北京交通大學

信号与系统

主讲人：陈后金

电子信息工程学院

连续时间LTI系统的零状态响应

- 系统零状态响应
- 卷积积分的计算
- 卷积积分的性质

1. 系统零状态响应

若输入信号为$x(t)$，连续时间LTI系统的冲激响应为$h(t)$ ，则系统的零状态响应$y_{zs}(t)$为：

$$y_{zs}(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau \qquad (卷积)$$

由此可见，连续时间LTI系统的零状态响应是输入信号与系统冲激响应的卷积积分，此揭示了信号与系统在时域相互作用的机理。

2. 卷积积分的计算

解析方法： 直接按照卷积积分的表达式进行计算

$$y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

若信号$x(t)$与$h(t)$可用解析函数式表达，

则可以利用解析方法来计算卷积积分 。

[例] 计算 $x(t) * h(t), x(t) = \mathrm{e}^{-t} u(t), h(t) = u(t)$

解：由卷积定义

$$x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) \mathrm{d}\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\tau} u(\tau) u(t-\tau) \mathrm{d}\tau$$

由 $u(\tau)u(t-\tau)$ 得到

$$= \begin{cases} \int_{0}^{t} \mathrm{e}^{-\tau} \mathrm{d}\tau = 1 - \mathrm{e}^{-t}, & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

由此可得

$$x(t) * h(t) = (1 - \mathrm{e}^{-t}) u(t)$$

[例] 求 $2e^{-2t}u(t)*3e^{-t}u(t)$卷积积分

解: $2e^{-2t}u(t)*3e^{-t}u(t)$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} 2e^{-2\tau}u(\tau)\cdot 3e^{-(t-\tau)}u(t-\tau)d\tau$$

$$=\begin{cases} 6\int_0^t e^{-2\tau}e^{-(t-\tau)}d\tau & t>0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$$

$$=\begin{cases} 6e^{-t}\int_0^t e^{-\tau}d\tau & t>0 \\ 0 & t<0 \end{cases} = 6(e^{-t}-e^{-2t})u(t)$$

$$e^{\alpha t}u(t)*e^{\beta t}u(t)=\begin{cases} \dfrac{1}{\beta-\alpha}(e^{\beta t}-e^{\alpha t})u(t) & \alpha\neq\beta \\ te^{\alpha t}u(t) & \alpha=\beta \end{cases}$$

2. 卷积积分的计算

图形方法： $y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau$

图形法计算卷积积分的步骤：

(1)将$x(t)$和$h(t)$中的自变量由t改为τ;

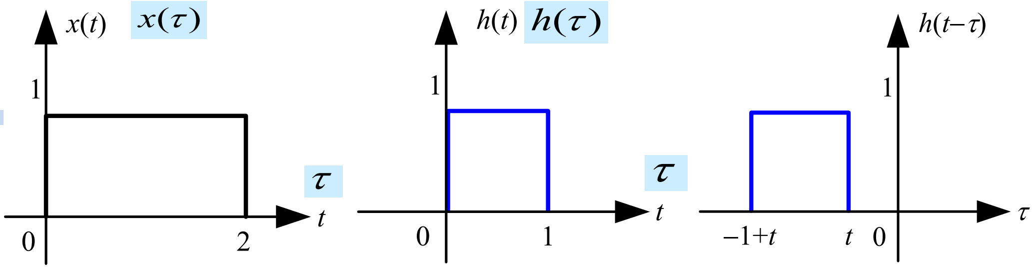
(2)将其中一个信号翻转得$h(-\tau)$，再平移t得到$h(t-\tau)$；

$$h(\tau)\xrightarrow{\text{翻转}}h(-\tau)\xrightarrow{\text{平移}t}h(-(\tau-t))=h(t-\tau)$$

(3) 将$x(t)$ 与$h(t-\tau)$相乘，对乘积后信号进行积分。

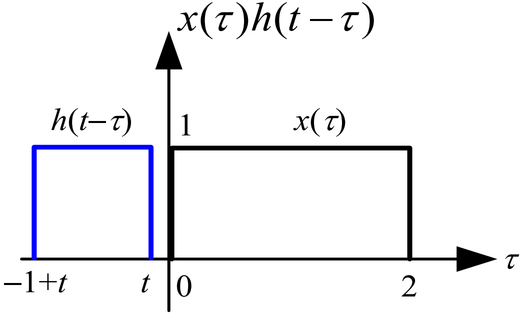
(4)不断改变平移量t，分别计算$x(t)\ h(t-\tau)$的积分。

[例] 计算 $y(t) = x(t) * h(t)$。



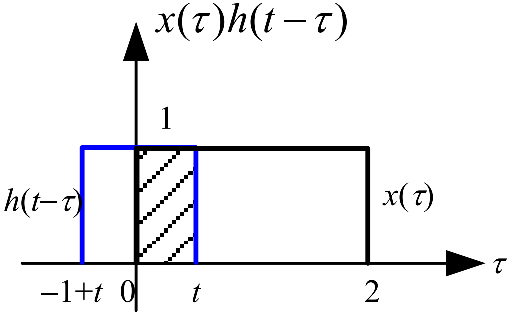
解:

a) $t < 0$



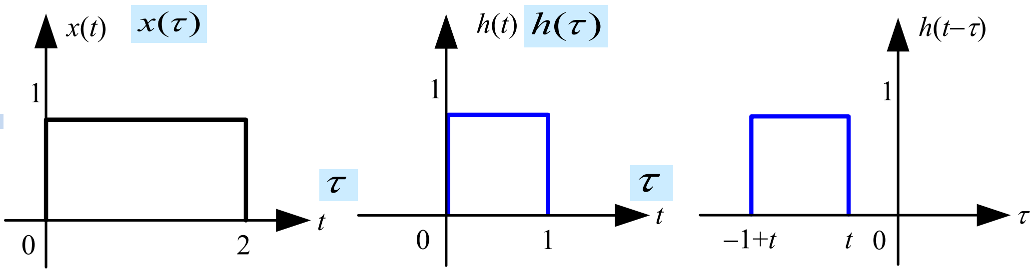
$$\Rightarrow y(t) = 0$$

b) $0 \le t < 1$



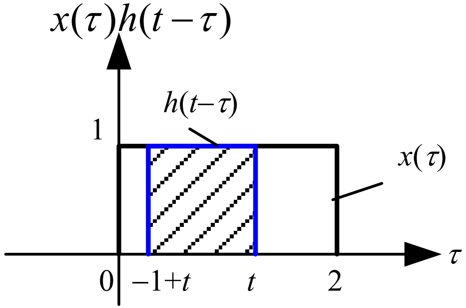
$$\Rightarrow y(t) = \int_0^t 1 \times 1 \, \mathrm{d}\tau = t$$

[例] 计算 $y(t) = x(t) * h(t)$。



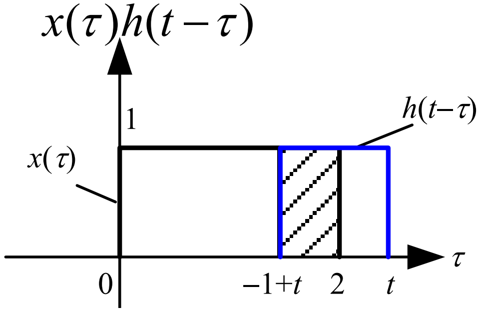
解：

c) $1 \le t < 2$



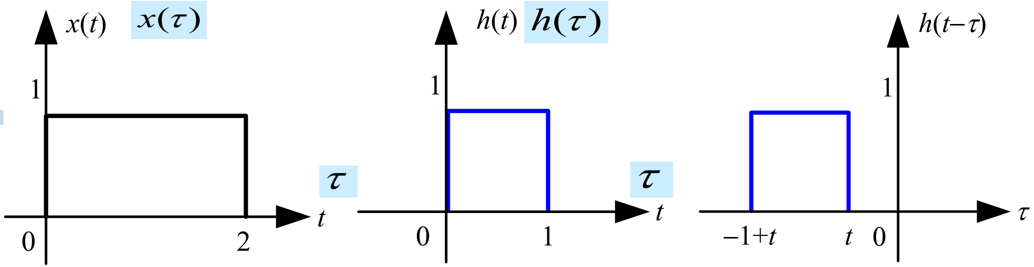
$$\Rightarrow y(t) = \int_{-1+t}^{t} 1 \times 1 \, \mathrm{d}\tau = 1$$

d) $2 \le t < 3$



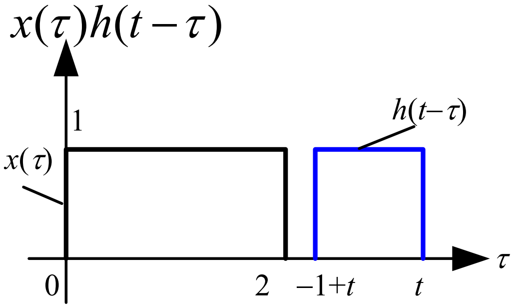
$$\Rightarrow y(t) = \int_{-1+t}^{2} 1 \times 1 \, \mathrm{d}\tau = 3 - t$$

[例] 计算 $y(t)=x(t)*h(t)$。



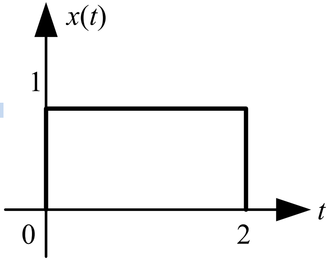
解：

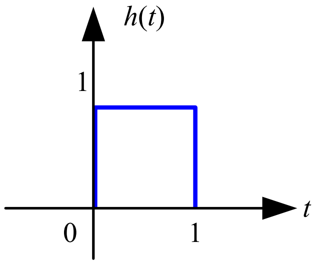
e) $3 \le t$



$$y(t)=0$$

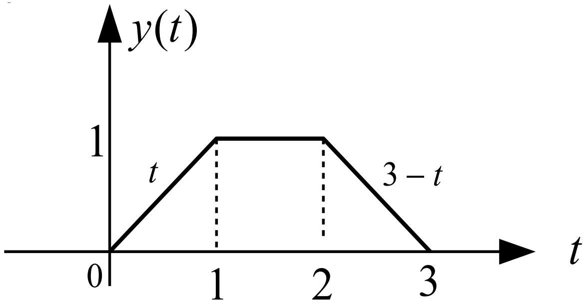
[例] 计算 $y(t)=x(t)*h(t)$。





解：

综上可知：



两个不等宽矩形脉冲的卷积为一个等腰梯形信号

两个信号的卷积，卷积结果仍为一个信号。该信号的起点等于那两个信号起点之和，终点等于那两个信号的终点之和。

3. 卷积积分的性质

(1) 交换律： $x_1(t) * x_2(t) = x_2(t) * x_1(t)$

(2) 分配律： $[\,x_1(t) + x_2(t)\,] * x_3(t) = x_1(t) * x_3(t) + x_2(t) * x_3(t)$

(3) 结合律： $[\,x_1(t) * x_2(t)\,] * x_3(t) = x_1(t) * [\,x_2(t) * x_3(t)\,]$

3. 卷积积分的性质

※ **等效特性：** $x_1(t)*x_2(t)=x_1^{(-1)}(t)*x_2'(t)=x_1'(t)*x_2^{(-1)}(t)$

※ **平移特性：** $x(t)*\delta(t-T)=x(t-T)$

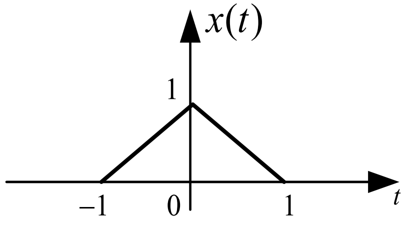
若$x_1(t)*x_2(t)=y(t)$，则 $x_1(t-t_1)*x_2(t-t_2)=y(t-t_1-t_2)$

※ **微分特性：** $x(t)*\delta'(t)=x'(t)$

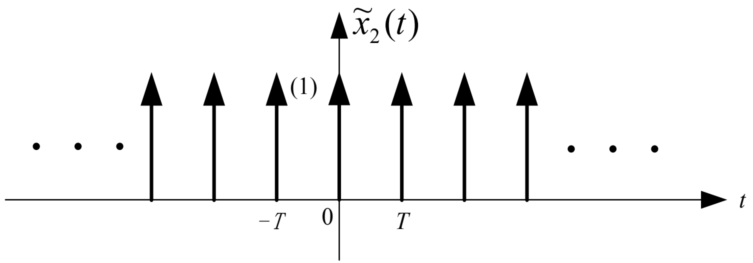
※ **积分特性：** $x(t)*u(t)=\int_{\infty}^{t}x(\tau)\mathrm{d}\tau=x^{(-1)}(t)$

3. 卷积积分的性质

[例] 计算三角波$x_1(t)$与周期冲激串信号$\tilde{x}_2(t)$当$T=2$和$T=1$时的卷积。



三角波



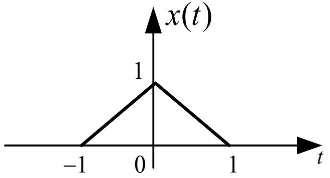
周期冲激串信号

解：周期冲激串信号 $\tilde{x}_2(t)=\cdots+\delta(t+T)+\delta(t)+\delta(t-T)+\cdots$

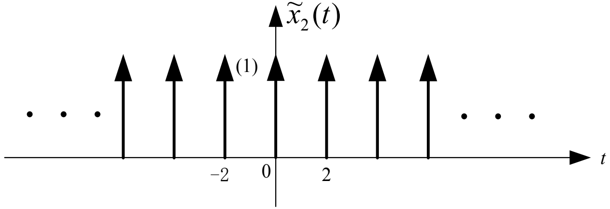
利用卷积的平移特性 $x(t)*\delta(t-T)=x(t-T)$

求出三角波分别与$\tilde{x}_2(t)$中各冲激信号的卷积，
利用卷积分配律将各个卷积结果相加即可。

[例] 如下图，计算三角波$x_1(t)$与周期冲激串信号$\tilde{x}_2(t)$的卷积。



三角波

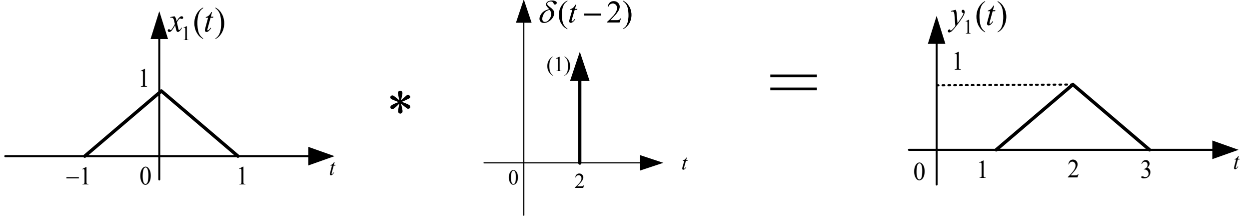


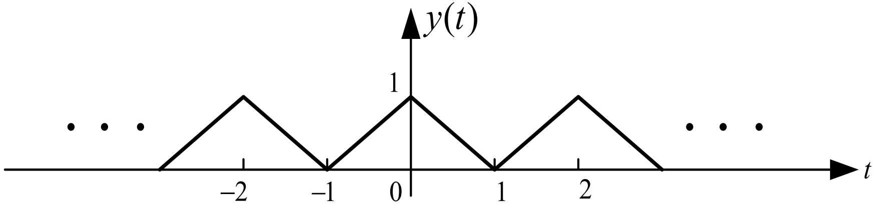
周期冲激串信号

$T=2$

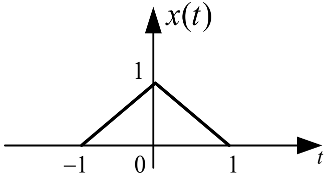
解： $T=2$时，周期冲激串信号 $\tilde{x}_2(t)=\cdots+\delta(t+2)+\delta(t)+\delta(t-2)+\cdots$

由 $x(t) * \delta(t-T)=x(t-T)$

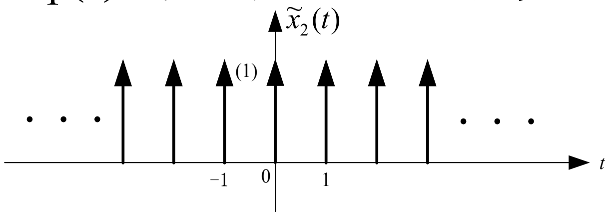




[例] 如下图，计算三角波$x_1(t)$与周期冲激串信号$\tilde{x}_2(t)$的卷积。



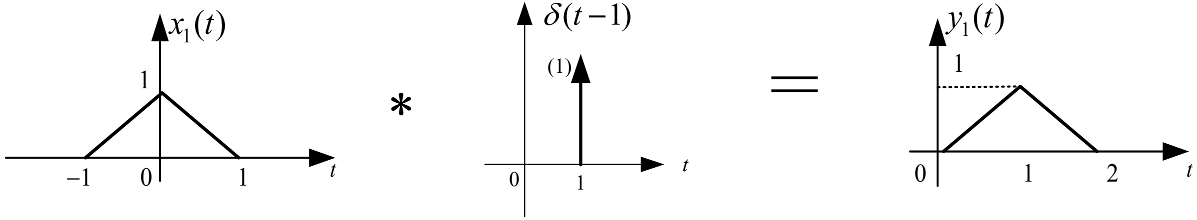
三角波

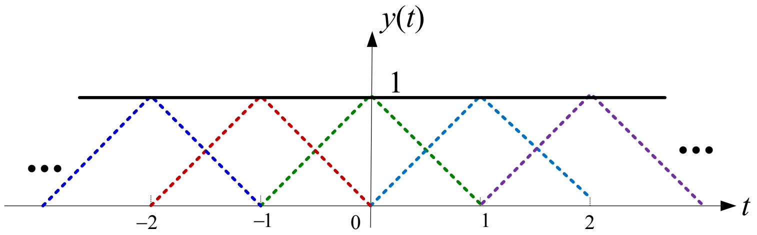


周期冲激串信号

T=1

解： T=1时，周期冲激串信号 $\tilde{x}_2(t)=\cdots+\delta(t+1)+\delta(t)+\delta(t-1)+\cdots$

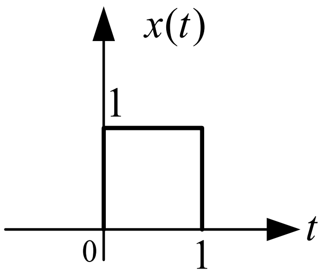


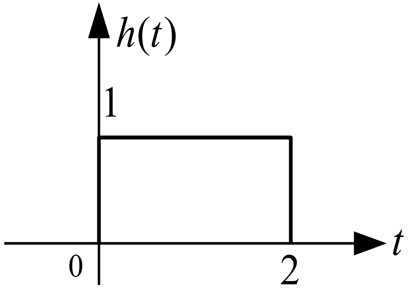


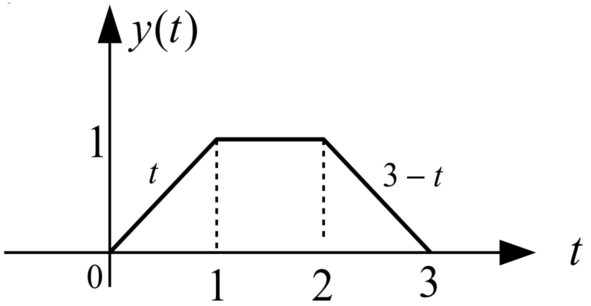
3. 卷积积分的性质

[例] 利用平移特性及$u(t) * u(t) = r(t)$，计算$y(t) = x(t) * h(t)$。

解:







$$y(t) = x(t) * h(t) = [\ u(t) - u(t-1)\ ] * [\ u(t) - u(t-2)\ ]$$

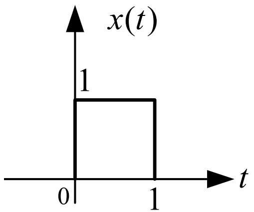
$$= u(t)*u(t) - u(t-1)*u(t) - u(t)*u(t-2) + u(t-1)*u(t-2)$$

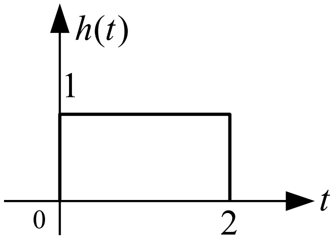
$$= r(t) - r(t-1) - r(t-2) + r(t-3)$$

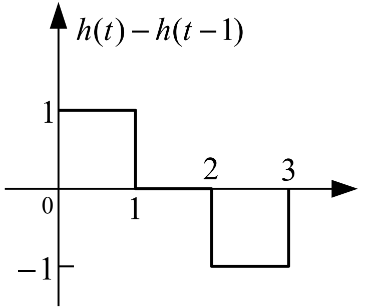
3. 卷积积分的性质

[例] 利用等效特性，计算$y(t) = x(t) * h(t)$。

解:



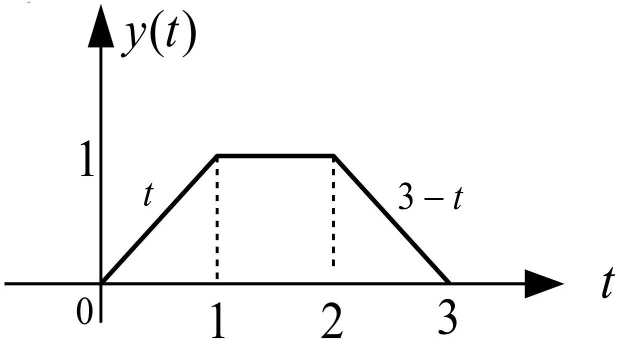




$$x'(t) = \delta(t) - \delta(t-1)$$

$$y'(t) = x'(t) * h(t) = h(t) - h(t-1)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} [h(t) - h(t-1)]\mathrm{d}t$$



谢 谢

本课程所引用的一些素材为主讲老师多年的教学积累，来源于多种媒体及同事、同行、朋友的交流，难以一一注明出处，特此说明并表示感谢！