

ESPERIENZA 3

Appoloni Alberto, Cisamolo Anna

(Dated: October 2021)

I. INTRODUZIONE

L'obiettivo di questa esperienza è lo studio di filtri passa basso di secondo livello, con e senza la presenza di amplificatori operazionali disaccoppiatori.

II. SVOLGIMENTO

Iniziamo l'esperienza preparando la bread-board. Inseriamo in due linee di alimentazione due segnali a tensione costante a $+12\text{ V}$ e -12 V prodotte tramite il generatore di tensione, avendo cura di limitare la corrente in ciascun ramo a 20 mA ; utilizziamo una terza linea per la massa.

Successivamente montiamo in ordine i circuiti 1, 2 e 3 utilizzando 2 resistenze $R = 100\text{ k}\Omega$ e 2 condensatori $C = 10\text{ nF}$. Adoperando un segnale in ingresso \tilde{V}_{in} sinusoidale di ampiezza picco-picco uguale a 4 V , effettuiamo misure di ampiezza e fase del segnale in uscita \tilde{V}_{out} , a 10 diverse frequenze, comprese tra 5 Hz e 2 kHz .

Per prendere tali valori utilizziamo i cursori, misurando sull'asse verticale l'ampiezza ΔY , mentre sull'asse orizzontale leggiamo la differenza in secondi ΔX tra due zeri adiacenti di \tilde{V}_{in} e \tilde{V}_{out} . Per ottenere la corrispettiva differenza di fase in gradi, utilizziamo la seguente relazione:

$$\Delta\Phi = \frac{360 \cdot \Delta X}{T} = 360 \cdot \Delta X \cdot f$$

dove T è il periodo, ottenuto facendo il reciproco della frequenza impostata.

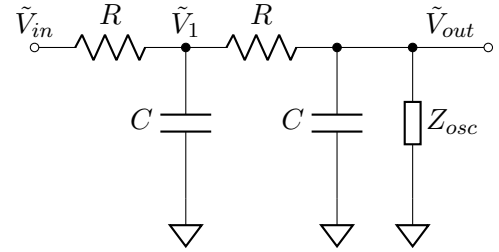
Per effettuare la misura della risposta impulsionale impostiamo come segnale in ingresso \tilde{V}_{in} un treno di impulsi di ampiezza 5 V . La durata di tali impulsi l'abbiamo scelta pari a $10\text{ }\mu\text{s}$ ovvero un tempo trascurabile rispetto al tempo caratteristico del circuito dato dal τ dei circuiti passa-basso. In questo modo possiamo approssimare tale impulso a un segnale istantaneo. Per evitare che il segnale di uscita abbia un offset che renderebbe scomodo la presa dei dati, appoggiamo il segnale in ingresso sull'asse x imponendo un offset uguale a 2.5 V . Inoltre impostiamo la frequenza degli impulsi a 1 Hz , in modo tale che il secondo impulso della serie avvenga quando il segnale in uscita si sia già smorzato e quindi la zona non

sia di interesse per le misure. In questa configurazione misuriamo, sempre utilizzando i cursori, 10 punti $X = \Delta t\text{ [s]}$ e $Y = d.d.p\text{ [V]}$ della curva del segnale in uscita. Visualizziamo i dati raccolti nella sezione "Risultati misurazione".

III. ANALISI

Per poter prevedere il comportamento dei circuiti che abbiamo studiato e per confrontare poi i dati raccolti, calcoliamo, assumendo che i circuiti si comportano in modo ideale, le quantità che abbiamo misurato durante l'esperienza.

I set up che utilizziamo sono schematizzati nelle figure 1, 2 e 3. Si trattano tutti e tre di due filtri passa basso collegati in cascata, con l'aggiunta, nel secondo circuito, di un Amp-Op all'uscita del primo passa basso, e nel terzo di un secondo amplificatore all'uscita dell'intero circuito.



Circuit 1: filtro passa-basso del secondo ordine senza disaccoppiatori

Studiamo per prima cosa la funzione di trasferimento nel dominio delle frequenze. Per farlo utilizziamo le impedenze generalizzate.

Per semplificare l'analisi possiamo suddividere i due filtri e utilizzare il teorema di Thévenin. Per tale teorema, infatti, il primo filtro può essere schematizzato come un generatore ideale di tensione in serie con un'impedenza.

La differenza di potenziale in uscita al primo filtro è pari a

$$\tilde{V}_1 = \frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}} \cdot \tilde{V}_{in} = \frac{1}{1 + sRC} \cdot \tilde{V}_{in}$$

mentre l'impedenza è uguale al parallelo tra la resistenza e il condensatore

$$\tilde{Z}_1 = R || \frac{1}{sC} = \frac{R}{1 + sRC}$$

Possiamo quindi studiare il secondo filtro come un normale passa-basso collegato al generatore reale equivalente descritto sopra.

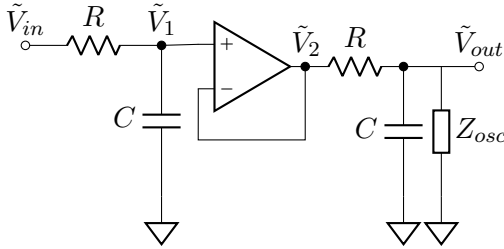
La differenza di potenziale \tilde{V}_{out} , che è pari alla differenza di potenziale ai capi del condensatore e della Z_{osc} , è nuovamente calcolabile ricorrendo al circuito equivalente di Thévenin.

$$\tilde{V}_{out} = \tilde{V}_1 \cdot \frac{\frac{1}{sC} \parallel \tilde{Z}_{osc}}{(\tilde{Z}_1 + R) + \frac{1}{sC} \parallel \tilde{Z}_{osc}}$$

e

$$\tilde{Z}_{out} = (R + \tilde{Z}_1) \parallel \left(\frac{1}{sC} \parallel \tilde{Z}_{osc} \right)$$

Il secondo circuito differisce dal primo solo per la presenza dell'amplificatore operazionale collegato all'uscita dal primo passa-basso.



Circuit 2: filtro passa-basso del secondo ordine con un disaccoppiatore

Nella scorsa esperienza abbiamo verificato che l'Amp-Op montato in configurazione "follower" ha come caratteristica di inseguire il segnale in ingresso avendo però una elevatissima impedenza in ingresso e un'impedenza in uscita trascurabile. Quest'ultima caratteristica si rivela estremamente utile in quanto, inserita in serie ad un generatore reale, consente di annullare il valore dell'impedenza interna. Nel nostro caso abbiamo come generatore il circuito equivalente di Thévenin relativo al primo passa basso. Ricaviamo quindi che in \tilde{V}_2 abbiamo

$$\tilde{V}_2 = \frac{1}{1 + sRC} \cdot \tilde{V}_{in}$$

mentre $\tilde{Z}_2 = 0$

Ciò ci permette di mantenere le informazioni relative al primo passa basso disaccoppiando però i due circuiti a livello dell'impedenza.

Otteniamo quindi che

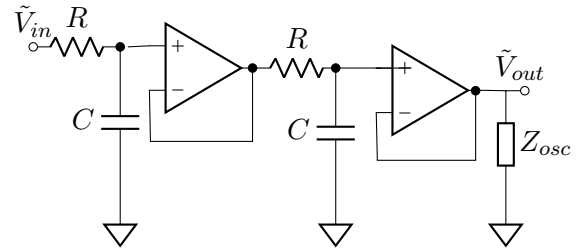
$$\tilde{V}_{out} = \tilde{V}_2 \cdot \frac{\frac{1}{sC} \parallel Z_{osc}}{R + \frac{1}{sC} \parallel Z_{osc}} \quad (1)$$

in cui abbiamo posto la resistenza derivante dal primo passa basso uguale a zero. Abbiamp

inoltre che

$$\tilde{Z}_{out} = R \parallel \left(\frac{1}{sC} \parallel \tilde{Z}_{osc} \right) \quad (2)$$

Notiamo che in questa configurazione siamo ancora dipendenti dalla Z_{osc} . Ciò non è positivo in quanto questa quantità è difficile da ottenere con accuratezza in quanto dipendente da molti fattori e spesso influisce negativamente sul segnale che vogliamo ottenere. Per ovviare anche a questa difficoltà inseriamo nel circuito un ulteriore Amp-Op in uscita al secondo passa-basso. In questo modo l'impedenza in uscita dei due filtri è annullata dalla presenza dell'amplificatore e quindi non si viene più a creare alcun legame tra i filtri e l'oscilloscopio.



Circuit 3: filtro passa-basso del secondo ordine con due disaccoppiatori

Il calcolo di \tilde{V}_{out} è così ulteriormente semplificato. Dato che nel punto \tilde{V}_3 la differenza di potenziale è data da

$$\tilde{V}_3 = \tilde{V}_{in} \cdot \frac{1}{(1 + sRC)^2} \quad (3)$$

e $Z_3 = R \parallel \frac{1}{sC}$ dopo l'amplificatore operazionale avremmo la stessa d.d.p $\tilde{V}_4 = \tilde{V}_3$ mentre $Z_{V_4} = 0$

Il circuito equivalente di Thévenin, che si crea considerando anche la connessione dell'oscilloscopio al circuito, ha come valori:

$$\begin{aligned} \tilde{V}_{out} &= \frac{Z_{osc}}{Z_4 + Z_{osc}} \cdot \tilde{V}_4 = \tilde{V}_4 \\ Z_{out} &= Z_4 \parallel Z_{osc} = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Otteniamo così un circuito completamente indipendente dalla presenza dell'oscilloscopio

Le relazioni trovate sono valide per ogni tipo di onda in ingresso. Le possiamo applicare quindi anche ad un segnale impulsivo. Tuttavia le espressioni che abbiamo calcolato agiscono nello spazio delle frequenze mentre è evidente che l'impulso è un segnale descritto nello spazio dei tempi. Notiamo che in tale spazio l'impulso può essere rappresentato come la differenza di due Θ di Heaviside molto vicine tra loro:

$$x(t) = V_0 \cdot [\Theta(t) - \Theta(t - \delta t)]$$

Di tale funzione conosciamo la trasformata di Laplace

$$\tilde{X}(s) = V_0 \cdot \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s} e^{-s \cdot \delta t} \right]$$

Il segnale in uscita che si ottiene dall'iniezione di tale $\tilde{X}(s)$ è pari a :

$$\tilde{Y}(s) = \tilde{G}(s) \cdot \tilde{X}(s)$$

dove $\tilde{G}(s)$ è il guadagno del circuito e vale

$$\tilde{G}_1(s) = \frac{\frac{1}{sC} \|\tilde{Z}_{osc}\|}{(R \|\frac{1}{sC} + R\| + \frac{1}{sC} \|\tilde{Z}_{osc}\|)} \cdot \frac{1}{1 + sRC}$$

per il circuito 1,

$$\tilde{G}_2(s) = \frac{\frac{1}{sC} \|\tilde{Z}_{osc}\|}{R + \frac{1}{sC} \|\tilde{Z}_{osc}\|} \cdot \frac{1}{1 + sRC}$$

per il circuito 2 e

$$\tilde{G}_3(s) = \frac{1}{(1 + sRC)^2}$$

per il circuito 3, riprendendo i risultati dei calcoli fatti in precedenza.

Quello che ci interessa della risposta all'impulso è l'evoluzione temporale del segnale in uscita. Dobbiamo quindi ritornare dallo spazio delle frequenze allo spazio delle coordinate e calcolare $Y(t)$ che è l'antitrasformata di $\tilde{Y}(s) = \tilde{G}(s) \cdot \tilde{X}(s) = \tilde{G}(s) \cdot \frac{V_0}{s} \cdot [1 - e^{-s \cdot \delta t}]$.

Prima di fare questo però notiamo che δt è infinitesimo rispetto a tutti gli altri valori di tempo a cui ci riferiamo. E' quindi possibile approssimare $\tilde{X}(s)$ tramite lo sviluppo di Taylor dell'esponenziale al primo ordine:

$$\begin{aligned} \tilde{X}(s) &= \frac{V_0}{s} [1 - e^{-s \cdot \delta t}] \simeq \frac{V_0}{s} [1 - (1 + s \cdot \delta t)] \\ &= V_0 \cdot \delta t \end{aligned}$$

In questo modo il calcolo della trasformata inversa viene notevolmente semplificato diventando il calcolo della trasformata del solo guadagno $\tilde{G}(s)$ in quanto V_0 e δt sono costanti note.

Per lo svolgimento dei calcoli utilizziamo il metodo della scomposizione in fratti semplici per poi usare la relazione notevole

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s + a} \right] = e^{-a \cdot t}.$$

Per il circuito 1 riportiamo qui sotto l'espressione di $Y(t)$ calcolata in assenza dell'oscilloscopio, mentre ci riferiamo all'Appendice per la formula completa.

$$Y(t) = \frac{2}{\sqrt{5} \cdot RC} \cdot e^{-\frac{3}{2 \cdot RC} \cdot t} \cdot \sinh \left(\frac{\sqrt{5}}{2 \cdot RC} \cdot t \right)$$

Per il circuito 2 abbiamo invece

$$Y(t) = \frac{R_{osc}}{CR^2 - C_{osc}RR_{osc}} \cdot \left(e^{-\frac{t}{CR}} - e^{-\frac{(Rt + R_{osc})}{CRR_{osc} + C_{osc}RR_{osc}} \cdot t} \right)$$

Il risultato più semplice lo otteniamo per il terzo circuito per il quale $Y(t)$ è

$$Y(t) = \frac{1}{RC} \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

Riportiamo i grafici contenenti il confronto tra dati sperimentali e i valori ottenuti analiticamente nella prossima sezione

III.1. Risultati misurazioni

Per quanto riguarda la risposta dei vari circuiti al segnale sinusoidale riportiamo i dati raccolti nelle tabelle I, II e III

Frequenza	ΔY_1	ΔY_2	ΔX	$\Delta \Phi$
[Hz]	[V]	[V]	[ms]	[°]
5	4	3.35	2.52	-4.64
10	4	3.38	2.60	-9.36
20	4	3.23	2.60	-18.72
50	4	2.74	2.40	-43.20
100	4	1.91	1.88	-67.68
160	4	1.28	1.51	-86.98
200	4	1.03	1.34	-96.48
500	4	0.31	0.74	-132.50
1000	4	0.09	0.43	-154.48
2000	4	0.024	0.24	-170.60

TABLE I: Dati primo circuito

Per confrontare le misure trovate con le aspettative, le inseriremo in un diagramma di Bode in cui disegniamo anche i valori attesi a partire dalle formule trovate per il guadagno (Figure 1, 2 e 3).

Riportiamo in Appendice un grafico (Figura 7) che contiene un confronto diretto tra gli andamenti dei tre circuiti.

Frequenza	ΔY_1	ΔY_2	ΔX	$\Delta \Phi$
[Hz]	[V]	[V]	[ms]	[°]
5	4	3.64	1.40	-2.52
10	4	3.64	1.90	-6.84
20	4	3.63	1.90	-13.82
50	4	3.38	1.90	-34.20
100	4	2.69	1.70	-61.56
160	4	1.90	1.52	-87.55
200	4	1.51	1.40	-100.80
500	4	0.37	1.21	-217.80
1000	4	0.10	0.55	-199.40
2000	4	0.02	0.27	-194.40

TABLE II: Dati secondo circuito

Frequenza	ΔY_1	ΔY_2	ΔX	$\Delta \Phi$
[Hz]	[V]	[V]	[ms]	[°]
5	4	5.00	1.60	-2.88
49	4	4.56	1.96	-34.57
100	4	3.57	1.76	-63.36
160	4	1.94	1.42	-102.20
500	4	0.47	0.82	-147.60
1000	4	0.13	0.45	-161.30
2000	4	0.03	0.23	-169.90

TABLE III: Dati terzo circuito

Per rappresentare l'ampiezza in funzione alla frequenza utilizziamo l'unità di misura dei Decibel che si ricava tramite la relazione

$$\tilde{G}_{dB} = 20 \log_{10} \left(\tilde{G}(s = i\omega) \right) \text{ dB}.$$

Da questa equivalenza otteniamo che per frequenze elevate la dipendenza dell'ampiezza dalla frequenza è approssimabile ad una retta, la cui pendenza è pari a $20 n \text{ dB}$ per ogni decade, o equivalentemente a $6 n \text{ dB}$ per ottava, dove n è il numero di poli della funzione di trasferimento $\tilde{G}(s)$. Infatti quando $\omega\tau \gg 1$ possiamo approssimare $\tilde{G}(s)$ a $\tilde{G}(s) \simeq \frac{1}{(\omega\tau)^n}$ e quindi ottenere che

$$\begin{aligned} G_{dB}(\omega) &= 20 \log_{10} \left(\tilde{G}(i\omega) \right) \text{ dB} \\ &= 20 \log_{10} \left(\frac{1}{(\omega\tau)^n} \right) \text{ dB} \\ &= -20 n \log_{10}(\omega\tau) \text{ dB}. \end{aligned}$$

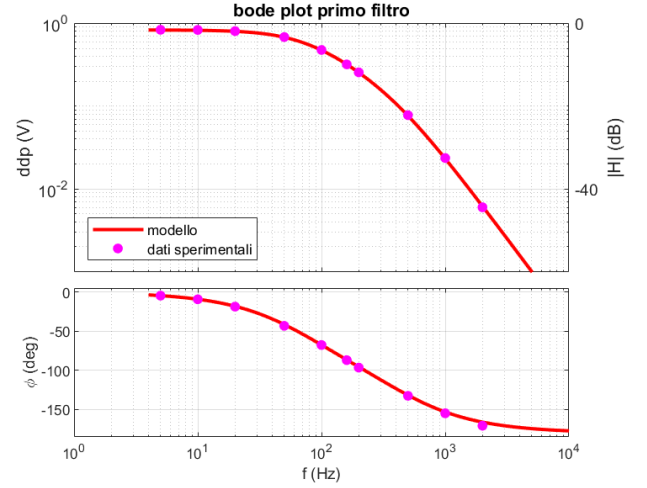


FIG. 1: Bode plot filtro passo-basso del secondo ordine senza disaccoppiatori

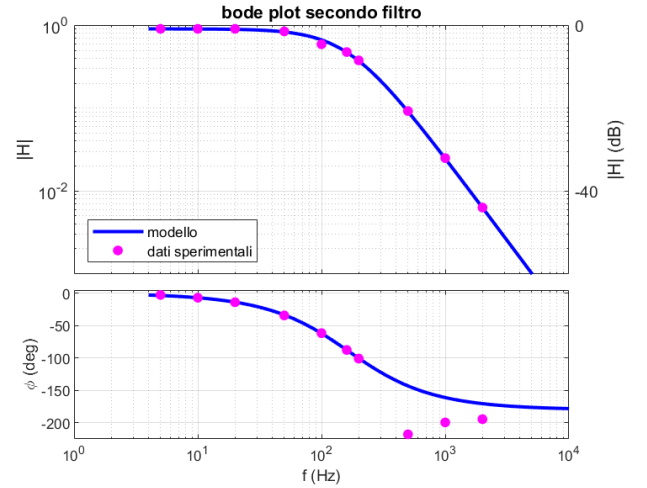


FIG. 2: Bode plot filtro passo-basso del secondo ordine con un disaccoppiatore

Per una duplicazione della frequenza si ha quindi che

$$\begin{aligned} G_{dB}(2 \cdot \omega) &= -20 n \log_{10}(2 \cdot \omega\tau) \text{ dB} \\ &= -20 n (\log_{10}(2) + \log_{10}(\omega\tau)) \text{ dB} \\ &\simeq -6 n - G_{dB}(\omega) \text{ dB}. \end{aligned}$$

Tale regime di frequenze è raggiunto dalle nostre misure solo negli ultimi due dati in cui la frequenza è pari a 1 kHz e 2 kHz . Facendo la differenza del guadagno di quest'ultimi due punti dei nostri dati, possiamo notare che la variazione di $\tilde{G}(s)$ corrisponde a $\tilde{G}_{dB} = 12 \text{ dB}$ per l'aumento di un ottava (equivalente a 40 dB per decade).

Esso è esattamente l'andamento che ci aspettavamo in quanto tutti e tre i circuiti hanno la funzione di trasferimento che presenta due poli.

Osserviamo che i punti sperimentali sono perfettamente coincidenti con il modello. Solo tre

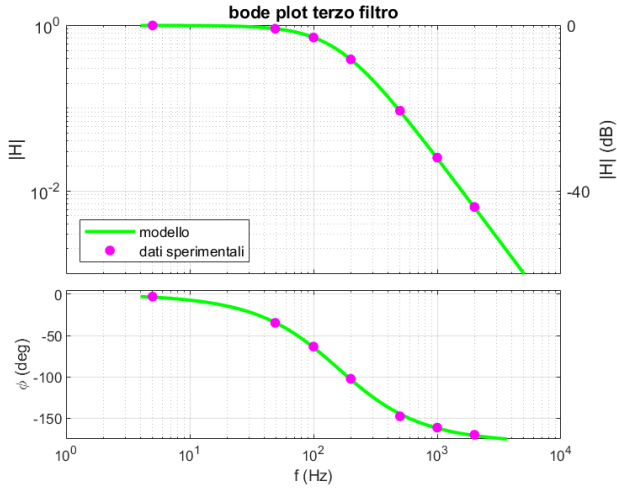


FIG. 3: bode plot filtro passo-basso del secondo ordine con 2 disaccoppiatori

circuito	$\tilde{G}_{dB}(1000 \text{ s}^{-1})$	$\tilde{G}_{dB}(2000 \text{ s}^{-1})$	ΔG_{dB}
	<i>dB</i>	<i>dB</i>	<i>dB</i>
1	44.44	32.53	11.90
2	44.03	32.06	11.95
3	41.94	30.00	11.94

TABLE IV: Pendenza retta regime di alte frequenze

misure della differenza di fase relative al secondo filtro, corrispondenti ad una frequenza di 500 Hz, 1 kHz e 2 kHz, si discostano in modo evidente dalla curva teorica. Tale errore possiamo imputarlo solo ad una errata misurazione della differenza di fase utilizzando i cursori.

Riportiamo di seguito le tabelle con le misure prese e i grafici relativi alla risposta dei tre circuiti all'impulso.

$X = \Delta t$	$Y = d.d.p$
<i>[ms]</i>	<i>[mV]</i>
0.23	8.50
0.50	12.7
0.73	13.7
1.00	13.3
1.50	11.8
2.00	9.75
2.50	7.83
3.00	6.20
3.50	4.88
4.00	4.13

TABLE V: Dati impulso primo circuito

Per conoscenza riportiamo anche il grafico teorico della risposta impulsionale del terzo circuito

$X = \Delta t$	$Y = d.d.p$
<i>[ms]</i>	<i>[mV]</i>
0.36	12.1
0.52	15.0
0.98	17.9
1.68	15.1
2.08	12.1
2.60	8.93
3.14	5.93
3.98	3.15
4.98	1.35

TABLE VI: Dati impulso secondo circuito

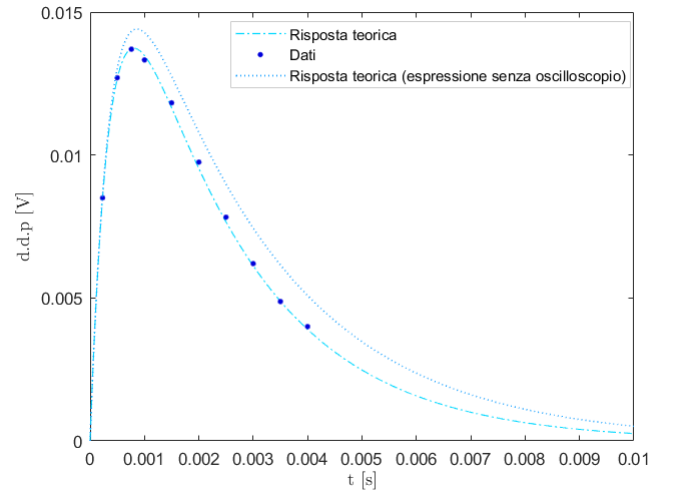


FIG. 4: Risposta impulsionale circuito 1

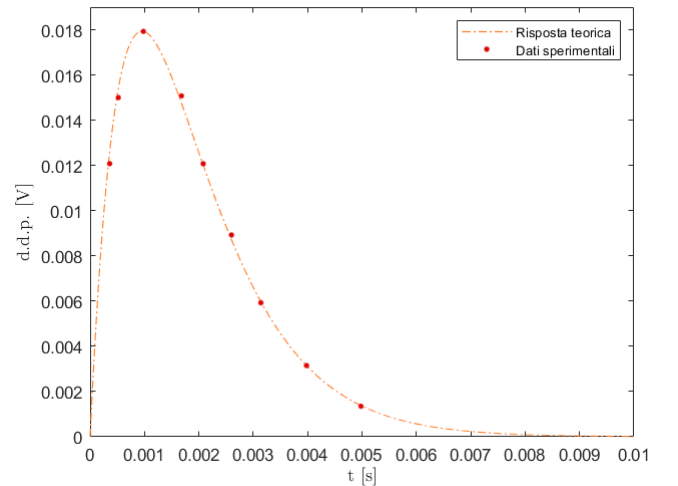


FIG. 5: Risposta impulsionale circuito 2

Anche in questo caso l'aderenza tra modello e dati teorici è ottima.

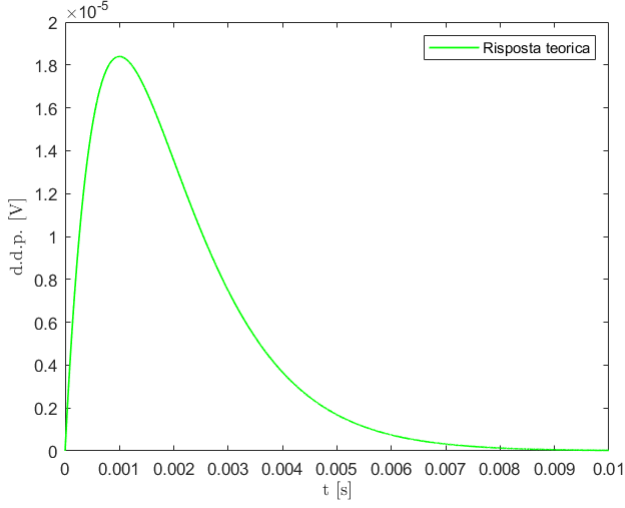


FIG. 6: Risposta impulsionale circuito 3

IV. CONCLUSIONI

Nella prima parte dell'esperienza abbiamo calcolato le funzioni di trasferimento nel dominio delle frequenze, nel dominio del tempo e l'impedenza in uscita. In appendice è riportata una tabella (FIG. 9) riassuntiva delle relazioni trovate. Le curve teoriche nei bode risultano compatibili qualitativamente con i dati sperimentali eccetto tre punti della differenza di fase nel filtro

passa basso del secondo ordine con un disaccoppiatore. Tale discrepanza con il modello teorico l'abbiamo associata ad una errata misurazione della differenza di fase utilizzando i cursori. I grafici della risposta impulsionale teorici dei primi due filtri sono in ottimo accordo con i punti sperimentali presi in laboratorio.

V. APPENDICE

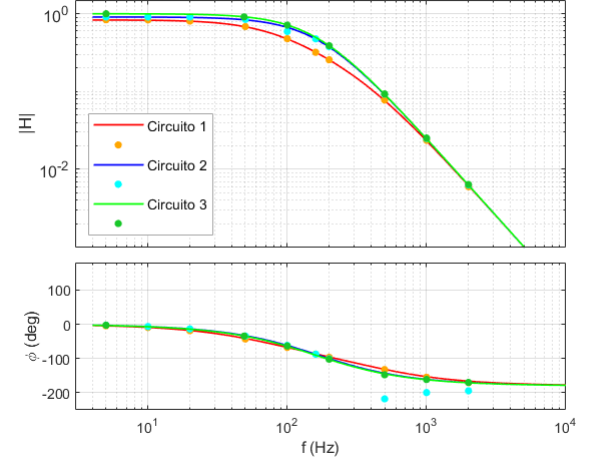


FIG. 7: Bode plot di confronto

l'appendice segue nella pagina successiva

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\tilde{G}_1(s) \right] = \frac{-2R_{osc} \cdot e^{-\frac{CR+3CR_{osc}+2C_{osc}R_{osc}}{2C^2RR_{osc}+2CC_{osc}RR_{osc}} \cdot t}}{(\sqrt{R^2 \cdot (C^2R^2 + 5C^2R_{osc}^2 + 4C_{osc}^2R_{osc}^2 + 8CC_{osc}R_{osc}^2 - 2C^2RR_{osc} - 4CC_{osc}RR_{osc})}) \cdot \sinh \left(\frac{\sqrt{R^2 \cdot (C^2R^2 + 5C^2R_{osc}^2 + 4C_{osc}^2R_{osc}^2 + 8CC_{osc}R_{osc}^2 - 2C^2RR_{osc} - 4CC_{osc}RR_{osc})}}{2C^2R^2R_{osc} + 2CC_{osc}R^2R_{osc}} \cdot t \right)}$$

FIG. 8: Risposta impulsiva doppio passa basso con oscilloscopio

Guadagno nel dominio delle frequenze	Guadagno nel dominio dei tempi	Impedenza in uscita
$\tilde{G}(s)$	$G(t)$	Z_{out}
$\frac{1}{1+sRC} \frac{\frac{1}{sC} \parallel \tilde{Z}_{osc}}{(R \parallel \frac{1}{sC} + R) + \frac{1}{sC} \parallel \tilde{Z}_{osc}}$	vedi $\mathcal{L}^{-1}[\tilde{G}_1(s)]$	$(R + R \parallel \frac{1}{sC}) \parallel \left(\frac{1}{sC} \parallel \tilde{Z}_{osc} \right)$
$\frac{1}{1+sRC} \frac{\frac{1}{sC} \parallel Z_{osc}}{R + \frac{1}{sC} \parallel Z_{osc}}$	$\frac{R_{osc}}{CR^2 - C_{osc}RR_{osc}} \left(e^{-\frac{t}{CR}} - e^{-\frac{Rt + R_{osc}}{CR_{osc} + C_{osc}RR_{osc}} \cdot t} \right)$	$R \parallel \left(\frac{1}{sC} \parallel \tilde{Z}_{osc} \right)$
$\frac{1}{(1+sRC)^2}$	$\frac{1}{RC} \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$	0

FIG. 9: Riassunto funzioni di trasferimento e impedenze in uscita