北京交通大学

信号与系统

主讲人：陈后金

电子信息工程学院

离散周期序列DFS的性质

※ 线性特性

※ 位移特性

※ 对称特性

※ 周期卷积特性

离散周期序列DFS的性质

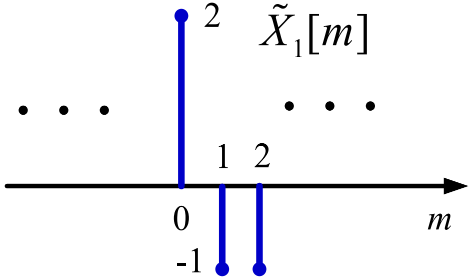
1.线性特性

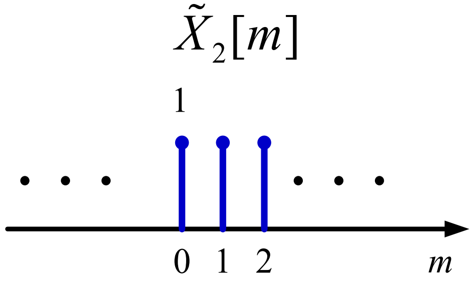
$$\mathrm{DFS}\{a\tilde{x}_1[k]+b\tilde{x}_2[k]\}=a\mathrm{DFS}\{\tilde{x}_1[k]\}+b\mathrm{DFS}\{\tilde{x}_2[k]\}$$

例：求周期为3的周期序列 $\tilde{x}[k]=\{\cdots,\overset{\downarrow}{2},1,1,\cdots\}$ 的频谱。

已知 $\tilde{x}_1[k]=\{\cdots,\overset{\downarrow}{0},1,1,\cdots\}$ 的频谱为 $\tilde{X}_1[m]$

$\tilde{x}_2[k]=\{\cdots,\overset{\downarrow}{1},0,0,\cdots\}$ 的频谱为 $\tilde{X}_2[m]$



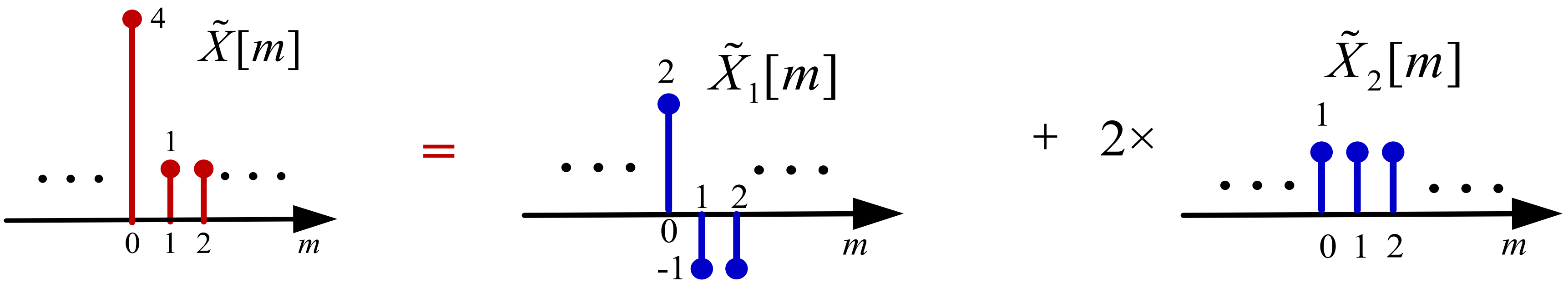


离散周期序列DFS的性质

解：　将$\tilde{x}[k]$表示为$\tilde{x}_1[k]+2\cdot\tilde{x}_2[k]$

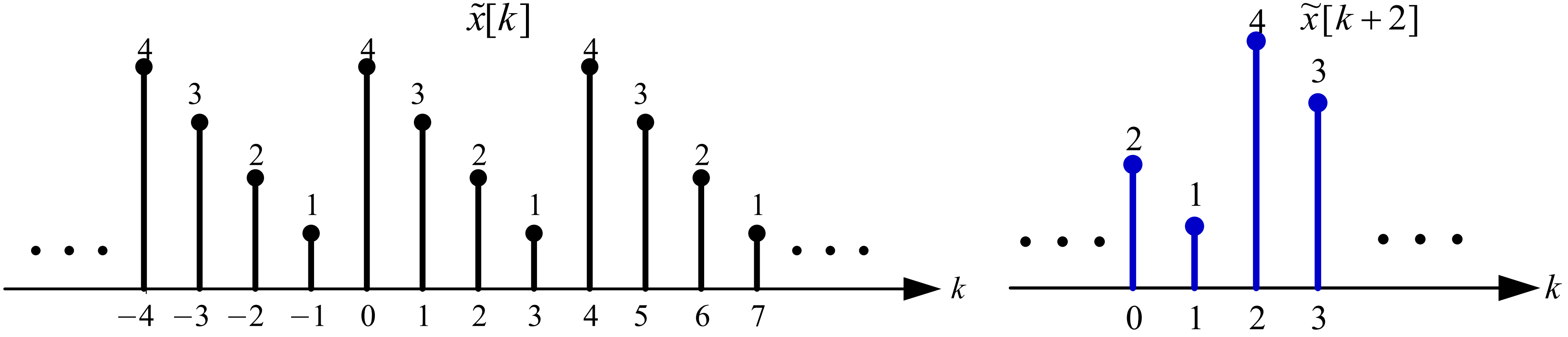
得

$$\tilde{X}[m]=\tilde{X}_1[m]+2\cdot\tilde{X}_2[m]$$



离散周期序列DFS的性质

2.位移特性



周期序列的位移

周期序列位移后，仍为相同周期的周期序列，因此，只需要观察位移后序列一个周期的情况。

离散周期序列DFS的性质

2.位移特性

(a) 时域位移特性

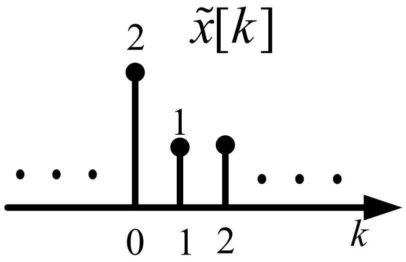
$$\mathrm{DFS}\{\tilde{x}[k-n]\} = \tilde{X}[m]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}mn}$$

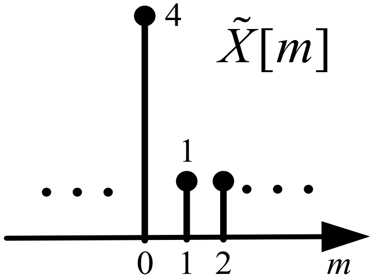
序列在时域的位移，对应其频域的相移。

离散周期序列DFS的性质

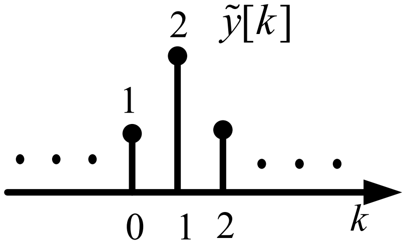
例：已知周期为3的序列 $\tilde{x}[k]=\{\cdots,\overset{\downarrow}{2},1,1,\cdots\}$ ，求 $\tilde{y}[k]=\tilde{x}[k-1]$ 的频谱。

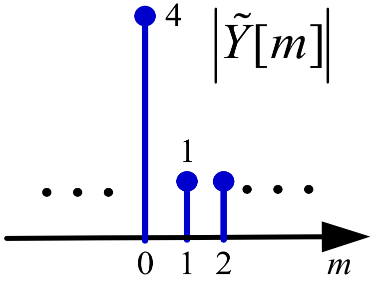
解：

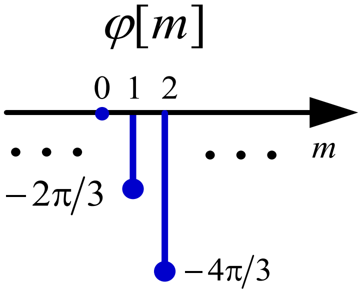




$$\tilde{Y}[m]=\tilde{X}[m]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{3}\cdot m}$$







离散周期序列DFS的性质

2.位移特性

(b) 频域位移特性

$$\mathrm{DFS}\left\{\tilde{x}[k]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}lk}\right\}=\tilde{X}[m+l]$$

序列在时域的相移，对应其频域的位移。

离散周期序列DFS的性质

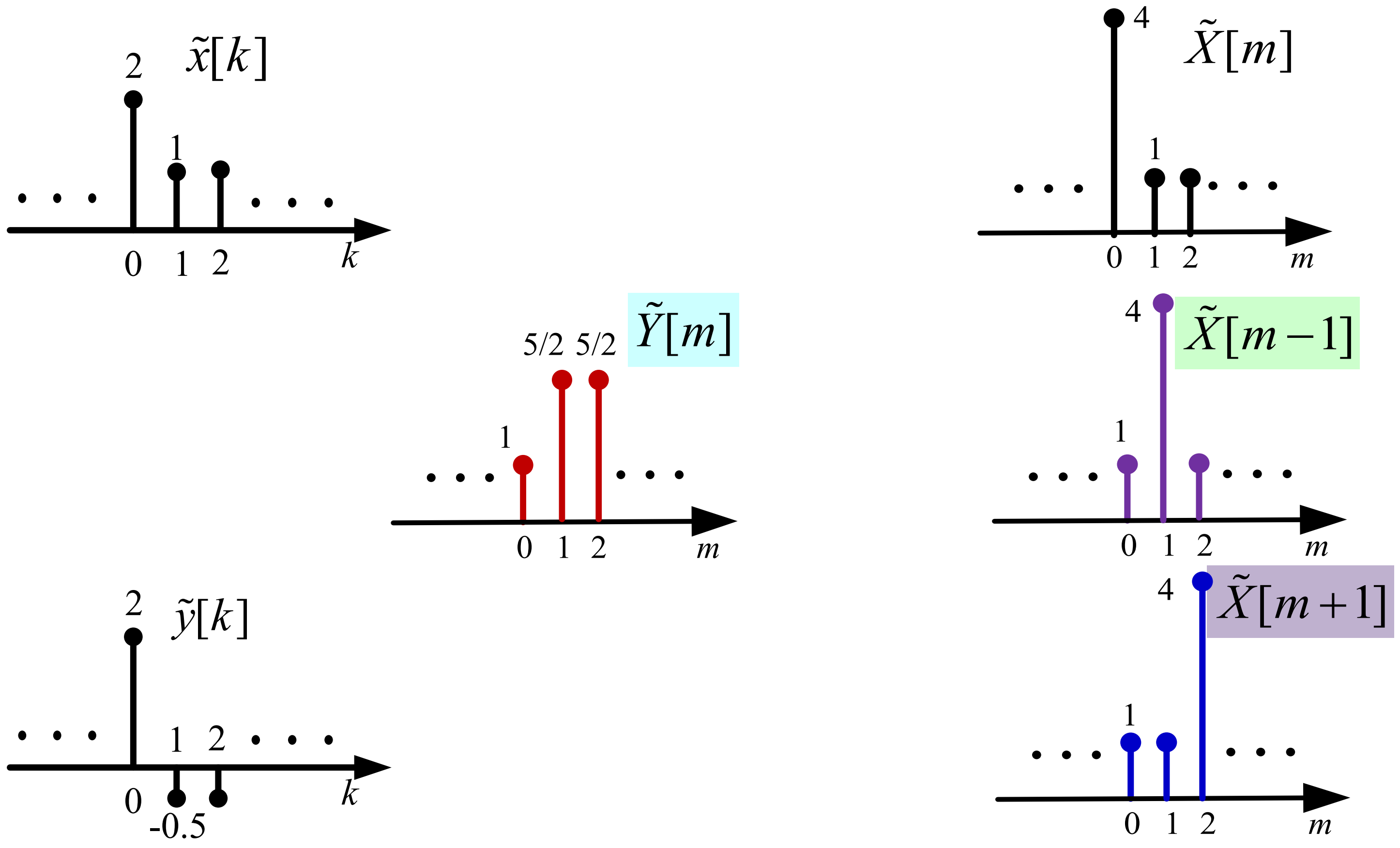
例：已知周期为3的序列 $\tilde{x}[k]=\{\cdots,\overset{\downarrow}{2},1,1,\cdots\}$ ，求 $\tilde{y}[k]=\tilde{x}[k]\cos(2\pi k/3)$ 的频谱。

解：

$$\tilde{y}[k]=\frac{\tilde{x}[k]}{2}\cdot\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi k/3}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi k/3}\right)$$

$$\tilde{Y}[m]=\frac{1}{2}\left\{\tilde{X}[m-1]+\tilde{X}[m+1]\right\}$$

离散周期序列DFS的性质



离散周期序列DFS的性质

3.对称特性

周期序列的**偶对称**

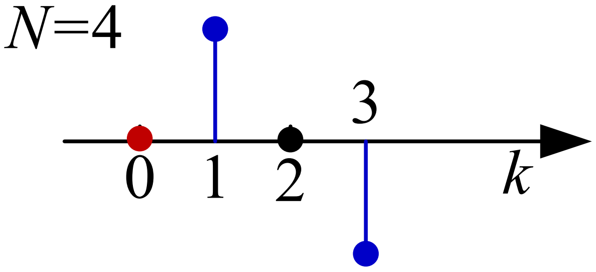
$$\tilde{x}[k]=\tilde{x}[-k]=\tilde{x}[N-k]$$

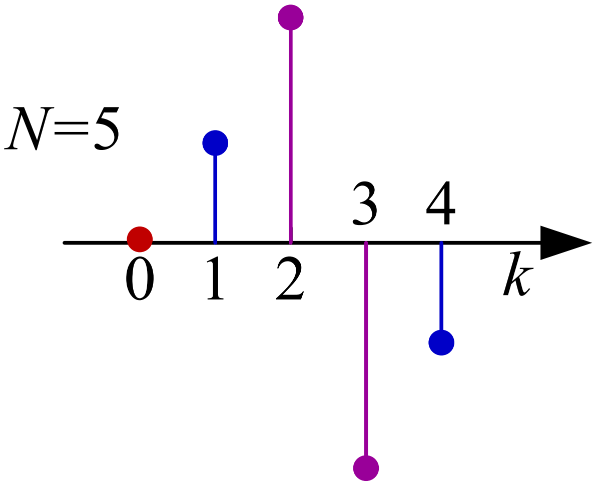
离散周期序列DFS的性质

3.对称特性

周期序列的**奇对称**

$$\tilde{x}[k]=-\tilde{x}[-k]=-\tilde{x}[N-k]$$





离散周期序列DFS的性质

3.对称特性

$$\mathrm{DFS}\{\tilde{x}^*[k]\}=\tilde{X}^*[-m]$$

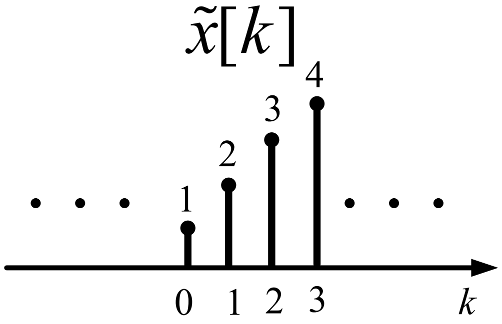
$$\mathrm{DFS}\{\tilde{x}^*[-k]\}=\tilde{X}^*[m]$$

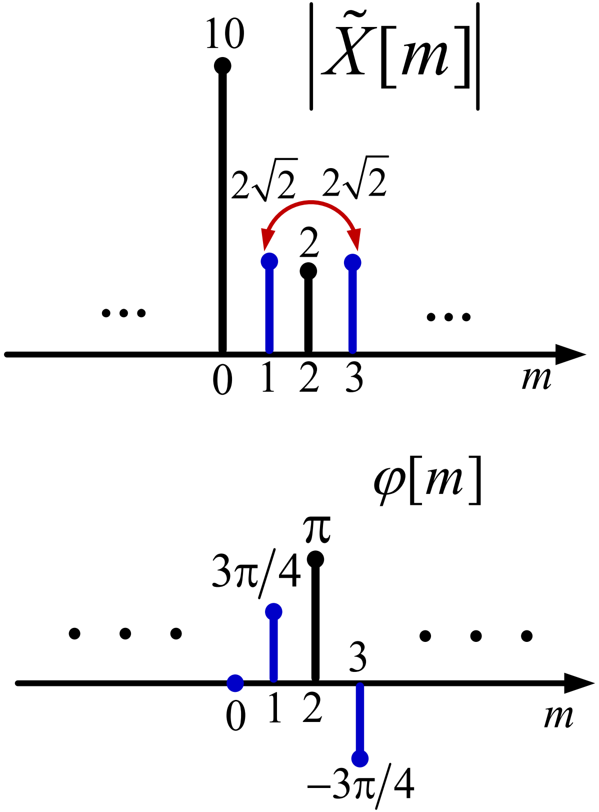
若 $\tilde{x}[k]$为实序列，则有 $\tilde{X}[m]=\tilde{X}^*[-m]$

$$|\tilde{X}[m]|=|\tilde{X}[-m]|$$
$$\varphi[m]=-\varphi[-m]$$

$$\tilde{X}_{\mathrm{R}}[m]=\tilde{X}_{\mathrm{R}}[-m]$$
$$\tilde{X}_{\mathrm{I}}[m]=-\tilde{X}_{\mathrm{I}}[-m]$$

离散周期序列DFS的性质





$\tilde{x}[k]$ 为实序列，则其幅度谱偶对称，相位谱奇对称。

离散周期序列DFS的性质

4.周期卷积特性

※ 时域周期卷积定理：

$$\mathrm{DFS}\{\tilde{x}_1[k] \circledast \tilde{x}_2[k]\} = \mathrm{DFS}\{\tilde{x}_1[k]\} \cdot \mathrm{DFS}\{\tilde{x}_2[k]\}$$

※ 频域周期卷积定理：

$$\mathrm{DFS}\{\tilde{x}_1[k] \bullet \tilde{x}_2[k]\} = \frac{1}{N}\mathrm{DFS}\{\tilde{x}_1[k]\} \circledast \mathrm{DFS}\{\tilde{x}_2[k]\}$$

时域的周期卷积对应频域的乘积；

时域的乘积对应频域的周期卷积。

离散周期序列DFS的性质

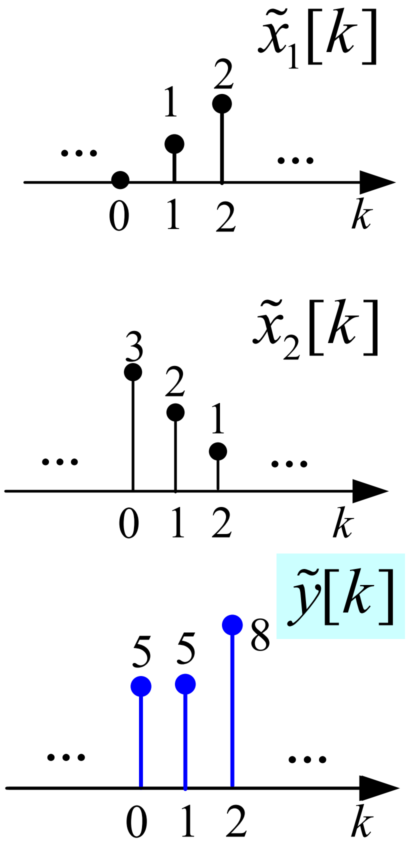
周期卷积定义：

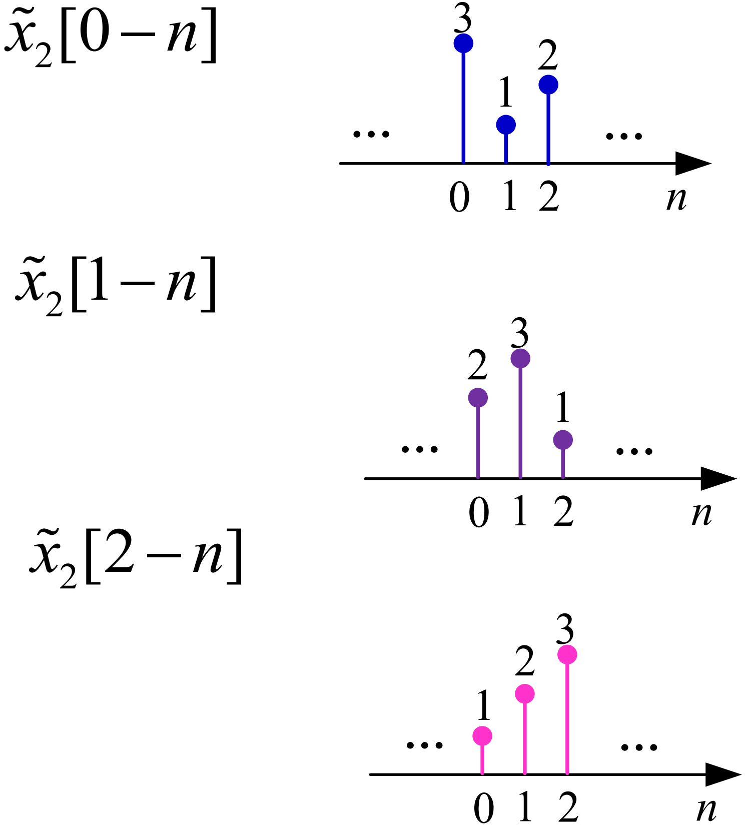
$$\tilde{x}_1[k] \tilde{*} \tilde{x}_2[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}_1[n] \tilde{x}_2[k-n]$$

※ 周期卷积是两个等周期的周期序列的卷积运算。

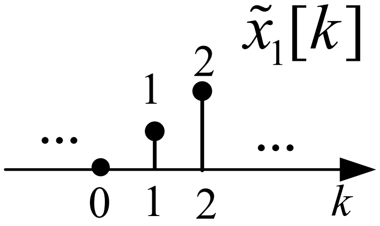
※ 周期卷积的结果仍为相同周期的周期序列。

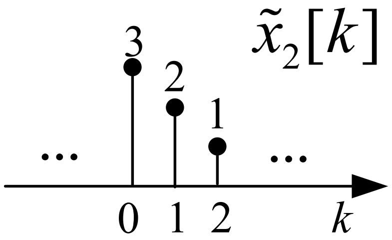
例：周期为3的序列 $\tilde{x}_1[k],\tilde{x}_2[k]$ 如图所示，计算 $\tilde{y}[k]=\tilde{x}_1[k]\tilde{*}\tilde{x}_2[k]$。

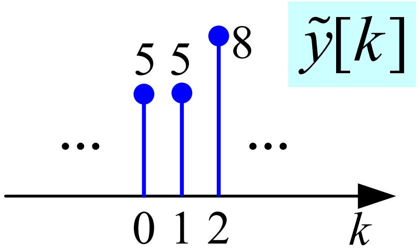




例：周期为3的序列 $\tilde{x}_1[k],\tilde{x}_2[k]$ 如图所示，计算 $\tilde{y}[k]=\tilde{x}_1[k]\tilde{*}\tilde{x}_2[k]$。







周期卷积的矩阵表示：

$$\tilde{x}_1[k]\tilde{*}\tilde{x}_2[k]=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}_1[n]\tilde{x}_2[k-n]$$

$$\begin{bmatrix}\tilde{y}[0]\\ \tilde{y}[1]\\ \tilde{y}[2]\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\tilde{x}_2[0] & \tilde{x}_2[-1] & \tilde{x}_2[-2]\\ \tilde{x}_2[1] & \tilde{x}_2[0] & \tilde{x}_2[-1]\\ \tilde{x}_2[2] & \tilde{x}_2[1] & \tilde{x}_2[0]\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{x}_1[0]\\ \tilde{x}_1[1]\\ \tilde{x}_1[2]\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}3 & 1 & 2\\ 2 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\ 5\\ 8\end{bmatrix}$$

谢 谢

本课程所引用的一些素材为主讲老师多年的教学积累，来源于多种媒体及同事、同行、朋友的交流，难以一一注明出处，特此说明并表示感谢！