



北京交通大学

# 信号与系统



主讲人：陈后金  
电子信息工程学院



# 离散系统的z域描述

## ※ 离散时间LTI系统的系统函数

若描述离散LTI系统的差分方程为

$$a_n y[k-n] + a_{n-1} y[k-(n-1)] + \cdots + a_1 y[k-1] + a_0 y[k] = \\ b_m x[k-m] + b_{m-1} x[k-(m-1)] + \cdots + b_1 x[k-1] + b_0 x[k]$$

利用z变换位移特性，可得描述该系统的复频域方程

$$[a_n z^{-n} + a_{n-1} z^{-n+1} + \cdots + a_1 z^{-1} + a_0] Y_{zs}(z) = \\ [b_m z^{-m} + b_{m-1} z^{-m+1} + \cdots + b_1 z^{-1} + b_0] X(z)$$



# 离散系统的z域描述

## ※ 离散时间LTI系统的系统函数

$$[a_n z^{-n} + a_{n-1} z^{-n+1} + \cdots + a_1 z^{-1} + a_0] Y_{zs}(z) = [b_m z^{-m} + b_{m-1} z^{-m+1} + \cdots + b_1 z^{-1} + b_0] X(z)$$

系统函数定义为

$$H(z) = \frac{Y_{zs}(z)}{X(z)} = \frac{b_m z^{-m} + b_{m-1} z^{-m+1} + \cdots + b_1 z^{-1} + b_0}{a_n z^{-n} + a_{n-1} z^{-n+1} + \cdots + a_1 z^{-1} + a_0}$$



# 离散系统的z域描述

➤ 系统函数 $H(z)$ 与脉冲响应 $h[k]$ 的关系



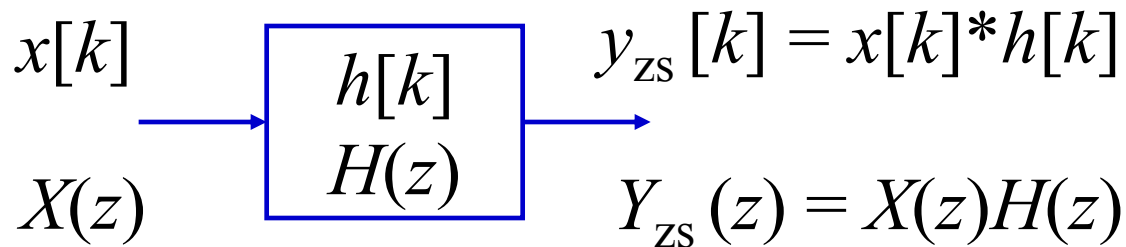
$$H(z) = \frac{Y_{zs}(z)}{X(z)} = \frac{\mathcal{Z}\{h[k]\}}{\mathcal{Z}\{\delta[k]\}} = \mathcal{Z}\{h[k]\}$$

$$h[k] = \mathcal{Z}^{-1}[H(z)]$$



# 离散系统的 $z$ 域描述

## ► 系统函数 $H(z)$ 与零状态响应 $Y_{zs}(z)$ 的关系





# 离散系统的 $z$ 域描述

## ► 求解系统函数 $H(z)$ 的主要方法

① 由系统的脉冲响应求解:  $H(z) = \mathcal{Z}\{h[k]\}$

② 由系统的输入-输出计算:  $H(z) = \frac{\mathcal{Z}\{y_{zs}[k]\}}{\mathcal{Z}\{x[k]\}}$

③ 由描述离散时间系统的差分方程计算



例：求单位延迟器 $y[k] = x[k-1]$ 的**系统函数** $H(z)$ 。

解：根据单位延迟器的输入-输出关系，  
可得该离散系统的脉冲响应 $h[k]$ 为

$$h[k] = \delta[k-1]$$

根据系统函数 $H(z)$ 与脉冲响应 $h[k]$ 之间的关系

$$H(z) = \mathcal{Z} \{h[k]\}$$

可得单位延迟器的系统函数 $H(z)$ 为。

$$H(z) = z^{-1}$$



例：离散时间LTI系统在输入 $x[k]=u[k]$ 的激励下产生的响应为 $y_{zs}[k] = (0.5)^k u[k] + 4u[k]$ ，试求该系统的系统函数 $H(z)$ 。

解：由系统的输入和输出，可得其对应的 $z$ 变换分别为

$$X(z) = \mathcal{Z}\{x[k]\} = \mathcal{Z}\{u[k]\} = \frac{z}{z-1}, \quad |z| > 1$$

$$Y_{zs}(z) = \mathcal{Z}\{y_{zs}[k]\} = \mathcal{Z}\{0.5^k u[k] + 4u[k]\}$$

$$= \frac{z}{z-0.5} + \frac{4z}{z-1} = \frac{5z^2 - 3z}{(z-0.5)(z-1)}, \quad |z| > 1$$

根据离散系统的系统函数定义，可得

$$H(z) = \frac{\mathcal{Z}\{y_{zs}[k]\}}{\mathcal{Z}\{x[k]\}} = \frac{Y_{zs}(z)}{X(z)} = \frac{5z-3}{z-0.5}, \quad |z| > 0.5$$





例：描述某因果离散时间LTI系统差分方程为  
 $y[k]+3y[k-1]+2y[k-2]=3x[k]-x[k-1]$ ，求系统函数 $H(z)$ 。

解：对描述离散LTI系统的差分方程两边进行 $z$ 变换

$$Y_{zs}(z) + 3z^{-1}Y_{zs}(z) + 2z^{-2}Y_{zs}(z) = 3X(z) - z^{-1}X(z)$$

由系统函数定义：

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{Y_{zs}(z)}{X(z)} = \frac{3 - z^{-1}}{1 + 3z^{-1} + 2z^{-2}} \\ &= \frac{3z^2 - z}{z^2 + 3z + 2}, \quad |z| > 2 \end{aligned}$$



# 离散系统的 $z$ 域描述

## 谢 谢

本课程所引用的一些素材为主讲老师多年的教学积累，来源于多种媒体及同事、同行、朋友的交流，难以一一注明出处，特此说明并表示感谢！