Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО»

Отчет по лабораторной работе №3

по дисциплине «Прикладная математика»

Авторы: Власов Роман, Высоцкая Валерия, Тихомиров Дмитрий

Факультет: Информационных технологий и программирования

Группа: M32021

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Санкт-Петербург, 2022

Описание используемых методов и понятий

Разреженно-строчный формат хранения матрицы

Используется для эффективного хранения разреженных матриц.

Представляем исходную матрицу в виде трех массивов

Массив значений, в котором хранятся подряд все ненулевые значения

Массив индексов столбцов, в котором хранятся номера столбцов, соответствующих элементов из массива значений

Массив индексации строк, где хранятся количество ненулевых элементов в строках с первой до i — 1 включительно

LU-разложение

Представление матрицы в виде произведения двух матриц. Для матрицы A = LU, где L – нижняя треугольная матрица, U – верхняя треугольная матрица.

Разложение существует, только когда матрица A обратима (имеет обратную матрицу) и все ведущие (угловые) главные миноры матрица A невырождены.

Алгоритм нахождения LU-разложения

Для i от 1 до n:

Для j от 1 до n:

Если i <= j:

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1}(l_{ik} * u_{kj})$$

Если i > j:

$$l_{ij} = (a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1}(l_{ik} * u_{kj}))/u_{ij}$$

Метод решения СЛАУ Гаусса с использованием LU-разложения

СЛАУ Ax=b можно решить простым путем, если известно LU-разложение матрицы A.

На первом этапе решается уравнение Lz=b, где z – промежуточное решение. L – нижняя треугольная матрица, поэтому решение можно записать в следующем виде:

$$z_1 = b_1, z_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij}\, z_j, i = \overline{2, n}$$

Далее решаем СЛАУ Ux = z, здесь U – верхняя треугольная матрица, поэтому тоже можно легко найти решение:

$$x_n = \frac{z_n}{u_{nm}}, x_i = \frac{1}{u_{ii}}\left(z_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{ij}x_j\right), i = \overline{n-1,1}$$

Нахождение обратной матрицы при помощи LU-разложения

Для нахождения каждого вектора обратной матрицы решаем СЛАУ, где приравниваем заданную матрицу соответствующему вектору из единичной матрицы. Например, для второго вектора обратной матрицы 3 на 3:

$$LUx_2 = \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}$$

Из полученных векторов получаем обратную матрицу.

Итерационный метод решения Якоби

Имеем СЛАУ Ax = b

Процедура нахождения решения имеет следующий вид

$x^{(n+1)} = -(Ax^{(n)} - dx - b)/d$*, где d – вектор диагональных элементов матрицы A*

Критерий остановки

$| x_{n+1} - x_n | < \varepsilon$

Условие сходимости:

Необходимое и достаточное условие:

Все собственные числа эквивалентной матрицы должны быть по модулю меньше единицы

Необходимое условие для метода простых итераций:

Норма эквивалентной матрицы должна быть меньше единицы

Необходимое условие для метода Якоби:

Исходная матрица должна обладать диагональным преобладанием.

Результаты тестирования

Зависимость точности решения от числа обусловленности матрицы

Матрицы с диагональным преобладанием

Число итераций: 2

Число обусловленности	Погрешность метода Якоби (максимальная разница между одной из координат в последних двух итерациях)
10689.2	37061557.2
3512	37.94
287	0.44
85	3e-05

Матрицы Гильберта

Метод Якоби на них расходится, так как они не удовлетворяют необходимому условию сходимости метода простых итераций

Сравнение прямого и итерационного методов по времени исполнения

N	Прямой	Итерационный
10	0.003327	0.000418
50	0.065255	0.001355
100	0.254790	0.002904
500	6.269468	0.012712
1000	25.430548	0.026203

Выводы:

По таблице видно, что время решения прямым методом сильно зависит от размера матрицы, чего нельзя сказать о итерационном. В то же время прямой метод гарантирует точной решение для матриц без нулевых элементов, итерационный же просто сходится только на матрицах с диагональным преобладанием и к тому же дает неточное решение, в зависимости от числа обусловленности матрицы.

Таким образом, итерационные методы стоит применять только в случаях больших матриц, в остальных лучше использовать прямой.

Ссылка на исходный код:

https://github.com/appmath-2022/labs/tree/main/Lab3