信号与系统

主讲人：陈后金

电子信息工程学院

北京交通大学

连续非周期信号的频域分析

- 连续非周期信号的频域表示
- 典型连续非周期信号的频谱
- 连续时间傅里叶变换的性质

连续时间傅里叶变换的性质

※ 线性特性

※ 共轭对称特性

※ 互易对称特性

※ 展缩特性

※ 时移特性

※ 频移特性

※ 时域积分特性

※ 时域微分特性

※ 频域微分特性

※ 时域卷积特性

※ 频域卷积特性

※ 能量守恒定理

连续时间傅里叶变换的性质

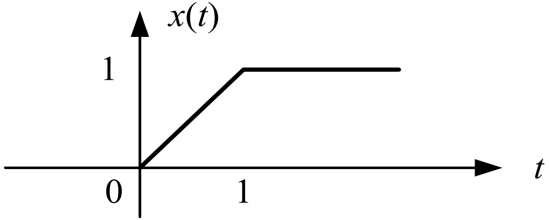
7.时域积分特性

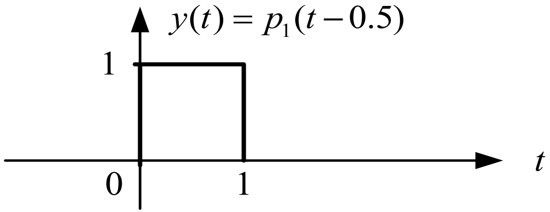
$$若x(t)\xleftrightarrow{\mathscr{F}}X(\mathrm{j}\omega)$$

$$则\int_{-\infty}^{t}x(\tau)\mathrm{d}\tau\xleftrightarrow{\mathscr{F}}\frac{1}{\mathrm{j}\omega}X(\mathrm{j}\omega)+\pi X(0)\delta(\omega)$$

连续时间傅里叶变换的性质

[例] 试利用积分特性求图示信号$x(t)$的频谱。





解： $$x(t)=\int_{-\infty}^{t} y(t)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{t} p_1(t-0.5)\mathrm{d}t$$

$$p_1(t-0.5)\xleftrightarrow{\mathscr{F}}\mathrm{Sa}(0.5\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}0.5\omega}$$

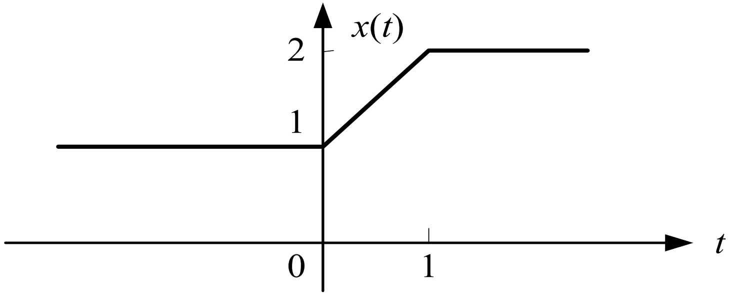
利用时域积分特性，可得

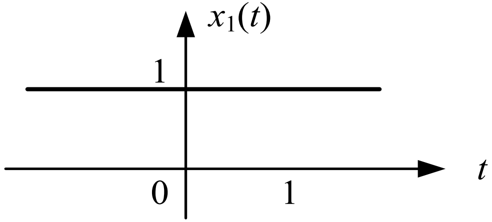
$$X(\mathrm{j}\omega)=\frac{1}{\mathrm{j}\omega}\mathrm{Sa}(0.5\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}0.5\omega}+\pi\delta(\omega)$$

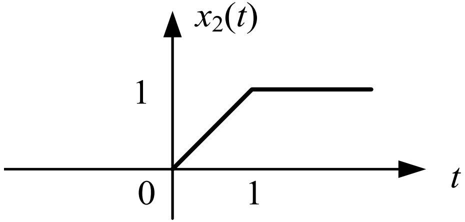
连续时间傅里叶变换的性质

[例] 试利用积分特性求图示信号$x(t)$的频谱。

解： 将$x(t)$表示为$x_1(t)+x_2(t)$







$$x(t)=1+\int_{-\infty}^{t} p(t-0.5)\mathrm{d}t$$

$$X(\mathrm{j}\omega)=\frac{1}{\mathrm{j}\omega}\mathrm{Sa}(0.5\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}0.5\omega}+3\pi\delta(\omega)$$

连续时间傅里叶变换的性质

8. 时域微分特性

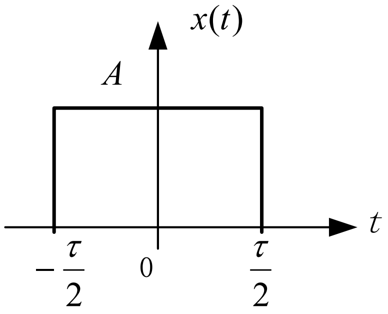
若 $x(t) \xleftrightarrow{\mathscr{F}} X(\mathrm{j}\omega)$

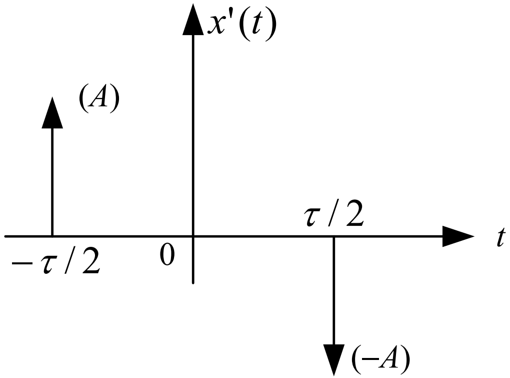
则 $\dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} \xleftrightarrow{\mathscr{F}} (\mathrm{j}\omega)\cdot X(\mathrm{j}\omega)$

$$\frac{\mathrm{d}^n x(t)}{\mathrm{d}t^n} \xleftrightarrow{\mathscr{F}} (\mathrm{j}\omega)^n \cdot X(\mathrm{j}\omega)$$

连续时间傅里叶变换的性质

[例] 试利用微分特性求矩形信号的频谱。





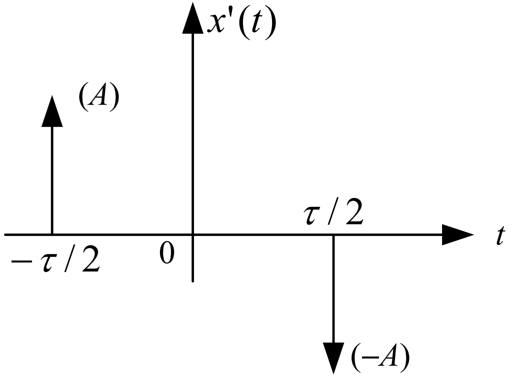
解：

$$x'(t) = A\delta(t+\frac{\tau}{2}) - A\delta(t-\frac{\tau}{2})$$

$$\mathscr{F}[x'(t)] = Ae^{j\omega\frac{\tau}{2}} - Ae^{-j\omega\frac{\tau}{2}} = A\cdot 2j\sin(\omega\frac{\tau}{2})$$

连续时间傅里叶变换的性质

[例] 试利用微分特性求矩形脉冲信号的频谱。



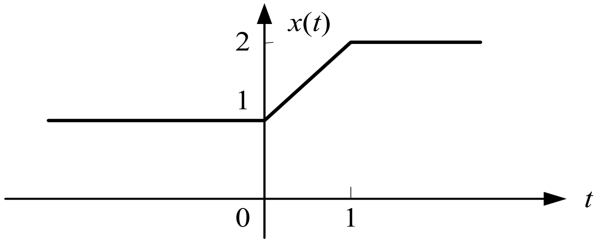
解：　利用时域微分特性，得

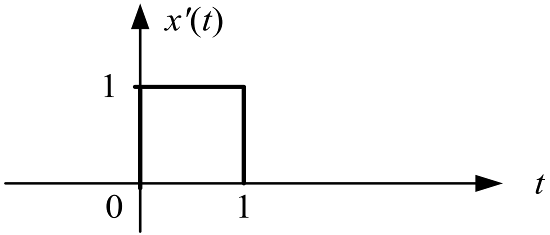
$$\mathscr{F}[x'(t)] = (\mathrm{j}\omega)X(\mathrm{j}\omega) = A\cdot 2\mathrm{j}\sin(\omega\frac{\tau}{2})$$

因此有　$$X(\mathrm{j}\omega) = \frac{2A}{\omega}\sin(\omega\frac{\tau}{2}) = A\tau\cdot \mathrm{Sa}(\frac{\omega\tau}{2})$$

连续时间傅里叶变换的性质

[例] 试利用微分特性求图示信号$x(t)$的频谱。





解： $x'(t) = p_1(t-0.5) \xleftrightarrow{\mathscr{F}} \mathrm{Sa}(0.5\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}0.5\omega}$

利用时域微分特性

$$X(\mathrm{j}\omega) = \frac{1}{\mathrm{j}\omega}\mathrm{Sa}(0.5\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}0.5\omega} \neq \frac{1}{\mathrm{j}\omega}\mathrm{Sa}(0.5\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}0.5\omega} + 3\pi\delta(\omega)$$

信号的时域微分，使信号中的直流分量丢失。

8．时域微分特性—修正

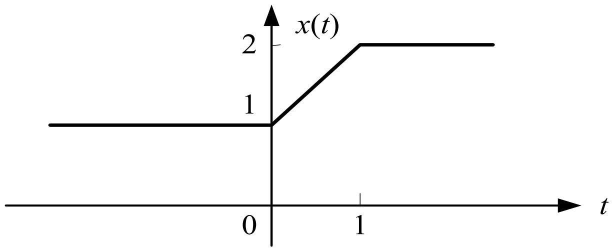
$$x'(t)=x_1(t)$$

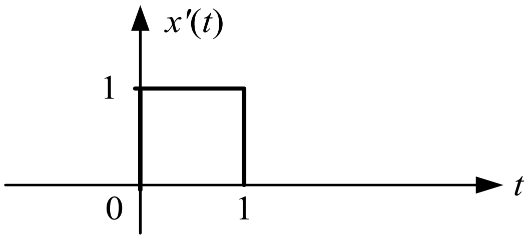
若 $x(t)\xleftrightarrow{\mathcal{F}}X(\mathrm{j}\omega)$　　$x_1(t)\xleftrightarrow{\mathcal{F}}X_1(\mathrm{j}\omega)$

则 $$X(\mathrm{j}\omega)=\pi[x(+\infty)+x(-\infty)]\delta(\omega)+\frac{X_1(\mathrm{j}\omega)}{\mathrm{j}\omega}$$

连续时间傅里叶变换的性质

[例] 试利用修正的微分特性求矩形脉冲信号的频谱函数





解： $x'(t)=p_1(t-0.5)=x_1(t)\xleftrightarrow{\mathscr{F}}X_1(\mathrm{j}\omega)=\mathrm{Sa}(0.5\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}0.5\omega}$

利用修正的微分特性:

$$X(\mathrm{j}\omega)=\pi[x(+\infty)+x(-\infty)]\delta(\omega)+\frac{X_1(\mathrm{j}\omega)}{\mathrm{j}\omega}$$

$$=3\pi\delta(\omega)+\frac{1}{\mathrm{j}\omega}\mathrm{Sa}(0.5\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}0.5\omega}$$

谢 谢

本课程所引用的一些素材为主讲老师多年的教学积累，来源于多种媒体及同事、同行、朋友的交流，难以一一注明出处，特此说明并表示感谢！