Parte I: Capítulo 2

2.2 Distancia de Cuello de Botella y Teorema de Isometría

(Bottleneck distance and the Isometry Theorem)

2.3 Corolario: Teoremas de Estabilidad

(Corolary: Stability Theorems)

2.4 Módulos de Persistencia de tipo localmente finito

(Persistence modules of locally finite type)

Eduardo Velázquez

14 de septiembre de 2023

CIMAT

2.2 Distancia de Cuello de Botella y Teorema de Isometría

Motivación: Definir una distancia entre códigos de barras.

- Sea $I = (a, b]$ y $\delta > 0$, denotaremos

$$I^{-\delta} := (a - \delta, b + \delta]\,.$$

- Sea $\mathcal{B}$ un código de barras y $\varepsilon > 0$,

$$\mathcal{B}_\varepsilon \ : \text{ el conjunto de barras de longitud mayor a } \varepsilon\,.$$

- Sean X, Y multiconjuntos, y $X' \subset X$, $Y' \subset Y$. Un **apareamiento** es una biyección $\mu : X' \to Y'$ y decimos que X' y Y' están **apareados**.

Definición 2.2.1
Un $\delta-$**apareamiento** entre dos códigos de barras $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ es un apareamiento $\mu : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ tal que:

- $\mathcal{B}_{2\delta} \subset \operatorname{coim} \mu$,
- $\mathcal{C}_{2\delta} \subset \operatorname{im} \mu$,
- Si $\mu(I) \Rightarrow I \subset J^{-\delta}$ y $J \subset I^{-\delta}$.

Ejercicio 2.2.2
Sean $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ códigos de barras tales que $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ están $\delta-$apareados y, $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ están $\gamma-$apareados. Entonces, $\mathcal{B}$ y $\mathcal{D}$ están $(\delta+\gamma)-$apareados.

Definición 2.2.3

La distancia *cuello de botella*, $d_{bot}(\mathcal{B}, \mathcal{C})$, entre dos códigos de barras $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$, se define como el mínimo entre todas las δ para las que existe un $\delta-$apareamiento entre $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$.

Ejercicio 2.2.4
Sean $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ códigos de barras $\delta-$apareados con δ finita $\Leftrightarrow$ tienen el mismo número de barras infinitas.

Corolario 2.2.5
d_{bot} es una distancia en el espacio de códigos de barras con el mismo número de barras infinitas.

Ejemplo 2.2.6

Considere los módulos de persistencia $\mathbb{F}(a,b]$ y $\mathbb{F}(c,d]$, y los correspondientes códigos de barras $\mathcal{B}\{(a,b]\}$ y $\mathcal{C}\{(c,d]\}$.
Entonces, existe

- Un δ_1-apareamiento vacío entre ellos con $\delta_1 = \text{máx}\left(\frac{b-a}{2}, \frac{d-c}{2}\right)$ (las longitudes de los intervalos $< 2\delta_1$),

ó existe

- Un δ_2-apareamiento con $\delta_2 = \text{máx}\left(|a-c|, |b-d|\right)$.

Entonces, $d_{bot}\left(\mathcal{B}, \mathcal{C}\right) = min\left(\delta_1, \delta_2\right)$.

CIMAT

Teorema de Isometría

Teorema 2.2.8
Sean V y W módulos de persistencia, el mapeo $V \mapsto \mathcal{B}(V)$ es una isometría, es decir,

$$d_{int}\left(V, W\right) = d_{bot}\left(\mathcal{B}(V), \mathcal{B}(W)\right) .$$

(Demostración en el Capítulo 3).

Observación: En caso de que $\mathcal{B}(\mathcal{V})$ y $\mathcal{B}(W)$ no tengan el mismo número de barras infinitas, tanto $d_{int}(V, W)$ y $d_{bot}(\mathcal{B}(V), \mathcal{B}(W))$ son infinitas por definición.

Ejercicios finales de Sec. 2.2

Ejercicio 2.2.7

Sean I y J dos intervalos $\delta-$apareados. Muestre que los correspondientes módulos $\mathbb{F}(I)$ y $\mathbb{F}(J)$ están $\delta-$entrelazados.

2.3 Corolarios de Estabilidad (del *Teorema de Isometrías*)

Teorema de Isometrías: $d_{int}\left(V,W\right)=d_{bot}\left(\mathcal{B}(V),\mathcal{B}(W)\right).$

$$d_{int}\left(V(f),V(g)\right)\leq ||f-g||.$$

Teorema 2.3.1
Sean f, g dos funciones de Morse en una variedad cerrada. Entonces

$$d_{bot}\left(\mathcal{B}(f),\mathcal{B}(g)\right)\leq \left|\left|f-g\right|\right|.$$

2.3 Corolarios de Estabilidadl (del *Teorema de Isometrías*)

Teorema de Isometrías: $d_{int}\left(V, W\right) = d_{bot}\left(\mathcal{B}(V), \mathcal{B}(W)\right).$

Teorema 1.5.4: $d_{GH}\left(\left(X, \rho\right), \left(Y, r\right)\right) \geq \frac{1}{2} d_{int}\left(V\left(X, \rho\right), W\left(Y, r\right)\right).$

Teorema 2.3.2

Sean (X, ρ) y (Y, r) dos espacios métricos finitos. Entonces

$$d_{bot}\left(\left(X, \rho\right), \left(Y, r\right)\right) \leq d_{GH}\left(\left(X, \rho\right), \left(Y, r\right)\right).$$

2.4 Módulos de Persistencia de tipo localmente finito

Definición
Módulos de Persistencia **localmente** finitos

persistencia (1)

$$\forall\, s \leq t \leq r,\ \pi_{s,r} = \pi_{t,r} \circ \pi_{s,t}\ .$$

semicont. (3)

$\forall\, t \in \mathbb{R}$ y cualquier $s \leq t$ suf. cerca, $\pi_{s,t}$ es un isomorfismo.

(2)

El conjunto de puntos espectrales es un subconjunto de $\mathbb{R}$ cerrado, discreto y acotado por abajo (no necesariamente finito).

Definición
Módulos de Persistencia finitos

(1) persistencia

(3) semicont.

(2)

$\forall\, t \in \mathbb{R}$ existe una vecindad U de t tal que $\pi_{s,r}$ es un isomorfismo $\forall\, s < r \in U$.

(4)

$\exists\, s_{\_} \in \mathbb{R}$, tal que $V_s = 0$ para todo $s_{\_} \leq s$.

CIMAT

Códigos de Barras de tipo localmente finito

- Son una colección contable de barras de la forma $(a, b]$, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ con multiplicidad, tal que:
  - $\forall\, c \in \mathbb{R}$ existe una vecindad de c que intersecta sólo un número finito de barras con multiplicidad.
  - Los puntos reales de las barras forman un subconjunto de $\mathbb{R}$ cerrado, discreto y acotado por abajo.

Observaciones:

- Se permite un número finito de barras de la forma $(-\infty, +\infty)$, $(-\infty, b]$.
- Los teoremas de *Forma Normal* y de *Isometría* pueden extenderse a este tipo de barras.

Ejemplo 2.4.1 - Demuestra el Teorema de Forma Normal para barras de tipo localmente finito
(sketch)

Sean

- (V, π) módulo de persistencia de tipo localmente finito.
- $i \geq 0$, a_i puntos espectrales.
- V^i espacio vectorial asociado a $(a_{i-1}, a_i]$.
- $\text{Totaldim}_k(V) := \sum_{a_i \leq k} \dim V^i$, $k \in \mathbb{N}$.

Definamos W^0 un subódulo de V por $W_t^0 = im(\pi_{-\infty,t})$ donde $\pi_{-\infty,t}$ es $\pi_{-s,t}$ p.a. s suficientemente grande.
Sea $\mathcal{B}^0$ el código de barras de W^0 consiste en rayos de la forma $(-\infty, b)$ para alguna $-\infty < b \leq \infty$.

CIMAT

Ejemplo 2.4.1

Cont.

$$W^0 \subset W^1 \subset \cdots \subset W^j \subset \cdots$$

Usando el Lema 2.1.10,

$$W^j = W^{j-1} \bigoplus \mathbb{F}(c_j, d_j], \quad c_j > -\infty\,.$$

- Dada $k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Totaldim}_k(W^j)$ aumenta conforme j aumente hasta el límite $\mathrm{Totaldim}_k(V)$.
- W^j estabiliza en $(-\infty, k]$ para j suficientemente grande.
- Con esta construcción,

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}^0 \oplus \bigoplus_j \mathbb{F}(c_j, d_j]$$

$$\text{por tanto,} \quad V = \bigoplus_{I \in \mathcal{B}} \mathbb{F}(I)\,. \quad \square$$

CIMAT

Distancia de Cuello de Botella para barras de tipo localmente finito

(Sin cambio)

- La distancia *cuello de botella*, $d_{bot}(\mathcal{B}, \mathcal{C})$, entre dos códigos de barras $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ de tipo localmente finito, se define como el mínimo entre todas las δ para las que existe un $\delta-$apareamiento entre $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$.
- Se dice que dos códigos de barras son *equivalentes* si su distancia cuello de botella entre ellos es finita.

CIMAT

Ejemplo - 2.4.2

Sea (M, g) una variedad Riemanniana cerrada, y $a \in \mathbb{R}$. Sea $\Lambda^a M$ el espacio de lazos suaves $\gamma : \mathbb{S}^1 \to M$ cuya longitud es menor a e^a. Para una métrica genérica g, la homología $H_*(\Lambda^a M, \mathbb{F})$ con coeficientes en $\mathbb{F}$ forma un módulo de persistencia de tipo localmente finito que denoteremos como $V(M, g)$.
Notemos que para cualquier métrica g' en M existe c tal que

$$c^{-1} g \leq g' \leq cg \,,$$

y la distancia de entrelazamiento entre los módulos $V(M, g)$ y $V(M, g')$ es menor o igual a $\frac{1}{2}\log(c)$.

Se sigue que la clase de equivalencia de los códigos de barra de $V(M, g)$ es invariante bajo difeomorfismos de la variedad.

(Weinberger, Found. Comput. Math. 19, 2019)

CIMAT