## Seminario de Persistencia en Geometría 2024-1

- 3.2.2. Construcción de emparejamientos inducidos.
- 3.3. Principales lemas y demostración del teorema.

Miguel Evangelista

28 de septiembre de 2023



### Contenidos

Construcción de emparejamientos inducidos (Continuación)

Ejemplo

Afirmación 3.2.13

Principales lemas y demostración del teorema.

Introducción

Lema 3.3.1

Lema 3.3.2

Teo 3.1.2

Demo del Teo 3.1.2



Consideremos la categoría de los códigos de barras con las correspondencias como morfismos.



Consideremos la categoría de los códigos de barras con las correspondencias como morfismos.

Anteriormente, se estableció una correspondencia entre los objetos de la categoría de módulos de persistencia y los de la categoría de códigos de barras.



Sean V y W dos modulos de persistencia.



Sean V y W dos modulos de persistencia.

Dado un morfismo  $f:V\to W$ , se tiene que existe una correspondencia  $\mu(f)$  entre  $\mathcal{B}(V)$  y  $\mathcal{B}(W)$ .



Sean V y W dos modulos de persistencia.

Dado un morfismo  $f:V\to W$ , se tiene que existe una correspondencia  $\mu(f)$  entre  $\mathcal{B}(V)$  y  $\mathcal{B}(W)$ .

Surge la siguiente duda: ¿El mapeo  $\mu(f)$  da un functor entre las dos categorías?



Consideremos el siguiente ejemplo:

## Ejemplo

Sea  $\it I$  un intervalo y consideremos los siguientes módulos de persistencia

$$U = V = \mathbb{F}(I) \otimes \mathbb{F}(I), \ W = \mathbb{F}(I),$$

y dos morfismos  $f:U\to V$  y  $g:V\to W$  dados por f(s,t)=(s,0) y g(s,t)=t.



#### Notemos lo siguiente:

- $\triangleright \mu(f)$  empareja una copia de I con una copia de I en  $\mathcal{B}(V)$  y la segunda copia permanece sin emparejar.
- $ightharpoonup \mu(g)$  empareja una copia de I con I en  $\mathcal{B}(W)$



#### Notemos lo siguiente:

- $\mu(f)$  empareja una copia de I con una copia de I en  $\mathcal{B}(V)$  y la segunda copia permanece sin emparejar.
- $ightharpoonup \mu(g)$  empareja una copia de I con I en  $\mathcal{B}(W)$

Entonces,  $\mu(g) \circ \mu(f)$  empareja una copia de I con I en  $\mathcal{B}(W)$  y la segunda queda sin emparejar.



#### Notemos lo siguiente:

- $\triangleright \mu(f)$  empareja una copia de I con una copia de I en  $\mathcal{B}(V)$  y la segunda copia permanece sin emparejar.
- $ightharpoonup \mu(g)$  empareja una copia de I con I en  $\mathcal{B}(W)$

Entonces,  $\mu(g) \circ \mu(f)$  empareja una copia de I con I en  $\mathcal{B}(W)$  y la segunda queda sin emparejar.

Por otro lado también se tiene que  $g \circ f = 0$ .



Ahora notemos lo siguiente:



Ahora notemos lo siguiente:

Si restringimos los morfismos entre módulos de persistencia de tal manera que sólo estemos en el caso inyectivo o supreyectivo.



#### Ahora notemos lo siguiente:

Si restringimos los morfismos entre módulos de persistencia de tal manera que sólo estemos en el caso inyectivo o supreyectivo.

El mapeo que lleva un módulo de persistencia V a su código de barras  $\mathcal{B}(V)$  y un morfismo  $f:V\to W$  a la correspondencia inducida  $(\mu_{inj} \circ \mu_{sur})$  es un functor, tal y como se indica en la afirmación 3.2.13.



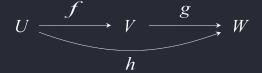
Afirmación 3.2.13

Consideremos el siguiente diagrama conmutativo en la categoría de módulos de persistencia con sólo el caso inyectivo o suprayectivo.



#### Afirmación 3.2.13

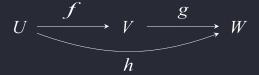
Consideremos el siguiente diagrama conmutativo en la categoría de módulos de persistencia con sólo el caso inyectivo o suprayectivo.





#### Afirmación 3.2.13

Consideremos el siguiente diagrama conmutativo en la categoría de módulos de persistencia con sólo el caso inyectivo o suprayectivo.

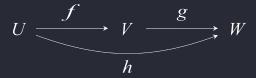


Entonces el diagrama correspondiente a nivel de códigos de barras también conmuta:



#### Afirmación 3.2.13

Consideremos el siguiente diagrama conmutativo en la categoría de módulos de persistencia con sólo el caso inyectivo o suprayectivo.



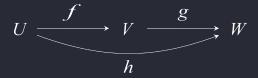
Entonces el diagrama correspondiente a nivel de códigos de barras también conmuta:

$$\mathcal{B}(U) \xrightarrow{\mu_{\natural}(f)} \mathcal{B}(V) \xrightarrow{\mu_{\natural}(g)} \mathcal{B}(W)$$



#### Afirmación 3.2.13

Consideremos el siguiente diagrama conmutativo en la categoría de módulos de persistencia con sólo el caso inyectivo o suprayectivo.



Entonces el diagrama correspondiente a nivel de códigos de barras también conmuta:

$$\mathcal{B}(U) \xrightarrow{\mu_{\natural}(f)} \mathcal{B}(V) \xrightarrow{\mu_{\natural}(g)} \mathcal{B}(W)$$

donde  $\mu_q$  denota  $\mu_{inj}$  o  $\mu_{sur}$ , respectivamente.



Demostramos la functorialidad en el caso de inyectividad



Demostramos la functorialidad en el caso de inyectividad

Para comenzar la demostración debemos recordar la definición 3.2.4 y la proposición 3.2.1.



Demostramos la functorialidad en el caso de inyectividad

Para comenzar la demostración debemos recordar la definición 3.2.4 y la proposición 3.2.1.

Dem (de la Afirmación 3.2.13)

Para cualquier  $d \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ , los códigos de barras correspondientes a U, V, W consisten en las siguientes barras que terminan en d:



$$\mathcal{B}(U): (a_1, d] \supseteq \ldots \supseteq (a_k, d]$$

$$\mathcal{B}(V): (b_1, d] \supseteq \ldots \supseteq (b_k, d] \supseteq \ldots \supseteq (b_l, d]$$

$$\mathcal{B}(W): (c_1, d] \supseteq \ldots \supseteq (c_k, d] \supseteq \ldots \supseteq (c_l, d] \supseteq \ldots \supseteq (c_q, d]$$

donde  $k \le l \le q$ .



Además, 
$$\mu_{inj}(f)(a_i, d] = (b_i, d]$$
,  $\mu_{inj}(g)(b_i, d] = (c_i, d]$  y  $\mu_{inj}(h)(a_i, d] = (c_i, d]$  para cualquier  $1 \le i \le k$ .



Además, 
$$\mu_{inj}(f)(a_i,d]=(b_i,d]$$
,  $\mu_{inj}(g)(b_i,d]=(c_i,d]$  y  $\mu_{inj}(h)(a_i,d]=(c_i,d]$  para cualquier  $1 \leq i \leq k$ .

Esto es válido para cualquier d, por lo que la diagrama en el nivel de los códigos de barras conmuta.



### Contenidos

Construcción de emparejamientos inducidos (Continuación)
Ejemplo

#### Principales lemas y demostración del teorema.

Introducción

Lema 3.3.1

Lema 3.3.2

Teo 3.1.2

Demo del Teo 3.1.2



Supongamos que  $(V, \pi^V)$  y  $(W, \pi^W)$  son  $\delta$ - intercalados.



Supongamos que  $(V, \pi^V)$  y  $(W, \pi^W)$  son  $\delta$ — intercalados.

Lo anterior quiere decir, que existen dos morfismos  $f: V \to W[\delta]$  y  $g: W \to V[\delta]$ , tales que  $g[\delta] \circ f = \Phi_V^{2\delta}$  y  $f[\delta] \circ g = \Phi_W^{2\delta}$ , donde  $\Phi_V^{2\delta} = \pi_{t,t+2\delta}^V$  y  $\Phi_W^{2\delta} = \pi_{t,t+2\delta}^W$ .



Supongamos que  $(V, \pi^V)$  y  $(W, \pi^W)$  son  $\delta$ — intercalados.

Lo anterior quiere decir, que existen dos morfismos  $f: V \to W[\delta]$  y  $g: W \to V[\delta]$ , tales que  $g[\delta] \circ f = \Phi_V^{2\delta}$  y  $f[\delta] \circ g = \Phi_W^{2\delta}$ , donde  $\Phi_V^{2\delta} = \pi_{t,t+2\delta}^V$  y  $\Phi_W^{2\delta} = \pi_{t,t+2\delta}^W$ .

El objetivo principal es construir una  $\delta$ -correspondencia entre  $\mathcal{B}(V)$  y  $\mathcal{B}(W)$ .



Supongamos que  $(V, \pi^V)$  y  $(W, \pi^W)$  son  $\delta$ — intercalados.

Lo anterior quiere decir, que existen dos morfismos  $f:V\to W[\delta]$  y  $g:W\to V[\delta]$ , tales que  $g[\delta]\circ f=\Phi_V^{2\delta}$  y  $f[\delta]\circ g=\Phi_W^{2\delta}$ , donde  $\Phi_V^{2\delta}=\pi_{t,t+2\delta}^V$  y  $\Phi_W^{2\delta}=\pi_{t,t+2\delta}^W$ .

El objetivo principal es construir una  $\delta$ -correspondencia entre  $\mathcal{B}(V)$  y  $\mathcal{B}(W)$ .

Recordemos la notación  $\mathcal{B}_{\epsilon}$  indica la colección de barras de longitud  $> \epsilon$  en un código de barras  $\mathcal{B}$ .



Lema 3.3.1

Supongamos que tenemos dos módulos de persistencia  $\delta$ -entrelazados  $(V, \pi^V)$  y  $(W, \pi^W)$ , es decir, existen morfismos  $f: V \to W[\delta]$  y  $g: W \to V[\delta]$ .



<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Recordemos la Definición 3.2.7

#### Lema 3.3.1

Supongamos que tenemos dos módulos de persistencia  $\delta$ -entrelazados  $(V, \pi^V)$  y  $(W, \pi^W)$ , es decir, existen morfismos  $f: V \to W[\delta]$  y  $g: W \to V[\delta]$ .

Consideremos un mapeo suprayectivo  $f: V \to im(f)$  y el emparejamiento inducido  $\mu_{sur}: \mathcal{B}(V) \to \mathcal{B}(im(f))^1$ , Entonces:



<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Recordemos la Definición 3.2.7

#### Lema 3.3.1

Supongamos que tenemos dos módulos de persistencia  $\delta$ -entrelazados  $(V, \pi^V)$  y  $(W, \pi^W)$ , es decir, existen morfismos  $f: V \to W[\delta]$  y  $g: W \to V[\delta]$ .

Consideremos un mapeo suprayectivo  $f: V \to im(f)$  y el emparejamiento inducido  $\mu_{sur}: \mathcal{B}(V) \to \mathcal{B}(im(f))^1$ , Entonces:

- ightharpoonup coim $\mu_{sur}\supseteq \mathcal{B}(V)_{2\delta}$
- ightharpoonup  $im\mu_{sur}=\mathcal{B}(im(f))$ , y
- ▶  $\mu_{sur}$  lleva  $(b, d] \in coim\mu_{sur}$  a (b, d'], con  $d' \in [d 2\delta, d]$ .



<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Recordemos la Definición 3.2.7

Lema 3.3.2

Supongamos que tenemos dos módulos de persistencia  $\delta$ —entrelazados  $(V, \pi^V)$  y  $(W, \pi^W)$ , es decir, existen morfismos  $f: V \to W[\delta]$  y  $g: W \to V[\delta]$ .



Lema 3.3.2

Supongamos que tenemos dos módulos de persistencia  $\delta$ -entrelazados  $(V, \pi^V)$  y  $(W, \pi^W)$ , es decir, existen morfismos  $f: V \to W[\delta]$  y  $g: W \to V[\delta]$ .

Consideremos el apeo inyectivo  $im(f) \to W[\delta]$  y el emparejamiento inducido  $\mu_{inj}: \mathcal{B}(im(f)) \to \mathcal{B}(W[\delta])^2$ , Entonces:



Lema 3.3.2

Supongamos que tenemos dos módulos de persistencia  $\delta$ -entrelazados  $(V, \pi^V)$  y  $(W, \pi^W)$ , es decir, existen morfismos  $f: V \to W[\delta]$  y  $g: W \to V[\delta]$ .

Consideremos el apeo inyectivo  $im(f) \to W[\delta]$  y el emparejamiento inducido  $\mu_{inj} : \mathcal{B}(im(f)) \to \mathcal{B}(W[\delta])^2$ , Entonces:

- ightharpoonup coim $\mu_{ini} = \mathcal{B}(im(f))$
- ightharpoonup  $im\mu_{inj}\supseteq \mathcal{B}(W[\delta])_{2\delta}$ , y
- ▶  $\mu_{inj}$  lleva  $(b, d'] \in coim\mu_{inj}$  a (b', d'], con  $b' \in [b 2\delta, b]$ .

Los lemas 3.3.1 y 3.3.2 se prueban en la sección 3.4.

Instituto de Matemáticas UNAM

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>Recordemos la Definición 3.2.4

#### Teo 3.1.2

Teo 3.1.2Sean V y W dos módulos de persistencia y sus respectivos códigos de barras  $\mathcal{B}(V)$  y  $\mathcal{B}(V)$ . Entonces

$$d_{int}(V, W) \geq d_{bot}(B(V), B(W)).$$



Demostración del Teo 3.1.2 Consideremos:

ightharpoonup El emparejamiento inducido  $\mu(f)=\overline{\mu_{inj}\circ\mu_{sur}},\ {\sf y}$ 



# Demostración del Teo 3.1.2 Consideremos:

- ightharpoonup El emparejamiento inducido  $\mu(f) = \mu_{inj} \circ \mu_{sur}$ , y
- ▶ la función  $\Psi_{\delta}: \mathcal{B}(W[\delta]) \to \mathcal{B}(W)$  definido para todas las barras como  $(a,b] \to (a+\delta,b+\delta]$ .



Demostración del Teo 3.1.2 Consideremos:

- ightharpoonup El emparejamiento inducido  $\mu(f) = \mu_{inj} \circ \mu_{sur}$ , y
- ▶ la función  $\Psi_{\delta} : \mathcal{B}(W[\delta]) \to \mathcal{B}(W)$  definido para todas las barras como  $(a, b] \to (a + \delta, b + \delta]$ .

Notemos que  $\Psi_\delta$  desplaza cada barra a la derecha en  $\delta$ 



Demostración del Teo 3.1.2 Consideremos:

- lacktriangle El emparejamiento inducido  $\mu(f)=\mu_{\it inj}\circ\mu_{\it sur}$ , y
- ▶ la función  $\Psi_{\delta} : \mathcal{B}(W[\delta]) \to \mathcal{B}(W)$  definido para todas las barras como  $(a, b] \to (a + \delta, b + \delta]$ .

Notemos que  $\Psi_{\delta}$  desplaza cada barra a la derecha en  $\delta$ Afirmamos que  $\Psi_{\delta} \circ \mu(f)$  es un  $\delta-$ entrelazamiento entre  $\mathcal{B}(V)$  y  $\mathcal{B}(W)$ .



Demostración del Teo 3.1.2 Utilizando el Lema 3.3.1 y Lema 3.3.2, obtenemos el siguiente diagrama:



Demostración del Teo 3.1.2 Utilizando el Lema 3.3.1 y Lema 3.3.2, obtenemos el siguiente diagrama:



Demostración del Teo 3.1.2 Por el Lema 3,3,2, se tiene que una barra  $(b,d] \in \mathcal{B}(V)_{2\delta}$  se lleva a  $\mu_{sur}(b,d] = (b,d'] \in \mathcal{B}(im(f))$ , donde  $d-2\delta \leq d' \leq d$ .



Demostración del Teo 3.1.2 Por el Lema 3,3,2, se tiene que una barra  $(b,d] \in \mathcal{B}(V)_{2\delta}$  se lleva a  $\mu_{sur}(b,d] = (b,d'] \in \mathcal{B}(im(f))$ , donde  $d-2\delta \leq d' \leq d$ .

Entonces, dicha barra se lleva a  $\mu_{inj}(b, d'] = (b', d'] \in \mathcal{B}(W[\delta])_{2\delta}$ , donde  $b - 2\delta \le b' \le b$ , por el Lema 3,3,1.



Demostración del Teo 3.1.2

Por el Lema 3,3,2, se tiene que una barra  $(b,d] \in \mathcal{B}(V)_{2\delta}$  se lleva a  $\mu_{sur}(b,d] = (b,d'] \in \mathcal{B}(im(f))$ , donde  $d-2\delta \leq d' \leq d$ .

Entonces, dicha barra se lleva a  $\mu_{inj}(b, d'] = (b', d'] \in \mathcal{B}(W[\delta])_{2\delta}$ , donde  $b - 2\delta \le b' \le b$ , por el Lema 3,3,1.

Por último, (b',d'] se desplaza a la derecha en  $\delta$ , es decir, se lleva a  $(b+\delta,d'+\delta]$  mediante  $\Psi_{\delta}$ 



Demostración del Teo 3.1.2 En particular, se tiene que toda barra en  $\mathcal{B}(V)_{2\delta}$  es de hecho emparejada por  $\mu(f)$ .



Demostración del Teo 3.1.2 En particular, se tiene que toda barra en  $\mathcal{B}(V)_{2\delta}$  es de hecho emparejada por  $\mu(f)$ .

De una forma análoga, se puede comprobar que toda barra en  $\mathcal{B}(W)_{2\delta}$  coincide.



Demostración del Teo 3.1.2Además, a partir de la información sobre b' y d' obtenemos lo siguiente:



Demostración del Teo 3.1.2

Además, a partir de la información sobre b' y d' obtenemos lo siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{l} d - 2\delta \leq d' \leq d \\ b - 2\delta \leq b' \leq b \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} d - \delta \leq d' + \delta \leq d + \delta \\ b - \delta \leq b' + \delta \leq b + \delta \end{array} \right.$$



#### Demostración del Teo 3.1.2

Además, a partir de la información sobre b' y d' obtenemos lo siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{l} d-2\delta \leq d' \leq d \\ b-2\delta \leq b' \leq b \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} d-\delta \leq d' + \delta \leq d + \delta \\ b-\delta \leq b' + \delta \leq b + \delta \end{array} \right. \quad \text{Por lo que}$$

 $\Psi_{\delta} \circ \mu(f)$  es una  $\delta$ -emparejamiento entre  $\mathcal{B}(V)$  y  $\mathcal{B}(W)$ . Por lo tanto,



#### Demostración del Teo 3.1.2

Además, a partir de la información sobre b' y d' obtenemos lo siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{l} d-2\delta \leq d' \leq d \\ b-2\delta \leq b' \leq b \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} d-\delta \leq d' + \delta \leq d + \delta \\ b-\delta \leq b' + \delta \leq b + \delta \end{array} \right. \quad \text{Por lo que}$$

 $\Psi_{\delta} \circ \mu(f)$  es una  $\delta$ -emparejamiento entre  $\mathcal{B}(V)$  y  $\mathcal{B}(W)$ . Por lo tanto,

$$d_{bot}(\mathcal{B}(V),\mathcal{B}(W)) \leq d_{int}(V,W).$$

