Complejos simpliciales y realizaciones geométricas

Introducción

El contenido esta dividido en 4 secciones:

1. Complejos simpliciales (geométricos)
2. Subdivisiones y aproximaciones
3. La topología débil
4. Complejos simpliciales abstractos

Referencias:

EDELSBRUNNER, H., AND HARER, J.
Computational Topology.
American Mathematical Society, 2010.

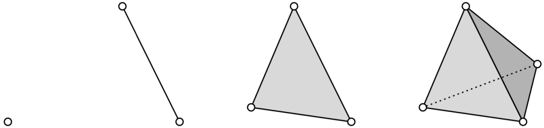
SPANIER, E. H.
Algebraic Topology.
Springer-Verlag, 1966.

Complejos simpliciales (geométricos)

Sean $u_0, \ldots, u_k \in \mathbb{R}^d$. Un punto $x = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i u_i$ con cada $\lambda_i \in \mathbb{R}$ es una *combinación afín* de los u_i si $\sum_{i=0}^{k} \lambda_i = 1$. La *envolvente afín* es el conjunto de combinaciones afines. Decimos que $u_0, \ldots, u_k$ son *afinmente independientes* si dos combinaciones afines $\sum \lambda_i u_i$ y $\sum \mu_i u_i$ son iguales si y solo si $\lambda_i = \mu_i$ para todo i. En este caso decimos que la envolvente afín es un *k-plano*. Se puede demostrar que:

1. $u_0, \ldots, u_k$ son afinmente independientes ssi $u_1 - u_0, \ldots, u_k - u_0$ son linealmente independientes.
2. Si $v_0, v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$, entonces
$$v_0, v_1, v_2 \text{ son los vértices de un triángulo } \iff v_0, v_1, v_2 \text{ son afinmente independientes.}$$
3. Si $v_0, v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$, entonces
$$v_0, v_1, v_2, v_3 \text{ son los vértices de un tetraedro } \iff v_0, v_1, v_2, v_3 \text{ son afinmente independientes.}$$

Una combinación afín $x = \sum \lambda_i u_i$ es una *combinación convexa* si $\lambda_i \geq 0$ para todo i. La *envolvente convexa* es el conjunto de combinaciones convexas. La denotamos $\sigma = \operatorname{conv}\{u_0, \ldots, u_k\}$, decimos que $u_0, \ldots, u_k$ *genera* σ, y decimos que su dimensión es $\dim \sigma = k$. Un *k-simplejo* es la envolvente convexa de $k+1$ puntos afinmente independientes.



Cualquier subconjunto de puntos afinmente independientes es de nuevo un conjunto de puntos afinmente independientes. Por lo tanto, también define un simplejo. Una *cara* de σ es la envolvente convexa de un subconjunto no vacío de los u_i. Es *propia* si el subconjunto es propio. Escribimos $\tau \leq \sigma$ si τ es una cara de σ y escribimos $\tau < \sigma$ si es una cara propia. Un k-simplejo tiene $2^{k+1} - 2$ caras propias. La *frontera* de σ, denotada $\partial\sigma$, es la unión de todas las caras propias y el *interior* es $\operatorname{int} \sigma = \sigma - \partial\sigma$. Un punto $x \in \sigma$ pertenece a $\operatorname{int} \sigma$ ssi todos los coeficientes λ_i son positivos. Se sigue que todo $x \in \sigma$ pertenece al interior de exactamente una cara, específicamente, a aquella cara que corresponde a los λ_i positivos.

Definición

Un *complejo simplicial* es una colección finita de simplejos K tal que

1. $\sigma \in K$ y $\tau \leq \sigma$ implica $\tau \in K$, y
2. $\sigma, \sigma_0 \in K$ implica que $\sigma \cap \sigma_0$ es cara de ambos ó es vacío.

La dimensión de K es la máxima dimensión de sus simplejos. El *espacio subyacente*, denotado $|K|$, es la unión de sus simplejos con la topología heredada del ambiente euclidiano donde los simplejos viven. Un *poliedro* es el espacio subyacente de un complejo simplicial. Una *triangulación* de un espacio topológico X es un complejo simplicial K junto con un homeomorfismo entre X y $|K|$. El espacio topológico es *triangulable* si tiene una triangulación. Un *subcomplejo* de K es un complejo simplicial $L \subset K$. Es *completo* si contiene todos los simplejos en K generados por vértices en L. Un subcomplejo de particular interés es el j-*esqueleto* que consiste de todos los simplejos de dimensión $\leq j$. El 0-esqueleto también es llamado el conjunto de vértices $V(K) = K^{(0)}$. En general, los esqueletos no son completos. La *estrella* de un simplejo τ es $\operatorname{St}\tau = \{\sigma \in K \mid \tau \leq \sigma\}$. En general, las estrellas no son subcomplejos. Por eso a veces consideramos la *estrella cerrada* $\overline{\operatorname{St}}\tau$, el subcomplejo mas chico que contiene a $\operatorname{St}\tau$.

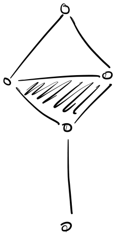
Sea K un complejo simplicial con vértices $u_0, \dots, u_n$. Todo punto $x \in |K|$ pertenece al interior de exactamente un simplejo en K. Por ejemplo, si $\sigma = \operatorname{conv}\{u_0, \dots, u_k\}$ es un simplejo, entonces $x = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i u_i$ con $\sum_{i=0}^{k} \lambda_i = 1$ y $\lambda_i > 0$ para todo i. Definiendo $b_i(x) = \lambda_i$ para $i = 0, \dots, k$ y $b_i(x)$ para $i = k+1, \dots, n$ podemos escribir $x = \sum_{i=0}^{n} b_i(x) u_i$ y decimos que las $b_i(x)$ son las *coordenadas baricentricas* de x en K. Sea L otro complejo simplicial. Una *función vértice* es una función $\varphi : V(K) \to V(L)$ que satisface $\varphi(\sigma) \in L$ para todo $\sigma \in K$. Podemos extender φ a una función continua $f : |K| \to |L|$ dada por

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i(x) \varphi(u_i).$$

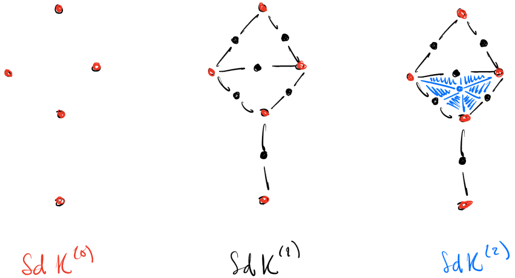
Decimos que f es la *función simplicial* inducida por φ. Esta función es lineal por pedazos y continua. Si φ es biyectiva y φ también es una función vértice, entonces la función f resulta ser un homeomorfismo. En este caso decimos que f es un *homomorfismo simplicial* o simplemente un *isomorfismo* entre K y L.

Un complejo simplicial L es una *subdivisión* de otro complejo simplicial K si $|L| = |K|$ y todo simplejo in L esta contenido en un simplejo en K. En lo que sigue, veremos la *subdivisión baricentrica*, $L = \operatorname{Sd} K$. Un concepto crucial en esta construcción es el *baricentro* de un simplejo, el cual es el promedio de sus vértices. Procedemos por inducción sobre los esqueletos. Para empezar, la subdivisión baricentrica del 0-esqueleto es el 0-esqueleto, $\operatorname{Sd} K^{(0)} = K^{(0)}$. Supongamos que tenemos $\operatorname{Sd} K^{(j-1)}$. Construimos $\operatorname{Sd} K^{(j)}$ agregando el baricentro de cada j-simplejo como un nuevo vértice y conectándolo a los simplejos que subdividen la frontera del j-simplejo.

Por ejemplo, si K es



entonces

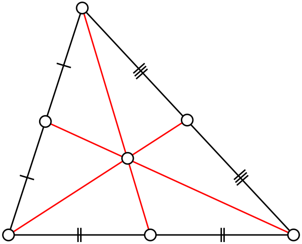


El *diámetro* de un subconjunto de un espacio euclidiano es el supremo sobre las distancias entre sus puntos. Como los simplejos de K son subconjuntos de un espacio euclidiano, su diámetro esta bien definido. La *malla* de K es el máximo diámetro de un simplejo o, equivalentemente, la longitud de su eje mas largo.

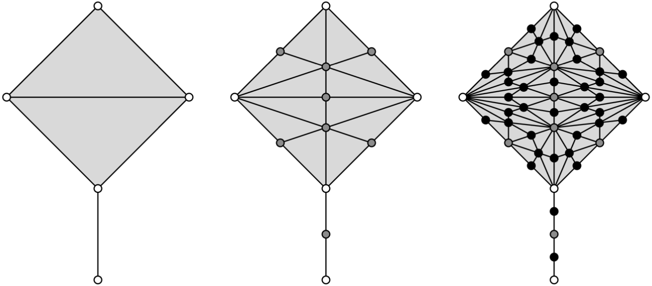
Lema (Malla)

Sea δ la malla del complejo simplicial d-dimensional K. Entonces la malla de $\operatorname{Sd} K$ es $\leq \frac{d}{d+1}\delta$.

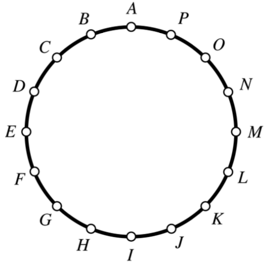
La demostración se basa en la generalización del siguiente hecho: el baricentro de un triangulo divide las medianas en la proporción $2:1$.

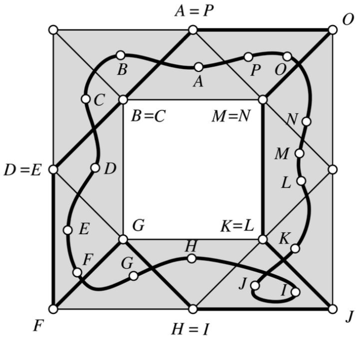


Para $n \geq 1$ definimos la *n-ésima subdivisión baricentrica* de K como $\operatorname{Sd}^n K = \operatorname{Sd}(\operatorname{Sd}^{n-1} K)$. Por el lema, la malla de $\operatorname{Sd}^n K$ es $\leq \left(\frac{d}{d+1}\right)^n \delta \xrightarrow{n\to\infty} 0$ y por lo tanto, podemos hacer el diámetro de un complejo simplicial tan chico como queramos.



Para todo vértice u, definimos $N(u) = \bigcup_{\sigma \in \operatorname{St} u} \operatorname{int} \sigma$. Sean K y L complejos simpliciales. Una función continua $g : |K| \to |L|$ satisface la *condición estrella* si para todo vértice $u \in K$ existe un vértice $v \in L$ tal que $g(N(u)) \subset N(v)$. Notemos que no pedimos (ni esperamos) que v sea único. Sea $\varphi : V(K) \to V(L)$ tal que $\varphi(u) = v$ (que existe por la condición estrella). Para entender esta función, tomamos un punto x en el interior de un simplejo $\sigma \in K$. Su imagen, $g(x)$ pertenece al interior de un único simplejo $\tau \in L$. Como $g(N(u)) \subset N(v)$, se sigue que la estrella de todo vértice u en σ se mapea a la estrella de un vértice $v \in L$ que contiene el interior de τ. Concluimos que todo vértice u de σ se mapea a un vértice u de τ. En particular, φ es una función vértice y por lo tanto induce una función simplicial $f : K \to L$. Esta función satisface la condición de una *aproximación simplicial* de g, específicamente, que $g(N(u)) \subset N(f(u))$ para todo vértice $u \in K$.





Ilustramos estas definiciones en la imagen anterior. La idea que tenemos en mente es que g y f no son tan diferentes. En particular, $g(x)$ y $f(x)$ pertenecen a un simplejo común en L para todo $x \in |K|$. Dada una función continua $g : |K| \to |L|$, es razonable pensar que podemos subdividir K suficiente para que una aproximación simplicial exista.

Teorema (Aproximación Simplicial)

Si $g : |K| \to |L|$ es continua, entonces existe $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ suficientemente grande tal que g tiene una aproximación simplicial $f : \operatorname{Sd}^n K \to L$.

Demostración. Los conjuntos abiertos de la forma $g^{-1}(N(v))$, $v \in V(L)$ forman una cubierta abierta de $|K|$. Como $|K|$ es compacto, existe un $\lambda > 0$ tal que cualquier conjunto de diámetro menor que λ esta contenido en uno de los conjuntos de la cubierta. Sea n tal que cada simplejo en $\operatorname{Sd}^n K$ tenga diámetro menor que $\lambda/2$. Entonces cada estrella en K tiene diámetro menor que λ. En particular, cada estrella en K esta contenida en un $g^{-1}(N(v))$. Por lo tanto, g satisface la condición estrella. $\square$

Sea X un conjunto y sea $\mathfrak{U} = \{(A_\alpha, \mathcal{T}_\alpha) \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$ una familia espacios topológicos tales que $A_\alpha \subset X$ para todo $\alpha \in \mathcal{A}$. Más aun, supongamos que para todo $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ se satisfacen las siguientes condiciones.

(td1) Las topologías de A_α y A_β coinciden en $A_\alpha \cap A_\beta$. Es decir,

$$(\mathcal{T}_\alpha)_{A_\alpha \cap A_\beta \subset A_\alpha} = (\mathcal{T}_\beta)_{A_\alpha \cap A_\beta \subset A_\beta}$$

(td2) Exactamente uno de los siguientes casos se satisface:

- (a) Todo $A_\alpha \cap A_\beta$ es abierto en A_α y en A_β.
- (b) Todo $A_\alpha \cap A_\beta$ es cerrado en A_α y en A_β.

Definimos

$$\mathcal{T}(\mathfrak{U}) := \left\{ U \subset X \mid \forall \alpha \in \mathcal{A} \left(U \cap A_\alpha \in \mathcal{T}_\alpha \right) \right\}$$

y decimos que $\mathcal{T}(\mathfrak{U})$ es la *topología débil* en X inducida por $\mathfrak{U}$.

En lo que sigue suponemos que X es un conjunto, que $\mathfrak{U} = \{(A_\alpha, \mathcal{T}_\alpha) \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$ es una familia de espacios topológicos, que $A_\alpha \subset X$ para todo $\alpha \in \mathcal{A}$, y que $\mathfrak{U}$ satisface (td1) y (td2).

Consideremos a X con la topología débil inducida por $\mathfrak{U}$. Entonces se satisfacen las siguientes condiciones.

1. Los A_α preservan su topología como subespacio de $(X, \mathcal{T}(\mathfrak{U}))$. Específicamente,
$$\mathcal{T}_\alpha = \big(\mathcal{T}(\mathfrak{U})\big)_{A_\alpha \subset X} \text{ para todo } \alpha \in \mathcal{A}.$$
2. Un subconjunto B de X es cerrado si y solo si $B \cap A_\alpha$ es cerrado en A_α para todo $\alpha \in \mathcal{A}$.
3. Si estamos en el caso (a) (i.e., todo $A_\alpha \cap A_\beta$ es abierto en A_α y en A_β), entonces todo abierto en A_α es abierto en X.
4. Si estamos en el caso (b) (i.e., todo $A_\alpha \cap A_\beta$ es cerrado en A_α y en A_β), entonces todo cerrado en A_α es cerrado en X.

Proposición

Sea Y un espacio topológico y sea $f : X \to Y$ una función. Entonces

$$f : (X, \mathcal{T}(\mathfrak{U})) \to (Y, \mathcal{T}_Y) \text{ es continua } \iff$$
$$f|_{A_\alpha} : (A_\alpha, \mathcal{T}_\alpha) \to (Y, \mathcal{T}_Y) \text{ es continua para todo } \alpha \in \mathcal{A}.$$

Proposición

Sea Y un conjunto y sea $\mathfrak{V} = \{(B_\beta, \mathcal{T}_\beta) \mid \beta \in \mathcal{B}\}$ una familia espacios topológicos tales que $B_\beta \subset Y$ para todo $\beta \in \mathcal{B}$, y que $\mathfrak{V}$ satisface las (td1) y (td2). Si $f : X \to Y$ es una función tal que para todo $\alpha \in \mathcal{A}$ existe $\beta_\alpha \in \mathcal{B}$ tal que $f(A_\alpha) \subset B_{\beta_\alpha}$, entonces

$$f : (X, \mathcal{T}(\mathfrak{U})) \to (Y, \mathcal{T}(\mathfrak{V})) \text{ es continua } \iff$$
$$f|_{A_\alpha} : (A_\alpha, \mathcal{T}_\alpha) \to (B_{\beta_\alpha}, \mathcal{T}_{\beta_\alpha}) \text{ es continua para todo } \alpha \in \mathcal{A}.$$

Proposición

Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Si $\mathfrak{U}$ es una familia de subespacios de X que satisface (td2), entonces la topología débil $\mathcal{T}(\mathfrak{U})$ esta bien definida. Cabe recalcar que $\mathcal{T}(\mathfrak{U})$ no necesariamente coincide con $\mathcal{T}$.

Definición

Decimos que K es un *complejo simplicial abstracto* si K es una familia de subconjuntos finitos no vacíos tal que si $s \in K$ y $s' \subset s$, entonces $s' \in K$.

Sea K un complejo simplicial abstracto. Si L es un subconjunto de K que también es un un complejo simplicial abstracto, decimos que L es un *subcomplejo de* K. Sea $s \in K$. Si $\#(s) = q + 1$ (con $q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$), decimos que s es un *q-simplejo* o que s tiene *dimensión* q y escribimos $\dim s = q$. Si $s \in K$ y $s' \subset s$, decimos que s' es una *cara de* s. Definimos $V(K) \coloneqq \bigcup K$ y decimos que $V(K)$ es el *conjunto de vértices de* K. Cabe recalcar que (por definición) $v \in V(K)$ si y solo si existe $s \in K$ tal que $v \in s$.

A menos de que se especifique lo contrario, en el resto de esta sección las letras K, K', K'' denotan complejos simpliciales abstractos.

En lo que sigue, veremos que a todo complejo simplicial abstracto le podemos asociar un espacio topológico que formaliza y justifica la siguiente afirmación: *el concepto de complejo simplicial abstracto es una abstracción de complejos simpliciales geométricos*. Para esto, usaremos la siguiente notación: Sea A un conjunto arbitrario y sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función. Definimos

$$\operatorname{supp}(f) \coloneqq \{a \in A \mid f(a) \neq 0\}$$

y decimos que $\operatorname{supp}(f)$ es el *soporte de f*.

Sea K un complejo simplicial abstracto. Definimos

$$|K| \coloneqq \left\{ \alpha : V(K) \to [0,1] \mid \operatorname{supp}(\alpha) \in K \ \text{ y } \sum_{v \in V(K)} \alpha(v) = 1 \right\}.$$

Cabe recalcar que la suma $\sum_{v \in V(K)} \alpha(v)$ es finita porque $\operatorname{supp}(\alpha) \in K$ implica que $\alpha(v) = 0$ para casi todo $v \in V(K)$.

Sea $\{v_0, \ldots, v_q\} \in K$ y sean $t_0, \ldots, t_q \in [0,1]$ tales que $t_0 + \cdots + t_q = 1$. Denotamos por $t_0 v_0 + \cdots + t_q v_q$ a la función de $V(K)$ en $[0,1]$ que satisface

1. $v_i \mapsto t_i$ para todo $i \in \{0, \ldots, q\}$,
2. $v \mapsto 0$ si $v \in V(K) \setminus s$.

Es fácil ver que

$$|K| = \left\{ t_0 v_0 + \cdots + t_q v_q \mid \{v_0, \ldots, v_q\} \in K,\ \forall i (t_i \geq 0),\ \text{y } \sum_{i=0}^{q} t_i = 1 \right\}.$$

Por otro lado, sea $v_0 \in V(K)$ fijo. Si $\alpha : V(K) \to [0,1]$ es tal que $\alpha(v) = 0$ para todo $v \neq v_0$ y $\alpha(v_0) = 1$, entonces $\alpha \in |K|$ y podemos escribir $\alpha = 1v_0$. Por brevedad, en este caso escribimos $\alpha = 1v_0 = v_0$ y hacemos el siguiente abuso de notación

$$V(K) = \{v \in |K| \mid v \in V(K)\}.$$

Sea $s = \{v_0, \ldots, v_q\} \in K$. Definimos el *simplejo cerrado generado por* s, denotado por $|s|$, como el conjunto de todos los elementos de $|K|$ que son de la forma

$$t_0 v_0 + \cdots + t_q v_q \text{ con } t_0, \ldots, t_q \in [0,1].$$

Sin ocupar la notación de combinaciones convexas podemos describir $|s|$ como el conjunto de las funciones de $\alpha : V(K) \to [0,1]$ tales que

1. $\alpha(v) = 0$ para todo $v \in V(K) \setminus s$ y
2. $\sum_{i=0}^{q} \alpha(v_i) = 1$.

Se puede demostrar que:

1. Para todo $s \in K$

$$|s| = \left\{\alpha \in |K| \mid \operatorname{supp}(\alpha) \subset s\right\}.$$

2. Para todo $s_1, s_2 \in K$

$$|s_1 \cap s_2| = |s_1| \cap |s_2|.$$

Definimos

$$d_K(\alpha,\beta) := \sqrt{\sum_{v\in V(K)} \big(\alpha(v)-\beta(v)\big)^2} \text{ para todo } \alpha,\beta\in|K|.$$

Se puede demostrar que d_K es una métrica sobre $|K|$.

Sea $s \in K$ fijo. Como $\alpha \in |s|$ implica que $\alpha(v) = 0$ para todo $v \in V(K)\setminus s$, entonces

$$d_K(\alpha,\beta) = \sqrt{\sum_{v\in s} \big(\alpha(v)-\beta(v)\big)^2} \text{ para todo } \alpha,\beta\in|s|.$$

Más aún, si $s = \{v_0,\dots,v_q\} \in K$, entonces para todo $\sum_{i=0}^q t_i v_i\ ,\ \sum_{i=0}^q t_i' v_i \in |s|$,

$$d_K\left(\sum_{i=0}^q t_i v_i\ ,\ \sum_{i=0}^q t_i' v_i\right) = \sqrt{\sum_{i=0}^q (t_i - t_i')^2}.$$

En lo que sigue, siempre que consideremos a $|s|$ como un espacio topológico, lo consideramos con la topología inducida por la restricción de d_K a $|s| \times |s|$, es decir, lo consideramos con la topología $\mathcal{T}_{d_K \restriction_{|s| \times |s|}}$. De hecho, por brevedad denotamos

$$\mathcal{T}_s := \mathcal{T}_{d_K \restriction_{|s| \times |s|}}.$$

En particular, si denotamos por $\mathcal{T}_{d_K}$ a la topología (métrica) sobre $|K|$ inducida por d_K, entonces

$$\mathcal{T}_s = \left(\mathcal{T}_{d_K}\right)_{|s| \subset |K|}.$$

En palabras, siempre consideramos a $|s|$ como un subespacio de $(|K|, \mathcal{T}_{d_K})$.

Proposición

Si $s \in K$ es un q-simplejo, entonces $|s|$ es homeomorfo a Δ^q.

Demostración. Sea $s = \{v_0, \dots, v_q\}$ y denotemos por $e_0, \dots, e_q$ a la base estándar de $\mathbb{R}^{q+1}$. Definimos $\varphi_s : |s| \to \Delta^q$ por

$$t_0 v_0 + \cdots + t_0 v_q \mapsto t_0 e_0 + \cdots + t_q e_q = (t_0, \dots, t_q)$$

Es fácil ver que φ_s está bien definida y que es biyectiva. Resta probar que φ_s es continua. Para esto, sean $\sum_{i=0}^{q} t_i v_i, \sum_{i=0}^{q} t_i' v_i \in |s|$. Entonces

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{R}^{q+1}}\left(\varphi_s\left(\sum_{i=0}^{q} t_i v_i\right), \varphi_s\left(\sum_{i=0}^{q} t_i' v_i\right)\right) &= d_{\mathbb{R}^{q+1}}\Big((t_0, \dots, t_q), (t_0', \dots, t_q')\Big) \\ &= \sqrt{\sum_{i=0}^{q} (t_i - t_i')^2} = d_K\left(\sum_{i=0}^{q} t_i v_i \,,\, \sum_{i=0}^{q} t_i' v_i\right). \end{aligned}$$

Usando esto y el Criterio $\epsilon - \delta$ obtenemos lo deseado. $\square$

Proposición

Los simplejos cerrados son cerrados en $(|K|, \mathcal{T}_{d_K})$.

Demostración. Sea $s \in K$ y sea $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ una sucesión en $|s|$ que converge a $\alpha \in |K|$. Por definición,

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \ \forall n \geq N \left(d_K(\alpha_n, \alpha) < \epsilon \right). \tag{1}$$

Queremos ver que $\alpha \in |s|$ o equivalentemente, que $\operatorname{supp}(\alpha) \subset |s|$. Supongamos lo contrario, es decir, existe $v \notin s$ tal que $\alpha(v) \neq 0$. Entonces

$$d_K(\alpha_n, \alpha) \geq \alpha(v) \text{ para todo } n.$$

Contradiciendo (1). $\square$

Para el siguiente resultado necesitaremos la siguiente propiedad de la topología subespacio.

Lema

Sea X un espacio topológico y sea $Y \subset X$ abierto (cerrado) en X. Si consideramos a Y con la topología subespacio inducida por X, entonces para todo $A \subset Y$

$$A \text{ es abierto (cerrado) en } X \iff A \text{ es abierto (cerrado) en } Y.$$

Corolario

Si $s \in K$ y $s' \subset s$, entonces $|s'|$ es cerrado en $|s|$.

Demostración. Denotando $X = |K|$, $Y = |s|$, y $A = |s'|$ en el lema y recordando que $|s|$ es cerrado en $(|K|, \mathcal{T}_{d_K})$ obtenemos lo deseado. $\square$

Antes de continuar, recordemos la siguiente proposición.

Proposición

Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Si $\mathfrak{U}$ es una familia de subespacios de X que satisface (td2), entonces la topología débil $\mathcal{T}(\mathfrak{U})$ esta bien definida.

Proposición

Sea $\mathcal{T}_{d_K}$ la topología sobre $|K|$ inducida por d_K, y consideremos a la siguiente familia de subespacios de $(|K|, \mathcal{T}_{d_K})$.

$$\mathfrak{U} := \left\{ (|s|, \mathcal{T}_s) \mid s \in K \right\}$$

Entonces $\mathfrak{U}$ satisface (td2) y en particular, la topología débil $\mathcal{T}(\mathfrak{U})$ está bien definida en $|K|$.

Demostración. Como $s_1 \cap s_2 \subset s_i$ para $i = 1, 2$, entonces (por el Corolario 3.12) $|s_1 \cap s_2|$ es cerrado en $|s_1|$ y en $|s_2|$. Pero $|s_1 \cap s_2| = |s_1| \cap |s_2|$. Por lo tanto, $\mathfrak{U}$ satisface (td2). $\square$

Cabe recalcar que, a pesar de que

$$\left(\mathcal{T}(\mathfrak{U})\right)_{|s|\subset|K|} = \mathcal{T}_s = \left(\mathcal{T}_{d_K}\right)_{|s|\subset|K|},$$

la topología $\mathcal{T}(\mathfrak{U})$ no necesariamente coincide con la topología $\mathcal{T}_{d_K}$.

Definición

La *realización geométrica de* K es el espacio topológico $(|K|, \mathcal{T})$ donde $\mathcal{T}$ es la topología débil inducida por

$$\mathfrak{U} := \left\{(|s|, \mathcal{T}_s) \mid s \in K\right\}.$$

Recordemos que por definición

$$U \text{ es abierto (cerrado) en } (|K|, \mathcal{T}(\mathfrak{U})) \iff \\ \forall s \in K \left(U \cap |s| \text{ es abierto (cerrado) en } (|s|, \mathcal{T}_s)\right).$$

En lo que sigue, siempre consideramos a $|K|$ con esta topología[1]. Por eso, a veces decimos que esta es la topología usual de $|K|$ y denotamos

$$\mathcal{T}_K := \mathcal{T}\left(\left\{|s| \subset |K| \mid s \in K\right\}\right).$$

Recordemos que por definición, $(\mathcal{T}_K)_{|s|\subset|K|} = \mathcal{T}_s$.

[1] Hay que tener cuidado de no confundir esta topología con $\mathcal{T}_{d_K}$, la topología métrica inducida por d_K.

Corolario

Sean $v_0, \ldots, v_n$ distintos. Si $K = \mathcal{P}\left(\{v_0, \ldots, v_n\}\right) \setminus \{\varnothing\}$, entonces $|K| = \left|\{v_0, \ldots, v_n\}\right|$ y en particular, $|K|$ es homeomorfo a Δ^n.

Demostración. Tenemos,

$$\begin{aligned}
\left|\{v_0, \ldots, v_n\}\right| &= \left\{\alpha \in |K| \mid \operatorname{supp}(\alpha) \subset \{v_0, \ldots, v_n\}\right\} \\
&= \left\{\alpha \in |K| \mid \operatorname{supp}(\alpha) \subset V(K)\right\} \quad (\text{pues } V(K) = \{v_0, \ldots, v_n\}) \\
&= |K|. \qquad\qquad (\text{pues } \operatorname{supp}(\alpha) \subset V(K) \text{ para todo } \alpha \in |K|)
\end{aligned}$$

$\square$

Los siguientes dos resultados son un caso particular de las proposiciones que caracterizan continuidad en la topología débil.

Proposición

Sea X un espacio topológico. Si $f : |K| \to X$ es una función, entonces

$$f \text{ es continua } \iff f|_{|s|} : \left(|s|, \mathcal{T}_s\right) \to X \text{ es continua para todo } s \in K.$$

Proposición

Sea $f : |K| \to |K'|$ una función. Si para todo $s \in K$ existe $s' \in K'$ tal que $f(|s|) \subset |s'|$, entonces

$$f \text{ es continua } \iff f|_{|s|} : (|s|, \mathcal{T}_s) \to (|s'|, \mathcal{T}_{s'}) \text{ es continua para todo } s \in K.$$

En particular (por el Criterio $\epsilon - \delta$), f es continua si y solo si para todo $s \in K$ y todo $\alpha \in |s|$ se satisface la siguiente condición.

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall \beta \in |s| \left(d_K(\alpha, \beta) < \delta \implies d_{K'}\left(f(\alpha), f(\beta)\right) < \epsilon \right).$$

Para todo $s \in K$ definimos

$$\langle s \rangle := \{\alpha \in |K| \mid \operatorname{supp}(\alpha) = s\}$$

y decimos que $\langle s \rangle$ es el *simplejo abierto generado por* s. Se puede demostrar que $\langle s \rangle$ es el conjunto de los elementos de $|K|$ que son de la forma

$$t_0 v_0 + \cdots + t_q v_q \text{ con } t_0, \ldots, t_q \in (0, 1].$$

Usando esto se puede demostrar que $\langle s \rangle$ es homeomorfo a $\operatorname{int}(\Delta^q)$.

Más aun, si $\dot{s} = \{s' \in K \mid s' \subsetneqq s\}$, se puede demostrar que $|\dot{s}|$ es el conjunto de los elementos de $|K|$ que son de la forma

$$t_0 v_0 + \cdots + t_q v_q \text{ con } t_0, \ldots, t_q \in [0, 1] \text{ y } t_i = 0 \text{ para algún } i \in \{0, \ldots, q\}.$$

Usando esto se puede demostrar que $|\dot{s}|$ es homeomorfo a $\partial(\Delta^q)$.

Finalmente, usando todo lo anterior, se puede demostrar que

$$\langle s \rangle = |s| - |\dot{s}|$$

y por lo tanto (como $|\dot{s}|$ es cerrado en $|s|$), $\langle s \rangle$ es abierto en $|s|$. En contraste, se puede demostrar que $\langle s \rangle$ no necesariamente es abierto en $|K|$.

Definición

Sea $f : V(K) \to V(K')$ una función. Decimos que f es una *función simplicial de K a K'* si

$$f(s) \in K' \text{ para todo } s \in K.$$

Si no hay ambigüedad, simplemente decimos que f es *simplicial*. Cabe recalcar que f es una función entre los conjuntos de vértices.

Por otro lado, recordemos la notación de combinaciones convexas. Hasta el momento habíamos supuesto distintos a todos los vértices v_i. Ahora hacemos la convención de que si dos de ellos coinciden, digamos v_0 y v_1, entonces podemos escribir

$$t_0v_0 + t_1v_1 + \cdots + t_qv_q = (t_0 + t_1)v_0 + t_2v_2 + \cdots + t_qv_1.$$

Esto se generaliza naturalmente a cuando mas de dos vectores coinciden. Sin embargo, hay que tener cierto cuidado. Por ejemplo, la siguiente igualdad ya no se satisface.

$$d_K\left(\sum_{i=0}^{q} t_iv_i\,,\,\sum_{i=0}^{q} t_i'v_i\right) = \sqrt{\sum_{i=0}^{q}(t_i - t_i')^2}$$

Definición

Sea f una función simplicial de K a K'. Definimos $|f| : |K| \to |K'|$ por

$$|f|(\alpha) = \sum_{v' \in V(K')} \left(\sum_{v \in f^{-1}(v')} \alpha(v) \right) v'$$

para todo $\alpha \in |K|$.

Sea $\alpha \in |K|$. Sabemos que existe $s = \{v_0, \ldots, v_q\} \in K$ tal que $\alpha = t_0 v_0 + \cdots + t_q v_q$ para algunos t_i. Entonces podemos escribir

$$|f|(t_0 v_0 + \cdots + t_q v_q) = t_0 f(v_0) + \cdots + t_q f(v_q).$$

Recordando que los $f(v_i)$ no necesariamente son distintos y usando la convención mencionada en la diapositiva anterior.

Proposición

Si f es una función simplicial de K a K' y g es una función simplicial de K' a K'', entonces $|g \circ f| = |g| \circ |f|$.

Demostración. Sea $t_0 v_0 + \cdots t_q v_q \in |K|$. Entonces

$$\begin{aligned} |g| \circ |f|(t_0 v_0 + \cdots t_q v_q) &= |g| \left(t_0 f(v_0) + \cdots + t_q f(v_q) \right) \\ &= t_0 g(f(v_0)) + \cdots + t_q g(f(v_q)) \\ &= |g \circ f|(t_0 v_0 + \cdots + t_q v_q). \end{aligned}$$

□

Lema

Sea f una función simplicial de K a K'. Si $s \in K$, entonces $|f|(|s|) \subset |f(s)|$.

Demostración. Sea $s = \{v_0, \ldots v_q\}$ y sea $t_0 v_0 + \cdots + t_q v_q \in |s|$. Entonces

$$|f|(s) = t_0 f(v_0) + \cdots + t_q f(v_q) \in |\{f(v_0), \ldots, f(v_q)\}| = |f(s)|.$$

□

Antes de continuar, recordemos la siguiente proposición.

Proposición

Sea $f : |K| \to |K'|$ una función. Si para todo $s \in K$ existe $s' \in K'$ tal que $f(|s|) \subset |s'|$, entonces f es continua si y solo si para todo $s \in K$ y todo $\alpha \in |s|$ se satisface la siguiente condición.

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall \beta \in |s| \left(d_K(\alpha, \beta) < \delta \implies d_{K'}\left(f(\alpha), f(\beta)\right) < \epsilon \right).$$

Proposición

Sea f simplicial de K a K'. Entonces $|f| : |K| \to |K'|$ es continua.

Demostración. Por los resultados anteriores, $|f|$ es continua si y solo si para todo $s \in K$ y todo $\alpha \in |s|$ se satisface la siguiente condición.

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall \beta \in |s| \left(d_K(\alpha, \beta) < \delta \implies d_{K'}\left(|f|(\alpha), |f|(\beta)\right) < \epsilon \right).$$

Por eso, sean $s \in K$, $\alpha \in |s|$, y $\epsilon > 0$ fijos. Definimos $\delta := \frac{\epsilon}{\#(s)}$. Si $\beta \in |s|$ es tal que $d_K(\alpha, \beta) < \delta$, entonces

$$|\alpha(v) - \beta(v)| < \delta \text{ para todo } v \in V(K).$$

Por otro lado,

$$d_{K'}\left(|f|(\alpha),|f|(\beta)\right) =$$

$$\sqrt{\sum_{v'\in V(K')}\left(|f|(\alpha)(v')-|f|(\beta)(v')\right)^2} =$$

$$\sqrt{\sum_{v'\in f(s)}\left(|f|(\alpha)(v')-|f|(\beta)(v')\right)^2} =$$

$$\sqrt{\sum_{v'\in f(s)}\left(\left(\sum_{v\in f^{-1}(v')}\alpha(v)\right)-\left(\sum_{v\in f^{-1}(v')}\beta(v)\right)\right)^2} =$$

$$\sqrt{\sum_{v'\in f(s)}\left(\sum_{v\in f^{-1}(v')}\left(\alpha(v)-\beta(v)\right)\right)^2} =$$

$$\sqrt{\sum_{v'\in f(s)}\left(\sum_{v\in f^{-1}(v')}\big(\alpha(v)-\beta(v)\big)\right)^2} \le$$

$$\sqrt{\sum_{v'\in f(s)}\left(\sum_{v\in f^{-1}(v')}\big|\alpha(v)-\beta(v)\big|\right)^2} \le$$

$$\sqrt{\left(\sum_{v'\in f(s)}\left(\sum_{v\in f^{-1}(v')}\big|\alpha(v)-\beta(v)\big|\right)\right)^2} =$$

$$\sum_{v'\in f(s)}\left(\sum_{v\in f^{-1}(v')}\big|\alpha(v)-\beta(v)\big|\right) =$$

$$\sum_{v' \in f(s)} \left(\sum_{v \in f^{-1}(v')} \left|\alpha(v) - \beta(v)\right| \right) = \tag{2}$$

$$\sum_{v' \in f(s)} \left(\sum_{v \in f^{-1}(v') \cap s} \left|\alpha(v) - \beta(v)\right| \right) = \tag{3}$$

$$\sum_{v \in s} \left|\alpha(v) - \beta(v)\right| < \sum_{v \in s} \delta = \sum_{v \in s} \frac{\epsilon}{\#(s)} = \epsilon.$$

(2) se cumple porque si $\left|\alpha(v) - \beta(v)\right| \neq 0$, entonces $\alpha(v) \neq 0$ o $\beta(v) \neq 0$, es decir, $v \in \operatorname{supp}(\alpha) \cup \operatorname{supp}(\beta)$, pero como $\alpha, \beta \in |s|$ por hipótesis, entonces $\operatorname{supp}(\alpha) \cup \operatorname{supp}(\beta) \subset s$ y por lo tanto $v \in s$. (3) se cumple porque

$$s = \bigsqcup_{v' \in f(s)} \{v \in s \mid f(v) = v'\} = \bigsqcup_{v' \in f(s)} f^{-1}(v) \cap s.$$

En resumen, para todo $s \in K$ y todo $\alpha \in |s|$ se satisface que

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall \beta \in |s| \left(d_K(\alpha, \beta) < \delta \implies d_{K'}\left(f(\alpha), f(\beta)\right) < \epsilon \right).$$

Por lo tanto, $|f|$ es continua. $\square$