Seminario de Persistencia en Geometría 2024-1

3.2.2. Construcción de emparejamientos inducidos.
3.3. Principales lemas y demostración del teorema.

Miguel Evangelista

28 de septiembre de 2023

Instituto de Matemáticas UNAM

Contenidos

Instituto de Matemáticas UNAM

Correspondencia Suprayectiva

Consideremos la categoría de los códigos de barras con las correspondencias como morfismos.

Instituto de Matemáticas
UNAM

Correspondencia Suprayectiva

Consideremos la categoría de los códigos de barras con las correspondencias como morfismos.

Anteriormente, se estableció una correspondencia entre los objetos de la categoría de módulos de persistencia y los de la categoría de códigos de barras.

Instituto de Matemáticas UNAM

Correspondencia Suprayectiva

Sean V y W dos modulos de persistencia.

Correspondencia Suprayectiva

Sean V y W dos modulos de persistencia.

Dado un morfismo $f : V \to W$, se tiene que existe una correspondencia $\mu(f)$ entre $\mathcal{B}(V)$ y $\mathcal{B}(W)$.

Instituto de Matemáticas UNAM

Correspondencia Suprayectiva

Sean V y W dos modulos de persistencia.

Dado un morfismo $f : V \to W$, se tiene que existe una correspondencia $\mu(f)$ entre $\mathcal{B}(V)$ y $\mathcal{B}(W)$.

Surge la siguiente duda: ¿El mapeo $\mu(f)$ da un functor entre las dos categorías?

Instituto de Matemáticas UNAM

Ejemplo

Consideremos el siguiente ejemplo:

Ejemplo

Sea I un intervalo y consideremos los siguientes módulos de persistencia

$$U = V = \mathbb{F}(I) \otimes \mathbb{F}(I), \ W = \mathbb{F}(I),$$

y dos morfismos $f : U \to V$ y $g : V \to W$ dados por $f(s, t) = (s, 0)$ y $g(s, t) = t$.

Instituto de Matemáticas UNAM

Ejemplo

Notemos lo siguiente:

- $\mu(f)$ empareja una copia de I con una copia de I en $\mathcal{B}(V)$ y la segunda copia permanece sin emparejar.
- $\mu(g)$ empareja una copia de I con I en $\mathcal{B}(W)$

Ejemplo

Notemos lo siguiente:

- $\mu(f)$ empareja una copia de I con una copia de I en $\mathcal{B}(V)$ y la segunda copia permanece sin emparejar.
- $\mu(g)$ empareja una copia de I con I en $\mathcal{B}(W)$

Entonces, $\mu(g) \circ \mu(f)$ empareja una copia de I con I en $\mathcal{B}(W)$ y la segunda queda sin emparejar.

Ejemplo

Notemos lo siguiente:

- $\mu(f)$ empareja una copia de I con una copia de I en $\mathcal{B}(V)$ y la segunda copia permanece sin emparejar.
- $\mu(g)$ empareja una copia de I con I en $\mathcal{B}(W)$

Entonces, $\mu(g) \circ \mu(f)$ empareja una copia de I con I en $\mathcal{B}(W)$ y la segunda queda sin emparejar.

Por otro lado también se tiene que $g \circ f = 0$.

Instituto de Matemáticas UNAM

Ejemplo

Ahora notemos lo siguiente:

Ejemplo

Ahora notemos lo siguiente:

Si restringimos los morfismos entre módulos de persistencia de tal manera que sólo estemos en el caso inyectivo o supreyectivo.

Ejemplo

Ahora notemos lo siguiente:

Si restringimos los morfismos entre módulos de persistencia de tal manera que sólo estemos en el caso inyectivo o supreyectivo.

El mapeo que lleva un módulo de persistencia V a su código de barras $\mathcal{B}(V)$ y un morfismo $f : V \to W$ a la correspondencia inducida (μ_{inj} ó μ_{sur}) es un functor, tal y como se indica en la afirmación 3.2.13.

Instituto de Matemáticas UNAM

Afirmación 3.2.13

Afirmación 3.2.13

Consideremos el siguiente diagrama conmutativo en la categoría de módulos de persistencia con sólo el caso inyectivo o suprayectivo.

Afirmación 3.2.13

Afirmación 3.2.13
Consideremos el siguiente diagrama conmutativo en la categoría de módulos de persistencia con sólo el caso inyectivo o suprayectivo.

$$
\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "h"'] & V \arrow[r, "g"] & W
\end{tikzcd}
$$

Afirmación 3.2.13
Consideremos el siguiente diagrama conmutativo en la categoría de módulos de persistencia con sólo el caso inyectivo o suprayectivo.

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "h"'] & V \arrow[r, "g"] & W \end{tikzcd}$$

Entonces el diagrama correspondiente a nivel de códigos de barras también conmuta:

Instituto de Matemáticas UNAM

Afirmación 3.2.13

Afirmación 3.2.13
Consideremos el siguiente diagrama conmutativo en la categoría de módulos de persistencia con sólo el caso inyectivo o suprayectivo.

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "h"'] & V \arrow[r, "g"] & W \end{tikzcd}$$

Entonces el diagrama correspondiente a nivel de códigos de barras también conmuta:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{B}(U) \arrow[r, "\mu_\natural(f)"] \arrow[rr, bend right, "\mu_\natural(h)"'] & \mathcal{B}(V) \arrow[r, "\mu_\natural(g)"] & \mathcal{B}(W) \end{tikzcd}$$

Instituto de Matemáticas UNAM

Afirmación 3.2.13
Consideremos el siguiente diagrama conmutativo en la categoría de módulos de persistencia con sólo el caso inyectivo o suprayectivo.

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "h"'] & V \arrow[r, "g"] & W \end{tikzcd}$$

Entonces el diagrama correspondiente a nivel de códigos de barras también conmuta:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{B}(U) \arrow[r, "\mu_\natural(f)"] \arrow[rr, bend right, "\mu_\natural(h)"'] & \mathcal{B}(V) \arrow[r, "\mu_\natural(g)"] & \mathcal{B}(W) \end{tikzcd}$$

donde μ_q denota μ_{inj} o μ_{sur}, respectivamente.

Instituto de Matemáticas UNAM

Afirmación 3.2.13

Demostramos la functorialidad en el caso de inyectividad

Afirmación 3.2.13

Demostramos la functorialidad en el caso de inyectividad

Para comenzar la demostración debemos recordar la definición 3.2.4 y la proposición 3.2.1.

Afirmación 3.2.13

Demostramos la functorialidad en el caso de inyectividad

Para comenzar la demostración debemos recordar la definición 3.2.4 y la proposición 3.2.1.

Dem (de la Afirmación 3.2.13)

Para cualquier $d \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, los códigos de barras correspondientes a U, V, W consisten en las siguientes barras que terminan en d:

Instituto de Matemáticas UNAM

Afirmación 3.2.13

$$\mathcal{B}(U) : (a_1, d] \supseteq \ldots \supseteq (a_k, d]$$
$$\mathcal{B}(V) : (b_1, d] \supseteq \ldots \supseteq (b_k, d] \supseteq \ldots \supseteq (b_l, d]$$
$$\mathcal{B}(W) : (c_1, d] \supseteq \ldots \supseteq (c_k, d] \supseteq \ldots \supseteq (c_l, d] \supseteq \ldots \supseteq (c_q, d]$$

donde $k \leq l \leq q$.

Instituto de Matemáticas UNAM

Afirmación 3.2.13

Además, $\mu_{inj}(f)(a_i, d] = (b_i, d]$, $\mu_{inj}(g)(b_i, d] = (c_i, d]$ y $\mu_{inj}(h)(a_i, d] = (c_i, d]$ para cualquier $1 \leq i \leq k$.

Afirmación 3.2.13

Además, $\mu_{inj}(f)(a_i, d] = (b_i, d]$, $\mu_{inj}(g)(b_i, d] = (c_i, d]$ y $\mu_{inj}(h)(a_i, d] = (c_i, d]$ para cualquier $1 \leq i \leq k$.

Esto es válido para cualquier d, por lo que la diagrama en el nivel de los códigos de barras conmuta.

Contenidos

Instituto de Matemáticas UNAM

Introducción

Supongamos que (V, π^V) y (W, π^W) son $\delta-$ intercalados.

Instituto de Matemáticas UNAM

Introducción

Supongamos que (V, π^V) y (W, π^W) son $\delta-$ intercalados.

Lo anterior quiere decir, que existen dos morfismos $f : V \to W[\delta]$ y $g : W \to V[\delta]$, tales que $g[\delta] \circ f = \Phi_V^{2\delta}$ y $f[\delta] \circ g = \Phi_W^{2\delta}$, donde $\Phi_V^{2\delta} = \pi^V_{t,t+2\delta}$ y $\Phi_W^{2\delta} = \pi^W_{t,t+2\delta}$.

Instituto de Matemáticas UNAM

Introducción

Supongamos que (V, π^V) y (W, π^W) son $\delta-$ intercalados.

Lo anterior quiere decir, que existen dos morfismos $f : V \to W[\delta]$ y $g : W \to V[\delta]$, tales que $g[\delta] \circ f = \Phi_V^{2\delta}$ y $f[\delta] \circ g = \Phi_W^{2\delta}$, donde $\Phi_V^{2\delta} = \pi_{t,t+2\delta}^V$ y $\Phi_W^{2\delta} = \pi_{t,t+2\delta}^W$.

El objetivo principal es construir una δ-correspondencia entre $\mathcal{B}(V)$ y $\mathcal{B}(W)$.

Instituto de Matemáticas UNAM

Introducción

Supongamos que (V, π^V) y (W, π^W) son $\delta-$ intercalados.

Lo anterior quiere decir, que existen dos morfismos $f : V \to W[\delta]$ y $g : W \to V[\delta]$, tales que $g[\delta] \circ f = \Phi_V^{2\delta}$ y $f[\delta] \circ g = \Phi_W^{2\delta}$, donde $\Phi_V^{2\delta} = \pi_{t,t+2\delta}^V$ y $\Phi_W^{2\delta} = \pi_{t,t+2\delta}^W$.

El objetivo principal es construir una δ-correspondencia entre $\mathcal{B}(V)$ y $\mathcal{B}(W)$.

Recordemos la notación $\mathcal{B}_\epsilon$ indica la colección de barras de longitud $> \epsilon$ en un código de barras $\mathcal{B}$.

Instituto de Matemáticas UNAM

Lema 3.3.1

Lema 3.3.1
Supongamos que tenemos dos módulos de persistencia $\delta-$entrelazados (V, π^V) y (W, π^W), es decir, existen morfismos $f : V \to W[\delta]$ y $g : W \to V[\delta]$.

[1] Recordemos la Definición 3.2.7

Lema 3.3.1
Supongamos que tenemos dos módulos de persistencia $\delta-$entrelazados (V, π^V) y (W, π^W), es decir, existen morfismos $f : V \to W[\delta]$ y $g : W \to V[\delta]$.

Consideremos un mapeo suprayectivo $f : V \to im(f)$ y el emparejamiento inducido $\mu_{sur} : \mathcal{B}(V) \to \mathcal{B}(im(f))$[1], Entonces:

[1] Recordemos la Definición 3.2.7

Lema 3.3.1
Supongamos que tenemos dos módulos de persistencia $\delta-$entrelazados (V, π^V) y (W, π^W), es decir, existen morfismos $f : V \to W[\delta]$ y $g : W \to V[\delta]$.

Consideremos un mapeo suprayectivo $f : V \to im(f)$ y el emparejamiento inducido $\mu_{sur} : \mathcal{B}(V) \to \mathcal{B}(im(f))$[1], Entonces:

- $coim\mu_{sur} \supseteq \mathcal{B}(V)_{2\delta}$
- $im\mu_{sur} = \mathcal{B}(im(f))$, y
- μ_{sur} lleva $(b, d] \in coim\mu_{sur}$ a $(b, d']$, con $d' \in [d - 2\delta, d]$.

[1] Recordemos la Definición 3.2.7

Lema 3.3.2
Supongamos que tenemos dos módulos de persistencia $\delta-$entrelazados (V, π^V) y (W, π^W), es decir, existen morfismos $f : V \to W[\delta]$ y $g : W \to V[\delta]$.

[2] Recordemos la Definición 3.2.4

Lema 3.3.2

Supongamos que tenemos dos módulos de persistencia $\delta-$entrelazados (V, π^V) y (W, π^W), es decir, existen morfismos $f : V \to W[\delta]$ y $g : W \to V[\delta]$.

Consideremos el apeo inyectivo $im(f) \to W[\delta]$ y el emparejamiento inducido $\mu_{inj} : \mathcal{B}(im(f)) \to \mathcal{B}(W[\delta])^2$, Entonces:

[2] Recordemos la Definición 3.2.4

Lema 3.3.2

Lema 3.3.2
Supongamos que tenemos dos módulos de persistencia $\delta-$entrelazados (V, π^V) y (W, π^W), es decir, existen morfismos $f : V \to W[\delta]$ y $g : W \to V[\delta]$.

Consideremos el apeo inyectivo $im(f) \to W[\delta]$ y el emparejamiento inducido $\mu_{inj} : \mathcal{B}(im(f)) \to \mathcal{B}(W[\delta])$[2], Entonces:

- $coim\mu_{inj} = \mathcal{B}(im(f))$
- $im\mu_{inj} \supseteq \mathcal{B}(W[\delta])_{2\delta}$, y
- μ_{inj} lleva $(b, d'] \in coim\mu_{inj}$ a $(b', d']$, con $b' \in [b - 2\delta, b]$.

Los lemas 3.3.1 y 3.3.2 se prueban en la sección 3.4.

[2] Recordemos la Definición 3.2.4

Instituto de Matemáticas UNAM

Teo 3.1.2

Teo 3.1.2
Sean V y W dos módulos de persistencia y sus respectivos códigos de barras $\mathcal{B}(V)$ y $\mathcal{B}(V)$. Entonces

$$d_{int}(V, W) \geq d_{bot}(B(V), B(W)).$$

Demostración del Teo 3.1.2

Consideremos:

- El emparejamiento inducido $\mu(f) = \mu_{inj} \circ \mu_{sur}$, y

Demostración del Teo 3.1.2

Demostración del Teo 3.1.2
Consideremos:

- El emparejamiento inducido $\mu(f) = \mu_{inj} \circ \mu_{sur}$, y
- la función $\Psi_\delta : \mathcal{B}(W[\delta]) \to \mathcal{B}(W)$ definido para todas las barras como $(a, b] \to (a + \delta, b + \delta]$.

Demostración del Teo 3.1.2

Consideremos:

- El emparejamiento inducido $\mu(f) = \mu_{inj} \circ \mu_{sur}$, y
- la función $\Psi_\delta : \mathcal{B}(W[\delta]) \to \mathcal{B}(W)$ definido para todas las barras como $(a, b] \to (a + \delta, b + \delta]$.

Notemos que Ψ_δ desplaza cada barra a la derecha en δ

Demostración del Teo 3.1.2
Consideremos:

- El emparejamiento inducido $\mu(f) = \mu_{inj} \circ \mu_{sur}$, y
- la función $\Psi_\delta : \mathcal{B}(W[\delta]) \to \mathcal{B}(W)$ definido para todas las barras como $(a, b] \to (a + \delta, b + \delta]$.

Notemos que Ψ_δ desplaza cada barra a la derecha en δ
Afirmamos que $\Psi_\delta \circ \mu(f)$ es un $\delta-$entrelazamiento entre $\mathcal{B}(V)$ y $\mathcal{B}(W)$.

Demostración del Teo 3.1.2

Utilizando el Lema 3.3.1 y Lema 3.3.2, obtenemos el siguiente diagrama:

Demostración del Teo 3.1.2

Utilizando el Lema 3.3.1 y Lema 3.3.2, obtenemos el siguiente diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{B}(V) \arrow[d, phantom, "\rotatebox{90}{$\subseteq$}"] & & \mathcal{B}(W[\delta])_{2\delta} \arrow[d, phantom, "\rotatebox{90}{$\supseteq$}"] & \mathcal{B}(W)_{2\delta} \arrow[d, phantom, "\rotatebox{90}{$\supseteq$}"] \\
\mathcal{B}(V)_{2\delta} \arrow[r, "\mu_{\mathrm{sur}}"] \arrow[d, phantom, "\rotatebox{90}{$\in$}"] & \mathcal{B}(\operatorname{im} f) \arrow[r, "\mu_{\mathrm{inj}}"] \arrow[d, phantom, "\rotatebox{90}{$\in$}"] & \operatorname{im} \mu_{\mathrm{inj}} \arrow[r, "\Psi_\delta"] \arrow[d, phantom, "\rotatebox{90}{$\in$}"] & \mathcal{B}(W) \arrow[d, phantom, "\rotatebox{90}{$\in$}"] \\
(b, d] \arrow[r, rightsquigarrow] & (b, d'] \arrow[r, rightsquigarrow] & (b', d'] \arrow[r, rightsquigarrow] & (b' + \delta, d' + \delta]
\end{tikzcd}
$$

Demostración del Teo 3.1.2

Por el Lema 3,3,2, se tiene que una barra $(b, d] \in \mathcal{B}(V)_{2\delta}$ se lleva a $\mu_{sur}(b, d] = (b, d'] \in \mathcal{B}(im(f))$, donde $d - 2\delta \leq d' \leq d$.

Demostración del Teo 3.1.2

Demostración del Teo 3.1.2
Por el Lema 3,3,2, se tiene que una barra $(b, d] \in \mathcal{B}(V)_{2\delta}$ se lleva a $\mu_{sur}(b, d] = (b, d'] \in \mathcal{B}(im(f))$, donde $d - 2\delta \leq d' \leq d$.

Entonces, dicha barra se lleva a $\mu_{inj}(b, d'] = (b', d'] \in \mathcal{B}(W[\delta])_{2\delta}$, donde $b - 2\delta \leq b' \leq b$, por el Lema 3,3,1.

Instituto de Matemáticas UNAM

Demostración del Teo 3.1.2

Demostración del Teo 3.1.2
Por el Lema 3,3,2, se tiene que una barra $(b, d] \in \mathcal{B}(V)_{2\delta}$ se lleva a $\mu_{sur}(b, d] = (b, d'] \in \mathcal{B}(im(f))$, donde $d - 2\delta \leq d' \leq d$.

Entonces, dicha barra se lleva a $\mu_{inj}(b, d'] = (b', d'] \in \mathcal{B}(W[\delta])_{2\delta}$, donde $b - 2\delta \leq b' \leq b$, por el Lema 3,3,1.

Por último, $(b', d']$ se desplaza a la derecha en δ, es decir, se lleva a $(b + \delta, d' + \delta]$ mediante Ψ_δ

Demostración del Teo 3.1.2

En particular, se tiene que toda barra en $\mathcal{B}(V)_{2\delta}$ es de hecho emparejada por $\mu(f)$.

Demostración del Teo 3.1.2

Demostración del Teo 3.1.2
En particular, se tiene que toda barra en $\mathcal{B}(V)_{2\delta}$ es de hecho emparejada por $\mu(f)$.

De una forma análoga, se puede comprobar que toda barra en $\mathcal{B}(W)_{2\delta}$ coincide.

Instituto de Matemáticas UNAM

Demostración del Teo 3.1.2

Además, a partir de la información sobre b' y d' obtenemos lo siguiente:

Demostración del Teo 3.1.2

Demostración del Teo 3.1.2

Además, a partir de la información sobre b' y d' obtenemos lo siguiente:

$$\begin{cases} d - 2\delta \le d' \le d \\ b - 2\delta \le b' \le b \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} d - \delta \le d' + \delta \le d + \delta \\ b - \delta \le b' + \delta \le b + \delta \end{cases}$$

Demostración del Teo 3.1.2
Además, a partir de la información sobre b' y d' obtenemos lo siguiente:

$$\left\{\begin{array}{l} d-2\delta \leq d' \leq d \\ b-2\delta \leq b' \leq b \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} d-\delta \leq d'+\delta \leq d+\delta \\ b-\delta \leq b'+\delta \leq b+\delta \end{array}\right.$$

Por lo que $\Psi_\delta \circ \mu(f)$ es una $\delta-$emparejamiento entre $\mathcal{B}(V)$ y $\mathcal{B}(W)$. Por lo tanto,

Demostración del Teo 3.1.2
Además, a partir de la información sobre b' y d' obtenemos lo siguiente:

$$\begin{cases} d-2\delta \leq d' \leq d \\ b-2\delta \leq b' \leq b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d-\delta \leq d'+\delta \leq d+\delta \\ b-\delta \leq b'+\delta \leq b+\delta \end{cases}$$

Por lo que $\Psi_\delta \circ \mu(f)$ es una $\delta-$emparejamiento entre $\mathcal{B}(V)$ y $\mathcal{B}(W)$. Por lo tanto,

$$d_{bot}(\mathcal{B}(V), \mathcal{B}(W)) \leq d_{int}(V, W).$$