北京交通大學

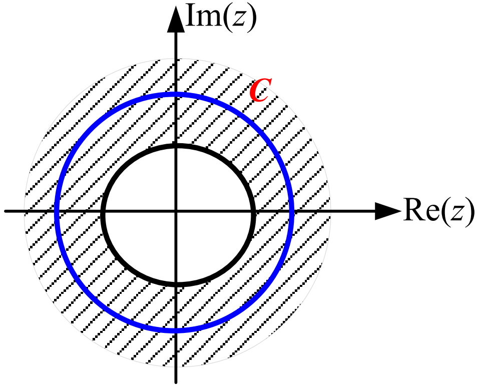
主讲人：陈后金

电子信息工程学院

离散序列的单边z反变换

※ 单边z反变换：

$$x[k]=\frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\oint_{c} X(z)z^{k-1}\mathrm{d}z$$



C 为$X(z)$的ROC中的一闭合曲线。

离散序列的单边z反变换

※ 幂级数展开法

※ 留数计算法

※ 部分分式展开法

离散序列的单边z反变换

※ 幂级数展开法：

$$X(z)=\sum_{k=0}^{\infty}x[k]z^{-k}=x[0]+x[1]z^{-1}+x[2]z^{-2}+\cdots$$

将$X(z)$在收敛域内展开为z^{-1}的幂级数，其展开系数即是序列$x[k]$，

$$x[k]=\{x[0],x[1],x[2],\cdots\}$$

例：利用幂级数展开法求$X(z)=\dfrac{2z^2-0.5z}{z^2-0.5z-0.5}$，$|z|>1$的反变换

解：利用长除法将$X(z)$展成的z^{-1}幂级数，

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2 \quad +0.5z^{-1}+1.25z^{-2} \quad +\cdots \\
\hline
z^2-0.5z-0.5 & 2z^2-0.5z \\
 & 2z^2 \quad -z-1 \\
\cline{2-2}
 & \quad 0.5z+1 \\
 & \quad 0.5z-0.25-0.25z^{-1} \\
\cline{2-2}
 & \quad\quad 1.25+0.25z^{-1} \\
 & \quad\quad 1.25-0.625z^{-1}-0.625z^{-2} \\
\cline{2-2}
 & \quad\quad\quad \cdots
\end{array}
$$

$X(z)$的反变换为：$x[k]=\{2,0.5,1.25,\cdots\}$

幂级数展开法简便直观，但难以得到$x[k]$的闭合解。

离散序列的单边z反变换

※ 留数法：根据Cauchy留数定理

$$x[k]=\frac{1}{2\pi j}\oint_c X(z)z^{k-1}\mathrm{d}z=\sum_{i=1}^{n}\boxed{\operatorname*{Res}_{z=p_i}[X(z)z^{k-1}]}$$

曲线C包含的$X(z)z^{k-1}$极点　　　$X(z)z^{k-1}$在极点p_i处的留数。

◆ p_i为单极点：　$\operatorname*{Res}_{z=p_i}[X(z)z^{k-1}]=(z-p_i)X(z)z^{k-1}\Big|_{z=p_i}$

◆ p_i为 n 阶极点：$\operatorname*{Res}_{z=p_i}[X(z)z^{k-1}]=\frac{1}{(n-1)!}\left[\frac{\mathrm{d}^{n-1}(z-p_i)^n X(z)}{\mathrm{d}z^{n-1}}\right]_{z=p_i}$

例：利用留数法求 $X(z)=\dfrac{2z^2-0.5z}{z^2-0.5z-0.5}$，$|z|>1$的反变换

解：$X(z)z^{k-1}=\dfrac{(2z^2-0.5z)z^{k-1}}{z^2-0.5z-0.5}=\dfrac{(2z-0.5)z^k}{(z-1)(z+0.5)}$

$X(z)z^{k-1}$ 有 $z=1$，$z=-0.5$ 两个单极点

$$x[k]=\text{Res}[X(z)z^{k-1}]_{z=1}+\text{Res}[X(z)z^{k-1}]_{z=-0.5}$$

$$\text{Res}[X(z)z^{k-1}]_{z=1}=(z-1)X(z)z^{k-1}\Big|_{z=1}=(1)^k$$

$$\text{Res}[X(z)z^{k-1}]_{z=-0.5}=(z+0.5)X(z)z^{k-1}\Big|_{z=-0.5}=(-0.5)^k$$

$X(z)$的反变换为： $x[k]=[1+(-0.5)^k]u[k]$

离散序列的单边z反变换

※ 部分分式法：

$$X(z)=\frac{B(z)}{A(z)}=\frac{b_0+b_1z+\cdots+b_mz^m}{1+a_1z+\cdots+a_nz^n}$$

将$X(z)$分解为部分分式之和，然后分别求各部分分式对应的z反变换，即可得到$x[k]$。

$$a^k u[k] \xleftrightarrow{\mathscr{Z}} \frac{1}{1-az^{-1}}=\frac{z}{z-a}, \quad |z|>|a|$$

$$ka^k u[k] \xleftrightarrow{\mathscr{Z}} \frac{az^{-1}}{\left(1-az^{-1}\right)^2}=\frac{az}{(z-a)^2}, \quad |z|>|a|$$

例：利用部分分式法求 $X(z)=\dfrac{2z^2-0.5z}{z^2-0.5z-0.5}$，$|z|>1$ 的反变换

解：$X(z)$为假分式，其有两个单极点$z_1=1$，$z_2=-0.5$

$$X(z)=z\{\frac{2z-0.5}{(z-1)(z+0.5)}\}=z\{\frac{A}{z-1}+\frac{B}{z+0.5}\}=z\cdot X_1(z)$$

$$A=(z-1)X_1(z)\big|_{z=1}=1 \qquad B=(z+0.5)X_1(z)\big|_{z=-0.5}=1$$

$$X(z)=\frac{z}{z-1}+\frac{z}{z+0.5}$$

$X(z)$的反变换为： $x[k]=[1+(-0.5)^k]u[k]$

在求解$X(z)$的反变换时，若分子多项式有公因子z，则先提取一个z。

例：利用部分分式法求 $X(z)=\dfrac{z}{(z-1)^2(z+1)}$，$|z|>1$ 的反变换

解：$X(z)$为真分式，其有二阶重极点$z_1=1$，单极点$z_2=-1$

$$X(z)=z\{\frac{A}{z-1}+\frac{B}{(z-1)^2}+\frac{C}{z+1}\}=z\cdot X_1(z)$$

$$A=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}[X_1(z)(z-1)^2]\Big|_{z=1}=-0.25 \qquad B=(z-1)^2X_1(z)\Big|_{z=1}=0.5$$

$$C=(z+1)X_1(z)\Big|_{z=-1}=0.25$$

$$X(z)=\frac{-0.25z}{z-1}+\frac{0.5z}{(z-1)^2}+\frac{0.25z}{z+1}$$

$X(z)$的反变换为： $x[k]=[\frac{1}{4}(-1)^k-\frac{1}{4}+\frac{k}{2}]u[k]$

例：利用部分分式法求 $X(z)=\dfrac{2z^2+1}{z^2-7z+12}$，$|z|>4$ 的反变换

解：$X(z)$为假分式，其有两个单极点$z_1=3$，$z_2=4$

$$X(z)=2+\frac{14z-23}{(z-3)(z-4)}=2+\frac{A}{z-3}+\frac{B}{z-4}=2+X_1(z)$$

$$A=(z-3)X_1(z)\big|_{z=3}=-19 \qquad B=(z-4)X_1(z)\big|_{z=4}=33$$

$X(z)$的反变换为：

$$x[k]=2\delta[k]+[33\cdot 4^{k-1}-19\cdot 3^{k-1}]u[k-1]$$

谢 谢

本课程所引用的一些素材为主讲老师多年的教学积累，来源于多种媒体及同事、同行、朋友的交流，难以一一注明出处，特此说明并表示感谢!