北京交通大學

# 信号与系统

主讲人：陈后金

电子信息工程学院

# 连续时间基本信号

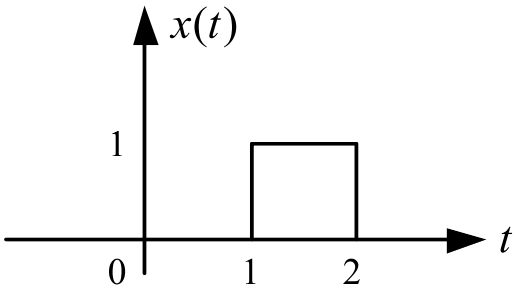
- 普通信号
  - ※ 直流信号
  - ※ 正弦信号
  - ※ 指数类信号
  - ※ 抽样信号

- 奇异信号
  - ※ 阶跃信号
  - ※ 冲激信号
  - ※ 斜坡信号
  - ※ 冲激偶信号

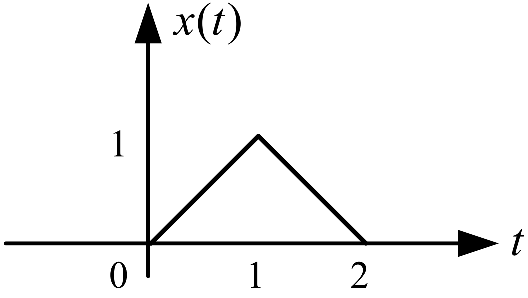
# 奇异信号

➢ 定义

函数本身或其导数或高阶导数具有不连续点（跳变点）。



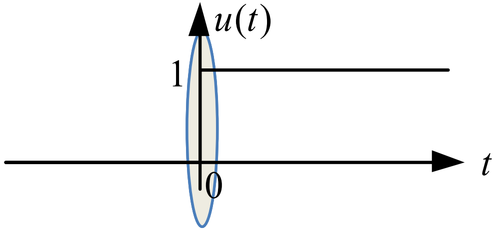

函数本身具有不连续点




函数的高阶导数具有不连续点

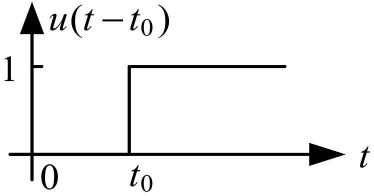
# 1. 单位阶跃信号

$$u(t)=\begin{cases}1 & t>0\\ 0 & t<0\end{cases}$$

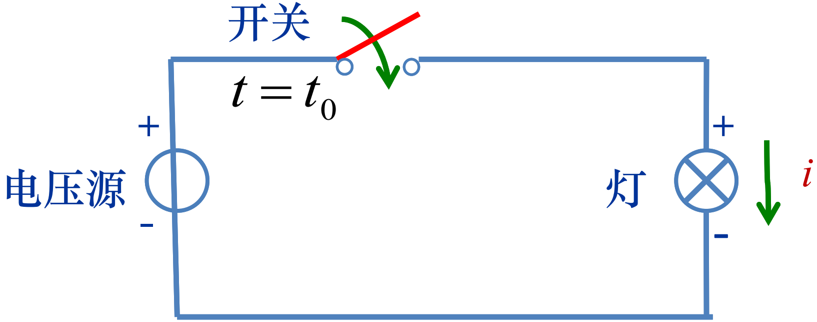



注意：
在跳变点0处，函数值未定义。

$$u(t-t_0)=\begin{cases}1 & t>t_0\\ 0 & t<t_0\end{cases}$$

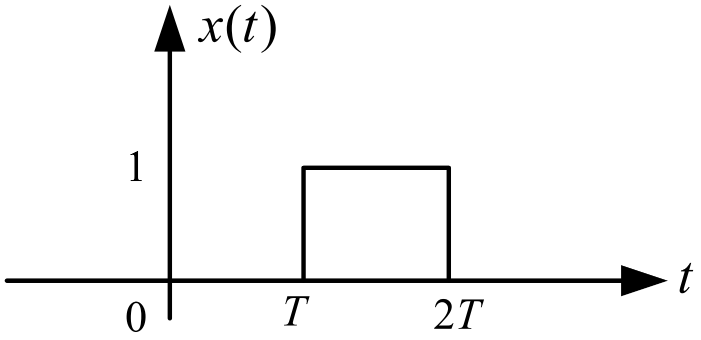



➢ 实际问题：
开关电路

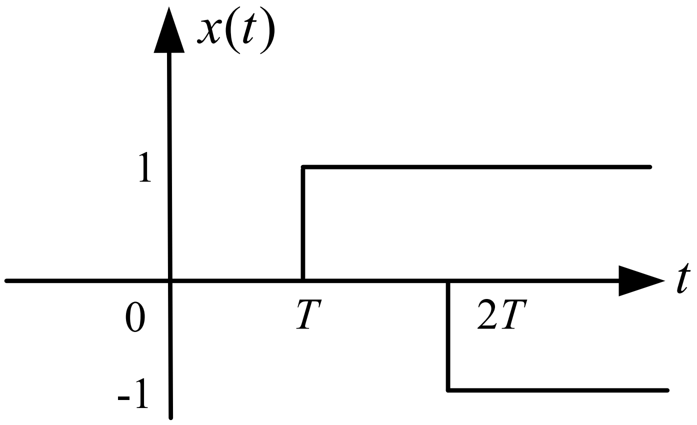


# 1. 单位阶跃信号

- **作用：** (1) 表示任意的矩形脉冲信号

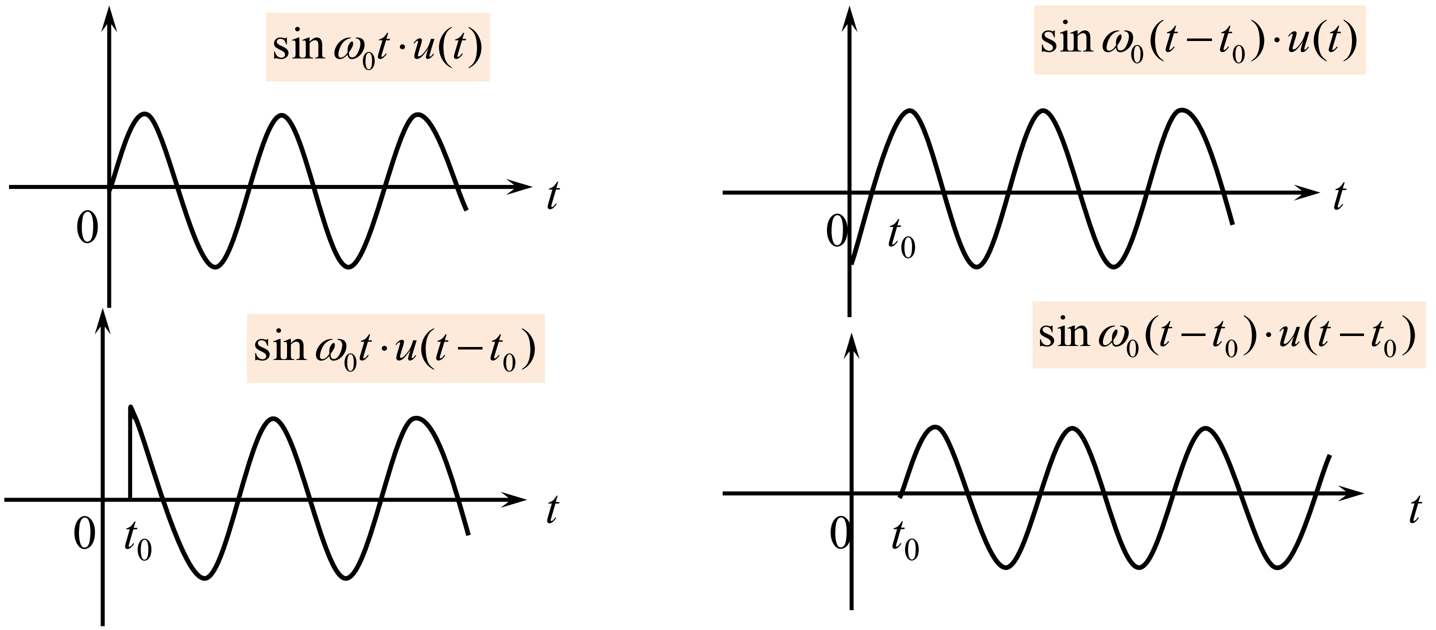



$$x(t) = u(t-T)-u(t-2T)$$



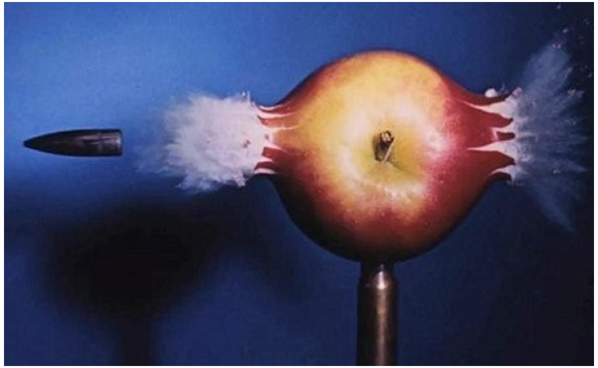
# 1. 单位阶跃信号

➢ 作用：(2) 利用阶跃信号的单边性表示信号的时间范围



# 2. 单位冲激信号

➢ 实际问题：力学中瞬间作用的冲击力、自然界中的闪电等



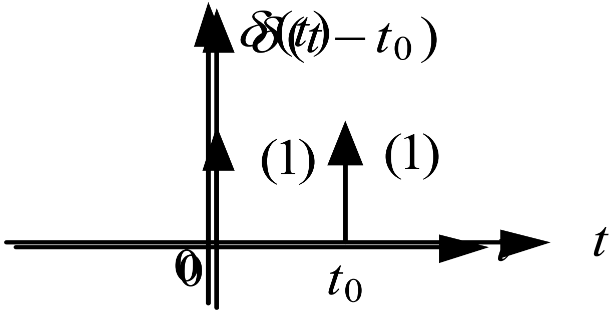
子弹击穿苹果

闪电

冲激信号可以很好地描述这些实际现象！

特点：作用时间极短，而幅值极大。

- 狄拉克(Dirac)定义




$$\delta(t)=0,\quad t\neq 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\,\mathrm{d}t=1$$

$$\delta(t-t_0)=0,\quad t\neq t_0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)\,\mathrm{d}t=\int_{t_0-\Delta}^{t_0+\Delta}\delta(t-t_0)\,\mathrm{d}t=1$$

冲激信号具有强度，其强度就是冲激信号对时间的定积分值。在图中用括号注明，以区分信号的幅值。

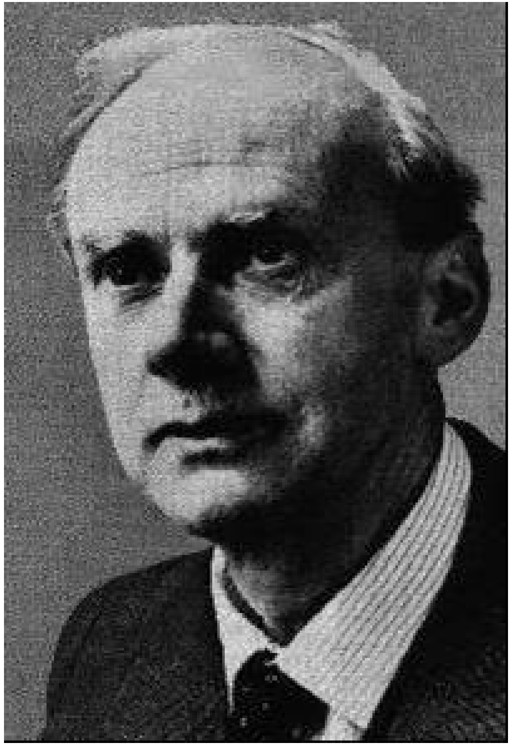
# 2. 单位冲激信号

## 冲激信号的广义函数定义

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\delta(t)\mathrm{d}t = \phi(0)$$

$\varphi(t)$为测试函数,是任意连续的信号

# 狄拉克（Paul Adrie Maurice Dirac）



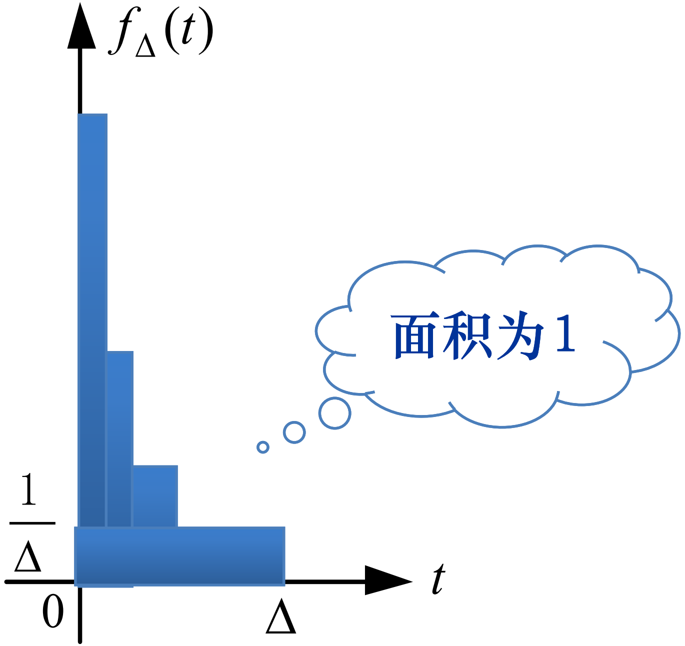
(1902～1984)

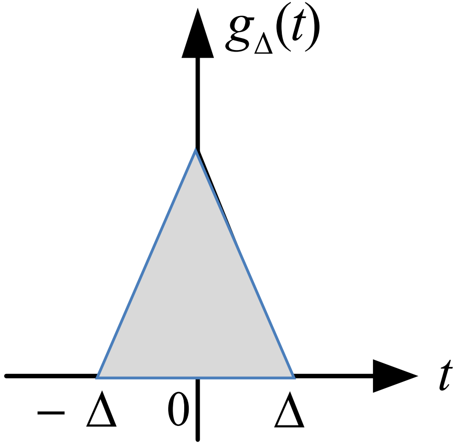
英国理论物理学家，量子力学的创始人之一。1935年应清华大学邀请，在清华大学作了关于正电子的演讲，曾被选为中国物理学会名誉会员。

1928年他把相对论引进了量子力学，建立了相对论形式的薛定谔方程，也就是著名的狄拉克方程。狄拉克由此做出了存在正电子的预言，1933年获诺贝尔奖。主要著作有《量子力学原理》。此外，他和费米各自独立发现了费米-狄拉克统计法，发表过大量有关宇宙学方面的论文，提出可能存在磁单极的预言。

# 2. 单位冲激信号

➤ 极限模型



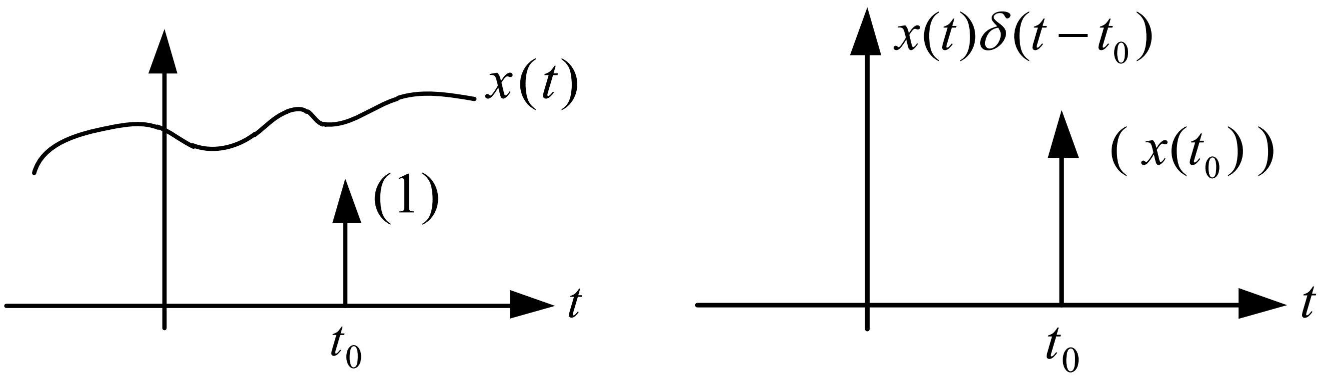




$$\delta(t)=\lim_{\Delta\to 0} f_\Delta(t)=\lim_{\Delta\to 0} g_\Delta(t)$$

# 2. 单位冲激信号

➢ 性质1：筛选特性

$$x(t)\delta(t-t_0)=x(t_0)\delta(t-t_0)$$



# 2. 单位冲激信号

- 性质2：抽样特性

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-t_0)\mathrm{d}t = x(t_0)$$

证明：$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-t_0)\mathrm{d}t$

利用筛选特性

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t_0)\delta(t-t_0)\mathrm{d}t = x(t_0)\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)\mathrm{d}t = x(t_0)$$

# 2. 单位冲激信号

➢ 性质3：展缩特性

$$\delta(at)=\frac{1}{|a|}\delta(t)\qquad(a\neq 0)$$

取 $a=-1$，可得 $\delta(t)=\delta(-t)$

推论：冲激信号是偶函数。

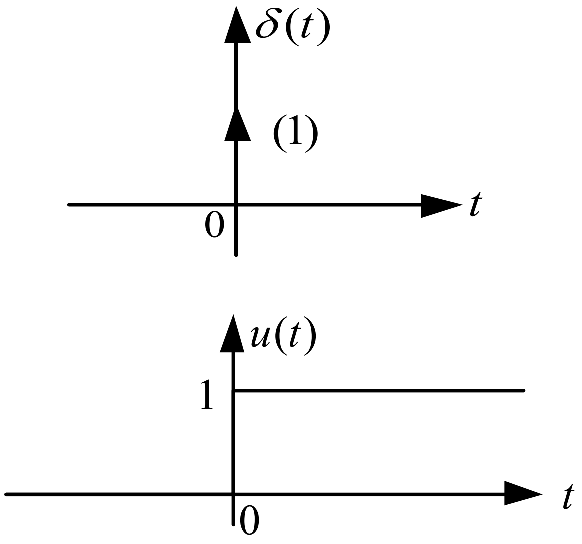
$$\delta(at+b)=\frac{1}{|a|}\delta(t+b/a)\qquad(a\neq 0)$$

# 2. 单位冲激信号

➢ 性质：冲激信号与阶跃信号的关系

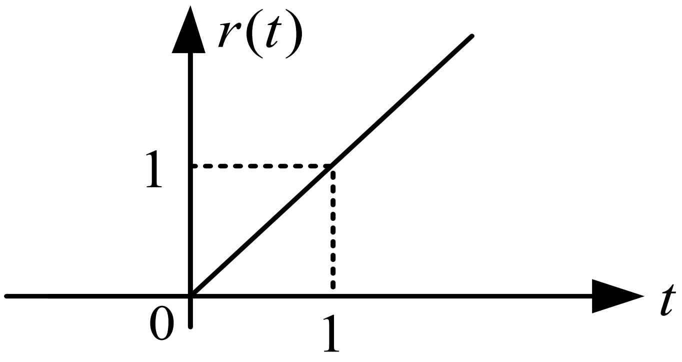
$$\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}=\delta(t)$$

$$\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)\cdot\mathrm{d}\tau=\begin{cases}1 & t>0\\ 0 & t<0\end{cases}=u(t)$$



# 3. 单位斜坡信号

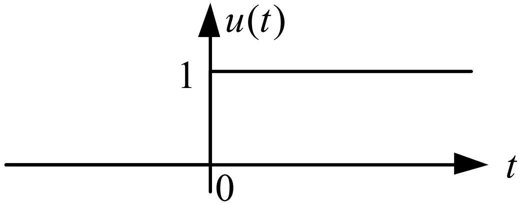
$$r(t)=\begin{cases} t & t\geq 0 \\ 0 & t<0 \end{cases} \Leftrightarrow r(t)=t\cdot u(t)$$



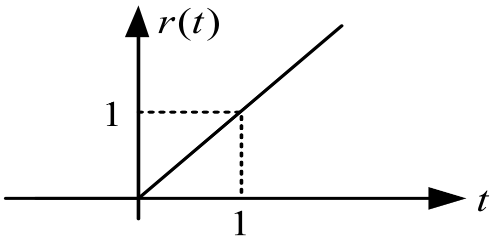
# 3. 单位斜坡信号

➢ 斜坡信号与阶跃信号之间的关系

$$r(t)=\int_{-\infty}^{t}u(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$




$$\frac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t}=u(t)$$

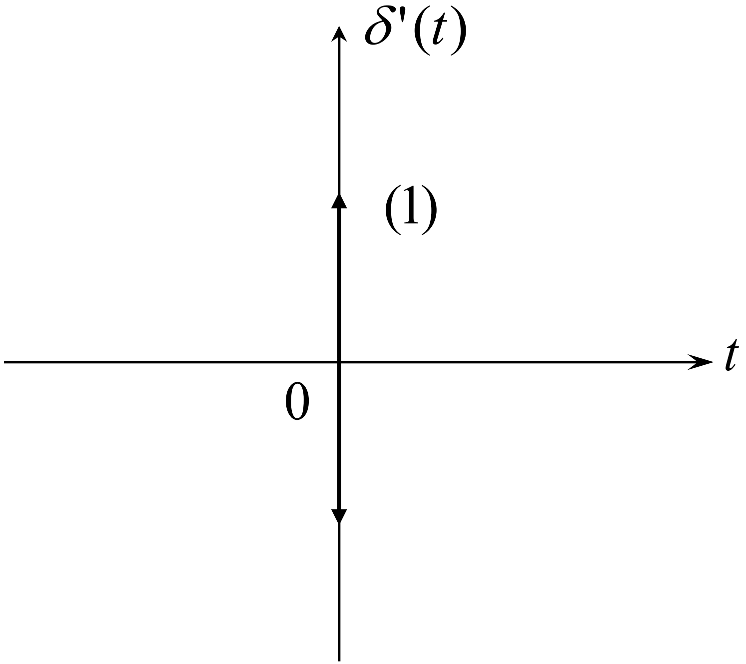


# 4. 单位冲激偶信号

- 定义：

$$\delta'(t)=\frac{\mathrm{d}\delta(t)}{\mathrm{d}t}$$

冲激偶信号的图形表示



# 4. 单位冲激偶信号

冲激偶信号的性质：

$$x(t)\delta'(t-t_0)=x(t_0)\delta'(t-t_0)-x'(t_0)\delta(t-t_0)$$ （筛选特性）

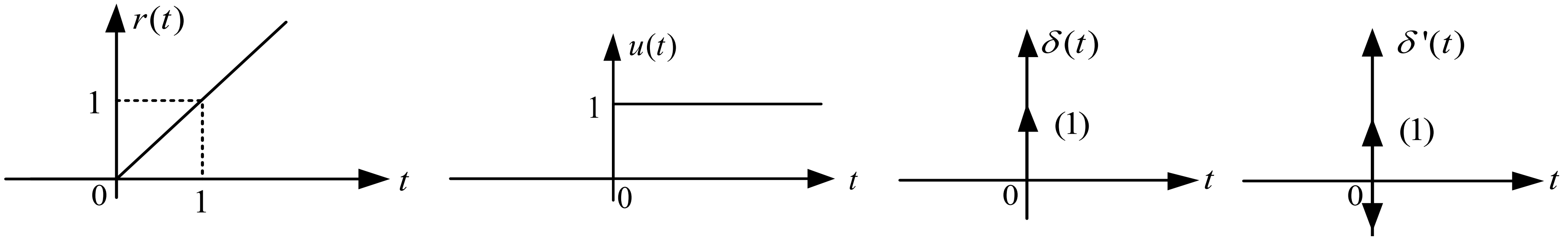
$$\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\delta'(t-t_0)\mathrm{d}t=-x'(t_0)$$ （抽样特性）

$$\delta'(at)=\frac{1}{a|a|}\delta'(t)\qquad(a\neq 0)$$ （展缩特性）

$$\delta'(t)=-\delta'(-t)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta'(t)\mathrm{d}t=0$$

# 四种奇异信号之间的关系




微分关系

$$r(t) \xrightarrow{\frac{\mathrm{d}()}{\mathrm{d}t}} u(t) \xrightarrow{\frac{\mathrm{d}()}{\mathrm{d}t}} \delta(t) \xrightarrow{\frac{\mathrm{d}()}{\mathrm{d}t}} \delta'(t)$$

积分关系

$$\delta'(t) \xrightarrow[\int_{-\infty}^{t}()\mathrm{d}\tau]{} \delta(t) \xrightarrow[\int_{-\infty}^{t}()\mathrm{d}\tau]{} u(t) \xrightarrow[\int_{-\infty}^{t}()\mathrm{d}\tau]{} r(t)$$

# [例]　计算下列各式

(1) $\int_{-\infty}^{+\infty}\sin(t)\cdot\delta(t-\frac{\pi}{4})\mathrm{d}t$

(4) $\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\cdot\delta(2-2t)\mathrm{d}t$

(2) $\int_{-2}^{+3}\mathrm{e}^{-5t}\cdot\delta(t-1)\mathrm{d}t$

(5) $\int_{-2}^{+2}(t^2+3t)\cdot\delta(\frac{t}{3}-1)\mathrm{d}t$

(3) $\int_{-4}^{+6}\mathrm{e}^{-2t}\cdot\delta(t+8)\mathrm{d}t$

(6) $\mathrm{e}^{-4t}\cdot\delta(2+2t)$

# [例]　计算下列各式

$$(1)\ \int_{-\infty}^{+\infty}\sin(t)\cdot\delta(t-\frac{\pi}{4})\mathrm{d}t=\sin(\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}/2$$

$$(2)\ \int_{-2}^{+3}\mathrm{e}^{-5t}\cdot\delta(t-1)\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{-5\ \times 1}=1/\mathrm{e}^{5}$$

$$(3)\ \int_{-4}^{+6}\mathrm{e}^{-2t}\cdot\delta(t+8)\mathrm{d}t=0$$

$$(4)\ \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\cdot\delta(2-2t)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\cdot\frac{1}{2}\delta(t-1)\cdot\mathrm{d}t=\frac{1}{2\mathrm{e}}$$

$$(5)\ \int_{-2}^{+2}(t^{2}+3t)\cdot\delta(\frac{t}{3}-1)\mathrm{d}t=\int_{-2}^{+2}(t^{2}+3t)\cdot 3\delta(t-3)\cdot\mathrm{d}t=0$$

$$(6)\ \mathrm{e}^{-4t}\cdot\delta(2+2t)=\mathrm{e}^{-4t}\cdot\frac{1}{2}\delta(t+1)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-4\ \times(-1)}\delta(t+1)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{4}\delta(t+1)$$

## [例]　计算下列各式

1．在冲激信号的抽样特性中，其积分区间不一定都是（$-\infty$，$+\infty$），但只要积分区间不包括冲激信号$\delta(t-t_0)$的$t=t_0$时刻，则积分结果必为零。

2.对于$\delta(at+b)$形式的冲激信号，要先利用冲激信号的展缩特性将其化为$\delta(t+b/a)/|a|$形式后，方可利用冲激信号的抽样特性与筛选特性。

# 谢 谢

本课程所引用的一些素材为主讲老师多年的教学积累，来源于多种媒体及同事、同行、朋友的交流，难以一一注明出处，特此说明并表示感谢！