北京交通大学

信号与系统

主讲人：陈后金

电子信息工程学院

双边拉普拉斯变换及反变换

- 双边拉普拉斯变换的定义
- 双边拉普拉斯变换的性质
- 双边拉普拉斯反变换

双边拉普拉斯变换的定义

双边拉普拉斯(Laplace)变换:

拉普拉斯正变换: $X(s)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$

拉普拉斯反变换: $x(t)=\dfrac{1}{2\pi\mathrm{j}}\int_{\sigma-\mathrm{j}\infty}^{\sigma+\mathrm{j}\infty}X(s)\mathrm{e}^{st}\mathrm{d}s$

双边拉普拉斯变换的定义

$$X(s)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

- 若$x(t)$的双边拉普拉斯变换存在，上式积分需收敛。因此，双边拉普拉斯变换存在的充要条件为：

$$\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)\mathrm{e}^{-st}|\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)\mathrm{e}^{-\sigma t}|\mathrm{d}t=C,\qquad \sigma=\mathrm{Re}(s)$$

- 上式成立的σ的取值范围称为Laplace变换的收敛域，简称为ROC(Region Of Convergence)。

双边拉普拉斯变换的定义

（1）有限长信号

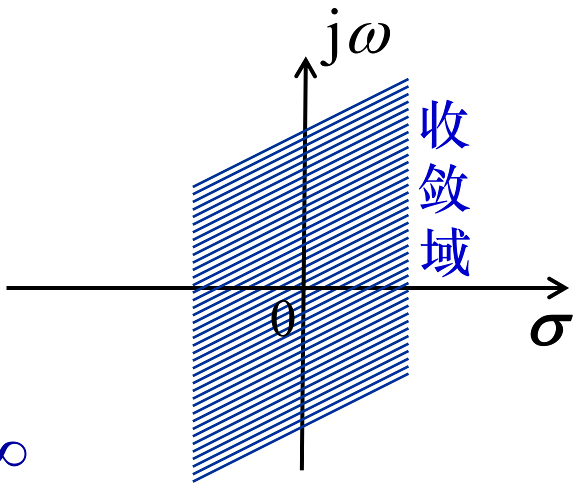
例：试求连续信号 $u(t+2)-u(t-2)$的双边拉氏变换及其收敛域。

解：$X(s)=\int_{-\infty}^{\infty}[u(t+2)-u(t-2)]\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$

$$=\int_{-2}^{2}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=-\frac{1}{s}\mathrm{e}^{-st}\Big|_{-2}^{2}$$

$$=\frac{1}{s}(\mathrm{e}^{2s}-\mathrm{e}^{-2s})$$

收敛域为s全平面，即：$\mathrm{Re}(s)>-\infty$



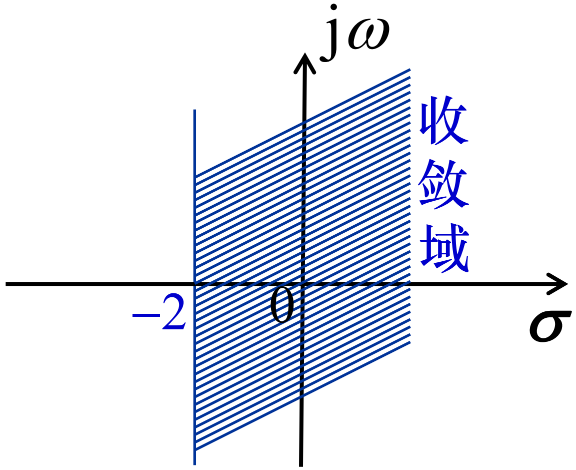
双边拉普拉斯变换的定义

（2）右边信号

例：试求连续信号$e^{-2t}u(t)$的双边拉氏变换及其收敛域。

解：
$$X(s)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-2t}u(t)e^{-st}\mathrm{d}t$$
$$=\int_{0}^{\infty}e^{-2t}\cdot e^{-st}\mathrm{d}t$$
$$=-\frac{1}{s+2}e^{-(s+2)t}\Big|_0^{\infty}=\frac{1}{s+2}$$

收敛域：$\mathrm{Re}(s)>-2$



双边拉普拉斯变换的定义

（3）左边信号

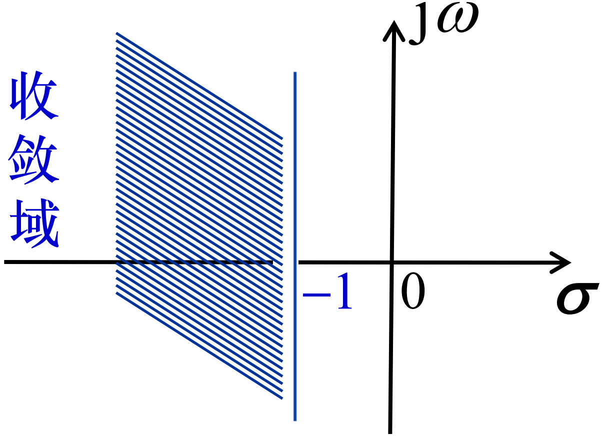
例：试求连续信号$\mathrm{e}^{-t}u(-t)$ 的双边拉氏变换及其收敛域。

解：$$X(s)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-t}u(-t)\cdot\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

$$=\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{-t}\cdot\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

$$=-\frac{1}{s+1}\mathrm{e}^{-(s+1)t}\Big|_{-\infty}^{0}=\frac{-1}{s+1}$$

收敛域为：$\mathrm{Re}(s)<-1$



双边拉普拉斯变换的定义

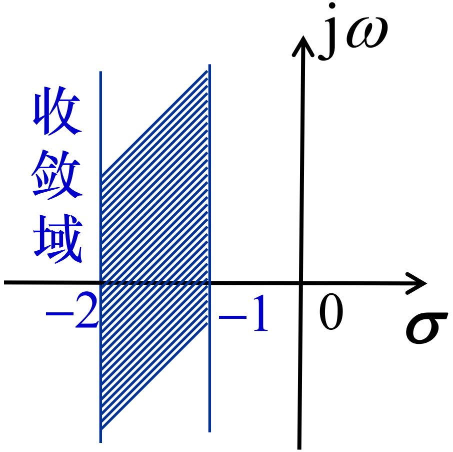
（4）双边信号

例：试求连续信号$\mathrm{e}^{-t}u(-t)+\mathrm{e}^{-2t}u(t)$的双边拉氏变换及其收敛域。

解：$X(s)=\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{-t}u(-t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t+\int_{0}^{\infty}\mathrm{e}^{-2t}u(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$

$$=\frac{-1}{s+1}+\frac{1}{s+2}$$

收敛域为：$-2<\mathrm{Re}(s)<-1$



双边拉普拉斯变换的性质

▶ 时移特性

若 $x(t) \stackrel{\mathscr{L}}{\longleftrightarrow} X(s)$， $\mathrm{Re}(s) > \sigma_0$

则 $x(t-t_0) \stackrel{\mathscr{L}}{\longleftrightarrow} \mathrm{e}^{-st_0} X(s)$, $\mathrm{Re}(s) > \sigma_0$

双边拉普拉斯变换的性质

▶ 微分特性

若 $x(t) \xleftrightarrow{\mathscr{L}} X(s), \quad \mathrm{Re}(s) > \sigma_0$

则 $\dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} \xleftrightarrow{\mathscr{L}} sX(s), \quad \mathrm{Re}(s) > \sigma_0$

双边拉普拉斯变换的性质

▶ 积分特性

若 $x(t) \xleftrightarrow{\mathscr{L}} X(s),\quad \mathrm{Re}(s) > \sigma_0$

则 $\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\mathrm{d}\tau \xleftrightarrow{\mathscr{L}} \dfrac{X(s)}{s}$

$\mathrm{Re}(s) > \max(\sigma_0, 0)$

双边拉普拉斯反变换

$$x(t)=\frac{1}{2\pi \mathrm{j}}\int_{\sigma-\mathrm{j}\infty}^{\sigma+\mathrm{j}\infty}X(s)\mathrm{e}^{st}\mathrm{d}s$$

※ **留数法**

留数法计算比较复杂，但适用范围较广。

※ **部分分式展开法**

部分分式法求解较为简便，但一般只适用于有理分式。

双边拉普拉斯反变换

※ 部分分式展开法

$$e^{\lambda t}u(t) \overset{\mathscr{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s-\lambda}, \quad \mathrm{Re}(s) > \lambda$$

$$te^{\lambda t}u(t) \overset{\mathscr{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{(s-\lambda)^2}, \quad \mathrm{Re}(s) > \lambda$$

$$-e^{\lambda t}u(-t) \overset{\mathscr{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s-\lambda}, \quad \mathrm{Re}(s) < \lambda$$

$$-te^{\lambda t}u(-t) \overset{\mathscr{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{(s-\lambda)^2}, \quad \mathrm{Re}(s) < \lambda$$

例：根据$X(s)$收敛域，分别求解其对应的时域信号$x(t)$.

$$X(s)=\frac{2s+1}{(s+2)(s+3)}$$

解： $$X(s)=\frac{-3}{s+2}+\frac{5}{s+3}$$

（1） $\mathrm{Re}(s)>-2$

$$x(t)=-3\mathrm{e}^{-2t}u(t)+5\mathrm{e}^{-3t}u(t)$$

（2） $-3<\mathrm{Re}(s)<-2$

$$x(t)=3\mathrm{e}^{-2t}u(-t)+5\mathrm{e}^{-3t}u(t)$$

（3） $\mathrm{Re}(s)<-3$

$$x(t)=3\mathrm{e}^{-2t}u(-t)-5\mathrm{e}^{-3t}u(-t)$$

谢 谢

本课程所引用的一些素材为主讲老师多年的教学积累，来源于多种媒体及同事、同行、朋友的交流，难以一一注明出处，特此说明并表示感谢!