北京交通大学

信号与系统

主讲人：陈后金

电子信息工程学院

系统函数与系统特性

- 系统函数与系统时域特性
- 系统函数与系统频域特性
- 系统函数与系统的稳定性

1. 系统函数与系统时域特性

※ 系统函数$H(z)$的零极点分布：

$$H(z)=\frac{N(z)}{D(z)}=K\frac{(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_m)}{(z-p_1)(z-p_2)\cdots(z-p_n)}$$

零极点增益形式

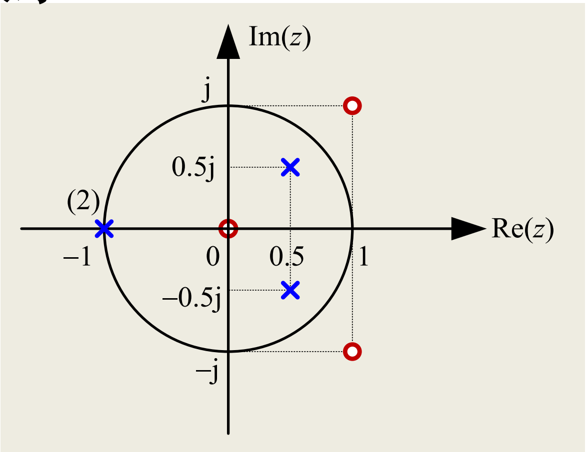
$z_1,z_2,\cdots,z_m$是系统函数的零点，在z平面用o表示。

$p_1,p_2,\cdots,p_n$是系统函数的极点，在z平面用×表示。

例：离散时间LTI系统的系统函数

$$H(z)=\frac{z(z-1-\mathrm{j})(z-1+\mathrm{j})}{(z+1)^2(z-0.5-\mathrm{j}0.5)(z-0.5+\mathrm{j}0.5)}$$

可得$H(z)$的零极点分布图。



1. 系统函数与系统时域特性

➢ 根据系统函数$H(z)$零极点分布，将$H(z)$展开成部分分式，取z反变换可得描述离散系统时域特性的$h[k]$:

$$H(z)=K\frac{(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_m)}{(z-p_1)(z-p_2)\cdots(z-p_n)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{k_i z}{z-p_i}$$

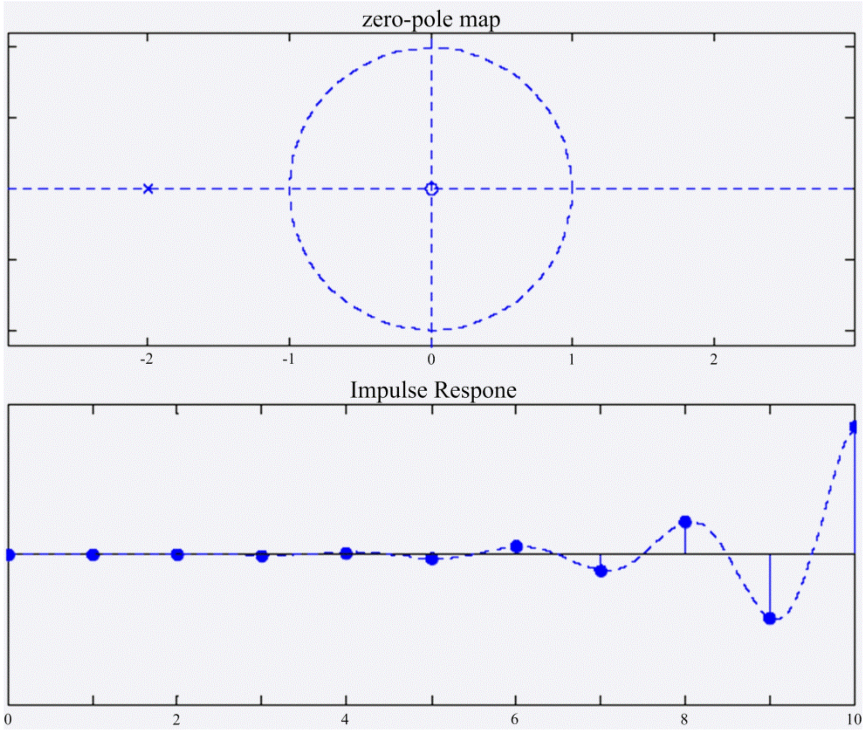
$$h[k]=\mathscr{Z}^{-1}\{H(z)\}=\sum_{i=1}^{n}k_i(p_i)^k u[k]$$

（这里假设系统函数的极点都为单极点）

离散LTI系统的时域特性主要取决于系统函数的极点分布。

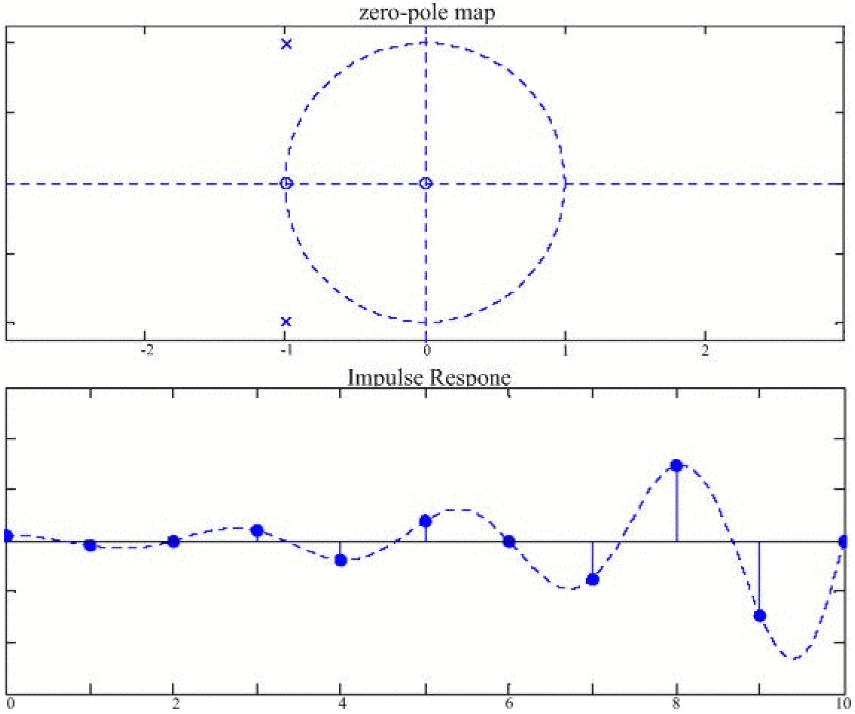
1. 系统函数与系统时域特性

$H(z)$零极点分布与系统时域特性



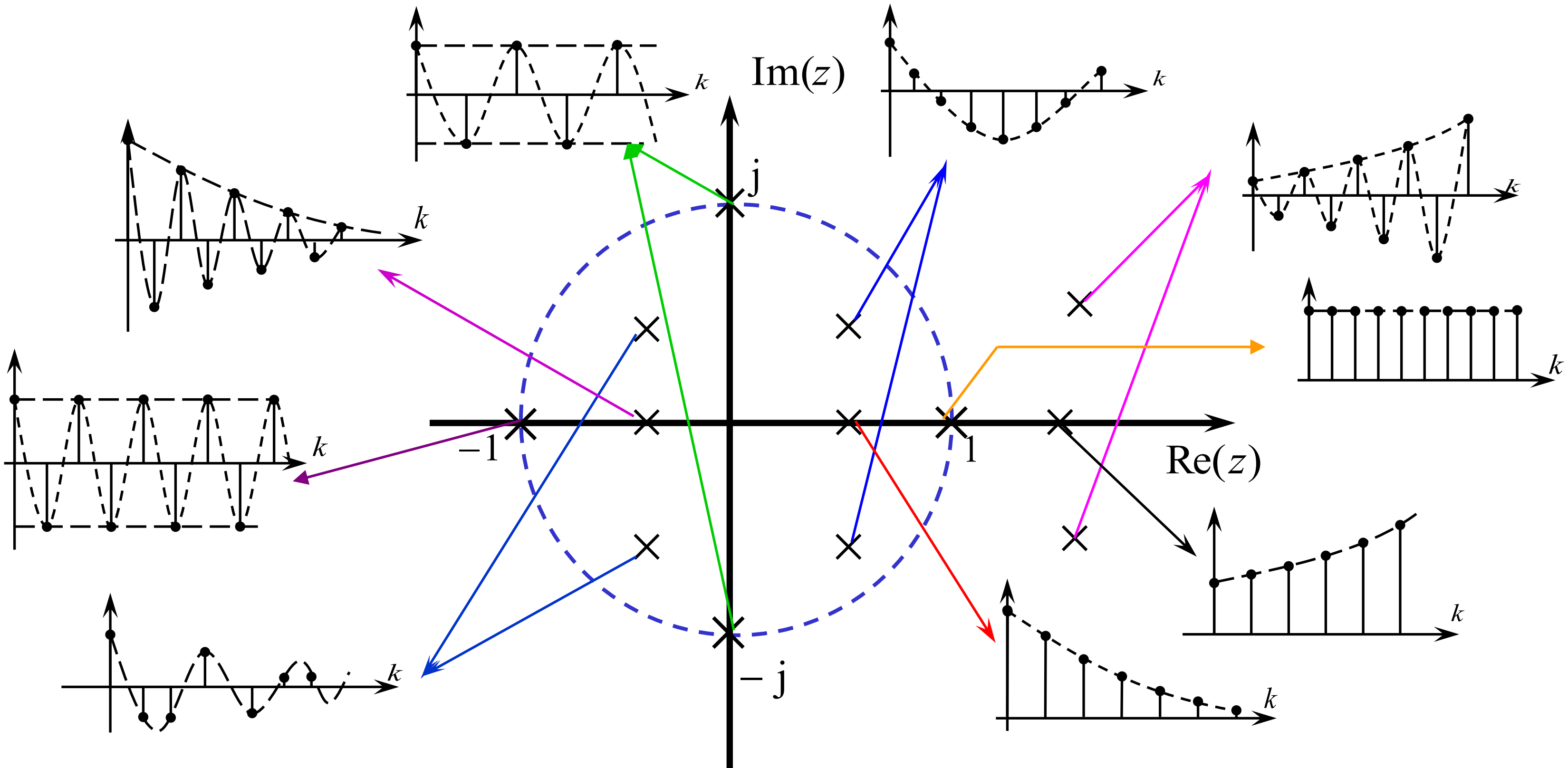
1. 系统函数与系统时域特性

$H(z)$零极点分布与系统时域特性



1. 系统函数与系统时域特性

$H(z)$零极点分布与系统时域特性



2. 系统函数与系统频率响应

离散LTI系统的频率响应$H(e^{j\Omega})$

对于稳定系统，令系统函数$H(z)$中$z=e^{j\Omega}$ 得到系统频率响应

$$H(e^{j\Omega}) = H(z)\Big|_{z=e^{j\Omega}}$$

$$H(e^{j\Omega}) = \underbrace{|H(e^{j\Omega})|}_{\text{幅度响应}}\, e^{j\overbrace{\varphi(\Omega)}^{\text{相位响应}}}$$

2. 系统函数与系统频率响应

离散LTI系统的频率响应$H(e^{j\Omega})$

对于零极增益表示的系统函数 $H(z)=K\dfrac{\prod_{j=1}^{m}(z-z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(z-p_i)}$

当系统稳定时，令$z=e^{j\Omega}$，则得 $H(e^{j\Omega})=K\dfrac{\prod_{j=1}^{m}(e^{j\Omega}-z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(e^{j\Omega}-p_i)}$

系统函数$H(z)$在z平面单位圆$z=e^{j\Omega}$上的取值对应系统的频率响应。

2. 系统函数与系统频域特性

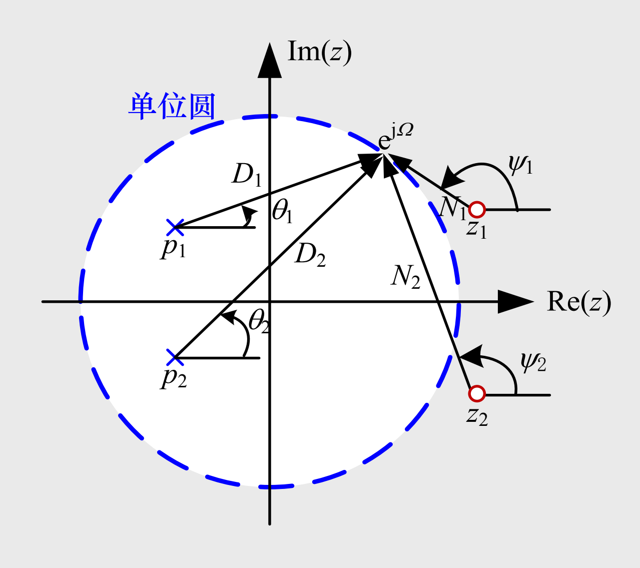
$$H(e^{j\Omega}) = K\frac{\prod_{j=1}^{m}(e^{j\Omega}-z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(e^{j\Omega}-p_i)}$$

$$(e^{j\Omega}-z_j)=N_j e^{j\psi_j}$$

$$(e^{j\Omega}-p_i)=D_i e^{j\theta_i}$$

用z平面p_i和z_j点指向单位圆上$e^{j\Omega}$点的向量表示

$$H(e^{j\Omega}) = \underbrace{K\frac{N_1N_2\cdots N_m}{D_1D_2\cdots D_n}}_{|H(e^{j\Omega})|} e^{j\overbrace{}^{}\underbrace{[(\psi_1+\psi_2+\cdots+\psi_m)-(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)]}_{\varphi(\Omega)}}$$



3. 系统函数与系统的稳定性

时域：离散LTI系统稳定的充要条件是

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty$$

由系统函数$H(z)$判断离散LTI系统的稳定性：

※若系统函数$H(z)$的收敛域包含z平面单位圆，则系统稳定。

※对于因果系统，若$H(z)$的极点都在单位圆内，则系统稳定。

例：试判断离散因果LTI系统 $H(z)=\dfrac{1}{(1-0.5z^{-1})(1-1.5z^{-1})}$ 稳定性。

解：(1) 从收敛域角度分析

该离散LTI系统的收敛域为$|z|>1.5$

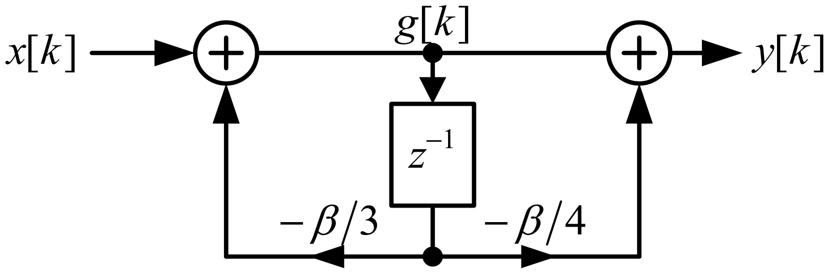
收敛域不包含单位圆，故系统不稳定。

(2) 从极点分布分析

该因果LTI系统的极点为$z_1=0.5$，$z_2=1.5$

极点$z_2=1.5$在单位圆外，故系统不稳定。

例：某离散因果LTI系统如图所示，求系统函数$H(z)$，并判断系统稳定时β的取值范围。



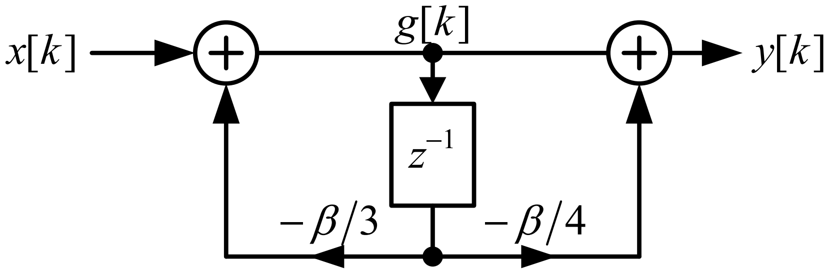
解：引入中间变量$g[k]$，

$$G(z) = z^{-1}(-\beta/3)G(z) + X(z) \Rightarrow G(z) = \frac{X(z)}{1+(\beta/3)z^{-1}}$$

将$G(z)$代入并整理：$Y_{zs}(z) = G(z) + (-\beta/4)z^{-1}G(z)$

系统函数：$H(z) = \dfrac{Y_{zs}(z)}{X(z)} = \dfrac{1-(\beta/4)z^{-1}}{1+(\beta/3)z^{-1}}$

例：某离散因果LTI系统如图所示，求系统函数$H(z)$，并判断系统稳定时β的取值范围。



解：由系统函数：$H(z)=\dfrac{Y_{zs}(z)}{X(z)}=\dfrac{1-(\beta/4)z^{-1}}{1+(\beta/3)z^{-1}}=\dfrac{z-(\beta/4)}{z+(\beta/3)}$

极点：$p=-\beta/3$

离散因果LTI系统稳定的条件是$H(z)$的极点位于单位圆内，

因此，β的取值范围：$|\beta|<3$

例：描述因果离散LTI系统的差分方程为$y[k]-\alpha y[k-1]=x[k]$，试分析使得系统稳定的参数α取值范围，并求解系统单位脉冲响应$h[k]$和系统频率响应$H(e^{j\Omega})$。

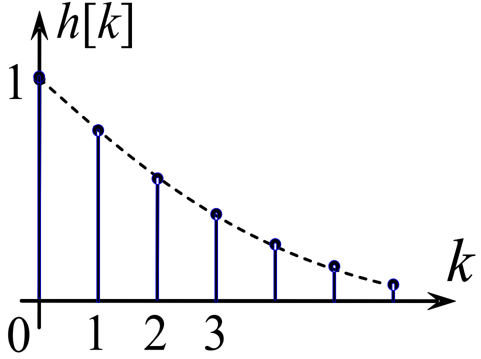
解：由因果离散LTI系统差分方程 $y[k]-\alpha y[k-1]=x[k]$

系统函数：$H(z)=\dfrac{z}{z-\alpha}$ ，收敛域$|z|>|\alpha|$

为使系统稳定，要求收敛域包含单位圆，

所以参数$|\alpha|<1$。

单位脉冲响应：$h[k]=(\alpha)^k u[k]$

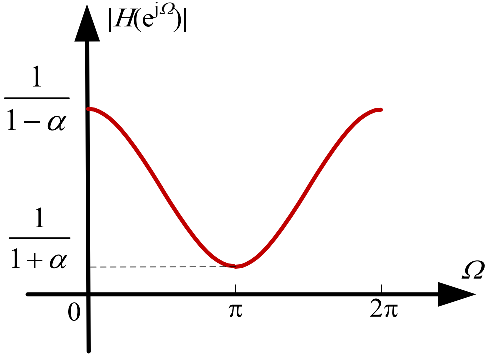


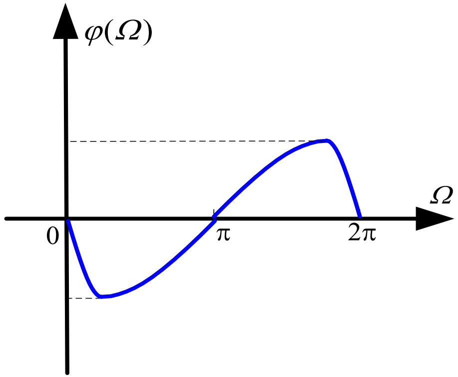
例：描述因果离散LTI系统的差分方程为$y[k]-\alpha y[k-1]=x[k]$，试分析使得系统稳定的参数α取值范围，并求解系统单位脉冲响应$h[k]$和系统频率响应$H(e^{j\Omega})$ 。

系统频率响应： $$H(e^{j\Omega})=\frac{e^{j\Omega}}{e^{j\Omega}-\alpha}=\frac{1}{(1-\alpha\cos\Omega)+j\alpha\sin\Omega}$$

幅度响应

$$\left|H(e^{j\Omega})\right|=\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2-2\alpha\cos\Omega}}$$





相位响应

$$\varphi(\Omega)=-\arctan\left(\frac{\alpha}{1-\alpha\cos\Omega}\right)$$

谢 谢

本课程所引用的一些素材为主讲老师多年的教学积累，来源于多种媒体及同事、同行、朋友的交流，难以一一注明出处，特此说明并表示感谢！