Caítulo 2: Códigos de Barras

Distancia del cuello de botella y Teorema de Isometría

Haydeé Peruyero

31 de agosto de 2023

CENTRO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

Definiciones

Dado un intervalo $I = (a, b]$, denotemos por $I^{-\delta} = (a - \delta, b + \delta]$ el intervalo obtenido de I al expandirlo por δ en ambos lados.

Definiciones

Dado un intervalo $I = (a, b]$, denotemos por $I^{-\delta} = (a - \delta, b + \delta]$ el intervalo obtenido de I al expandirlo por δ en ambos lados.

Sea $\mathcal{B}$ un código de barras. Para $\varepsilon > 0$, denotemos por $\mathcal{B}_\varepsilon$ el conjunto de todas las barras de $\mathcal{B}$ de longitud mayor que ε. Estamos forzando a no considerar las barras pequeñas.

CENTRO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

Definiciones

Dado un intervalo $I = (a, b]$, denotemos por $I^{-\delta} = (a - \delta, b + \delta]$ el intervalo obtenido de I al expandirlo por δ en ambos lados.

Sea $\mathcal{B}$ un código de barras. Para $\varepsilon > 0$, denotemos por $\mathcal{B}_\varepsilon$ el conjunto de todas las barras de $\mathcal{B}$ de longitud mayor que ε. Estamos forzando a no considerar las barras pequeñas.

Un *emparejamiento (match)* entre dos multi-conjuntos finitos X, Y es una biyección $\mu : X' \to Y'$, donde $X' \subset X,\ Y' \subset Y$. En este caso, $X' = \operatorname{coim} \mu,\ Y' = \operatorname{im} \mu$, y decimos que los elementos de X' y Y' están *emparejados (matched)*.

Definiciones

Dado un intervalo $I = (a, b]$, denotemos por $I^{-\delta} = (a - \delta, b + \delta]$ el intervalo obtenido de I al expandirlo por δ en ambos lados.

Sea $\mathcal{B}$ un código de barras. Para $\varepsilon > 0$, denotemos por $\mathcal{B}_\varepsilon$ el conjunto de todas las barras de $\mathcal{B}$ de longitud mayor que ε. Estamos forzando a no considerar las barras pequeñas.

Un *emparejamiento (match)* entre dos multi-conjuntos finitos X, Y es una biyección $\mu : X' \to Y'$, donde $X' \subset X, \ Y' \subset Y$. En este caso, $X' = \operatorname{coim} \mu, \ Y' = \operatorname{im} \mu$, y decimos que los elementos de X' y Y' están *emparejados (matched)*.
Si un elemento aparece en un multi-conjunto varias veces, debemos tratar sus copias diferentes por separado ya que solo algunas de estas podrían estar emparejadas.

δ-*emparejamiento* entre códigos de barras

Definición 2.2.1: Un δ-*emparejamiento* entre dos códigos de barras $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ es un emparejamiento $\mu : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$, tal que:

1. $\mathcal{B}_{2\delta} \subset \operatorname{coim} \mu$,
2. $\mathcal{C}_{2\delta} \subset \operatorname{im} \mu$,
3. Si $\mu(I) = J$, entonces $I \subset J^{-\delta},\ J \subset I^{-\delta}$.

δ-*emparejamiento* entre códigos de barras

Definición 2.2.1: Un δ-*emparejamiento* entre dos códigos de barras $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ es un emparejamiento $\mu : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$, tal que:

1. $\mathcal{B}_{2\delta} \subset \operatorname{coim} \mu$,
2. $\mathcal{C}_{2\delta} \subset \operatorname{im} \mu$,
3. Si $\mu(I) = J$, entonces $I \subset J^{-\delta}$, $J \subset I^{-\delta}$.

Ejercicio 2.2.2 Si $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ son δ-*emparejados* y si $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ son γ-emparejados, entonces $\mathcal{B}, \mathcal{D}$ son $(\delta + \gamma)$-emparejados.

Distancia de cuello de botella

Definición 2.2.3: La *distancia de cuello de botella*, $d_{bot}(\mathcal{B}, \mathcal{C})$, entre dos códigos de barras $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ está definida como el ínfimo sobre todas las δ para los cuales existe un δ-emparejamiento entre $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$.

Distancia de cuello de botella

Definición 2.2.3: La *distancia de cuello de botella*, $d_{bot}(\mathcal{B}, \mathcal{C})$, entre dos códigos de barras $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ está definida como el ínfimo sobre todas las δ para los cuales existe un δ-emparejamiento entre $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$.

Ejercicio 2.2.4: Dos códigos de barras $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ están δ-emparejados con un δ finito si y sólo si tienen el mismo número de rayos infinitos.

Distancia de cuello de botella

Definición 2.2.3: La *distancia de cuello de botella*, $d_{bot}(\mathcal{B}, \mathcal{C})$, entre dos códigos de barras $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ está definida como el ínfimo sobre todas las δ para los cuales existe un δ-emparejamiento entre $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$.

Ejercicio 2.2.4: Dos códigos de barras $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ están δ-emparejados con un δ finito si y sólo si tienen el mismo número de rayos infinitos.

Corolario 2.2.5: La distancia de cuello de botella d_{bot} es una distancia en el espacio de códigos de barras con la misma cantidad de rayos infinitos.

Ejemplo

Consideremos los módulos de persistencia $\mathbb{F}(a,b]$ y $\mathbb{F}(c,d]$ de los intervalos ($a,b,c,d\in\mathbb{R}$) y sus códigos de barras correspondientes $\mathcal{B}=\{(a,b]\}$ y $\mathcal{C}=\{(c,d]\}$.

Ejemplo

Consideremos los módulos de persistencia $\mathbb{F}(a,b]$ y $\mathbb{F}(c,d]$ de los intervalos ($a,b,c,d \in \mathbb{R}$) y sus códigos de barras correspondientes $\mathcal{B} = \{(a,b]\}$ y $\mathcal{C} = \{(c,d]\}$.
Entonces existe ya sea un δ-emparejamiento vacío entre ellos para $\delta = \text{máx}\left(\frac{b-a}{2}, \frac{d-c}{2}\right)$ (ya que entonces las longitudes de ambos intervalos no exceden 2δ), o un $\delta-$emparejamiento $(a,b] \to (c,d]$ para $\delta = \text{máx}(|a-c|, |b-d|)$.

CENTRO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

Ejemplo

Consideremos los módulos de persistencia $\mathbb{F}(a, b]$ y $\mathbb{F}(c, d]$ de los intervalos $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$ y sus códigos de barras correspondientes $\mathcal{B} = \{(a, b]\}$ y $\mathcal{C} = \{(c, d]\}$.
Entonces existe ya sea un δ-emparejamiento vacío entre ellos para $\delta = \text{máx}\left(\frac{b-a}{2}, \frac{d-c}{2}\right)$ (ya que entonces las longitudes de ambos intervalos no exceden 2δ), o un $\delta-$emparejamiento $(a, b] \to (c, d]$ para $\delta = \text{máx}(|a - c|, |b - d|)$.
Así, $d_{bot}(\mathcal{B}, \mathcal{C}) \leq \text{mín}\left(\text{máx}\left(\frac{b-a}{2}, \frac{d-c}{2}\right), \text{máx}(|a - c|, |b - d|)\right)$.

CENTRO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

Teorema de Isometría

Teorema 2.2.8: La función $V \mapsto \mathcal{B}(V)$ es una isometría, i.e. para cualquiera dos módulos de persistencia V, W, tenemos que:

$$d_{int}(V, W) = d_{bot}(\mathcal{B}(V), \mathcal{B}(W))$$

Teorema de Isometría

Teorema 2.2.8: La función $V \mapsto \mathcal{B}(V)$ es una isometría, i.e. para cualquiera dos módulos de persistencia V, W, tenemos que:

$$d_{int}(V, W) = d_{bot}(\mathcal{B}(V), \mathcal{B}(W))$$

Nota: En el caso de que ambos $\mathcal{B}(V)$ y $\mathcal{B}(W)$ no tengan el mismo número de barras infinitas, entonces ambas distancias $d_{int}(V, W)$ y $d_{bot}(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ son infinitas por definición.

CENTRO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

Teorema de Isometría

Teorema 2.2.8: La función $V \mapsto \mathcal{B}(V)$ es una isometría, i.e. para cualquiera dos módulos de persistencia V, W, tenemos que:

$$d_{int}(V, W) = d_{bot}(\mathcal{B}(V), \mathcal{B}(W))$$

Nota: En el caso de que ambos $\mathcal{B}(V)$ y $\mathcal{B}(W)$ no tengan el mismo número de barras infinitas, entonces ambas distancias $d_{int}(V, W)$ y $d_{bot}(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ son infinitas por definición.

Ejercicio 2.2.10: Probar que para cualesquiera dos códigos de barras $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ tenemos que $d_{bot}(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = 0$ si y sólo si $\mathcal{B} = \mathcal{C}$. Deducir que $d_{int}(V, W) = 0$ si y sólo si $V = W$.