北京交通大学

信号与系统

主讲人：陈后金

电子信息工程学院

系统的状态变量分析

※ **系统状态变量分析的基本概念和普遍形式**

※ 连续时间系统状态方程和输出方程的建立

※ 离散时间系统状态方程和输出方程的建立

※ 连续时间系统状态方程和输出方程的求解

※ 离散时间系统状态方程和输出方程的求解

状态变量分析的基本概念

输入输出方法:

特点：单输入单输出(SISO)，只关心输入和输出。

描述方法：微分方程(连续系统)或差分方程(离散系统)

$$y^{(n)}(t)+a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+\cdots+a_1 y(t)+a_0 y(t)$$
$$=b_m x^{(m)}(t)+b_{m-1}x^{(m-1)}(t)+\cdots+b_1 x(t)+b_0 x(t)$$

其中 a_i ，b_j 是常数

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y[k-i]=\sum_{j=0}^{m} b_j x[k-j]$$

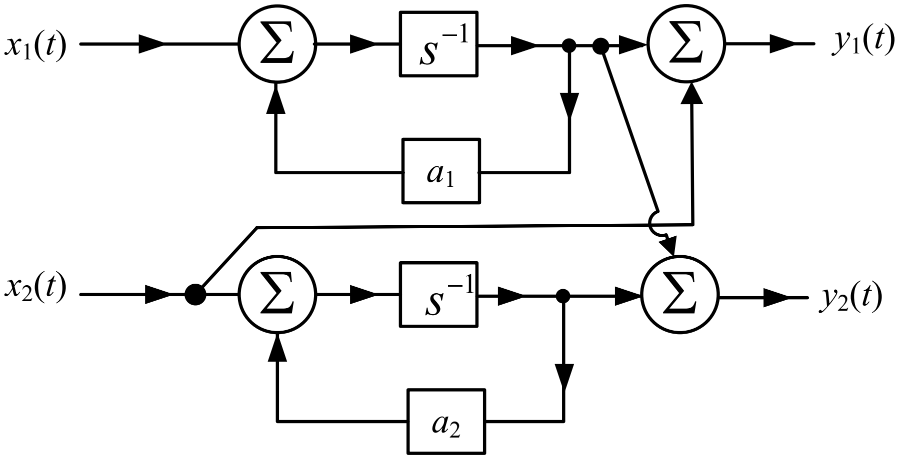
其中 a_i ，b_j 是常数

状态变量分析的基本概念

对于多输入多输出(MIMO)系统，输入输出方法难以描述。

状态变量分析的基本概念

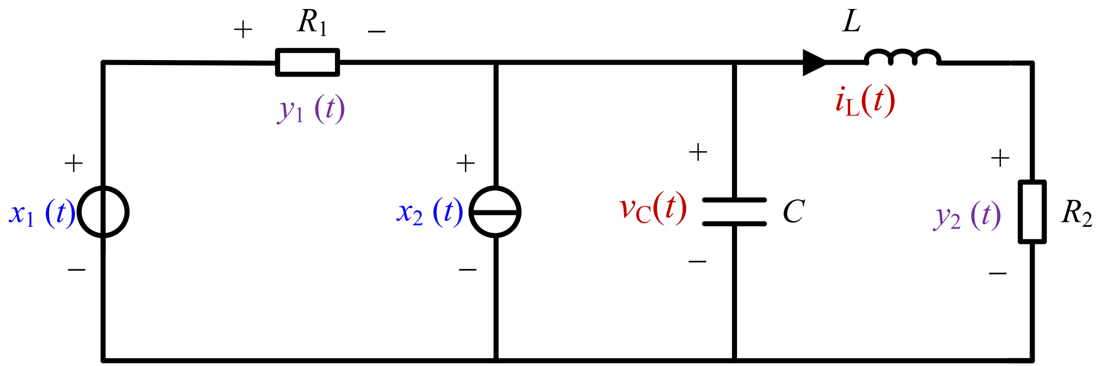
[例] 分析如下多输入多输出系统



系统有两个输入$x_1(t)$、 $x_2(t)$和两个输出$y_1(t)$、 $y_2(t)$

状态变量分析的基本概念

[例] 分析如下RLC电路



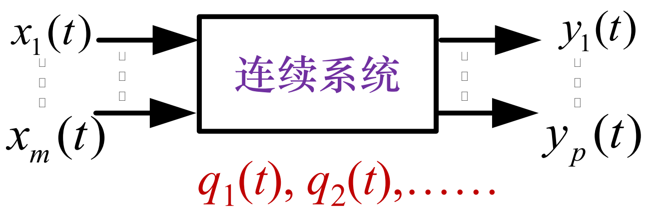
电路有两个电压输入$x_1(t)$和$x_2(t)$，两个输出$y_1(t)$和$y_2(t)$。

输出$y_1(t)$和$y_2(t)$可由内部$i_L(t)$、$v_C(t)$，以及$x_1(t)$和$x_2(t)$表示。

状态变量分析的基本概念

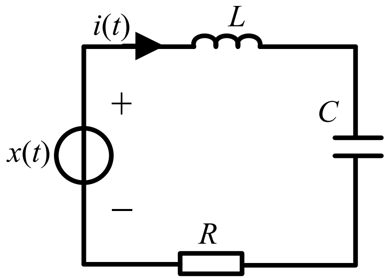
状态变量分析方法：

通过系统内部的状态变量来描述和分析系统。

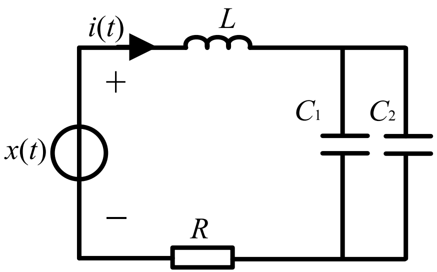


状态变量分析的基本概念

- 状态变量$q_i(t)$：描述系统内部状态的一组独立(数目最小) 变量



图(a)



图(b)

图(a)电路有2个独立的储能元件L、C，因此需要2个状态变量；图(b)和图(a)**电路等效**，因此图(b) 也只需要2个独立变量。

状态变量分析的基本概念

- 状态变量$q_i(t)$：描述系统内部状态的一组独立(数目最小) 变量
- 状态向量$q(t)=[q_1(t), \ldots, q_n(t)]^T$：由一组状态变量构成的向量，$n$阶微分方程描述的连续时间系统，具有$n$个独立状态变量。

- 输入向量$x(t)=[x_1(t), \ldots, x_m(t)]^T$
- 输出向量 $y(t)=[y_1(t), \ldots, y_p(t)]^T$

状态变量分析的基本概念

状态方程：

描述系统状态变量与输入变量之间关系的微分或差分方程

一阶微分方程组(连续时间系统)

一阶差分方程组(离散时间系统)

输出方程：

描述系统输出与状态变量和输入之间关系的代数方程

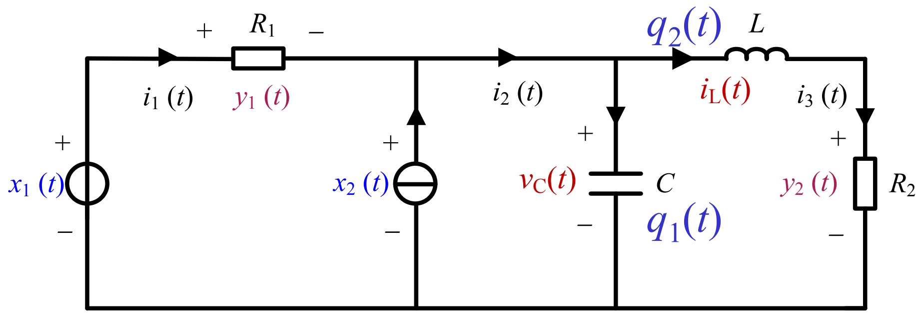
状态方程和输出方程的普遍形式

※ **连续时间系统**状态方程和输出方程的普遍形式

※ **离散时间系统**状态方程和输出方程的普遍形式

状态方程和输出方程的普遍形式

[例] 写出如下RLC电路的状态方程和输出方程



解: (1) 选取C的电压$v_C(t)$、L的电流$i_L(t)$ 为状态变量$q_1(t)$和$q_2(t)$。

$$q_1(t)=v_C(t) \qquad q_2(t)=i_L(t)=i_3(t)$$

(2) 列回路电压方程

$$L\dot{q}_2(t)+y_2(t)=q_1(t) \qquad y_1(t)=x_1(t)-q_1(t)$$

$$y_2(t)=R_2 i_3(t)$$

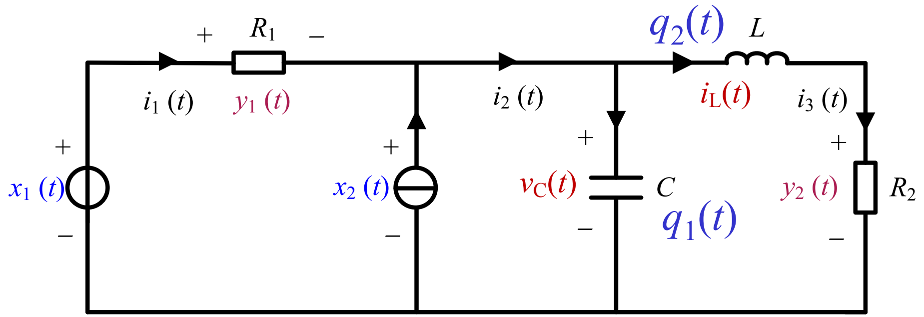
(3) 列节点电流方程:

$$i_2(t)=i_1(t)+x_2(t)$$

$$i_2(t)=C\dot{q}_1(t)+i_L(t)$$

状态方程和输出方程的普遍形式

[例] 写出如下电路的状态方程和输出方程



经整理得:

$$\dot{q}_1(t) = -\frac{q_1(t)}{R_1C} - \frac{q_2(t)}{C} + \frac{x_1(t)}{R_1C} + \frac{x_2(t)}{C}$$

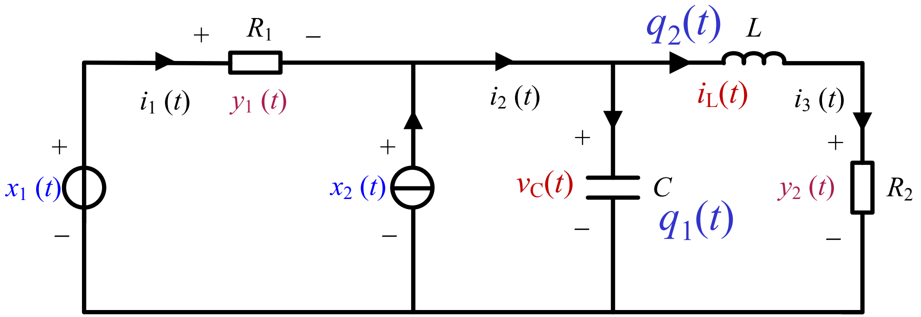
$$\dot{q}_2(t) = \frac{q_1(t)}{L} - \frac{R_2q_2(t)}{L}$$

$$y_1(t) = x_1(t) - q_1(t)$$

$$y_2(t) = R_2q_2(t)$$

状态方程和输出方程的普遍形式

[例] 写出如下电路的状态方程和输出方程



写成矩阵形式：

状态方程

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1(t) \\ \dot{q}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{R_1C} & -\dfrac{1}{C} \\ \dfrac{1}{L} & -\dfrac{R_2}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{R_1C} & \dfrac{1}{C} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

输出方程

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

状态方程和输出方程的普遍形式

对于连续时间系统（m个输入，p个输出）

连续时间系统状态方程可用一阶微分方程组表示(n个状态变量):

$$\dot{q}_1(t) = a_{11}q_1(t) + a_{12}q_2(t) + \cdots + a_{1n}q_n(t) + b_{11}x_1(t) + b_{12}x_2(t) + \cdots + b_{1m}x_m(t)$$

$$\dot{q}_2(t) = a_{21}q_1(t) + a_{22}q_2(t) + \cdots + a_{2n}q_n(t) + b_{21}x_1(t) + b_{22}x_2(t) + \cdots + b_{2m}x_m(t)$$

$$\vdots$$

$$\dot{q}_n(t) = a_{n1}q_1(t) + a_{n2}q_2(t) + \cdots + a_{nn}q_n(t) + b_{n1}x_1(t) + b_{n2}x_2(t) + \cdots + b_{nm}x_m(t)$$

状态方程和输出方程的普遍形式

连续时间系统的输出方程：

$$y_1(t)=c_{11}q_1(t)+c_{12}q_2(t)+\cdots+c_{1n}q_n(t)+d_{11}x_1(t)+d_{12}x_2(t)+\cdots+d_{1m}x_m(t)$$

$$y_2(t)=c_{21}q_1(t)+c_{22}q_2(t)+\cdots+c_{2n}q_n(t)+d_{21}x_1(t)+d_{22}x_2(t)+\cdots+d_{2m}x_m(t)$$

$$\vdots$$

$$y_p(t)=c_{p1}q_1(t)+c_{p2}q_2(t)+\cdots+c_{pn}q_n(t)+d_{p1}x_1(t)+d_{p2}x_2(t)+\cdots+d_{pm}x_m(t)$$

状态方程和输出方程的普遍形式

$$\dot{\boldsymbol{q}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{q}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}(t)$$

$$\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{q}(t)+\boldsymbol{D}\boldsymbol{x}(t)$$

连续时间系统状态方程的矩阵形式：

$$\underset{(n*1)}{\begin{bmatrix}\dot{q}_1(t)\\ \dot{q}_2(t)\\ \vdots\\ \dot{q}_n(t)\end{bmatrix}}=\underset{(n*n)}{\overset{\boldsymbol{A}}{\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}}}\underset{(n*1)}{\begin{bmatrix}q_1(t)\\ q_2(t)\\ \vdots\\ q_n(t)\end{bmatrix}}+\underset{(n*m)}{\overset{\boldsymbol{B}}{\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m}\\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nm}\end{bmatrix}}}\underset{(m*1)}{\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ \vdots\\ x_m(t)\end{bmatrix}}$$

状态方程和输出方程的普遍形式

$$\dot{\boldsymbol{q}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{q}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}(t)$$

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{q}(t) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{x}(t)$$

连续时间系统输出方程的矩阵形式：

$$\underset{(p*1)}{\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_p(t) \end{bmatrix}} = \underset{(p*n)}{\overset{\boldsymbol{C}}{\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{p1} & c_{p2} & \cdots & c_{pn} \end{bmatrix}}} \underset{(n*1)}{\begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ \vdots \\ q_n(t) \end{bmatrix}} + \underset{(p*m)}{\overset{\boldsymbol{D}}{\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1m} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ d_{p1} & d_{p2} & \cdots & d_{pm} \end{bmatrix}}} \underset{(m*1)}{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_m(t) \end{bmatrix}}$$

状态方程和输出方程的普遍形式

连续时间系统的状态方程和输出方程

状态方程： $\dot{\boldsymbol{q}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{q}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}(t)$

输出方程： $\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{q}(t)+\boldsymbol{D}\boldsymbol{x}(t)$

其中：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nm} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{p1} & c_{p2} & \cdots & c_{pn} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{D}=\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1m} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ d_{p1} & d_{p2} & \cdots & d_{pm} \end{bmatrix}$$

状态方程和输出方程的普遍形式

对于离散时间系统（m个输入，p个输出）

离散时间系统状态方程可用一阶差分方程组表示(n个状态变量)

$$
\begin{aligned}
q_1[k+1] &= c_{11}q_1[k]+c_{12}q_2[k]+\cdots+c_{1n}q_n[k]+d_{11}x_1[k]+d_{12}x_2[k]+\cdots+d_{1m}x_m[k] \\
q_2[k+1] &= c_{21}q_1[k]+c_{22}q_2[k]+\cdots+c_{2n}q_n[k]+d_{21}x_1[k]+d_{22}x_2[k]+\cdots+d_{2m}x_m[k] \\
&\vdots \\
q_n[k+1] &= c_{n1}q_1[k]+c_{n2}q_2[k]+\cdots+c_{nn}q_n[k]+d_{n1}x_1[k]+d_{n2}x_2[k]+\cdots+d_{nm}x_m[k]
\end{aligned}
$$

状态方程和输出方程的普遍形式

离散时间系统的输出方程:

$$y_1[k]=c_{11}q_1[k]+c_{12}q_2[k]+\cdots+c_{1n}q_n[k]+d_{11}x_1[k]+d_{12}x_2[k]+\cdots+d_{1m}x_m[k]$$

$$y_2[k]=c_{21}q_1[k]+c_{22}q_2[k]+\cdots+c_{2n}q_n[k]+d_{21}x_1[k]+d_{22}x_2[k]+\cdots+d_{2m}x_m[k]$$

$$\vdots$$

$$y_p[k]=c_{p1}q_1[k]+c_{p2}q_2[k]+\cdots+c_{pn}q_n[k]+d_{p1}x_1[k]+d_{p2}x_2[k]+\cdots+d_{pm}x_m[k]$$

状态方程和输出方程的普遍形式

$$\boldsymbol{q}[k+1] = \boldsymbol{A}\boldsymbol{q}[k] + \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}[k]$$

$$\boldsymbol{y}[k] = \boldsymbol{C}\boldsymbol{q}[k] + \boldsymbol{D}\boldsymbol{x}[k]$$

离散时间系统状态方程的矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} q_1[k+1] \\ q_2[k+1] \\ \vdots \\ q_n[k+1] \end{bmatrix} = \overset{\boldsymbol{A}}{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} q_1[k] \\ q_2[k] \\ \vdots \\ q_n[k] \end{bmatrix} + \overset{\boldsymbol{B}}{\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nm} \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} x_1[k] \\ x_2[k] \\ \vdots \\ x_m[k] \end{bmatrix}$$

$(n*1)$ $(n*n)$ $(n*1)$ $(n*m)$ $(m*1)$

状态方程和输出方程的普遍形式

$$\boldsymbol{q}[k+1] = \boldsymbol{A}\boldsymbol{q}[k] + \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}[k]$$

$$\boldsymbol{y}[k] = \boldsymbol{C}\boldsymbol{q}[k] + \boldsymbol{D}\boldsymbol{x}[k]$$

离散时间系统输出方程的矩阵形式：

$$\underset{(p*1)}{\begin{bmatrix} y_1[k] \\ y_2[k] \\ \vdots \\ y_p[k] \end{bmatrix}} = \underset{(p*n)}{\overset{\boldsymbol{C}}{\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{p1} & c_{p2} & \cdots & c_{pn} \end{bmatrix}}} \underset{(n*1)}{\begin{bmatrix} q_1[k] \\ q_2[k] \\ \vdots \\ q_n[k] \end{bmatrix}} + \underset{(p*m)}{\overset{\boldsymbol{D}}{\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1m} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ d_{p1} & d_{p2} & \cdots & d_{pm} \end{bmatrix}}} \underset{(m*1)}{\begin{bmatrix} x_1[k] \\ x_2[k] \\ \vdots \\ x_m[k] \end{bmatrix}}$$

状态方程和输出方程的普遍形式

离散时间系统的状态方程和输出方程

状态方程： $\boldsymbol{q}[k+1]=\boldsymbol{A}\boldsymbol{q}[k]+\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}[k]$

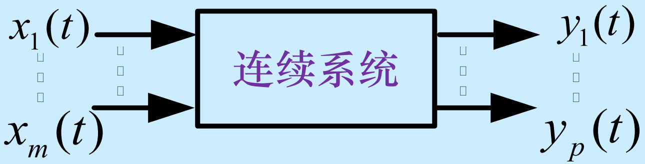
输出方程： $\boldsymbol{y}[k]=\boldsymbol{C}\boldsymbol{q}[k]+\boldsymbol{D}\boldsymbol{x}[k]$

其中：

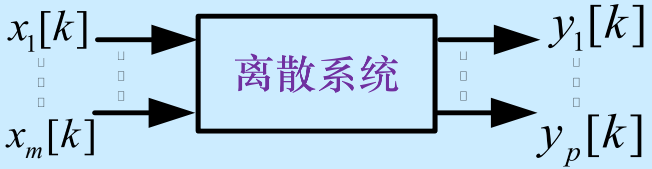
$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nm} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{p1} & c_{p2} & \cdots & c_{pn} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{D}=\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1m} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ d_{p1} & d_{p2} & \cdots & d_{pm} \end{bmatrix}$$

状态方程和输出方程的普遍形式



n个状态变量$q_i(t)$



n个状态变量$q_i[k]$

状态方程： $\dot{\boldsymbol{q}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{q}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}(t)$

输出方程： $\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{q}(t) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{x}(t)$

状态方程： $\boldsymbol{q}[k+1] = \boldsymbol{A}\boldsymbol{q}[k] + \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}[k]$

输出方程： $\boldsymbol{y}[k] = \boldsymbol{C}\boldsymbol{q}[k] + \boldsymbol{D}\boldsymbol{x}[k]$

谢 谢

本课程所引用的一些素材为主讲老师多年的教学积累，来源于多种媒体及同事、同行、朋友的交流，难以一一注明出处，特此说明并表示感谢！