北京交通大学

信号与系统

主讲人：陈后金

电子信息工程学院

离散时间LTI系统的零输入响应

- 零输入响应的定义
- 零输入响应的形式
- 零输入响应的求解

1. 零输入响应的定义

输入信号为零，仅由系统的初始状态单独作用而产生的响应称为零输入响应，记为$y_{zi}[k]$。

数学模型:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y[k-i]=0$$

2. 零输入响应的形式

零输入响应$y_{zi}[k]$的形式

(1) 特征根是不等实根 $r_1, r_2, \ldots, r_n$

$$y_{zi}[k] = C_1 r_1^k + C_2 r_2^k + \cdots + C_n r_n^k$$

(2) 特征根是相等实根 $r_1=r_2=\ldots=r_n$

$$y_{zi}[k] = C_1 r^k + C_2 k r^k + \cdots + C_n k^{n-1} r^k$$

(3) 特征根是成对共轭复根 $r_{1,2} = a \pm \mathrm{j}b = \rho \mathrm{e}^{\pm \mathrm{j}\Omega_0}$

$$y_{zi}[k] = C_1 \rho^k \cos \Omega_0 k + C_2 \rho^k \sin \Omega_0 k$$

3.零输入响应的求解

求解过程

第一步：求出差分方程对应的特征根；

第二步：根据特征根确定零输入响应的形式；

第三步：将初始状态代入零输入响应表示式，
解出待定系数即得到零输入响应。

3.零输入响应的求解

[例] 离散LTI系统差分方程为$y[k]+3y[k-1]+2y[k-2]=x[k], k\geq 0$，初始状态为$y[-1]=0$， $y[-2]=1/2$，求系统零输入响应$y_{zi}[k]$。

解： 系统的**特征方程**为 $r^2+3r+2=0$

系统的**特征根**为 $r_1=-1, r_2=-2$ （两不等实根）

$$y_{zi}[k]=C_1(-1)^k+C_2(-2)^k$$

$$y[-1]=-C_1-\frac{1}{2}C_2=0$$

$$y[-2]=C_1+\frac{1}{4}C_2=\frac{1}{2}$$

⇒ $C_1=1$， C_2-2

$$y_{zi}[k]=(-1)^k-2(-2)^k \quad k\geq 0$$

3.零输入响应的求解

[例]某离散LTI系统的差分方程式为:$y[k]+4y[k-1]+4y[k-2]=x[k]$

初始状态为$y[-1]=0$，$y[-2]=1/2$，求系统的零输入响应$y_{zi}[k]$。

解： 系统的特征方程为 $r^2+4r+4=0$

系统的特征根为 $r_1=r_2=-2$ （两相等实根）

$$y_{zi}[k]=C_1k(-2)^k+C_2(-2)^k$$

$$y[-1]=\frac{C_1}{2}-\frac{C_2}{2}=0$$

$$y[-2]=-\frac{C_1}{2}+\frac{C_2}{4}=\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ $C_1=C_2=-2$

$$y_{zi}[k]=-2k(-2)^k-2(-2)^k,\quad k\ge 0$$

3.零输入响应的求解

[例]某离散LTI系统的差分方程式为:$y[k]+2y[k-1]+2y[k-2]=x[k]$

初始状态为$y[-1]=0$，$y[-2]=1/2$，求系统的零输入响应$y_{zi}[k]$。

解： 系统的特征方程为 $r^2+2r+2=0$

系统的特征根为 $r_1=-1+j, r_2=-1-j$

$$y_{zi}[k]=\sqrt{2}^k\left(C_1\cos\frac{3\pi}{4}k+C_2\sin\frac{3\pi}{4}k\right)$$

$$y[-1]=-C_1-C_2=0$$

$$y[-2]=C_2/2=1/2$$

$$\Rightarrow \quad C_1=-1,\ C_2=1$$

$$y_{zi}[k]=\sqrt{2}^k[-\cos\frac{3\pi}{4}k+\sin\frac{3\pi}{4}k],\quad k\geq 0$$

谢　谢

本课程所引用的一些素材为主讲老师多年的教学积累，来源于多种媒体及同事、同行、朋友的交流，难以一一注明出处，特此说明并表示感谢！