# Seminario Persistencia en Geometría 2024-I

## Secciones 1.3-1.4

Miguel Ángel Maurin García de la Vega

30 de agosto de 2023

# Contenidos

# Motivación

Es deseable tener una métrica, o al menos una seudométrica en el espacio de módulos de persistencia.

Primero, definiremos una relación entre módulos de persistencia y revisaremos algunas de sus propiedades. Después, definiremos una distancia usando esta relación. El hecho de que es una métrica genuina se mostrará en secciones posteriores.

# Módulos $\delta$-entrelazados

Definición 1.3.1:
Dado $\delta > 0$, decimos que dos módulos de persistencia $(V, \pi), (W, \theta)$ están **$\delta$-entrelazados** si existen dos morfismos $F : V \to W[\delta]$ y $G : W \to V[\delta]$ tales que los siguientes diagramas conmutan:

# Módulos $\delta$-entrelazados

Definición 1.3.1:
Dado $\delta > 0$, decimos que dos módulos de persistencia $(V,\pi),(W,\theta)$ están **$\delta$-entrelazados** si existen dos morfismos $F : V \to W[\delta]$ y $G : W \to V[\delta]$ tales que los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "F"] \arrow[rr, bend right, "\Phi_V^{2\delta}"'] & W[\delta] \arrow[r, "G[\delta]"] & V[2\delta] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} W \arrow[r, "G"] \arrow[rr, bend right, "\Phi_W^{2\delta}"'] & V[\delta] \arrow[r, "F[\delta]"] & W[2\delta] \end{tikzcd}$$

# Módulos $\delta$-entrelazados

Así, en los espacios vectoriales que componen los módulos tenemos el siguiente diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
V_t \arrow[r] \arrow[dr, "F_t"' near end] & V_{t+\delta} \arrow[r] \arrow[dr, "F_{t+\delta}"' near end] & V_{t+2\delta} \\
W_t \arrow[r] \arrow[ur, "G_t" near end] & W_{t+\delta} \arrow[r] \arrow[ur, "G_{t+\delta}" near end] & W_{t+2\delta}
\end{tikzcd}
$$

# Propiedades (Ejercicio 1.3.2)

1. Dos módulos de persistencia están $\delta$-entrelazados con $\delta$ finita si y sólo si $\dim V_\infty = \dim W_\infty$

# Propiedades (Ejercicio 1.3.2)

1. Dos módulos de persistencia están $\delta$-entrelazados con $\delta$ finita si y sólo si $\dim V_\infty = \dim W_\infty$
2. Si $V, W$ están $\delta$-entrelazados, entonces, están $\delta'$-entrelazados para cualquier $\delta' > \delta$

# Propiedades (Ejercicio 1.3.2)

1. Dos módulos de persistencia están $\delta$-entrelazados con $\delta$ finita si y sólo si $\dim V_\infty = \dim W_\infty$
2. Si $V, W$ están $\delta$-entrelazados, entonces, están $\delta'$-entrelazados para cualquier $\delta' > \delta$
3. Si $V, W$ están $\delta_1$-entrelazados y $W, Z$ están $\delta_2$-entrelazados, entonces, $V, Z$ están $(\delta_1 + \delta_2)$-entrelazados

# Distancia de Entrelazamiento

Definición 1.3.3:
Para dos módulos de persistencia $(V, \pi)$ y $(W, \theta)$ definimos la **distancia de entrelazamiento** entre ellos como:

$$\mathrm{d}_{\mathrm{int}}(V, W) = \inf\{\delta > 0 \mid (V, \pi), (W, \theta) \text{ están } \delta\text{-entrelazados}\}$$

# Seudométrica

Obtenemos asi una pseudométrica en las clases de isomorfismo de módulos de persistencia con mismo $V_\infty$:

- $\mathrm{d}_{\mathrm{int}}(V, V') = 0$ para $V \cong V'$.
- $\mathrm{d}_{\mathrm{int}}(V, W) = \mathrm{d}_{\mathrm{int}}(W, V)$
- Cumple la desigualdad del triángulo por la transitividad de $\delta$-entrelazamiento

Pero, a priori, puede ocurrir que $\mathrm{d}_{\mathrm{int}}(V, W)$ se anula para $V \ncong W$.

# Seudométrica

Obtenemos asi una pseudométrica en las clases de isomorfismo de módulos de persistencia con mismo $V_\infty$:

- $\mathrm{d_{int}}(V, V') = 0$ para $V \cong V'$.
- $\mathrm{d_{int}}(V, W) = \mathrm{d_{int}}(W, V)$
- Cumple la desigualdad del triángulo por la transitividad de $\delta$-entrelazamiento

Pero, a priori, puede ocurrir que $\mathrm{d_{int}}(V, W)$ se anula para $V \ncong W$. Sin embargo, la condición de semicontinuidad nos asegura que $\mathrm{d_{int}}$ es no degenerada (2.2.8 y 2.2.10)

# Contenidos

# Afirmación 1.3.4

Fijamos $a, b, c, d < \infty$ con $a < b, c < d$ entonces:

$$\mathrm{d_{int}}(\mathbb{F}(a, b], \mathbb{F}(c, d]) \leq \min\left(\max\left(\frac{b-a}{2}, \frac{d-c}{2}\right), \max\left(|a-c|, |b-d|\right)\right) \tag{1}$$

# Afirmación 1.3.4

Fijamos $a, b, c, d < \infty$ con $a < b, c < d$ entonces:

$$\mathrm{d}_{\mathrm{int}}(\mathbb{F}(a,b], \mathbb{F}(c,d]) \leq \min\left(\max\left(\frac{b-a}{2}, \frac{d-c}{2}\right), \max\left(|a-c|, |b-d|\right)\right) \tag{1}$$

Veremos que se da la igualdad pero primero, probaremos la desigualdad. Consideraremos dos maneras de $\delta$-entrelazar los módulos intervalo.

# Entrelazado I

Tomamos $\delta = \max(|a-c|, |b-d|)$. Queremos probar que $\mathbb{F}(a,b], \mathbb{F}(c,d])$ están $\delta$-entrelazados.

# Entrelazado I

Tomamos $\delta = \max(|a-c|, |b-d|)$. Queremos probar que $\mathbb{F}(a,b], \mathbb{F}(c,d])$ están $\delta$-entrelazados. Por la definición de $\delta$ tenemos las siguientes desigualdades:

$$a - 2\delta \leq c - \delta \leq a$$

$$b - 2\delta \leq d - \delta \leq b$$

# Entrelazado I

Tomamos $\delta = \text{máx}\,(|a-c|, |b-d|)$. Queremos probar que $\mathbb{F}(a,b], \mathbb{F}(c,d])$ están $\delta$-entrelazados. Por la definición de $\delta$ tenemos las siguientes desigualdades:

$$a - 2\delta \leq c - \delta \leq a$$

$$b - 2\delta \leq d - \delta \leq b$$

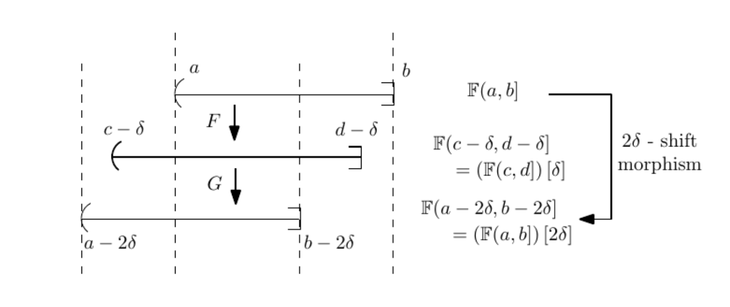
Además, notamos que los $\delta$-desplazamientos son:

$$(\mathbb{F}(c,d])[\delta] = \mathbb{F}(c-\delta, d-\delta]$$

$$(\mathbb{F}(a,b])[2\delta] = \mathbb{F}(a-2\delta, b-2\delta]$$

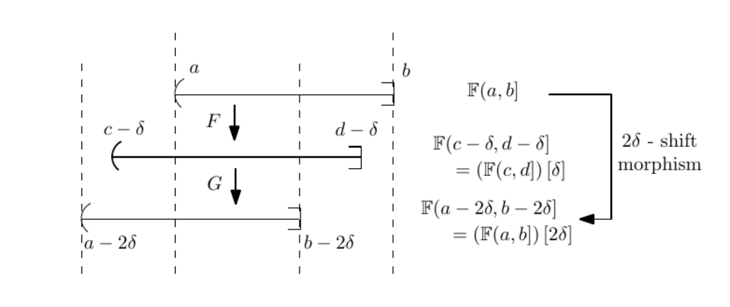
# Entrelazado I

Tenemos entonces la siguiente configuración:



# Entrelazado I

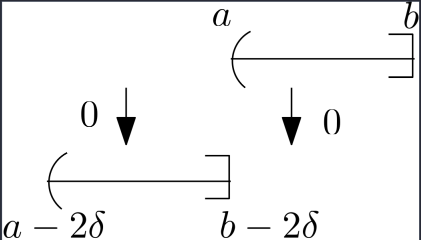
Tenemos entonces la siguiente configuración:




Así, por el ejercicio 1.2.8 podemos considerar los morfismos $F : \mathbb{F}(a,b] \to \mathbb{F}(c-\delta, d-\delta]$ y $G : \mathbb{F}(c,d] \to \mathbb{F}(a-\delta, b-\delta]$, los cuales pueden ser cero (por ejemplo, si $d-\delta < a, F = 0$) de manera que los módulos están $\delta$-entrelazados.

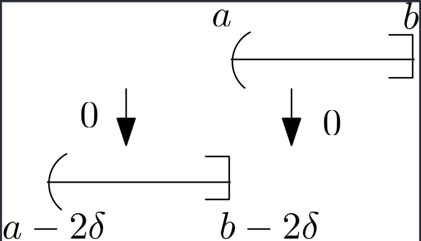
# Entrelazado II

Tomamos ahora $\delta = \text{máx}\left(\frac{b-a}{2}, \frac{d-c}{2}\right)$. Notamos que los morfismos de $2\delta$-desplazamiento se anulan para ambos módulos ya que $b - 2\delta \leq a$, es decir, $(a, b] \cap (a - 2\delta, b - 2\delta] = \emptyset$



# Entrelazado II

Tomamos ahora $\delta = \text{máx}\left(\frac{b-a}{2}, \frac{d-c}{2}\right)$. Notamos que los morfismos de $2\delta$-desplazamiento se anulan para ambos módulos ya que $b - 2\delta \leq a$, es decir, $(a, b] \cap (a - 2\delta, b - 2\delta] = \emptyset$




Así, basta tomar $F, G = 0$ para que los módulos estén $\delta$-entrelazados. Por la definicion de $\mathrm{d}_{\mathrm{int}}$ como los módulos estan $\delta$-entrelazados de la manera I y II, se sigue la afirmación.

# Ejercicio 1.3.5

Para dos intervalos infinitos:

$$\mathrm{d}_{\mathrm{int}}(\mathbb{F}(a,\infty),\mathbb{F}(c,\infty)) = |a-c|$$

# Ejemplo 1.3.6

Aterricemos la cota obtenida en 1.3.4 mediante ejemplos concretos. Escribimos $\delta_I$ y $\delta_{II}$ para referirnos a los métodos de entrelazamiento I y II vistos anteriormente.

# Ejemplo 1.3.6

Aterricemos la cota obtenida en 1.3.4 mediante ejemplos concretos. Escribimos $\delta_I$ y $\delta_{II}$ para referirnos a los métodos de entrelazamiento I y II vistos anteriormente.

- $\mathbb{F}(1,2], \mathbb{F}(1,3]$:

$$\delta_I = \text{máx}\left(\frac{1}{2}, 1\right), \delta_{II} = \text{máx}\left(0, 1\right), \implies \mathrm{d}_{\text{int}} \leq 1$$

# Ejemplo 1.3.6

Aterricemos la cota obtenida en 1.3.4 mediante ejemplos concretos. Escribimos $\delta_I$ y $\delta_{II}$ para referirnos a los métodos de entrelazamiento I y II vistos anteriormente.

- $\mathbb{F}(1,2], \mathbb{F}(1,3]$:

$$\delta_I = \text{máx}\left(\frac{1}{2}, 1\right), \delta_{II} = \text{máx}\left(0, 1\right), \implies \mathrm{d_{int}} \leq 1$$

- $\mathbb{F}(1,2], \mathbb{F}(2,3]$:

$$\delta_I = \text{máx}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \delta_{II} = \text{máx}\left(1, 1\right), \implies \mathrm{d_{int}} \leq \frac{1}{2}$$

# Ejemplo 1.3.6

Aterricemos la cota obtenida en 1.3.4 mediante ejemplos concretos. Escribimos $\delta_I$ y $\delta_{II}$ para referirnos a los métodos de entrelazamiento I y II vistos anteriormente.

- $\mathbb{F}(1,2], \mathbb{F}(1,3]$:

$$\delta_I = \text{máx}\left(\frac{1}{2}, 1\right), \delta_{II} = \text{máx}\,(0,1)\,, \implies \mathrm{d}_{\text{int}} \leq 1$$

- $\mathbb{F}(1,2], \mathbb{F}(2,3]$:

$$\delta_I = \text{máx}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \delta_{II} = \text{máx}\,(1,1)\,, \implies \mathrm{d}_{\text{int}} \leq \frac{1}{2}$$

- $\mathbb{F}(1,4], \mathbb{F}(2,5]$:

$$\delta_I = \text{máx}\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right), \delta_{II} = \text{máx}\,(1,1)\,, \implies \mathrm{d}_{\text{int}} \leq 1$$

# Contenidos

# $d_{int}$ para módulos de Morse

Recordemos que los módulos de persistencia de Morse $V(f)$ están compuestos por $V_t(f) = H_*(\{f < t\})$, de manera que:

$$V(f - \delta) = V(f)[\delta]$$

# $\mathrm{d}_{\mathrm{int}}$ para módulos de Morse

Recordemos que los módulos de persistencia de Morse $V(f)$ están compuestos por $V_t(f) = H_*(\{f < t\})$, de manera que:

$$V(f - \delta) = V(f)[\delta]$$

Queremos encontrar una cota para $\mathrm{d}_{\mathrm{int}}$ en el caso de módulos de Morse. Sea $M$ una variedad cerrada, $f, g : M \to \mathbb{R}$ funciones de Morse tales que $f \leq g$, y consideramos la norma uniforme $\|f\| = \max |f|$.

# $\mathrm{d_{int}}$ para módulos de Morse

Recordemos que los módulos de persistencia de Morse $V(f)$ están compuestos por $V_t(f) = H_*(\{f < t\})$, de manera que:

$$V(f - \delta) = V(f)[\delta]$$

Queremos encontrar una cota para $\mathrm{d_{int}}$ en el caso de módulos de Morse. Sea $M$ una variedad cerrada, $f, g : M \to \mathbb{R}$ funciones de Morse tales que $f \leq g$, y consideramos la norma uniforme $\|f\| = \max |f|$. Si $f \leq g$, entonces $\{g < t\} \subset \{f < t\}$, así, obtenemos un morfismo natural

$$F : V(g) \to V(f)$$

Además, $\max |f - g| \geq f - g$, entonces, $g \geq f - \|f - g\|$. Entonces, sea $\delta = \|f - g\|$, mostraremos que $V(f)$ y $V(g)$ están $\delta$-entrelazados.

# $\mathrm{d}_{\mathrm{int}}$ para módulos de Morse

Por un lado, $f - \delta \leq g$ da un morfismo natural $F : V(g) \to V(f)[\delta]$. Por otro lado, como $g - \delta \leq f$, tenemos $G : V(f) \to V(g)[\delta]$. Combinando las dos desigualdades tenemos:

$$f - 2\delta \leq g - \delta \leq f$$

# $\mathrm{d}_{\mathrm{int}}$ para módulos de Morse

Por un lado, $f - \delta \leq g$ da un morfismo natural $F : V(g) \to V(f)[\delta]$. Por otro lado, como $g - \delta \leq f$, tenemos $G : V(f) \to V(g)[\delta]$. Combinando las dos desigualdades tenemos:

$$f - 2\delta \leq g - \delta \leq f$$

De esta forma, obtenemos los tres morfismos del siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} V(f) \arrow[r, "G"] \arrow[rr, bend right, "\Phi^{2\delta}_{V(f)}"'] & V(g)[\delta] \arrow[r, "F[\delta]"] & V(f)[2\delta] \end{tikzcd}$$

El segundo diagrama para la definición de $\delta$-entrelazamiento se obtiene de manera análoga. Por lo tanto:

$$\mathrm{d}_{\mathrm{int}}(V(f), V(g)) \leq \delta = \|f - g\|$$

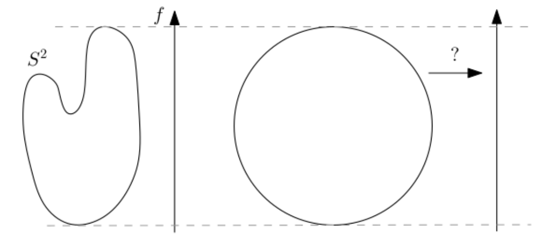
## $\mathrm{d}_{\mathrm{int}}$ para módulos de Morse

Finalmente, si $\phi \in \mathrm{Diff}(M)$, entonces $V(f) \cong V(\phi^* f)$, así

$$\mathrm{d}_{\mathrm{int}}(V(f), V(g)) \leq \inf_{\phi \in \mathrm{Diff}(M)} \|f - \phi^* g\| \tag{2}$$

# Aproximación por funciones de Morse

Consideremos el siguiente problema: dada una función $f : S^2 \to \mathbb{R}$, ¿qué tan bien es posible $C^0$-aproximarla por una función de Morse con 2 puntos críticos? gráficamente:




En el ejemplo 4.2.6 calcularemos la cota obtenida en (2) para resolver este problema. En el capítulo 6 se discuten aplicaciones de módulos de persistencia a teoría de funciones y aproximación.