

Seminario Persistencia en Geometría 2024-I

Módulos de Persistencia Hamiltonianos

Miguel Ángel Maurin García de la Vega

30 de noviembre de 2023

Contenidos

Grupo de Difeomorfismos Hamiltonianos

Homología de Floer

Motivación e Ingredientes
Construcción

Módulos de Persistencia Hamiltonianos

Videos Leonid Polterovich

Variedades Simpléticas

Definición 7.2.1

Sea M^{2n} una variedad de dimensión par. Una *estructura simpléctica* en M^{2n} es una 2-forma diferencial no degenerada y cerrada ω ,

Variedades Simpléticas

Definición 7.2.1

Sea M^{2n} una variedad de dimensión par. Una *estructura simpléctica* en M^{2n} es una 2-forma diferencial no degenerada y cerrada ω , es decir, ω^n es una forma de volumen de M^{2n} y $d\omega = 0$. El par (M^{2n}, ω) es llamado variedad simpléctica.

Difeomorfismo Hamiltoniano

Definición 7.3.1

Sea (M, ω) una variedad simpléctica. Dada una función suave de soporte compacto $H : M \times [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$, definimos

Definición 7.3.1

Sea (M, ω) una variedad simpléctica. Dada una función suave de soporte compacto $H : M \times [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$, definimos el *campo vectorial hamiltoniano* X_H como la solución de la ecuación $\iota_{X_H}\omega = -dH$.

Definición 7.3.1

Sea (M, ω) una variedad simpléctica. Dada una función suave de soporte compacto $H : M \times [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$, definimos el *campo vectorial hamiltoniano* X_H como la solución de la ecuación $\iota_{X_H}\omega = -dH$. El flujo ϕ_H^t de X_H se denomina *flujo hamiltoniano*.

Difeomorfismo Hamiltoniano

Definición 7.3.1

Sea (M, ω) una variedad simpléctica. Dada una función suave de soporte compacto $H : M \times [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$, definimos el *campo vectorial hamiltoniano* X_H como la solución de la ecuación $\iota_{X_H}\omega = -dH$. El flujo ϕ_H^t de X_H se denomina *flujo hamiltoniano*. El mapa a tiempo 1 de este flujo, $\phi = \phi_H^1$, se llama *difeomorfismo hamiltoniano*.

Difeomorfismo Hamiltoniano

Definición 7.3.1

Sea (M, ω) una variedad simpléctica. Dada una función suave de soporte compacto $H : M \times [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$, definimos el *campo vectorial hamiltoniano* X_H como la solución de la ecuación $\iota_{X_H}\omega = -dH$. El flujo ϕ_H^t de X_H se denomina *flujo hamiltoniano*. El mapa a tiempo 1 de este flujo, $\phi = \phi_H^1$, se llama *difeomorfismo hamiltoniano*. La colección de todos los difeomorfismos hamiltonianos en (M, ω) se denota como $\text{Ham}(M, \omega)$.

Proposición 7.3.5

Sean $\phi, \psi \in \text{Ham}(M, \omega)$ difeomorfismos hamiltonianos generados por funciones hamiltonianas normalizadas dependientes del tiempo F_t y G_t , y sea ϕ^t el flujo hamiltoniano de F_t . Entonces

Proposición 7.3.5

Sean $\phi, \psi \in \text{Ham}(M, \omega)$ difeomorfismos hamiltonianos generados por funciones hamiltonianas normalizadas dependientes del tiempo F_t y G_t , y sea ϕ^t el flujo hamiltoniano de F_t . Entonces

- (1) $\phi \circ \psi$ es un difeomorfismo hamiltoniano generado por $F_t(x) + G_t((\phi^t)^{-1}(x))$;

Proposición 7.3.5

Sean $\phi, \psi \in \text{Ham}(M, \omega)$ difeomorfismos hamiltonianos generados por funciones hamiltonianas normalizadas dependientes del tiempo F_t y G_t , y sea ϕ^t el flujo hamiltoniano de F_t . Entonces

- (1) $\phi \circ \psi$ es un difeomorfismo hamiltoniano generado por $F_t(x) + G_t((\phi^t)^{-1}(x))$;
- (2) ϕ^{-1} es un difeomorfismo hamiltoniano generado por $-F_t((\phi^t)^{-1}(x))$.

Proposición 7.3.5

Sean $\phi, \psi \in \text{Ham}(M, \omega)$ difeomorfismos hamiltonianos generados por funciones hamiltonianas normalizadas dependientes del tiempo F_t y G_t , y sea ϕ^t el flujo hamiltoniano de F_t . Entonces

- (1) $\phi \circ \psi$ es un difeomorfismo hamiltoniano generado por $F_t(x) + G_t((\phi^t)^{-1}(x))$;
- (2) ϕ^{-1} es un difeomorfismo hamiltoniano generado por $-F_t((\phi^t)^{-1}(x))$.

Referencia: Leonid Polterovich, *The Geometry of the Group of Symplectic Diffeomorphisms*.

Definición 7.4.1

La métrica de Hofer en $\text{Ham}(M, \omega)$ se define como

Definición 7.4.1

La métrica de Hofer en $\text{Ham}(M, \omega)$ se define como

$$d_{\text{Hofer}}(\phi, \psi) := \inf \{\text{longitud}(\{\gamma_t\}_{t \in [0,1]}) \mid \gamma_t \text{ une } \phi \text{ con } \psi\}$$

para cualesquiera $\phi, \psi \in \text{Ham}(M, \omega)$.

Definición 7.4.1

La métrica de Hofer en $\text{Ham}(M, \omega)$ se define como

$$d_{\text{Hofer}}(\phi, \psi) := \inf \{ \text{longitud}(\{\gamma_t\}_{t \in [0,1]}) \mid \gamma_t \text{ une } \phi \text{ con } \psi \}$$

para cualesquiera $\phi, \psi \in \text{Ham}(M, \omega)$. Así, *la norma de Hofer en $\text{Ham}(M, \omega)$ se define como $\|\phi\|_{\text{Hofer}} = d_{\text{Hofer}}(\phi, \mathbb{1}_M)$.*

Dicotomía pseudo-métricas en $\text{Ham}(M, \omega)$

Ejercicio 7.4.2

d_{Hofer} es pseudo-métrica en $\text{Ham}(M, \omega)$

Dicotomía pseudo-métricas en $\text{Ham}(M, \omega)$

Ejercicio 7.4.2

d_{Hofer} es pseudo-métrica en $\text{Ham}(M, \omega)$

Ejercicio 7.4.5

Dada una variedad simpléctica cerrada (M, ω) , cualquier métrica bi-invariante en $\text{Ham}(M, \omega)$ es no degenerada ó idéntica a cero.

Contenidos

Grupo de Difeomorfismos Hamiltonianos

Homología de Floer

Motivación e Ingredientes
Construcción

Módulos de Persistencia Hamiltonianos

Videos Leonid Polterovich

Conjetura de Arnold

Floer desarrolló esta teoría de Homología en su demostración de la conjetura de Arnold:

Conjetura de Arnold

Floer desarrolló esta teoría de Homología en su demostración de la conjetura de Arnold: cada difeomorfismo hamiltoniano de M , posee al menos tantos puntos fijos como una función suave en M posee puntos críticos.

Conjetura de Arnold

Floer desarrolló esta teoría de Homología en su demostración de la conjetura de Arnold: cada difeomorfismo hamiltoniano de M , posee al menos tantos puntos fijos como una función suave en M posee puntos críticos.

Para una clase particular de hamiltonianos llamados regulares la *Conjetura Débil de Arnold* afirma que, el número de puntos fijos es al menos igual al número mínimo de puntos críticos de una función de Morse en M ,

Conjetura de Arnold

Floer desarrolló esta teoría de Homología en su demostración de la conjetura de Arnold: cada difeomorfismo hamiltoniano de M , posee al menos tantos puntos fijos como una función suave en M posee puntos críticos.

Para una clase particular de hamiltonianos llamados regulares la *Conjetura Débil de Arnold* afirma que, el número de puntos fijos es al menos igual al número mínimo de puntos críticos de una función de Morse en M , por la desigualdad de Morse, tal número también es mayor o igual a un invariante homológico de M , por ejemplo, la suma de números de Betti.

Conjetura de Arnold

Floer desarrolló esta teoría de Homología en su demostración de la conjetura de Arnold: cada difeomorfismo hamiltoniano de M , posee al menos tantos puntos fijos como una función suave en M posee puntos críticos.

Para una clase particular de hamiltonianos llamados regulares la *Conjetura Débil de Arnold* afirma que, el número de puntos fijos es al menos igual al número mínimo de puntos críticos de una función de Morse en M , por la desigualdad de Morse, tal número también es mayor o igual a un invariante homológico de M , por ejemplo, la suma de números de Betti.

Construiremos la homología de Floer con coeficientes en \mathbb{Z}_2 para (M, ω) variedad simpléctica con $\pi_2(M) = 0$,

Funcional de Acción Simpléctica

Consideramos el espacio de lazos contráctiles $x : S^1 \rightarrow M$ denotado por \mathcal{LM} .

Funcional de Acción Simpléctica

Consideramos el espacio de lazos contráctiles $x : S^1 \rightarrow M$ denotado por \mathcal{LM} . Para cualquier $x \in \mathcal{LM}$, podemos tomar un disco $D \subset M$ que abarca a x y considerar el funcional de área $\mathcal{A}(x) = - \int_D \omega$.

Funcional de Acción Simpléctica

Consideramos el espacio de lazos contráctiles $x : S^1 \rightarrow M$ denotado por \mathcal{LM} . Para cualquier $x \in \mathcal{LM}$, podemos tomar un disco $D \subset M$ que abarca a x y considerar el funcional de área $\mathcal{A}(x) = -\int_D \omega$. Como $\pi_2(M) = 0$, \mathcal{A} es una función bien definida en \mathcal{LM} .

Funcional de Acción Simpléctica

Consideramos el espacio de lazos contráctiles $x : S^1 \rightarrow M$ denotado por $\mathcal{L}M$. Para cualquier $x \in \mathcal{L}M$, podemos tomar un disco $D \subset M$ que abarca a x y considerar el funcional de área $\mathcal{A}(x) = -\int_D \omega$. Como $\pi_2(M) = 0$, \mathcal{A} es una función bien definida en $\mathcal{L}M$. Queremos investigar los puntos críticos de \mathcal{A} siguiendo la idea de la teoría de Morse. Los puntos críticos ocurren cuando la variación del funcional es cero, lo que quiere decir que los puntos críticos de \mathcal{A} son simplemente lazos constantes.

Funcional de Acción Simpléctica

Consideramos el espacio de lazos contráctiles $x : S^1 \rightarrow M$ denotado por \mathcal{LM} . Para cualquier $x \in \mathcal{LM}$, podemos tomar un disco $D \subset M$ que abarca a x y considerar el funcional de área $\mathcal{A}(x) = -\int_D \omega$. Como $\pi_2(M) = 0$, \mathcal{A} es una función bien definida en \mathcal{LM} . Queremos investigar los puntos críticos de \mathcal{A} siguiendo la idea de la teoría de Morse. Los puntos críticos ocurren cuando la variación del funcional es cero, lo que quiere decir que los puntos críticos de \mathcal{A} son simplemente lazos constantes. Perturbaremos entonces el funcional como sigue: Fijamos un hamiltoniano dependiente del tiempo $H : \mathbf{R}/\mathbb{Z} \times M \rightarrow \mathbf{R}$, y definimos el *funcional de acción simpléctica* $\mathcal{A}_H : \mathcal{LM} \rightarrow \mathbf{R}$ como

$$\mathcal{A}_H(x) = -\int_D \omega + \int_0^1 H(x) dt,$$

Puntos Críticos de \mathcal{A}_H

Primero, veamos que el tangente $T_x \mathcal{L}M$ se puede identificar como el espacio de campos vectoriales tangentes al lazo $\xi(t) \in T_{x(t)}M$.

Puntos Críticos de \mathcal{A}_H

Primero, veamos que el tangente $T_x \mathcal{L}M$ se puede identificar como el espacio de campos vectoriales tangentes al lazo $\xi(t) \in T_{x(t)}M$.

Ejercicio 8.2.1

$$d\mathcal{A}_H(\xi) = \int_0^1 dH(\xi) - \omega(\xi, \dot{\xi}(t)) dt$$

Puntos Críticos de \mathcal{A}_H

Primero, veamos que el tangente $T_x \mathcal{L}M$ se puede identificar como el espacio de campos vectoriales tangentes al lazo $\xi(t) \in T_{x(t)}M$.

Ejercicio 8.2.1

$$d\mathcal{A}_H(\xi) = \int_0^1 dH(\xi) - \omega(\xi, \dot{\xi}(t)) dt$$

Ahora, usando la relación $dH = -\omega(X_H, \cdot)$:

Puntos Críticos de \mathcal{A}_H

Primero, veamos que el tangente $T_x \mathcal{L}M$ se puede identificar como el espacio de campos vectoriales tangentes al lazo $\xi(t) \in T_{x(t)}M$.

Ejercicio 8.2.1

$$d\mathcal{A}_H(\xi) = \int_0^1 dH(\xi) - \omega(\xi, \dot{x}(t))dt$$

Ahora, usando la relación $dH = -\omega(X_H, \cdot)$:

$$d\mathcal{A}_H(\xi) = \int_0^1 \omega(\xi, X_H - \dot{x}(t))dt.$$

Puntos Críticos de \mathcal{A}_H

Primero, veamos que el tangente $T_x \mathcal{L}M$ se puede identificar como el espacio de campos vectoriales tangentes al lazo $\xi(t) \in T_{x(t)}M$.

Ejercicio 8.2.1

$$d\mathcal{A}_H(\xi) = \int_0^1 dH(\xi) - \omega(\xi, \dot{x}(t))dt$$

Ahora, usando la relación $dH = -\omega(X_H, \cdot)$:

$$d\mathcal{A}_H(\xi) = \int_0^1 \omega(\xi, X_H - \dot{x}(t))dt.$$

Por lo tanto, tenemos el siguiente resultado:

Proposición 8.2.2

(Principio de menor acción) Un elemento $x \in \mathcal{LM}$ es un punto crítico de \mathcal{A}_H si y solo si x es una órbita contractible 1-periódica del flujo hamiltoniano de H .

Proposición 8.2.2

(Principio de menor acción) Un elemento $x \in \mathcal{LM}$ es un punto crítico de \mathcal{A}_H si y solo si x es una órbita contractible 1-periódica del flujo hamiltoniano de H .

Denotamos $P := \{\text{puntos críticos de } \mathcal{A}_H\}$

Proposición 8.2.2

(Principio de menor acción) Un elemento $x \in \mathcal{LM}$ es un punto crítico de \mathcal{A}_H si y solo si x es una órbita contractible 1-periódica del flujo hamiltoniano de H .

Denotamos $P := \{\text{puntos críticos de } \mathcal{A}_H\}$

Notamos que estos puntos son precisamente los que aparecen en la conjetura de Arnold, es decir, puntos que se quedan fijos bajo el diffeomorfismo hamiltoniano ya que corresponden a órbitas 1-periódicas de su flujo hamiltoniano.

Una *estructura casi compleja* J es un campo suave de automorfismos $J_p : T_p M \rightarrow T_p M$ tal que $J_p^2 = -\mathbb{1}$.

Métrica sobre $\mathcal{L}M$

Una *estructura casi compleja* J es un campo suave de automorfismos $J_p : T_p M \rightarrow T_p M$ tal que $J_p^2 = -\mathbb{1}$. Para (M, ω) , una estructura casi compleja J se llama ω -compatible si $\omega(\cdot, J\cdot)$ define una métrica riemanniana en M .

Métrica sobre \mathcal{LM}

Una *estructura casi compleja* J es un campo suave de automorfismos $J_p : T_p M \rightarrow T_p M$ tal que $J_p^2 = -\mathbb{1}$. Para (M, ω) , una estructura casi compleja J se llama ω -compatible si $\omega(\cdot, J\cdot)$ define una métrica riemanniana en M . Denotemos por $\mathcal{J}(M, \omega)$ la colección de todas las estructuras casi complejas ω -compatibles.

Métrica sobre \mathcal{LM}

Una *estructura casi compleja* J es un campo suave de automorfismos $J_p : T_p M \rightarrow T_p M$ tal que $J_p^2 = -\mathbb{1}$. Para (M, ω) , una estructura casi compleja J se llama ω -compatible si $\omega(\cdot, J\cdot)$ define una métrica riemanniana en M . Denotemos por $\mathcal{J}(M, \omega)$ la colección de todas las estructuras casi complejas ω -compatibles. Un hecho estándar, debido a M. Gromov, es que $\mathcal{J}(M, \omega)$ es no vacío y contractible. (Ref. Dusa McDuff and Dietmar Salamon, *Introduction to Symplectic Topology*)

Métrica sobre \mathcal{LM}

Una *estructura casi compleja* J es un campo suave de automorfismos $J_p : T_p M \rightarrow T_p M$ tal que $J_p^2 = -\mathbb{1}$. Para (M, ω) , una estructura casi compleja J se llama ω -compatible si $\omega(\cdot, J\cdot)$ define una métrica riemanniana en M . Denotemos por $\mathcal{J}(M, \omega)$ la colección de todas las estructuras casi complejas ω -compatibles. Un hecho estándar, debido a M. Gromov, es que $\mathcal{J}(M, \omega)$ es no vacío y contractible. (Ref. Dusa McDuff and Dietmar Salamon, *Introduction to Symplectic Topology*)

Ahora sea $J(t)$ un camino de estructuras casi complejas ω -compatibles en (M, ω) , para cualquier $x \in \mathcal{LM}$ y campos vectoriales $\xi, \eta \in T_x \mathcal{LM}$, definimos una métrica en \mathcal{LM} por

Métrica sobre \mathcal{LM}

Una *estructura casi compleja* J es un campo suave de automorfismos $J_p : T_p M \rightarrow T_p M$ tal que $J_p^2 = -\mathbb{1}$. Para (M, ω) , una estructura casi compleja J se llama ω -compatible si $\omega(\cdot, J\cdot)$ define una métrica riemanniana en M . Denotemos por $\mathcal{J}(M, \omega)$ la colección de todas las estructuras casi complejas ω -compatibles. Un hecho estándar, debido a M. Gromov, es que $\mathcal{J}(M, \omega)$ es no vacío y contractible. (Ref. Dusa McDuff and Dietmar Salamon, *Introduction to Symplectic Topology*)

Ahora sea $J(t)$ un camino de estructuras casi complejas ω -compatibles en (M, ω) , para cualquier $x \in \mathcal{LM}$ y campos vectoriales $\xi, \eta \in T_x \mathcal{LM}$, definimos una métrica en \mathcal{LM} por

$$\langle \xi(t), \eta(t) \rangle := \int_0^1 \omega(\xi(t), J(t)\eta(t)) dt.$$

Hamiltonianos no degenerados

$x \in P$ es llamado *no degenerado* si el diferencial $\phi_* : T_{x(0)}M \rightarrow T_{x(0)}M$ del difeomorfismo hamiltoniano en el del mapa a tiempo uno $\phi = \phi_H^1$ del flujo hamiltoniano de H en el punto fijo $x(0)$ no contiene 1 en sus eigenvalores.

Hamiltonianos no degenerados

$x \in P$ es llamado *no degenerado* si el diferencial $\phi_* : T_{x(0)}M \rightarrow T_{x(0)}M$ del difeomorfismo hamiltoniano en el del mapa a tiempo uno $\phi = \phi_H^1$ del flujo hamiltoniano de H en el punto fijo $x(0)$ no contiene 1 en sus eigenvalores. Geométricamente, esto significa que la gráfica de ϕ es transversal a la diagonal $M \times M$ en $(x(0), x(0))$.

Hamiltonianos no degenerados

$x \in P$ es llamado *no degenerado* si el diferencial $\phi_* : T_{x(0)}M \rightarrow T_{x(0)}M$ del difeomorfismo hamiltoniano en el del mapa a tiempo uno $\phi = \phi_H^1$ del flujo hamiltoniano de H en el punto fijo $x(0)$ no contiene 1 en sus eigenvalores.

Geométricamente, esto significa que la gráfica de ϕ es transversal a la diagonal $M \times M$ en $(x(0), x(0))$. Decimos que H y ϕ son no degenerados si esta propiedad se cumple para todas las órbitas de P .

Hamiltonianos no degenerados

$x \in P$ es llamado *no degenerado* si el diferencial $\phi_* : T_{x(0)}M \rightarrow T_{x(0)}M$ del difeomorfismo hamiltoniano en el del mapa a tiempo uno $\phi = \phi_H^1$ del flujo hamiltoniano de H en el punto fijo $x(0)$ no contiene 1 en sus eigenvalores.

Geométricamente, esto significa que la gráfica de ϕ es transversal a la diagonal $M \times M$ en $(x(0), x(0))$. Decimos que H y ϕ son no degenerados si esta propiedad se cumple para todas las órbitas de P . La condición $x \in P$ no degenerado en términos de la linealización del flujo hamiltoniano es equivalente $x \in P$ no degenerado como punto crítico de la funcional de acción simpléctica \mathcal{A}_H .

Índice de órbita $x \in P$

Sea $x \in P$ una órbita cerrada de un difeomorfismo hamiltoniano no degenerado $\phi = \phi_H^1$.

Índice de órbita $x \in P$

Sea $x \in P$ una órbita cerrada de un difeomorfismo hamiltoniano no degenerado $\phi = \phi_H^1$. Elegimos un disco $w : D^2 \rightarrow M$ con $w|_{S^1} = x$, donde identificamos $S^1 = \partial D^2$.

Índice de órbita $x \in P$

Sea $x \in P$ una órbita cerrada de un difeomorfismo hamiltoniano no degenerado $\phi = \phi_H^1$. Elegimos un disco $w : D^2 \rightarrow M$ con $w|_{S^1} = x$, donde identificamos $S^1 = \partial D^2$. Dado que w^*TM es un haz vectorial simpléctico sobre un espacio base contractible, existe una trivialización $w^*TM \simeq D^2 \times (\mathbf{R}^{2n}, \omega_0)$.

Índice de órbita $x \in P$

Sea $x \in P$ una órbita cerrada de un difeomorfismo hamiltoniano no degenerado $\phi = \phi_H^1$. Elegimos un disco $w : D^2 \rightarrow M$ con $w|_{S^1} = x$, donde identificamos $S^1 = \partial D^2$. Dado que w^*TM es un haz vectorial simpléctico sobre un espacio base contractible, existe una trivialización $w^*TM \simeq D^2 \times (\mathbf{R}^{2n}, \omega_0)$. Bajo esta trivialización, la linealización del flujo ϕ_H^t en $x(0)$ da lugar a una trayectoria suave $\Phi : [0, 1] \rightarrow \text{Sp}(2n)$ tal que $\Phi(0) = \mathbb{1}$ y $\Phi(1)$ no contiene 1 en sus autovalores.

Índice de órbita $x \in P$

Estas son las condiciones necesarias (Sec. 8.1) para la definición del índice de Conley-Zehnder. El cual asigna un número entero a caminos de matrices simplécticas Φ .

Índice de órbita $x \in P$

Estas son las condiciones necesarias (Sec. 8.1) para la definición del índice de Conley-Zehnder. El cual asigna un número entero a caminos de matrices simplécticas Φ . Denotamos el índice de una órbita hamiltoniana 1-periódica $x \in P$ como $\text{Ind}(x) := \text{Ind}(\Phi)$. Se puede demostrar que $\text{Ind}(x)$ es independiente de la elección de trivializaciones. Además, bajo nuestra suposición $\pi_2(M) = 0$, también es independiente del disco que abarca a x .

Cilindros de Trayectorias Gradientes

Dados $x, y \in P$, podemos considerar el espacio de trayectorias gradientes de \mathcal{A}_H desde x hasta y , con respecto a la métrica que definimos para \mathcal{LM} , denotado por $\widetilde{\mathcal{M}}(x, y)$.

Cilindros de Trayectorias Gradientes

Dados $x, y \in P$, podemos considerar el espacio de trayectorias gradientes de \mathcal{A}_H desde x hasta y , con respecto a la métrica que definimos para \mathcal{LM} , denotado por $\widetilde{\mathcal{M}}(x, y)$. Cualquier trayectoria de gradiente de este tipo es en realidad un cilindro $u(s, t) : \mathbf{R} \times \mathbf{R}/\mathbb{Z} \rightarrow M$ que satisface la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial s} + J_t(u) \frac{\partial u}{\partial t} - \nabla H_t(u) = 0$$

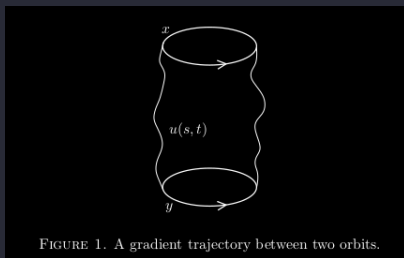
con condiciones asintóticas $\lim_{s \rightarrow \infty} u(s, t) = y(t)$ y $\lim_{s \rightarrow -\infty} u(s, t) = x(t)$.

Cilindros de Trayectorias Gradientes

Dados $x, y \in P$, podemos considerar el espacio de trayectorias gradientes de \mathcal{A}_H desde x hasta y , con respecto a la métrica que definimos para \mathcal{LM} , denotado por $\widetilde{\mathcal{M}}(x, y)$. Cualquier trayectoria de gradiente de este tipo es en realidad un cilindro $u(s, t) : \mathbf{R} \times \mathbf{R}/\mathbb{Z} \rightarrow M$ que satisface la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial s} + J_t(u) \frac{\partial u}{\partial t} - \nabla H_t(u) = 0$$

con condiciones asintóticas $\lim_{s \rightarrow \infty} u(s, t) = y(t)$ y $\lim_{s \rightarrow -\infty} u(s, t) = x(t)$.



Cilindros de Trayectorias Gradientes

Notamos que esto es una versión perturbada de la ecuación de Cauchy-Riemann, más precisamente, u es una *curva pseudo-holomorfa*. (Ref. Dusa McDuff and Dietmar Salamon, *J-holomorphic curves and symplectic topology*)

Cilindros de Trayectorias Gradientes

Notamos que esto es una versión perturbada de la ecuación de Cauchy-Riemann, más precisamente, u es una *curva pseudo-holomorfa*. (Ref. Dusa McDuff and Dietmar Salamon, *J-holomorphic curves and symplectic topology*)

Una contribución M. Gromov en su famoso artículo Pseudo holomorphic curves in symplectic manifolds es que los métodos de la geometría algebraica se pueden generalizar si se reemplazan las estructuras complejas con estructuras casi complejas ω -compatibles.

Cilindros de Trayectorias Gradientes

Notamos que esto es una versión perturbada de la ecuación de Cauchy-Riemann, más precisamente, u es una *curva pseudo-holomorfa*. (Ref. Dusa McDuff and Dietmar Salamon, *J-holomorphic curves and symplectic topology*)

Una contribución M. Gromov en su famoso artículo Pseudo holomorphic curves in symplectic manifolds es que los métodos de la geometría algebraica se pueden generalizar si se reemplazan las estructuras complejas con estructuras casi complejas ω -compatibles. Así, la teoría clásica de las curvas holomorfas se extiende a esta situación no integrable, lo cual ha revolucionado notablemente la geometría simpléctica en las últimas décadas.

Espacio Modular de Trayectorias

Notamos que existe una acción \mathbf{R} en $\widetilde{\mathcal{M}}(x, y)$ dada por por $T \cdot u(s, t) = u(s + T, t)$ para cualquier $T \in \mathbf{R}$.

Espacio Modular de Trayectorias

Notamos que existe una acción \mathbf{R} en $\widetilde{\mathcal{M}}(x, y)$ dada por por $T \cdot u(s, t) = u(s + T, t)$ para cualquier $T \in \mathbf{R}$. Luego se puede considerar el espacio de modular $\mathcal{M}(x, y) := \widetilde{\mathcal{M}}(x, y)/\mathbf{R}$.

Espacio Modular de Trayectorias

Notamos que existe una acción \mathbf{R} en $\widetilde{\mathcal{M}}(x, y)$ dada por por $T \cdot u(s, t) = u(s + T, t)$ para cualquier $T \in \mathbf{R}$. Luego se puede considerar el espacio de modular $\mathcal{M}(x, y) := \widetilde{\mathcal{M}}(x, y)/\mathbf{R}$. Un hecho no trivial es que genéricamente $\mathcal{M}(x, y)$ es una variedad compacta de dimensión finita de $\text{Ind}(x) - \text{Ind}(y) - 1$.

Espacio Modular de Trayectorias

Notamos que existe una acción \mathbf{R} en $\widetilde{\mathcal{M}}(x, y)$ dada por $T \cdot u(s, t) = u(s + T, t)$ para cualquier $T \in \mathbf{R}$. Luego se puede considerar el espacio de modular $\mathcal{M}(x, y) := \widetilde{\mathcal{M}}(x, y)/\mathbf{R}$. Un hecho no trivial es que genéricamente $\mathcal{M}(x, y)$ es una variedad compacta de dimensión finita de $\text{Ind}(x) - \text{Ind}(y) - 1$. En particular, si $\text{Ind}(x) - \text{Ind}(y) = 1$, entonces $\mathcal{M}(x, y)$ es una colección de un número finito de puntos. Definimos $n(x, y) = \#\mathcal{M}(x, y) \bmod \mathbb{Z}_2$.

Complejos de Floer

Ahora, podemos ensamblar todo lo anterior para formular la siguiente versión de Teoría de Morse, la cual llamaremos Teoría de Floer Hamiltoniana.

Complejos de Floer

Ahora, podemos ensamblar todo lo anterior para formular la siguiente versión de Teoría de Morse, la cual llamaremos Teoría de Floer Hamiltoniana.

Fijamos un grado $k \in \mathbb{Z}$, y denotamos por

$$CF_k(M, H) = \text{Span}_{\mathbb{Z}_2} \langle x \in P \mid \text{Ind}(x) = k \rangle .$$

a los complejos de Floer. Considerando al generador del grupo de difeomorfismos y las combinaciones lineales con coeficientes en \mathbb{Z}_2

Homología de Floer

Consideramos el mapa lineal $\mathbb{Z}_2 \partial_k : CF_k(M, H) \rightarrow CF_{k-1}(M, H)$ dado por

$$\partial_k x = \sum_{y \in P, \text{Ind}(y)=k-1} n(x, y)y.$$

Resulta que ∂ es una diferencial, es decir, $\partial^2 = 0$.

Homología de Floer

Consideramos el mapa lineal $\mathbb{Z}_2 \partial_k : CF_k(M, H) \rightarrow CF_{k-1}(M, H)$ dado por

$$\partial_k x = \sum_{y \in P, \text{Ind}(y)=k-1} n(x, y)y.$$

Resulta que ∂ es una diferencial, es decir, $\partial^2 = 0$.

Además, cualquier generador y del lado derecho de la igualdad tiene acción simpléctica $\mathcal{A}_H(y) < \mathcal{A}_H(x)$.

Homología de Floer

Consideramos el mapa lineal $\mathbb{Z}_2 \partial_k : CF_k(M, H) \rightarrow CF_{k-1}(M, H)$ dado por

$$\partial_k x = \sum_{y \in P, \text{Ind}(y)=k-1} n(x, y)y.$$

Resulta que ∂ es una diferencial, es decir, $\partial^2 = 0$.

Además, cualquier generador y del lado derecho de la igualdad tiene acción simpléctica $\mathcal{A}_H(y) < \mathcal{A}_H(x)$. Denotamos la homología de Floer hamiltoniana por $HF_k(H) = \frac{\ker(\partial_k)}{\text{im}(\partial_{k+1})}$ para cualquier $k \in \mathbb{Z}$.

Homología de Floer filtrada

Para cualquier $\lambda \in \mathbf{R}$ y grado $k \in \mathbb{Z}$, denotamos

$$CF_k^\lambda(M, H) = \text{Span}_{\mathbb{Z}_2} \langle x \in P \mid \text{Ind}(x) = k, \text{ y } \mathcal{A}_H(x) < \lambda \rangle.$$

Homología de Floer filtrada

Para cualquier $\lambda \in \mathbf{R}$ y grado $k \in \mathbb{Z}$, denotamos

$$CF_k^\lambda(M, H) = \text{Span}_{\mathbb{Z}_2} \langle x \in P \mid \text{Ind}(x) = k, \text{ y } \mathcal{A}_H(x) < \lambda \rangle .$$

Dado que ∂_k disminuye estrictamente la acción simpléctica, la diferencial $\partial_k : CF_k^\lambda(M, H) \rightarrow CF_{k-1}^\lambda(M, H)$ es un mapa lineal bien definido lineal.

Homología de Floer filtrada

Para cualquier $\lambda \in \mathbf{R}$ y grado $k \in \mathbb{Z}$, denotamos

$$CF_k^\lambda(M, H) = \text{Span}_{\mathbb{Z}_2} \langle x \in P \mid \text{Ind}(x) = k, \text{ y } \mathcal{A}_H(x) < \lambda \rangle.$$

Dado que ∂_k disminuye estrictamente la acción simpléctica, la diferencial $\partial_k : CF_k^\lambda(M, H) \rightarrow CF_{k-1}^\lambda(M, H)$ es un mapa lineal bien definido lineal.

Denotamos la homología de Floer hamiltoniana *filtrada* por

$$HF_k^\lambda(H) := \frac{\ker(\partial_k : CF_k^\lambda(M, H) \rightarrow CF_{k-1}^\lambda(M, H))}{\text{im}(\partial_{k+1} : CF_{k+1}^\lambda(M, H) \rightarrow CF_k^\lambda(M, H))}.$$

Morfismos entre grupos de Homología

Para cualquier $\lambda \leq \eta$, hay un mapa bien definido
 $\iota_{\lambda, \eta} : HF_k^\lambda(H) \rightarrow HF_k^\eta(H)$ inducido por la inclusión
 $CF_k^\lambda(M, H) \rightarrow CF_k^\eta(M, H)$.

Morfismos entre grupos de Homología

Para cualquier $\lambda \leq \eta$, hay un mapa bien definido
 $\iota_{\lambda, \eta} : HF_k^\lambda(H) \rightarrow HF_k^\eta(H)$ inducido por la inclusión
 $CF_k^\lambda(M, H) \rightarrow CF_k^\eta(M, H)$. de esta forma, obtenemos la propiedad
de persistencia:

Morfismos entre grupos de Homología

Para cualquier $\lambda \leq \eta$, hay un mapa bien definido $\iota_{\lambda, \eta} : HF_k^\lambda(H) \rightarrow HF_k^\eta(H)$ inducido por la inclusión $CF_k^\lambda(M, H) \rightarrow CF_k^\eta(M, H)$. de esta forma, obtenemos la propiedad de persistencia: para cualquier $\lambda \leq \eta \leq \theta$, $\iota_{\lambda, \theta} = \iota_{\eta, \theta} \circ \iota_{\lambda, \eta}$.

Morfismos entre grupos de Homología

Para cualquier $\lambda \leq \eta$, hay un mapa bien definido $\iota_{\lambda, \eta} : HF_k^\lambda(H) \rightarrow HF_k^\eta(H)$ inducido por la inclusión $CF_k^\lambda(M, H) \rightarrow CF_k^\eta(M, H)$. de esta forma, obtenemos la propiedad de persistencia: para cualquier $\lambda \leq \eta \leq \theta$, $\iota_{\lambda, \theta} = \iota_{\eta, \theta} \circ \iota_{\lambda, \eta}$. Estos serán los mapas lineales para definir un módulo de persistencia para la Teoría de Homología de Floer.

Independencia bajo Hamiltonianos Normalizados

Un Hamiltoniano $H : M \times S^1 \rightarrow \mathbf{R}$ es llamado normalizado si

$$\int_M H(\cdot, t) \omega^n = 0 \quad \forall t \in S^1 .$$

Independencia bajo Hamiltonianos Normalizados

Un Hamiltoniano $H : M \times S^1 \rightarrow \mathbf{R}$ es llamado normalizado si

$$\int_M H(\cdot, t) \omega^n = 0 \quad \forall t \in S^1 .$$

Un hecho notable debido a M. Schwarz (Ref. *On the action spectrum for closed symplectically aspherical manifolds*) es que para Hamiltonianos normalizados, la homología de Floer hamiltoniana filtrada $\mathrm{HF}_k^\lambda(H)$ solo depende de $\phi = \phi_H^1$, el mapa a tiempo 1 del flujo hamiltoniano ϕ_H^t generado por H . Denotaremos esta homología por $\mathrm{HF}_k^\lambda(\phi)$.

Contenidos

Grupo de Difeomorfismos Hamiltonianos

Homología de Floer

Motivación e Ingredientes

Construcción

Módulos de Persistencia Hamiltonianos

Videos Leonid Polterovich

Definición 8.2.3

Dada una variedad simpléctica (M, ω) con $\pi_2(M) = 0$, un difeomorfismo hamiltoniano $\phi = \phi_H^1$ generado por alguna función hamiltoniana $H : \mathbf{R}/\mathbb{Z} \times M \rightarrow \mathbf{R}$ y un grado $* \in \mathbb{Z}$,

Definición 8.2.3

Dada una variedad simpléctica (M, ω) con $\pi_2(M) = 0$, un difeomorfismo hamiltoniano $\phi = \phi_H^1$ generado por alguna función hamiltoniana $H : \mathbf{R}/\mathbb{Z} \times M \rightarrow \mathbf{R}$ y un grado $* \in \mathbb{Z}$, la colección de datos $\{\{\mathrm{HF}_*^\lambda(\phi)\}_{\lambda \in \mathbf{R}}; \{\iota_{\lambda, \eta}\}_{\lambda \leq \eta}\}$ es llamado *módulo de persistencia hamiltoniano en el grado $*$* , denotado por $\mathbb{HF}_*(\phi)$.

Definición 8.2.3

Dada una variedad simpléctica (M, ω) con $\pi_2(M) = 0$, un difeomorfismo hamiltoniano $\phi = \phi_H^1$ generado por alguna función hamiltoniana $H : \mathbf{R}/\mathbb{Z} \times M \rightarrow \mathbf{R}$ y un grado $* \in \mathbb{Z}$, la colección de datos $\{\{\mathrm{HF}_*^\lambda(\phi)\}_{\lambda \in \mathbf{R}}; \{\iota_{\lambda, \eta}\}_{\lambda \leq \eta}\}$ es llamado *módulo de persistencia hamiltoniano en el grado $*$* , denotado por $\mathrm{HF}_*(\phi)$. El código de barras de $\mathrm{HF}_*(\phi)$ se denota por $\mathcal{B}_*(\phi)$, y $\mathcal{B}(\phi) = \cup_{* \in \mathbb{Z}} \mathcal{B}_*(\phi)$.

Ejemplo 8.2.4 (i)

Homología de Morse como caso particular de Homología de Floer:

Ejemplo 8.2.4 (i)

Homología de Morse como caso particular de Homología de Floer:
Sea (M, ω) una variedad simpléctica compacta con $\pi_2(M) = 0$ y H
una función Morse autónoma C^∞ -pequeña con media cero.

Ejemplo 8.2.4 (i)

Homología de Morse como caso particular de Homología de Floer:
Sea (M, ω) una variedad simpléctica compacta con $\pi_2(M) = 0$ y H una función Morse autónoma C^∞ -pequeña con media cero. En este caso, las órbitas hamiltonianas 1-periódicas son lazos constantes y están en biyección con los puntos críticos de H .

Ejemplo 8.2.4 (i)

Homología de Morse como caso particular de Homología de Floer:
Sea (M, ω) una variedad simpléctica compacta con $\pi_2(M) = 0$ y H una función Morse autónoma C^∞ -pequeña con media cero. En este caso, las órbitas hamiltonianas 1-periódicas son lazos constantes y están en biyección con los puntos críticos de H . Además, se puede demostrar que el complejo hamiltoniano de Floer se reduce al complejo Morse estándar.

Ejemplo 8.2.4 (i)

Homología de Morse como caso particular de Homología de Floer: Sea (M, ω) una variedad simpléctica compacta con $\pi_2(M) = 0$ y H una función Morse autónoma C^∞ -pequeña con media cero. En este caso, las órbitas hamiltonianas 1-periódicas son lazos constantes y están en biyección con los puntos críticos de H . Además, se puede demostrar que el complejo hamiltoniano de Floer se reduce al complejo Morse estándar. Entonces, la barra de código $\mathcal{B}(\phi)$, donde $\phi = \phi_H^1$, es simplemente la barra de código de la homología de Morse filtrada correspondiente.

Ejemplo 8.2.4 (i)

Homología de Morse como caso particular de Homología de Floer: Sea (M, ω) una variedad simpléctica compacta con $\pi_2(M) = 0$ y H una función Morse autónoma C^∞ -pequeña con media cero. En este caso, las órbitas hamiltonianas 1-periódicas son lazos constantes y están en biyección con los puntos críticos de H . Además, se puede demostrar que el complejo hamiltoniano de Floer se reduce al complejo Morse estándar. Entonces, la barra de código $\mathcal{B}(\phi)$, donde $\phi = \phi_H^1$, es simplemente la barra de código de la homología de Morse filtrada correspondiente. Dado que M es compacta, cualquier función Morse H de este tipo tiene un máximo global $A = \max_M H$ y un mínimo global $B = \min_M H$.

Ejemplo 8.2.4 (i)

Homología de Morse como caso particular de Homología de Floer: Sea (M, ω) una variedad simpléctica compacta con $\pi_2(M) = 0$ y H una función Morse autónoma C^∞ -pequeña con media cero. En este caso, las órbitas hamiltonianas 1-periódicas son lazos constantes y están en biyección con los puntos críticos de H . Además, se puede demostrar que el complejo hamiltoniano de Floer se reduce al complejo Morse estándar. Entonces, la barra de código $\mathcal{B}(\phi)$, donde $\phi = \phi_H^1$, es simplemente la barra de código de la homología de Morse filtrada correspondiente. Dado que M es compacta, cualquier función Morse H de este tipo tiene un máximo global $A = \max_M H$ y un mínimo global $B = \min_M H$. En particular, $\mathcal{B}(\phi)$ contiene dos barras de longitud infinita $[A, \infty)$ y $[B, \infty)$.

Ejemplo 8.2.4 (ii)

Hamialtoniano idéntico a cero como caso límite:

Ejemplo 8.2.4 (ii)

Hamialtoniano idéntico a cero como caso límite:

$H \equiv 0$ genera el difeomorfismo hamiltoniano $\phi_H^1 = \mathbb{1}_M$, es decir, el mapa identidad en M .

Ejemplo 8.2.4 (ii)

Hamialtoniano idéntico a cero como caso límite:

$H \equiv 0$ genera el difeomorfismo hamiltoniano $\phi_H^1 = \mathbb{1}_M$, es decir, el mapa identidad en M . Dado que H es degenerado, no podemos aplicar directamente la teoría desarrollada anteriormente, consideraremos este caso como el límite de funciones Morse arbitrariamente pequeñas H_i .

Ejemplo 8.2.4 (ii)

Hamialtoniano idéntico a cero como caso límite:

$H \equiv 0$ genera el difeomorfismo hamiltoniano $\phi_H^1 = \mathbb{1}_M$, es decir, el mapa identidad en M . Dado que H es degenerado, no podemos aplicar directamente la teoría desarrollada anteriormente, consideraremos este caso como el límite de funciones Morse arbitrariamente pequeñas H_i . Definimos código de barras $\mathcal{B}(\mathbb{1}_M)$ como el límite de $\mathcal{B}(\phi_{H_i}^1)$ en la distancia cuello de botella d_{bot} .

Ejemplo 8.2.4 (ii)

Hamialtoniano idéntico a cero como caso límite:

$H \equiv 0$ genera el difeomorfismo hamiltoniano $\phi_H^1 = \mathbb{1}_M$, es decir, el mapa identidad en M . Dado que H es degenerado, no podemos aplicar directamente la teoría desarrollada anteriormente, consideraremos este caso como el límite de funciones Morse arbitrariamente pequeñas H_i . Definimos código de barras $\mathcal{B}(\mathbb{1}_M)$ como el límite de $\mathcal{B}(\phi_{H_i}^1)$ en la distancia cuello de botella d_{bot} . Así, $\mathcal{B}(\mathbb{1}_M)$ contiene solo la barra $[0, \infty)$ con multiplicidad $\sum_i b_i(M)$, el número total de Betti de M .

Ejemplo 8.2.4 (iii)

Conjetura de Arnold:

Ejemplo 8.2.4 (iii)

Conjetura de Arnold:

Para λ suficientemente grande (es decir, el espacio límite del módulo de persistencia), la homología de Floer $HF_{\lambda}^*(\phi)$ no depende de la elección de un difeomorfismo hamiltoniano no degenerado ϕ .

Ejemplo 8.2.4 (iii)

Conjetura de Arnold:

Para λ suficientemente grande (es decir, el espacio límite del módulo de persistencia), la homología de Floer $HF_{\lambda}^*(\phi)$ no depende de la elección de un difeomorfismo hamiltoniano no degenerado ϕ . Por el ejemplo (i) anterior, coincide con la homología de la variedad, y por lo tanto, el número de puntos fijos de ϕ no es menor al número total de Betti de M .

Ejemplo 8.2.4 (iii)

Conjetura de Arnold:

Para λ suficientemente grande (es decir, el espacio límite del módulo de persistencia), la homología de Floer $HF_{\lambda}^*(\phi)$ no depende de la elección de un difeomorfismo hamiltoniano no degenerado ϕ . Por el ejemplo (i) anterior, coincide con la homología de la variedad, y por lo tanto, el número de puntos fijos de ϕ no es menor al número total de Betti de M . Esta es una de las afirmaciones de la conjetura de Arnold establecida por A. Floer (Ref. *Symplectic fixed points and holomorphic spheres*) para variedades simplécticas cerradas con $\pi_2 = 0$.

Ejemplo 8.2.4 (iii)

Conjetura de Arnold:

Para λ suficientemente grande (es decir, el espacio límite del módulo de persistencia), la homología de Floer $HF_{\lambda}^*(\phi)$ no depende de la elección de un difeomorfismo hamiltoniano no degenerado ϕ . Por el ejemplo (i) anterior, coincide con la homología de la variedad, y por lo tanto, el número de puntos fijos de ϕ no es menor al número total de Betti de M . Esta es una de las afirmaciones de la conjetura de Arnold establecida por A. Floer (Ref. *Symplectic fixed points and holomorphic spheres*) para variedades simplécticas cerradas con $\pi_2 = 0$. En la actualidad, gracias a los esfuerzos de numerosos investigadores, la conjetura está confirmada para todas las variedades simplécticas cerradas, ver, por ejemplo, el artículo John Pardon, *An algebraic approach to virtual fundamental cycles on moduli spaces of pseudo-holomorphic curves*, y las referencias incluidas en él.

Teorema de Estabilidad Dinámica

Teorema 8.2.5

Sea (M, ω) una variedad simpléctica con $\pi_2(M) = 0$. Para cualquier par de difeomorfismos hamiltonianos no degenerados $\phi, \psi \in \text{Ham}(M, \omega)$, $d_{\text{bot}}(\mathcal{B}(\phi), \mathcal{B}(\psi)) \leq d_{\text{Hofer}}(\phi, \psi)$.

Teorema de Estabilidad Dinámica

Teorema 8.2.5

Sea (M, ω) una variedad simpléctica con $\pi_2(M) = 0$. Para cualquier par de difeomorfismos hamiltonianos no degenerados $\phi, \psi \in \text{Ham}(M, \omega)$, $d_{\text{bot}}(\mathcal{B}(\phi), \mathcal{B}(\psi)) \leq d_{\text{Hofer}}(\phi, \psi)$.

Corolario 8.2.6

Sea (M, ω) una variedad simpléctica compacta con $\pi_2(M) = 0$. Si un difeomorfismo hamiltoniano $\phi \in \text{Ham}(M, \omega)$ no es la identidad $\mathbb{1}_M$, entonces $d(\phi, \mathbb{1}_M) > 0$.

Contenidos

Grupo de Difeomorfismos Hamiltonianos

Homología de Floer

Motivación e Ingredientes
Construcción

Módulos de Persistencia Hamiltonianos

Videos Leonid Polterovich

Leonid Polterovich: Persistence modules and Hamiltonian diffeomorphisms

[Part 1](#) [Part 2](#) [Part 3](#) [Part 4](#)