrm{j}\omega) + a_0]Y_{zs}(\mathrm{j}\omega)$$

$$= [b_m(\mathrm{j}\omega)^m + b_{m-1}(\mathrm{j}\omega)^{m-1} + \cdots + b_1(\mathrm{j}\omega) + b_0]X(\mathrm{j}\omega)$$

连续系统的频率响应定义为

$$H(\mathrm{j}\omega) = \frac{Y_{zs}(\mathrm{j}\omega)}{X(\mathrm{j}\omega)} = \frac{b_m(\mathrm{j}\omega)^m + b_{m-1}(\mathrm{j}\omega)^{m-1} + \cdots + b_1(\mathrm{j}\omega) + b_0}{a_n(\mathrm{j}\omega)^n + a_{n-1}(\mathrm{j}\omega)^{n-1} + \cdots + a_1(\mathrm{j}\omega) + a_0}$$

连续时间LTI系统的频域描述

➢ **频率响应$H(\mathrm{j}\omega)$与冲激响应$h(t)$ 的关系**

$$\delta(t) \longrightarrow \boxed{\text{连续系统}} \longrightarrow h(t)$$

$$H(\mathrm{j}\omega)=\frac{Y_{zs}(\mathrm{j}\omega)}{X(\mathrm{j}\omega)}=\frac{\mathscr{F}[h(t)]}{\mathscr{F}[\delta(t)]}=\mathscr{F}[h(t)]$$

$$\boxed{H(\mathrm{j}\omega)=\mathscr{F}[h(t)]=\int_{-\infty}^{\infty} h(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t}$$

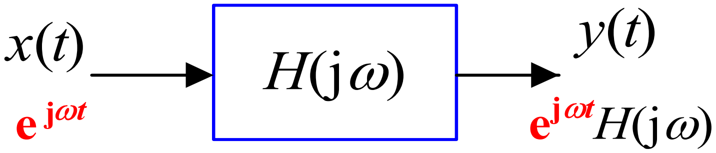
连续时间LTI系统的频域描述

- **虚指数信号 $e^{j\omega t}$ 通过LTI系统的响应**

$$y_{zs}(t) = e^{j\omega t} * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega(t-\tau)} h(\tau)\mathrm{d}\tau$$

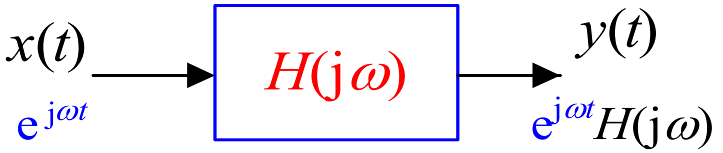
$$= e^{j\omega t} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\tau} h(\tau)\mathrm{d}\tau}_{H(j\omega)}$$

$$= e^{j\omega t} H(j\omega)$$



连续时间LTI系统的频域描述

➢ $H(\mathrm{j}\omega)$ 的物理意义



频率为ω的虚指数信号 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ 通过连续LTI系统的响应仍为同频率的虚指数信号。信号的改变由$H(\mathrm{j}\omega)$ 确定。

$H(\mathrm{j}\omega)$反映了连续系统对不同频率虚指数信号的**传输特性**。

连续时间LTI系统的频域描述

幅度响应与相位响应

$$H(\mathrm{j}\omega)=|H(\mathrm{j}\omega)|\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(\omega)}$$

幅度响应

相位响应

若$h(t)$是实函数时，则

幅度响应 $|H(\mathrm{j}\omega)|$ 是ω的**偶函数**，

相位响应 $\varphi(\omega)$ 是ω的**奇函数**。

连续时间LTI系统的频域描述

➢ **正弦信号$\sin(\omega_0 t+\theta)$通过连续LTI系统的响应**

由Euler公式可得

$$\sin(\omega_0 t+\theta)=(e^{j(\omega_0 t+\theta)}-e^{-j(\omega_0 t+\theta)})/2j$$

利用虚指数信号$e^{j\omega_0 t}$响应的特点及系统的线性特性，可得

$$y_{zs}(t)=\left[H(j\omega_0)e^{j(\omega_0 t+\theta)}-H(-j\omega_0)e^{-j(\omega_0 t+\theta)}\right]/2j$$

$$|H(j\omega_0)|e^{j\varphi(\omega_0)} \qquad |H(j\omega_0)|e^{-j\varphi(\omega_0)}$$

$$=\left|H(j\omega_0)\right|\sin(\omega_0 t+\varphi(\omega_0)+\theta)$$

连续时间LTI系统的频域描述

- **正弦信号$\sin(\omega_0 t+\theta)$通过系统的响应**

$$\sin(\omega_0 t+\theta) \longrightarrow \left|H(\mathrm{j}\omega_0)\right| \sin(\omega_0 t + \varphi(\omega_0) + \theta)$$

频率为ω_0的正弦信号通过连续LTI系统的响应仍为同频率的正弦信号。

响应的幅度改变由 $|H(\mathrm{j}\omega_0)|$ 确定，

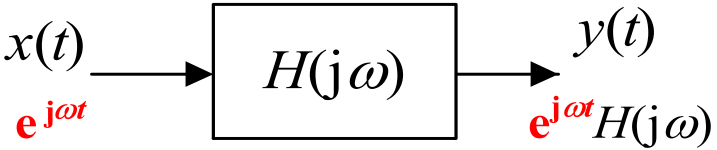
响应的相位改变由 $\varphi(\omega_0)$ 确定。

连续时间LTI系统的频域描述

➢ 系统频率响应的定义

$$H(\mathrm{j}\omega)=\frac{Y_{\mathrm{zs}}(\mathrm{j}\omega)}{X(\mathrm{j}\omega)}$$

➢ 系统频率响应的意义



➢ 系统频率响应的表示

$$H(\mathrm{j}\omega)=|H(\mathrm{j}\omega)|\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(\omega)}$$

幅度响应

相位响应

谢 谢

本课程所引用的一些素材为主讲老师多年的教学积累，来源于多种媒体及同事、同行、朋友的交流，难以一一注明出处，特此说明并表示感谢！