信号与系统

主讲人：陈后金

电子信息工程学院

连续时间LTI系统的冲激响应

※ 冲激响应的定义

※ 冲激响应的求解

1. 冲激响应的定义

在系统初始状态为零的条件下，以冲激信号$\delta(t)$激励系统所产生的输出响应，称为系统的冲激响应，以符号$h(t)$表示。

（系统初始状态为零）

1. 冲激响应的定义

若描述连续时间LTI系统的常系数线性微分方程为

$$y^{(n)}(t)+a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+\cdots+a_1y'(t)+a_0y(t)$$
$$=b_mx^{(m)}(t)+b_{m-1}x^{(m-1)}(t)+\cdots+b_1x'(t)+b_0x(t)$$

则连续时间LTI系统的冲激响应$h(t)$应满足

$$h^{(n)}(t)+a_{n-1}h^{(n-1)}(t)+\cdots+a_1h'(t)+a_0h(t)$$
$$=b_m\delta^{(m)}(t)+b_{m-1}\delta^{(m-1)}(t)+\cdots+b_1\delta'(t)+b_0\delta(t)$$

2. 冲激响应的求解

[例] 某线性时不变系统的微分方程为 $y'(t)+3y(t)=2x(t), \quad t>0$

试求系统的冲激响应 $h(t)$。

分析：当系统输入信号 $x(t)$ 为 $\delta(t)$，输出信号 $y(t)$ 则为 $h(t)$

描述系统的微分方程为

$$h'(t)+3h(t)=2\delta(t)$$

当 $t>0$ 时， $\delta(t)=0$，描述系统的微分方程为

$$h'(t)+3h(t)=0$$

故系统的冲激响应具有齐次解形式

2. 冲激响应的求解

[例] 某线性时不变系统的微分方程为 $y'(t)+3y(t)=2x(t), \quad t>0$

试求系统的冲激响应。

分析:　　如何确定齐次解的待定系数?

将齐次解代入微分方程 $h'(t)+3h(t)=2\delta(t)$

使方程两边同类项平衡，求出待定系数，得到 $h(t)$。

这种方法称为**冲激平衡法**

[例] 描述某线性时不变系统的微分方程为

$$y'(t)+3y(t)=2x(t), t>0$$ 试求系统的冲激响应。

解： $h'(t)+3h(t)=2\delta(t)$

特征根 $s=-3$ $\Longrightarrow$ $h(t)=Ae^{-3t}u(t)$

代入微分方程 $h'(t)+3h(t)=2\delta(t)$

$$[Ae^{-3t}u(t)]'+3Ae^{-3t}u(t)=2\delta(t)$$

$$-3Ae^{-3t}u(t)+A\delta(t)+3Ae^{-3t}u(t)=2\delta(t)$$

$$A\delta(t)=2\delta(t) \Longrightarrow A=2$$

$$h(t)=2e^{-3t}u(t)$$

若 $y'(t)+3y(t)=2x(t)+x'(t)$ ， $t>0$ 则冲激响应有何变化?

$$h'(t)+3h(t)=2\delta(t)+\delta'(t)$$

特征根$s=-3$，如果仍设 $h(t)=Ae^{-3t}u(t)$

代入$h'(t)+3h(t)=2\delta(t)+\delta'(t)$得到：

$$A\delta(t)=2\delta(t)+\delta'(t)$$

方程两端无法平衡！

若使其平衡， $h(t)$需要加上$u(t)$的导数项，即$\delta(t)$

$$h(t)=Ae^{-3t}u(t)+B\delta(t)$$

若 $y'(t)+3y(t)=2x(t)+x'(t)$ ， $t>0$ 则冲激响应有何变化?

$$h(t)=Ae^{-3t}u(t)+B\delta(t)$$

代入 $h'(t)+3h(t)=2\delta(t)+\delta'(t)$

则 $[Ae^{-3t}\,u(t)+B\delta(t)]'+3[Ae^{-3t}\,u(t)+B\delta(t)]=2\delta(t)+\delta'(t)$

$$A\delta(t)+3B\delta(t)+B\delta'(t)=2\delta(t)+\delta'(t)$$

解得 $A=-1,\ B=1$

$$h(t)=-e^{-3t}u(t)+\delta(t)$$

可见冲激响应的形式要根据微分方程情况设定

2. 冲激响应的求解

连续时间LTI系统的冲激响应$h(t)$满足微分方程

$$h^{(n)}(t)+a_{n-1}h^{(n-1)}(t)+\cdots+a_1h'(t)+a_0h(t)$$
$$=b_m\delta^{(m)}(t)+b_{m-1}\delta^{(m-1)}(t)+\cdots+b_1\delta'(t)+b_0\delta(t)$$

(1) 当 ***n>m*** 时(假设特征根为不等实根)

$$h(t)=(\sum_{i=1}^{n}K_i\mathrm{e}^{s_it})u(t)$$

(2) 当***n≤m*** 时, $h(t)$应含有冲激及其高阶导数

$$h(t)=(\sum_{i=1}^{n}K_i\mathrm{e}^{s_it})u(t)+\sum_{j=0}^{m-n}A_j\delta^{(j)}(t)$$

2. 冲激响应的求解

连续时间LTI系统的冲激响应$h(t)$满足微分方程

$$h^{(n)}(t)+a_{n-1}h^{(n-1)}(t)+\cdots+a_1h'(t)+a_0h(t)$$
$$=b_m\delta^{(m)}(t)+b_{m-1}\delta^{(m-1)}(t)+\cdots+b_1\delta'(t)+b_0\delta(t)$$

$$h(t)=(\sum_{i=1}^{n}K_i\mathrm{e}^{s_it})u(t)+\sum_{j=0}^{m-n}A_j\delta^{(j)}(t)$$

由微分方程的特征根确定$u(t)$前的指数形式。

由微分方程$\delta(t)$的最高阶导数与$h(t)$的最高阶导数确定$\delta^{(j)}(t)$项。

谢 谢

本课程所引用的一些素材为主讲老师多年的教学积累，来源于多种媒体及同事、同行、朋友的交流，难以一一注明出处，特此说明并表示感谢！