

# Seminario Persistencia en Geometría 2024-I

Secciones 3.2.4-3.2.11

Miguel Ángel Maurin García de la Vega

21 de septiembre de 2023

## Recapitulación

### 3.2.2 Construcción de Emparejamientos Inducidos

#### Ejemplo 3.2.11

# Teorema de Isometría

En el espacio de módulos de persistencia definimos la distancia de  $\delta$ -entrelazamiento.

# Teorema de Isometría

En el espacio de módulos de persistencia definimos la distancia de  $\delta$ -entrelazamiento. Luego, el Teorema de la Forma Normal (2.1.2) nos permitió asociar a cualquier módulo de persistencia un código de barras.

# Teorema de Isometría

En el espacio de módulos de persistencia definimos la distancia de  $\delta$ -entrelazamiento. Luego, el Teorema de la Forma Normal (2.1.2) nos permitió asociar a cualquier módulo de persistencia un código de barras. En el espacio de códigos de barras definimos la distancia cuello de botella.

# Teorema de Isometría

En el espacio de módulos de persistencia definimos la distancia de  $\delta$ -entrelazamiento. Luego, el Teorema de la Forma Normal (2.1.2) nos permitió asociar a cualquier módulo de persistencia un código de barras. En el espacio de códigos de barras definimos la distancia cuello de botella. El teorema de la Isometría establece una relación entre todos estos conceptos:

Teorema 2.2.8:

El mapa  $V \mapsto \mathcal{B}(V)$  es una isometría:

$$d_{\text{int}}(V, W) = d_{\text{bot}}(\mathcal{B}(V), \mathcal{B}(W))$$

# Estrategia Demostración Isometría

El objetivo de la Sección 3 es demostrar este teorema. Al tratarse de una igualdad, hay que demostrar dos desigualdades:

# Estrategia Demostración Isometría

El objetivo de la Sección 3 es demostrar este teorema. Al tratarse de una igualdad, hay que demostrar dos desigualdades:

1.  $d_{\text{int}}(V, W) \leq d_{\text{bot}}(\mathcal{B}(V), \mathcal{B}(W))$



# Estrategia Demostración Isometría

El objetivo de la Sección 3 es demostrar este teorema. Al tratarse de una igualdad, hay que demostrar dos desigualdades:

1.  $d_{\text{int}}(V, W) \leq d_{\text{bot}}(\mathcal{B}(V), \mathcal{B}(W))$
2.  $d_{\text{int}}(V, W) \geq d_{\text{bot}}(\mathcal{B}(V), \mathcal{B}(W))$

# Estrategia Demostración Isometría

El objetivo de la Sección 3 es demostrar este teorema. Al tratarse de una igualdad, hay que demostrar dos desigualdades:

1.  $d_{\text{int}}(V, W) \leq d_{\text{bot}}(\mathcal{B}(V), \mathcal{B}(W))$

2.  $d_{\text{int}}(V, W) \geq d_{\text{bot}}(\mathcal{B}(V), \mathcal{B}(W))$

La primera desigualdad (Teorema 3.1.1) es consecuencia del Teorema de la forma Normal y del hecho que si dos intervalos están  $\delta$ -emparejados, entonces, sus módulos de persistencia están  $\delta$ -entrelazados. (Ejercicio 2.2.7)

# Estrategia Demostración Isometría

El objetivo de la Sección 3 es demostrar este teorema. Al tratarse de una igualdad, hay que demostrar dos desigualdades:

1.  $d_{\text{int}}(V, W) \leq d_{\text{bot}}(\mathcal{B}(V), \mathcal{B}(W))$

2.  $d_{\text{int}}(V, W) \geq d_{\text{bot}}(\mathcal{B}(V), \mathcal{B}(W))$

La primera desigualdad (Teorema 3.1.1) es consecuencia del Teorema de la forma Normal y del hecho que si dos intervalos están  $\delta$ -emparejados, entonces, sus módulos de persistencia están  $\delta$ -entrelazados. (Ejercicio 2.2.7) Queremos probar la segunda desigualdad (Teorema 3.1.2) llamada también Teorema de Estabilidad Algebraica.

# Estrategia Demostración Estabilidad Algebraica

De manera análoga a la primera demostración, queremos probar que dados dos módulos de persistencia  $\delta$ -entrelazados, es posible construir un  $\delta$ -emparejamiento entre sus códigos de barras.

# Estrategia Demostración Estabilidad Algebraica

De manera análoga a la primera demostración, queremos probar que dados dos módulos de persistencia  $\delta$ -entrelazados, es posible construir un  $\delta$ -emparejamiento entre sus códigos de barras. Haremos esto en dos pasos: Primero, hay que encontrar una manera de asociar un emparejamiento a cualquier morfismo entre módulos de persistencia. Es decir, inducir emparejamientos.

# Estrategia Demostración Estabilidad Algebraica

De manera análoga a la primera demostración, queremos probar que dados dos módulos de persistencia  $\delta$ -entrelazados, es posible construir un  $\delta$ -emparejamiento entre sus códigos de barras. Haremos esto en dos pasos: Primero, hay que encontrar una manera de asociar un emparejamiento a cualquier morfismo entre módulos de persistencia. Es decir, inducir emparejamientos. Segundo, veremos que tal construcción al ser aplicada a morfismos de  $\delta$ -entrelazamiento produce  $\delta$ -emparejamientos.

# Estrategia Demostración Estabilidad Algebraica

De manera análoga a la primera demostración, queremos probar que dados dos módulos de persistencia  $\delta$ -entrelazados, es posible construir un  $\delta$ -emparejamiento entre sus códigos de barras. Haremos esto en dos pasos: Primero, hay que encontrar una manera de asociar un emparejamiento a cualquier morfismo entre módulos de persistencia. Es decir, inducir emparejamientos. Segundo, veremos que tal construcción al ser aplicada a morfismos de  $\delta$ -entrelazamiento produce  $\delta$ -emparejamientos. El resto de esta presentación está centrado en la construcción del primer paso.

# Contenidos

Recapitulación

3.2.2 Construcción de Emparejamientos Inducidos

Ejemplo 3.2.11



## Proposición 3.2.1

En lo siguiente, consideramos  $(V, \pi)$  y  $(W, \theta)$  módulos de persistencia, con correspondientes códigos de barras  $\mathcal{B}$  y  $\mathcal{C}$ .

## Proposición 3.2.1

En lo siguiente, consideramos  $(V, \pi)$  y  $(W, \theta)$  módulos de persistencia, con correspondientes códigos de barras  $\mathcal{B}$  y  $\mathcal{C}$ . Antes de empezar la construcción, recordemos un resultado que obtuvimos anteriormente.

## Proposición 3.2.1

En lo siguiente, consideramos  $(V, \pi)$  y  $(W, \theta)$  módulos de persistencia, con correspondientes códigos de barras  $\mathcal{B}$  y  $\mathcal{C}$ . Antes de empezar la construcción, recordemos un resultado que obtuvimos anteriormente.

Si  $\mathcal{B}$  es un código de barras e  $I = (b, d]$  un intervalo, denotamos por  $\mathcal{B}_I^- \subset \mathcal{B}$  a la colección de barras  $(a, d] \in \mathcal{B}$  con  $a \leq b$ . Así:

Proposición 3.2.1:

Si  $\iota : (V, \pi) \rightarrow (W, \theta)$  es injectivo, entonces,  $\#\mathcal{B}_I^- \leq \#\mathcal{C}_I^-$

# Emparejamiento para morfismos inyectivos

Primero, construiremos emparejamientos inducidos por morfismos para los casos particulares de morfismos inyectivos y suprayectivos. Después, combinaremos estos resultados para morfismos en general.

# Emparejamiento para morfismos inyectivos

Primero, construiremos emparejamientos inducidos por morfismos para los casos particulares de morfismos inyectivos y suprayectivos. Después, combinaremos estos resultados para morfismos en general. Para el caso de morfismos inyectivos tenemos:

# Emparejamiento para morfismos inyectivos

Primero, construiremos emparejamientos inducidos por morfismos para los casos particulares de morfismos inyectivos y suprayectivos. Después, combinaremos estos resultados para morfismos en general. Para el caso de morfismos inyectivos tenemos:

## Definición 3.2.4

Supongamos que  $\iota : V \rightarrow W$  es **inyectivo**. Definimos el *emparejamiento inducido*  $\mu_{inj} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$  de la siguiente manera: Para cada  $d \in \mathbf{R} \cup \{\infty\}$ , ordenamos la barras de  $\mathcal{B}$  de la forma  $(\cdot, d]$  siguiendo el orden de “más largas primero”:

$$(b_1, d] \supset (b_2, d] \supset \dots \supset (b_k, d] \text{ en } \mathcal{B}, \text{ con } b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_k ,$$

# Emparejamiento para morfismos inyectivos

Primero, construiremos emparejamientos inducidos por morfismos para los casos particulares de morfismos inyectivos y suprayectivos. Después, combinaremos estos resultados para morfismos en general. Para el caso de morfismos inyectivos tenemos:

## Definición 3.2.4

Supongamos que  $\iota : V \rightarrow W$  es **inyectivo**. Definimos el *emparejamiento inducido*  $\mu_{inj} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$  de la siguiente manera: Para cada  $d \in \mathbf{R} \cup \{\infty\}$ , ordenamos la barras de  $\mathcal{B}$  de la forma  $(\cdot, d]$  siguiendo el orden de “más largas primero”:

$$(b_1, d] \supset (b_2, d] \supset \dots \supset (b_k, d] \text{ en } \mathcal{B}, \text{ con } b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_k ,$$

de manera similar para  $\mathcal{C}$ :

$$(c_1, d] \supset (c_2, d] \supset \dots \supset (c_l, d] \text{ en } \mathcal{C}, \text{ con } c_1 \leq c_2 \leq \dots \leq c_l .$$

# Emparejamiento para morfismos inyectivos

Primero, construiremos emparejamientos inducidos por morfismos para los casos particulares de morfismos inyectivos y suprayectivos. Después, combinaremos estos resultados para morfismos en general. Para el caso de morfismos inyectivos tenemos:

## Definición 3.2.4

Supongamos que  $\iota : V \rightarrow W$  es **inyectivo**. Definimos el *emparejamiento inducido*  $\mu_{inj} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$  de la siguiente manera: Para cada  $d \in \mathbf{R} \cup \{\infty\}$ , ordenamos la barras de  $\mathcal{B}$  de la forma  $(\cdot, d]$  siguiendo el orden de “más largas primero”:

$$(b_1, d] \supset (b_2, d] \supset \dots \supset (b_k, d] \text{ en } \mathcal{B}, \text{ con } b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_k ,$$

de manera similar para  $\mathcal{C}$ :

$$(c_1, d] \supset (c_2, d] \supset \dots \supset (c_l, d] \text{ en } \mathcal{C}, \text{ con } c_1 \leq c_2 \leq \dots \leq c_l .$$

Notamos que por (3.2.1) debe ser  $k \leq l$ .



# Emparejamiento para morfismos inyectivos

Cont. Def. 3.2.4

Ahora, emparejamos las barras siguiendo el orden de “más largas primero”. Es decir, en cada paso, tomamos el intervalo más largo de la primera lista y lo emparejamos con el más largo de la segunda.

# Emparejamiento para morfismos inyectivos

Cont. Def. 3.2.4

Ahora, emparejamos las barras siguiendo el orden de “más largas primero”. Es decir, en cada paso, tomamos el intervalo más largo de la primera lista y lo emparejamos con el más largo de la segunda. Repetimos para toda  $d \in \mathbf{R} \cup \{\infty\}$  y obtenemos un emparejamiento  $\mu_{inj} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ .

# Emparejamiento para morfismos inyectivos

## Proposición 3.2.5

Si hay un morfismo inyectivo de  $(V, \pi)$  a  $(W, \theta)$ , entonces, el emparejamiento inducido  $\mu_{inj} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$  cumple:

(1)  $\text{coim } \mu_{inj} = \mathcal{B}$ ,

# Emparejamiento para morfismos inyectivos

## Proposición 3.2.5

Si hay un morfismo inyectivo de  $(V, \pi)$  a  $(W, \theta)$ , entonces, el emparejamiento inducido  $\mu_{inj} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$  cumple:

- (1)  $\text{coim } \mu_{inj} = \mathcal{B}$ ,
- (2) Para todo  $(b, d] \in \mathcal{B}$ ,  $\mu_{inj}(b, d] = (c, d]$  con  $c \leq b$ .

# Emparejamiento para morfismos inyectivos

## Proposición 3.2.5

Si hay un morfismo inyectivo de  $(V, \pi)$  a  $(W, \theta)$ , entonces, el emparejamiento inducido  $\mu_{inj} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$  cumple:

- (1)  $\text{coim } \mu_{inj} = \mathcal{B}$ ,
- (2) Para todo  $(b, d] \in \mathcal{B}$ ,  $\mu_{inj}(b, d] = (c, d]$  con  $c \leq b$ .

## Observación 3.2.6

El emparejamiento inducido no depende del morfismo  $\iota$ , solo del supuesto de existencia de un morfismo inyectivo.

# Emparejamiento para morfismos inyectivos

## Demostración

Ambas propiedades son consecuencia de la proposición 3.2.1

# Emparejamiento para morfismos inyectivos

## Demostración

Ambas propiedades son consecuencia de la proposición 3.2.1

- (1) Como emparejamos “más largas primero”, tenemos que  $\mu(b_i, d] = (c_i, d]$ . Para el intervalo  $(b_k, d]$ , sabemos que  $k \leq l$ , por lo que todas las barras de  $\mathcal{B}$  están emparejadas.

# Emparejamiento para morfismos inyectivos

## Demostración

Ambas propiedades son consecuencia de la proposición 3.2.1

- (1) Como emparejamos “más largas primero”, tenemos que  $\mu(b_i, d] = (c_i, d]$ . Para el intervalo  $(b_k, d]$ , sabemos que  $k \leq l$ , por lo que todas las barras de  $\mathcal{B}$  están emparejadas.
- (2) Para los intervalos  $(b_i, d]$ , aplicando inductivamente la proposición, tenemos que  $b_i \leq c_i$  para cada  $1 \leq i \leq k$ .



# Emparejamiento para morfismos suprayectivos

Ahora, consideraremos el caso de un morfismo suprayectivo.  
Tenemos una construcción y propiedades análogas.

# Emparejamiento para morfismos suprayectivos

Ahora, consideraremos el caso de un morfismo suprayectivo. Tenemos una construcción y propiedades análogas.

## Definición 3.2.7

Supongamos que  $\sigma : V \rightarrow W$  es **suprayectivo**. Definimos el *emparejamiento inducido*  $\mu_{sur} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$  como sigue: Para cada  $b \in \mathbf{R}$ , ordenamos los intervalos  $(b, \cdot] \in \mathcal{B}$  de manera decreciente:

$$(b, d_1] \supset (b, d_2] \supset \dots \supset (b, d_k] \text{ en } \mathcal{B}, \text{ con } d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_k ,$$

# Emparejamiento para morfismos suprayectivos

Ahora, consideraremos el caso de un morfismo suprayectivo. Tenemos una construcción y propiedades análogas.

## Definición 3.2.7

Supongamos que  $\sigma : V \rightarrow W$  es **suprayectivo**. Definimos el *emparejamiento inducido*  $\mu_{sur} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$  como sigue: Para cada  $b \in \mathbf{R}$ , ordenamos los intervalos  $(b, \cdot] \in \mathcal{B}$  de manera decreciente:

$$(b, d_1] \supset (b, d_2] \supset \dots \supset (b, d_k] \text{ en } \mathcal{B}, \text{ con } d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_k ,$$

de manera similar para  $\mathcal{C}$ :

$$(b, e_1] \supset (b, e_2] \supset \dots \supset (b, e_l] \text{ en } \mathcal{C}, \text{ con } e_1 \geq e_2 \geq \dots \geq e_l .$$

# Emparejamiento para morfismos suprayectivos

Ahora, consideraremos el caso de un morfismo suprayectivo. Tenemos una construcción y propiedades análogas.

## Definición 3.2.7

Supongamos que  $\sigma : V \rightarrow W$  es **suprayectivo**. Definimos el *emparejamiento inducido*  $\mu_{sur} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$  como sigue: Para cada  $b \in \mathbf{R}$ , ordenamos los intervalos  $(b, \cdot] \in \mathcal{B}$  de manera decreciente:

$$(b, d_1] \supset (b, d_2] \supset \dots \supset (b, d_k] \text{ en } \mathcal{B}, \text{ con } d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_k ,$$

de manera similar para  $\mathcal{C}$ :

$$(b, e_1] \supset (b, e_2] \supset \dots \supset (b, e_l] \text{ en } \mathcal{C}, \text{ con } e_1 \geq e_2 \geq \dots \geq e_l .$$

Los emparejamos siguiendo el principio de “más largas primero” y ensamblamos estos emparejamientos para toda  $b$ .

# Emparejamiento para morfismos suprayectivos

## Proposición 3.2.8

Si hay un morfismo suprayectivo de  $(V, \pi)$  a  $(W, \theta)$ , entonces, el emparejamiento inducido  $\mu_{sur} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$  cumple:

(1)  $\text{im } \mu_{sur} = \mathcal{C},$

# Emparejamiento para morfismos suprayectivos

## Proposición 3.2.8

Si hay un morfismo suprayectivo de  $(V, \pi)$  a  $(W, \theta)$ , entonces, el emparejamiento inducido  $\mu_{sur} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$  cumple:

- (1)  $\text{im } \mu_{sur} = \mathcal{C}$ ,
- (2)  $\mu_{inj}(b, d] = (b, e]$  con  $d \geq e$ .

# Emparejamiento para morfismos suprayectivos

## Proposición 3.2.8

Si hay un morfismo suprayectivo de  $(V, \pi)$  a  $(W, \theta)$ , entonces, el emparejamiento inducido  $\mu_{sur} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$  cumple:

- (1)  $\text{im } \mu_{sur} = \mathcal{C}$ ,
- (2)  $\mu_{inj}(b, d] = (b, e]$  con  $d \geq e$ .

La demostración es análoga a la anterior considerando ahora la proposición 3.2.3 ( $\#\mathcal{B}_I^+ \geq \#\mathcal{C}_I^+$ )

# Emparejamiento para morfismo general

Para cualquier morfismo  $f : V \rightarrow W$  podemos considerar la siguiente descomposición:

$$V \xrightarrow{\text{surjection}} \operatorname{im} f \xrightarrow{\text{injection}} W$$



# Emparejamiento para morfismo general

Para cualquier morfismo  $f : V \rightarrow W$  podemos considerar la siguiente descomposición:

$$V \xrightarrow{\text{surjection}} \operatorname{im} f \xrightarrow{\text{injection}} W$$

Usando las proposiciones 3.2.8 y 3.2.5 al tener estos morfismos podemos construir los emparejamientos inducidos

$\mu_{sur} : \mathcal{B}(V) \rightarrow \mathcal{B}(\operatorname{im} f)$  y  $\mu_{inj} : \mathcal{B}(\operatorname{im} f) \rightarrow \mathcal{B}(W)$ . Los cuales nos permiten dar la siguiente definición:

# Emparejamiento para morfismo general

Para cualquier morfismo  $f : V \rightarrow W$  podemos considerar la siguiente descomposición:

$$V \xrightarrow{\text{surjection}} \text{im } f \xrightarrow{\text{injection}} W$$

Usando las proposiciones 3.2.8 y 3.2.5 al tener estos morfismos podemos construir los emparejamientos inducidos

$\mu_{sur} : \mathcal{B}(V) \rightarrow \mathcal{B}(\text{im } f)$  y  $\mu_{inj} : \mathcal{B}(\text{im } f) \rightarrow \mathcal{B}(W)$ . Los cuales nos permiten dar la siguiente definición:

## Definición 3.2.9

Para un morfismo general  $f$ , definimos el *emparejamiento inducido*  $\mu(f) : \mathcal{B}(V) \rightarrow \mathcal{B}(W)$  como la composición  $\mu(f) = \mu_{inj} \circ \mu_{sur}$ , la cual esta definida ya que  $\text{im } \mu_{sur} = \mathcal{B}(\text{im } f) = \text{coim}(\mu_{inj})$ .

# Contenidos

Recapitulación

3.2.2 Construcción de Emparejamientos Inducidos

Ejemplo 3.2.11

## Ejemplo 3.2.11

Consideramos  $V = \mathcal{F}(1, 3] \oplus \mathcal{F}(1, 2]$  y  $W = \mathcal{F}(3, 4] \oplus \mathcal{F}(0, 2]$ , sea  $f : V \rightarrow W$  un morfismo definido como  $f|_{\mathcal{F}(1, 3]} = 0$  y

$f|_{\mathcal{F}(1, 2]} : \mathcal{F}(1, 2] \rightarrow \mathcal{F}(0, 2]$  (multiplicación por 1)

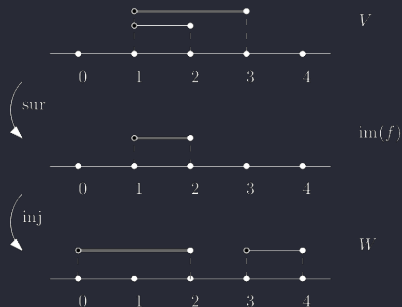
Entonces,  $\text{im } f = 0 \oplus \mathcal{F}(1, 2] \subset \mathcal{F}(3, 4] \oplus \mathcal{F}(0, 2]$ .

## Ejemplo 3.2.11

Consideramos  $V = \mathcal{F}(1, 3] \oplus \mathcal{F}(1, 2]$  y  $W = \mathcal{F}(3, 4] \oplus \mathcal{F}(0, 2]$ , sea  $f : V \rightarrow W$  un morfismo definido como  $f|_{\mathcal{F}(1,3]} = 0$  y

$f|_{\mathcal{F}(1,2]} : \mathcal{F}(1, 2] \rightarrow \mathcal{F}(0, 2]$  (multiplicación por 1)

Entonces,  $\text{im } f = 0 \oplus \mathcal{F}(1, 2] \subset \mathcal{F}(3, 4] \oplus \mathcal{F}(0, 2]$ .



## Ejemplo 3.2.11

Así,  $\mu_{sur} : (1, 3] \mapsto (1, 2]$ ,  $\mu_{inj}(1, 2] \mapsto (0, 2]$ . Entonces, el emparejamiento inducido  $\mu(f) : \mathcal{B}(V) \rightarrow \mathcal{B}(W)$  lleva a  $\mu(f) : (1, 3] \mapsto (0, 2]$ , apesar que  $f|_{\mathcal{F}(1,3]} = 0$ .