Caítulo 2: Códigos de Barras

Teorema de la Forma Normal

Haydeé Peruyero

31 de agosto de 2023

CENTRO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

Submódulos Semi-sobreyectivos

Lema 2.1.10. Sea $W \subsetneq V$ un submódulo semi-sobreyetivo. Entonces existe un submódulo semi-sobreyectivo $W_\sharp \subset V$, tal que $W_\sharp \cong W \oplus \mathbb{F}(I)$, donde $I = (a, b]$ con $a, b \in \operatorname{Spec} V$.

Submódulos Semi-sobreyectivos

Lema 2.1.10. Sea $W \subsetneq V$ un submódulo semi-sobreyetivo. Entonces existe un submódulo semi-sobreyectivo $W_\sharp \subset V$, tal que $W_\sharp \cong W \oplus \mathbb{F}(I)$, donde $I = (a, b]$ con $a, b \in \operatorname{Spec} V$.

Demostración:
Como $W \subseteq V$ es un submódulo semi-sobreyectivo, entonces por definición $W_t = V_t$ para $t \leq r$ hasta algún r,

Submódulos Semi-sobreyectivos

Lema 2.1.10. Sea $W \subsetneq V$ un submódulo semi-sobreyetivo. Entonces existe un submódulo semi-sobreyectivo $W_\sharp \subset V$, tal que $W_\sharp \cong W \oplus \mathbb{F}(I)$, donde $I = (a, b]$ con $a, b \in \operatorname{Spec} V$.

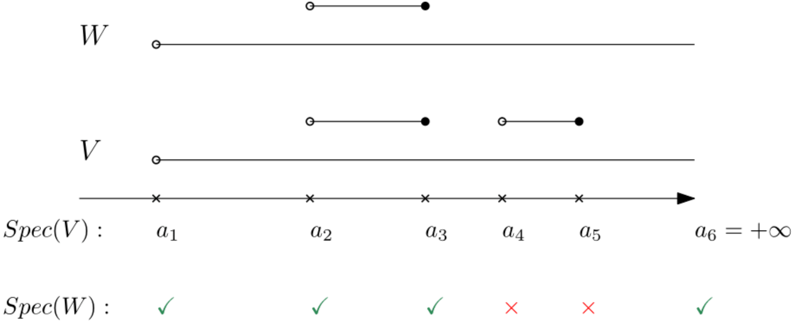
Demostración:
Como $W \subseteq V$ es un submódulo semi-sobreyectivo, entonces por definición $W_t = V_t$ para $t \leq r$ hasta algún r, además también $W^i = V^i$ hasta algún índice.

Submódulos Semi-sobreyectivos

Lema 2.1.10. Sea $W \subsetneq V$ un submódulo semi-sobreyetivo. Entonces existe un submódulo semi-sobreyectivo $W_\sharp \subset V$, tal que $W_\sharp \cong W \oplus \mathbb{F}(I)$, donde $I = (a, b]$ con $a, b \in \operatorname{Spec} V$.

Demostración:
Como $W \subseteq V$ es un submódulo semi-sobreyectivo, entonces por definición $W_t = V_t$ para $t \leq r$ hasta algún r, además también $W^i = V^i$ hasta algún índice.
Tomemos el mínimo i para el cual $W^i \subsetneq V^i$ y sea $z^i \in V^i \setminus W^i$.

Si nos fijamos en los representantes en los módulos de persistencia, entonces el menor valor de t para el cual $W_t \subsetneq V_t$ es a_{i-1}.



Demostración

Definamos $z^k = p_{i,k}(z^i) \in V^k$ para $k > i$.

Demostración

Definamos $z^k = p_{i,k}(z^i) \in V^k$ para $k > i$. Existen dos casos:

1. Para todo $k > i$, $z^k \notin W^k$. (Corresponde a tener un intervalo infinito I que comienza en a_{i-1}.)

Demostración

Definamos $z^k = p_{i,k}(z^i) \in V^k$ para $k > i$. Existen dos casos:

1. Para todo $k > i$, $z^k \notin W^k$. (Corresponde a tener un intervalo infinito I que comienza en a_{i-1}.)
2. Existe algún $k > i$ para el cual z^k cae en W^k. (Corresponde a añadir el intervalo finito I.)

Demostración

Definamos $z^k = p_{i,k}(z^i) \in V^k$ para $k > i$. Existen dos casos:

1. Para todo $k > i$, $z^k \notin W^k$. (Corresponde a tener un intervalo infinito I que comienza en a_{i-1}.)
2. Existe algún $k > i$ para el cual z^k cae en W^k. (Corresponde a añadir el intervalo finito I.)

Dem. Segundo caso: Escojamos el mínimo $j > i$ para el cual $z^j \in W^j$. Como $p_{i,j} : W^i \to W^j$ es sobre, entonces existe $x^i \in W^i$ tal que $p_{i,j}(z^i) = z^j = p_{i,j}(x^i)$.

Demostración

Definamos $z^k = p_{i,k}(z^i) \in V^k$ para $k > i$. Existen dos casos:

1. Para todo $k > i$, $z^k \notin W^k$. (Corresponde a tener un intervalo infinito I que comienza en a_{i-1}.)
2. Existe algún $k > i$ para el cual z^k cae en W^k. (Corresponde a añadir el intervalo finito I.)

Dem. Segundo caso: Escojamos el mínimo $j > i$ para el cual $z^j \in W^j$. Como $p_{i,j} : W^i \to W^j$ es sobre, entonces existe $x^i \in W^i$ tal que $p_{i,j}(z^i) = z^j = p_{i,j}(x^i)$.
Definamos $y^i = z^i - x^i$. Vamos a usar y^i en lugar de z^i:

Dem. Segundo caso:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
V^1 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & V^i & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & V^j & \longrightarrow & V^{j+1} \longrightarrow \cdots \\
 & & & & \rotatebox{90}{$\in$} & & & & \rotatebox{90}{$\in$} & & \\
 & & & & z^i & \mapsto & \cdots & \mapsto & z^j & & \\
 & & & & \rotatebox{90}{$\notin$} & & & & \rotatebox{90}{$\in$} & & \\
W^1 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & W^i & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & W^j & \longrightarrow & W^{j+1} \longrightarrow \cdots \\
 & & & & & & & & & & \\
 & & & & 0 \neq y^i = z^i - x^i & \mapsto & \cdots & \mapsto & y^j = 0 & \mapsto & 0 \mapsto \cdots
\end{array}
$$

Notemos que $p_{i,k}(y^i) \notin W^k$ para todo $i < k < j$ (ya que como j es el índice minimal después de i para el cual z^j está en W^j).

Dem. Segundo caso:

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
V^1 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & V^i & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & V^j & \longrightarrow & V^{j+1} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & & & \rotatebox{90}{$\in$} & & & & \rotatebox{90}{$\in$} & & & & \\
 & & & & z^i & \mapsto & \cdots & \mapsto & z^j & & & & \\
 & & & & \rotatebox{90}{$\notin$} & & & & \rotatebox{90}{$\in$} & & & & \\
W^1 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & W^i & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & W^j & \longrightarrow & W^{j+1} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & 0 \neq y^i = z^i - x^i & \mapsto & \cdots & \mapsto & y^j = 0 & \mapsto & 0 & \mapsto & \cdots
\end{array}
$$

Notemos que $p_{i,k}(y^i) \notin W^k$ para todo $i < k < j$ (ya que como j es el índice minimal después de i para el cual z^j está en W^j).
También, $p_{i,j}(y^i) = 0$, por linealidad de $p_{i,j}$, y así $p_{i,k}(y^i) = (p_{j,k} \circ p_{i,j})(y^i) = 0$ para todo $k \geq j$).

Dem. Segundo caso:

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
V^1 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & V^i & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & V^j & \longrightarrow & V^{j+1} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & & & \rotatebox{90}{$\in$} & & & & \rotatebox{90}{$\in$} & & & & \\
 & & & & z^i & \mapsto & \cdots & \mapsto & z^j & & & & \\
 & & & & \rotatebox{90}{$\notin$} & & & & \rotatebox{90}{$\in$} & & & & \\
W^1 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & W^i & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & W^j & \longrightarrow & W^{j+1} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & 0 \neq y^i = z^i - x^i & \mapsto & \cdots & \mapsto & y^j = 0 & \mapsto & 0 & \mapsto & \cdots
\end{array}
$$

Notemos que $p_{i,k}(y^i) \notin W^k$ para todo $i < k < j$ (ya que como j es el índice minimal después de i para el cual z^j está en W^j). También, $p_{i,j}(y^i) = 0$, por linealidad de $p_{i,j}$, y así $p_{i,k}(y^i) = (p_{j,k} \circ p_{i,j})(y^i) = 0$ para todo $k \geq j$). Es decir, y^j está donde $p_{i,j}(y^i)$ se desvanece por primera vez (y después de lo cual permanece siempre cero).

Dem. Segundo caso:

Denotemos $y^k = p_{i,k}(y^i)$. Vamos a construir el submódulo P de V con los siguientes datos:

Dem. Segundo caso:

Denotemos $y^k = p_{i,k}(y^i)$. Vamos a construir el submódulo P de V con los siguientes datos: para el elemento $y^k \in V^k$, el cual es una clase de equivalencia, tomaremos sus representantes $(y^k)_s \in V_s$ para $s \in (a_{k-1}, a_k]$, y construimos:

$$P_s = \begin{cases} \operatorname{span}_{\mathbb{F}}((y^k)_s) & s \in (a_{k-1}, a_k] \subseteq (a_{i-1}, a_{j-1}],\ k = i, \ldots, j-1 \\ 0 & s \notin (a_{i-1}, a_{j-1}] \end{cases},$$

Dem. Segundo caso:

Denotemos $y^k = p_{i,k}(y^i)$. Vamos a construir el submódulo P de V con los siguientes datos: para el elemento $y^k \in V^k$, el cual es una clase de equivalencia, tomaremos sus representantes $(y^k)_s \in V_s$ para $s \in (a_{k-1}, a_k]$, y construimos:

$$P_s = \begin{cases} \operatorname{span}_{\mathbb{F}}((y^k)_s) & s \in (a_{k-1}, a_k] \subseteq (a_{i-1}, a_{j-1}],\ k = i, \ldots, j-1 \\ 0 & s \notin (a_{i-1}, a_{j-1}] \end{cases},$$

donde el morfismo de persistencia es inducido por los morfismos $\pi^V_{s,t}$ de V, i.e.

$$\pi^P_{s,t} = \begin{cases} \pi^V_{s,t} & s, t \in (a_{i-1}, a_{j-1}] \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}.$$

Entonces, $P = \{P_s\}$ es un submódulo de V isomorfo a $\mathbb{F}(a_{i-1}, a_{j-1}]$.

Dem. Segundo caso:

Afirmación 2.1.11: Tomemos $W_\sharp = W + P$. Entonces:

1. $W_\sharp = W \oplus P$,
2. $W_\sharp$ es un submódulo sobreyectivo de V.

Esto concluye el segundo caso.

Dem. Af. 2.1.11 (1):

PD: para cada $s \in \mathbb{R}$, $W_s \cap P_s = \{0\}$.

Dem. Af. 2.1.11 (1):

PD: para cada $s \in \mathbb{R}$, $W_s \cap P_s = \{0\}$.

Notemos que si $s \notin (a_{i-1}, a_{j-1}]$, entonces $P_s = \{0\}$, y así $W_s \cap P_s = \{0\}$.

Dem. Af. 2.1.11 (1):

PD: para cada $s \in \mathbb{R}$, $W_s \cap P_s = \{0\}$.

Notemos que si $s \notin (a_{i-1}, a_{j-1}]$, entonces $P_s = \{0\}$, y así $W_s \cap P_s = \{0\}$.

Ahora, sea $s \in (a_{k-1}, a_k] \subset (a_{i-1}, a_{j-1}]$.
PD: $V_s \ni (y^k)_s \notin W_s$.

Dem. Af. 2.1.11 (1):

PD: para cada $s \in \mathbb{R}$, $W_s \cap P_s = \{0\}$.

Notemos que si $s \notin (a_{i-1}, a_{j-1}]$, entonces $P_s = \{0\}$, y así $W_s \cap P_s = \{0\}$.

Ahora, sea $s \in (a_{k-1}, a_k] \subset (a_{i-1}, a_{j-1}]$.
PD: $V_s \ni (y^k)_s \notin W_s$.

Por contradicción, supongamos que $(y^k)_s \in W_s$.

Dem. Af. 2.1.11 (1):

PD: para cada $s \in \mathbb{R}$, $W_s \cap P_s = \{0\}$.

Notemos que si $s \notin (a_{i-1}, a_{j-1}]$, entonces $P_s = \{0\}$, y así $W_s \cap P_s = \{0\}$.

Ahora, sea $s \in (a_{k-1}, a_k] \subset (a_{i-1}, a_{j-1}]$.
PD: $V_s \ni (y^k)_s \notin W_s$.

Por contradicción, supongamos que $(y^k)_s \in W_s$.
Tomemos $r = \sup\{t \ : \ W_s = V_s \ \forall s \leq t\}$, como en la definición de semi-sobreyectivo de W (notar: $r = a_{i-1}$).

Dem. Af. 2.1.11 (1):

PD: para cada $s \in \mathbb{R}$, $W_s \cap P_s = \{0\}$.

Notemos que si $s \notin (a_{i-1}, a_{j-1}]$, entonces $P_s = \{0\}$, y así $W_s \cap P_s = \{0\}$.

Ahora, sea $s \in (a_{k-1}, a_k] \subset (a_{i-1}, a_{j-1}]$.
PD: $V_s \ni (y^k)_s \notin W_s$.

Por contradicción, supongamos que $(y^k)_s \in W_s$.
Tomemos $r = \sup\{t \ : \ W_s = V_s \ \forall s \leq t\}$, como en la definición de semi-sobreyectivo de W (notar: $r = a_{i-1}$).
Entonces para cada $r \leq a_{k-1} < t < s$ existe un elemento $w_t \in W_t$ el cual satisface $\pi_{t,s}(w_t) = (y^k)_s$.

Dem. Af. 2.1.11 (1):

PD: para cada $s \in \mathbb{R}$, $W_s \cap P_s = \{0\}$.

Notemos que si $s \notin (a_{i-1}, a_{j-1}]$, entonces $P_s = \{0\}$, y así $W_s \cap P_s = \{0\}$.

Ahora, sea $s \in (a_{k-1}, a_k] \subset (a_{i-1}, a_{j-1}]$.
PD: $V_s \ni (y^k)_s \notin W_s$.

Por contradicción, supongamos que $(y^k)_s \in W_s$.
Tomemos $r = \sup\{t \ : \ W_s = V_s \ \forall s \leq t\}$, como en la definición de semi-sobreyectivo de W (notar: $r = a_{i-1}$).
Entonces para cada $r \leq a_{k-1} < t < s$ existe un elemento $w_t \in W_t$ el cual satisface $\pi_{t,s}(w_t) = (y^k)_s$.

CENTRO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

Dem. Af. 2.1.11 (1):

Considerar el elemento $\tilde{w} \in W^k$ cuyos representantes en cada W_t son:

$$(\tilde{w})_t = \begin{cases} w_t & a_{k-1} < t < s \\ (y^k)_s & t = s \\ \pi_{st}((y^k)_s) & s < t \leq a_k \end{cases}.$$

Notemos que $\tilde{w}$ está bien definido. En realidad, $\tilde{w} = y^k$, y así $y^k \in W^k$.

Dem. Af. 2.1.11 (1):

Considerar el elemento $\tilde{w} \in W^k$ cuyos representantes en cada W_t son:

$$(\tilde{w})_t = \begin{cases} w_t & a_{k-1} < t < s \\ (y^k)_s & t = s \\ \pi_{st}((y^k)_s) & s < t \leq a_k \end{cases} .$$

Notemos que $\tilde{w}$ está bien definido. En realidad, $\tilde{w} = y^k$, y así $y^k \in W^k$.
Pero esto nos contradice la minimalidad de j. Así, $(y^k)_s \notin W_s$ para todo $s \in (a_{i-1}, a_{j-1}]$.

Dem. Af. 2.1.11 (2):

Notemos primero que $W_\sharp$ es un submódulo de V, ya que es una suma directa de dos submódulos de V.

Dem. Af. 2.1.11 (2):

Notemos primero que $W_\sharp$ es un submódulo de V, ya que es una suma directa de dos submódulos de V.

Denotemos por $\pi^P_{s,t}$ al morfismo de persistencia del módulo de persistencia $P = \mathbb{F}(a_i, a_j]$.

Dem. Af. 2.1.11 (2):

Notemos primero que $W_\sharp$ es un submódulo de V, ya que es una suma directa de dos submódulos de V.

Denotemos por $\pi^P_{s,t}$ al morfismo de persistencia del módulo de persistencia $P = \mathbb{F}(a_i, a_j]$.

Sea r como en el inciso (1). Entonces por definición y usando el Ejercicio 2.1.9, para cualquier $t \leq r$ tenemos que $W_t = V_t$.

Dem. Af. 2.1.11 (2):

Notemos primero que $W_\sharp$ es un submódulo de V, ya que es una suma directa de dos submódulos de V.

Denotemos por $\pi^P_{s,t}$ al morfismo de persistencia del módulo de persistencia $P = \mathbb{F}(a_i, a_j]$.

Sea r como en el inciso (1). Entonces por definición y usando el Ejercicio 2.1.9, para cualquier $t \leq r$ tenemos que $W_t = V_t$.
Ya que para $t < r = a_{i-1}$ por construcción $P_t = 0$, y además $(W_\sharp)_t = V_t$ para todo $t \leq r$.

Dem. Af. 2.1.11 (2):

Notemos primero que $W_\sharp$ es un submódulo de V, ya que es una suma directa de dos submódulos de V.

Denotemos por $\pi^P_{s,t}$ al morfismo de persistencia del módulo de persistencia $P = \mathbb{F}(a_i, a_j]$.

Sea r como en el inciso (1). Entonces por definición y usando el Ejercicio 2.1.9, para cualquier $t \leq r$ tenemos que $W_t = V_t$.
Ya que para $t < r = a_{i-1}$ por construcción $P_t = 0$, y además $(W_\sharp)_t = V_t$ para todo $t \leq r$.

Después, notemos que los morfismos de persistencia de $W_\sharp$ se obtienen al tomar las sumas directas de los morfismos de W y de P: $\pi^W_{s,t} \oplus \pi^P_{s,t}$.

Dem. Af. 2.1.11 (2):

Notemos primero que $W_\sharp$ es un submódulo de V, ya que es una suma directa de dos submódulos de V.

Denotemos por $\pi^P_{s,t}$ al morfismo de persistencia del módulo de persistencia $P = \mathbb{F}(a_i, a_j]$.

Sea r como en el inciso (1). Entonces por definición y usando el Ejercicio 2.1.9, para cualquier $t \leq r$ tenemos que $W_t = V_t$.
Ya que para $t < r = a_{i-1}$ por construcción $P_t = 0$, y además $(W_\sharp)_t = V_t$ para todo $t \leq r$.

Después, notemos que los morfismos de persistencia de $W_\sharp$ se obtienen al tomar las sumas directas de los morfismos de W y de P: $\pi^W_{s,t} \oplus \pi^P_{s,t}$.
Ambos morfismos son sobres para cualquier $t > s > r$, y por lo tanto sus sumas directas son sobres.

Dem. Primer caso:

Primer caso: $z^j \notin W^j$ para todo $j > i$:

Dem. Primer caso:

Primer caso: $z^j \notin W^j$ para todo $j > i$:
Debemos construir un submódulo P usando z^i.

Dem. Primer caso:

Primer caso: $z^j \notin W^j$ para todo $j > i$:
Debemos construir un submódulo P usando z^i.
Vamos a tomar un submódulo P que corresponda a $I = (a_{i-1}, +\infty)$ de la siguiente forma:

$$P_s = \begin{cases} 0 & s \leq a_{i-1} \\ \operatorname{span}_{\mathbb{F}}((z^k)_s) & s \in (a_{k-1}, a_k] \subseteq (a_{i-1}, +\infty),\ k = i, i+1, \dots \end{cases}.$$

CENTRO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

Dem. Primer caso:

Primer caso: $z^j \notin W^j$ para todo $j > i$:
Debemos construir un submódulo P usando z^i.
Vamos a tomar un submódulo P que corresponda a $I = (a_{i-1}, +\infty)$ de la siguiente forma:

$$P_s = \begin{cases} 0 & s \leq a_{i-1} \\ \mathrm{span}_{\mathbb{F}}((z^k)_s) & s \in (a_{k-1}, a_k] \subseteq (a_{i-1}, +\infty),\ k = i, i+1, \dots \end{cases}.$$

Entonces $W_\sharp = W \oplus P$ es un submódulo sobreyectivo de V y $P = \{P_s\}$ es isomorfo a $\mathbb{F}(a_{i-1}, +\infty)$.

CENTRO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

Teorema de la Forma Normal

Sea (V, π) un módulo de persistencia. Entonces existe una colección finita $\{(I_i, m_i)\}_{i=1}^{N}$ de intervalos I_i con sus multiplicidades m_i, donde $I_i = (a_i, b_i]$ o $I_i = (a_i, \infty)$, $m_i \in \mathbb{N}$, $I_i \neq I_j$ para $i \neq j$, tal que

$$V = \bigoplus_{i=1}^{N} \mathbb{F}(I_i)^{m_i} \ .$$

La igualdad se refiere a son isomorfos como módulos de persistencia.
Más aún, estos datos son únicos hasta permutación, i.e., para cualquier módulo de persistencia le corresponde un único código de barras $\mathcal{B}(V)$, que consiste de los intervalos I_i con multiplicidad m_i.
Este código de barras se llama *el código de barras de V*.

CENTRO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

Demostración TFN: Existencia

Primero, la existencia se sigue del lema 2.1.10.

Demostración TFN: Existencia

Primero, la existencia se sigue del lema 2.1.10.

De echo, si tomamos $W(0) = \{0\}$ y construimos inductivamente una sucesión $W(i)$ de submódulos semi-sobreyectivos al tomar $W(i+1) = W(i)_\sharp$ como en el lema 2.1.10. En cada paso, la dimensión de $W(i)$ incrementa al menos por 1, y por lo tanto el proceso termina cuando se alcanza Totaldim V.

Demostración TFN: Unicidad

Por el ejercicio 2.1.5, tenemos que el espectro de un módulo de persistencia es un invariante bajo isomorfismo, entonces dado un módulo V, el conjunto $\mathrm{Spec}(V)$ determina los puntos finales de los intervalos I que aparecen en su descomposición de la Forma Normal.

Demostración TFN: Unicidad

Por el ejercicio 2.1.5, tenemos que el espectro de un módulo de persistencia es un invariante bajo isomorfismo, entonces dado un módulo V, el conjunto $\mathrm{Spec}(V)$ determina los puntos finales de los intervalos I que aparecen en su descomposición de la Forma Normal.

Solo falta mostrar que dado V es posible reconstruir las multiplicidades de los intervalos en la descomposición de forma única.

Demostración TFN: Unicidad

Por el ejercicio 2.1.5, tenemos que el espectro de un módulo de persistencia es un invariante bajo isomorfismo, entonces dado un módulo V, el conjunto $\mathrm{Spec}(V)$ determina los puntos finales de los intervalos I que aparecen en su descomposición de la Forma Normal.

Solo falta mostrar que dado V es posible reconstruir las multiplicidades de los intervalos en la descomposición de forma única.

Sea $\mathcal{B} = \{(I_i, m_i)\}$ un código de barras que satisface el Teorema 2.1.2 para V, es decir, $V = \bigoplus_i \mathbb{F}(I_i)^{m_i}$.

Demostración TFN: Unicidad

Por el ejercicio 2.1.5, tenemos que el espectro de un módulo de persistencia es un invariante bajo isomorfismo, entonces dado un módulo V, el conjunto $\mathrm{Spec}(V)$ determina los puntos finales de los intervalos I que aparecen en su descomposición de la Forma Normal.

Solo falta mostrar que dado V es posible reconstruir las multiplicidades de los intervalos en la descomposición de forma única.

Sea $\mathcal{B} = \{(I_i, m_i)\}$ un código de barras que satisface el Teorema 2.1.2 para V, es decir, $V = \bigoplus_i \mathbb{F}(I_i)^{m_i}$.

Consideremos todos sus puntos finales $a_1 < a_2 < \ldots < a_N < a_{N+1} = +\infty$ y notemos que $a_1, \ldots, a_{N+1}$ forma el espectro de V.

Demostración TFN: Unicidad

Denotemos por $\hat{\mathcal{B}}$ a la colección de todos los intervalos de la forma $I_{ij} = (a_i, a_j]$ para $1 \leq i < j \leq N+1$, con multiplicidades $\hat{m}_{ij}$, donde $\hat{m}_{ij} = m_{ij}$ si I_{ij} está presente en $\mathcal{B}$ y es 0 en caso contrario.

Demostración TFN: Unicidad

Denotemos por $\hat{\mathcal{B}}$ a la colección de todos los intervalos de la forma $I_{ij} = (a_i, a_j]$ para $1 \leq i < j \leq N+1$, con multiplicidades $\hat{m}_{ij}$, donde $\hat{m}_{ij} = m_{ij}$ si I_{ij} está presente en $\mathcal{B}$ y es 0 en caso contrario.

Debemos recuperar las multiplicidades m_{ij} que corresponden a V para probar la unicidad. Consideremos el límite del módulo de persistencia V^i con el morfismo natural $p_{i,j} : V^i \to V^j$.

Demostración TFN: Unicidad

Denotemos por $\hat{\mathcal{B}}$ a la colección de todos los intervalos de la forma $I_{ij} = (a_i, a_j]$ para $1 \leq i < j \leq N+1$, con multiplicidades $\hat{m}_{ij}$, donde $\hat{m}_{ij} = m_{ij}$ si I_{ij} está presente en $\mathcal{B}$ y es 0 en caso contrario.

Debemos recuperar las multiplicidades m_{ij} que corresponden a V para probar la unicidad. Consideremos el límite del módulo de persistencia V^i con el morfismo natural $p_{i,j} : V^i \to V^j$.

Denotemos por $b_{ij} = \operatorname{rk} p_{i,j}$, y asumamos que $p_{i,j} = 0$ si $i \leq 0$ o $j > N+1$.

Cada intervalo $I_{\alpha\beta}$ en $\hat{\mathcal{B}}$ que comienza después de a_i y termina antes o en a_j contribuye $m_{\alpha\beta}$ a $b_{i,j}$,

Cada intervalo $I_{\alpha\beta}$ en $\hat{\mathcal{B}}$ que comienza después de a_i y termina antes o en a_j contribuye $m_{\alpha\beta}$ a $b_{i,j}$, así tenemos que

$$b_{ij} = \sum_{\alpha<i,\ \beta\geq j} m_{\alpha\beta} = \sum_{\alpha\leq i-1,\ \beta\geq j} m_{\alpha\beta}\ . \tag{1}$$

Cada intervalo $I_{\alpha\beta}$ en $\hat{\mathcal{B}}$ que comienza después de a_i y termina antes o en a_j contribuye $m_{\alpha\beta}$ a $b_{i,j}$, así tenemos que

$$b_{ij} = \sum_{\alpha<i,\ \beta\geq j} m_{\alpha\beta} = \sum_{\alpha\leq i-1,\ \beta\geq j} m_{\alpha\beta}\ . \tag{1}$$

De esta expresión, obtenemos lo siguiente: para m_{ij},

$$m_{ij} = b_{i+1,j} + b_{i,j+1} - b_{i,j} - b_{i+1,j+1}\ , \tag{2}$$

Cada intervalo $I_{\alpha\beta}$ en $\hat{\mathcal{B}}$ que comienza después de a_i y termina antes o en a_j contribuye $m_{\alpha\beta}$ a $b_{i,j}$, así tenemos que

$$b_{ij} = \sum_{\alpha<i,\ \beta\geq j} m_{\alpha\beta} = \sum_{\alpha\leq i-1,\ \beta\geq j} m_{\alpha\beta} \ . \tag{1}$$

De esta expresión, obtenemos lo siguiente: para m_{ij},

$$m_{ij} = b_{i+1,j} + b_{i,j+1} - b_{i,j} - b_{i+1,j+1} \ , \tag{2}$$

Reconstruyendo así las multiplicidades a partir de los datos encapsulados en la colección $\{V^i\}$ que corresponden a V.

Ejemplo de la Ecuación 2

Consideremos el módulo de persistencia $\mathbb{F}(a_1, +\infty)$.

Ejemplo de la Ecuación 2

Consideremos el módulo de persistencia $\mathbb{F}(a_1, +\infty)$.
Entonces $\mathrm{Spec}\,(\mathbb{F}(a_1, +\infty)) = \{a_1, a_2 = +\infty\}$, $V^1 = 0$, $V^2 = \mathbb{F}$, y además tenemos

$$m_{12} = b_{22} + b_{13} - b_{23} - b_{12} = 1 \ .$$

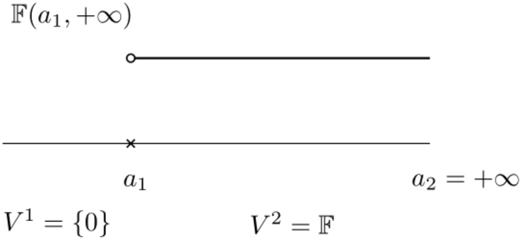
CENTRO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

Ejemplo de la Ecuación 2

Consideremos el módulo de persistencia $\mathbb{F}(a_1, +\infty)$.
Entonces $\mathrm{Spec}\,(\mathbb{F}(a_1, +\infty)) = \{a_1, a_2 = +\infty\}$, $V^1 = 0$, $V^2 = \mathbb{F}$, y además tenemos

$$m_{12} = b_{22} + b_{13} - b_{23} - b_{12} = 1 \ .$$

Notar que solamente $b_{22} = 1$ es no cero en las expresiones de la forma m_{12}.



Ejercicios/Observaciones

1. Sea I un intervalo y consideremos el módulo $\mathbb{F}(I)$. Entonces el endomorfismo de anillos es isomorfo a F.

Ejercicios/Observaciones

1. Sea I un intervalo y consideremos el módulo $\mathbb{F}(I)$. Entonces el endomorfismo de anillos es isomorfo a F.
2. Los módulos de intervalo son idecomposables, es decir, no se pueden presentar no trivialmente como una suma directa de dos diagramas de persistencia.

Prueba alternativa del TFN