Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО»

Отчет по лабораторной работе №4

по дисциплине «Прикладная математика»

Авторы: Власов Роман, Высоцкая Валерия, Тихомиров Дмитрий

Факультет: Информационных технологий и программирования

Группа: M32021

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Санкт-Петербург, 2022

Описание решения

Разреженно-строчный формат хранения матрицы. Используется для эффективного хранения разреженных матриц. Представляем исходную матрицу в виде трех массивов.

Массив значений, в котором хранятся подряд все ненулевые значения.

Массив индексов столбцов, в котором хранятся номера столбцов, соответствующих элементов из массива значений.

Массив индексации строк, где хранятся количество ненулевых элементов в строках с первой до i — 1 включительно.

Симметричной (Симметрической) называют квадратную матрицу, элементы которой симметричны относительно главной диагонали. Это означает, что она равна её транспонированной матрице.

Свойства симметричной матрицы:

- её собственные векторы, соответствующие разным собственным значениям, ортогональны друг другу.
- из её собственных векторов всегда можно составить ортонормированный базис
- матрицу A можно привести к диагональному виду: $A=QDQ^T$, где Q — ортогональная матрица, столбцы которой содержат ортонормированный базис из собственных векторов, а D — диагональная матрица с собственными значениями матрицы A на диагонали.
- Если у симметричной матрицы A единственное собственное значение λ, то она имеет диагональный вид: A= λE.

Спектральным радиусом квадратной матрицы называется максимальный из модулей ее собственных значений.

Собственный вектор – ненулевой вектор, который при умножении на некоторую квадратную матрицу превращается в самого же себя с числовым коэффициентом λ. Число λ называют собственным значением.

Полная проблема собственных значений. Заключается в задаче поиска всех собственных чисел заданной матрицы. В некоторых случаях вычисление также и собственных векторов.

Частичная проблема собственных значений. Заключается в вычислении некоторого подмножества собственных чисел, а также, возможно, требуется соответствующих им собственных векторов.

Метод Якоби — итерационный алгоритм для вычисления собственных значений и собственных векторов вещественной симметричной матрицы.

Суть алгоритма заключается в том, чтобы для заданной симметрической матрице построить последовательность ортогонально подобных матриц, сходящуюся к диагональной матрице, на диагонали которой стоят собственные значения. Для построения этой последовательности применяется специально подобранная матрица вращения.

Результаты тестирования

Реализация метода Якоби прошла тестирование изначально на случайных симметрических матрицах для проверки правильности решения.

Матрицы число обусловленности, которых регулируется за счет изменения диагонального преобладания. Для исследований реализованных методов строятся Матрицы $A^{к}$ следующим образом:

$$a_{ij} = \begin{cases} -\sum_{i \neq j} a_{ij}, i > 1, \\ -\sum_{i \neq j} a_{ij} + 10^k, i > 1, \end{cases}$$

k	Число обусловленности	Количество итераций для погрешности в 0.1	Погрешность для 95% итераций
10	29446.95	18623	3.14
	36302.51	18630	2.22
	47621.66	18700	2.59
50	66.24	15854	1.56
	66.99	16054	1.67
	146.32	16043	1.90
100	106.39	14054	1.27
	227.86	13779	1.31
	997.52	13675	1.5
500	71.59	9725	6.26
	104.57	9770	3.75
	427.14	9728	4.06
1000	101.09	9421	1.41
	114.16	9404	1.34
	248.51	9326	1.01

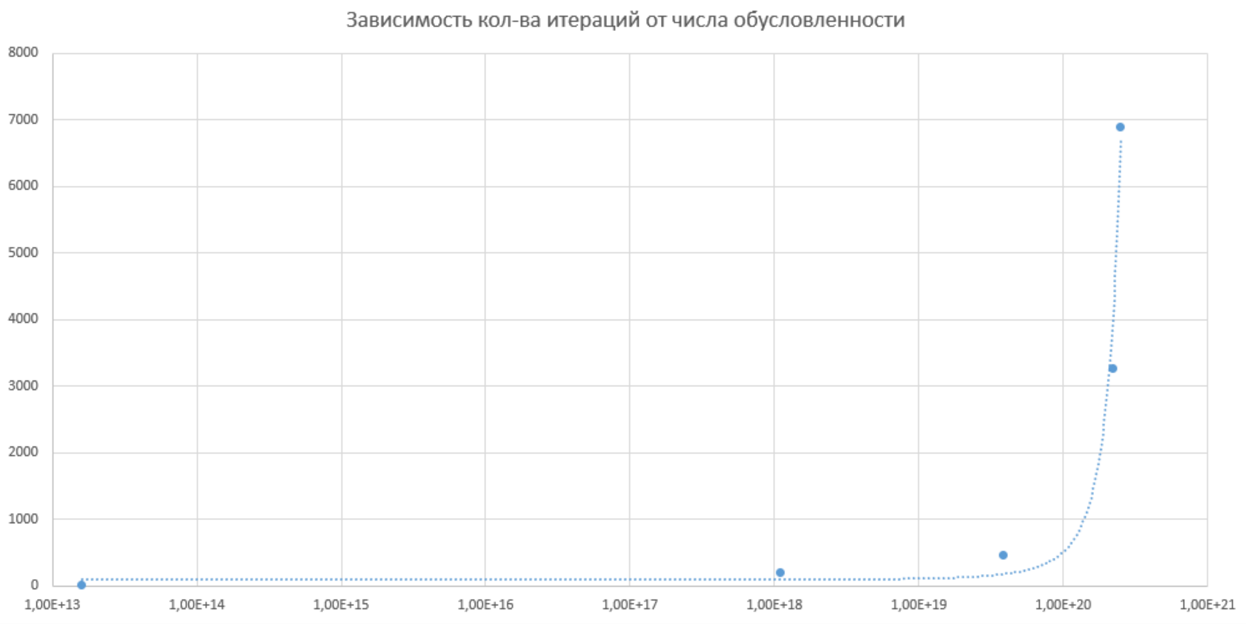
Можно заметить, что число обусловленности не особо сильно влияет на количество итераций, произведенных программой в данном случае из-за того, что разность этих чисел не особо большая. Также можно обратить внимание на то насколько сильно увеличивается погрешность при уменьшении количества итераций на 5%.

Матрицы Гильберта

Также требовалось провести аналогичные исследования на матрицах Гильберта различной размерности. Матрицы Гильберта размерности k строятся следующим образом:

$$a_{ij} = \frac{1}{i+j-1}, i, j = 1..k.$$

k	Число обусловленности	Количество итераций для погрешности в 0.1	Погрешность для 10% итераций
10	1.6e+13	19	1.07
50	1.1e+19	204	1.06
100	3.8e+19	452	1.15
500	2.2e+20	3272	1.16
1000	2.5e+20	6903	1.18



Можно отметить, что увеличение числа обусловленности матрицы ведет к увеличению числа итераций, требуемых программой для поиска собственных значений.

Выводы: Исследован метод вращений Якоби для нахождения собственных значений матриц, хранимых в разреженно-строчном формате. Проведено исследование данного метода на различных матрицах, результатом которого можно считать тот факт, что при сильном увеличении числа обусловленности количество итераций также вырастает по экспоненциальному закону.

Исходный код: https://github.com/appmath-2022/labs/tree/main/Lab4