Parte I: Capítulo 4

4.3 Función de multiplicidad

(The Multiplicity Function)

4.4.1 Representationes en módulos de persistencia: Desarrollo teórico

(Representations on persistence modules - Theoretical development)

Eduardo Velázquez

26 de octubre de 2023

CIMAT

4.3 Función de Multiplicidad

Sea $\mathcal{B}$ un código de barras, e $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo finito.

Denotemos $m(\mathcal{B}, I)$ al número de barras en $\mathcal{B}$ que contienen a I.

Además, sea $I = (a, b]$ y $c \leq \frac{b-a}{2}$ denotemos $I^c = (a + c, b - c]$.

Definición 4.3.2
Se define la **Función de multiplicidad** como

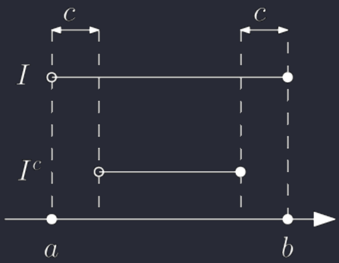
$$\mu_k(\mathcal{B}) = \sup\{c \,|\, \exists \, \text{un intervalo finito I de longitud} > 4c, \\ \text{tal que } m(\mathcal{B}, I) = m(\mathcal{B}, I^{2c}) = k\}\,.$$

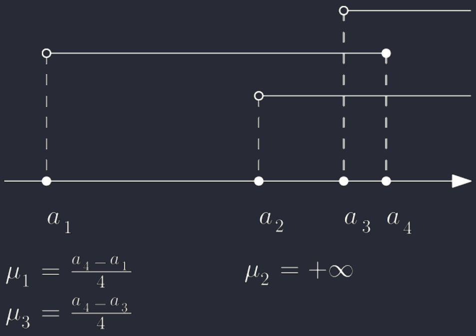
En caso de que no exista dicha c, $\mu_k(\mathcal{B}) = 0$.

Dado $k \in \mathbb{N}$, $\mu_k(\mathcal{B}) = sup(\{c\})$

$c \in \mathbb{R}$ tal que:

- Podemos encontrar un intervalo I tal que $\frac{\text{Longitud}_I}{4} > c$.
- I está contenido en $\mathcal{B}$
- $m(\mathcal{B}, I) = k$
- $m(\mathcal{B}, I^{2c} = (a + 2c, b - 2c]\,) = k$





En palabras, dado $k \in \mathbb{N}$, la función de multiplicidad busca la máxima ventana, i.e. un intervalo I de longitud $> 4c$ en $\mathbb{R}$, tal que arriba de ella y del intervalo acortado I^{2c} existan exactamente k barras.

CIMAT

Ejercicio 4.3.1

Sean $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ dos códigos de barras tales que

$$d_{bot}\,(\mathcal{B},\,\mathcal{C}) < c\,,$$

además, sea I un intervalo de longitud $> 4c$ tal que $m(\mathcal{B}, I) = m(\mathcal{B}, I^{2c}) = m_0$. Entonces

$$m(\mathcal{C}, I^{c}) = m_0\,.$$

Por el ejercicio 4.3.1, podemos deducir que para dos códigos de barras $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ y cualquier $k \in \mathbb{N}$,

$$|\mu_k(\mathcal{B}) - \mu_k(\mathcal{C})| \leq d_{bot}(\mathcal{B}, \mathcal{C})\,. \tag{16}$$

Una aplicación de (16) es la siguiente.

CIMAT

Definición 4.3.3

- Decimos que un módulo de persistencia (V, π) sobre $\mathbb{R}$ admite una **estructura compleja** J si existe un isomorfismo $J : V \to V$ que satisface $J^2 = -\mathbb{1}$.
- En tal caso, llamaremos a (V, π) **módulo de persistencia complejo**.
- Se sigue además que $dim V_t$ es par $\forall t \in \mathbb{R}$.

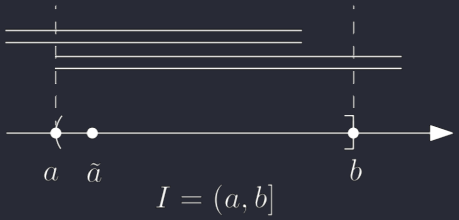
CIMAT

Afirmación

(4.3.4) Sea $\mathcal{B}$ el código de barra asociado a un módulo de persistencia (V, π) que admite una estructura compleja, entonces $m(\mathcal{B}, I)$ es par para cualquier intervalo I. En particular, se sigue que para un módulo de persistencia complejo (V, π), obtenemos $\mu_k(\mathcal{B}(V)) = 0$ para todo entero impar $k \in \mathbb{N}$.

Demostración.

Sea $I = (a, b]$ y $\tilde{a} \in \mathbb{R}$ suficientemente cerca de a tal que $a < \tilde{a} < b$.



Cualquier barra que contenga a I contribuye en $+1$ a $dim(\operatorname{im} \pi_{\tilde{a},b})$, es decir, $m(\mathcal{B}, I) = dim(\operatorname{im} \pi_{\tilde{a},b})$.

$$
\begin{tikzcd}
V_{\tilde{a}} \arrow[r, "\pi_{\tilde{a},b}"] \arrow[d, "J_{\tilde{a}}"'] & V_b \arrow[d, "J_b"] \\
V_{\tilde{a}} \arrow[r, "\pi_{\tilde{a},b}"'] & V_b
\end{tikzcd}
$$

Como $\pi_{\tilde{a},b} J_{\tilde{a}} = J_b \pi_{\tilde{a},b}$, entonces $J_b(\mathrm{im}\,\pi_{\tilde{a},b)} \subset \mathrm{im}\pi_{\tilde{a},b}$, es decir, $J' := J_b|_{\mathrm{im}\,\pi_{\tilde{a},b}}$ también satisface $(J')^2 = -\mathbb{1} \Rightarrow dim(\mathrm{im}\pi_{\bar{a},b})$ es par.

$\square$

Sea $\mu_{odd}(\mathcal{B}) := \max_{j\,\mathrm{odd}} \mu_j(\mathcal{B})$.

Afirmación

Sea (V,π) un módulo de persistencia. Entonces para todo módulo (W,θ) que admita una estructura compleja, la distancia de entrelazamiento entre ellos está acotada por abajo:

$$d_{int}\left((V,\pi),\,(W,\theta)\right) \geq \mu_{odd}\left(\mathcal{B}(V,\pi)\right)\ .$$

Implicaciones:

- La distancia de entrelazamiento entre cualquier módulo de persistencia (V,π)y la colección de módulos complejos está acotada por abajo por $\mu_{odd}\left(\mathcal{B}(V,\pi)\right)$.
- En el caso de que $\mu_{odd}\left(\mathcal{B}(V,\pi)\right) > 0$, obtenemos una restricción para aproximar un módulo de persistencia (V,π) dado por un módulo de persistencia complejo.

Demostración.
Por el Teorema de Isometría, la desigualdad (16) y la Afirmación 4.3.4, si (W, θ) es un módulo complejo, entonces

$$\begin{aligned} d_{int}\left((V,\pi),\,(W,\theta)\right) &= d_{bot}\left(\mathcal{B}(V,\pi),\,\mathcal{B}(W,\theta)\right) \\ &\geq \left|\mu_{odd}(\mathcal{B}(V,\pi)) - \cancel{\mu_{odd}(\mathcal{B}(W,\theta))}\right| \end{aligned}$$

$\square$

Recordemos que la representación de un grupo G es un par (V, ρ), donde V es un espacio vectorial de dimensión finita y ρ es un homomorfismo de G a $\mathrm{GL}(V)$. Adaptaremos este concepto a los módulos de persistencia.

Definición 4.4.2

Una **representación de persistencia de un grupo** G es un par $((V, \pi), \rho)$, donde (V, π) es un módulo de persistencia y ρ es un homomorfismo de G al grupo de automorfismos de persistencia de (V, π). Una **subrepresentación de persistencia** $((W, \pi), \rho)$ de $((V, \pi), \rho)$ es un submódulo de persistencia (W, π) de (V, π) tal que $\forall t \in \mathbb{R}$, W_t es invariante bajo $\rho(g)_t$ para cualquier $g \in G$.

Ejemplo 1

Un módulo de persistencia con involución (pmi), denotado $((V, \pi), A)$, es una representación de persistencia de $G = \mathbb{Z}_2$. En otras palabras, A es un homomorfismo de G al grupo de persistencia de automorfismos de (V, π) tal que para cualquier $t \in \mathbb{R}$, $A_t^2 = \mathbb{1}$.

Definición 4.3.3

Sean $((V, \pi), \rho^V)$ y $((W, \theta), \rho^W)$ dos representaciones de persistencia del grupo G. Un **morfismo G-persistente** $\mathfrak{f} : ((V, \pi), \rho^V) \to ((W, \theta), \rho^W)$ es una $\mathbb{R}$-familia de morfismos persistentes G-equivariantes $f_t : V_t \to W_t$, $t \in \mathbb{R}$.

Dado un G-morfismo persistente $\mathfrak{f} : ((V, \pi), \rho^V) \to ((W, \theta), \rho^W)$, se puede considerar

$$\ker(\mathfrak{f}) = \{v \in V_t | f_t(v) = 0\}_{t \in \mathbb{R}}$$

$$y$$

$$\operatorname{im}(\mathfrak{f}) = \{f_t(v) \in W_t | v \in V_t\}_{t \in \mathbb{R}} \; .$$

Ejercicio 4.4.4

Demuestre que $(\ker(\mathfrak{f}), \rho^V)$ es una subrepresentación persistente de $((V, \pi), \rho^V)$ y, análogamente, $(\operatorname{im}(\mathfrak{f}), \rho^W)$ de $((W, \theta), \rho^W)$.

Ejemplo 4.4.5

Sea $((V, \pi), \rho^V)$ una representación persistente sobre $\mathbb{C}$ del grupo finito $\mathbb{Z}_p = \{0, 1, \cdots, p-1\}$. Sea ξ la p-ésima raíz de la unidad. Consideremos $(L_\xi)_t = \ker(\rho(1)_t - \xi \mathbb{1}_{V_t})$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Entonces $((\{(L_\xi)_t\}_{t \in \mathbb{R}}, \pi), \rho)$ es una subrepresentación persistente de $((V, \pi), \rho^V)$.

Recordemos que un δ corrimiento de un módulo de persistencia (V, π), denotado $(V[\delta], \pi[\delta])$, se define como $V[\delta]_t = V_{t+\delta}$ y $\pi[\delta]_{s,t} = \pi_{s+\delta,t+\delta}$. Análogamente, para cualquier morfismo persistence $\mathfrak{f} : (V, \pi) \to (W, \theta)$ definimos su δ-corrimiento:

$$\mathfrak{f}[\delta] : (V[\delta], \pi[\delta]) \to (W[\delta], \theta[\delta])$$
$$(\mathfrak{f}[\delta])_t = f_{t+\delta}\,.$$

Observe que si $((V, \pi), \rho)$ es una representación persistente de G, también lo es $((V[\delta], \pi[\delta]), \rho[\delta])$.

CIMAT

Definición 4.4.7

Sean $((V,\pi),\rho^V)$ y $((W,\theta),\rho^W)$ dos representaciones de persistencia del grupo G. Decimos que (V,π) y (W,θ) están (δ, G)-entrelazados si existen G-morfismos persistentes $\mathfrak{f} : (V,\pi) \to (W[\delta],\theta[\delta])$ y $\mathfrak{g} : (W,\theta) \to (V[\delta],\pi[\delta])$ tales que los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{tikzcd}
(V,\pi) \arrow[r, "\mathfrak{f}"] \arrow[rr, bend right, "\chi^V_{2\delta}"'] & (W[\delta],\theta[\delta]) \arrow[r, "{\mathfrak{g}[\delta]}"] & (V[2\delta],\pi[2\delta])
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(W,\theta) \arrow[r, "\mathfrak{g}"] \arrow[rr, bend right, "\chi^W_{2\delta}"'] & (V[\delta],\pi[\delta]) \arrow[r, "{\mathfrak{f}[\delta]}"] & (W[2\delta],\theta[2\delta])
\end{tikzcd}$$

CIMAT

Consistentemente, podemos definir la distancia de G-entrelazamiento como

$$d_{G-int}\left((V,\pi),\,(W,\theta)\right) = \inf\left\{\delta > 0 \mid (V,\pi) \text{ y } (W,\theta) \text{ están } (\delta, G)\text{-entrelazados}\right\}.$$

Proposición 4.4.8

Sean $((V,\pi),\rho^V)$ y $((W,\theta),\rho^W)$ dos representaciones de persistencia del grupo G. Entonces,

$$d_{G-int}\left((V,\pi),\,(W,\theta)\right) \geq d_{int}\left((V,\pi),\,(W,\theta)\right).$$

Ejemplo 4.4.9

Sean $((V,\pi),\rho^V)$ y $((W,\theta),\rho^W)$ dos representaciones de persistencia sobre $\mathbb{C}$ del grupo finito $\mathbb{Z}_p = \{0,1,\cdots,p-1\}$, con p un número primo. Para cualquier raíz p-ésima de la unidad ξ, denotemos como $((L_\xi^V,\pi),\rho^V)$ y $((L_\xi^W,\theta),\rho^W)$ a las subrepresentaciones de persistencia de $((V,\pi),\rho^V)$ y $((W,\theta),\rho^W)$, respectivamente (ver Ejemplo 4.4.5). Si $((V,\pi),\rho^V)$ y $((W,\theta),\rho^W)$ están (δ,G)-entrelazados, se puede demostrar que $((L_\xi^V,\pi),\rho^V)$ y $((L_\xi^W,\theta),\rho^W)$ también están (δ,G)-entrelazados. Por tanto,

$$\begin{aligned} d_{G-int}((V,\pi),(W,\theta)) &\geq d_{G-int}\left((L_\xi^V,\pi),\,(L_\xi^W,\theta)\right) \\ &\geq d_{int}\left((L_\xi^V,\pi),\,(L_\xi^W,\theta)\right) \\ &= d_{bot}\left((L_\xi^V,\pi),\,(L_\xi^W,\theta)\right)\,. \end{aligned}$$

En esta sección no se trabaja con el caso general $G = \mathbb{Z}_p$ sino sólo con $p = 2, 4$. Note que si $\mathbb{Z}_4$ actúa en un conjunto, esta acción induce una $\mathbb{Z}_2$-acción sobre el mismo conjunto, por el homomorfismo $\mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_4$, $1 \mapsto 2$. Decimos que un módulo de persistencia con involución (pmi) $((W, \theta), B)$ es un $\mathbb{Z}_4$-pmi si su $\mathbb{Z}_2$ acción B proviene de una $\mathbb{Z}_4$-acción, es decir, si existe un morfismo de persistencia $C : (W, \theta) \to (W, \theta)$, tal que $B = C^2$ y $C^4 = \mathbb{1}$.

Sea $((V, \pi), A)$ un pmi. Retomando el Ejemplo 4.4.5 con $\xi = -1$, denotemos L^V al módulo de persistencia resultante construido a partir de los $(-1)-$espacios propios.

CIMAT

Teorema 4.4.11

Sea $((V, \pi), A)$ un módulo de persistencia con involución (pmi). La $\mathbb{Z}_2$-distancia de entrelazamiento entre V y la collección de módulos de persistencia con involución cuya $\mathbb{Z}_2$ acción proviene de una $\mathbb{Z}_4$, está acotada por abajo en términos de la función de multiplicidad: Para cualquier $\mathbb{Z}_4$-pmi $((W, \theta), B)$,

$$d_{\mathbb{Z}_2-int}(V, W) \geq \mu_{odd}\left(L^V\right) .$$

Demostración.

Ejercicio 4.4.12:

1. Demostrar que si (V, π) y (W, θ) están $\mathbb{Z}_2$-entrelazados, entonces L^V y L^W están δ-entrelazados.
2. Demostrar que $C(L^W) = L^W$, y deducir que $C^2|_{L^W} = -\mathbb{1}$.

En consecuencia, L^W es un módulo de peristencia complejo (Definición 4.3.3). Por tanto, por la Afirmación 4.3.5,

$$d_{\mathbb{Z}_2-int}((V, \pi), (W, \theta)) \geq d_{int}(L^V, L^W) \geq \mu_{odd}\left(L^V\right) .$$

CIMAT