

Capítulo 4: ¿Qué podemos leer de un código de barras?

4.1.1 Exponentes característicos

4.2 Profundidad y aproximación de la frontera

Haydeé Peruyero

19 de octubre de 2023

4.1.1 Exponentes característicos

S. 4.2 Profundidad y aproximación de la frontera

Exponente característico

Sea E un espacio vectorial de dimensión finito sobre \mathbb{F} con $\dim E = L$.

Exponente característico

Sea E un espacio vectorial de dimensión finito sobre \mathbb{F} con $\dim E = L$.

Definición 4.1.5 La función $c : E \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ es llamada **exponente característico** si

Exponente característico

Sea E un espacio vectorial de dimensión finito sobre \mathbb{F} con $\dim E = L$.

Definición 4.1.5 La función $c : E \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ es llamada **exponente característico** si

1. $c(0) = -\infty$, $c(v) \in \mathbb{R}$ para todo $v \neq 0$,

Exponente característico

Sea E un espacio vectorial de dimensión finito sobre \mathbb{F} con $\dim E = L$.

Definición 4.1.5 La función $c : E \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ es llamada **exponente característico** si

1. $c(0) = -\infty$, $c(v) \in \mathbb{R}$ para todo $v \neq 0$,
2. $c(\lambda v) = c(v)$ para todo $\lambda \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$,

Exponente característico

Sea E un espacio vectorial de dimensión finito sobre \mathbb{F} con $\dim E = L$.

Definición 4.1.5 La función $c : E \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ es llamada **exponente característico** si

1. $c(0) = -\infty$, $c(v) \in \mathbb{R}$ para todo $v \neq 0$,
2. $c(\lambda v) = c(v)$ para todo $\lambda \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$,
3. $c(v_1 + v_2) \leq \max\{c(v_1), c(v_2)\}$ para todo $v_1, v_2 \in E$.

Exponente característico

Sea E un espacio vectorial de dimensión finito sobre \mathbb{F} con $\dim E = L$.

Definición 4.1.5 La función $c : E \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ es llamada **exponente característico** si

1. $c(0) = -\infty$, $c(v) \in \mathbb{R}$ para todo $v \neq 0$,
2. $c(\lambda v) = c(v)$ para todo $\lambda \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$,
3. $c(v_1 + v_2) \leq \max\{c(v_1), c(v_2)\}$ para todo $v_1, v_2 \in E$.

Ejercicio 4.1.6 Sea $c : E \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ el exponente característico. Verificar que para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$, el conjunto $\{v : c(v) < \alpha\}$ es un subespacio de E . Deducir que c admite a lo más $\dim E$ distintos valores reales.

Observación: Cada exponente característico corresponde a una **bandera** de espacios vectoriales

$$\{0\} = E_0 \subsetneq E_1 \subsetneq E_2 \subsetneq \dots \subsetneq E_k = E ,$$

donde $\dim E_i = p_i$, y $0 = p_0 < p_1 < p_2 < \dots < p_k = L$, con la propiedad de que existen constantes $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_k$, tales que $c|_{E_i \setminus E_{i-1}} = \alpha_i$.

Observación: Cada exponente característico corresponde a una **bandera** de espacios vectoriales

$$\{0\} = E_0 \subsetneq E_1 \subsetneq E_2 \subsetneq \dots \subsetneq E_k = E ,$$

donde $\dim E_i = p_i$, y $0 = p_0 < p_1 < p_2 < \dots < p_k = L$, con la propiedad de que existen constantes $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_k$, tales que $c|_{E_i \setminus E_{i-1}} = \alpha_i$.

El multiconjunto que consiste de cada α_i junto con sus multiplicidades $p_i - p_{i-1}$ se llama el **espectro de c** , y se denotará por $\text{spec}(c)$.

En el contexto de los módulos de persistencia y códigos de barras esta construcción es como sigue:

En el contexto de los módulos de persistencia y códigos de barras esta construcción es como sigue:

Dado un módulo de persistencia (V, π) , podemos definir el mapeo $c : V_\infty \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$c(v) = \inf\{s : v \in \text{im}(\pi_{s,\infty})\}$$

donde $V_\infty := V_t$ para $t \gg 0$.

En el contexto de los módulos de persistencia y códigos de barras esta construcción es como sigue:

Dado un módulo de persistencia (V, π) , podemos definir el mapeo $c : V_\infty \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$c(v) = \inf\{s : v \in \text{im}(\pi_{s,\infty})\}$$

donde $V_\infty := V_t$ para $t \gg 0$.

Ejercicio 4.1.7

1. La función c es un exponente característico.
2. El espectro de c consiste de los puntos finales de las barras infinitas en $\mathcal{B}(V)$ junto con sus multiplicidades.

Módulos de Morse

- Consideremos el módulo de persistencia de Morse $V = V(f)$ asociado a la función de Morse $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ en una variedad cerrada X .

Módulos de Morse

- ▶ Consideremos el módulo de persistencia de Morse $V = V(f)$ asociado a la función de Morse $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ en una variedad cerrada X .
- ▶ El espacio vectorial terminal V_∞ es simplemente $H_*(M)$.

Módulos de Morse

- ▶ Consideremos el módulo de persistencia de Morse $V = V(f)$ asociado a la función de Morse $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ en una variedad cerrada X .
- ▶ El espacio vectorial terminal V_∞ es simplemente $H_*(M)$.
- ▶ El exponente característico inducido $c_f : H_*(M) \rightarrow \mathbb{R}$ es llamado un **invariante espectral**.

Módulos de Morse

- ▶ Consideremos el módulo de persistencia de Morse $V = V(f)$ asociado a la función de Morse $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ en una variedad cerrada X .
- ▶ El espacio vectorial terminal V_∞ es simplemente $H_*(M)$.
- ▶ El exponente característico inducido $c_f : H_*(M) \rightarrow \mathbb{R}$ es llamado un **invariante espectral**.
- ▶ El valor $c_f(A)$ para $A \in H_*(M)$ es, intuitivamente, el mínimo valor crítico tal que los subconjuntos de nivel correspondientes contienen un representante (completo) de A .

Módulos de Morse

- ▶ Consideremos el módulo de persistencia de Morse $V = V(f)$ asociado a la función de Morse $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ en una variedad cerrada X .
- ▶ El espacio vectorial terminal V_∞ es simplemente $H_*(M)$.
- ▶ El exponente característico inducido $c_f : H_*(M) \rightarrow \mathbb{R}$ es llamado un **invariante espectral**.
- ▶ El valor $c_f(A)$ para $A \in H_*(M)$ es, intuitivamente, el mínimo valor crítico tal que los subconjuntos de nivel correspondientes contienen un representante (completo) de A .
- ▶ El **espectro** de c_f consiste en los llamados valores críticos homológicamente esenciales de f , los cuales son casos especiales de los valores críticos min-max.

4.1.1 Exponentes característicos

S. 4.2 Profundidad y aproximación de la frontera

Definición 4.2.1 Sea \mathcal{B} un código de barras. La longitud de la barra finita más larga en \mathcal{B} se llama la **profundidad de la frontera** de \mathcal{B} y se denota por $\beta(\mathcal{B})$.

Profundidad de la frontera

Definición 4.2.1 Sea \mathcal{B} un código de barras. La longitud de la barra finita más larga en \mathcal{B} se llama la **profundidad de la frontera** de \mathcal{B} y se denota por $\beta(\mathcal{B})$. Si un código de barras consiste de solo barras infinitas entonces definimos β como cero.

Teorema 4.2.2 Para un código de barras \mathcal{B} escribamos las barras de longitud finita en orden decreciente:

$$\beta_1 \geq \beta_2 \geq \dots \quad (1)$$

Siguiendo los resultados de Usher y Zhang, afirmamos que la función β_k es Lipschitz en el espacio de los códigos de barras con constante Lipschitz igual a 2. Vamos a usar la convención de que si \mathcal{B} tiene menos de k barras finitas, entonces $\beta_k(\mathcal{B}) = 0$.

Demostración

- Supongamos que cualesquiera dos códigos de barras \mathcal{B} y \mathcal{C} están δ -emparejados.

Demostración

- ▶ Supongamos que cualesquiera dos códigos de barras \mathcal{B} y \mathcal{C} están δ -emparejados.
- ▶ Es suficiente probar la desigualdad

$$\beta_k(\mathcal{B}) - \beta_k(\mathcal{C}) \leq 2\delta . \quad (2)$$

Demostración

- ▶ Supongamos que cualesquiera dos códigos de barras \mathcal{B} y \mathcal{C} están δ -emparejados.
- ▶ Es suficiente probar la desigualdad

$$\beta_k(\mathcal{B}) - \beta_k(\mathcal{C}) \leq 2\delta . \quad (2)$$

- ▶ Fijemos un δ -emparejamiento. Si $\beta_k(\mathcal{B}) \leq 2\delta$, la desigualdad (2) se cumple.

Demostración

- ▶ Supongamos que cualesquiera dos códigos de barras \mathcal{B} y \mathcal{C} están δ -emparejados.
- ▶ Es suficiente probar la desigualdad

$$\beta_k(\mathcal{B}) - \beta_k(\mathcal{C}) \leq 2\delta . \quad (2)$$

- ▶ Fijemos un δ -emparejamiento. Si $\beta_k(\mathcal{B}) \leq 2\delta$, la desigualdad (2) se cumple.
- ▶ Entonces vamos a suponer que

$$\beta_k(\mathcal{B}) > 2\delta . \quad (3)$$

Cualquier δ -emparejamiento μ nos deja en particular lo siguiente:

Demostración

Cualquier δ -emparejamiento μ nos deja en particular lo siguiente:

- ▶ Después de remover de ambos códigos de barras algunas de las barras de longitud $< 2\delta$, vamos a emparejar el resto de tal forma que las diferencias de longitudes en cada par sea menor que 2δ .

Demostración

Cualquier δ -emparejamiento μ nos deja en particular lo siguiente:

- ▶ Después de remover de ambos códigos de barras algunas de las barras de longitud $< 2\delta$, vamos a emparejar el resto de tal forma que las diferencias de longitudes en cada par sea menor que 2δ .
- ▶ Denotemos las longitudes de los intervalos emparejados, en orden decreciente, como

$$b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_N ,$$

y

$$c_1 \geq c_2 \geq \cdots \geq c_N .$$

Demostración

- Por el **Lema del Emparejamiento**, si pensamos en que emparejamos las **longitudes** más que las barras, el emparejamiento óptimo es el monótono.

Demostración

- ▶ Por el **Lema del Emparejamiento**, si pensamos en que emparejamos las **longitudes** más que las barras, el emparejamiento óptimo es el monótono.
- ▶ En particular,

$$|b_k - c_k| < 2\delta , \quad (4)$$

ya que esta cota en la diferencia de las longitudes es cierta también para μ , la cual podría no ser el emparejamiento óptimo en términos de las longitudes.

Demostración

- ▶ Por el **Lema del Emparejamiento**, si pensamos en que emparejamos las **longitudes** más que las barras, el emparejamiento óptimo es el monótono.
- ▶ En particular,

$$|b_k - c_k| < 2\delta , \quad (4)$$

ya que esta cota en la diferencia de las longitudes es cierta también para μ , la cual podría no ser el emparejamiento óptimo en términos de las longitudes.

- ▶ Por (3), ninguna barra más larga que la k -ésima en la lista (1) es removida y así $b_k = \beta_k(\mathcal{B})$.

Demostración

- ▶ Por el **Lema del Emparejamiento**, si pensamos en que emparejamos las **longitudes** más que las barras, el emparejamiento óptimo es el monótono.
- ▶ En particular,

$$|b_k - c_k| < 2\delta , \quad (4)$$

ya que esta cota en la diferencia de las longitudes es cierta también para μ , la cual podría no ser el emparejamiento óptimo en términos de las longitudes.

- ▶ Por (3), ninguna barra más larga que la k -ésima en la lista (1) es removida y así $b_k = \beta_k(\mathcal{B})$.
- ▶ Por otro lado, $c_k \leq \beta_k(\mathcal{C})$ ya que algunas barras más largas que c_k pudieron ser borradas.

Demostración

- ▶ Por el **Lema del Emparejamiento**, si pensamos en que emparejamos las **longitudes** más que las barras, el emparejamiento óptimo es el monótono.
- ▶ En particular,

$$|b_k - c_k| < 2\delta, \quad (4)$$

ya que esta cota en la diferencia de las longitudes es cierta también para μ , la cual podría no ser el emparejamiento óptimo en términos de las longitudes.

- ▶ Por (3), ninguna barra más larga que la k -ésima en la lista (1) es removida y así $b_k = \beta_k(\mathcal{B})$.
- ▶ Por otro lado, $c_k \leq \beta_k(\mathcal{C})$ ya que algunas barras más largas que c_k pudieron ser borradas.
- ▶ Por (4),

$$\beta_k(\mathcal{B}) - \beta_k(\mathcal{C}) \leq b_k - c_k \leq 2\delta,$$

lo cual nos deja (2).

\mathbb{R} -complejo filtrado

La noción de profundidad de la frontera fue introducida por M. Usher en el contexto de complejos filtrados.

\mathbb{R} -complejo filtrado

La noción de profundidad de la frontera fue introducida por M. Usher en el contexto de complejos filtrados.

Definición 4.2.3 Un \mathbb{R} -complejo filtrado (C, ∂) sobre \mathbb{F} consiste de los siguientes datos:

\mathbb{R} -complejo filtrado

La noción de profundidad de la frontera fue introducida por M. Usher en el contexto de complejos filtrados.

Definición 4.2.3 Un \mathbb{R} -complejo filtrado (C, ∂) sobre \mathbb{F} consiste de los siguientes datos:

- Un \mathbb{F} -espacio vectorial de dimensión finita C con un mapeo lineal $\partial : C \rightarrow C$, tal que $\partial^2 = 0$.

\mathbb{R} -complejo filtrado

La noción de profundidad de la frontera fue introducida por M. Usher en el contexto de complejos filtrados.

Definición 4.2.3 Un \mathbb{R} -complejo filtrado (C, ∂) sobre \mathbb{F} consiste de los siguientes datos:

- ▶ Un \mathbb{F} -espacio vectorial de dimensión finita C con un mapeo lineal $\partial : C \rightarrow C$, tal que $\partial^2 = 0$.
- ▶ Para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, un subespacio $C^\lambda \subseteq C$, tal que

\mathbb{R} -complejo filtrado

La noción de profundidad de la frontera fue introducida por M. Usher en el contexto de complejos filtrados.

Definición 4.2.3 Un \mathbb{R} -complejo filtrado (C, ∂) sobre \mathbb{F} consiste de los siguientes datos:

- ▶ Un \mathbb{F} -espacio vectorial de dimensión finita C con un mapeo lineal $\partial : C \rightarrow C$, tal que $\partial^2 = 0$.
- ▶ Para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, un subespacio $C^\lambda \subseteq C$, tal que
 1. $C^\lambda \subseteq C^\mu$ para cualquier $\lambda < \mu$ en \mathbb{R} ,

\mathbb{R} -complejo filtrado

La noción de profundidad de la frontera fue introducida por M. Usher en el contexto de complejos filtrados.

Definición 4.2.3 Un \mathbb{R} -complejo filtrado (C, ∂) sobre \mathbb{F} consiste de los siguientes datos:

- ▶ Un \mathbb{F} -espacio vectorial de dimensión finita C con un mapeo lineal $\partial : C \rightarrow C$, tal que $\partial^2 = 0$.
- ▶ Para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, un subespacio $C^\lambda \subseteq C$, tal que
 1. $C^\lambda \subseteq C^\mu$ para cualquier $\lambda < \mu$ en \mathbb{R} ,
 2. $\bigcap_{\lambda \in \mathbb{R}} C^\lambda = \{0\}$, $\bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}} C^\lambda = C$,

\mathbb{R} -complejo filtrado

La noción de profundidad de la frontera fue introducida por M. Usher en el contexto de complejos filtrados.

Definición 4.2.3 Un \mathbb{R} -complejo filtrado (C, ∂) sobre \mathbb{F} consiste de los siguientes datos:

- ▶ Un \mathbb{F} -espacio vectorial de dimensión finita C con un mapeo lineal $\partial : C \rightarrow C$, tal que $\partial^2 = 0$.
- ▶ Para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, un subespacio $C^\lambda \subseteq C$, tal que
 1. $C^\lambda \subseteq C^\mu$ para cualquier $\lambda < \mu$ en \mathbb{R} ,
 2. $\bigcap_{\lambda \in \mathbb{R}} C^\lambda = \{0\}$, $\bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}} C^\lambda = C$,
 3. Para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$, $\partial C^\lambda \subseteq \bigcup_{\mu < \lambda} C^\mu$.



\mathbb{R} -complejo filtrado

La noción de profundidad de la frontera fue introducida por M. Usher en el contexto de complejos filtrados.

Definición 4.2.3 Un \mathbb{R} -complejo filtrado (C, ∂) sobre \mathbb{F} consiste de los siguientes datos:

- ▶ Un \mathbb{F} -espacio vectorial de dimensión finita C con un mapeo lineal $\partial : C \rightarrow C$, tal que $\partial^2 = 0$.
- ▶ Para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, un subespacio $C^\lambda \subseteq C$, tal que
 1. $C^\lambda \subseteq C^\mu$ para cualquier $\lambda < \mu$ en \mathbb{R} ,
 2. $\bigcap_{\lambda \in \mathbb{R}} C^\lambda = \{0\}$, $\bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}} C^\lambda = C$,
 3. Para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$, $\partial C^\lambda \subseteq \bigcup_{\mu < \lambda} C^\mu$.

Notemos que como C es de dimensión finita, existen $\lambda_- < \lambda_+$ en \mathbb{R} , tal que $C^\lambda = 0$ para cualquier $\lambda \leq \lambda_-$ y $C^\lambda = C$ para cualquier $\lambda \geq \lambda_+$.

Definición 4.2.4 La **profundidad de la frontera** de un complejo filtrado (C, ∂) está definida como

$$b(C, \partial) = \inf\{\alpha \geq 0 \mid \forall \lambda \in \mathbb{R}, (\operatorname{im} \partial) \cap C^\lambda \subseteq \partial(C^{\lambda+\alpha})\} . \quad (5)$$

Profundidad de la frontera

Definición 4.2.4 La **profundidad de la frontera** de un complejo filtrado (C, ∂) está definida como

$$b(C, \partial) = \inf\{\alpha \geq 0 \mid \forall \lambda \in \mathbb{R}, (\operatorname{im} \partial) \cap C^\lambda \subseteq \partial(C^{\lambda+\alpha})\}. \quad (5)$$

En otras palabras, $b(C, \partial)$ es el $\alpha \geq 0$ más pequeño con la propiedad de que siempre que tengamos una frontera $x \in C$, podemos encontrar un elemento cuya frontera es x al **buscar hacia arriba** en la filtración no más que α .

Profundidad de la frontera

Definición 4.2.4 La **profundidad de la frontera** de un complejo filtrado (C, ∂) está definida como

$$b(C, \partial) = \inf\{\alpha \geq 0 \mid \forall \lambda \in \mathbb{R}, (\text{im } \partial) \cap C^\lambda \subseteq \partial(C^{\lambda+\alpha})\}. \quad (5)$$

En otras palabras, $b(C, \partial)$ es el $\alpha \geq 0$ más pequeño con la propiedad de que siempre que tengamos una frontera $x \in C$, podemos encontrar un elemento cuya frontera es x al **buscar hacia arriba** en la filtración no más que α .

Notemos que trivialmente $b(C, \partial) \leq \lambda_+ - \lambda_-$.

Entonces podemos conectar esta noción en nuestro contexto al notar que $\{H_*(C^\lambda)\}_\lambda$ es un módulo de persistencia.

Entonces podemos conectar esta noción en nuestro contexto al notar que $\{H_*(C^\lambda)\}_\lambda$ es un módulo de persistencia.

Ejercicio 4.2.5 Usando la definición de profundidad de frontera β de un código de barras, mostrar que para un \mathbb{Z} -graduado \mathbb{R} -complejo simplicial (C, ∂) se cumple que:

$$\beta\left(\mathcal{B}(\{H_*(C^\lambda)\}_\lambda)\right) = b(C, \partial) .$$

Aproximando funciones en S^2

Ejemplo 4.2.6 Consideremos la función de Morse $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

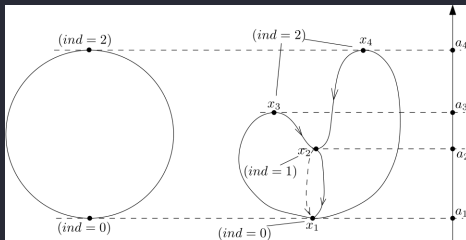
Aproximando funciones en S^2

Ejemplo 4.2.6 Consideremos la función de Morse $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Queremos saber que tan bien puede ser aproximada por una función de Morse g en la esfera, la cual tiene exactamente dos puntos críticos, y tal que las dos funciones tienen los mismos máximos y mínimos.

Aproximando funciones en S^2

Ejemplo 4.2.6 Consideremos la función de Morse $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Queremos saber que tan bien puede ser aproximada por una función de Morse g en la esfera, la cual tiene exactamente dos puntos críticos, y tal que las dos funciones tienen los mismos máximos y mínimos.

La función f es la función altura en la esfera con forma de corazón y la función g es cualquier función de Morse en la esfera con exactamente dos puntos críticos y con los mismos máximos y mínimos que f .



- Consideremos los módulos de persistencia de la homología de Morse con respecto a esas funciones.

- ▶ Consideremos los módulos de persistencia de la homología de Morse con respecto a esas funciones.
- ▶ Para cuantificar que tan bien podemos aproximar g con f , vamos a examinar los códigos de barras correspondientes a dichas módulos.

- ▶ Consideremos los módulos de persistencia de la homología de Morse con respecto a esas funciones.
- ▶ Para cuantificar que tan bien podemos aproximar g con f , vamos a examinar los códigos de barras correspondientes a dichas módulos.
- ▶ Vamos a considerar la homología de Morse con coeficientes en \mathbb{Z}_2 .

- ▶ Consideremos los módulos de persistencia de la homología de Morse con respecto a esas funciones.
- ▶ Para cuantificar que tan bien podemos aproximar g con f , vamos a examinar los códigos de barras correspondientes a dichas módulos.
- ▶ Vamos a considerar la homología de Morse con coeficientes en \mathbb{Z}_2 .
- ▶ Sea $x_1 \in S^2$ el punto mínimo, x_2 el punto silla, x_3 el máximo local y x_4 el máximo global de f .

- ▶ Consideremos los módulos de persistencia de la homología de Morse con respecto a esas funciones.
- ▶ Para cuantificar que tan bien podemos aproximar g con f , vamos a examinar los códigos de barras correspondientes a dichas módulos.
- ▶ Vamos a considerar la homología de Morse con coeficientes en \mathbb{Z}_2 .
- ▶ Sea $x_1 \in S^2$ el punto mínimo, x_2 el punto silla, x_3 el máximo local y x_4 el máximo global de f .
- ▶ Los índices de Morse de los puntos críticos de la esfera con forma de corazón son

$$\text{ind}(x_1) = 0, \text{ind}(x_2) = 1, \text{ind}(x_3) = \text{ind}(x_4) = 2.$$

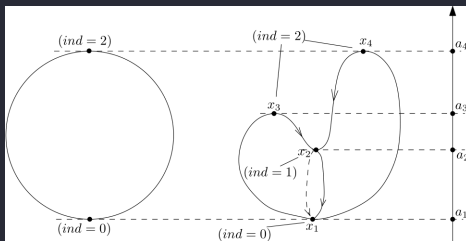
- ▶ Consideremos los módulos de persistencia de la homología de Morse con respecto a esas funciones.
- ▶ Para cuantificar que tan bien podemos aproximar g con f , vamos a examinar los códigos de barras correspondientes a dichas módulos.
- ▶ Vamos a considerar la homología de Morse con coeficientes en \mathbb{Z}_2 .
- ▶ Sea $x_1 \in S^2$ el punto mínimo, x_2 el punto silla, x_3 el máximo local y x_4 el máximo global de f .
- ▶ Los índices de Morse de los puntos críticos de la esfera con forma de corazón son

$$\text{ind}(x_1) = 0, \text{ind}(x_2) = 1, \text{ind}(x_3) = \text{ind}(x_4) = 2.$$

- ▶ Además, tenemos que módulo 2: $\partial x_1 = 0$, $\partial x_2 = 2 \cdot x_1 = 0$, y $\partial x_3 = \partial x_4 = x_2$.

Vamos a calcular la homología de Morse $H(t)$ de los subconjuntos de nivel $\{f < t\}$:

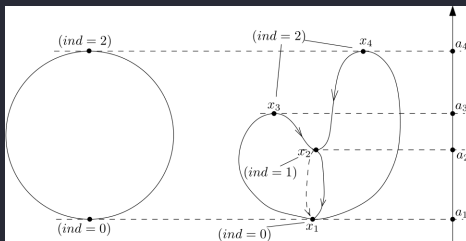
Vamos a calcular la homología de Morse $H(t)$ de los subconjuntos de nivel $\{f < t\}$:



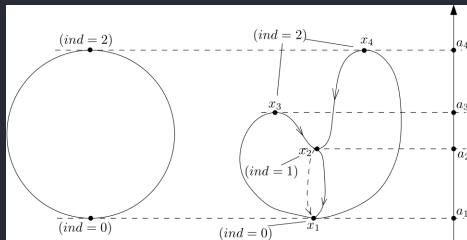
► Para $t > a_4$:

- $H_2(t) = \mathbb{Z}_2 \langle x_3 + x_4 \rangle$ (ya que $x_3 - x_4 \in \ker \partial$),
- $H_1(t) = 0$ (ya que x_2 es un punto frontera),
- $H_0(t) = \mathbb{Z}_2 \langle x_1 \rangle$.

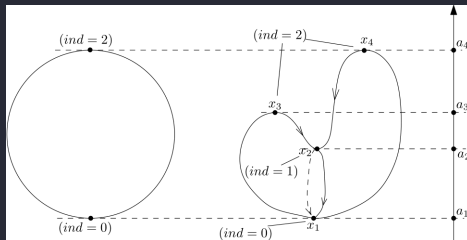
Vamos a calcular la homología de Morse $H(t)$ de los subconjuntos de nivel $\{f < t\}$:



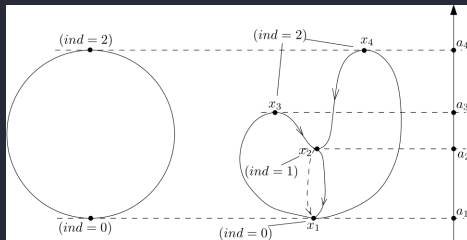
- ▶ Para $t > a_4$:
 - ▶ $H_2(t) = \mathbb{Z}_2 \langle x_3 + x_4 \rangle$ (ya que $x_3 - x_4 \in \ker \partial$),
 - ▶ $H_1(t) = 0$ (ya que x_2 es un punto frontera),
 - ▶ $H_0(t) = \mathbb{Z}_2 \langle x_1 \rangle$.
- ▶ Para $t \in (a_3, a_4)$:
 - ▶ $H_2(t) = 0$ (ya que $\partial x_3 = x_2$ es no cero),
 - ▶ $H_1(t) = 0$ (ya que $\partial x_2 = 0$ y $\partial x_3 = x_2$),
 - ▶ $H_0(t) = \mathbb{Z}_2 \langle x_1 \rangle$.



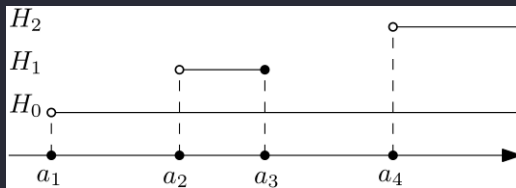
- Para $t \in (a_2, a_3)$:
- $H_2(t) = 0$,
 - $H_1(t) = \mathbb{Z}_2 \langle x_2 \rangle$,
 - $H_0(t) = \mathbb{Z}_2 \langle x_1 \rangle$.



- ▶ Para $t \in (a_2, a_3)$:
 - ▶ $H_2(t) = 0$,
 - ▶ $H_1(t) = \mathbb{Z}_2 \langle x_2 \rangle$,
 - ▶ $H_0(t) = \mathbb{Z}_2 \langle x_1 \rangle$.
- ▶ Para $t \in (a_1, a_2)$:
 - ▶ $H_2(t) = H_1(t) = 0$,
 - ▶ $H_0(t) = \mathbb{Z}_2 \langle x_1 \rangle$.

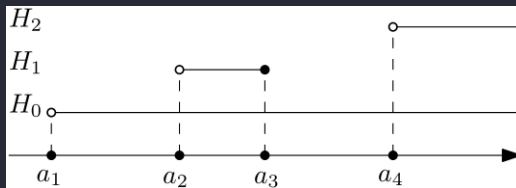


- ▶ Para $t \in (a_2, a_3)$:
 - ▶ $H_2(t) = 0$,
 - ▶ $H_1(t) = \mathbb{Z}_2 \langle x_2 \rangle$,
 - ▶ $H_0(t) = \mathbb{Z}_2 \langle x_1 \rangle$.
- ▶ Para $t \in (a_1, a_2)$:
 - ▶ $H_2(t) = H_1(t) = 0$,
 - ▶ $H_0(t) = \mathbb{Z}_2 \langle x_1 \rangle$.
- ▶ Para $t < a_1$: $H(t) = 0$.



Código de barras de la esfera con forma de corazón

Observación: Las barras infinitas corresponden a los invariantes espectrales $a_1 = c_f([\text{punto}])$ y $a_4 = c_f([S^2])$ (los mínimos y máximos).

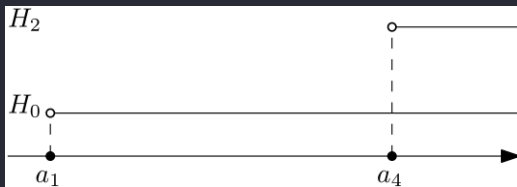


Código de barras de la esfera con forma de corazón

Observación: Las barras infinitas corresponden a los invariantes espectrales $a_1 = c_f([\text{punto}])$ y $a_4 = c_f([S^2])$ (los mínimos y máximos).

También, las barras finitas tienen longitud $a_3 - a_2$. Lo cual nos da una solución a nuestra pregunta de aproximación.

Observación: En el caso de que $g : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ se la función de Morse de S^2 que tiene los mismos mínimos y máximos que f . El código de barras correspondiente $\mathcal{B}(g)$ tiene las mismas dos barras infinitas pero no tiene barras finitas. Aquí $a_1 = \min g$, $a_4 = \max g$.



Código de barras correspondiente a la esfera redonda

- Por definición, la profundidad de la frontera de la esfera con forma de corazón es $\beta(\mathcal{B}(f)) = a_3 - a_2$, mientras que $\beta(\mathcal{B}(g)) = 0$.

- ▶ Por definición, la profundidad de la frontera de la esfera con forma de corazón es $\beta(\mathcal{B}(f)) = a_3 - a_2$, mientras que $\beta(\mathcal{B}(g)) = 0$.
- ▶ Notemos que estos valores pueden ser obtenidos también de la descripción alternativa de la profundidad de la frontera.

Regresando a la pregunta de aproximación que vimos al final de la sección 1.4, el **Teorema de Isometría (Teorema 2.2.8)**, **Teorema 4.2.2** y la ecuación

$$d_{int}(V(f), V(g)) \leq \inf_{\varphi \in \text{Diff}(M)} \|f - \varphi^* g\|. \quad (6)$$

tenemos que

$$a_3 - a_2 \leq 2d_{bot}(\mathcal{B}(f), \mathcal{B}(g)) = 2d_{int}(V(f), V(g)) \leq 2\|f - g\|, \quad (7)$$

así $\|f - g\| \geq \frac{1}{2}(a_3 - a_2)$.

Regresando a la pregunta de aproximación que vimos al final de la sección 1.4, el **Teorema de Isometría (Teorema 2.2.8)**, **Teorema 4.2.2** y la ecuación

$$d_{int}(V(f), V(g)) \leq \inf_{\varphi \in \text{Diff}(M)} \|f - \varphi^* g\|. \quad (6)$$

tenemos que

$$a_3 - a_2 \leq 2d_{bot}(\mathcal{B}(f), \mathcal{B}(g)) = 2d_{int}(V(f), V(g)) \leq 2\|f - g\|, \quad (7)$$

así $\|f - g\| \geq \frac{1}{2}(a_3 - a_2)$.

Lo cual nos permite cuantificar la obstrucción a la aproximación de $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ por una función de Morse con exactamente dos puntos críticos.

Regresando a la pregunta de aproximación que vimos al final de la sección 1.4, el **Teorema de Isometría (Teorema 2.2.8)**, **Teorema 4.2.2** y la ecuación

$$d_{int}(V(f), V(g)) \leq \inf_{\varphi \in \text{Diff}(M)} \|f - \varphi^* g\|. \quad (6)$$

tenemos que

$$a_3 - a_2 \leq 2d_{bot}(\mathcal{B}(f), \mathcal{B}(g)) = 2d_{int}(V(f), V(g)) \leq 2\|f - g\|, \quad (7)$$

así $\|f - g\| \geq \frac{1}{2}(a_3 - a_2)$.

Lo cual nos permite cuantificar la obstrucción a la aproximación de $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ por una función de Morse con exactamente dos puntos críticos.

Ejercicio 4.2.7 Encontrar el código de barras para la función altura del círculo con forma de corazón S^1 .