Seminario Persistencia en Geometría 2024-I

Secciones 4-4.1.4

Miguel Ángel Maurin García de la Vega

12 de octubre de 2023

Instituto de Matemáticas
UNAM

Contenidos

Instituto de Matemáticas UNAM

¿Qué podemos leer de un Código de Barras?

Este capítulo introduce funcionales Lipschitz en el espacio de códigos de barras.

¿Qué podemos leer de un Código de Barras?

Este capítulo introduce funcionales Lipschitz en el espacio de códigos de barras. Dichos funcionales producen invariantes en módulos de persistencia tipo finito y representaciones de grupos finitos en módulos de persistencia.

¿Qué podemos leer de un Código de Barras?

Este capítulo introduce funcionales Lipschitz en el espacio de códigos de barras. Dichos funcionales producen invariantes en módulos de persistencia tipo finito y representaciones de grupos finitos en módulos de persistencia. Se ilustran dichos invariantes en el contexto de aproximación de funciones y geometría de espacios métricos.

Contenidos

Instituto de Matemáticas UNAM

$\mathrm{d_{bot}}$ para barras infinitas

Recordemos que si $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ son códigos de barras, $\mathrm{d_{bot}}(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ se define como el ínfimo de las δ tales que $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ están δ-emparejados.

d_{bot} para barras infinitas

Recordemos que si $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ son códigos de barras, $d_{bot}(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ se define como el ínfimo de las δ tales que $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ están δ-emparejados. Además, un δ-emparejamiento, μ debe cumplir:

Instituto de Matemáticas UNAM

$\mathrm{d_{bot}}$ para barras infinitas

Recordemos que si $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ son códigos de barras, $\mathrm{d_{bot}}(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ se define como el ínfimo de las δ tales que $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ están δ-emparejados. Además, un δ-emparejamiento, μ debe cumplir:

1. $\mathcal{B}_{2\delta} \subset \operatorname{coim} \mu$,

$\mathrm{d}_{\mathrm{bot}}$ para barras infinitas

Recordemos que si $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ son códigos de barras, $\mathrm{d}_{\mathrm{bot}}(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ se define como el ínfimo de las δ tales que $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ están δ-emparejados. Además, un δ-emparejamiento, μ debe cumplir:

1. $\mathcal{B}_{2\delta} \subset \operatorname{coim} \mu$,
2. $\mathcal{C}_{2\delta} \subset \operatorname{im} \mu$,

Instituto de Matemáticas UNAM

$\mathrm{d_{bot}}$ para barras infinitas

Recordemos que si $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ son códigos de barras, $\mathrm{d_{bot}}(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ se define como el ínfimo de las δ tales que $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ están δ-emparejados. Además, un δ-emparejamiento, μ debe cumplir:

1. $\mathcal{B}_{2\delta} \subset \operatorname{coim} \mu$,
2. $\mathcal{C}_{2\delta} \subset \operatorname{im} \mu$,
3. Si $\mu(I) = J$, entonces $I \subset J^{-\delta}$, $J \subset I^{-\delta}$.

Consideremos un código de barras $\mathcal{B}$ que consiste de N barras infinitas:

Instituto de Matemáticas UNAM

$\mathrm{d}_{\mathrm{bot}}$ para barras infinitas

Recordemos que si $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ son códigos de barras, $\mathrm{d}_{\mathrm{bot}}(\mathcal{B},\mathcal{C})$ se define como el ínfimo de las δ tales que $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ están δ-emparejados. Además, un δ-emparejamiento, μ debe cumplir:

1. $\mathcal{B}_{2\delta} \subset \operatorname{coim} \mu$,
2. $\mathcal{C}_{2\delta} \subset \operatorname{im} \mu$,
3. Si $\mu(I) = J$, entonces $I \subset J^{-\delta},\ J \subset I^{-\delta}$.

Consideremos un código de barras $\mathcal{B}$ que consiste de N barras infinitas:

$$(b_1, +\infty),\ (b_2, +\infty),\ \ldots,\ (b_N, +\infty),\ b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_N\ .$$

Si $\mathcal{C}$ es otro código de barras que consiste solo de barras infinitas,

Instituto de Matemáticas UNAM

$\mathrm{d}_{\mathrm{bot}}$ para barras infinitas

Recordemos que si $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ son códigos de barras, $\mathrm{d}_{\mathrm{bot}}(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ se define como el ínfimo de las δ tales que $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ están δ-emparejados. Además, un δ-emparejamiento, μ debe cumplir:

1. $\mathcal{B}_{2\delta} \subset \operatorname{coim} \mu$,
2. $\mathcal{C}_{2\delta} \subset \operatorname{im} \mu$,
3. Si $\mu(I) = J$, entonces $I \subset J^{-\delta},\ J \subset I^{-\delta}$.

Consideremos un código de barras $\mathcal{B}$ que consiste de N barras infinitas:

$$(b_1, +\infty),\ (b_2, +\infty),\ \ldots,\ (b_N, +\infty),\ b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_N\ .$$

Si $\mathcal{C}$ es otro código de barras que consiste solo de barras infinitas, de existir un δ-emparejamiento, todas las barras de de $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ al ser infinitas son mayores que 2δ.

Instituto de Matemáticas UNAM

$\mathrm{d}_{\mathrm{bot}}$ para barras infinitas

Recordemos que si $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ son códigos de barras, $\mathrm{d}_{\mathrm{bot}}(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ se define como el ínfimo de las δ tales que $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ están δ-emparejados. Además, un δ-emparejamiento, μ debe cumplir:

1. $\mathcal{B}_{2\delta} \subset \operatorname{coim} \mu$,
2. $\mathcal{C}_{2\delta} \subset \operatorname{im} \mu$,
3. Si $\mu(I) = J$, entonces $I \subset J^{-\delta},\ J \subset I^{-\delta}$.

Consideremos un código de barras $\mathcal{B}$ que consiste de N barras infinitas:

$$(b_1, +\infty),\ (b_2, +\infty),\ \ldots,\ (b_N, +\infty),\ b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_N\ .$$

Si $\mathcal{C}$ es otro código de barras que consiste solo de barras infinitas, de existir un δ-emparejamiento, todas las barras de de $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ al ser infinitas son mayores que 2δ. Por lo que lo todas las barras deben emparejarse. Tenemos así, el siguiente resultado:

Instituto de Matemáticas UNAM

$\mathrm{d}_{\mathrm{bot}}$ para barras infinitas

$\mathrm{d}_{\mathrm{bot}}(\mathcal{B}, \mathcal{C}) < +\infty \iff \mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ contienen el mismo número de barras infinitas.

$\mathrm{d_{bot}}$ para barras infinitas

$\mathrm{d_{bot}}(\mathcal{B}, \mathcal{C}) < +\infty \iff \mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ contienen el mismo número de barras infinitas.
Notemos que esto es análogo al siguiente resultado obtenido para módulos de persistencia y la distancia de δ-entrelazamiento:

$\mathrm{d}_{\mathrm{bot}}$ para barras infinitas

$\mathrm{d}_{\mathrm{bot}}(\mathcal{B},\mathcal{C}) < +\infty \iff \mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ contienen el mismo número de barras infinitas.
Notemos que esto es análogo al siguiente resultado obtenido para módulos de persistencia y la distancia de δ-entrelazamiento:
$\mathrm{d}_{\mathrm{int}}(V, W) < +\infty \iff \dim V_\infty = \dim W_\infty$

Instituto de Matemáticas UNAM

$\mathrm{d}_{\mathrm{bot}}$ para barras infinitas

$\mathrm{d}_{\mathrm{bot}}(\mathcal{B}, \mathcal{C}) < +\infty \iff \mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ contienen el mismo número de barras infinitas.
Notemos que esto es análogo al siguiente resultado obtenido para módulos de persistencia y la distancia de δ-entrelazamiento:
$\mathrm{d}_{\mathrm{int}}(V, W) < +\infty \iff \dim V_\infty = \dim W_\infty$
(ver Ej. 1.3.2 (1) y Ej. 2.2.4)

Instituto de Matemáticas UNAM

d_{bot} para barras infinitas

Consideremos entonces $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ códigos de barras consistentes de N barras infinitas:

Instituto de Matemáticas UNAM

$\mathrm{d}_{\mathrm{bot}}$ para barras infinitas

Consideremos entonces $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ códigos de barras consistentes de N barras infinitas:

$$(b_1, +\infty),\ (b_2, +\infty),\ \ldots,\ (b_N, +\infty),\ b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_N\ .$$

Instituto de Matemáticas UNAM

$\mathrm{d_{bot}}$ para barras infinitas

Consideremos entonces $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ códigos de barras consistentes de N barras infinitas:

$$(b_1, +\infty),\ (b_2, +\infty),\ \ldots,\ (b_N, +\infty),\ b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_N\ .$$

$$(c_1, +\infty),\ (c_2, +\infty),\ \ldots,\ (c_N, +\infty),\ c_1 \leq c_2 \leq \ldots \leq c_N\ .$$

$\mathrm{d_{bot}}$ para barras infinitas

Consideremos entonces $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ códigos de barras consistentes de N barras infinitas:

$$(b_1, +\infty),\ (b_2, +\infty),\ \ldots,\ (b_N, +\infty),\ b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_N\ .$$

$$(c_1, +\infty),\ (c_2, +\infty),\ \ldots,\ (c_N, +\infty),\ c_1 \leq c_2 \leq \ldots \leq c_N\ .$$

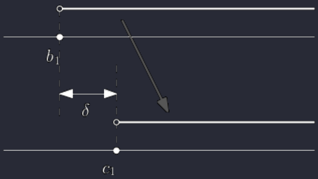
¿Existe una cota inferior para $\mathrm{d_{bot}}(\mathcal{B}, \mathcal{C})$? Buscaremos un valor de δ que garantice un δ-emparejamiento.

Cota inferior para d_{bot}

Recordemos que el δ-emparejamiento debe cumplir $\mu(I) = J \implies I \subset J^{-\delta},\ J \subset I^{-\delta}$.

Cota inferior para d_{bot}

Recordemos que el δ-emparejamiento debe cumplir $\mu(I) = J \implies I \subset J^{-\delta},\ J \subset I^{-\delta}$. Entonces, para $N = 1$ tenemos:

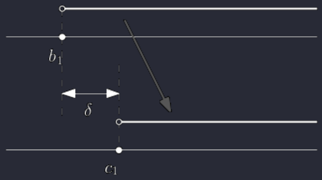


$$\delta = |b_1 - c_1|$$

Instituto de Matemáticas UNAM

Cota inferior para $\mathrm{d}_{\mathrm{bot}}$

Recordemos que el δ-emparejamiento debe cumplir $\mu(I) = J \implies I \subset J^{-\delta},\ J \subset I^{-\delta}$. Entonces, para $N = 1$ tenemos:



$$\delta = |b_1 - c_1|$$

Si $N = 2$ tenemos que hacer más comparaciones:

$$|b_1 - c_1|,\ |b_2 - c_2|$$

$$|b_1 - c_2|,\ |b_2 - c_1|$$

Cota inferior para $\mathrm{d}_{\mathrm{bot}}$

Para tener un δ-emparejamiento basta tomar:

$$\text{mín}\left\{\text{máx}\left\{|b_1 - c_1|,\ |b_2 - c_2|\right\}, \text{máx}\left\{|b_1 - c_2|,\ |b_2 - c_1|\right\}\right\}$$

Instituto de Matemáticas UNAM

Cota inferior para $\mathrm{d}_{\mathrm{bot}}$

Para tener un δ-emparejamiento basta tomar:

$$\text{mín}\left\{\text{máx}\left\{|b_1 - c_1|,\ |b_2 - c_2|\right\}, \text{máx}\left\{|b_1 - c_2|,\ |b_2 - c_1|\right\}\right\}$$

Usando el lenguaje de permutaciones, notamos que en el primer argumento del mín estamos aplicando la permutación identidad $\mathbb{1}$ a las c_i,

Cota inferior para $\mathrm{d}_{\mathrm{bot}}$

Para tener un δ-emparejamiento basta tomar:

$$\min\left\{\max\left\{|b_1 - c_1|,\ |b_2 - c_2|\right\},\max\left\{|b_1 - c_2|,\ |b_2 - c_1|\right\}\right\}$$

Usando el lenguaje de permutaciones, notamos que en el primer argumento del mín estamos aplicando la permutación identidad $\mathbb{1}$ a las c_i, en el segundo estamos aplicando la permutacion (12).

Cota inferior para $\mathrm{d}_{\mathrm{bot}}$

Para tener un δ-emparejamiento basta tomar:

$$\min\left\{\max\left\{|b_1 - c_1|,\ |b_2 - c_2|\right\}, \max\left\{|b_1 - c_2|,\ |b_2 - c_1|\right\}\right\}$$

Usando el lenguaje de permutaciones, notamos que en el primer argumento del mín estamos aplicando la permutación identidad $\mathbb{1}$ a las c_i, en el segundo estamos aplicando la permutacion (12). Así, para $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ con N barras debe ser que:

$$\mathrm{d}_{\mathrm{bot}}(\mathcal{B}, \mathcal{C}) \geq \min_{\sigma \in S_N} \max_i |b_i - c_{\sigma(i)}|$$

donde σ recorre todas las posibles permutaciones de N elementos.

Cota inferior para $\mathrm{d}_{\mathrm{bot}}$

Para tener un δ-emparejamiento basta tomar:

$$\min\left\{\max\left\{|b_1 - c_1|,\ |b_2 - c_2|\right\}, \max\left\{|b_1 - c_2|,\ |b_2 - c_1|\right\}\right\}$$

Usando el lenguaje de permutaciones, notamos que en el primer argumento del mín estamos aplicando la permutación identidad $\mathbb{1}$ a las c_i, en el segundo estamos aplicando la permutacion (12). Así, para $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ con N barras debe ser que:

$$\mathrm{d}_{\mathrm{bot}}(\mathcal{B}, \mathcal{C}) \geq \min_{\sigma \in S_N} \max_i |b_i - c_{\sigma(i)}|$$

donde σ recorre todas las posibles permutaciones de N elementos. El siguiente lema afirma que no es necesario considerar las permutaciones.

Instituto de Matemáticas UNAM

Contenidos

Instituto de Matemáticas UNAM

Lema del Emparejamiento

Lema 4.1.1
Para cualesquera dos conjuntos de puntos en $\mathbf{R}$,
$b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_N$ y $c_1 \leq c_2 \leq \ldots \leq c_N$ tenemos:

Lema del Emparejamiento

Lema 4.1.1
Para cualesquera dos conjuntos de puntos en $\mathbf{R}$,
$b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_N$ y $c_1 \leq c_2 \leq \ldots \leq c_N$ tenemos:

$$\min_{\sigma \in S_N} \max_i |b_i - c_{\sigma(i)}| = \max_i |b_i - c_i|$$

Corolario Cota para $\mathrm{d}_{\mathrm{bot}}$

Corolario 4.1.2

Sean V y W dos módulos de persistencia con códigos de barras $\mathcal{B} = \mathcal{B}(V), \mathcal{C} = \mathcal{B}(W)$, cada uno consistente de N barras infinitas. Denotamos por b_i y c_i los extremos de las barras infinitas en $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ (ordenados como en el Lema 4.1.1). Entonces, tenemos la siguiente cota inferior en la distancia cuello de botella entre los dos códigos de barras:

$$d_{bot}(\mathcal{B}, \mathcal{C}) \geq \max_i |b_i - c_i|$$

Corolario Cota para $\mathrm{d}_{\mathrm{bot}}$

Corolario 4.1.2

Sean V y W dos módulos de persistencia con códigos de barras $\mathcal{B} = \mathcal{B}(V), \mathcal{C} = \mathcal{B}(W)$, cada uno consistente de N barras infinitas. Denotamos por b_i y c_i los extremos de las barras infinitas en $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ (ordenados como en el Lema 4.1.1). Entonces, tenemos la siguiente cota inferior en la distancia cuello de botella entre los dos códigos de barras:

$$d_{bot}(\mathcal{B}, \mathcal{C}) \geq \max_i |b_i - c_i|$$

Demostraremos ahora el Lema del Emparejamiento.

Contenidos

Modificaciones Elementales

Sea

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \dots & N \\ \sigma(1) & \dots & \sigma(N) \end{pmatrix}$$

una permutación y supongamos que $\sigma(i+1) < \sigma(i)$.

Modificaciones Elementales

Sea

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \dots & N \\ \sigma(1) & \dots & \sigma(N) \end{pmatrix}$$

una permutación y supongamos que $\sigma(i+1) < \sigma(i)$. Podemos modificar σ en la permutación

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & i & i+1 & \dots & N \\ \sigma(1) & \dots & \sigma(i+1) & \sigma(i) & \dots & \sigma(N) \end{pmatrix}.$$

Modificaciones Elementales

Sea

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \dots & N \\ \sigma(1) & \dots & \sigma(N) \end{pmatrix}$$

una permutación y supongamos que $\sigma(i+1) < \sigma(i)$. Podemos modificar σ en la permutación

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & i & i+1 & \dots & N \\ \sigma(1) & \dots & \sigma(i+1) & \sigma(i) & \dots & \sigma(N) \end{pmatrix}.$$

transponiendo $\sigma(i)$ y $\sigma(i+1)$. Esto es llamado una *modificación elemental*.

Ejercicio 4.1.3

Mediante una secuencia de modificaciones elementales podemos transformar cualquier $\sigma \in S_N$ en la permutación identidad $\mathbb{1}$.

Ejercicio 4.1.3

Mediante una secuencia de modificaciones elementales podemos transformar cualquier $\sigma \in S_N$ en la permutación identidad $\mathbb{1}$. Para esto, hay que identificar $\sigma(i) = 1$ y transponerlo con elementos a su izquierda hasta colocarlo en su lugar, es decir, la posición 1.

Ejercicio 4.1.3

Mediante una secuencia de modificaciones elementales podemos transformar cualquier $\sigma \in S_N$ en la permutación identidad $\mathbb{1}$. Para esto, hay que identificar $\sigma(i) = 1$ y transponerlo con elementos a su izquierda hasta colocarlo en su lugar, es decir, la posición 1. Estas transposiciones son posibles ya que se cumple $\sigma(i) = 1 < \sigma(j)$ para toda $j < i$.

Instituto de Matemáticas UNAM

Ejercicio 4.1.3

Mediante una secuencia de modificaciones elementales podemos transformar cualquier $\sigma \in S_N$ en la permutación identidad $\mathbb{1}$. Para esto, hay que identificar $\sigma(i) = 1$ y transponerlo con elementos a su izquierda hasta colocarlo en su lugar, es decir, la posición 1. Estas transposiciones son posibles ya que se cumple $\sigma(i) = 1 < \sigma(j)$ para toda $j < i$. Del mismo modo, repetimos el procedimiento para $\sigma(i) = 2$ y así sucesivamente.

Ejercicio 4.1.3

Mediante una secuencia de modificaciones elementales podemos transformar cualquier $\sigma \in S_N$ en la permutación identidad $\mathbb{1}$. Para esto, hay que identificar $\sigma(i) = 1$ y transponerlo con elementos a su izquierda hasta colocarlo en su lugar, es decir, la posición 1. Estas transposiciones son posibles ya que se cumple $\sigma(i) = 1 < \sigma(j)$ para toda $j < i$. Del mismo modo, repetimos el procedimiento para $\sigma(i) = 2$ y así sucesivamente.
Ahora, para $\sigma \in S_N$ definimos:

$$T(\sigma) = \max_i |b_i - c_{\sigma(i)}|$$

Instituto de Matemáticas UNAM

Ejercicio 4.1.3

Mediante una secuencia de modificaciones elementales podemos transformar cualquier $\sigma \in S_N$ en la permutación identidad $\mathbb{1}$. Para esto, hay que identificar $\sigma(i) = 1$ y transponerlo con elementos a su izquierda hasta colocarlo en su lugar, es decir, la posición 1. Estas transposiciones son posibles ya que se cumple $\sigma(i) = 1 < \sigma(j)$ para toda $j < i$. Del mismo modo, repetimos el procedimiento para $\sigma(i) = 2$ y así sucesivamente.
Ahora, para $\sigma \in S_N$ definimos:

$$T(\sigma) = \max_i |b_i - c_{\sigma(i)}|$$

Queremos mostrar que la identidad $\mathbb{1}$ es el mínimo de $T(\sigma)$.

Instituto de Matemáticas UNAM

Ejercicio 4.1.3

Mediante una secuencia de modificaciones elementales podemos transformar cualquier $\sigma \in S_N$ en la permutación identidad $\mathbb{1}$. Para esto, hay que identificar $\sigma(i) = 1$ y transponerlo con elementos a su izquierda hasta colocarlo en su lugar, es decir, la posición 1. Estas transposiciones son posibles ya que se cumple $\sigma(i) = 1 < \sigma(j)$ para toda $j < i$. Del mismo modo, repetimos el procedimiento para $\sigma(i) = 2$ y así sucesivamente.
Ahora, para $\sigma \in S_N$ definimos:

$$T(\sigma) = \max_i |b_i - c_{\sigma(i)}|$$

Queremos mostrar que la identidad $\mathbb{1}$ es el mínimo de $T(\sigma)$. Para esto probaremos el caso $N = 2$

Ejercicio 4.1.4

Si $N = 2$ tenemos: $b_1 < b_2$ y $c_1 < c_2$. Además, $S_N = \{\mathbb{1}, (12)\}$.

Instituto de Matemáticas UNAM

Ejercicio 4.1.4

Si $N = 2$ tenemos: $b_1 < b_2$ y $c_1 < c_2$. Además, $S_N = \{\mathbb{1}, (12)\}$.
Hay tres posibles configuraciones para los puntos:

Instituto de Matemáticas UNAM

Ejercicio 4.1.4

Si $N = 2$ tenemos: $b_1 < b_2$ y $c_1 < c_2$. Además, $S_N = \{\mathbb{1}, (12)\}$.
Hay tres posibles configuraciones para los puntos:

1. $b_1 < b_2 < c_1 < c_2$,

Ejercicio 4.1.4

Si $N = 2$ tenemos: $b_1 < b_2$ y $c_1 < c_2$. Además, $S_N = \{\mathbb{1}, (12)\}$.
Hay tres posibles configuraciones para los puntos:

1. $b_1 < b_2 < c_1 < c_2$,
2. $b_1 < c_1 < b_2 < c_2$,

Instituto de Matemáticas UNAM

Ejercicio 4.1.4

Si $N = 2$ tenemos: $b_1 < b_2$ y $c_1 < c_2$. Además, $S_N = \{\mathbb{1}, (12)\}$.
Hay tres posibles configuraciones para los puntos:

1. $b_1 < b_2 < c_1 < c_2$,
2. $b_1 < c_1 < b_2 < c_2$,
3. $b_1 < c_1 < c_2 < b_2$.

Ejercicio 4.1.4

Si $N = 2$ tenemos: $b_1 < b_2$ y $c_1 < c_2$. Además, $S_N = \{\mathbb{1}, (12)\}$.
Hay tres posibles configuraciones para los puntos:

1. $b_1 < b_2 < c_1 < c_2$,
2. $b_1 < c_1 < b_2 < c_2$,
3. $b_1 < c_1 < c_2 < b_2$.

En cada caso, queremos comparar

$$\max\{|b_1 - c_1|,\ |b_2 - c_2|\}$$

contra

$$\max\{|b_1 - c_2|,\ |b_2 - c_1|\}$$

Instituto de Matemáticas UNAM

Ejercicio 4.1.4

En los casos (1) y (2) se cumple que

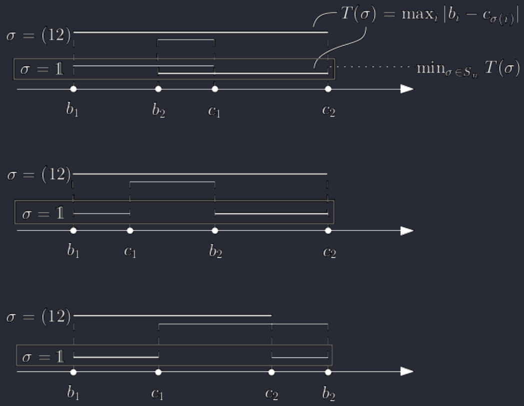
$$\max\{|b_1 - c_1|,\ |b_2 - c_2|\} < \max\{|b_1 - c_2|,\ |b_2 - c_1|\} = |b_1 - c_2|$$

Ejercicio 4.1.4

En los casos (1) y (2) se cumple que

$$\text{máx}\{|b_1 - c_1|,\ |b_2 - c_2|\} < \text{máx}\{|b_1 - c_2|,\ |b_2 - c_1|\} = |b_1 - c_2|$$

Gráficamente:



Instituto de Matemáticas UNAM

Ejercicio 4.1.4

Para el caso (3) si $\max\{|b_1 - c_2|, \ |b_2 - c_1|\} = |b_1 - c_2|$, entonces $|b_1 - c_1| < |b_1 - c_2|$.

Ejercicio 4.1.4

Para el caso (3) si $\max\{|b_1 - c_2|,\ |b_2 - c_1|\} = |b_1 - c_2|$, entonces $|b_1 - c_1| < |b_1 - c_2|$. no puede ser que $|b_2 - c_2| > |b_1 - c_2|$ ya que en tal caso $|b_2 - c_1| > |b_2 - c_2|$ contradiciendo la maximalidad de $|b_1 - c_2|$.

Ejercicio 4.1.4

Para el caso (3) si $\max\{|b_1 - c_2|,\ |b_2 - c_1|\} = |b_1 - c_2|$, entonces $|b_1 - c_1| < |b_1 - c_2|$. no puede ser que $|b_2 - c_2| > |b_1 - c_2|$ ya que en tal caso $|b_2 - c_1| > |b_2 - c_2|$ contradiciendo la maximalidad de $|b_1 - c_2|$. El caso donde $\max = |b_2 - c_1|$ es análogo.

Ejercicio 4.1.4

Para el caso (3) si $\max\{|b_1 - c_2|, |b_2 - c_1|\} = |b_1 - c_2|$, entonces $|b_1 - c_1| < |b_1 - c_2|$. no puede ser que $|b_2 - c_2| > |b_1 - c_2|$ ya que en tal caso $|b_2 - c_1| > |b_2 - c_2|$ contradiciendo la maximalidad de $|b_1 - c_2|$. El caso donde $\max = |b_2 - c_1|$ es análogo.
Por lo tanto, $T(\mathbb{1})$ es el mínimo.

Generalización a N barras

Finalmente, generalizamos para cualquier N.

Generalización a N barras

Finalmente, generalizamos para cualquier N.Sea $\sigma \in S_N$ una permutacion y σ' una modificacion elemental de σ, que cambia $\sigma(i)$ con $\sigma(i+1)$.

Generalización a N barras

Finalmente, generalizamos para cualquier N.Sea $\sigma \in S_N$ una permutacion y σ' una modificacion elemental de σ, que cambia $\sigma(i)$ con $\sigma(i+1)$. Notamos que estamos suponiendo $\sigma(i+1) < \sigma(i)$. Veamos que $T(\sigma') \leq T(\sigma)$

Generalización a N barras

Finalmente, generalizamos para cualquier N.Sea $\sigma \in S_N$ una permutacion y σ' una modificacion elemental de σ, que cambia $\sigma(i)$ con $\sigma(i+1)$. Notamos que estamos suponiendo $\sigma(i+1) < \sigma(i)$. Veamos que $T(\sigma') \leq T(\sigma)$ Podemos aislar los índices $i, i+1$ en las definiciones de $T(\sigma)$ y $T(\sigma')$

Instituto de Matemáticas UNAM

Generalización a N barras

$$T(\sigma) = \max_j \left(|b_j - c_{\sigma(j)}| \right)$$

$$= \max\left(\max_{j \neq i, i+1} \left(|b_j - c_{\sigma(j)} \right), \; |b_i - c_{\sigma(i)}|, \; |b_{i+1} - c_{\sigma(i+1)}| \right)$$

$$T(\sigma') = \max_j \left(|b_j - c_{\sigma'(j)}| \right)$$

$$\max\left(\max_{j \neq i, i+1} \left(|b_j - c_{\sigma(j)} \right), \; |b_i - c_{\sigma(i+1)}|, \; |b_{i+1} - c_{\sigma(i)}| \right)$$

Generalización a N barras

Denotamos por:

- $A = \max_{j \neq i, i+1} \left(|b_j - c_{\sigma(j)} \right)$

Generalización a N barras

Denotamos por:

- $A = \max_{j \neq i, i+1} \left(|b_j - c_{\sigma(j)} \right)$
- $B(\sigma) = \max \left(|b_i - c_{\sigma(i)}|, \ |b_{i+1} - c_{\sigma(i+1)}| \right)$

Generalización a N barras

Denotamos por:

- $A = \text{máx}_{j \neq i, i+1} \left(|b_j - c_{\sigma(j)} \right)$
- $B(\sigma) = \text{máx} \left(|b_i - c_{\sigma(i)}|, \ |b_{i+1} - c_{\sigma(i+1)}| \right)$
- $B(\sigma') = \text{máx} \left(|b_i - c_{\sigma(i+1)}|, \ |b_{i+1} - c_{\sigma(i)}| \right)$

Generalización a N barras

Denotamos por:

- $A = \max_{j \neq i, i+1} \left(|b_j - c_{\sigma(j)} \right)$
- $B(\sigma) = \max \left(|b_i - c_{\sigma(i)}|, \ |b_{i+1} - c_{\sigma(i+1)}| \right)$
- $B(\sigma') = \max \left(|b_i - c_{\sigma(i+1)}|, \ |b_{i+1} - c_{\sigma(i)}| \right)$

Por el ejercicio 4.1.4 tenemos $B(\sigma') \leq B(\sigma)$ ya que $i < i + 1$ y $\sigma(i+1) < \sigma(i)$.

Generalización a N barras

Denotamos por:

- $A = \text{máx}_{j \neq i, i+1} \left(|b_j - c_{\sigma(j)} \right)$
- $B(\sigma) = \text{máx} \left(|b_i - c_{\sigma(i)}|, \ |b_{i+1} - c_{\sigma(i+1)}| \right)$
- $B(\sigma') = \text{máx} \left(|b_i - c_{\sigma(i+1)}|, \ |b_{i+1} - c_{\sigma(i)}| \right)$

Por el ejercicio 4.1.4 tenemos $B(\sigma') \leq B(\sigma)$ ya que $i < i + 1$ y $\sigma(i+1) < \sigma(i)$.

Hay dos casos:

- $T(\sigma) = A$,

Generalización a N barras

Denotamos por:

- $A = \max_{j \neq i, i+1} \left(|b_j - c_{\sigma(j)} \right)$
- $B(\sigma) = \max \left(|b_i - c_{\sigma(i)}|, \ |b_{i+1} - c_{\sigma(i+1)}| \right)$
- $B(\sigma') = \max \left(|b_i - c_{\sigma(i+1)}|, \ |b_{i+1} - c_{\sigma(i)}| \right)$

Por el ejercicio 4.1.4 tenemos $B(\sigma') \leq B(\sigma)$ ya que $i < i + 1$ y $\sigma(i+1) < \sigma(i)$.
Hay dos casos:

- $T(\sigma) = A$, entonces $B(\sigma) \leq A$ y dado que $B(\sigma') \leq B(\sigma)$ obtenemos $T(\sigma') = A$.

Generalización a N barras

Denotamos por:

- $A = \text{máx}_{j \neq i, i+1} \left(|b_j - c_{\sigma(j)} \right)$
- $B(\sigma) = \text{máx} \left(|b_i - c_{\sigma(i)}|, \; |b_{i+1} - c_{\sigma(i+1)}| \right)$
- $B(\sigma') = \text{máx} \left(|b_i - c_{\sigma(i+1)}|, \; |b_{i+1} - c_{\sigma(i)}| \right)$

Por el ejercicio 4.1.4 tenemos $B(\sigma') \leq B(\sigma)$ ya que $i < i+1$ y $\sigma(i+1) < \sigma(i)$.

Hay dos casos:

- $T(\sigma) = A$, entonces $B(\sigma) \leq A$ y dado que $B(\sigma') \leq B(\sigma)$ obtenemos $T(\sigma') = A$.
- $T(\sigma) = B(\sigma)$,

Generalización a N barras

Denotamos por:

- $A = \max_{j \neq i, i+1} \left(|b_j - c_{\sigma(j)} \right)$
- $B(\sigma) = \max \left(|b_i - c_{\sigma(i)}|, \; |b_{i+1} - c_{\sigma(i+1)}| \right)$
- $B(\sigma') = \max \left(|b_i - c_{\sigma(i+1)}|, \; |b_{i+1} - c_{\sigma(i)}| \right)$

Por el ejercicio 4.1.4 tenemos $B(\sigma') \leq B(\sigma)$ ya que $i < i+1$ y $\sigma(i+1) < \sigma(i)$.
Hay dos casos:

- $T(\sigma) = A$, entonces $B(\sigma) \leq A$ y dado que $B(\sigma') \leq B(\sigma)$ obtenemos $T(\sigma') = A$.
- $T(\sigma) = B(\sigma)$, entonces $A \leq B(\sigma)$ y dado que $B(\sigma') \leq B(\sigma)$ obtenemos $T(\sigma') = \max \left(A, B(\sigma') \right) \leq B(\sigma) = T(\sigma)$.

Instituto de Matemáticas UNAM

Generalización a N barras

Por lo tanto, si σ es una permutación con $T(\sigma)$ mínima,

Generalización a N barras

Por lo tanto, si σ es una permutación con $T(\sigma)$ mínima, hemos visto que toda modificación elemental da una nueva permutación σ' con $T(\sigma') \leq T(\sigma)$.

Generalización a N barras

Por lo tanto, si σ es una permutación con $T(\sigma)$ mínima, hemos visto que toda modificación elemental da una nueva permutación σ' con $T(\sigma') \leq T(\sigma)$. Además, toda permutación puede transformarse en la identidad mediante un número finito de modificaciones elementales, de manera que $T(\mathbb{1}) \leq T(\sigma)$.

Generalización a N barras

Por lo tanto, si σ es una permutación con $T(\sigma)$ mínima, hemos visto que toda modificación elemental da una nueva permutación σ' con $T(\sigma') \leq T(\sigma)$. Además, toda permutación puede transformarse en la identidad mediante un número finito de modificaciones elementales, de manera que $T(\mathbb{1}) \leq T(\sigma)$. Y así, la identidad da el mínimo:

$$T(\sigma) = T(\mathbb{1}) = \max_i |b_i - c_i|$$