

# ESPERIENZA 4

Appoloni Alberto, Cisamolo Anna

(Dated: October 2021)

Lo scopo di questa esperienza è studiare il comportamento di un circuito oscillatore, con e senza smorzamento.

## I. INTRODUZIONE TEORICA

Il circuito implementato in questa esperienza è quello raffigurato in figura 1.

Esso è composto da due circuiti integratori e da un circuito che ha come base un circuito invertente.

Per prima cosa studiamo separatamente le varie sottosezioni del circuito.

Ricordiamo che nella prima esperienza avevamo ricavato la formula generale per un circuito contenente un amplificatore operazionale:

$$\tilde{V}_{out} = V_B \cdot \frac{Z_4}{Z_1} \cdot \frac{Z_1 + Z_2}{Z_3 + Z_4} - V_A \cdot \frac{Z_2}{Z_1} \quad (1)$$

in cui la notazione fa riferimento al circuito 6 rappresentato in Appendice.

Il circuito integratore, contornato di rosa nel circuito 1, è rappresentato in figura 2.

Esso è tale che  $V_A = V_{in}$ ,  $V_B = R$  e  $Z_2 = \frac{1}{sC}$ ,  $Z_3 = \infty$  e  $Z_4 = 0$ .

Inserendo tali valori nella relazione 1 si ha

$$\tilde{V}_{out} = -\tilde{V}_{in} \cdot \frac{\frac{1}{sC}}{R} = -\frac{\tilde{V}_{in}}{sRC}$$

Passando nello spazio dei tempi con l'antitrasformata di Laplace otteniamo che

$$V_{out}(t) = -\frac{1}{RC} \int V_{in}(t) dt$$

ovvero l'uscita è l'integrale dell'entrata.

Nel contesto del circuito 1 si trova quindi che

$$V_1(t) = -\frac{1}{RC} \int V_0(t) dt$$

$$V_2(t) = -\frac{1}{RC} \int V_1(t) dt$$

ovvero

$$V_0 = -RC \dot{V}_1$$

$$V_1 = -RC \dot{V}_2$$

Per quanto riguarda, invece, l'altro sottocircuito, consideriamo inizialmente solo la parte contornata in verde nel circuito 1 e che riportiamo per chiarezza in figura 3.

Nella prima parte dell'esperienza infatti la parte in rosso verrà omessa.

In questo caso  $V_A = V_2$ ,  $Z_1 = Z_2 = R_f$ ,  $V_B = V_1$ ,  $Z_3 = R_1$  e  $Z_4 = R_2$ .

Il circuito è, quindi, tale che

$$\begin{aligned} V_{out} &= V_1 \cdot \frac{R_2}{R_f} \cdot \frac{R_f + R_f}{R_1 + R_2} - V_2 \cdot \frac{R_f}{R_f} \\ &= 2 \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_1 - V_2 \end{aligned}$$

Osserviamo che in assenza delle resistenze  $R_1$  e  $R_2$  il circuito sarebbe un semplice invertitore.

Torniamo a considerare l'intero circuito 1, continuando a tralasciare la parte in rosso, e esplicitiamo i valori di  $V_1$  e  $V_2$  ricordando che  $V_0 = -\tau \dot{V}_1$  e  $V_1 = -\tau \dot{V}_2$ .

Deriviamo in funzione del tempo e scriviamo tutto in termini di  $V_1$ , in questo modo si trova:

$$\ddot{V}_1 + \frac{2r}{\tau} \dot{V}_1 + \frac{1}{\tau^2} V_1 = 0 \quad (2)$$

dove

$$r = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad \tau = RC$$

Tale espressione è un'equazione differenziale lineare omogenea del secondo ordine. Il suo polinomio caratteristico è dato da

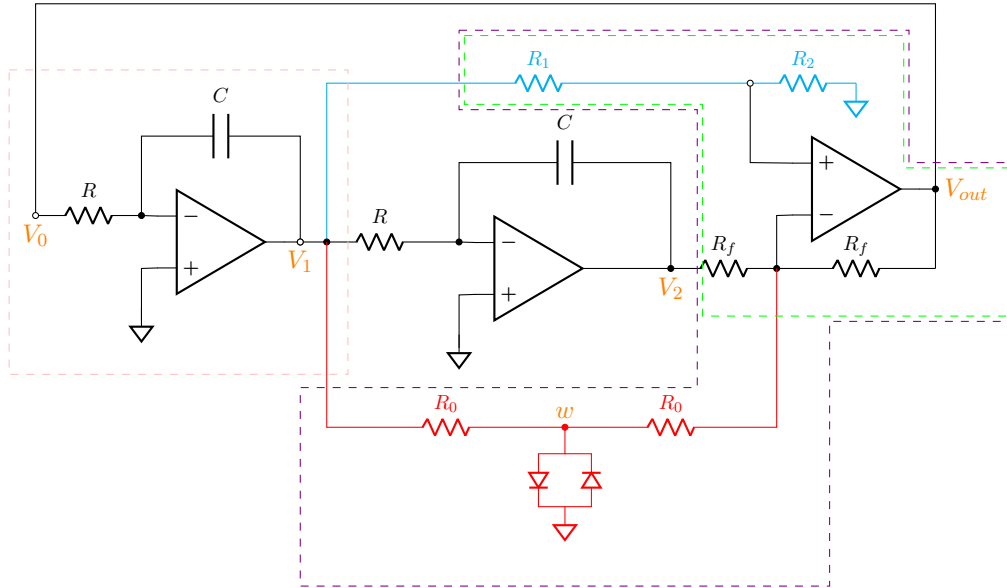
$$x^2 + \frac{2r}{\tau} x + \frac{1}{\tau^2} = 0$$

che ha soluzioni

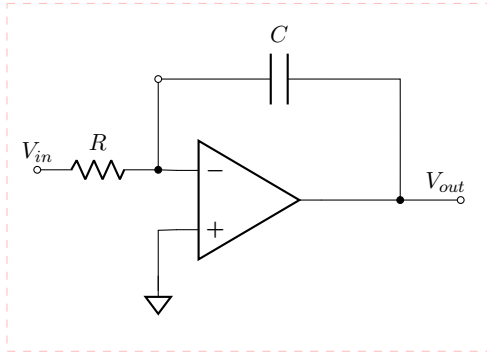
$$x_{1,2} = \frac{-r \pm \sqrt{r^2 - 1}}{\tau}$$

Dato che  $r$  è sempre minore di 1, le due soluzioni sono sempre complesse e quindi le soluzioni dell'equazione 2 saranno del tipo

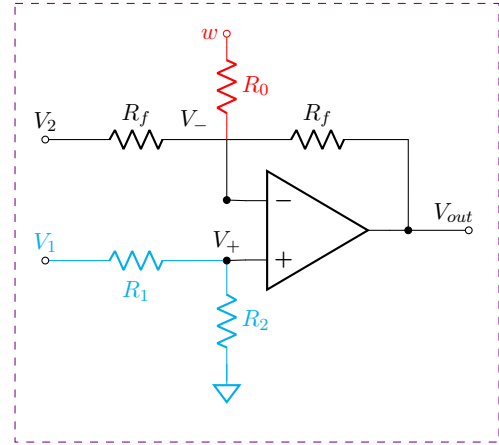
$$\begin{aligned} V_1(t) &= \tilde{c}_1 e^{x_1} + \tilde{c}_2 e^{x_2} \\ &= c_1 \cdot e^{-\frac{r}{\tau} t} \cos\left(\frac{\sqrt{1-r^2}}{\tau} t\right) \\ &\quad + c_2 \cdot e^{-\frac{r}{\tau} t} \sin\left(\frac{\sqrt{1-r^2}}{\tau} t\right) \end{aligned}$$



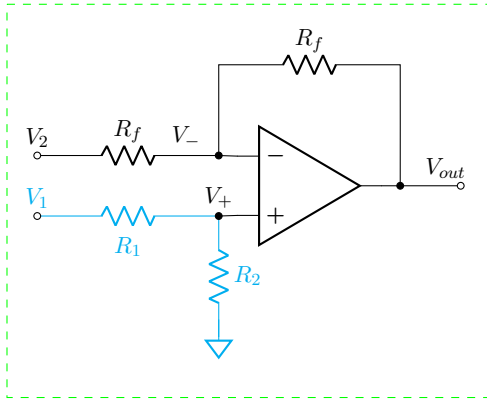
Circuit 1: Oscillatore



Circuit 2: Estratto da circuito : Amplificatore Integratore



Circuit 4: Estratto dal circuito: Amplificatore invertente



Circuit 3: Estratto circuito: Amplificatore invertente

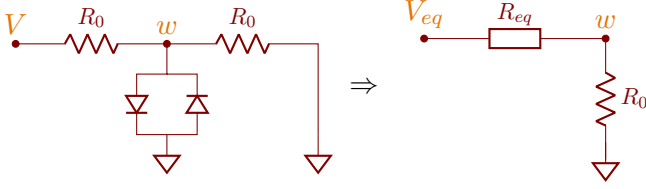
che sono le equazioni di un oscillatore smorzato. Se al circuito appena studiato aggiungiamo anche la parte raffigurata in rosso, esso diventa il circuito raffigurato in figura 4. Svolgendo i calcoli (che riportiamo in Appendice) con il metodo seguito durante la seconda esperienza e sfruttando il teorema di Millman, troviamo che:

$$V_{out} = 2 V_1 \frac{R_2}{R_1 + R_2} - V_2 - \frac{R_f}{R_0} w \quad (3)$$

A partire dal potenziale  $V_1$ , assumendo pari a  $\rho$  la resistenza relativa alla coppia di diodi e osservando che la resistenza  $R_0$  è connessa all'ingresso invertente dell'Amp-Op che è una massa virtuale, il potenziale in  $w$  risulta essere quello derivante da un partitore tra  $R_0$  e il circuito equivalente di Thévenin, dato dalla resistenza  $R_0$  più a sinistra più  $\rho$ , ovvero:

$$\begin{aligned} w &= V_{eq} \cdot \frac{R_0}{R_0 + R_{eq}} \\ &= \frac{\rho}{\rho + R_0} \cdot V_1 \cdot \frac{R_0}{R_0 + \frac{R_0 \cdot \rho}{R_0 + \rho}} \\ &= \frac{\rho}{2\rho + R_0} \end{aligned}$$

La resistenza  $\rho$  è pari al rapporto tra  $w$  e la corrente che da  $w$  va verso massa. Quest'ultima si calcola facendo la differenza tra le correnti che scorrono nei due diodi. Esse sono approssimabili in modo molto preciso tramite l'equazione di



Circuit 5: Partitore

Shockley:

$$I = I_s \left( e^{\frac{\beta w}{n}} - 1 \right)$$

Assumendo che i due diodi siano perfettamente identici si ha quindi che:

$$\Delta I = I_s \left( e^{\frac{\beta w}{n}} - e^{-\frac{\beta w}{n}} \right) = 2 I_s \sinh \left( \frac{\beta w}{n} \right)$$

dove abbiamo posto che la differenza di potenziale ai capi del secondo diodo è  $-w$  dal momento che esso è posto in direzione contraria al primo.

Abbiamo quindi che

$$\rho = \frac{w}{\Delta I} = \frac{w}{2 I_s \sinh \left( \frac{\beta w}{n} \right)}$$

Inserendo questo risultato della relazione 3, sviluppando al terzo ordine il seno iperbolico, si trova:

$$V_{out} = 2 V_1 \frac{R_2}{R_1 + R_2} - V_2 - \frac{R_f}{R_0} \cdot \left( \frac{1}{2 \left( 1 + \frac{I_2 R_0 \beta}{n} \right)} V_1 - \frac{I_s R_0 \beta^3}{3 n^3 \left( \frac{1}{2 \left( 1 + \frac{I_2 R_0 \beta}{n} \right)} \right)^4} V_1^3 \right) - \frac{1}{RC} \int V_1 dt$$

troviamo che

$$V_2 = 2 \frac{RC}{RC} \sin \left( \frac{t}{RC} \right) = 2 \sin(\omega_s t) = 2 \cos(\omega_s t + 90)$$

dove abbiamo posto

$$\chi = \frac{1}{2 \left( 1 + \frac{I_2 R_0 \beta}{n} \right)}$$

$$\xi = \frac{I_s R_0 \beta^3}{3 n^3 (\chi)^4}$$

Tale equazione si può riscrivere come

$$\ddot{V}_1 - \frac{1}{\tau} \left( \frac{R_f}{R_0} \chi - 2r - 3\xi \frac{R_f}{R_0} V_1^2 \right) \dot{V}_1 + \frac{1}{\tau^2} V_1 = 0$$

o in modo ancora più sintetico

$$\ddot{x} - \mu \dot{x}(1 + x^2) - \frac{1}{\tau^2} x = 0$$

nella quale

$$\mu = \frac{1}{\tau} \left( \frac{R_f}{R_0} \chi - 2r \right)$$

$$V_{eff} = \sqrt{\tau \mu \cdot \frac{1}{3 \chi \frac{R_f}{R_0} V_1^2}}$$

$$x = \frac{V_1}{V_{eff}}$$

L'equazione trovata prende il nome di **Equazione di Van der Pol**

Le soluzioni di tale equazione non è possibile calcolarle analiticamente. Tramite l'approccio perturbativo però è possibile arrivare ad una scrittura al primo ordine:

$$x(t) = 2 \cos(\omega_s t) - \frac{\mu}{4\omega_s} \sin(3\omega_s t) + \mathcal{O}(\mu^2)$$

dove  $\omega_s = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{RC}$ . Nel nostro caso il parametro  $\mu$  è molto minore di  $\omega_s$  e quindi la soluzione si può ulteriormente approssimare a

$$x(t) = 2 \cos(\omega_s t)$$

Ne deduciamo che la frequenza del segnale uscente, che per noi è  $V_1$ , è pari a

$$f = \frac{\omega_s}{2\pi} = \frac{1}{2\pi RC} \quad (4)$$

$$V_2 = 2 \frac{RC}{RC} \sin \left( \frac{t}{RC} \right) = 2 \sin(\omega_s t) = 2 \cos(\omega_s t + 90) \quad (5)$$

$V_2$  è quindi sempre in quadratura rispetto a  $V_1$

## II. SVOLGIMENTO

Iniziamo l'esperienza preparando la bread-board. Colleghiamo in 2 linee di alimentazione due segnali a tensione costante +12V e -12V e usiamo una terza connessione per la massa. Impostiamo il limite di corrente a 20 mA in modo da evitare possibili sovraccarichi. Successivamente montiamo un oscillatore armonico smorzato tramite la connessione di due integratori e un invertitore (circuitto 1 senza il ramo in

rosso). Verifichiamo per ognuna delle 3 parti, indipendentemente dal resto del circuito, il corretto funzionamento in modo da eventualmente localizzare e correggere i possibili errori di montaggio.

Utilizziamo 3 Op-Amp, 6 resistenze (2  $R = 100k\Omega$ , 2  $R_f = 10k\Omega$ ,  $R_1 = 1M\Omega$ ,  $R_2 = 100\Omega$ ) e due condensatori  $C = 10nF$ .

Al fine di eccitare il circuito e quindi poter vedere i segnali in uscita, che misuriamo nei punti  $V_1$  e  $V_2$ , tocchiamo brevemente un filo collegato al pin invertente dell'Op-Amp che realizza l'invertitore, con un altro filo connesso all'alimentazione. Dopo aver verificato che le oscillazioni vengano smorzate esponenzialmente, ci interessiamo al calcolo del tempo di smorzamento di tali oscillazioni al variare del rapporto  $\epsilon = \frac{R_2}{R_1}$  ( $\epsilon = 10^{-5}, 10^{-4}, 10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-1}$ ). Per modificare il valore di  $\epsilon$  lasciamo invariato  $R_1 = 1M\Omega$  e modifichiamo invece  $R_2$ . Solo per il caso  $\epsilon = 10^{-5}$  variamo  $R_1$  ponendolo pari a  $R_1 = 10 M\Omega$  lasciando invece  $R_2 = 100 \Omega$ . Utilizzando i cursori misuriamo quindi alcuni punti della curva in uscita, prendendo come  $x$  la differenza temporale da un punto a nostra scelta della curva (infatti la forma dell'esponenziale è invariante per traslazioni temporali),  $x = \Delta t$ , e come  $y$  la differenza di potenziale  $y = \Delta V$  relativa ai picchi del segnale sinusoidale che si sta smorzando.

Aggiungiamo poi al circuito **1** il ramo in rosso, il cui ruolo è compensare lo smorzamento del segnale, e montiamo così un oscillatore armonico di ampiezza costante. Utilizziamo due diodi e due resistenze  $R_0 = M\Omega$ . Studiamo ancora i due segnali in uscita  $V_1$  e  $V_2$ , caratterizzandone le proprietà. Utilizzando i cursori verifichiamo, misurando la differenza di fase, che i due segnali risultino in quadratura ovvero abbiano una differenza di fase  $\Delta\Phi = \frac{\pi}{2}$  e che la loro frequenza sia pari a  $(2\pi RC)^{-1}$ . Inoltre misuriamo l'ampiezza dei due segnali.

Esaminiamo poi la risposta del circuito a una variazione dei suoi componenti. Effettuiamo quindi le medesime misure modificando prima una delle due resistenze  $R$ , passando da  $100 k\Omega$  a  $R = 1M\Omega$ , portando poi entrambe le resistenze  $R$  a  $R = 1M\Omega$ .

I dati raccolti sono della sezione di Analisi

$\Delta t$	$\Delta V$
[s]	[mV]
0.0	800.0
0.15	597.5
0.3	465.0
0.45	357.5
0.6	272.5
0.75	205.0
0.9	157.5
1.05	125.0
1.2	100.0
1.35	80.0

(a)  $\epsilon = 10^{-5}$

$\Delta t$	$\Delta V$
[s]	[mV]
0.0	770.0
0.2	512.5
0.4	360.0
0.6	257.5
0.8	177.5
1.0	125.0
1.2	90.0
1.4	60.0

(b)  $\epsilon = 10^{-4}$

### III. ANALISI

#### III.1. Oscillatore smorzato

Nella prima parte studiamo il tempo caratteristico di smorzamento del circuito. Abbiamo infatti visto che in assenza dei diodi,  $V_1$  ha come soluzione un oscillatore smorzato. Il fattore di smorzamento è dato dall'esponenziale  $e^{-\frac{r}{\tau}t}$  dove  $r$  continua ad essere  $r = \frac{R_2}{R_2+R_1} = \frac{1}{1+\epsilon}$ . Il tempo caratteristico sarà quindi dato da  $t_{\text{smorzamento}} = \frac{\tau}{r}$ .

Inseriamo di seguito le tabelle dei dati raccolti facendo variare il valore delle due resistenze  $R_1$  e  $R_2$ .

$\Delta t$	$\Delta V$
[s]	[mV]
0.0	760.0
0.1	562.5
0.2	412.5
0.3	310.0
0.4	227.5
0.5	165.0
0.6	125.0
0.7	90.0

(a)  $\epsilon = 10^{-3}$

$\Delta t$	$\Delta V$
[s]	[mV]
0.00	800.0
0.05	440.0
0.10	245.0
0.15	137.5
0.20	77.5
0.25	45.0

(b)  $\epsilon = 10^{-2}$

Per il valore di  $\epsilon = 10^{-1}$  abbiamo preso due serie di valori, una relativa alla combinazione di resistenze  $R_1 = 10 M\Omega$  e  $R_2 = 1 k\Omega$  e una relativa a  $R_1 = 1 k\Omega$  e  $R_2 = 100 \Omega$ . Come possiamo notare, anche dal grafico **1**, i dati giacciono sulla stessa curva, confermando il fatto che l'unica discriminante per l'andamento dello smorzamento sia il rapporto  $\epsilon = \frac{R_2}{R_1}$ .

Plottiamo tali dati nel grafico **1**.

Notiamo come essi corrispondano esattamente

$\Delta t$	$\Delta V$
[ms]	[mV]
0.0	740.0
1.6	665.0
6.2	420.0
7.8	375.0
12.4	235.0
14.0	217.5
18.0	137.5
20.2	127.5
24.8	80.0
26.6	77.5
31.2	52.5

(a)  $\epsilon = 10^{-1}$ 

$\Delta t$	$\Delta V$
[ms]	[mV]
0.0	647.5
3.2	475.0
6.3	342.5
9.4	250.0
12.4	182.5
15.7	147.5
18.8	100.0
21.8	77.5
25	55.0

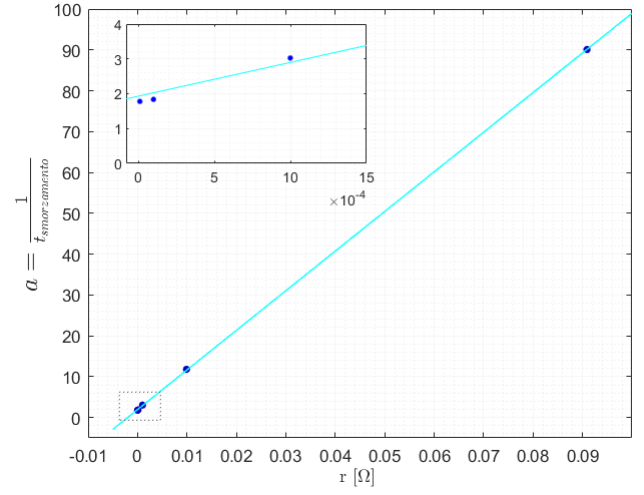
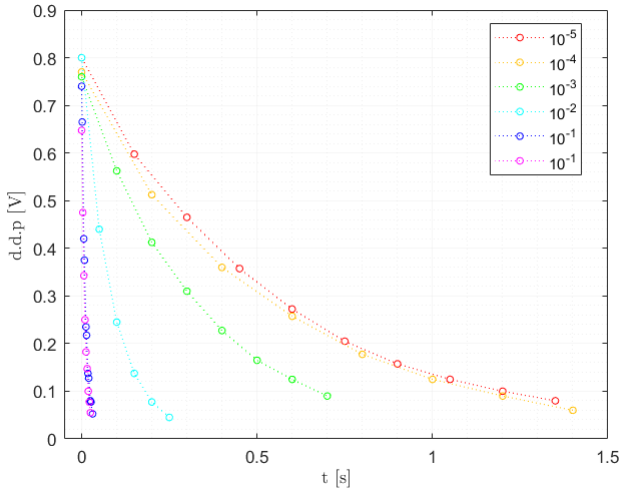
(b)  $\epsilon = 10^{-1}$ FIG. 2: Relazione tra  $a$  ed  $r$ 

FIG. 1: Dati oscillatore smorzato

ad una curva esponenziale. Procediamo a compiere un fit esponenziale sulle curve, in modo da estrarre il valore del rapporto  $a = \frac{r}{\tau} = \frac{1}{t_{\text{smorzamento}}}$  che equivale all'inverso del tempo di smorzamento.

I valori di  $a$  che troviamo sono riportati in tabella IV

$\epsilon$	$a$	$t_{\text{smorzamento}}$
	$\left[\frac{1}{s}\right]$	[s]
$10^{-5}$	1.778	0.5624
$10^{-4}$	1.837	0.5444
$10^{-3}$	3.026	0.3305
$10^{-2}$	11.79	0.0848
$10^{-1}$	90.01	0.0111

TABLE IV: Tempi di smorzamento

Per estrarre il valore di  $\tau$ , che sappiamo dovrebbe essere uguale al prodotto  $RC = 0.001 \text{ s}$ ,

operiamo un ulteriore fit, questa volta lineare, tra  $r$  e il valore di  $a$ . Graficando  $a$  in funzione di  $r$ , come facciamo nella figura 2, troviamo infatti una retta che risponde alla relazione  $a = \frac{1}{t_{\text{smorzamento}}} = A \cdot r + B$  con  $A$  e  $B$  coefficienti da determinare.

Dalla teoria sappiamo, però, che  $A = \frac{1}{\tau}$ , mentre  $B = \frac{r'}{\tau}$  con  $r'$  resistenza intrinseca del circuito.

Trovati  $A$  e  $B$  si può quindi vedere che

$$\tau = \frac{1}{A}$$

mentre

$$r' = B \cdot \tau = \frac{B}{A}$$

Dal fit troviamo che

$$A = 970.1$$

mentre

$$B = 1.93$$

da cui abbiamo che

$$\tau = 0.001 \text{ s}$$

mentre

$$r' = 0.002 \Omega$$

Osserviamo che l'aderenza dei dati sperimentali con le attese è ottima.

Riportiamo in appendice un grafico (Figura 3) di confronto tra il modello esponenziale e i dati raccolti. Osserviamo come, soprattutto per  $\epsilon$  piccoli, la corrispondenza sia molto buona.

### III.2. Oscillatore

Per quanto riguarda la seconda parte, verifichiamo che effettivamente la forma d'onda prodotta dal circuito in  $V_1$  sia un seno con le proprietà richieste e che  $V_2$  sia sempre in quadratura, come richiesto dalle relazioni 4 e 5.

La differenza di fase tra le due curve la calcoliamo misurando sull'asse verticale l'ampiezza  $\Delta Y$ , mentre sull'asse orizzontale la differenza in secondi  $\Delta X$  tra due zeri adiacenti di  $V_2$  e  $V_1$ . Per ottenere la corrispettiva differenza di fase in gradi, utilizziamo la relazione:

$$\Delta\Phi_{V_1,V_2} = \frac{360 \cdot \Delta X}{T} = 360 \cdot \Delta X \cdot f$$

Riportiamo i dati nelle tabelle V, VI e VII in modo tale da avere un confronto diretto tra aspettativa e misure.

La prima configurazione che studiamo è quella di base dove  $R = 100 \text{ k}\Omega$ ,  $C = 10 \text{ nF}$ ,  $R_1 = 1 \text{ M}\Omega$  e  $R_2 = 100 \Omega$ . Per tale configurazione ci aspettiamo di ottenere:

$$f = \frac{1}{2\pi RC} = \frac{1}{2\pi \cdot 100 \cdot 10^3 \Omega \cdot 10 \cdot 10^{-9} \text{ F}} = 159 \text{ s}^{-1}$$

Periodo	Frequenza	$V_1$	$\Delta t$	$\Delta\Phi$
[ms]	[Hz]	[V]	[ms]	[°]
6.18	161	1.26	1.54	89.7

TABLE V:  $R = 100 \text{ k}\Omega$ ,  $R_1 = 1 \text{ M}\Omega$ ,  $R_2 = 100\Omega$

Modifichiamo poi una delle due resistenze  $R$  ponendola pari a  $R = 1 \text{ M}\Omega$  lasciando invariata la seconda a  $R = 100 \text{ k}\Omega$ .

Essendo i valori di  $R$  e  $C$  differenti nei due integratori, svolgendo nuovamente i calcoli, si può vedere che

$$\begin{aligned} f &= \frac{1}{2\pi\tau_1\tau_2} \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{R_1C_1R_2C_2}} \\ &= \frac{1}{2\pi \cdot \sqrt{10^{-6} \Omega \cdot 10^{-8} \cdot 10^5 \cdot 10^{-8}}} \\ &= 50 \text{ s}^{-1} \end{aligned}$$

Riportiamo i due valori di  $R$  a un quantità equivalente ma questa volta il poniamo entrambi pari a  $R = 10 \text{ M}\Omega$ . Si avrà quindi che

$$\begin{aligned} f &= \frac{1}{2\pi \tau} \\ &= \frac{1}{2\pi \cdot 10 \cdot 10^6 \Omega \cdot 10^{-8} \text{ F}} = 1.59 \text{ s}^{-1} \end{aligned}$$

Periodo	Frequenza	$V_1$	$V_2$	$\Delta t_{V_1,V_2}$	$\Delta\Phi_{V_1,V_2}$
[ms]	[Hz]	[V]	[V]	[ms]	[°]
20.2	49.5	7.59	2.41	4.92	87.7

TABLE VI:  $R_{int1} = 1 \text{ M}\Omega$ ,  $R_{int2} = 100 \text{ k}\Omega$ ,  $R_1 = 1 \text{ M}\Omega$ ,  $R_2 = 100\Omega$

Periodo	Frequenza	$\Delta t_{V_1,V_2}$	$\Delta\Phi_{V_1,V_2}$
[ms]	[Hz]	[ms]	[°]
656	1.52	164	90

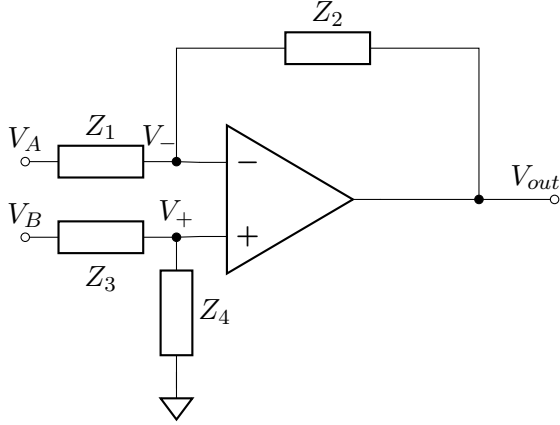
TABLE VII:  $R_{int1} = R_{int2} = 10 \text{ M}\Omega$ ,  $R_1 = 1 \text{ M}\Omega$ ,  $R_2 = 100\Omega$

### IV. CONCLUSIONI

Nella prima parte dell'esperienza abbiamo verificato che le oscillazioni del circuito vengono smorzate esponenzialmente seguendo la relazione:  $e^{-\frac{t}{\tau}}$ , nella quale il tempo caratteristico di smorzamento è:  $t_{\text{smorzamento}} = \frac{\tau}{r}$ . Variando  $\epsilon = \frac{R_2}{R_1}$  troviamo, tramite un fit, i tempi di smorzamento per ogni curva esponenziale riportati in tabella IV. Tramite un ulteriore fit troviamo i valori di  $\tau$  e  $r'$  (resistenza intrinseca del circuito) che meglio si adattano ai nostri dati:  $\tau = 0.001 \text{ s}$  e  $r' = 0.002$ , i quali risultano compatibili con i valori teorici  $\tau_{teo} = RC = 0.001 \text{ s}$  e  $r'_{teo} \rightarrow 0$ .

Nella seconda parte dell'esperienza abbiamo verificato sperimentalmente che il circuito mantiene un'oscillazione armonica stazionaria dopo un tempo transiente iniziale e senza la necessità di eccitarlo. Abbiamo poi esaminato per ogni configurazione la frequenza del segnale  $V_1$  e il fatto che  $V_2$  risulti sempre in quadratura. I dati raccolti sono riportati nelle tabelle V, VI e VII e risultano compatibili con le aspettative teoriche.

## V. APPENDICE



Circuit 6: Circuito per la notazione

Riportiamo di seguito i calcoli integrali per arrivare all'espressione 3.

L'unica differenza dal circuito precedente è la presenza dei due diodi. Tra le altre cose ciò si ripercuote sul valore della differenza di potenziale presente nell'ingresso non invertente del circuito "invertitore". In questo caso infatti non è più possibile utilizzare la formula 1 per ricavare l'uscita da tale circuito in quanto in  $V_-$  arrivano tre fili. Bisogna quindi appellarsi al teorema di Millman il quale ci dice che

$$V_x = \frac{\sum_j i_j}{\sum_j \frac{1}{R_j}} = \frac{\sum_j \frac{V_j}{R_j}}{\sum_j \frac{1}{R_j}}$$

che nel nostro caso si traduce in

$$\begin{aligned} V_- &= \frac{\frac{V_2}{R_f} + \frac{V_{out}}{R_f} + \frac{w}{R_0}}{\frac{1}{R_f} + \frac{1}{R_f} + \frac{1}{R_0}} \\ &= \frac{(V_2 + V_{out}) \cdot R_0 + w \cdot R_f}{2R_0 + R_f} \end{aligned}$$

Il valore di  $V_+$  invece rimane invariati e per-

tanto possiamo scrivere che

$$\begin{aligned} V_{out} &= G(V_+ - V_-) \\ \frac{V_{out}}{G} &= V_1 \frac{R_2}{R_1 + R_2} - V_2 \frac{R_0}{2R_0 + R_f} + \\ &\quad - V_{out} \frac{R_0}{2R_0 + R_f} - w \frac{R_0}{2R_0 + R_f} \\ V_{out} \left( \frac{1}{G} + \frac{R_0}{2R_0 + R_f} \right) &= V_1 \frac{R_2}{R_1 + R_2} + \\ &\quad - V_2 \frac{R_0}{2R_0 + R_f} - w \frac{R_0}{2R_0 + R_f} \\ V_{out} \left( 1 + \frac{G_0}{G} \right) &= V_1 \left( \frac{2R_0 + R_f}{R_0} \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} \right) \\ &\quad - V_2 - \frac{R_f}{R_0} w \end{aligned}$$

Poichè  $G_0 = \frac{R_0}{2R_0 + R_f}$  è molto minore di  $G$ , il rapporto  $\frac{G_0}{G} \rightarrow 0$  e

$$V_{out} = 2V_1 \frac{R_2}{R_1 + R_2} + V_1 \frac{R_f}{R_0} \frac{R_2}{R_1 + R_2} - V_2 - \frac{R_f}{R_0} w$$

Nel nostro caso  $R_2 \ll R_1$  e quindi possiamo trascurare il secondo termine e ottenere in definitiva

$$V_{out} = 2V_1 \frac{R_2}{R_1 + R_2} - V_2 - \frac{R_f}{R_0} w$$

che è la relazione 3.

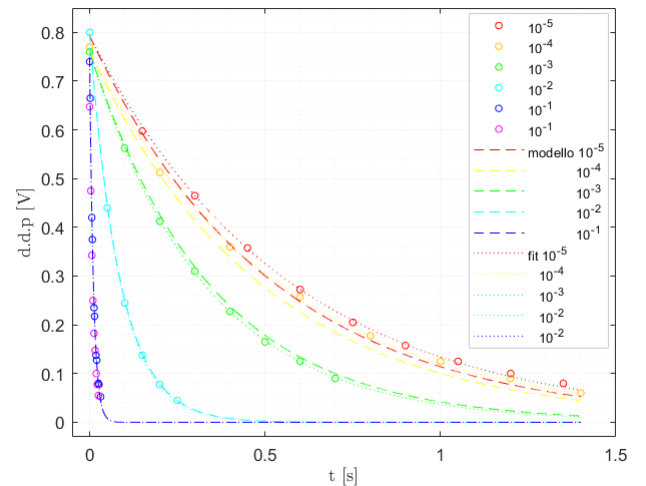


FIG. 3: Confronto tra modello e grafici