北京交通大学

信号与系统

主讲人：陈后金

电子信息工程学院

状态空间变量分析

※ 系统状态变量分析的基本概念和普遍形式

※ 连续时间系统状态方程和输出方程的建立

※ 离散时间系统状态方程和输出方程的建立

※ **连续时间系统状态方程和输出方程的求解**

※ 离散时间系统状态方程和输出方程的求解

连续时间系统状态方程和输出方程的求解

※ **时域**求解状态方程和输出方程

※ **s域**求解状态方程和输出方程

※ 状态方程和输出方程的Matlab求解

连续系统的状态方程和输出方程的时域求解

[例] 已知描述某连续系统的状态方程和输出方程为：

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1(t) \\ \dot{q}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

系统状态变量的初始状态和输入分别为：

$$\begin{bmatrix} q_1(0^-) \\ q_2(0^-) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(t) \\ \mathrm{e}^{-3t} u(t) \end{bmatrix}$$

在时域求解该系统的**状态变量**和**输出**。

连续系统的状态方程和输出方程的时域求解

解：状态方程和输出方程写成矩阵形式：

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{q}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{q}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}(t)\\ \boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{q}(t)+\boldsymbol{D}\boldsymbol{x}(t)\end{cases}$$

其中 $A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ $C=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ $D=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}$

先求解状态方程： $\dot{\boldsymbol{q}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{q}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}(t)$

两边都左乘 e^{-At} 得：

$$\mathrm{e}^{-At}\frac{\mathrm{d}[\boldsymbol{q}(t)]}{\mathrm{d}t}=\mathrm{e}^{-At}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{q}(t)+\mathrm{e}^{-At}\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{x}(t)$$

连续系统的状态方程和输出方程的时域求解

$$\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}t}\frac{\mathrm{d}[\boldsymbol{q}(t)]}{\mathrm{d}t}-\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{q}(t)=\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{x}(t)$$

即：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{q}(t)]=\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}(t)$$

解得：

$$\boldsymbol{q}(t)=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{q}(0^-)+\int_{0^-}^{t}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-\tau)}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{17}{10}\mathrm{e}^{2t}+2\mathrm{e}^{-t}-\frac{1}{5}\mathrm{e}^{-3t}-\frac{3}{2}\\ 1-2\mathrm{e}^{-t}\end{bmatrix}\quad(t>0)$$

连续系统的状态方程和输出方程的时域求解

求解输出方程：

$$\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{Cq}(t)+\boldsymbol{Dx}(t)$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{17}{10}\mathrm{e}^{2t}+2\mathrm{e}^{-t}-\frac{1}{5}\mathrm{e}^{-3t}-\frac{3}{2}\\ 1-2\mathrm{e}^{-t}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u(t)\\ \mathrm{e}^{-3t}u(t)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{17}{10}\mathrm{e}^{2t}-\frac{1}{5}\mathrm{e}^{-3t}+\frac{1}{2}\\ 2\mathrm{e}^{-t}\end{bmatrix}\qquad (t>0)$$

连续系统的状态方程和输出方程的时域求解

状态方程： $\dot{\boldsymbol{q}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{q}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}(t)$

初始状态： $\boldsymbol{q}(0^-) = \begin{bmatrix} q_1(0^-) & q_2(0^-) & \cdots & q_n(0^-) \end{bmatrix}^T$

求解得到： $\boldsymbol{q}(t) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{q}(0^-) + \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{B} * \boldsymbol{x}(t)$

输出方程：

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{q}(t) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{x}(t)$$

$$\boldsymbol{h}(t) = \boldsymbol{C}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D}\delta(t)$$

$$= \underbrace{\boldsymbol{C}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{q}(0^-)}_{\text{零输入响应}} + \underbrace{[\boldsymbol{C}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D}\delta(t)] * \boldsymbol{x}(t)}_{\text{零状态响应}}$$

连续系统的状态方程和输出方程的s域求解

[例] 已知描述某连续系统的状态方程和输出方程为：

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1(t) \\ \dot{q}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

系统状态变量的初始状态和输入分别为：

$$\begin{bmatrix} q_1(0^-) \\ q_2(0^-) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(t) \\ \mathrm{e}^{-3t} u(t) \end{bmatrix}$$

在s域求解该系统的**状态变量**和**输出**。

连续系统的状态方程和输出方程的s域求解

解：状态方程和输出方程：
$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{q}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{q}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}(t) \\ \boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{q}(t)+\boldsymbol{D}\boldsymbol{x}(t) \end{cases}$$

两边进行s变换：
$$\begin{cases} s\boldsymbol{Q}(s)-\boldsymbol{q}(0^-)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}(s)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}(s) \\ \boldsymbol{Y}(s)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{Q}(s)+\boldsymbol{D}\boldsymbol{X}(s) \end{cases}$$

整理得：
$$\begin{cases} \boldsymbol{Q}(s)=(s\mathbf{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{q}(0^-)+(s\mathbf{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}(s) \\ \boldsymbol{Y}(s)=\boldsymbol{C}(s\mathbf{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{q}(0^-)+[\boldsymbol{C}(s\mathbf{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D}]\boldsymbol{X}(s) \end{cases}$$

连续系统的状态方程和输出方程的s域求解

先求：$\mathscr{L}[\mathrm{e}^{At}] = (s\mathbf{I} - A)^{-1} = \begin{bmatrix} s-2 & -3 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix}^{-1}$

$$= \frac{1}{(s-2)(s+1)} \begin{bmatrix} s+1 & 3 \\ 0 & s-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{(s-2)} & \dfrac{3}{(s-2)(s+1)} \\ 0 & \dfrac{1}{(s+1)} \end{bmatrix}$$

$$X(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s} \\ \dfrac{1}{s+3} \end{bmatrix}$$

连续系统的状态方程和输出方程的s域求解

s域状态方程： $\boldsymbol{Q}(s)=(s\mathbf{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{q}(0^-)+(s\mathbf{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}(s)$

$$\begin{bmatrix} Q_1(s) \\ Q_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{(s-2)} & \dfrac{3}{(s-2)(s+1)} \\ 0 & \dfrac{1}{(s+1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{(s-2)} & \dfrac{3}{(s-2)(s+1)} \\ 0 & \dfrac{1}{(s+1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s} \\ \dfrac{1}{s+3} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s-2}+\dfrac{1}{s+1} \\ -\dfrac{1}{s+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{17/10}{s-2}-\dfrac{3/2}{s}+\dfrac{1}{s+1}-\dfrac{1/5}{s+3} \\ \dfrac{1}{s}-\dfrac{1}{s+1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{17}{10}\mathrm{e}^{2t}+2\mathrm{e}^{-t}-\dfrac{1}{5}\mathrm{e}^{-3t}-\dfrac{3}{2} \\ 1-2\mathrm{e}^{-t} \end{bmatrix} \quad (t>0)$$

连续系统的状态方程和输出方程的s域求解

s域输出方程： $\boldsymbol{Y}(s)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{Q}(s)+\boldsymbol{D}\boldsymbol{X}(s)$

$$=\boldsymbol{C}(s\mathbf{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{q}(0^-)+[\boldsymbol{C}(s\mathbf{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D}]\boldsymbol{X}(s)$$

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Q_1(s) \\ Q_2(s) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{s} \\ \frac{1}{s+3} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{s-2} \\ \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \frac{17/10}{s-2}+\frac{1/2}{s}-\frac{1/5}{s+3} \\ \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \mathrm{e}^{2t} \\ \mathrm{e}^{-t} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \frac{7}{10}\mathrm{e}^{2t}-\frac{1}{5}\mathrm{e}^{-3t}+\frac{1}{2} \\ \mathrm{e}^{-t} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{17}{10}\mathrm{e}^{2t}-\frac{1}{5}\mathrm{e}^{-3t}+\frac{1}{2} \\ 2\mathrm{e}^{-t} \end{bmatrix}\quad (t>0)$$

零输入响应　零状态响应

连续系统的状态方程和输出方程的s域求解

状态方程和输出方程：
$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{q}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{q}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}(t)\\ \boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{q}(t)+\boldsymbol{D}\boldsymbol{x}(t)\end{cases}$$

两边进行s变换：
$$\begin{cases}s\boldsymbol{Q}(s)-\boldsymbol{q}(0^-)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}(s)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}(s)\\ \boldsymbol{Y}(s)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{Q}(s)+\boldsymbol{D}\boldsymbol{X}(s)\end{cases}$$

整理得：
$$\begin{cases}\boldsymbol{Q}(s)=(s\mathbf{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{q}(0^-)+(s\mathbf{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}(s)\\ \boldsymbol{Y}(s)=\boldsymbol{C}(s\mathbf{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{q}(0^-)+[\boldsymbol{C}(s\mathbf{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D}]\boldsymbol{X}(s)\end{cases}$$

$H(s)$

然后再对$\boldsymbol{Q}(s)$和$\boldsymbol{Y}(s)$进行s反变换即可得到$\boldsymbol{q}(t)$和$\boldsymbol{y}(t)$。

连续系统的状态方程和输出方程的Matlab求解

[例] 已知描述某连续系统的状态方程和输出方程为：

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1(t) \\ \dot{q}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

系统状态变量的初始状态和输入分别为：

$$\begin{bmatrix} q_1(0^-) \\ q_2(0^-) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(t) \\ \mathrm{e}^{-3t}u(t) \end{bmatrix}$$

利用MATLAB计算该系统的**状态变量**和**输出**。

连续系统的状态方程和输出方程的Matlab求解

1.首先由sys = ss(A,B,C,D)获得状态方程的计算机表示模型；

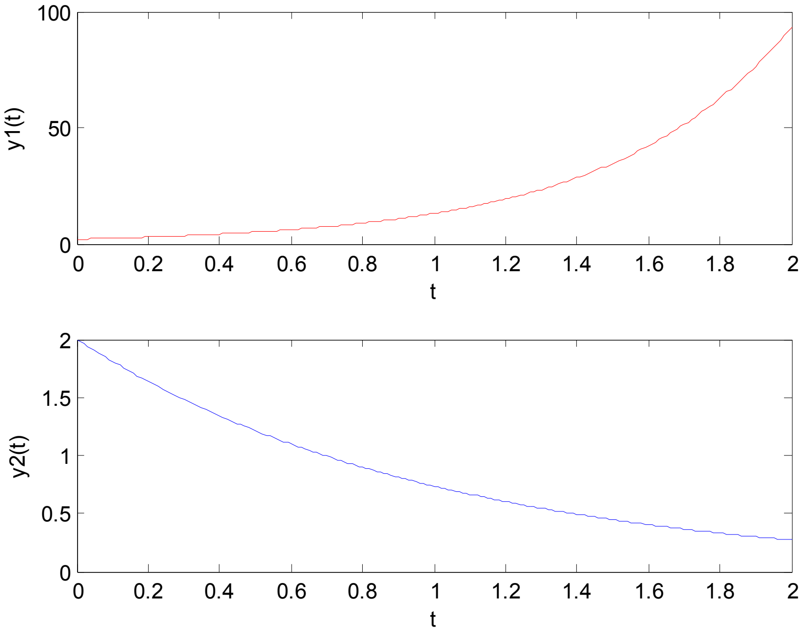
2.由lsim获得连续状态方程和输出方程的数值解。

lsim的调用形式为：$[y,to,q]=\mathrm{lsim}(sys,x,t,q_0)$;

sys	由函数ss构造的状态方程模型
t	需计算的输出样本点。 t =0:dt :Tfinal
$x(:,k)$	系统第k个输入在t上的抽样值
q_0	系统的初始状态(可缺省)
$y\ (:,k)$	系统的第k个输出
to	实际计算时所用的样本点；
q	系统的状态

连续系统的状态方程和输出方程的Matlab求解

```
%上例利用Matlab求解，源程序如下：
A=[2 3;0 -1];B=[0 1; 1 0];
C=[1 1; 0 -1];D=[1 0; 1 0];
q0=[2 -1];
dt=0.01;
t=0:dt:2;
x(:,1)=ones(length(t),1);
x(:,2)=exp(-3*t)';
sys=ss(A,B,C,D);
[y,t,q]=lsim(sys,x,t,q0);
subplot(2,1,1);
plot(t,y(:,1),'r');ylabel('y1(t)');
xlabel('t');
subplot(2,1,2);
plot(t,y(:,2));ylabel('y2(t)');
xlabel('t');
```



q和y即为状态变量和系统输出的数值解。
在Matlab的工作区，可见q和y是201x2的矩阵。

谢 谢

本课程所引用的一些素材为主讲老师多年的教学积累，来源于多种媒体及同事、同行、朋友的交流，难以一一注明出处，特此说明并表示感谢！