draculagray

Capítulo 5: Aplicaciones del complejo de Rips

5.1 Espacios $\delta-$hiperbólicos

Haydeé Peruyero

9 de noviembre de 2023

CENTRO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

Contenidos

Espacios $\delta-$hiperbólicos

Espacios métricos geodésicos

Definición Sea (Y, d) un espacio métrico. Una trayectoria geodésica entre dos puntos $x, y \in (Y, d)$ es una mapeo $\gamma : [0, l] \longrightarrow Y$ con $\gamma(0) = x$ y $\gamma(l) = y$ y con la propiedad que $\mathrm{d}(\gamma(t), \gamma(t')) = |t - t'|$ para cualesquiera $t, t' \in [0, l]$.

Espacios $\delta-$hiperbólicos

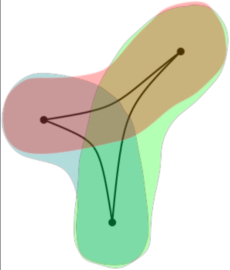
Definición Sea (Y, d) un **espacio métrico geodésico**, es decir, cualesquiera dos puntos se pueden unir por una geodésica, no necesariamente única.

Espacios $\delta-$hiperbólicos

Definición Sea (Y, d) un **espacio métrico geodésico**, es decir, cualesquiera dos puntos se pueden unir por una geodésica, no necesariamente única. El espacio Y se llama $\delta-$**hiperbólico** (con $\delta > 0$) si para cualquier triángulo geodésico, cada lado está contenido en una $\delta-$vecindad de la unión de los otros dos lados (estos triángulos se llaman δ-**delgados**).

Espacios $\delta-$hiperbólicos

Definición Sea (Y, d) un **espacio métrico geodésico**, es decir, cualesquiera dos puntos se pueden unir por una geodésica, no necesariamente única. El espacio Y se llama **$\delta-$hiperbólico** (con $\delta > 0$) si para cualquier triángulo geodésico, cada lado está contenido en una $\delta-$vecindad de la unión de los otros dos lados (estos triángulos se llaman **δ-delgados**). Decimos que Y es **hiperbólico** si es $\delta-$hiperbólico para algún $\delta > 0$.



Triángulo $\delta-$delgado

Ejemplos

- Cualquier espacio de diámetro acotado es hiperbólico.

Ejemplos

- Cualquier espacio de diámetro acotado es hiperbólico.
- El plano Euclidiano no es $\delta-$hiperbólico, para cualquier $\delta > 0$ un triángulo suficientemente grande equilátero no es $\delta-$delgado.

Ejemplos

- Cualquier espacio de diámetro acotado es hiperbólico.
- El plano Euclidiano no es $\delta-$hiperbólico, para cualquier $\delta > 0$ un triángulo suficientemente grande equilátero no es $\delta-$delgado.
- El plano hiperbólico $\mathbb{H}$, con curvatura constante negativa -1 es $\delta-$hiperbólico para algún δ.

Para un espacio métrico (X, d), un subconjunto $A \subset X$ se dice que es $r-$**denso** si para cualquier punto $x \in X$ existe un punto $a \in A$ tal que $d(x, a) > r$.

Para un espacio métrico (X, d), un subconjunto $A \subset X$ se dice que es **$r-$denso** si para cualquier punto $x \in X$ existe un punto $a \in A$ tal que $d(x, a) > r$.

Dado un $t > 0$, podemos asociarle a cualquier espacio métrico abstracto (X, d) un espacio topológico $R_t(X)$ llamado el **complejo de Vieroris-Rips**. Este se define como el subcomplejo del simplejo "full" Σ formado por los puntos de X, donde $\sigma \subset X$ es un simplejo de R_t cuando el diámetro de σ es menor a t.

Teorema 5.1.3 Sea Y un espacio métrico $\delta-$hiperbólico y sea $X \subseteq Y$ un subconjunto finito $r-$denso. Entonces para cualquier $t > 4\delta + 6r$, cada subcomplejo de $R_t(X)$ se contrae a un punto en $R_t(X)$.

Teorema 5.1.3 Sea Y un espacio métrico $\delta-$hiperbólico y sea $X \subseteq Y$ un subconjunto finito $r-$denso. Entonces para cualquier $t > 4\delta + 6r$, cada subcomplejo de $R_t(X)$ se contrae a un punto en $R_t(X)$.

Observación: Dado un espacio métrico $\delta-$hiperbólico Y, si desconocemos el valor de δ, el teorema nos suguiere una forma de obtener una cota inferior de δ. Si tenemos un subconjunto $r-$denso $X \subseteq Y$ para el cual $R_t(X)$ es no contraible, entonces $\delta \geq \frac{1}{4}(t - 6r)$. La contractibilidad podría ser más fácil de verificar que encontrar el valor de δ directamente.

Conexión con la profundidad de la frontera

Observación 5.1.4. Sea (Y, d) una variedad $\delta-$hiperbólica, localmente compacta y geodésico (uniquely geodesic?). Sea $\hat{Y} \subset Y$ un subconjunto geodésicamente convexo y compacto y sea $X \subset \hat{Y}$ $r-$denso finito en $\hat{Y}$.

Conexión con la profundidad de la frontera

Observación 5.1.4. Sea (Y, d) una variedad $\delta-$hiperbólica, localmente compacta y geodésico (uniquely geodesic?). Sea $\hat{Y} \subset Y$ un subconjunto geodésicamente convexo y compacto y sea $X \subset \hat{Y}$ $r-$denso finito en $\hat{Y}$.

Por el teorema anterior, lo que vamos a obtener en este caso es que la profundidad de la frontera del complejo de Rips correspondiente va a satisfacer $\beta(R(X)) \leq 5r + 4\delta$, entonces la barra finita más larga va a estar necesariamente contenida en $(0, 6r + 4\delta]$.

Conexión con la profundidad de la frontera

Observación 5.1.4. Sea (Y, d) una variedad $\delta-$hiperbólica, localmente compacta y geodésico (uniquely geodesic?). Sea $\hat{Y} \subset Y$ un subconjunto geodésicamente convexo y compacto y sea $X \subset \hat{Y}$ $r-$denso finito en $\hat{Y}$.

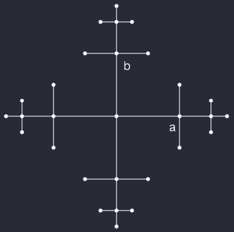
Por el teorema anterior, lo que vamos a obtener en este caso es que la profundidad de la frontera del complejo de Rips correspondiente va a satisfacer $\beta(R(X)) \leq 5r + 4\delta$, entonces la barra finita más larga va a estar necesariamente contenida en $(0, 6r + 4\delta]$.

En particular, tomando la densidad de X como $r = \delta$, se obtiene que $\beta(R(X)) \leq 10\delta$, lo que da una conexión entre la profundidad de la frontera y la geometría de los espacios $\delta-$hiperbólicos.

Grupos Hiperbólicos

Sea Γ un grupo finitamente generado y sea S un conjunto finito de generadores de Γ (simétrico). El **grafo de Cayley** $G = G(\Gamma, S) = (V, E)$ de Γ está formada como sigue:

- El conjunto de vértices es $V = \Gamma$.
- Para cada $X \in \Gamma$, $s \in S$, los vértices x, xs se unen con una arista, es decir, el conjunto de aristas es $E = \{(x, xs) : x \in \Gamma, s \in S\}$.



Grafo de Cayley de F_2.

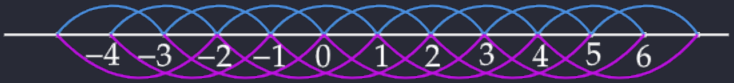
Longitud de la palabra

La **longitud de la palabra** de un elemento γ en Γ, $l_S(\gamma)$, es el entero más pequeño $n \geq 0$ para el cual existen $s_1, ..., s_n \in S \cup S^{-1}$ tal que $\gamma = s_1 ... s_n$.

Longitud de la palabra

La **longitud de la palabra** de un elemento γ en Γ, $l_S(\gamma)$, es el entero más pequeño $n \geq 0$ para el cual existen $s_1, ..., s_n \in S \cup S^{-1}$ tal que $\gamma = s_1 ... s_n$.

Ejemplo: $\mathbb{Z}$ con conjunto generador $S = \{2, 3\}$. La longitud del elemento 1 es:



$$\mathbb{Z},\ S = \{2, 3\}$$

Métrica de la palabra

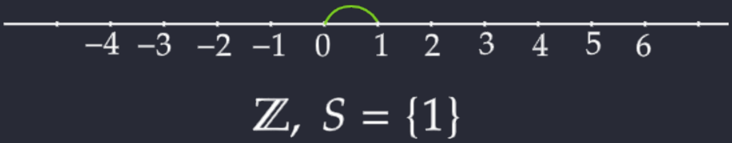
La **métrica de la palabra** d_S se define como

$$\mathrm{d}_S(\gamma_1, \gamma_2) = l_S(\gamma_1^{-1}\gamma_2).$$

Métrica de la palabra

La **métrica de la palabra** d_S se define como

$$\mathrm{d}_S(\gamma_1, \gamma_2) = l_S(\gamma_1^{-1}\gamma_2).$$



Ejemplo: $\mathbb{Z}$ con conjunto generador $S = \{1\}$.

Métrica de la palabra

La **métrica de la palabra** d_S se define como

$$\mathrm{d}_S(\gamma_1, \gamma_2) = l_S(\gamma_1^{-1}\gamma_2).$$

$\mathbb{Z},\ S = \{1\}$

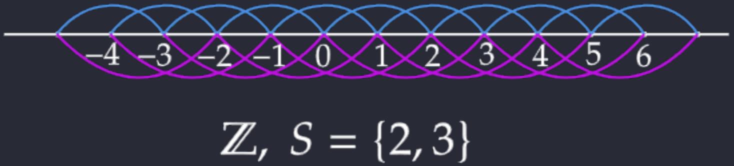
Ejemplo: $\mathbb{Z}$ con conjunto generador $S = \{1\}$. Si consideramos ahora a $\mathbb{Z}$ como conjunto generador, la distancia entre cualesquiera dos elementos es 1.

Métrica de la palabra

La **métrica de la palabra** d_S se define como

$$\mathrm{d}_S(\gamma_1, \gamma_2) = l_S(\gamma_1^{-1}\gamma_2).$$

Ejemplo: $\mathbb{Z}$ con conjunto generador $S = \{2, 3\}$. La distancia entre los elementos 1 y 4 es:



Métrica en el grafo de Cayley

La métrica de la palabra se corresponde a una métrica d en el grafo de Cayley Γ: la distancia entre dos vértices en V es la longitud de la trayectoria más corta que los une en G.

Ejemplos

- Sea $\Gamma = \mathbb{F}_k$, con $k \geq 2$ el grupo libre en el conjunto de k elementos. Tomemos el conjunto generador $S = \{s_1, s_1^{-1}, ..., s_k, s_k^{-1}\}$. Entonces el grafo de Cayley correspondiente es el árbol con raíz 1, con una rama saliendo de la raíz por cada elemento en S y cualquier otro vértice tiene grado $2k$.

Ejemplos

- Sea $\Gamma = \mathbb{F}_k$, con $k \geq 2$ el grupo libre en el conjunto de k elementos. Tomemos el conjunto generador $S = \{s_1, s_1^{-1}, ..., s_k, s_k^{-1}\}$. Entonces el grafo de Cayley correspondiente es el árbol con raíz 1, con una rama saliendo de la raíz por cada elemento en S y cualquier otro vértice tiene grado $2k$.
- Sea $\Gamma = \pi_1(\Sigma_g)$, donde Σ_g es la superficie orientable compacta de género $g \geq 2$. Tomemos como conjunto generador el conjunto con g elementos y sus inversas:

$$\Gamma = \{a_1, b_1, ..., a_g, b_g \ : \ [a_1, b_1] \cdots [a_g, b_g] = 1\}$$

  Para el caso especial del toro ($g = 1$), el grafo de Cayley de Γ es $\mathbf{Z}^2$

CENTRO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

Grupo hiperbólico

Consideremos la realización topológica de Y del grafo de Cayley G de Γ, es decir darle a cada arista del grafo una métrica que extienda d, donde cada arista tenga longitud 1.

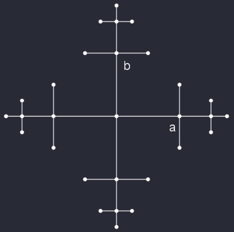
Grupo hiperbólico

Consideremos la realización topológica de Y del grafo de Cayley G de Γ, es decir darle a cada arista del grafo una métrica que extienda d, donde cada arista tenga longitud 1.

Supongamos que el espacio métrico (Y, d) es $\delta-$hiperbólico para algún $\delta > 0$, entonces decimos que el grupo Γ es **hiperbólico**.

Ejemplo

Sea $\Gamma = \mathbb{F}_k$, con $k \geq 2$ el grupo libre en el conjunto de k elementos y sea $S = \{s_1, s_1^{-1}, ..., s_k, s_k^{-1}\}$ su conjunto generador finito. Entonces el grafo de Cayley correspondiente es un árbol que no tiene triángulos, es así $\delta-$hiperbólico para cualquier $\delta > 0$, entonces el grupo libre es hiperbólico.



Grafo de Cayley de F_2.

Grupos libres de torsión

Sea Γ un grupo libre de torsión, es decir, para cualquier elemento $1 \neq g \in G$, para todo $n \in \mathbf{N}$, $g^n = 1$. Fijemos un conjunto generador finito S. Consideremos la realización geométrica (Y, d) del grafo de Cayley $G = G(\Gamma, S)$ y supongamos que es $\delta-$hiperbólico para algún $\delta > 0$, es decir el grupo Γ es hiperbólico.

Grupos libres de torsión

Sea Γ un grupo libre de torsión, es decir, para cualquier elemento $1 \neq g \in G$, para todo $n \in \mathbf{N}$, $g^n = 1$. Fijemos un conjunto generador finito S. Consideremos la realización geométrica (Y, d) del grafo de Cayley $G = G(\Gamma, S)$ y supongamos que es $\delta-$hiperbólico para algún $\delta > 0$, es decir el grupo Γ es hiperbólico.

Sea $x = \Gamma$ la colección de vértices del grafo combinatorio G. Notemos que X es $1-$denso en su realización geométrica (Y, d), entonces (por un argumento que veremos más adelante) para cualquier $t > 6 + 4\delta$, el complejo $R_t(X)$ es contraible.

Observaciones 5.1.7.

- Por definición, Γ actúa **transitívamente** en X: para cualquier $x, y \in X$, existe un elemento $g \in \Gamma$, tal que $gx = y$, donde $g = yx^{-1}$.

Observaciones 5.1.7.

- Por definición, Γ actúa **transitívamente** en X: para cualquier $x, y \in X$, existe un elemento $g \in \Gamma$, tal que $gx = y$, donde $g = yx^{-1}$. También Γ actúa **libremente** en X: dado $g, h \in \Gamma$, si $gx = hx$ para algún x, entonces $g = h$, solo hay que multiplicar por x^{-1}.

Observaciones 5.1.7.

- Por definición, Γ actúa **transitívamente** en X: para cualquier $x, y \in X$, existe un elemento $g \in \Gamma$, tal que $gx = y$, donde $g = yx^{-1}$. También Γ actúa **libremente** en X: dado $g, h \in \Gamma$, si $gx = hx$ para algún x, entonces $g = h$, solo hay que multiplicar por x^{-1}.
- Como Γ es libre de torsión, también actúa libremente en los símplices en $R_t(X)$. De lo contrario, existiría un simplejo σ y $g \neq 1$ en Γ con $g\sigma = \sigma$. Pero entonces después de un número finito de iteraciones, también algún vértice sería fijado por $g^n \neq 1$ para algún $n \in \mathbf{N}$.

CENTRO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

Observaciones 5.1.7.

- Entonces, consideremos $K = R_t(X)/\Gamma$. Para $t > 6 + 4\delta$, el espacio $R_t(X)$ es contraible, entonces es simplemente conexo, así $R_t(X)$ es el cubriente universal de K, con $\pi_1(K) = \Gamma$ y $\pi_n(K) = 1$ para todo $n \neq 1$. Estos espacios son llamados los espacio Eilenberg-MacLane $K(\Gamma, 1)$.

Observaciones 5.1.7.

- Entonces, consideremos $K = R_t(X)/\Gamma$. Para $t > 6 + 4\delta$, el espacio $R_t(X)$ es contraible, entonces es simplemente conexo, así $R_t(X)$ es el cubriente universal de K, con $\pi_1(K) = \Gamma$ y $\pi_n(K) = 1$ para todo $n \neq 1$. Estos espacios son llamados los espacio Eilenberg-MacLane $K(\Gamma, 1)$.
- Notemos que K es un complejo finito, ya que todas las bolas de radio t cercanas al $1 \in X$ consisten de solo un número finito de puntos, siendo Γ finitamente generado. Así el 2-esqueleto en K es finito, entonces Γ es finitamente presentado, es decir puede ser definido con un conjunto finito de relaciones entre los generadores, el número de 2-simplices es una cota superior para el número de relaciones.

Teorema 5.1.3

Teorema 5.1.3 Sea Y un espacio métrico $\delta-$hiperbólico y sea $X \subseteq Y$ un subconjunto finito $r-$denso. Entonces para cualquier $t > 4\delta + 6r$, cada subcomplejo de $R_t(X)$ se contrae a un punto en $R_t(X)$.

Prueba Teorema 5.1.3

Fijemos un punto base $x_0 \in X$, algún $t > 4\delta + 6r$, y un subcomplejo $L \subseteq R_t(X)$. Consideremos los siguientes dos casos:

CENTRO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

Prueba Teorema 5.1.3

Fijemos un punto base $x_0 \in X$, algún $t > 4\delta + 6r$, y un subcomplejo $L \subseteq R_t(X)$. Consideremos los siguientes dos casos:

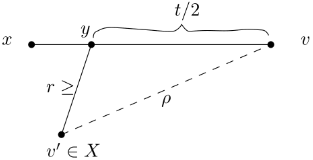
- Supongamos que $\mathrm{d}(x_0, v) < \frac{t}{2}$ para todo $v \in L$. Entonces $\mathrm{d}(v_1, v_2) < t$ para cualquier par $v_1, v_2 \in L$, entonces L está contenido en un simplejo "lleno" en $R_t(X)$, por lo tanto es contraible.

Prueba Teorema 5.1.3

Fijemos un punto base $x_0 \in X$, algún $t > 4\delta + 6r$, y un subcomplejo $L \subseteq R_t(X)$. Consideremos los siguientes dos casos:

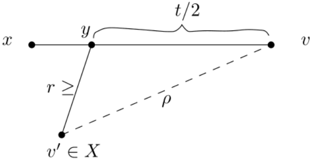
- Supongamos que $\mathrm{d}(x_0, v) < \frac{t}{2}$ para todo $v \in L$. Entonces $\mathrm{d}(v_1, v_2) < t$ para cualquier par $v_1, v_2 \in L$, entonces L está contenido en un simplejo "lleno" en $R_t(X)$, por lo tanto es contraible.
- Supongamos que existe $v \in L$ tal que $\mathrm{d}(x_0, v) \geq \frac{t}{2}$, y fijemos v como un vértice para el cual $\mathrm{d}(x_0, v)$ es maximal. Vamos a homotopar gradualmente L dentro de $R_t(X)$ hasta llegar al primer caso.

Dibujemos una geodésica $[x_0, v]$ entre x_0 y v. Tomenos $y \in [x_0, v]$ como un punto para el cual $\mathrm{d}(y, v) = \frac{t}{2}$, y escojamos $v^{'} \in X$ tal que $\mathrm{d}(v^{'}, y) \leq r$. Sea $\rho = \mathrm{d}(v, v^{'})$.



CENTRO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

Dibujemos una geodésica $[x_0, v]$ entre x_0 y v. Tomenos $y \in [x_0, v]$ como un punto para el cual $\mathrm{d}(y, v) = \frac{t}{2}$, y escojamos $v^{'} \in X$ tal que $\mathrm{d}(v^{'}, y) \leq r$. Sea $\rho = \mathrm{d}(v, v^{'})$.

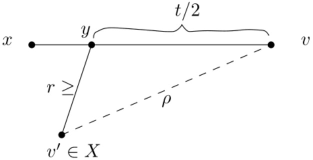


Por la desigualdad del triángulo

$$\rho \leq \frac{t}{2} + r$$

CENTRO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

Dibujemos una geodésica $[x_0, v]$ entre x_0 y v. Tomenos $y \in [x_0, v]$ como un punto para el cual $\mathrm{d}(y, v) = \frac{t}{2}$, y escojamos $v^{'} \in X$ tal que $\mathrm{d}(v^{'}, y) \leq r$. Sea $\rho = \mathrm{d}(v, v^{'})$.



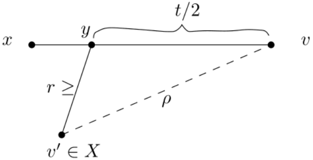
Por la desigualdad del triángulo

$$\rho \leq \frac{t}{2} + r$$

y

$$\rho \geq \frac{t}{2} - r > 2\delta + 3r - 3 = 2\delta + 2r,$$

Dibujemos una geodésica $[x_0, v]$ entre x_0 y v. Tomenos $y \in [x_0, v]$ como un punto para el cual $\mathrm{d}(y, v) = \frac{t}{2}$, y escojamos $v' \in X$ tal que $\mathrm{d}(v', y) \leq r$. Sea $\rho = \mathrm{d}(v, v')$.



Por la desigualdad del triángulo

$$\rho \leq \frac{t}{2} + r$$

y

$$\rho \geq \frac{t}{2} - r > 2\delta + 3r - 3 = 2\delta + 2r,$$

en particular

$$\rho \geq \frac{t}{2} - r > 2\delta + 2r \quad \text{y} \quad \rho < t. \tag{1}$$

Lema 5.1.8. Bajo las condiciones del Teorema 5.1.3, para cualquier $u \in L$, si $\mathrm{d}(u, v) < t$ entonces $\mathrm{d}(u, v^{'}) < t$.

Lema 5.1.8. Bajo las condiciones del Teorema 5.1.3, para cualquier $u \in L$, si $\mathrm{d}(u, v) < t$ entonces $\mathrm{d}(u, v^{'}) < t$.

Usando este lema, notemos que si $\sigma = [v, u_1, u_2, ..., u_k]$ es un simplejo en $L \subset R_t(X)$ y $\sigma^{'} = [v^{'}, u_1, u_2, ..., u_k]$ es un simplejo en $R_t(X)$, entonces como $\mathrm{d}(v, v^{'}) = \rho < t$, obtenemos que $\Sigma = [v, v^{'}, u_1, u_2, ..., u_k]$ es también un simplejo en $R_t(X)$.

CENTRO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

Lema 5.1.8. Bajo las condiciones del Teorema 5.1.3, para cualquier $u \in L$, si $\mathrm{d}(u, v) < t$ entonces $\mathrm{d}(u, v^{'}) < t$.

Usando este lema, notemos que si $\sigma = [v, u_1, u_2, ..., u_k]$ es un simplejo en $L \subset R_t(X)$ y $\sigma^{'} = [v^{'}, u_1, u_2, ..., u_k]$ es un simplejo en $R_t(X)$, entonces como $\mathrm{d}(v, v^{'}) = \rho < t$, obtenemos que $\Sigma = [v, v^{'}, u_1, u_2, ..., u_k]$ es también un simplejo en $R_t(X)$.

Denotemos por $L^{'} \subset R_t(X)$ al subcomplejo que se obtiene de L al reemplazar el vértice v con $v^{'}$. Entonces podemos homotopar L a $L^{'}$ dentro de Σ , llevando v a $v^{'}$ lo cual nos lleva cada σ a $\sigma^{'}$, y manteniendo fijas todas las caras en L que no contengan a v.

CENTRO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

Notemos que por la desigualdad del triangulo, la definición de t y la desigualdad que obtuvimos de ρ:

$$\begin{aligned} d(x_0, v') &\le d(x_0, y) + d(y, v') \\ &\le d(x_0, v) - \frac{t}{2} + r \\ &< d(x_0, v) - (2\delta + 2r) \\ &< d(x_0, v) \end{aligned}$$

CENTRO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

Notemos que por la desigualdad del triangulo, la definición de t y la desigualdad que obtuvimos de ρ:

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{d}(x_0, v^{'}) & \leq & \mathrm{d}(x_0, y) \ + \ \mathrm{d}(y, v^{'}) \\ & \leq & \mathrm{d}(x_0, v) - \frac{t}{2} + r \\ & < & \mathrm{d}(x_0, v) - (2\delta + 2r) \\ & < & \mathrm{d}(x_0, v) \end{array}$$

Así, en un número finito de pasos, reemplazando v que nos da la distancia maximal $\mathrm{d}(x_0, v)$ por $v^{'}$ como se describió anteriormente, reducimos $\mathrm{d}(x_0, v)$ por al menos $2\delta + 2r$, lo cual nos llevará al caso 1.

$\square$

CENTRO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

Prueba del Lemma 5.1.8

Lema 5.1.8. Bajo las condiciones del Teorema 5.1.3, para cualquier $u \in L$, si $\mathrm{d}(u, v) < t$ entonces $\mathrm{d}(u, v^{'}) < t$.

Prueba del Lemma 5.1.8

Lema 5.1.8. Bajo las condiciones del Teorema 5.1.3, para cualquier $u \in L$, si $\mathrm{d}(u, v) < t$ entonces $\mathrm{d}(u, v^{'}) < t$.

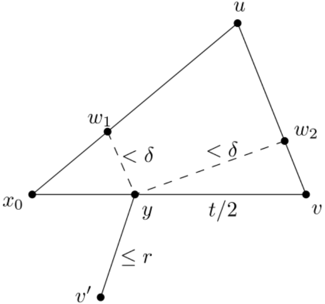
Demostración.
Supongamos que $u \in L$ satisface que $\mathrm{d}(u, v) < t$. Entonces lo que tenemos que mostrar es que $\mathrm{d}(u, v^{'}) < t$.

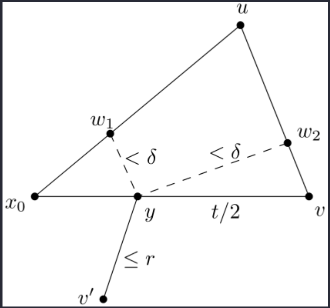
Prueba del Lemma 5.1.8

Lema 5.1.8. Bajo las condiciones del Teorema 5.1.3, para cualquier $u \in L$, si $d(u, v) < t$ entonces $d(u, v^{'}) < t$.

Demostración.
Supongamos que $u \in L$ satisface que $d(u, v) < t$. Entonces lo que tenemos que mostrar es que $d(u, v^{'}) < t$.

Consideremos el triángulo geodésico con vértices x_0, u, v, recordemos nuestra construcción:





Por la $\delta-$hiperbolicidad, y está incluido ya sea en una $\delta-$vecindad de $[x_0, u]$ o en una de $[u, v]$. Entonces, existe ya sea $w_1 \in [x_0, u]$ para el cual $\mathrm{d}(y, w_1) < \delta$ o existe $w_2 \in [v, u]$ para el cual $\mathrm{d}(y, w_2) < \delta$.

Caso 1:Existe $w_1 \in [x_0, u]$, tal que $\mathrm{d}(y, w_1) < \delta$

Tenemos que $\mathrm{d}(u, v^{'}) \leq \mathrm{d}(u, w_1) + \mathrm{d}(w_1, v^{'})$. Vamos a estimar por separado cada sumando.

Caso 1:Existe $w_1 \in [x_0, u]$, tal que $d(y, w_1) < \delta$

Tenemos que $d(u, v') \leq d(u, w_1) + d(w_1, v')$. Vamos a estimar por separado cada sumando.

Por la maximalidad de $d(x_0, v)$:

$$
\begin{aligned}
d(u, w_1) &= d(x_0, u) - d(x_0, w_1) \\
&\leq d(x_0, v) - d(x_0, w_1) \\
&\leq d(v, w_1) \\
&\leq d(v, y) + d(y, w_1) \\
&< \frac{t}{2} + \delta
\end{aligned}
$$

Caso 1:Existe $w_1 \in [x_0, u]$, tal que $d(y, w_1) < \delta$

Tenemos que $d(u, v') \leq d(u, w_1) + d(w_1, v')$. Vamos a estimar por separado cada sumando.

Por la maximalidad de $d(x_0, v)$:

$$\begin{aligned} d(u, w_1) &= d(x_0, u) - d(x_0, w_1) \\ &\leq d(x_0, v) - d(x_0, w_1) \\ &\leq d(v, w_1) \\ &\leq d(v, y) + d(y, w_1) \\ &< \tfrac{t}{2} + \delta \end{aligned}$$

Además, por definición de w_1 y v' tenemos que

$$d(w_1, v') \leq d(w_1, y) + d(y, v') < r + \delta.$$

Caso 1:Existe $w_1 \in [x_0, u]$, tal que $\mathrm{d}(y, w_1) < \delta$

Tenemos que $\mathrm{d}(u, v^{'}) \leq \mathrm{d}(u, w_1) + \mathrm{d}(w_1, v^{'})$. Vamos a estimar por separado cada sumando.

Por la maximalidad de $\mathrm{d}(x_0, v)$:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(u, w_1) &= \mathrm{d}(x_0, u) - \mathrm{d}(x_0, w_1) \\ &\leq \mathrm{d}(x_0, v) - \mathrm{d}(x_0, w_1) \\ &\leq \mathrm{d}(v, w_1) \\ &\leq \mathrm{d}(v, y) + \mathrm{d}(y, w_1) \\ &< \tfrac{t}{2} + \delta \end{aligned}$$

Además, por definición de w_1 y $v^{'}$ tenemos que

$$\mathrm{d}(w_1, v^{'}) \leq \mathrm{d}(w_1, y) + \mathrm{d}(y, v^{'}) < r + \delta.$$

Entonces, por la desigualdad 1,

$$\mathrm{d}(u, v^{'}) \leq \frac{t}{2} + \delta + r + \delta = \frac{t}{2} + (r + 2\delta) < t.$$

CENTRO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

Caso 2:Existe $w_2 \in [u, v]$, tal que $\mathrm{d}(y, w_2) < \delta$

Por la desigualdad del triángulo

$$\mathrm{d}(u, v') \leq \mathrm{d}(u, w_2) + \mathrm{d}(w_2, y) + \mathrm{d}(y, v').$$

Caso 2:Existe $w_2 \in [u, v]$, tal que $\mathrm{d}(y, w_2) < \delta$

Por la desigualdad del triángulo

$$\mathrm{d}(u, v') \leq \mathrm{d}(u, w_2) + \mathrm{d}(w_2, y) + \mathrm{d}(y, v').$$

Entonces necesitamos estimar $\mathrm{d}(u, w_2)$. Notemos que

$$\begin{aligned} \rho := \mathrm{d}(v, v') &\leq \mathrm{d}(v, w_2) + \mathrm{d}(w_2, v') \\ &\leq \mathrm{d}(v, w_2) + \mathrm{d}(w_2, y) + \mathrm{d}(y, v') \\ &< \mathrm{d}(v, w_2) + \delta + r. \end{aligned}$$

CENTRO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

Caso 2:Existe $w_2 \in [u, v]$, tal que $d(y, w_2) < \delta$

Por la desigualdad del triángulo

$$d(u, v') \leq d(u, w_2) + d(w_2, y) + d(y, v').$$

Entonces necesitamos estimar $d(u, w_2)$. Notemos que

$$\begin{aligned} \rho := d(v, v') &\leq d(v, w_2) + d(w_2, v') \\ &\leq d(v, w_2) + d(w_2, y) + d(y, v') \\ &< d(v, w_2) + \delta + r. \end{aligned}$$

Así $d(v, w_2) > \rho - (\delta + r)$. Entonces tenemos que

$$d(u, w_2) = d(u, v) - d(v, w_2) < t - \rho + (\delta + r),$$

y finalmente obtemos que

$$d(u, v') < t - \rho + 2(\delta + r) < t,$$

ya que por la desigualdad 1, $\rho > 2(\delta + r)$