北京交通大学

信号与系统

主讲人：陈后金

电子信息工程学院

单边z变换的性质

- 线性特性
- 位移特性
- 卷积特性
- 求和特性
- 指数加权特性
- z域微分特性
- 初值和终值特性

单边z变换的性质

▶ 线性特性

$$x[k] \xleftrightarrow{\mathscr{Z}} X(z), \qquad |z| > R_x$$

$$x_1[k] \xleftrightarrow{\mathscr{Z}} X_1(z), \qquad |z| > R_{x1}$$

$$x_2[k] \xleftrightarrow{\mathscr{Z}} X_2(z), \qquad |z| > R_{x2}$$

$$ax_1[k] + bx_2[k] \xleftrightarrow{\mathscr{Z}} aX_1(z) + bX_2(z),$$

$$|z| > \max(R_{x1}, R_{x2})$$

单边z变换的性质

▶ 位移特性

※ 因果序列的位移

$$x[k-n]u[k-n] \xleftrightarrow{\mathscr{Z}} z^{-n}X(z)\,, \qquad |z| > R_x$$

因果序列延时n，其相应z变换是原来的z变换乘以z^{-n}

※ 非因果序列的位移

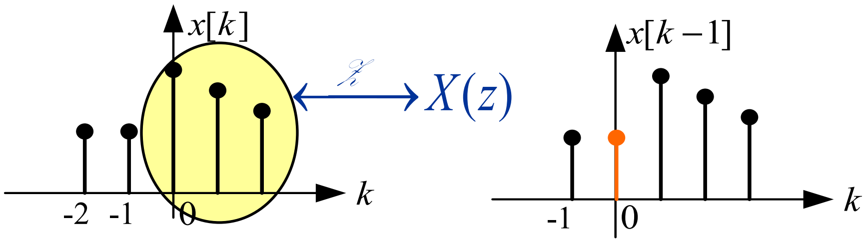
$$\mathscr{Z}\{x[k+n]\,u[k]\} = z^{n}\left[X(z) - \sum_{k=0}^{n-1} x[k]z^{-k}\right], \qquad |z| > R_x$$

$$\mathscr{Z}\{x[k-n]\,u[k]\} = z^{-n}\left[X(z) + \sum_{k=-n}^{-1} x[k]z^{-k}\right], \qquad |z| > R_x$$

单边z变换的性质

▶ 位移特性

证明：$\mathscr{Z}\{x[k-n]u[k]\} = z^{-n}\left[X(z) + \sum_{k=-n}^{-1} x[k]z^{-k}\right], \quad |z| > R_x$



当$x[k]$向右平移一个单位，$x[k]$在$k=-1$处的值移动到了$k=0$处

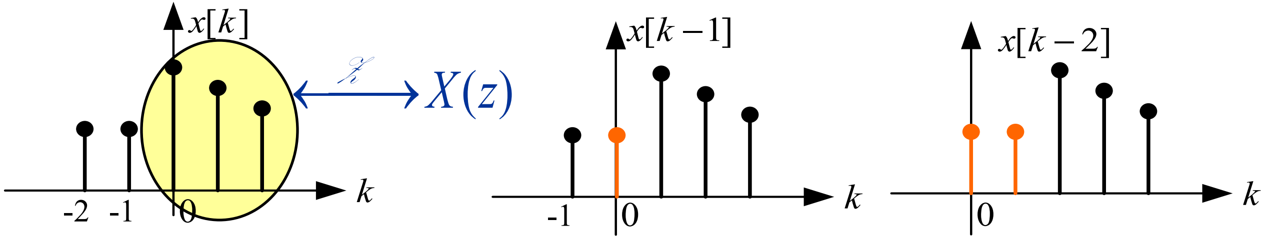
$$x[k-1]u[k] = x[k-1]u[k-1] + x[-1]\delta[k]$$

$$\mathscr{Z}\{x[k-1]u[k]\} = z^{-1}X(z) + x[-1]$$

单边z变换的性质

▶ 位移特性

证明：$\mathscr{Z}\{x[k-n]u[k]\} = z^{-n}\left[X(z) + \sum_{k=-n}^{-1} x[k]z^{-k}\right], \qquad |z| > R_x$



当$x[k]$向右平移两个单位， $x[k]$在$k=-2$处的值移动到了$k=0$处

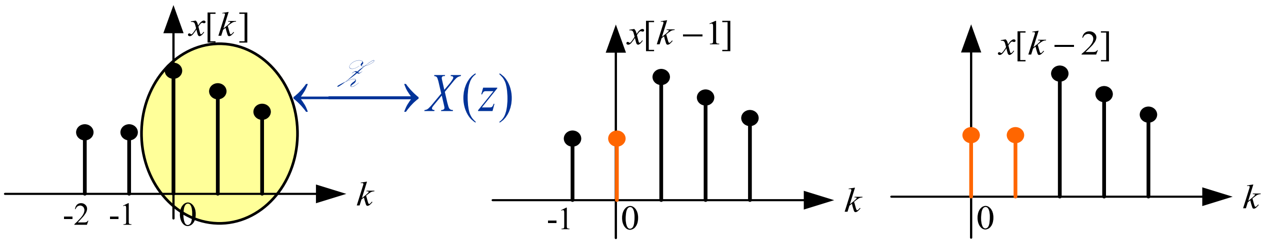
$$x[k-2]u[k] = x[k-2]u[k-2] + x[-1]\delta[k-1] + x[-2]\delta[k]$$

$$\mathscr{Z}\{x[k-2]u[k]\} = z^{-2}X(z) + z^{-1}x[-1] + x[-2]$$

单边z变换的性质

▶ 位移特性

证明：$\mathscr{Z}\{x[k-n]u[k]\} = z^{-n}\left[X(z) + \sum_{k=-n}^{-1} x[k]z^{-k}\right], \quad |z| > R_x$



以此类推：$\mathscr{Z}\{x[k-n]u[k]\} = z^{-n}\left[X(z) + \sum_{k=-n}^{-1} x[k]z^{-k}\right], \quad |z| > R_x$

[例] 求有限长序列$R_N[k]=u[k]-u[k-N]$的z变换及收敛域。

解：$$u[k] \xleftrightarrow{\mathscr{Z}} \frac{1}{1-z^{-1}}, \qquad |z|>1$$

利用因果序列的位移特性和线性特性

$$X(z)=\frac{1}{1-z^{-1}}-\frac{z^{-N}}{1-z^{-1}}=\frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}}$$

由于$R_N[k]$为有限长序列，故其收敛域为

$|z|>0$

收敛域扩大

线性加权后序列z变换的收敛域可能比原序列z变换的收敛域增大。

单边z变换的性质

- 卷积特性 $x_1[k]u[k]*x_2[k]u[k] \xleftrightarrow{\mathscr{Z}} X_1(z)\,X_2(z)\,,$

$$|z|>\max(R_{x1},\,R_{x2})$$

$$\mathscr{Z}\{x_1[k]u[k]*x_2[k]u[k]\}=\mathscr{Z}\left\{\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x_1[n]u[n]\cdot x_2[k-n]u[k-n]\right\}$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x_1[n]\mathscr{Z}\{x_2[k-n]u[k-n]\}=X_2(z)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x_1[n]z^{-n}$$

$$=X_1(z)X_2(z)\,,\qquad |z|>\max(R_{x1},\,R_{x2})$$

时域两序列卷积和的z变换等于原两个时域序列各自z变换的乘积。

[例] 利用z变换卷积特性，计算$x[k]=2^k u[k]*3^k u[k]$ 的z变换.

解：根据z变换的卷积特性

$$\mathscr{Z}\{x[k]\}=\mathscr{Z}\left\{2^k u[k]*3^k u[k]\right\}=\mathscr{Z}\left\{2^k u[k]\right\}\cdot\mathscr{Z}\left\{3^k u[k]\right\}$$

因为：$$\mathscr{Z}\left\{2^k u[k]\right\}=\frac{1}{1-2z^{-1}}=\frac{z}{z-2}, \qquad |z|>2$$

$$\mathscr{Z}\left\{3^k u[k]\right\}=\frac{1}{1-3z^{-1}}=\frac{z}{z-3}, \qquad |z|>3$$

所以：

$$X(z)=\mathscr{Z}\{x[k]\}=\frac{1}{(1-2z^{-1})(1-3z^{-1})}=\frac{z^2}{(z-2)(z-3)}, \quad |z|>3$$

[例] 若$x[k]$为因果序列，求序列 $\mathscr{Z}\{\sum_{n=0}^{k} x[n]\}$的单边$z$变换。

解：
$$\sum_{n=0}^{k} x[n] = x[k] * u[k]$$

设
$$x[k] \xleftrightarrow{\mathscr{Z}} X(z), \qquad |z| > R_x$$

利用z变换的卷积特性，以及
$$u[k] \xleftrightarrow{\mathscr{Z}} \frac{1}{1-z^{-1}}, \qquad |z| > 1$$

可得
$$\mathscr{Z}\left\{\sum_{n=0}^{k} x[n]\right\} = \mathscr{Z}\{x[k]\} \cdot \mathscr{Z}\{u[k]\} = \frac{X(z)}{1-z^{-1}}, \quad |z| > \max(1, R_x)$$

单边z变换的性质

▶ 求和特性

若 $\quad x[k]u[k] \overset{\mathscr{Z}}{\longleftrightarrow} X(z)\,, \qquad |z| > R_x$

则 $\quad \sum_{i=0}^{k} x[i] \overset{\mathscr{Z}}{\longleftrightarrow} \dfrac{1}{1-z^{-1}} X(z)\,, \qquad |z| > \max(R_x, 1)$

谢 谢

本课程所引用的一些素材为主讲老师多年的教学积累，来源于多种媒体及同事、同行、朋友的交流，难以一一注明出处，特此说明并表示感谢！