Parte I: Capítulo 3

3.4 Demostración de los Lemas 3.3.1 y 3.3.2

(Proofs of Lemma 3.3.1 and Lemma 3.3.2)

Eduardo Velázquez

28 de septiembre de 2023

CIMAT

Recordemos...

- (V, π^V) y (W, π^W) son módulos de persistencia.
- $\delta > 0$, $f : V \to W[\delta]$ y $g : W \to V[\delta]$ son morfismos de entrelazamiento, es decir, $g[\delta] \circ f = \Phi_V^{2\delta}$ y $f[\delta] \circ g = \Phi_W^{2\delta}$
- $\Phi_V^{2\delta} = \pi_{t,t+2\delta}^V$

CIMAT

Demostración del Lema 3.3.1

Lema 3.3.1

Sean (V, π^V) y (W, π^W) dos módulos de persistencia $\delta-$entrelazados, y sean

$$f : V \to W[\delta]$$

y

$$g : W \to V[\delta]$$

sus morfismos de entrelazamiento. Considere el mapeo suprayectivo $f : V \to \operatorname{im} f$ y el apareamiento inducido $\mu_{sur} : \mathcal{B}(V) \to \mathcal{B}(\operatorname{im} f)$. Entonces

1. $\operatorname{coim} \mu_{sur} \supseteq \mathcal{B}(V)_{2\delta}$,
2. $\operatorname{im} \mu_{sur} = \mathcal{B}(\operatorname{im} f)$,
3. μ_{sur} mapea $(b, d] \in \operatorname{coim} \mu_{sur}$ a $(b, d']$, donde $d' \in [d - 2\delta, d]$.

CIMAT

2. Por demostrar: $\operatorname{im} \mu_{sur} = \mathcal{B}(\operatorname{im} f)$.

Demostración.

Se sigue de la Proposición 3.2.8, ya que $\mu_{sur} : \mathcal{B}(V) \to \mathcal{B}(\operatorname{im} f)$ y,

Proposión 3.2.8

Si existe un mapeo suprayectivo del módulo (V, π) al módulo (W, θ), entonces el mapeo inducido $\mu : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ satisface:

- $\operatorname{im} \mu_{sur} = \mathcal{C}$,
- $\mu_{sur}\,(b, d] = (b, e]$ con $d \geq e$.

$\square$

CIMAT

1. Por demostrar: coim $\mu_{sur}(f) \supseteq \mathcal{B}(V)_{2\delta}$.

Demostración.
El mapeo suprayectivo se construye como $\mu_{sur} : \mathcal{B}(V) \to \mathcal{B}(\mathrm{im}\, f)$.
Por hipótesis,

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "\Phi_V^{2\delta}"'] & \mathrm{im}\, f \arrow[r, "g[\delta]"] & \mathrm{im}\, \Phi_V^{2\delta} \end{tikzcd}$$

y por la Afirmación 3.2.13,

$$\begin{tikzcd} \mathcal{B}(V) \arrow[r, "\mu_{\mathrm{sur}}(f)"] \arrow[rr, bend right, "\mu_{\mathrm{sur}}(\Phi_V^{2\delta})"'] & \mathcal{B}(\mathrm{im}\, f) \arrow[r, "\mu_{\mathrm{sur}}(g[\delta])"] & \mathcal{B}(\mathrm{im}\, \Phi_V^{2\delta}) \end{tikzcd}.$$

Notemos que por construcción, coim $\mu_{sur}(\Phi_V^{2\delta}) = \mathcal{B}(V)_{2\delta}$, y $\mathcal{B}(V)_{2\delta}$ son las barras de $\mathcal{B}(V)$ de longitud al menos 2δ

CIMAT

Las barras de $\mathcal{B}(V)$ y las barras

$$\mathcal{B}(\operatorname{im}\Phi_V^{2\delta}) = \{(b, d-2\delta] : (b,d] \in \mathcal{B}(V), d-b > 2\delta\}$$

están *en correspondencia* (matched) usando el criterio de "mayor longitud primero", pero no así las barras de $\mathcal{B}(V)$ de menor longitud a 2δ. Esto significa que

$$\operatorname{coim}\mu_{sur}(f) \supseteq \operatorname{coim}\mu_{sur}(\Phi_V^{2\delta}) = \mathcal{B}(V)_{2\delta} \,.$$

$\square$

CIMAT

3. Por demostrar: μ_{sur} mapea $(b, d] \in \operatorname{coim} \mu_{sur}$ a $(b, d']$, donde $d' \in [d - 2\delta, d]$.

Demostración.
Sea $(b, d] \in \mathcal{B}(V)$. Analicemos $\mu_{sur}(f)(b, d]$.

- Caso 1. $d - b > 2\delta$. Por la Afirmación 3.2.8,

$$(b, d] \overset{\mu_{sur}(f)}{\mapsto} (b, d'], \text{ p.a. } d' \leq d \, .$$

  Y además,

$$(b, d'] \overset{\mu_{sur}(g[\delta])}{\mapsto} (b, d''], \text{ p.a. } d'' \leq d' \, ,$$

  además, $(b, d''] = (b, d - 2\delta]$.

Por tanto, $d - 2\delta \leq d' \leq d$.

3. Por demostrar: μ_{sur} mapea $(b, d] \in \operatorname{coim} \mu_{sur}$ a $(b, d']$, donde $d' \in [d - 2\delta, d]$.

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{B}(V)_{2\delta} & \mathcal{B}(\operatorname{im} f) & \mathcal{B}(\operatorname{im} \Phi_V^{2\delta}) \\
(b, d] \arrow[u, phantom, sloped, "\in"] \arrow[r, mapsto, "\mu_{\mathrm{sur}}(f)"] \arrow[drr, mapsto, bend right, "\mu_{\mathrm{sur}}(\Phi_V^{2\delta})"] & (b, d'] \arrow[u, phantom, sloped, "\in"] \arrow[r, mapsto, "\mu_{\mathrm{sur}}(g[\delta])"] & (b, d''] \arrow[u, phantom, sloped, "\in"] \arrow[d, equal] \\
 & & (b, d - 2\delta]
\end{tikzcd}
$$

- Caso 2. $d - b \leq 2\delta$. El intervalo $(b, d]$ (en la coimagen de $\mu_{sur}(f)$) está *asociado* (matched) a $(b, d']$ con $d \geq d'$. Pero $d' > b \geq d - 2\delta$, por tanto, $d' \in [d - 2\delta, d]$.

$\square$

CIMAT

Demostración del Lema 3.3.2

Lema 3.3.2
Sean (V, π^V) y (W, π^W) dos módulos de persistencia $\delta-$entrelazados, y sean

$$f : V \to W[\delta]$$

y

$$g : W \to V[\delta]$$

sus morfismos de entrelazamiento. Considere el mapeo inyectivo $\operatorname{im} f \to W[\delta]$ y el apareamiento inducido $\mu_{inj} : \mathcal{B}(\operatorname{im} f) \to \mathcal{B}(W[\delta])$. Entonces

1. $\operatorname{coim} \mu_{inj} = \mathcal{B}(\operatorname{im} f)$,
2. $\operatorname{im} \mu_{inj} \supseteq \mathcal{B}(W[\delta])_{2\delta}$,
3. μ_{inj} mapea $(b, d'] \in \operatorname{coim} \mu_{inj}$ a $(b', d']$, donde $b' \in [b - 2\delta, b]$.

CIMAT

1. Por demostrar: coim $\mu_{inj} = \mathcal{B}(\operatorname{im} f)$.

Demostración.
Se sigue de la Proposición 3.2.8,

> Proposión 3.2.5
>
> Si existe un mapeo inyectivo del módulo (V, π) al módulo (W, θ), entonces el mapeo inducido $\mu_{inj} : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ satisface:
>
> - coim $\mu_{inj} = \mathcal{B}$,
> - $\forall\, (b, d] \in \mathcal{B}$, $(b, d] = (c, d]$ con $c \leq b$.

$\square$

2. Por demostrar: $\operatorname{im} \mu_{inj} \supseteq \mathcal{B}(W[\delta])_{2\delta}$

Demostración.
Por hipótesis, $f[\delta] \circ g = \Phi_W^{2\delta}$, es decir,

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "\Phi_W^{2\delta}"'] & \operatorname{im} g \arrow[r, "{f[\delta]}"] & W[2\delta] \end{tikzcd}$$

Entonces, $\operatorname{im} \Phi_W^{2\delta} \subseteq \operatorname{im} f[\delta] \subseteq W[2\delta]$. Es decir, existen mapeos inyectivos i, j, k, tales que

$$\begin{tikzcd} \operatorname{im} \Phi_W^{2\delta} \arrow[r, "j"] \arrow[rr, bend right, "k"'] & \operatorname{im} f[\delta] \arrow[r, "i"] & W[2\delta] \end{tikzcd}$$

CIMAT

2. Por demostrar: im $\mu_{inj} \supseteq \mathcal{B}(W[\delta])_{2\delta}$

Por la afirmación 3.2.13,

$$\begin{tikzcd} \mathcal{B}(\mathrm{im}\,\Phi_W^{2\delta}) \arrow[r, "\mu_{\mathrm{inj}}(j)"] \arrow[rr, bend right, "\mu_{\mathrm{inj}}(k)"'] & \mathcal{B}(\mathrm{im}\, f[\delta]) \arrow[r, "\mu_{\mathrm{inj}}(i)"] & \mathcal{B}(W[2\delta]) \end{tikzcd}$$

Podemos ver que,

- im $\mu_{inj}(k) = \mathcal{B}(W[2\delta])_{2\delta}$,
- Vimos que im $\Phi_W^{2\delta} \subseteq$ im $f[\delta] \subseteq W[2\delta]$. Notemos que

$$\mathcal{B}(\mathrm{im}\,\Phi_W^{2\delta}) = \{(b, d - 2\delta] \,:\, (b, d \in \mathcal{B}(W),\ d - b > 2\delta)\},$$

$$\mathcal{B}(W[2\delta]) = \{(b - 2\delta, d - 2\delta) \,:\, (b, d] \in \mathcal{B}(W)\},$$

y $\mu_{inj}(k)(b, d - 2\delta] = (b - 2\delta, d - 2\delta]$,

$$\therefore \mathrm{im}\,\mu_{inj}(i) \supseteq \mathrm{im}\,\mu_{inj}(k) = \mathcal{B}(W[2\delta])_{2\delta}.$$

$\square$

CIMAT

3. Por demostrar: μ_{inj} mapea $(b, d'] \in \operatorname{coim} \mu_{inj}$ a $(b', d']$, donde $b' \in [b - 2\delta, b]$

Demostración.
Sea $(b, d] \in \mathcal{B}(\operatorname{im} f[\delta])$, y $\mu_{inj}(i)(b, d]) = (b', d]$ p.a. b' tal que $(b', d] \in \mathcal{B}(W[2\delta])$. Por la proposición 3.2.5, $b' \leq b$.

- Caso $d - b' \leq 2\delta$. Se tiene $b' \geq d - 2\delta > b - 2\delta$.
- Caso $d - b' > 2\delta$. Existe un intervalo $(b' + 2\delta, d] \in \mathcal{B}(\operatorname{im} \Phi_W^{2\delta})$ tal que

$$\mu_{inj}(k)(b' + 2\delta, d] = \mu_{inj}(i)(b, d] = (b', d],$$

por lo que $b \leq b' + 2\delta$. Por tanto, $b - 2\delta \leq b' \leq b$.

$\square$