Università degli Studi di Trento

Laboratorio di Fisica I

# Pendolo semplice: dipendenza del periodo dalla massa e dalla lunghezza e misura dell'accelerazione di gravità

Autori - Gruppo L13
Piferi Alessandro
Appoloni Alberto

23 luglio 2020

**ABSTRACT**

L'articolo relaziona un'analisi del comportamento oscillatorio di un pendolo semplice, approssimato ad un oscillatore armonico, focalizzata sulle grandezze che determinano il periodo di oscillazione del sistema esaminato. In dettaglio si è valutata la dipendenza del periodo dalla massa del sistema e dalla lunghezza del pendolo, osservando che i risultati sono in accordo con le previsioni teoriche. Si è, con vari metodi, stimata l'accelerazione gravitazionale, presente nel laboratorio e la si è confrontata con i valori tabulati. Si è fatto uso della regressione lineare e del metodo dei minimi quadrati come analisi qualitativa dei dati, e del test del chi quadrato come valutazione quantitativa dell'accuratezza dei modelli scelti.

# I. INTRODUZIONE

L'esperienza si pone come obbiettivo la verifica di assenza di correlazione, fra periodo di oscillazione di un pendolo semplice e la sua massa, e lo studio quantitativo della dipendenza del periodo dalla lunghezza del pendolo stesso. L'analisi fatta è stata incentrata sulla conversione, dei dati raccolti, in scala logaritmica, ciò ha permesso la trattazione di una dipendenza non lineare delle grandezze coinvolte, come dipendenza lineare. Tramite regressione lineare si è costruito il modello teorico atteso, mentre per stimare i parametri della retta che meglio approssima i punti sperimentali, si è fatto uso del metodo dei minimi quadrati. In fine sfruttando la teoria sugli oscillatori armonici, con i necessari accorgimenti sull'ampiezza dell'oscillazione, si è stimato il valore dell'accelerazione gravitazionale, come media pesata sui vari valori sperimentali e come valore ottenuto dai parametri della regressione lineare. Le leggi fisiche sfruttate si ottengono per approssimazione del moto di un pendolo a quello di un oscillatore armonico, con periodo di oscillazione $T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$. Tutti i risultati ottenuti sono stati sottoposti al test del chi quadrato, come stima quantitativa di attendibilità dei modelli.

# II. PROCEDURE OPERATIVE

## II.1. Strumentazione

L'apparato si compone di un supporto verticale regolabile al quale è stato agganciato un filo, che con buona approssimazione possiamo considerare inestensibile e di massa totalmente trascurabile, in modo tale da avere un punto di contatto fisso. Le masse cilindriche usate sono state legate al filo tramite un dado forato, anch'esso di massa trascurabile. Per pesare le masse si è utilizzata una bilancia con sensibilità $\Delta$m = 0.1 g.

## II.2. Periodo in funzione della massa

Per verificare l'esistenza o meno di una dipendenza fra periodo di oscillazione e massa del pendolo si è scelto di registrare 7 periodi di oscillazione consecutivi, per un pendolo di ampiezza iniziale e lunghezza costanti. Si sono selezionate varie masse cilindriche e se ne sono misurate le altezze tramite calibro ventesimale, al fine di calcolare il centro di massa del sistema. Per mantenere la lunghezza del pendolo costante, al variare delle masse, si è misurata, con un asta metrica millimetrata, l'altezza dal piano di lavoro della sommità fissa del pendolo e l'altezza, dallo stesso riferimento, dell'estremità inferiore delle varie masse. La lunghezza del pendolo è stata quindi ricavata come: $L = H_{\mathrm{perno}} - (h_{\mathrm{massa}} + Z_{\mathrm{c.m.}}) \; = \; (1.1000 \pm 4 \cdot 10^{-4}) \; m$.

## II.3. Periodo in funzione della lunghezza

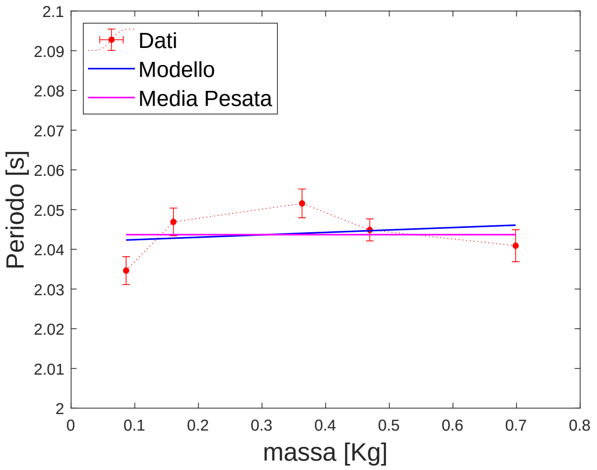
Per studiare la relazione periodo-lunghezza del pendolo, si sono misurati 7 periodi di oscillazione consecutivi, mantenendo costante la massa e variando la distanza fra il perno e il CM del sistema. La lunghezza del pendolo è stata ricavata misurando la distanza fra la base del cilindro usato come massa e il perno, mediante asta metrica millimetrata; a questo valore è stata sottratta mezza altezza del cilindro, ottenuta con calibro ventesimale. L'incertezza sulla misura di lunghezza, come propagazione dell'errore, è quindi: $\sigma_{\mathrm{L_i}} = 4 \cdot 10^{-4} \; m$

## Note

Come errore sulla misura della massa, dell'altezza dei cilindri, della distanza fra perno e piano di lavoro e della distanza fra piano di lavoro e base delle masse, si è utilizzato lo scarto quadratico medio della distribuzione a densità uniforme, sulla sensibilità dei vari strumenti, dopo aver verificato che fosse trascurabile l'incidenza di eventuali errori casuali. Per l'incertezza sui periodi invece si sono eseguite di volta in volta un adeguato numero di prove ripetute, al fine di ottenere una stima dell'errore statistico. Si sottolinea inoltre che si è prestata particolare attenzione, durante tutta l'esperienza, a far oscillare il pendolo per non più di $10^o$, tramite l'utilizzo di riferimenti opportunamente posizionati.

## III. ANALISI DATI

### III.1. Dipendenza del periodo dalla massa



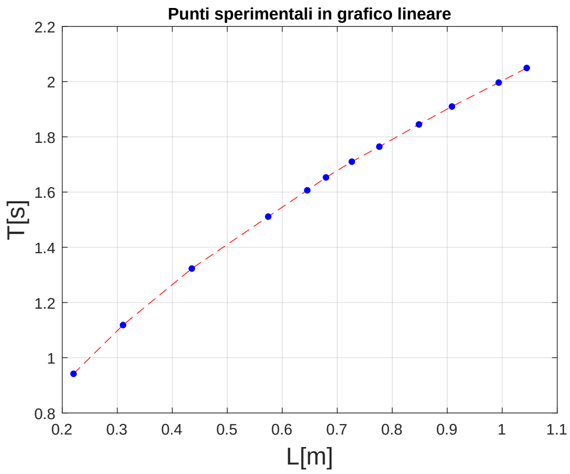

Si riportano in grafico i punti presi sperimentalmente. L'incertezza sul periodo di oscillazione è calcolata come somma in quadratura dell'incertezza dovuta alla risoluzione e dell'errore casuale ottenuto come scarto quadratico medio su 12 misure ripetute, il valore è stato poi diviso per 7. Come prima cosa si è calcolata la media pesata dei periodi sul reciproco delle incertezze, il valore ottenuto é $T_{\text{pesato}} = \ (2.04 \pm 0.02)\ s$, il dato è stato graficato come indice qualitativo di accuratezza. Vogliamo ora verificare se una legge nella forma y = a + b x è adatta a descrivere l'andamento dei dati, e se si con quale coefficiente angolare. Con la regressione lineare e il metodo dei minimi quadri si sono stimati i valori di pendenza e della quota della retta che meglio approssima l'andamento dei dati. Tale retta risulta avere come parametri: $b = (6 \pm 7) \cdot 10^{-3}\ s/kg$ e $a = (2.042 \pm 0.003)\ s$; il valore ottenuto per $b$ è compatibile a meno di una sigma con 0, questo risultato conferma in prima battuta l'assenza di dipendenza fra periodo di oscillazione e massa del pendolo, inoltre si nota che $a$ è compatibile a meno di una sigma con il valore del periodo dato dalla media pesata. Come valutazione di tipo quantitativo della compatibilità modello-dati si esegue il test del chi quadrato a due code con speranza matematica per il chi di 3 e con una confidenza del 97% adottando un atteggiamento prudente data la scarsità di DOF. L'intervallo di accettazione è: [0.66 ; 14]; il valore sperimentale calcolato è $\chi^2 = 12$. Il test ha dato esito positivo e ci permette di affermare che il modello è compatibile con i dati raccolti con una confidenza del 97%.
Si riportano di seguito i dati raccolti in tabella.

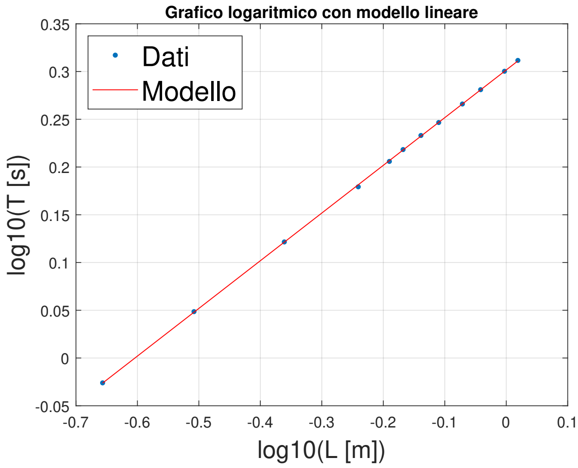
Tabella I: Misurazioni dipendenza dalla massa

| massa[g] $[\pm 2.9 \cdot 10^{-2}]$ | media tempi [s] | $\sigma_{tempi}$ $[10^{-2}s]$ | media periodi [s] | $\sigma_{periodi}$ $[10^{-3}s]$ |
|---|---|---|---|---|
| 86.4 | 14.24 | 2 | 2.035 | 4 |
| 160.7 | 14.33 | 2 | 2.047 | 4 |
| 362.9 | 14.36 | 3 | 2.052 | 4 |
| 469.3 | 14.31 | 2 | 2.045 | 3 |
| 698.6 | 14.29 | 3 | 2.041 | 4 |

### III.2. Dipendenza del periodo dalla lunghezza del pendolo

Si riportano i punti sperimentali in grafico e si nota qualitativamente una compatibilità degli stessi con una legge del tipo: $T = aL^b$; si decide perciò di passare ad una rappresentazione grafica in scala logaritmica, osservando così che i punti sperimentali si dispongono qualitativamente su di una retta. Si applica quindi il metodo dei minimi quadrati per trovare la retta che meglio approssima i dati. Ponendo $X = \log(L)$, $Y = \log(T)$, $A = \log(a)$ e $B = b$, si costruisce l'equazione della retta: $Y = A + B \cdot X$. La teoria oscillatoria della meccanica classica prevede che per un pendolo, la cui oscillazione sia approssimabile a quella di un oscillatore armonico, il periodo di oscillazione sia determinato dalla legge: $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$; il valore atteso di $b$ è quindi 0.5. I valori ottenuti come stima dei parametri sono: $B = b = 0.499 \pm 1 \cdot 10^{-3}$ e $a = 2.00 \pm 1 \cdot 10^{-3}$; pertanto il valore di b è compatibile a meno di una sigma con le previsioni teoriche. Come analisi quantitativa dei risultati ottenuti si è utilizzato il metodo del $\chi^2$ a due code con speranza matematica per il chi di 10 e confidenza del 90%, un valore così basso è giustificabile dal buon numero di DOF e dall'accuratezza con cui si sono raccolti i dati, ottenuta da un attento posizionamento dei riferimenti utili alla registrazione degli intervalli. Il valore calcolato è $\chi^2 = 12$, con un intervallo di accettazione: [5.2 ; 21]. Il test è positivo e non è quindi possibile rifiutare il modello, questo risulta compatibile con i dati con una confidenza del 90%.



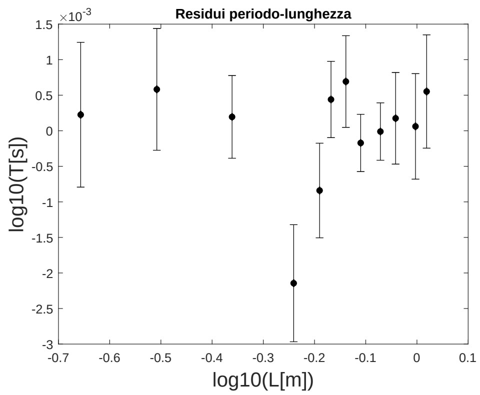

Si riportano in tabella i dati raccolti.

Tabella II: Misurazioni dipendenza dalla lunghezza

| lunghezza[m] $[\pm 4 \cdot 10^{-4}]$ | media tempi [s] | $\sigma_{tempi}$ $[10^{-2}s]$ | media periodi [s] | $\sigma_{periodi}$ $[10^{-3}s]$ |
|---|---|---|---|---|
| 0.2205 | 6.59 | 2 | 0.942 | 2 |
| 0.3105 | 7.83 | 2 | 1.118 | 2 |
| 0.4355 | 9.26 | 1 | 1.323 | 2 |
| 0.5745 | 10.58 | 2 | 1.51 | 3 |
| 0.6455 | 11.25 | 2 | 1.606 | 3 |
| 0.6795 | 11.57 | 1 | 1.652 | 2 |
| 0.7265 | 11.97 | 2 | 1.710 | 3 |
| 0.7765 | 12.35 | 1 | 1.764 | 2 |
| 0.8485 | 12.92 | 1 | 1.845 | 2 |
| 0.9085 | 13.37 | 2 | 1.910 | 3 |
| 0.9935 | 13.98 | 2 | 1.997 | 3 |
| 1.0445 | 14.35 | 3 | 2.049 | 4 |

*Nota*

Si riporta il grafico dei residui, per il modello ottenuto dalla regressione lineare, ove si osserva la presenza di un punto che potrebbe sembrare affetto da un qualche tipo di errore sistematico che lo porta fuori scala; tuttavia da un'analisi più attenta risulta che il punto non si discosta dallo 0 per più di tre volte sigma e ciò non permette di escludere a priori il punto dal set di dati, si è quindi deciso di non eliminarlo e considerare la sua deviazione come una fluttuazione statistica accettabile.



### III.3. Misurazione dell'accelerazione di gravità con la media pesata

Si sono calcolate le accelerazioni di gravità a partire dalle misurazioni raccolte invertendo la formula $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ del periodo per piccole oscillazioni di un pendolo semplice, l'incertezza su ogni $g_{\mathrm{i}}$, $\sigma_{g_{\mathrm{i}}}$, si è ottenuta dalla formula generale per la propagazione degli errori. Si sottolinea che l'influenza dell'incertezza della misura della lunghezza del pendolo, nel determinare l'incertezza dei vari $g_{\mathrm{i}}$, è trascurabile, essendo sempre almeno di due ordini di grandezza più piccola di quella della misura del periodo. Come stima del valore di $g$ si è calcolata la media aritmetica, con incertezza data dallo scarto quadratico medio sui singoli valori, e la media pesata sulle rispettive incertezze dei $g_{\mathrm{i}}$.

$$g_{med} = (9.84 \pm 0.01)\ m/s^2 \qquad g_{pesato} = (9.84 \pm 0.09)\ m/s^2$$

### III.4. Misurazione dell'accelerazione di gravità dal grafico

Si mettono a confronto le seguenti equazioni: $T = aL^b$ e $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, e si osserva che il termine incognito a, calcolato precedentemente con il metodo dei minimi quadrati è: $a = 2\pi/\sqrt{g}$. Si vuole quindi dare una stima di $g$ a partire da $a$, assegnando come incertezza la propagazione degli errori su $a$: $g_{\mathrm{graf}} = (9.84 \pm 0.01)\ m/s^2$

## IV. CONCLUSIONI

Dall'analisi sui periodi di oscillazione in funzione della massa emerge che non c'è correlazione fra massa scelta e periodo, questo almeno entro le $Hp$ di piccole oscillazioni e di resistenza di tipo viscoso trascurabile, quale quella dell'aria all'interno del laboratorio; il test del chi quadro è stato eseguito con successo, tuttavia l'intervallo scelto non è particolarmente restrittivo, questa scelta è stata dettata dalla scarsa risoluzione dell'asta metrica usata e dal basso numero di punti, per ottenere dati più significativi sarebbe stato necessario avere almeno il doppio dei gradi di libertà. Le misurazioni in funzione della lunghezza invece sono state fatte in numero nettamente maggiore e con minor possibilità d'errore per via della procedura seguita, questo ha permesso di scegliere a priori una confidenza più restrittiva che potesse quindi fornire, in caso di esito positivo del test, risultati più rilevanti. L'accuratezza dei dati è evidenziata dal grafico dei residui ove si osserva un unico punto, su dodici, affetto da una fluttuazione superiore a due sigma. I valori di $g$ calcolati sono tutti compatibili a meno di tre sigma con il valore standard tabulato per Povo (TN), sede del laboratorio, $g_{\mathrm{std}} = 9.812\ m/s^2$; in particolar modo il valore di $g$ ottenuto per media pesata sui reciproci delle incertezze, che è la miglior stima a disposizione, è compatibile a meno di una sigma con il dato tabulato.