Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО»

Отчет по лабораторной работе №1

по дисциплине «Прикладная математика»

Авторы: Власов Роман, Высоцкая Валерия, Тихомиров Дмитрий

Факультет: Информационных технологий

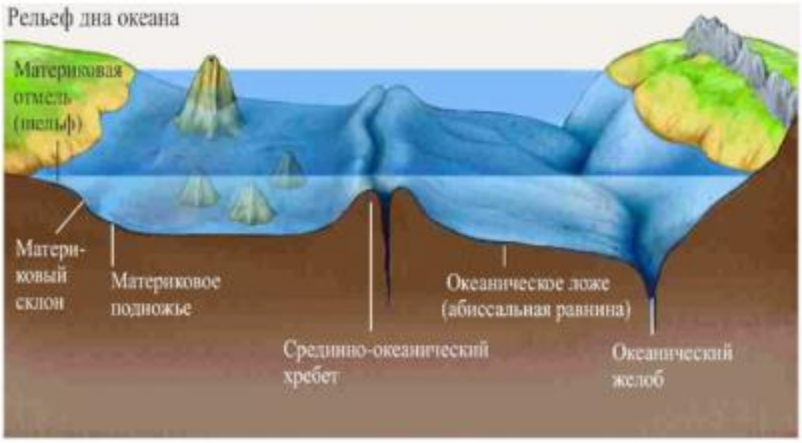
Группа: M32021

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Санкт-Петербург 2022

Вариант 2

Океаническое дно



Исследовательская экспедиция на батискафе решила исследовать флору и фауну океанического желоба вблизи западного бережья Южной Америки. Ранее при помощи акустического профилирования была получена картина океанического дна на пути следования батискафа. Профиль дна описывается следующей функцией на заданном промежутке (в относительных единицах):

$$y(x) = \sin(x)x^3$$

. Для построения точного курса исследователям необходимо извлечь из этих данных координату самой глубокой точки. Именно она будет являться океаническим желобом, который они так жаждут исследовать.

Цели работы: научиться реализовывать и использовать методы одномерной минимизации функции без производной, сравнить между собой поведение алгоритмов на разных входных данных.

Описание методов

Метод Дихотомии

$x_1 = (a_i + b_i)/2 - \delta,$
$x_2 = (a_i + b_i)/2 + \delta$

Выбираются точки x1, x2 в центре отрезка с отступом в дельта. По итогу после одной итерации длина отрезка уменьшится вдвое.

Преимуществом метода является высокая скорость схождения. Для достижения точности ε потребуется ln((b-a)/ ε)/ln2 итераций.

Недостатком метода является необходимость на каждой итерации вычисляются заново значения f(x1), f(x2), что является ресурсоёмким процессом.

Метод золотого сечения

$$\frac{b_0 - a_0}{b_0 - x_1} = \frac{b_0 - x_1}{x_1 - a_0} \qquad x_1 = a_i + \frac{\sqrt{5}-1}{2}(b_i - a_i)$$

точки x1, x2 находятся симметрично относительно середины отрезка [a; b] и делят его в пропорции золотого сечения.

Преимуществом данного метода является тот факт, что начиная со второй итерации мы вычисляем значение функции только один раз.

Но из-за этого за одну итерацию интервал уменьшается примерно в 1.6 раз, итого для точности ε нам понадобится $n \ge \frac{ln((b_0-a_0)/\varepsilon)}{ln(\frac{\sqrt{5}-1}{2})}$, итераций, что явно медленнее чем в методе дихотомии.

Метод Фибоначчи

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n], n = 1, 2, ..$$

формула n-го числа Фибоначчи.

$$x_1 = a_0 + \frac{F_n}{F_{n+2}}(b_0 - a_0), \quad x_2 = a_0 + \frac{F_{n+1}}{F_{n+2}}(b_0 - a_0) \qquad \frac{b_0 - a_0}{\varepsilon} < F_{n+2}.$$

Для начального отрезка вычисляем точки x1, x2. Далее на каждом шаге помещаем следующую точку внутрь интервала симметрично относительно находящейся в нем точки.

Недостатком данного метода явно можно считать необходимость вычислять значение n чисел Фибоначчи.

Что компенсируется приростом скорости схождения отрезка.

Метод Парабол

В данном методе мы аппроксимируем функцию квадратичной функцией, для чего нам нужны 3 точки x1, x2, x3.

$$u = -\frac{b}{2a} = x_2 - \frac{(x_2 - x_1)^2(f_2 - f_3) - (x_2 - x_3)^2(f_2 - f_1)}{2[(x_2 - x_1)(f_2 - f_3) - (x_2 - x_3)(f_2 - f_1)]}$$

По этой формуле получаем минимум параболы, с помощью которого и сокращаем интервал поиска.

Главным преимуществом данного метода является суперлинейная скорость сходимости.

Но такая скорость гарантируется только в окрестности точки минимума.

Метод Брента

В данном методе мы следим за 6 точками: a, c – границы интервала, x – наименьшее значение функции, w – второе наименьшее, v – предыдущее значение w.

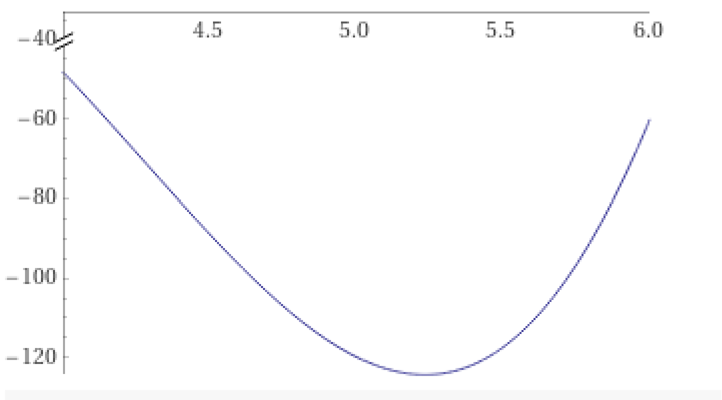
Аппроксимируя методом парабол, получаем u, которое принимается только если: попадает внутрь интервала, отстает от границ не менее чем на ε, отстоит от точки x не более чем на половину от длины предыдущего шага. Если u отвергается, то следующая точка ищется методом золотого сечения.

Метод позволяет эффективно использовать преимущества методов парабол и золотого сечения.

Результаты тестирования методов

Исходный код - https://github.com/appmath-2022/labs/tree/main/Lab1

f(x) = sin(x)*x^3, Исследуемый отрезок – [4; 6]



*n – количество итераций, m – количество вызовов функции

Точность = 0.005

Метод дихотомии – [5.230436706542968; 5.235467147827149], n = 16, m = 32

Метод золотого сечения – [5.229856737469522; 5.233695494920546], n = 13, m = 15

Метод Фибоначчи – [5.229508196721311; 5.232786885245901], n = 14, m = 18

Метод парабол – [5.23046875; 5.234375], n = 9, m = 27

Метод Брента – [5.230519423649671; 5.234635636446995], n = 7, m = 8

Точность = 0.0005

Метод дихотомии – [5.2326858310699444; 5.233189644813536], n = 19, m = 38

Метод золотого сечения – [5.232789287213084 5.233135427756228], n = 18, m = 20

Метод Фибоначчи – [5.232719445108826; 5.232719445108826], n = 18, m = 22

Метод парабол – [5.23291015625; 5.2333984375], n = 12, m = 36

Метод Брента – [5.2328924289855205; 5.233185644219775], n = 9, m = 10

Точность = 0.00005

Метод дихотомии – [5.232913188087941; 5.232963664913178], n = 22, m = 44

Метод золотого сечения – [5.232921501135053; 5.232952712611496], n = 23, m = 25

Метод Фибоначчи – [5.232919254658386; 5.232919254658386], n = 23, m = 27

Метод парабол – [5.23291015625; 5.232940673828125], n = 16, m = 48

Метод Брента – [5.232917879347634; 5.2329476540036906], n = 13, m = 14

Изменение Длины Отрезка

Метод дихотомии – 2 > 1.000025 > 0.5000375 > 0.25005 > 0.12505 > 0.0625 > 0.031 > 0.0156 > 0.0079 > 0.00396 > 0.002 > 0.001 > 0.00054 > 0.0003 > 0.00017 > 0.0001 > 8.05e-05 > 6.5e-05 > 5.7e-05 > 5.4e-05 > 5.2e-05 > 5.1e-05 > 5.05e-05

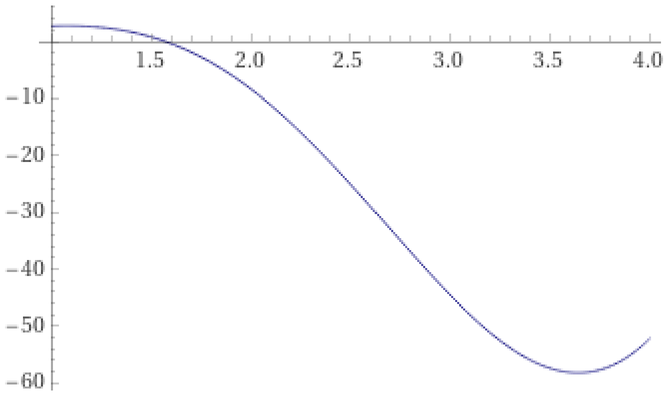
Метод Золотого сечения – 2 > 1.24 > 0.76 > 0.47 > 0.29 > 0.18 > 0.11 > 0.069 > 0.043 > 0.026 > 0.016 > 0.01 > 0.0062 > 0.0038 > 0.0024 > 0.0015 > 0.0009 > 0.00056 > 0.00035 > 0.00021 > 0.00013 > 8.17e-05 > 5.05e-05 > 3.12e-05

Метод Фибоначчи – 2 > 1.24 > 0.76 > 0.47 > 0.29 > 0.18 > 0.11 > 0.069 > 0.043 > 0.026 > 0.016 > 0.01 > 0.0062 > 0.0039 > 0.0024 > 0.0015 > 0.00091 > 0.00056 > 0.00035 > 0.00022 > 0.00013 > 8.63e-05 > 4.31e-05

Метод парабол – 2 > 1.0 > 0.5 > 0.25 > 0.125 > 0.0625 > 0.03125 > 0.015625 > 0.0078 > 0.0039 > 0.0019 > 0.00098 > 0.00049 > 0.00024 > 0.00012 > 6.10e-05 > 3.05e-05

Метод Брента – 2 > 1.38 > 1.0 > 0.38 > 0.16 > 0.01 > 0.0046 > 0.0018 > 0.0007 > 0.00029 > 0.00014 > 7.79e-05 > 5.25e-05 > 2.97e-05

$f(x) = 5*\cos(x)*x^2$, Исследуемый отрезок – [1; 4]



Точность = 0.005

Метод дихотомии – [2.1228050994873047; 2.1278507995605467], n = 16, m = 32

Метод золотого сечения – [2.123705589790646; 2.127264313659511], n = 14, m = 16

Метод Фибоначчи – [2.121311475409836; 2.1262295081967215], n = 14, m = 18

Метод парабол – [2.1220703125; 2.125], n = 10, m = 30

Метод Брента – [2.1237280592422154; 2.1268190149398545], n = 8, m = 9

Точность = 0.0005

Метод дихотомии – [2.125092833518982; 2.1255956940650935], n = 20, m = 40

Метод золотого сечения – [2.1252632222347927; 2.125584112166555], n = 19, m = 21

Метод Фибоначчи – [2.1250554323725055; 2.12549889135255], n = 19, m = 23

Метод парабол – [2.1246337890625; 2.125], n = 13, m = 39

Метод Брента – [2.125101176769847; 2.1253893242134585], n = 11, m = 12

Точность = 0.0005

Метод дихотомии – [2.1253199179470537; 2.125370275568962], n = 23, m = 46

Метод золотого сечения – [2.1253100394494577; 2.1253568566641228], n = 23, m = 25

Метод Фибоначчи – [2.125304898367211; 2.1253448850383205], n = 24, m = 28

Метод парабол – [2.1249542236328125; 2.125], n = 16, m = 48

Метод Брента – [2.125329104920862; 2.125360420211123], n = 15, m = 16

Изменение длины отрезка

Метод дихотомии – 3 > 1.500025 > 0.75 > 0.375 > 0.1875 > 0.094 > 0.047 > 0.0235 > 0.012 > 0.006 > 0.003 > 0.0015 > 0.00078 > 0.00042 > 0.00023 > 0.00014 > 9.6e-05 > 7.3e-05 > 6.1e-05 > 5.6e-05 > 5.3e-05 > 5.14e-05 > 5.07e-05 > 5.036e-05

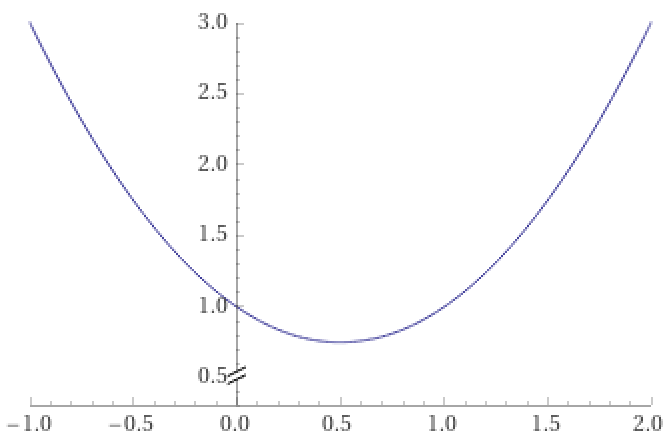
Метод Золотого сечения – 3 > 1.85 > 1.15 > 0.71 > 0.44 > 0.27 > 0.17 > 0.10 > 0.064 > 0.039 > 0.024 > 0.015 > 0.0093 > 0.0058 > 0.0036 > 0.0022 > 0.0014 > 0.00084 > 0.00052 > 0.00032 > 0.00019 > 0.00012 > 7.58e-05 > 4.68e-05

Метод Фибоначчи – 3 > 1.85 > 1.15 > 0.71 > 0.44 > 0.27 > 0.17 > 0.10 > 0.064 > 0.039 > 0.024 > 0.015 > 0.0093 > 0.0058 > 0.0036 > 0.0022 > 0.0014> 0.00084 > 0.00052 > 0.00032 > 0.00019 > 0.00012 > 7.99e-05 > 3.99e-05

Метод парабол – 3 > 1.5 > 0.75 > 0.375 > 0.1875 > 0.094 > 0.047 > 0.023 > 0.012 > 0.0059 > 0.003 > 0.0014 > 0.00073 > 0.00037 > 0.00018 > 9.16e-05 > 4.58e-05

Метод Брента – 3 > 1.5 > 0.93 > 0.57 > 0.41 > 0.39 > 0.013 > 0.011 > 0.0044 > 0.0017 > 0.00068 > 0.00029 > 0.00014 > 8.19e-05 > 5.31e-05 > 3.13e-05

$f(x) = x^2 - x + 1$, Исследуемый отрезок – [-1; 2]



Точность = 0.005

Метод дихотомии – [0.4975; 0.5025457000732421], n = 16, m = 32

Метод золотого сечения – [0.49754098228497057; 0.5010997061538358], n = 14, m = 16

Метод Фибоначчи – [0 .4950819672131148; 0.5], n = 14, m = 18

Метод парабол – [0.5; 0.5029296875], n = 10, m = 30

Метод Брента – [0.5; 0.5046584300227128], n = 9, m = 10

Точность = 0.0005

Метод дихотомии – [0.49975; 0.5002528605461121], n = 20, m = 40

Метод золотого сечения – [0.4997403945926422; 0.5000612845244046], n = 19, m = 21

Метод Фибоначчи – [0.4997782705099778; 0.5002217294900222], n = 19, m = 23

Метод парабол – [0.5; 0.5003662109375], n = 13, m = 39

Метод Брента – [0.5; 0.5002596054075683], n = 12, m = 13

Точность = 0.0005

Метод дихотомии – [0.499975; 0.5000253576219083], n = 23, m = 46

Метод золотого сечения – [0.4999676500950745; 0.5000144673097395], n = 23, m = 25

Метод Фибоначчи – [0.4999800066644452; 0.49998000666444514], n = 24, m = 28

Метод парабол – [0.5; 0.5000457763671875], n = 16, m = 48

Метод Брента – [0.5; 0.5000378759185152], n = 14, m = 15

Изменение Отрезка

Метод дихотомии – 3 > 1.500025 > 0.75 > 0.375 > 0.1875 > 0.094 > 0.047 > 0.0235 > 0.012 > 0.006 > 0.003 > 0.0015 > 0.00078 > 0.00042 > 0.00023 > 0.00014 > 9.6e-05 > 7.3e-05 > 6.1e-05 > 5.6e-05 > 5.3e-05 > 5.14e-05 > 5.07e-05 > 5.036e-05

Метод Золотого сечения – 3 > 1.85 > 1.15 > 0.71 > 0.44 > 0.27 > 0.17 > 0.10 > 0.064 > 0.039 > 0.024 > 0.015 > 0.0093 > 0.0058 > 0.0036 > 0.0022 > 0.0014 > 0.00084 > 0.00052 > 0.00032 > 0.0002 > 0.00012 > 7.58e-05 > 4.68e-05

Метод Фибоначчи – 3 > 1.85 > 1.15 > 0.71 > 0.44 > 0.27 > 0.17 > 0.10 > 0.064 > 0.039 > 0.024 > 0.015 > 0.0093 > 0.0058 > 0.0036 > 0.0022 > 0.0014> 0.00084 > 0.00052 > 0.00032 > 0.00019 > 0.00012 > 7.99e-05 > 3.99e-05

Метод парабол – 3 > 1.5 > 0.75 > 0.375 > 0.1875 > 0.09375 > 0.047 > 0.023 > 0.012 > 0.0059 > 0.0029 > 0.0015 > 0.00073 > 0.00037 > 0.00018 > 9.16e-05 > 4.57e-05

Метод Брента – 3 > 2.07 > 1.15 > 0.79 > 0.57 > 0.22 > 0.084 > 0.032 > 0.012 > 0.0047 > 0.0018 > 0.00068 > 0.00026 > 9.92e-05 > 3.79e-05

Вывод: Самым эффективным методом нахождения локального минимума можно считать метод Брента, так как он комбинирует в себе метод парабол и золотого сечения, которые обеспечивают маленькое количество итераций и обращений к вычислению функции. Самые быстросходящимися методами можно считать метод дихотомии и парабол. Однако эти алгоритмы часто обращаются к функции, что не является легкой операцией для вычисления. Метод Фибоначчи и метод золотого сечения позволяют не считать лишние разы значение функции в точке. Но в этих методах количество итераций наибольшее.