

Parte II: Capítulo 9

Módulos de Persistencia Simpléticos

(Symplectic persistence modules)

Eduardo Velázquez

7 de Diciembre de 2023

Variedades de Liouville

Definición 9.1.1

Una variedad de Liouville (M, ω, X) es una variedad simpléctica con un campo vectorial fijo X que genera un flujo X^t tal que

1. $\omega = d\lambda$, $\lambda = \iota_X \omega$
2. $\exists P \subset M$ hipersuperficie cerrada y conexa, transversa a X , y que acota un dominio abierto U de M con cerradura compacta y $M = U \sqcup \bigcup_{t \geq 0} X^t(P)$.

Llamamos a X *campo vectorial de Liouville* y a X^t , *Flujo de Liouville*.

Cualquier hipersuperficie P y cualquier dominio U de este tipo se denomina *en forma de estrella*.

Cualquier variedad de Liouville se puede descomponer como

$$M = M_{*,P} \sqcup \text{Core}_P(M)$$

donde $M_{*,P} = \bigcup_{t \geq 0} X^t(P)$ y $\text{Core}_P(M) = \bigcap_{t < 0} X^t(U)$, con U un abierto acotado por P . Esta descomposición es independiente de P .

Ejemplos de Variedades de Liouville

1. $(M, \omega_{std}, X_{rad}) = \left(\mathbb{R}^{2n}, \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i, \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} (q_i \frac{\partial}{\partial q_i} + p_i \frac{\partial}{\partial p_i}) \right)$

con descomposición: $\mathbb{R}^{2n} = (\mathbb{R}^{2n} \setminus \{0\}) \sqcup \{0\}$.

2. $(N, \omega_{cam}, X_{can}) = \left(T^*N, \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i, \sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial}{\partial p_i} \right)$.

con descomposición: $T^*N = (T^*N \setminus \{0_N\}) \sqcup \{0_N\}$,

donde 0_N es la sección cero de T^*N . Un ejemplo de un dominio estrella es el codisco abierto

$$U_g^*N := \{(q, p) \in T^*N \mid |p|_{g_q^*} < 1\}$$

asociado a una métrica riemanniana g en N

Definición 9.1.6

Dada una variedad de Liouville (M, ω, X) , sea $\lambda = \iota_X \omega$. Un simplectomorfismo φ de una variedad de Liouville se denomina *exacto* si $\varphi^* \lambda - \lambda = dF$ para alguna función F en M . Los simplectomorfismos compactamente soportados forman un grupo que denotaremos como $\text{Sympex}(M, \omega, X)$, a veces lo abreviaremos como $\text{Sympex}(M)$.

Dada una variedad de Liouville (M, ω, X) y una hipersuperficie P en forma de estrella, cualquier punto $m \in M_{*,P}$ en la descomposición puede identificarse con un punto $(x, u) \in P \times \mathbb{R}_+$.

En particular, $P = \{u = 1\}$, y el dominio estrella $U \subset M$ que acota a P es $\{u < 1\}$.

Por convención usaremos: $\text{Core}(M) = \{u = 0\}$.

Diremos que una hipersuperficie P en forma de estrella de una variedad de Liouville (M, ω, X) es **no-degenerada**, si su **espectro de acción**,

$$\text{Spec} := \left\{ \int_{\gamma} \iota_X \omega|_P \mid \gamma \in C(P) \right\}, \quad (1)$$

es un subconjunto discreto de \mathbb{R} .

Cualquier dominio en forma de estrella U tal que $\partial \bar{U}$ cumpla (1) es un *dominio con forma de estrella no-degenerado*.

Definición 9.2.1

Un conjunto parcialmente ordenado (I, \preceq) está **dirigido hacia abajo** si para cualquier $i, j \in I$, existe $k \in I$ tal que $k \preceq i$ y $k \preceq j$.

Un *sistema inverso de un espacio vectorial sobre \mathbb{Z}_2* es un functor de un conjunto parcialmente ordenado hacia abajo (I, \preceq) a la categoría de espacios vectoriales. Expl. A asigna a cada $i \in I$ un espacio vectorial A_i sobre \mathbb{Z}_2 y σ asigna a cada par $i, j \in I$, tal que $i \preceq j$, un mapeo \mathbb{Z}_2 -lineal $\sigma_{ij} : A_i \rightarrow A_j$, tal que $\sigma_{ik} = \sigma_{jk} \circ \sigma_{ij}$ y $\sigma_{ii} = \mathbb{1}_{A_i}$.

Definición 9.2.2

Sea (A, σ) un sistema inverso de un espacio vectorial sobre \mathbb{Z}_2 . El *límite inverso* de (A, σ) se define como

$$\varprojlim_{i \in I} A := \{ \{x_i\}_{i \in I} \in \prod_{i \in I} A_i \mid i \preceq j \Rightarrow \sigma_{ij}(x_i) = x_j \}$$

Sea U un dominio estrella de una variedad de Liouville (M, ω, X) y $\mathcal{H}(U)$ el conjunto de todas las funciones autónomas hamiltonianas en M con soporte en U .

Definamos un orden parcial en $\mathcal{H}(U)$:

$$H \preceq G \quad \text{si} \quad H(x, u) \geq G(x, u) \quad \text{si} \quad (x, u) \in M$$

Si además podemos considerar una homotopía monótona de H a G :

$$\{H_s\}_{s \in [0,1]} \quad \text{tal que} \quad H_0 = H, \quad H_1 = G, \quad \partial_s H_s \leq 0$$

Esta homotopía induce un \mathbb{Z}_2 mapeo lineal

$$\sigma_{H,G} : HF_*^{a,\infty}(H) \rightarrow HF_*^{(a,\infty)}(G) \quad \text{p.c.} \quad a > 0$$

$HF_*^{(a,\infty)}(H)$ - homología hamiltoniana de Floer de la función H con coeficientes en \mathbb{Z}_2 y ventana de acción (a, ∞) .

Definición 9.2.4

Sea U un dominio estrella no degenerado de una variedad de Liouville (M, ω, X) , Para cualquier $a > 0$, la *homología filtrada simpléctica de U* se define como:

$$SH_*^{(a, \infty)}(U) := \varprojlim_{H \in \mathcal{H}(U)} HF_*^{(a, \infty)}(H),$$

con las siguientes propiedades

(Ejercicio 9.2.5)

1. Para cualquier $a > 0$ y grado $*$ $\in \mathbb{Z}$, $SH_*^{(a, \infty)}$ es de dimensión finita sobre \mathbb{Z}_2 .
2. Para cualquier $a \leq b$, el morfismo canónico $HF_*^{(a, \infty)} \rightarrow HF_*^{(b, \infty)}$ induce un mapeo \mathbb{Z}_2 lineal

$$\theta_{a,b} : SH_*^{(a, \infty)}(U) \rightarrow SH_*^{(b, \infty)}(U).$$

Sea U un dominio estrella no degenerado de una variedad de Liouville (M, ω, X) . Para cualquier $a > 0$, sea

$$SH_*^{\ln a}(U) \rightarrow SH_*^{(a, \infty)}(U).$$

Se sigue que

$$\mathbb{S}H_*(U) = \left(\{SH_*^{\ln a}(U)\}_{a < 0}, \{\theta_{a,b} : SH_*^{\ln b}(U)\}_{a \leq b} \right).$$

Definición 9.2.6

El módulo de persistencia de tipo $\mathbb{S}H_*(U)$ localmente finito se llama *módulo de persistencia simpléctico de U* .

Sea X un campo de Liouville en una variedad de Liouville (M, ω, X) , podemos reescalar el dominio estrella U de la siguiente forma:

Para cualquier $C > 0$, sea $CU := \phi^{\ln C}(U)$. $t \in \mathbb{R}$ y grado $*$ $\in \mathbb{Z}$, el difeomorfismo

$$r_C^U : SH_*^t(U) \rightarrow SH_*^{t+\ln C}(CU),$$

resulta en un corrimiento del código de barras $\mathcal{B}_*(U)$

Ejemplos de $\mathcal{SH}_*(U)$

Ejemplo 9.3.1

1) Sea $N \geq 1$ un entero y $E(1, N, \dots, N)$ el elipsoide en $\mathbb{R}^{2n}(= \mathbb{C})$ definido como

$$E(1, N, \dots, N) = \left\{ (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid \pi \left(\frac{|z_1|^2}{1}, \frac{|z_2|^2}{N}, \dots, \frac{|z_n|^2}{N} \right) < 1 \right\},$$

- ▶ Su espectro de acción es igual a \mathbb{Z} .
- ▶ $E(1, N, \dots, N)$ es un dominio estrella de la variedad de Liouville $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_{std}, X_{rad})$.
- ▶ (Sec. 9.7) $\mathcal{SH}_*^{(a, \infty)} E(1, N, \dots, N) = \mathbb{Z}_2$ cuando $* = -2\lceil -a \rceil - 2(n-1)\lceil \frac{-a}{N} \rceil$, y las homologías de los demás órdenes se anulan.
- ▶ $\mathcal{SH}_0(E(1, N, \dots, N)) = \mathbb{Z}_2(-\infty, 0)$.
donde $\mathbb{Z}_2(-\infty, 0)$ denota al módulo de intervalo $(-\infty, 0)$ sobre \mathbb{Z}_2

Ejemplo 9.3.2 I

2) Sea N una variedad cerrada y g una métrica Riemanniana. Consideremos el codisco unitario U_g^*N sobre N . Para una elección genérica de la métrica, U_g^*N es un dominio no degenerado en forma de estrella de $(T^*N, \omega_{can}, X_{can})$. Fijemos una clase de homotopía α distinta de cero del espacio libre de lazos. Consideremos el módulo de persistencia simpléctico $\mathbb{SH}_*(U_g^*N)_\alpha$ en la clase α .

De acuerdo con el **Teorema 3.1** de Weber¹, Para cualquier $a > 0$, se tiene un isomorfismo entre los espacios vectoriales

$$SH_*^{(a, \infty)}(U_g^* N)_\alpha \simeq H_*(\Lambda_\alpha^a N),$$

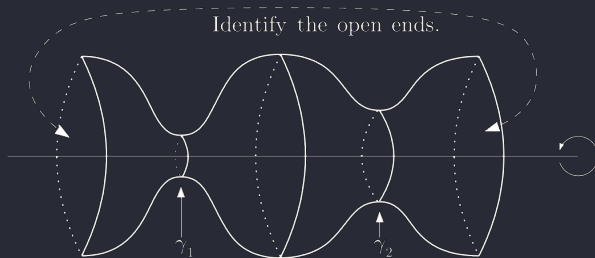
donde $\Lambda_\alpha^a N$ es el espacio de lazos en N en la clase α de longitud $< a$. Más aún, esto se extiende a un isomorfismo de los módulos de persistencia $\mathbb{S}H_*(U_g^* N)_*$ y $V(N, g)_\alpha$ (ver ejemplo 2.4.2).

¹Weber, Joa. *Noncontractible periodic orbits in cotangent bundles and Floer homology*, 2004.

Ejemplo 9.3.2 II

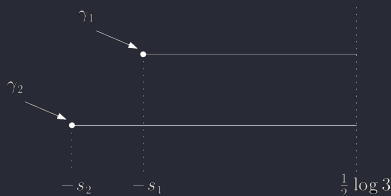
3) Sea $N = \mathbb{T}^2$ la representación del toro como la superficie de revolución de una función perfil con dos mínimos locales, y extremos abiertos identificados. Dotemos a N con la métrica g inducida por \mathbb{R}^3 . Los mínimos de la función perfil generan dos geodésicas simples γ_1 y γ_2 ; análogamente los máximos locales generan dos geodésicas Γ y Γ' .

Asuma que N se comprime en γ_1 y γ_2 de manera que las longitudes de Γ y Γ' son > 2 , y las longitudes γ_1, γ_2 son < 1 . Sea $s_i = -\ln \text{length}_g(\gamma_i)$, y $s = (s_1, s_2)$ con $s_1 \geq s_2$.



Eligiendo adecuadamente la función perfil, podemos obtener que γ_1 , γ_2 y Γ_1 , Γ_2 son las únicas² geodésicas en su clase de homotopía que denotaremos por α .

Consideremos el módulo truncado de persistencia $V(N, g_s)$ de grado uno y rayo $(-\infty, \ln(3/2))$ (definición en Ejercicio 5.3.4). El código de barras $\mathcal{B}^{(s)}$ de este módulo truncado se ve como el de la siguiente figura:



²Stojisavljević V., Zhang J. *Persistence modules, symplectic Banach-Mazur distance and Riemannian metrics*, p. 34.

9.4 Distancia Simpléctica de Banach-Mazur

Objetivo: Definir una pseudométrica entre dominios estrella.

Sea \mathcal{S}^{2n} el conjunto de todos los dominios estrella de una variedad de Liouville (M, ω, X) . Sea $C > 0$ y $\phi \in \text{Symp}_{\text{ex}}(M)$, a partir del Flujo de Liouville definamos el rescalamiento:

$$\phi(C) = X^{\ln C} \circ \phi \circ X^{-\ln C} \in \text{Symp}_{\text{ex}}(M)$$

Sean $U, V \in \mathcal{S}^{2n}$, un ϕ morfismo de Liouville de U a V es un symplectomorfismo exacto y compactamente soportado ϕ de M tal que $\phi(\bar{U}) \subset M$. Dicho morfismo se denota: $U \xrightarrow{\phi} V$

Distancia Simpléctica de Banach-Mazur

Definición 9.4.1

Sean $U, V \in \mathcal{S}^{2n}$, diremos que un número real $C > 1$ es (U, V) -admisibile si existe un par de simplectomorfismos $\phi, \psi \in \text{Symp}_{\text{ex}}(M)$ tal que

$$\frac{1}{C}U \xrightarrow{\phi} V \xrightarrow{\psi} CU$$

y existe una isotopía $\{\Phi_s\}_{s \in [0,1]}$ de morfismos de Liouville de $\frac{1}{C}U$ a CU tal que $\Phi_0 = \mathbb{1}$ y $\Phi_1 = \psi \circ \phi$.

Definición 9.4.2

Definimos la distancia de Banach-Mazur entre U y V como

$$d_{SBM}(U, V) = \inf\{\ln C > 0 \mid C \text{ es } (U, V)\text{-admisibile y } (V, U)\text{-admisibile}\}.$$

Teorema 9.4.7 (Estabilidad Topológica)

Sean $U, V \in \mathcal{S}^{2n}$ y sean $\mathcal{B}_*(U)$ y $\mathcal{B}_*(V)$ los códigos de barras de los módulos de persistencia $\mathbb{SH}_*(U)$ y $\mathbb{SH}_*(V)$, respectivamente. Entonces

$$d_{bot}(\mathcal{B}_*(U), \mathcal{B}_*(V)) \leq d_{SBM}(U, V).$$

Demostración.

(Sec. 9.6)



Ejercicio 9.4.4

d_{sbm} es una pseudométrica en \mathcal{S}^{2n} .

Ejercicio 9.4.5

Si $U, V \in \mathcal{S}^{2n}$ son exactamente symplectomórficos, $d_{SBM}(U, V) = 0$. Una pregunta abierta interesante es si d_{SBM} es una métrica 'genuina' en el espacio cociente $\mathcal{S}^{2n}/\text{Symp}_{ex}(M)$.

Ejercicio 9.4.6

Muestre que $d_{SBM}(U, CU) = |\ln C|$ para cualquier $U \in \mathcal{S}^{2n}$ y $C > 0$. Esto implica que, como espacio pseudo-métrico, $(\mathcal{S}^{2n}, d_{SBM})$ tiene diámetro infinito.

Ejercicio 9.4.8

Consideremos los elipsoides $E(1, 8)$ y $E(2, 4)$. Observe que ambos tienen el mismo volumen. Por el ejercicio 9.3.1, tenemos

$$\mathcal{B}_0(E(1, 8)) = (-\infty, 0) \quad \text{y} \quad \mathcal{B}_0(E(2, 4)) = (-\infty, \ln 2).$$

El Teorema 9.4.7 implica que

$$d_{SBM}(E(1, 8), E(2, 4)) \geq \ln 2.$$

9.5 Propiedades Functoriales

Teorema 9.5.1

Sea (M, ω, X) una variedad de Liouville, y sean U, V dominios estrella no-degenerados de (M, ω, X) .

1. Todo morfismo de Liouville ϕ de U a V induce un mapeo \mathbb{Z}_2 -lineal $f_\phi^a : SH_*^{(a, \infty)}(V) \rightarrow SH_*^{(a, \infty)}(U)$, $\forall a > 0$ y grado $* \in \mathbb{Z}$. Denotemos por θ^U y θ^V a los mapeos de estructuras de los módulos de persistencia U y V respectivamente. Entonces para $0 < a \leq b$ y grado $* \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{array}{ccc} SH_*^{(a, \infty)}(V) & \xrightarrow{f_\phi^a} & SH_*^{(a, \infty)}(U) \\ \theta_{a,b}^V \downarrow & & \downarrow \theta_{a,b}^U \\ SH_*^{(b, \infty)}(V) & \xrightarrow{f_\phi^b} & SH_*^{(b, \infty)}(U) \end{array}$$

Si W es un dominio estrella no-degenerado tal que

$U \xhookrightarrow{\phi} V \xhookrightarrow{\psi} W$, entonces $\forall a > 0$, $f_{\psi \circ \phi}^a = f_\phi^a \circ f_\psi^a$ (Ejemplo 9.5.4).

- 2 Sea r_C el isomorfismo de rescalamiento, sea θ el mapeo de estructura de los módulos de persistencia; y sea $i = f_{\mathbb{1}}$ el morfismo inducido por el mapeo identidad $\mathbb{1}$ en M , visto como un morfismo de Liouville de U a CU . Entonces los siguientes diagramas conmutan para cualquier $a > 0$ y grado $* \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{array}{ccc}
 \mathrm{SH}_*^{(a,\infty)}(U) & \xrightarrow[r_C]{\cong} & \mathrm{SH}_*^{(Ca,\infty)}(CU) \\
 & \searrow \theta_{a,Ca} & \swarrow i^{Ca} \\
 & \mathrm{SH}_*^{(Ca,\infty)}(U) & \\
 \\
 \mathrm{SH}_*^{(a,\infty)}(U) & \xrightarrow[r_C]{\cong} & \mathrm{SH}_*^{(Ca,\infty)}(CU) \\
 & \swarrow i^a & \searrow \theta_{a,Ca} \\
 & \mathrm{SH}_*^{(a,\infty)}(CU) &
 \end{array}$$

- 3 Supongamos que $\bar{U} \subset V$, y ϕ es un morfismo de Liouville de U a V . Si ϕ es isotópico a $\mathbb{1}$ a través de morfismos de Liouville de U a V , entonces $f_\phi = i$, donde f_ϕ es el morfismo inducido por ϕ e i es el morfismo inducido por la identidad.
- 4 Supongamos ϕ es un morfismo de Liouville de $\frac{1}{C}U$ a V , además r_C es el isomorfismo de rescalamiento y $\phi(C)$ es el escalamiento obtenido a partir del Flujo de Liouville. Entonces

$$f_{\phi(C)}^{Ca} \circ r_C^V = r_C^{\frac{1}{C}U} \circ f_\phi^a.$$

Demostración Teorema 9.5.1

(sketch)

Sea ϕ un morfismo de Liouville de U a V .

(1) Se sigue de que ϕ induce un morfismo de espacios de funciones $\phi_* : \mathcal{H}(U) \rightarrow \mathcal{H}(V)$ dado por el push-forward de ϕ .

Note que para cualquier $F \in \mathcal{H}(U)$ existe una $G \in \mathcal{H}(V)$ tal que $G \geq \phi_*(F)$, por lo que ϕ_* induce un morfismo

$\tau_F : SH_*^{(a,\infty)}(V) \rightarrow HF_*^{(a,\infty)}(F)$ que se obtiene con la composición

$$SH_*^{(a,\infty)}(V) \xrightarrow{\pi_G} HF_*^{(a,\infty)}(G) \xrightarrow{\sigma_{G,\phi_*(F)}} HF_*^{(a,\infty)}(\phi_* F) \simeq HF_*^{(a,\infty)}(F).$$

donde π_G es la proyección canónica, y $\sigma_{G,\phi_*(F)}$ es el morfismo inducido por una homotopía monótona de G a $\phi_*(F)$. Se compueba que si $H \geq F \in \mathcal{H}(U)$, $\sigma_{H,F} \circ \tau_H = \tau_F$. Por el ejercicio 9.2.3 existe un morfismo de $SH_*^{(a,\infty)}(V)$ a $SH_*^{(a,\infty)}(U)$.

Las pruebas de (2) y (3) usan ideas similares; ambas pueden confirmarse usando el Lema 4.15 in [46] estudiando cuidadosamente el espacio moduli de trayectorias de conexión.³

³[46] Gutt, J. *The positive equivariant symplectic homology as an invariant for some contact manifolds*, 2017.

Ejemplo 9.5.3

Ejemplo 9.5.3

Sea $0 < 1 < R$, denotemos $B_1 := B^{2n}(1)$ y $B_2 := B^{2n}(R)$.

Notemos que $B_2 = RB_1$. Para toda $a > 0$ y grado $* \in \mathbb{Z}$, sea θ_a el morfismo de estructura $\theta_{a/R,a} : SH_*^{(a/R,\infty)}(B_1) \rightarrow SH_*^{(a,\infty)}(B_1)$, y por i^a al morfismo $f_{\underline{1}}^a : SH_*^{(a/R,\infty)}(B_2) \rightarrow SH_*^{(a,\infty)}(B_1)$ inducido por el mapeo identidad. Entonces el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc}
 SH_*^{(a/R,\infty)}(B_1) & \xrightarrow[r_R]{\simeq} & SH_*^{(a,\infty)}(B_2) \\
 \searrow \theta_a & & \swarrow i^a \\
 & SH_*^{(a,\infty)}(B_1) &
 \end{array}$$

Se sigue del Teorema 9.5.1 (2)

$$\begin{array}{ccc}
 SH_*^{(a,\infty)}(U) & \xrightarrow[r_C]{\simeq} & SH_*^{(Ca,\infty)}(CU) \\
 \searrow \theta_{a,Ca} & & \swarrow i^{Ca} \\
 & SH_*^{(Ca,\infty)}(U) &
 \end{array}$$

Ejemplo 9.5.4

Ejemplo 9.5.4

Sea (M, ω, X) una variedad de Liouville, y U, V dos dominios estrella no degenerados de (M, ω, X) . Supongamos que $C > 1$ es (U, V) -admisble, entonces por definición de (U, V) -admisble

9.4.1, existen $\phi, \psi \in \text{Symp}_{\text{ex}}(M)$ tales que $\frac{1}{C}U \xrightarrow{\phi} V \xrightarrow{\psi} CU$ y $\psi \circ \phi$ isotópica a $\mathbb{1}$ mediante morfismos de Liouville de $\frac{1}{C}U$ a CU .

Por el Teorema 9.5.1 (1), para cualquier $a > 0$ el sig. diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccccc} \text{SH}_*^{(a, \infty)}(CU) & \xrightarrow{f_\psi^a} & \text{SH}_*^{(a, \infty)}(V) & \xrightarrow{f_\phi^a} & \text{SH}_*^{(a, \infty)}(U/C) \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & f_{\psi \circ \phi}^a & & & \end{array}$$

Ejemplo 9.5.4

Además, por el Teorema 9.5.1 (3), $f_{\psi \circ \phi}^a = i_{CU, U/C}^a$, donde $i_{CU, U/C}$ es el morfismo inducido por la identidad en M (vista como morfismo de U/C a CU). Por el Teorema 9.5.1 (2), tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathrm{SH}_*^{(a, \infty)}(CU) & \xrightarrow{i_{CU, U/C}^a} & \mathrm{SH}_*^{(a, \infty)}(U/C) & & \\
 \uparrow \cong \scriptstyle r_C^U & \searrow \scriptstyle i_{CU, U}^a & \nearrow \scriptstyle i_{U, U/C}^a & & \downarrow \cong \scriptstyle r_C^{U/C} \\
 & & \mathrm{SH}_*^{(a, \infty)}(U) & & \\
 \mathrm{SH}_*^{(a/C, \infty)}(U) & \nearrow \scriptstyle \theta_{a/C, a}^U & \searrow \scriptstyle \theta_{a, Ca}^U & & \\
 & \xrightarrow{\theta_{a/C, Ca}^U} & \mathrm{SH}_*^{(Ca, \infty)}(U) & &
 \end{array}$$

Ejemplo 9.5.4

Sean

$$F_a := f_{\psi}^{Ca} \circ r_C^U : SH_*^{(a,\infty)}(U) \rightarrow SH_*^{(Ca,\infty)}(V),$$

$$G_a := r_C^{U/C} \circ f_{\phi}^a : SH_*^{(a,\infty)}(V) \rightarrow SH_*^{(Ca,\infty)}(U).$$

Por el diagrama anterior tenemos

$$G_a \circ F_{a/C} = \theta_{a/C, Ca}^U \quad (77)$$

Pasando a escala logarítmica concluimos que $\psi \circ \phi$, la cual es isotópica a $\mathbb{1}$ a través de los morfismos de Liouville de $\frac{1}{C}U$ a CU , induce los mapeos de estructura $\theta_{a-\ln C, a+\ln C}$ de los módulos de persistencia $SH_*(U)$.

9.6 Aplicaciones

Teorema 9.6.1 (No-compresión de Gromov)

Sea B^{2n} una bola y $E(R, R_+, \dots, R_+)$ un elipsoide de \mathbb{R}^{2n} , para el que asumimos $R_+ \geq R$. Si existe un morfismo de Liouville de $B^{2n}(r)$ a $E(R, R_+, \dots, R_+)$, entonces $R \geq r$.

Demostración.

S.P.G. supongamos $r = 1$. Denotemos por ϕ a un symplectomorfismo exacto compactamente soportado en \mathbb{R}^{2n} tal que $\phi(\overline{B^{2n}(1)}) \subset E(R, R_+, \dots, R_+)$. Elijamos $R_\bullet > 0$ suficientemente grande de manera que $B^{2n}(R)$ contenga al soporte de ϕ así como al elipsoide $E(R, R_+, \dots, R_+)$. Denotemos $B_1 := B^{2n}(1)$ y $B_2 := B^{2n}(R_\bullet)$. Entonces,

$$\phi(B_1) \subset E(R, R_+, \dots, R_+) \subset B_2 = \phi(B_2).$$

Teorema 9.6.1 (cont. Dem.)

Por (1) y (2) del Teorema 9.5.1 y el Ejemplo 9.5.3, $\forall a > 0$ y grado $*$ $\in \mathbb{Z}$, tenemos que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathrm{SH}_*^{(a,\infty)}(\phi(B_2)) & \longrightarrow & \mathrm{SH}_*^{(a,\infty)}(E(R, R_{\dagger}, \dots, R_{\dagger})) & \xrightarrow{i^a} & \mathrm{SH}_*^{(a,\infty)}(\phi(B_1)) \\
 \downarrow \simeq & & & & \downarrow \simeq \\
 \mathrm{SH}_*^{(a,\infty)}(B_2) & \xrightarrow{i_{B_2, B_1}^a} & & & \mathrm{SH}_*^{(a,\infty)}(B_1) \\
 & \searrow \simeq & & \nearrow \theta_{a/R_{\bullet}, a} & \\
 & & \mathrm{SH}_*^{(a/R_{\bullet}, \infty)}(B_1) & &
 \end{array}$$

$r_{1/R_{\bullet}}^{B_2}$

donde i e i_{B_2, B_1} son los morfismos inducidos por el mapeo identidad en \mathbb{R}^{2n} , vistos como morfismos de Liouville de $\phi(B_1)$ a $E(R, R_{\dagger}, \dots, R_{\dagger})$ y de B_1 a B_2 , respectivamente.

Teorema 9.6.1 (cont. Dem.)

Para $* = 0$, por el Ejemplo 9.3.1 y reescalando,

$$\mathrm{SH}_0(E(R, R_{\dagger}, \dots, R_{\dagger})) = \mathbb{Z}_2(-\infty, \ln R)$$

y

$$\mathrm{SH}_0(B_1) = \mathbb{Z}_2(-\infty, 0)$$

Para cualquier $a < R_{\bullet}$, $\theta_{a/R_{\bullet}, a} \neq 0 \Rightarrow i_{B_2, B_1} \neq 0$. Entonces para $* = 0$, $i : \mathbb{Z}_2(-\infty, \ln R) \rightarrow \mathbb{Z}_2(-\infty, 0)$ es diferente de zero. Por el ejercicio 1.2.8, $\ln R \geq 0$, es decir, $R \geq 1$.

Demostración Teorema 9.4.7

Por la definición 9.4.2, para toda $\epsilon > 0$, existe C tal que

$$1 < C \leq e^{d_{SBM}(U,V)+\epsilon},$$

y morfismos $\frac{1}{C}U \xrightarrow{\phi} V \xrightarrow{\psi} CU$, tales que $\psi \circ \phi$ es isotópica a la identidad $\mathbb{1}$ a través de los morfismos de Liouville de $\frac{1}{C}U$ a CU . Afirmamos que los mapeos F_a y G_a definidos anteriormente, definen un $\ln C$ -entrelazamiento entre $\mathbb{SH}_*(U)$ y $\mathbb{SH}_*(V)$. Recordando que $G_a \circ F_{a/C} = \theta_{a/C, Ca}^U$. Basta mostrar que

$$F_a \circ G_{a/C} = \theta_{a/C, Ca}^V.$$

Por el punto (4) del teorema 9.5.1, tenemos que

$$F_a := f_{\psi}^{Ca} \circ r_C^U = r_C^{V/C} \circ f_{1/C}^a \quad \text{y} \quad G_a := r_C^{U/C} \circ f_{\phi}^a = f_{\phi(C)}^{Ca} \circ r_C^V.$$

Intercambiando U por V , y ϕ por $\psi(1/C)$ en el isomorfismo $V/C \xrightarrow{\psi(1/C)} U \xrightarrow{\phi(C)} V$ y la ec. 77 derivamos la afirmación anterior. A partir del Teorema de Isometría, tenemos

$$d_{bot}(\mathcal{B}_*(U), \mathcal{B}_*(V)) = d_{int}(\mathbb{S}H_*(U), \mathbb{S}H_*(V)) \leq \ln C \leq d_{SBM}(U, V) + \epsilon.$$

El teorema se sigue tomando el límite $\epsilon \rightarrow 0$.

9.7 Cálculos

Cálculo de la homología simpl. filtrada de $E(1, N, \dots, N)$

Principio 1. Es difícil analizar el límite de un sistema inverso directamente, por lo cual consideraremos:

Proposición 9.7.1

Sea (A, σ) un sistema inverso de espacios vectoriales sobre \mathbb{Z}_2 . Una sucesión $\{i_v\}_{v \in \mathbb{N}}$ se denomina *exhaustivamente hacia abajo* (downward exhausting) para (A, σ) si para cada $i_{v+1} \preceq i_v$, $\sigma_{i_{v+1}} : A_{i_{v+1}} \rightarrow A_{i_v}$ es un isomorfismo, y $\forall i \in I$ existe $v \in \mathbb{N}$ tal que $i_v \preceq i$. Entonces, para cualquier sucesión exhaustivamente hacia abajo $\{i_v\}_{v \in \mathbb{N}}$ para (A, σ) , la proyección canónica

$$\pi_{i_v} : \varprojlim_{i \in I} A \rightarrow A_{i_v}$$

es un isomorfismo.

9.7 Cálculos

Cálculo de la homología simpl. filtrada de $E(1, N, \dots, N)$

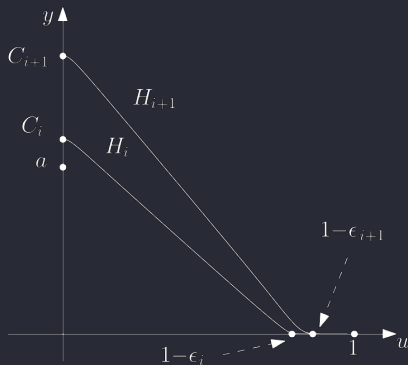
Principio 2. Sean $H, G \in \mathcal{H}(U)$ con $H \preceq G$, sabemos que una homotopía de H a G induce un \mathbb{Z}_2 mapeo linear $\sigma_{H,G} : HF_*^{(a,\infty)}(H) \rightarrow HF_*^{(a,\infty)}(G)$ para cualquier $a > 0$. En general, $\sigma_{H,G}$ no es inyectiva ni supreyectiva, excepto en las siguientes condiciones:

Proposición 9.7.2

Sea U un dominio estrella no degenerado de una variedad de Liouville (M, ω, X) , y sean $H \preceq G \in \mathcal{H}(U)$ y $a > 0$. Supongamos que existe una homotopía monótona $\{H_s\}_{s \in [0,1]}$ de H a G tal que H_s no tiene 1-órbitas periódicas con acción igual a a . Entonces $\sigma_{H,G} : HF_*^{(a,\infty)}(H) \rightarrow HF_*^{(a,\infty)}(G)$ es un isomorfismo.

Sea U un dominio estrella no degenerado de $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_{std}, X_{rad})$. Para cualquier $a > 0$, consideremos una sucesión $h_a(U) = \{H_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ con las siguientes propiedades:

- ▶ $H_{i+1} \geq H_i$
- ▶ $H_i(0) > a$ y $H_i(0) = C_i$ con $C_i \rightarrow \infty$ cuando $i \rightarrow \infty$
- ▶ $H_i \equiv 0$ para $u \geq 1 - \epsilon_i$ cuando $\lim_{i \rightarrow \infty} \epsilon_i = 0$



Como C_i diverge, para toda $H \in \mathcal{H}(U)$ existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $H_i \preceq H$ p.a. $H_i \in h_a(U)$. Más aún, por el Principio 2, existe una homotopía monótona de H_{i+1} a H_i tal que

$$\sigma_{H_{i+1}, H_i} : HF_*^{(a, \infty)}(H_{i+1}) \rightarrow HF_*^{(a, \infty)}(H_i)$$

es un isomorfismo. En otras palabras, para cualquier $a > 0$, $h_a(U)$ resulta en una sucesión exhaustivamente hacia abajo para el sistema inverso $(HF_*^{(a, \infty)}(H), \sigma_{H, G})$.

Por la Proposición 9.7.1 (Principio 1) se tiene la siguiente fórmula para el cálculo de la homología simpléctica filtrada.

$$SH_*^{(a, \infty)}(U) = HF_*^{(a, \infty)}(H_i),$$

para cualquier $H_i \in h_a(U)$.

Sea $U = E(1, N, \dots, N)$, consideremos cada punto $z \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ como el par (x, u) , donde

$$u(z) = \pi \left(\frac{|z_1|^2}{1} + \frac{|z_2|^2}{N} + \dots + \frac{|z_n|^2}{N} \right) \quad \text{y} \quad x(z) = \frac{z}{\sqrt{u(z)}}.$$

Sea $a > 0$,

$$H_a(x, u) = \frac{-a - \delta}{1 - \epsilon} u + (a + \delta)$$

p.a. $\epsilon > 0$ y $H_a(x, u)$ lisa en $u = 1 - \epsilon$. El valor de δ es tan pequeño que el intervalo $(a, \frac{a+\delta}{1-\epsilon})$ no contiene valores de acciones simplécticas de órbitas Hamiltonianas 1-periódicas de $H_a(x, u)$. Por lo cual, en la ventana de acción (a, ∞) , sólo existen órbitas 1-periódicas de $H_a(x, u)$ y el máximo global se alcanza en $u = 0$. Por tanto la homología de filtrada de Floer es un espacio vectorial sobre \mathbb{Z}_2 generado por este punto fijo.

Con una elección apropiada de ϵ y δ en la vecindad de $u = 0$,

$$\begin{aligned} H_a(z_1, \dots, z_n) &= \frac{-a - \delta}{1 - \epsilon} \left(\pi \frac{|z_1|^2}{1} + \frac{|z_2|^2}{N} + \dots + \frac{|z_n|^2}{N} \right) + (a + \delta) \\ &= \pi \lceil -a \rceil |z_1|^2 + \sum_{i=2}^n \pi \lceil \frac{-a}{N} \rceil |z_i|^2 + \sum_{i=1}^n \pi \alpha_i |z_i|^2 \\ &\quad + (a + \delta), \end{aligned}$$

para cada $\alpha_i \in (-1, 0)$. Por la sección 8.1

$$\text{Ind}(0) = -2 \lceil -a \rceil - 2(n-1) \lceil \frac{-a}{N} \rceil.$$

Por tanto se concluye que,

$$SH_*^{(a, \infty)}(E(1, N, \dots, N)) = \mathbb{Z}_2$$

cuando $*$ = $-2 \lceil -a \rceil - 2(n-1) \lceil \frac{-a}{N} \rceil$.

