Seminario de Persistencia en Geometría 2024-1

1.5 Módulos de Rips y la distancia de Gromov-Hausdorff
2.1 Teorema de la forma normal

Miguel Evangelista

7 de septiembre de 2023

Instituto de Matemáticas
UNAM

Contenidos

Instituto de Matemáticas UNAM

Correspondencia Suprayectiva

Consideremos a X e Y como conjuntos finitos

Definición:
Una *correspondencia suprayectiva* $C : X \rightrightarrows Y$ es un conjunto $C \subset X \times Y$ tal que $proy_x(C) = X$ y $proy_y(C) = Y$.

Correspondencia Suprayectiva

Consideremos a X e Y como conjuntos finitos

Definición:
Una *correspondencia suprayectiva* $C : X \rightrightarrows Y$ es un conjunto $C \subset X \times Y$ tal que $proy_x(C) = X$ y $proy_y(C) = Y$.

Definición:
La *correspondencia inversa* $C^T : Y \rightrightarrows X$ es definida por el conjunto $C^T := \{(y, x) \in Y \times X | (x, y) \in C\}$.

Instituto de Matemáticas UNAM

Correspondencia Suprayectiva

Consideremos a X e Y como conjuntos finitos

Definición:
Una *correspondencia suprayectiva* $C : X \rightrightarrows Y$ es un conjunto $C \subset X \times Y$ tal que $proy_x(C) = X$ y $proy_y(C) = Y$.

Definición:
La *correspondencia inversa* $C^T : Y \rightrightarrows X$ es definida por el conjunto $C^T := \{(y, x) \in Y \times X | (x, y) \in C\}$.

Obs.
C es una correspondencia suprayectiva $\Leftrightarrow$ existen $f : X \to Y$ y $g : Y \to X$ tal que $graf(f) \subset C$ y $graf(g) \subset C^T$.

Instituto de Matemáticas UNAM

Distorsión

Sean (X, ρ) y (Y, r) espacios métricos finitos.

Definición:
La distorsión de una correspondencia suprayectiva $C : X \rightrightarrows Y$, está dada como

$$dis(C) = max_{(x,y),(x',y')\in C}|\rho(x,x^{'}) - r(y,y^{'})|$$

Instituto de Matemáticas UNAM

Distorsión

Dada una función $f : X \to Y$, consideramos

$$\hat{C} = \{(x, f(x)) | x \in X\} \subset X \times Y.$$

Distorsión

Dada una función $f : X \to Y$, consideramos

$$\hat{C} = \{(x, f(x)) | x \in X\} \subset X \times Y.$$

La distorsión de $\hat{C}$ está dada por:

$$dis(C) = max_{x,x' \in X} |\rho(x, x^{'}) - r(f(x), f(x^{'}))|$$

Instituto de
Matemáticas
UNAM

Distorsión

Dada una función $f : X \to Y$, consideramos

$$\hat{C} = \{(x, f(x)) | x \in X\} \subset X \times Y.$$

La distorsión de $\hat{C}$ está dada por:

$$dis(C) = max_{x,x' \in X} |\rho(x, x^{'}) - r(f(x), f(x^{'}))|$$

Obs.
$dis(C) = 0 \Leftrightarrow f$ es una isometría.

Instituto de Matemáticas UNAM

Distorsión

La noción de distorsión nos permite introducir la siguiente noción de distancia.

Distorsión

La noción de distorsión nos permite introducir la siguiente noción de distancia.

Definición:
La *distancia de Gromov-Hausdorff* entre dos espacios métricos *finitos* (X, ρ) y (Y, r) se define como

$$d_{GH}((X, \rho), (Y, r)) = \frac{1}{2} min_C dis(C)$$

Instituto de Matemáticas UNAM

Complejo de Rips

Consideramos un espacio métrico finito (X, d).
Se define el complejo simplicial $R_\alpha(X)$ de la siguiente manera:

- los vértices de $R_\alpha(X)$ son los puntos del conjunto X, y

Complejo de Rips

Consideramos un espacio métrico finito (X, d).
Se define el complejo simplicial $R_\alpha(X)$ de la siguiente manera:

- los vértices de $R_\alpha(X)$ son los puntos del conjunto X, y
- los $k+1$ puntos en X determinan un $k-$ simplejo $\sigma = [x_0, ..., x_k]$ si $d(x_i, x_j) < \alpha \qquad \forall i, j$

para $0 < \alpha \in \mathbf{R}$

Instituto de Matemáticas UNAM

Módulo de Rips

Obs.

- El complejo de Rips está completamente determinado por su $1-$esqueleto, es de hecho, un complejo de bandera.

Instituto de Matemáticas UNAM

Módulo de Rips

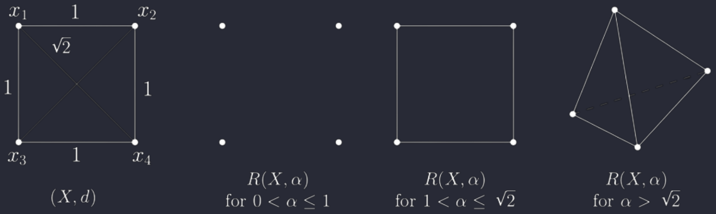
Obs.

- El complejo de Rips está completamente determinado por su $1-$esqueleto, es de hecho, un complejo de bandera.
- Para $0 < \alpha \leq min_{x,y \in X, x \neq y} d(x,y)$ el complejo $R_\alpha(X)$ es una colección finita de puntos.

Instituto de Matemáticas UNAM

Complejo de Rips

Esta construcción se ilustra en la siguiente figura



Módulo de Rips

Para $\alpha \neq \beta$ existe una función simplicial *natural*

$$i_{\alpha,\beta} : R_\alpha(X) \to R_\beta(X).$$

Instituto de Matemáticas UNAM

Módulo de Rips

Para $\alpha \neq \beta$ existe una función simplicial *natural*

$$i_{\alpha,\beta} : R_\alpha(X) \to R_\beta(X).$$

Tomando $V_\alpha(X) = H_*(R_\alpha(X))$ y $\pi_{\alpha,\beta} = (i_{\alpha,\beta})_*$, obtenemos un módulo de persistencia, que denominamos módulo de Rips.

Módulo de Rips

Para $\alpha \neq \beta$ existe una función simplicial *natural*

$$i_{\alpha,\beta} : R_\alpha(X) \to R_\beta(X).$$

Tomando $V_\alpha(X) = H_*(R_\alpha(X))$ y $\pi_{\alpha,\beta} = (i_{\alpha,\beta})_*$, obtenemos un módulo de persistencia, que denominamos módulo de Rips.

Obs.
Los complejos de Rips fueron introducidos por primera vez por Vietoris.

Instituto de Matemáticas UNAM

Módulo de Rips

Para un espacio métrico finito (X, ρ), consideremos su complejo de Rips $R_t(X)$ y el módulo de persistencia $H_*(R_t(X))$.

Módulo de Rips

Para un espacio métrico finito (X, ρ), consideremos su complejo de Rips $R_t(X)$ y el módulo de persistencia $H_*(R_t(X))$.

Teo. 1.5.4
$d_{GH}((X,\rho),(Y,r)) \geq \frac{1}{2} d_{int}(V(X,\rho),V(Y,r))$

Instituto de Matemáticas
UNAM

Módulo de Rips

Para un espacio métrico finito (X, ρ), consideremos su complejo de Rips $R_t(X)$ y el módulo de persistencia $H_*(R_t(X))$.

Teo. 1.5.4
$d_{GH}((X, \rho), (Y, r)) \geq \frac{1}{2} d_{int}(V(X, \rho), V(Y, r))$

Bosquejo de la Dem.

Tomemos una correspondencia suprayectiva $C : X \rightrightarrows Y$ y cualquier $\delta > dis(C)$.

Instituto de Matemáticas UNAM

Módulo de Rips

Para un espacio métrico finito (X, ρ), consideremos su complejo de Rips $R_t(X)$ y el módulo de persistencia $H_*(R_t(X))$.

Teo. 1.5.4
$d_{GH}((X,\rho),(Y,r)) \geq \frac{1}{2} d_{int}(V(X,\rho), V(Y,r))$

Bosquejo de la Dem.

Tomemos una correspondencia suprayectiva $C : X \rightrightarrows Y$ y cualquier $\delta > dis(C)$.
Necesitamos mostrar que $V(X)$ y $V(Y)$ son δ-entrelazados.

Módulo de Rips

Escojemos $f : X \to Y$ tal que $graf(f) \subset C$

Instituto de Matemáticas UNAM

Módulo de Rips

Escojemos $f : X \to Y$ tal que $graf(f) \subset C$

Dado que $\delta \geq dis(C)$ se cumple $r(f(x), f(x')) < \rho(x, x')$, entonces f induce una función simplicial $F : R_t(X) \to R_{t+\delta}(Y)$.

Instituto de Matemáticas UNAM

Módulo de Rips

Escojemos $f : X \to Y$ tal que $graf(f) \subset C$

Dado que $\delta \geq dis(C)$ se cumple $r(f(x), f(x')) < \rho(x, x')$, entonces f induce una función simplicial $F : R_t(X) \to R_{t+\delta}(Y)$.

Sea $F_* : V_t(X) \to V_{t+\delta}(Y) = (V(Y)[\delta])_t$ la función inducida sobre la homología.

Instituto de Matemáticas UNAM

Módulo de Rips

De forma similar elegimos $g : Y \to X$ tal que $graf(g) \subset C^T$

Módulo de Rips

De forma similar elegimos $g : Y \to X$ tal que $graf(g) \subset C^T$

Obtenemos una función $G : R_t(Y) \to R_{t+\delta}(X)$.

Instituto de
Matemáticas
UNAM

Módulo de Rips

De forma similar elegimos $g : Y \to X$ tal que $graf(g) \subset C^T$

Obtenemos una función $G : R_t(Y) \to R_{t+\delta}(X)$.

Que induce una función sobre la homología
$G_* : V_t(Y) \to V_{t+\delta}(X) = (V(X)[\delta])_t$.

Módulo de Rips

Afirmamos que F_* y G_* son δ-entrelazados.

Para demostrar lo anterior debemos mostrar que el siguiemte diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} V(X) \arrow[r, "F_*"] \arrow[rr, bend right, "i_*"'] & V(Y)[\delta] \arrow[r, "G_*[\delta]"] & V(X)[2\delta] \end{tikzcd}$$

donde $i_* : R_t(X) \to R_{t+2\delta}(X)$ es la inclusión natural.

Módulo de Rips

Antes seguir con la demostración, necesitamos la siguiente definición:

Definición.
Dos funciones simpliciales $H, H' : K \to L$ con K, L complejos simpliciales se dicen *contiguos* si para caulquier simplejo $\sigma \in K$ se tiene que $H(\sigma) \cup H'(\sigma)$ es un simplejo en L.

Módulo de Rips

Antes seguir con la demostración, necesitamos la siguiente definición:

Definición.
Dos funciones simpliciales $H, H' : K \to L$ con K, L complejos simpliciales se dicen *contiguos* si para caulquier simplejo $\sigma \in K$ se tiene que $H(\sigma) \cup H'(\sigma)$ es un simplejo en L.

Obs. de la defince anterior
Para dos mapas contiguos H y H' se tiene que $H_* = H'_*$
Este resultado se puede consultar en *James R. Munkres, Elements of algebraic topology (Teo 12.5).*

Instituto de Matemáticas UNAM

Módulo de Rips

Queremos mostrar que $G \circ F$ e i son contiguas con funciones $R_t(X) \to R_{t+2\delta}(Y)$.

Instituto de Matemáticas UNAM

Módulo de Rips

Queremos mostrar que $G \circ F$ e i son contiguas con funciones $R_t(X) \to R_{t+2\delta}(Y)$.

Sea $[x_0, ..., x_k] \in R_t(X)$ un simplejo.

Módulo de Rips

Queremos mostrar que $G \circ F$ e i son contiguas con funciones $R_t(X) \to R_{t+2\delta}(Y)$.

Sea $[x_0, ..., x_k] \in R_t(X)$ un simplejo.

Se quiere mostrar que $[gf(x_0), ..., gf(x_k), x_0, ..., x_k] \in R_{t+2\delta}(X)$ es un simplejo.

Módulo de Rips

Por definición de distorción de C tenemos que para cualquier $x, x' \in X$ e $y, y' \in Y$ que cumplan con que (x, y) y $(x', y') \in C$ se tiene que

Módulo de Rips

Por definición de distorción de C tenemos que para cualquier $x, x' \in X$ e $y, y' \in Y$ que cumplan con que (x, y) y $(x', y') \in C$ se tiene que

$$|\rho(x, x') - r(y, y')| \leq dist(C) < \delta$$

Instituto de Matemáticas UNAM

Módulo de Rips

Por definición de distorción de C tenemos que para cualquier $x, x' \in X$ e $y, y' \in Y$ que cumplan con que (x, y) y $(x', y') \in C$ se tiene que

$$|\rho(x, x') - r(y, y')| \leq dist(C) < \delta$$

Entonces para todo $0 \leq i, j \leq k$

Instituto de
Matemáticas
UNAM

Módulo de Rips

Por definición de distorción de C tenemos que para cualquier $x, x' \in X$ e $y, y' \in Y$ que cumplan con que (x, y) y $(x', y') \in C$ se tiene que

$$|\rho(x, x') - r(y, y')| \leq dist(C) < \delta$$

Entonces para todo $0 \leq i, j \leq k$

$$\begin{aligned} \rho(gf(x_i), x_j) &< r(f(x_i), f(x_j)) + \delta \\ &< \rho(x, x') + 2\delta \\ &< t + 2\delta \end{aligned}$$

Instituto de Matemáticas UNAM

Módulo de Rips

La desigualdad $\rho(gf(x_i), x_j) < r(f(x_i), f(x_j)) + \delta$ se cumple, ya que $(gf(x_i), f(x_i))$ y $(x_j, f(x_j))$ están en C para todo i, j.

Instituto de Matemáticas UNAM

Módulo de Rips

La desigualdad $\rho(gf(x_i), x_j) < r(f(x_i), f(x_j)) + \delta$ se cumple, ya que $(gf(x_i), f(x_i))$ y $(x_j, f(x_j))$ están en C para todo i, j.

La desigualdad $r(f(x_i), f(x_j)) + \delta < \rho(x, x') + 2\delta$, se debe del mismo modo que la anterior a que $(x_i, f(x_i))$ y $(x_j, f(x_j)) \in C$ para toda i, j.

Módulo de Rips

La desigualdad $\rho(gf(x_i), x_j) < r(f(x_i), f(x_j)) + \delta$ se cumple, ya que $(gf(x_i), f(x_i))$ y $(x_j, f(x_j))$ están en C para todo i, j.

La desigualdad $r(f(x_i), f(x_j)) + \delta < \rho(x, x') + 2\delta$, se debe del mismo modo que la anterior a que $(x_i, f(x_i))$ y $(x_j, f(x_j)) \in C$ para toda i, j.

Por último, la desigualdad $\rho(x, x') + 2\delta < t + 2\delta$, se deduce de la definición de $R_t(X)$.

Instituto de Matemáticas UNAM

Módulo de Rips

De una forma análoga, se tiene que

Instituto de Matemáticas UNAM

Módulo de Rips

De una forma análoga, se tiene que

$$\begin{aligned} \rho(gf(x_i), gf(x_j)) &< r(f(x_i), f(x_j)) + \delta \\ &< t + 2\delta \end{aligned}$$

Instituto de Matemáticas UNAM

Módulo de Rips

De una forma análoga, se tiene que

$$\begin{aligned}\rho(gf(x_i), gf(x_j)) &< r(f(x_i), f(x_j)) + \delta \\ &< t + 2\delta\end{aligned}$$

Por lo cual, se concluye que $G \circ F$ e i con contiguas. De esto mismo se deduce que f_* y G_* son δ-entrelazados como se quería probar desde el principio. $\blacksquare$

Instituto de Matemáticas UNAM

Módulo de Rips

La demostración completa se puede consultar en
Frédéric Chazal, Vin de Silva, and Steve Y. Oudot, Persistence stability for geometric complexes, Geom. Dedicata 173 (2014), 193–214, DOI 10.1007/s10711-013-9937-z. MR3275299

Contenidos

Instituto de Matemáticas UNAM

Códigos de barras

A lo largo del capítulo 2, lo más destacado es el *Teorema de la Forma Normal*, que permite a clasificar los módulos de persistencia mediante objetos combinatorios llamados *códigos de barras*.

Definición

Un código de barras de tipo finito es un multiconjunto finito de intervalos, es decir, es una colección finita $\{(I_i, m_i)\}_{i \in I}$ de intervalos I_i con multiplicidades $m_i \in N$.

Códigos de barras

Definición

Un código de barras de tipo finito es un multiconjunto finito de intervalos, es decir, es una colección finita $\{(I_i, m_i)\}_{i \in I}$ de intervalos I_i con multiplicidades $m_i \in N$.

Obs.

A lo largo de este seminario, consideramos los intervalos I_i de la forma $(a, b]$ o de la forma (a, ∞). Los intervalos de un código de barras se denominan barras.

Contenidos

Teorema de la forma normal

Sea (V, π) un módulo de persistencia.

Teo. (De la forma normal)

Existe una colección finita $\{(I_i, m_i)\}_{i \in I}$ de intervalos I_i con multiplicidades $m_i \in \mathbb{N}$, donde $I_i \neq I_j$ para $i \neq j$ tales que

$$V = \bigoplus_{i=1}^{N} \mathbb{F}(I_i)^{m_i}$$

Instituto de Matemáticas UNAM

Teorema de la forma normal

Sea (V, π) un módulo de persistencia.

Teo. (De la forma normal)

Existe una colección finita $\{(I_i, m_i)\}_{i\in I}$ de intervalos I_i con multiplicidades $m_i \in \mathbb{N}$, donde $I_i \neq I_j$ para $i \neq j$ tales que

$$V = \bigoplus_{i=1}^{N} \mathbb{F}(I_i)^{m_i}$$

- Por igualdad, se entiende que son isomorfos como módulos de persistencia. Además, estos datos son únicos salvo permutaciones.

Teorema de la forma normal

Sea (V, π) un módulo de persistencia.

Teo. (De la forma normal)

Existe una colección finita $\{(I_i, m_i)\}_{i\in I}$ de intervalos I_i con multiplicidades $m_i \in \mathbb{N}$, donde $I_i \neq I_j$ para $i \neq j$ tales que

$$V = \bigoplus_{i=1}^{N} \mathbb{F}(I_i)^{m_i}$$

- Por igualdad, se entiende que son isomorfos como módulos de persistencia. Además, estos datos son únicos salvo permutaciones.
- A cualquier módulo de persistencia le corresponde un código de barras único (V). Este código de barras se llamará código de barras de V.

Teorema de la forma normal

Breve reseña histórica acerca del Teorema de la forma normal.

- En 1994 el teorema fue demostrado por S. Barannikov en el trabajo *The framed Morse complex and its invariants, Singularities and bifurcations*.

Instituto de Matemáticas UNAM

Teorema de la forma normal

Breve reseña histórica acerca del Teorema de la forma normal.

- En 1994 el teorema fue demostrado por S. Barannikov en el trabajo *The framed Morse complex and its invariants, Singularities and bifurcations*.
- En el mismo trabajo mencionado en el punto anterior, fueron introducidos los diagramas de *nacimiento-muerte*. (Este teme se abordará a detalle en la sección 6.2)

Instituto de Matemáticas UNAM

Teorema de la forma normal

- Zomorodian y Carlsson en 2005 en su trabajo *Computing persistent homology*. Dan un enfoque diferente a los módulos de persistencia.

Teorema de la forma normal

- Zomorodian y Carlsson en 2005 en su trabajo *Computing persistent homology*. Dan un enfoque diferente a los módulos de persistencia.
- En dicho trabajo, los módulos de persistencia sobre F se parametrizan mediante $\mathbb{Z}_{\geq 0}$, es decir, $V = \bigoplus_{i \geq 0} V_i$ y los mapas de estructura son composiciones consecutivas de los datos iniciales $\{\phi_i : V_i \to V_{i+1}\}_{i \geq 0}$.

Instituto de Matemáticas UNAM

Teorema de la forma normal

- Zomorodian y Carlsson en 2005 en su trabajo *Computing persistent homology*. Dan un enfoque diferente a los módulos de persistencia.
- En dicho trabajo, los módulos de persistencia sobre F se parametrizan mediante $\mathbb{Z}_{\geq 0}$, es decir, $V = \bigoplus_{i \geq 0} V_i$ y los mapas de estructura son composiciones consecutivas de los datos iniciales $\{\phi_i : V_i \to V_{i+1}\}_{i \geq 0}$.
- Debido a un teorema de correspondencia (Teorema 3.1 en *Computing persistent homology*), cualquier módulo de persistencia V (de tipo finito) puede identificarse con un módulo finitamente generado sobre $\mathbb{F}[t]$, donde $t \cdot (v_0, v_1, ...) = (0, \phi_0(v_0), \phi_1(v1), ...)$.

Instituto de Matemáticas UNAM

Teorema de la forma normal

Definición

Un punto $t \in \mathbb{R}$ se llama espectral para un módulo de persistencia (V, π), si para cualquier vecindad $t \in U$, existe $s < r$ en U, tal que $\pi_{s,r} : V_s \to V_r$ no es un isomorfismo.

Teorema de la forma normal

Definición

Un punto $t \in \mathbb{R}$ se llama espectral para un módulo de persistencia (V, π), si para cualquier vecindad $t \in U$, existe $s < r$ en U, tal que $\pi_{s,r} : V_s \to V_r$ no es un isomorfismo.

Denotamos por $Spec(V) = Spec(V, \pi)$ al conjunto de puntos espectrales de (V, π). A este conjunto lo llamaremos espectro de V. Omitiremos π salvo ambigüedad.

Teorema de la forma normal

Definición

Un punto $t \in \mathbb{R}$ se llama espectral para un módulo de persistencia (V, π), si para cualquier vecindad $t \in U$, existe $s < r$ en U, tal que $\pi_{s,r} : V_s \to V_r$ no es un isomorfismo.

Denotamos por $Spec(V) = Spec(V, \pi)$ al conjunto de puntos espectrales de (V, π). A este conjunto lo llamaremos espectro de V. Omitiremos π salvo ambigüedad.

Obs

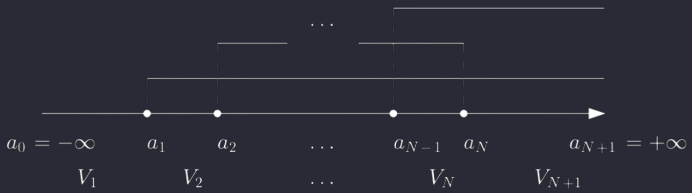
Por la condición (2) de la definición 1.1.1 (Módulo de persistencia de tipo finito), $Spec(V)$ es un conjunto finito.

Teorema de la forma normal

Sea (V, π) un módulo de persistencia y $Spec(V) = \{a_1, ..., a_N\} \cup \{+\infty\}$ su espectro, donde $a_1 < ... < a_N < a_{N+1} = +\infty$. También establecemos $a_0 = -\infty$ para tener notaciones más agradables.

Teorema de la forma normal

Sea (V, π) un módulo de persistencia y $Spec(V) = \{a_1, ..., a_N\} \cup \{+\infty\}$ su espectro, donde $a_1 < ... < a_N < a_{N+1} = +\infty$. También establecemos $a_0 = -\infty$ para tener notaciones más agradables.



Teorema de la forma normal

Denotemos por $Q_i = (a_{i-1}, a_i]$ para $1 \leq i \leq N$ y $Q_{N+1} = (a_N, +\infty)$ los intervalos definidos por a_i adyacentes.

Teorema de la forma normal

Denotemos por $Q_i = (a_{i-1}, a_i]$ para $1 \leq i \leq N$ y $Q_{N+1} = (a_N, +\infty)$ los intervalos definidos por a_i adyacentes. Para cualquier $i \in \{1, ..., N+1\}$, definimos el espacio vectorial límite V^i considerando el límite directo de $\{V_s\}$ para $s \in Q_i$.

Teorema de la forma normal

Denotemos por $Q_i = (a_{i-1}, a_i]$ para $1 \leq i \leq N$ y $Q_{N+1} = (a_N, +\infty)$ los intervalos definidos por a_i adyacentes. Para cualquier $i \in \{1, ..., N+1\}$, definimos el espacio vectorial límite V^i considerando el límite directo de $\{V_s\}$ para $s \in Q_i$.

$$V^i = \coprod_{s \in Q_i} V_s / \sim$$

Instituto de Matemáticas
UNAM

Teorema de la forma normal

Denotemos por $Q_i = (a_{i-1}, a_i]$ para $1 \leq i \leq N$ y $Q_{N+1} = (a_N, +\infty)$ los intervalos definidos por a_i adyacentes. Para cualquier $i \in \{1, ..., N+1\}$, definimos el espacio vectorial límite V^i considerando el límite directo de $\{V_s\}$ para $s \in Q_i$.

$$V^i = \coprod_{s \in Q_i} V_s / \sim$$

donde $V_s \ni v_s \sim v_t \in V_t$ para todo $s < t$ si $\pi_{s,t}(v_s) = v_t$.

Instituto de Matemáticas UNAM

Teorema de la forma normal

Observe que V^i es isomorfo a V_{a_i}, ya que $\pi_{s,t}$ son isomorfismos para cualquier $s, t \in Q_i$.

Teorema de la forma normal

Observe que V^i es isomorfo a V_{a_i}, ya que $\pi_{s,t}$ son isomorfismos para cualquier $s, t \in Q_i$.
Dotamos la colección $\{V^i\}$ con los morfismos $p_{i,j} : V^i \to V^j$ para $i \leq j$ inducidos por $\pi_{s,t}$.

Teorema de la forma normal

Observe que V^i es isomorfo a V_{a_i}, ya que $\pi_{s,t}$ son isomorfismos para cualquier $s, t \in Q_i$.
Dotamos la colección $\{V^i\}$ con los morfismos $p_{i,j} : V^i \to V^j$ para $i \leq j$ inducidos por $\pi_{s,t}$.
Denotamos
$$TotalDim(V) = \Sigma_i dim(V_i).$$

Instituto de Matemáticas UNAM

Teorema de la forma normal

Sea $W \subset V$ un submódulo de persistencia (como en la Definición 1.2.4)

Teorema de la forma normal

Sea $W \subset V$ un submódulo de persistencia (como en la Definición 1.2.4)

Definición
Diremos que un submódulo W de V es semi suprayectivo si existe $r \in \mathbb{R}$ tal que

- (a) $W_t = V_t$ para todo $t \leq r$,
- (b) $\pi_{s,t} : W_s \to W_t$ es sobre si $r < s < t$.

Instituto de
Matemáticas
UNAM

Teorema de la forma normal

Sea $W \subset V$ un submódulo de persistencia (como en la Definición 1.2.4)

Definición

Diremos que un submódulo W de V es semi suprayectivo si existe $r \in \mathbb{R}$ tal que

- (a) $W_t = V_t$ para todo $t \leq r$,
- (b) $\pi_{s,t} : W_s \to W_t$ es sobre si $r < s < t$.

Ejemplo

$\mathbb{F}(0, \infty)$ es un submódulo semi suprayectivo de $\mathbb{F}(0, \infty) \oplus \mathbb{F}(1, 2]$.

Instituto de Matemáticas UNAM

Teorema de la forma normal

Sea $W \subset V$ un submódulo de persistencia (como en la Definición 1.2.4)

Definición

Diremos que un submódulo W de V es semi suprayectivo si existe $r \in \mathbb{R}$ tal que

- (a) $W_t = V_t$ para todo $t \leq r$,
- (b) $\pi_{s,t} : W_s \to W_t$ es sobre si $r < s < t$.

Ejemplo

$\mathbb{F}(0, \infty)$ es un submódulo semi suprayectivo de $\mathbb{F}(0, \infty) \oplus \mathbb{F}(1, 2]$.

Teorema de la forma normal

Codificamos los submódulos semisuprayectivos W de V por los datos $W^i \subset V^i$, con $i = 1, ..., N+1$ según los intervalos Q_i (que se asociaron al espectro de V).

Instituto de Matemáticas UNAM

Teorema de la forma normal

Codificamos los submódulos semisuprayectivos W de V por los datos $W^i \subset V^i$, con $i = 1, ..., N+1$ según los intervalos Q_i (que se asociaron al espectro de V).

Obs.
Notemos que como a_i no necesita ser un punto espectral de W, por tal razón $p_{i,i+1} : W_i \to W_{i+1}$ puede ser un isomorfismo.

Instituto de Matemáticas UNAM

Ejemplo.

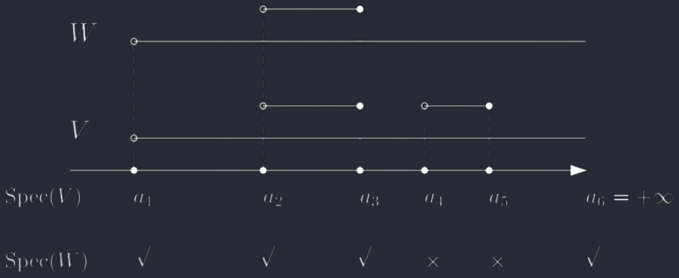
En la siguiente figura, el i más pequeño para el que $W^i \not\subseteq V^i$ es $i = 5$ y $r = a_4$

Instituto de Matemáticas UNAM

Teorema de la forma normal

Ejemplo.

En la siguiente figura, el i más pequeño para el que $W^i \not\subseteq V^i$ es $i = 5$ y $r = a_4$



Instituto de Matemáticas UNAM

Contenidos

Instituto de Matemáticas UNAM

Ejercicios

- (Ejercicio 1.5.3) Demostrar que d_{GH} es una distancia entre clases de isometría de espacios métricos finitos.
- (Ejercicio 2.1.4) Supongamos que s, t pertenecen a la misma componente conexa de $\mathbb{R}Spec(V)$. Demostrar que $\pi_{s,t} : V_s \to V_t$ es un isomorfismo.

Ejercicios

- (Ejercicio 1.5.3) Demostrar que d_{GH} es una distancia entre clases de isometría de espacios métricos finitos.
- (Ejercicio 2.1.4) Supongamos que s, t pertenecen a la misma componente conexa de $\mathbb{R}Spec(V)$. Demostrar que $\pi_{s,t} : V_s \to V_t$ es un isomorfismo.
- (Ejercicio 2.1.5) Demuestre que $Spec(V)$ es un isomorfismo invariante de módulos de persistencia.

Instituto de Matemáticas UNAM

Ejercicios

- (Ejercicio 1.5.3) Demostrar que d_{GH} es una distancia entre clases de isometría de espacios métricos finitos.
- (Ejercicio 2.1.4) Supongamos que s, t pertenecen a la misma componente conexa de $\mathbb{R}Spec(V)$. Demostrar que $\pi_{s,t} : V_s \to V_t$ es un isomorfismo.
- (Ejercicio 2.1.5) Demuestre que $Spec(V)$ es un isomorfismo invariante de módulos de persistencia.

Instituto de Matemáticas UNAM

Ejercicios

- (Ejercicio 2.1.6) Hallar el espectro de la suma directa $\bigoplus_{i=1}^{N} \mathbb{F}(I_i)^{m_i}$, donde (I_i, m_i) están definidos como en el Teorema 2.1.2.

Instituto de Matemáticas UNAM

Ejercicios

- (Ejercicio 2.1.6) Hallar el espectro de la suma directa $\bigoplus_{i=1}^{N} \mathbb{F}(I_i)^{m_i}$, donde (I_i, m_i) están definidos como en el Teorema 2.1.2.
- (Ejercicio 2.1.9) Sea $W \subset V$ un submódulo semisurjetivo. Demuestre que
  - $Spec(W) \subset Spec(V)$ y $TotalDim(W) \leq TotalDim(V)$,
  - $r := sup\{t : W_s = V_s \forall s \leq t\} \in Spec(V)$. Dicha r satisface las condiciones de la definición 2.1.7.