北京交通大学

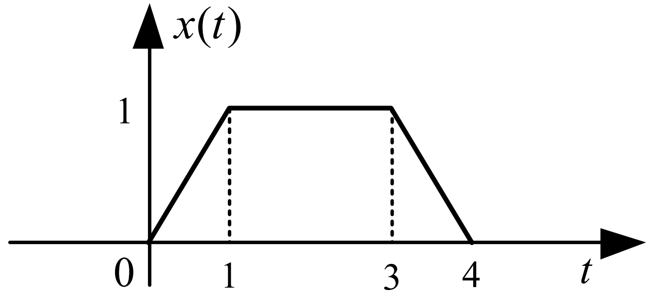
信号与系统

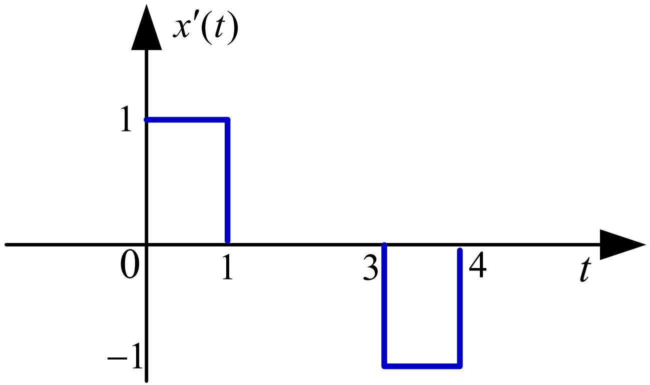
主讲人：陈后金

电子信息工程学院

信号的频域分析举例

[例] 已知连续时间信号$x(t)$如图所示，求其频谱。





解：方法一

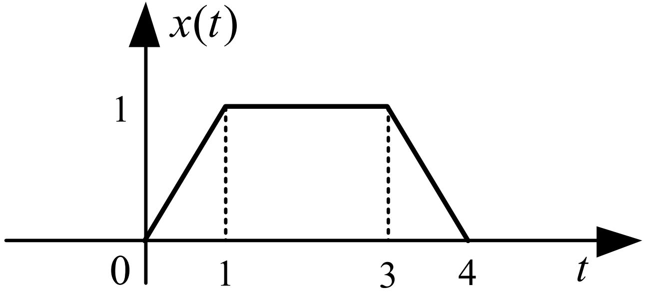
$$x'(t) = p_1(t-\frac{1}{2}) - p_1(t-\frac{7}{2})$$

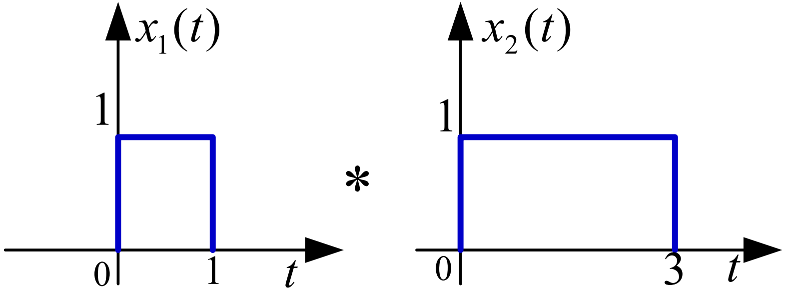
根据傅里叶变换的时域微分特性，可得

$$\mathrm{j}\omega X(\mathrm{j}\omega) = \mathrm{Sa}(\frac{\omega}{2})\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\omega}{2}} - \mathrm{Sa}(\frac{\omega}{2})\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{7\omega}{2}}$$

$$X(\mathrm{j}\omega) = 3\mathrm{Sa}(\frac{\omega}{2})\cdot\mathrm{Sa}(\frac{3\omega}{2})\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\omega}$$

信号的频域分析举例





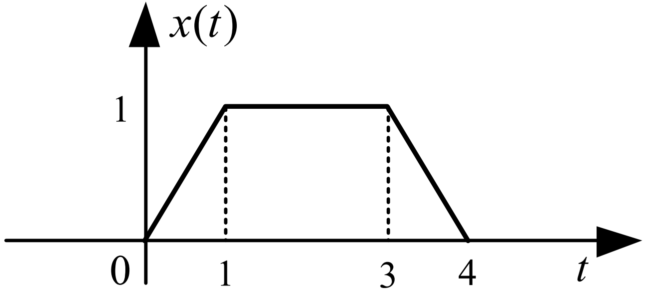
解：方法二 $x(t) = x_1(t) * x_2(t)$

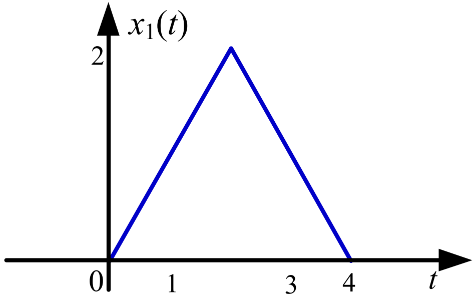
$$X_1(\mathrm{j}\omega) = \mathrm{Sa}(\frac{\omega}{2})\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\omega}{2}} \qquad X_2(\mathrm{j}\omega) = 3\mathrm{Sa}(\frac{3\omega}{2})\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{3\omega}{2}}$$

根据傅里叶变换的卷积特性，可得

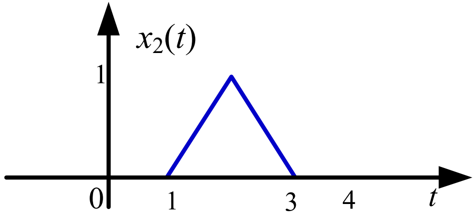
$$X(\mathrm{j}\omega) = X_1(\mathrm{j}\omega)X_2(\mathrm{j}\omega) = 3\mathrm{Sa}(\frac{\omega}{2}) \cdot \mathrm{Sa}(\frac{3\omega}{2})\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\omega}$$

信号的频域分析举例





-



解：方法三 $x(t)=x_1(t)-x_2(t)$

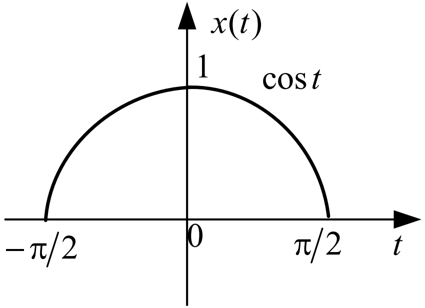
$$X_1(\mathrm{j}\omega)=4\mathrm{Sa}^2(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\omega} \qquad X_2(\mathrm{j}\omega)=\mathrm{Sa}^2(\frac{\omega}{2})\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\omega}$$

根据傅里叶变换的线性特性，可得

$$X(\mathrm{j}\omega)=X_1(\mathrm{j}\omega)-X_2(\mathrm{j}\omega)=3\mathrm{Sa}(\frac{\omega}{2})\cdot\mathrm{Sa}(\frac{3\omega}{2})\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\omega}$$

信号的频域分析举例

[例] 已知连续时间信号$x(t)$如图所示，求其频谱。



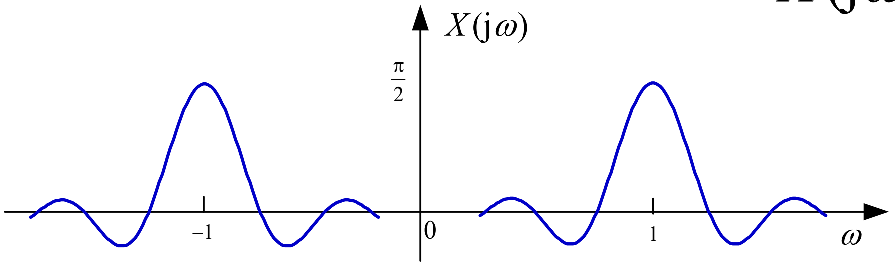
解：方法一

$$x(t)=\cos t\cdot p_{\pi}(t)$$

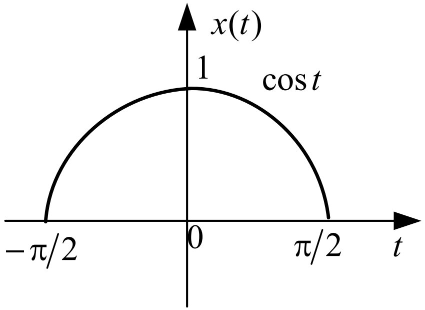
根据傅里叶变换的乘积特性，可得

$$X(\mathrm{j}\omega)=\frac{1}{2\pi}\cdot\pi\left[\delta(\omega-1)+\delta(\omega+1)\right]*\pi\mathrm{Sa}\left(\frac{\pi}{2}\omega\right)$$

$$=\frac{\pi}{2}\cdot\left\{\mathrm{Sa}\left[\frac{\pi(\omega-1)}{2}\right]+\mathrm{Sa}\left[\frac{\pi(\omega+1)}{2}\right]\right\}$$



信号的频域分析举例



解：方法二：

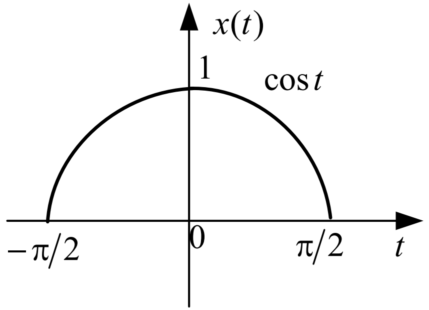
$$x(t)=\cos t\cdot p_{\pi}(t)$$

$$\mathscr{F}[p_{\pi}(t)]=\pi\mathrm{Sa}\left(\frac{\pi}{2}\omega\right)$$

根据傅里叶变换的频移特性，可得

$$X(\mathrm{j}\omega)=\frac{\pi}{2}\left\{\mathrm{Sa}\left[\frac{\pi}{2}(\omega-1)\right]+\mathrm{Sa}\left[\frac{\pi}{2}(\omega+1)\right]\right\}$$

信号的频域分析举例

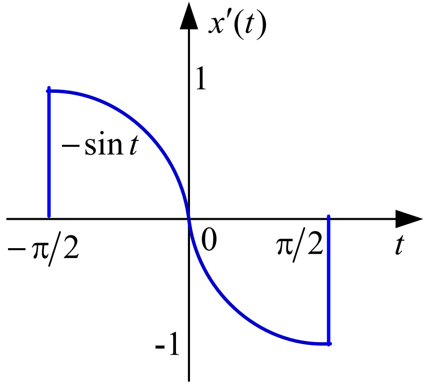


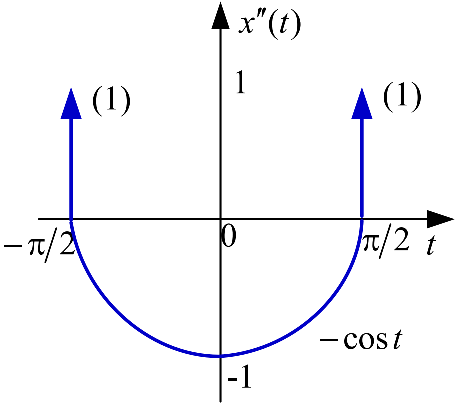
解：方法三：

$$x''(t)=\delta\left(t+\frac{\pi}{2}\right)+\delta\left(t-\frac{\pi}{2}\right)-x(t)$$

根据傅里叶变换的微分特性，可得

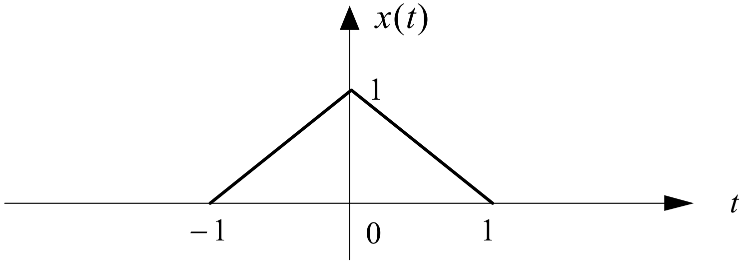
$$(\mathrm{j}\omega)^2 X(\mathrm{j}\omega)=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{2}\omega}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{2}\omega}-X(\mathrm{j}\omega)$$





$$X(\mathrm{j}\omega)=\begin{cases}\dfrac{2\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\omega\right)}{1-\omega^2} & \omega\neq\pm 1\\[2ex] \dfrac{\pi}{2} & \omega=\pm 1\end{cases}$$

信号的频域分析举例



[例] 已知三角波信号$x(t)$如图所示，

(1) 计算 $x(t)$的频谱$X(\mathrm{j}\omega)$，并画出频谱图。

(2) 对信号$x(t)$以T=0.1s为间隔进行等间隔抽样，得离散序列$x[k]$，试求$x[k]$的频谱，并画出频谱图。

(3) 将信号$x(t)$以T_0=3 s为周期进行周期化，得周期信号 $\tilde{x}_{T_0}(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(t+nT_0)$，试求 $\tilde{x}_{T_0}(t)$的频谱C_n，并画出频谱图。

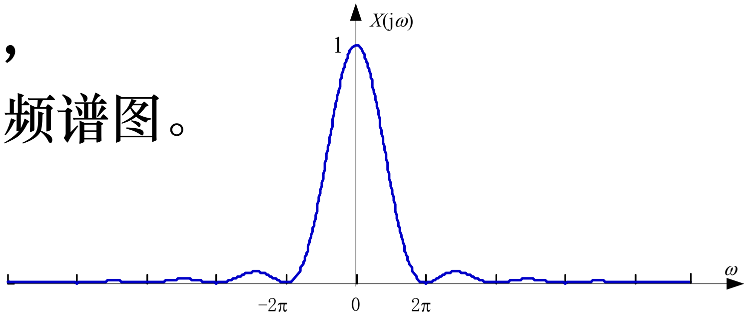
(4) 对周期信号$\tilde{x}_{T_0}(t)$以T=0.1s为间隔进行等间隔抽样，得离散周期序列$\tilde{x}[k]$，试求$\tilde{x}[k]$ 的频谱 $\tilde{X}[m]$，并画出频谱图。

信号的频域分析举例

[例] 已知三角波信号$x(t)$如图所示，

(1) 计算 $x(t)$的频谱$X(\mathrm{j}\omega)$，并画出频谱图。

(2) 对信号$x(t)$以T=0.1s为间隔进行等间隔抽样，得离散序列$x[k]$，试求$x[k]$的频谱 ，并画出频谱图。



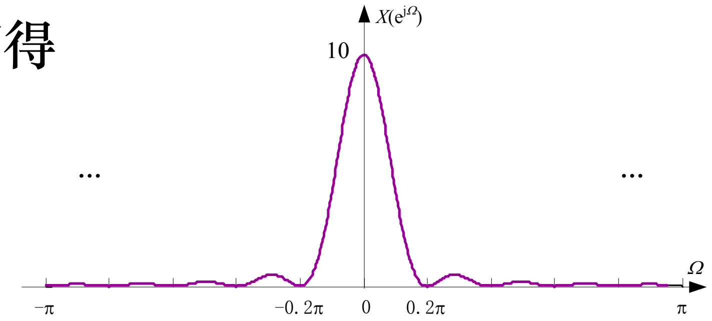
解: (1) 由于 $x(t) = p_1(t) * p_1(t)$

所以 $X(\mathrm{j}\omega) = \mathrm{Sa}^2(\omega/2)$

(2) 根据抽样前后信号频谱之间的关系可得

$$X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}) = \frac{1}{T}\sum_n X\left[\mathrm{j}\left(\frac{\Omega-2\pi n}{T}\right)\right]$$

$$= 10\sum_n \mathrm{Sa}^2(5\Omega - 10n\pi)$$



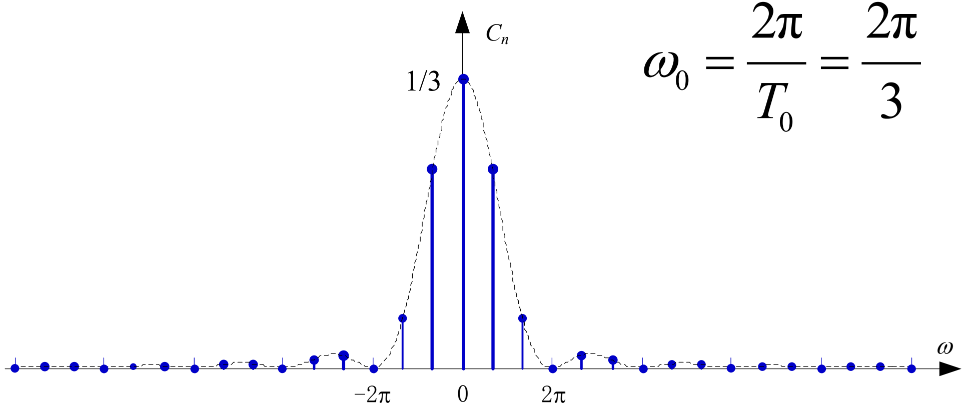
信号的频域分析举例

[例] 已知三角波信号$x(t)$如图所示，

(3) 将信号$x(t)$以T_0=3 s为周期进行周期化，得周期信号 $\tilde{x}_{T_0}(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(t+nT_0)$，试求$\tilde{x}_{T_0}(t)$的频谱 C_n，并画出频谱图。

解：(3)
$$C_n=\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2}\tilde{x}_{T_0}(t)\cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_0 t}\mathrm{d}t$$
$$=\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2}x(t)\cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_0 t}\mathrm{d}t$$
$$=\frac{1}{T_0}X(\mathrm{j}n\omega_0)$$
$$=\frac{1}{3}\mathrm{Sa}^2(n\omega_0/2)=\frac{1}{3}\mathrm{Sa}^2(n\pi/3)$$

$$\omega_0=\frac{2\pi}{T_0}=\frac{2\pi}{3}$$



信号的频域分析举例

[例] 已知三角波信号$x(t)$如图所示，

(4) 对周期信号$\tilde{x}_{T_0}(t)$以T=0.1s为间隔进行等间隔抽样，

得离散周期序列$\tilde{x}[k]$，试求$\tilde{x}[k]$的频谱$\tilde{X}[m]$，并画出频谱图。

解：(4) 由于 $\tilde{x}_{T_0}(t)=\sum_{n} C_n \mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_0 t}$

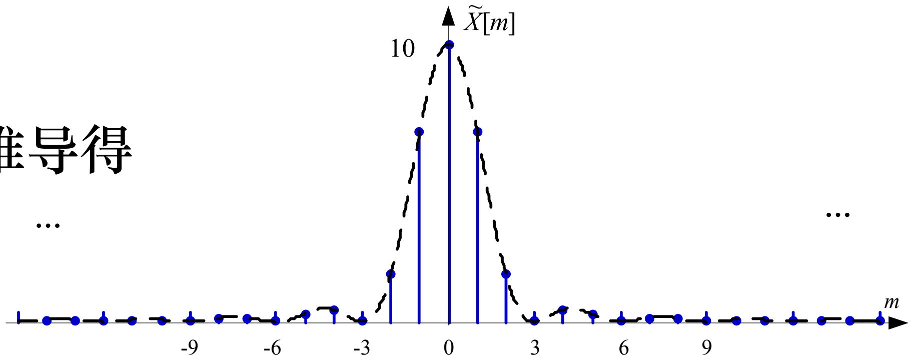
$$C_n=\frac{1}{3}\mathrm{Sa}^2(n\pi/3)$$

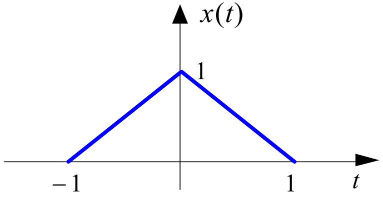
$$\omega_0=\frac{2\pi}{T_0}=\frac{2\pi}{3}$$

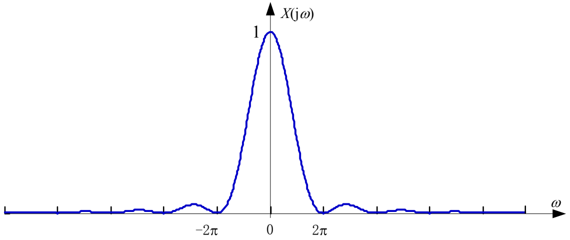
$$\tilde{x}[k]=\tilde{x}(t)\big|_{t=kT}=\sum_{n} C_n \mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi nk}{30}}$$

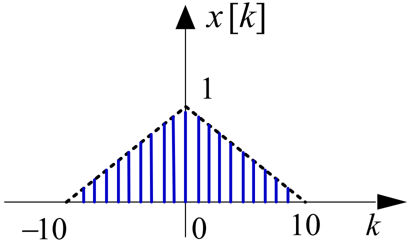
令$n=m+30l$，并根据IDFS定义可推导得

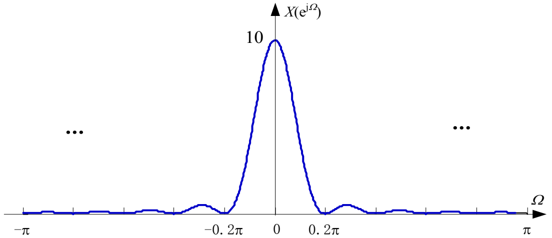
$$\tilde{X}[m]=10\sum_{l}\mathrm{Sa}^2\left[\frac{(m+30l)\pi}{3}\right]$$

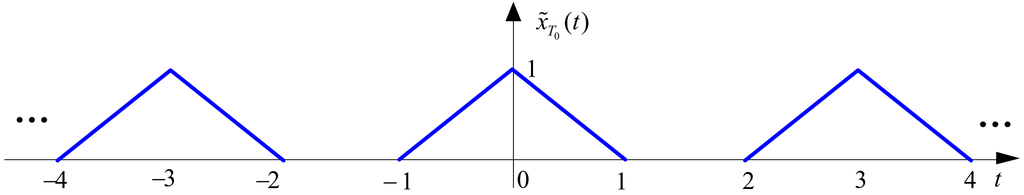


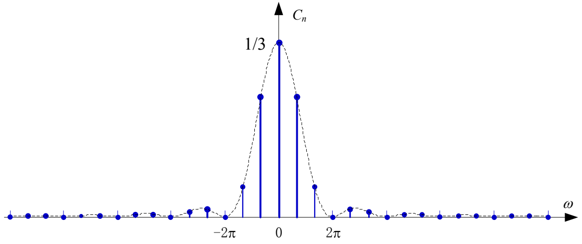

x(t)
1
−1
1
t

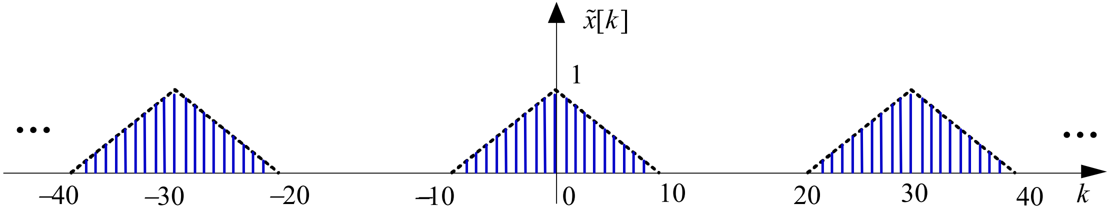

X(jω)
1
−2π
0
2π
ω

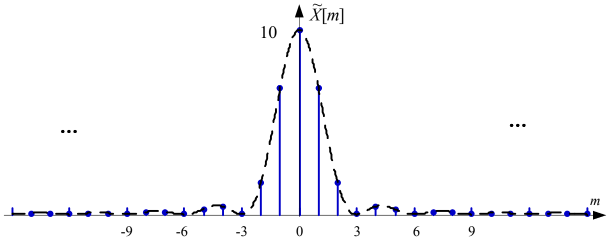

x[k]
1
–10
0
10
k


X(e^{jΩ})
10
…
…
−π
−0. 2π
0
0. 2π
π
Ω


x̃_{T_0}(t)
1
…
…
–4
–3
–2
–1
0
1
2
3
4
t


C_n
1/3
−2π
0
2π
ω


x̃[k]
1
…
…
–40
–30
–20
–10
0
10
20
30
40
k


X̃[m]
10
…
…
-9
-6
-3
0
3
6
9
m

信号的频域分析举例

谢 谢

本课程所引用的一些素材为主讲老师多年的教学积累，来源于多种媒体及同事、同行、朋友的交流，难以一一注明出处，特此说明并表示感谢！