北京交通大学

# 信号与系统

主讲人：陈后金

电子信息工程学院

# 单边拉普拉斯反变换

$$x(t)=\frac{1}{2\pi \mathrm{j}}\int_{\sigma-\mathrm{j}\infty}^{\sigma+\mathrm{j}\infty}X(s)\mathrm{e}^{st}\mathrm{d}s$$

※ **留数法**

留数法计算比较复杂，但适用范围较广。

※ **部分分式展开法**

部分分式法求解较为简便，但一般只适用于有理分式。

# 1. 留数法

## ※ 留数法

$$x(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi \mathrm{j}}\displaystyle\int_{\sigma-\mathrm{j}\infty}^{\sigma+\mathrm{j}\infty}X(s)\mathrm{e}^{st}\mathrm{d}s=\sum_{k=0}^{n}\underset{s=p_k}{\mathrm{Res}}[X(s)\mathrm{e}^{st}] & t>0\\ 0 & t<0\end{cases}$$

若$p_k$为$X(s)\mathrm{e}^{st}$ 的单极点，则:

$$\underset{s=p_k}{\mathrm{Res}}[X(s)\mathrm{e}^{st}]=[(s-p_k)X(s)\mathrm{e}^{st}]_{s=p_k}$$

若$p_k$为$X(s)\mathrm{e}^{st}$ 的$m$重极点，则:

$$\underset{s=p_k}{\mathrm{Res}}[X(s)\mathrm{e}^{st}]=\frac{1}{(m-1)!}\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}s^{m-1}}\left[(s-p_k)^m X(s)\mathrm{e}^{st}\right]_{s=p_k}$$

例：利用**留数法**求 $X(s)=\dfrac{1}{s^2+3s+2}$，$\mathrm{Re}(s)>-1$ 的反变换$x(t)$。

解： $X(s)=\dfrac{1}{s^2+3s+2}=\dfrac{1}{(s+1)(s+2)}$

根据留数法可得到$X(s)$的时域表示为:

$$x(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi\mathrm{j}}\displaystyle\int_{\sigma-\mathrm{j}\infty}^{\sigma+\mathrm{j}\infty}X(s)\mathrm{e}^{st}\mathrm{d}s=\underset{s=-1}{\mathrm{Res}}[X(s)\mathrm{e}^{st}]+\underset{s=-2}{\mathrm{Res}}[X(s)\mathrm{e}^{st}] & t>0\\ 0 & t<0\end{cases}$$

$s_1=-1$和$s_2=-2$均为 $X(s)\mathrm{e}^{st}$ 的**单极点**，其相应的留数为:

$$\underset{s=-1}{\mathrm{Res}}[X(s)\mathrm{e}^{st}]=\frac{1}{s+2}\mathrm{e}^{st}\Big|_{s=-1}=\mathrm{e}^{-t}$$

$$\underset{s=-2}{\mathrm{Res}}[X(s)\mathrm{e}^{st}]=\frac{1}{s+1}\mathrm{e}^{st}\Big|_{s=-2}=-\mathrm{e}^{-2t}$$

因此， $x(t)=(\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t})u(t)$

# 2. 部分分式展开法

## ※ 部分分式展开法

许多信号的单边拉氏变换为有理分式形式:

$$X(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1 s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}$$

问题：如何求解上式对应的时域表示?

例1：利用部分分式展开法求$X(s)$的反变换$x(t)$：

$$X(s)=\frac{2}{s^2+3s},\quad \mathrm{Re}(s)>0$$

解：$X(s)$为**有理真分式，且分母多项式只有单根：**

$$X(s)=\frac{2}{s(s+3)}=\frac{k_1}{s}+\frac{k_2}{s+3}$$

将上式两端同时乘以$s$可得：

$$sX(s)=\frac{2}{s+3}=k_1+\frac{sk_2}{s+3}$$

令$s=0$，上式右端只有$k_1$项不等于零，所以

$$k_1=sX(s)\big|_{s=0}=\frac{2}{s+3}\Big|_{s=0}=\frac{2}{3}$$

例1：利用部分分式展开法求$X(s)$的反变换$x(t)$：

$$X(s)=\frac{2}{s^2+3s},\quad \mathrm{Re}(s)>0$$

解：同理可求出

$$k_2=(s+3)X(s)\big|_{s=-3}=\frac{2}{s}\Big|_{s=-3}=-\frac{2}{3}$$

由此可得

$$X(s)=\frac{2}{s(s+3)}=\frac{2/3}{s}+\frac{-2/3}{s+3}$$

对上式进行拉氏反变换可得

$$x(t)=\frac{2}{3}u(t)-\frac{2}{3}\mathrm{e}^{-3t}u(t)$$

例2：利用部分分式展开法求$X(s)$的反变换$x(t)$：

$$X(s)=\frac{s-1}{s(s+1)^2},\quad \mathrm{Re}(s)>0$$

解：$X(s)$为有理真分式，且分母多项式有1个二重根：

$$X(s)=\frac{k_1}{s}+\frac{k_2}{(s+1)^2}+\frac{k_3}{s+1} \qquad ①$$

$$k_1=sX(s)\big|_{s=0}=\frac{s-1}{(s+1)^2}\Big|_{s=0}=-1$$

将①式两端同时乘以$(s+1)^2$可得

$$(s+1)^2X(s)=\frac{k_1(s+1)^2}{s}+k_2+k_3(s+1) \qquad ②$$

令$s=-1$，②式右端只有$k_2$项不等于零，所以

$$k_2=(s+1)^2X(s)\big|_{s=-1}=\frac{s-1}{s}\Big|_{s=-1}=2$$

例2：采用部分分式展开法求$X(s)$的反变换$x(t)$：

$$X(s)=\frac{s-1}{s(s+1)^2},\quad \mathrm{Re}(s)>0$$

解：$(s+1)^2X(s)=\frac{k_1(s+1)^2}{s}+k_2+k_3(s+1)$ ②

对②式求一阶导数，再令$s=-1$可得：

$$k_3=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[(s+1)^2X(s)\right]\Big|_{s=-1}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{s-1}{s}\right)\Big|_{s=-1}=1$$

因此，$X(s)=\frac{-1}{s}+\frac{2}{(s+1)^2}+\frac{1}{s+1}$

$$x(t)=\mathscr{L}^{-1}[X(s)]=(-1+2t\mathrm{e}^{-t}+\mathrm{e}^{-t})u(t)$$

例3：利用部分分式展开法求下列$X(s)$的反变换$x(t)$：

$$X(s)=\frac{s^3-s^2-12s+2}{s^2+3s},\quad \mathrm{Re}(s)>0$$

解：$X(s)$为**有理假分式**，将其化为有理真分式：

$$X(s)=s-4+\frac{2}{s^2+3s}$$

$$\delta'(t)\xleftrightarrow{\mathscr{L}}s,\quad \delta(t)\xleftrightarrow{\mathscr{L}}1$$

利用例1计算结果

$$x(t)=\delta'(t)-4\delta(t)+\frac{2}{3}u(t)-\frac{2}{3}\mathrm{e}^{-3t}u(t)$$

# 2. 部分分式展开法

归纳 $$X(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1 s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}$$

1) 若$X(s)$为有理真分式$(m<n)$，分母多项式只有单根，则

$$X(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{N(s)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}$$

$$=\frac{k_1}{s-p_1}+\frac{k_2}{s-p_2}+\cdots+\frac{k_n}{s-p_n}$$

其中，$k_i=(s-p_i)X(s)\big|_{s=p_i}\quad i=1,2,\cdots,n$

$$x(t)=(k_1\mathrm{e}^{p_1 t}+k_2\mathrm{e}^{p_2 t}+\cdots+k_n\mathrm{e}^{p_n t})u(t)$$

# 2. 部分分式展开法

$$X(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1 s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}$$

2) 若$X(s)$为有理真分式( $m<n$)，分母多项式有重根，则

$$X(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{N(s)}{(s-p_1)^r(s-p_{r+1})\cdots(s-p_n)}$$

$$=\frac{k_1}{(s-p_1)^r}+\frac{k_2}{(s-p_1)^{r-1}}+\cdots+\frac{k_r}{s-p_1}+\frac{k_{r+1}}{s-p_{r+1}}+\cdots+\frac{k_n}{s-p_n}$$

$$k_i=\frac{1}{(i-1)!}\frac{\mathrm{d}^{i-1}}{\mathrm{d}s^{i-1}}[(s-p_1)^r X(s)] \quad i=1,2,\cdots,r$$

$$x(t)=[\sum_{i=1}^{r}\frac{k_i}{(i-1)!}t^{i-1}\mathrm{e}^{p_1 t}]u(t)+\sum_{i=r+1}^{n}k_i\mathrm{e}^{p_i t}u(t)$$

# 2. 部分分式展开法

$$X(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1 s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}$$

3) $X(s)$为有理假分式( $m\geq n$)，则

$$X(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\boxed{B_0+B_1 s+\cdots+B_{m-n}s^{m-n}}+\boxed{\frac{N_1(s)}{D(s)}}$$

$$B_0 \xleftrightarrow{\mathscr{L}} B_0\delta(t)$$

$$B_1 s \xleftrightarrow{\mathscr{L}} B_1\delta'(t)$$

$$B_{m-n}s^{m-n} \xleftrightarrow{\mathscr{L}} B_{m-n}\delta^{(m-n)}(t)$$

$\dfrac{N_1(s)}{D(s)}$ 为真分式，根据

情况按1)或2)展开。

# 谢 谢

本课程所引用的一些素材为主讲老师多年的教学积累，来源于多种媒体及同事、同行、朋友的交流，难以一一注明出处，特此说明并表示感谢!