Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО»

Отчет по лабораторной работе №3

по дисциплине «Прикладная математика»

Авторы: Власов Роман, Высоцкая Валерия, Тихомиров Дмитрий

Факультет: Информационных технологий

Группа: M32021

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Санкт-Петербург 2022

Описание используемых методов и понятий

Разреженно-строчный формат хранения матрицы

Представляем исходную матрицу в виде трех массивов

Массив значений, в котором хранятся подряд все ненулевые значения

Массив индексов столбцов, в котором хранятся номера столбцов, соответствующих элементов из массива значений

Массив индексации строк, где хранятся количество ненулевых элементов в строках с первой до i — 1 включительно

LU-разложение

Представление матрицы в виде произведения двух матриц. Для матрицы A = LU, где L – нижняя треугольная матрица, U – верхняя треугольная матрица.

Разложение существует, только когда матрица A обратима (имеет обратную матрицу) и все ведущие (угловые) главные миноры матрица A невырождены.

Алгоритм нахождения LU-разложения

Для i от 1 до n:

Для j от 1 до n:

Если i <= j:

$$u_{ij}=a_{ij}-\sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}*u_{kj}$$

Если i > j:

$$l_{ij}=(a_{ij}-\sum_{k=1}^{j-1} l_{ij}*u_{ij})/u_{ij}$$

Метод решения СЛАУ Гаусса с использованием LU-разложения

СЛАУ Ax=b можно решить простым путем, если известно LU-разложение матрицы A.

На первом этапе решается уравнение Lz=b, где z – промежуточное решение. L – нижняя треугольная матрица, поэтому решение можно записать в следующем виде:

$$z_1=b_1, z_i-\sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} z_j, i=\overline{2,n}$$

Далее решаем СЛАУ Ux = z, здесь U – верхняя треугольная матрица, поэтому тоже можно легко найти решение:

$$x_n = \frac{z_n}{u_{nm}}, x_i = \frac{1}{u_{ii}} \left(z_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{ij} x_j \right), i = \overline{n-1, 1}$$

Нахождение обратной матрицы при помощи LU-разложения

Для нахождения каждого вектора обратной матрицы решаем СЛАУ, где приравниваем заданную матрицу соответствующему вектору из единичной матрицы. Например для второго вектора обратной матрицы 3 на 3:

$$LU\, x_2 = \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}$$

Из полученных векторов получаем обратную матрицу.

Итерационный метод решения Якоби

Имеем СЛАУ Ax = b

Процедура нахождения решения имеет следующий вид

$x^{(n+1)} = -(A\, x^{(n)} - dx - b)/d$, *где d – вектор диагональных элементов матрицы A*

Критерий остановки

$| x_{n+1} - x_n | < \varepsilon$

Результаты тестирования

Зависимость точности решения от числа обусловленности матрицы

Матрицы с диагональным преобладанием

Число итераций: 2

Число обусловленности	Погрешность(максимальная разница между одной из координат)
27.23	0.002
29.87	0.003
42.82	0.01
174.87	0.02
2214	0.04

Матрицы Гильберта

Метод Якоби на них расходится, потому что нет диагонального преобладания

Сравнение прямого и итерационного методов по времени исполнения

N	Прямой	Итерационный
10	0.003327	0.000418
50	0.065255	0.001355
100	0.254790	0.002904
500	6.269468	0.012712
1000	25.430548	0.026203

Выводы:

По таблице видно, что время решения прямым методом сильно зависит от размера матрицы, чего нельзя сказать о итерационном. В то же время прямой метод гарантирует точной решение для матриц без нулевых элементов, итерационный же просто сходится только на матрицах с диагональным преобладанием и к тому же дает неточное решение.

Таким образом, итерационные методы стоит применять только в случаях больших матриц, в остальных лучше использовать прямой.