北京交通大學

信号与系统

主讲人：陈后金

电子信息工程学院

离散非周期信号的频域分析

※ 离散非周期信号的频域表示

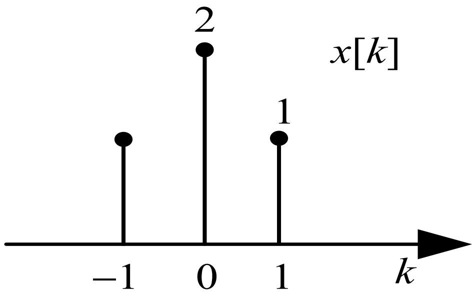
※ 离散非周期信号的频谱

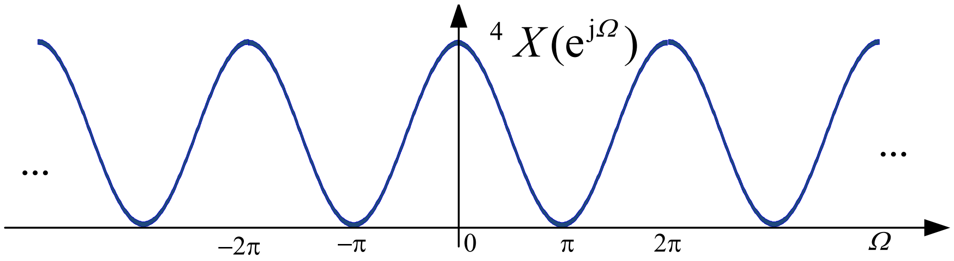
1. 离散非周期信号的频域表示

满足一定收敛条件的非周期序列 $x[k]$ 可用虚指数序列表示为

$$x[k]=\frac{1}{2\pi}\int_{<2\pi>}X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega k}\mathrm{d}\Omega$$

加权系数$X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})$称为离散非周期信号$x[k]$的**频谱**。





1. 离散非周期信号的频域表示

IDTFT
$$x[k]=\frac{1}{2\pi}\int_{<2\pi>}X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega k}\mathrm{d}\Omega$$

DTFT
$$X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega k}$$

$X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})$称为离散非周期信号$x[k]$的**频谱**。

$$x[k]\xleftrightarrow{\text{DTFT}}X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})$$

DTFT的收敛性

定义$X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})$的部分和

$$X_N(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}) = \sum_{k=-N}^{N} x[k]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega k}$$

若 $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[k]| < \infty$ 绝对可和

则 $\lim_{N\to\infty} \left| X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}) - X_N(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}) \right| = 0$

若序列满足绝对可和，则序列存在DTFT。（充分条件）

2.离散非周期信号的频谱

$X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})$ 特点：

（1）$X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})$是$\boldsymbol{\Omega}$的连续函数

（2）$X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})$是周期为2π的周期函数

$$X[\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\Omega+2\pi)}]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\Omega+2\pi)k}$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega k}\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi k}=X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})$$

2.离散非周期信号的频谱

序列频谱的表示

$$X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}) = \underbrace{\left|X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})\right|}_{\text{幅度频谱}} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\underbrace{\varphi(\Omega)}_{\text{相位频谱}}}$$

相位谱$\varphi(\boldsymbol{\Omega})$ 的主值(principal value)区间为

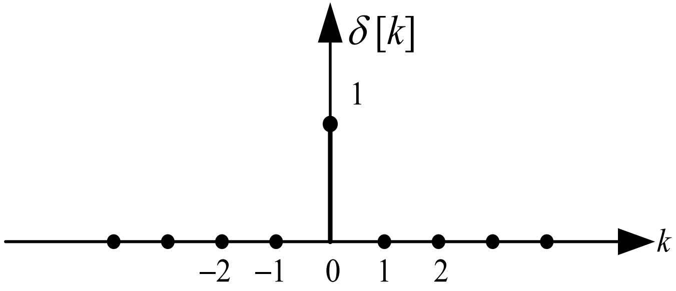
$$-\pi < \varphi(\Omega) \le \pi$$

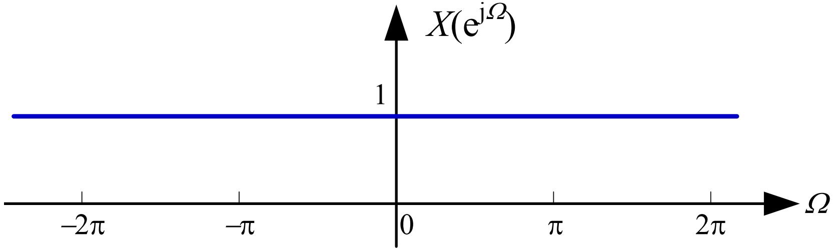
2.离散非周期信号的频谱

例： 求单位脉冲序列 $\delta[k]$ 的频谱。

解：

$$X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[k]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega k} = 1$$





2.离散非周期信号的频谱

例：求序列 $x[k]=\alpha^k u[k]$ 的频谱。

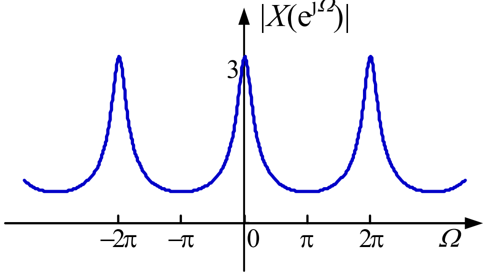
解：

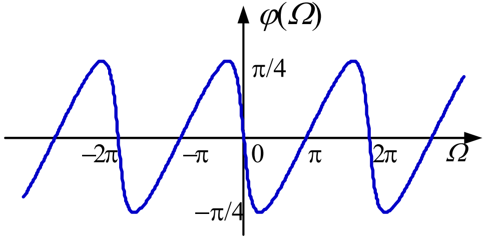
$$X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha^k \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega k}=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\alpha \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega}\right)^k$$

当$|\alpha|>1$时， 不满足绝对可和，序列的DTFT不存在。

当$|\alpha|<1$时， $X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})=\dfrac{1}{1-\alpha \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega}}$

$\alpha=0.7$



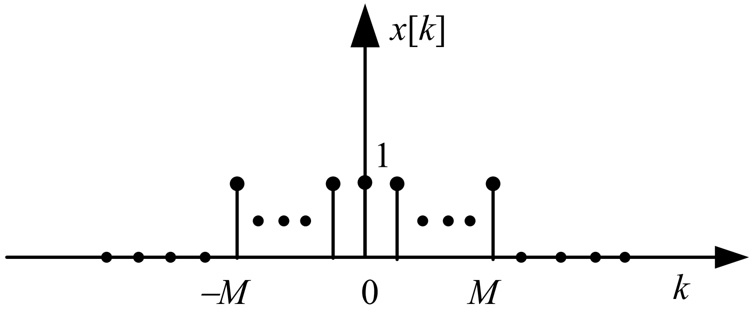


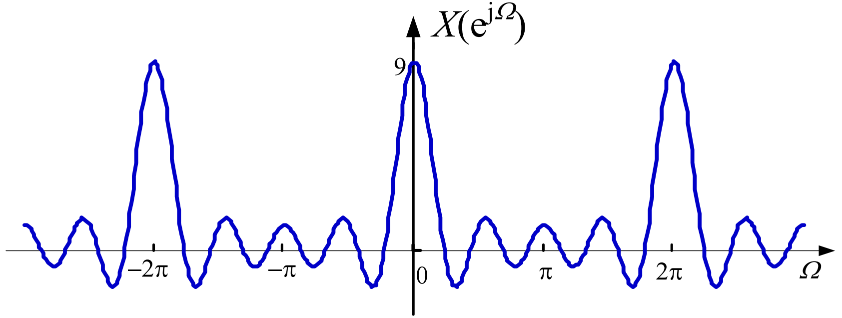
例： 求宽度为$2M+1$的矩形序列$x[k]$的频谱。

解：

$$X(e^{j\Omega})=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]e^{-j\Omega k}=\sum_{k=-M}^{M}\left(e^{-j\Omega}\right)^{k}$$

$$=\frac{e^{jM\Omega}\left[1-e^{-j(2M+1)\Omega}\right]}{1-e^{-j\Omega}}=\frac{\sin\left[\left(M+1/2\right)\Omega\right]}{\sin(\Omega/2)}$$





$M=4$时矩形序列的频谱

谢 谢

本课程所引用的一些素材为主讲老师多年的教学积累，来源于多种媒体及同事、同行、朋友的交流，难以一一注明出处，特此说明并表示感谢!