

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRENTO

LABORATORIO DI FISICA II

## **Circuiti RC in corrente alternata**

AUTORI - GRUPPO L02

Appoloni Alberto

Malvezzi Alberto

25 novembre 2020

# 1 Introduzione

Nella prima parte dell'esperienza si analizza il decadimento all'equilibrio in un circuito RC: la tensione  $V$  decade secondo la curva esponenziale

$$V_{out}(t) = \varepsilon^* e^{-\frac{t}{\tau}}$$

dove  $\varepsilon^*$  è la tensione all'equilibrio,  $t$  sono gli istanti di tempo e  $\tau = RC$  è la costante di tempo del circuito. Usando diverse  $R$  otteniamo curve di scarica  $V_{out}(t)$  attraverso le quali arriviamo a stimare il valore della capacità del condensatore  $C$ . Togliendo il condensatore stimiamo  $C_{OSC}$ , la capacità parassita dell'oscilloscopio. Nella seconda parte dell'esperienza costruiamo un filtro passa-basso RC per il quale vale il modello

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\tau}$$

dove  $\omega$  è la frequenza. Usando tre resistenze differenti e cambiando la frequenza, otteniamo la funzione di trasferimento  $H(\omega)$ , quindi si costruisce il diagramma di Bode per il filtro e lo si confronta con il modello.

## 2 Materiali e acquisizione dati

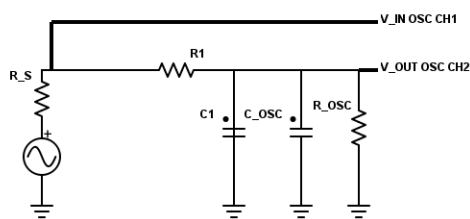
### 2.1 Materiali disponibili

I materiali da utilizzare sono: breadboard, elementi di circuito, oscilloscopio Rigol, condensatore da 6.8 nF, 6 resistenze per la parte A dai valori nominali di 330 k $\Omega$ , 22 k $\Omega$ , 7 k $\Omega$ , 450 k $\Omega$ , 460 k $\Omega$  e 100 k $\Omega$ , 5 resistenze per la parte B con valori nominali di 3.3 k $\Omega$  (x2), 68 k $\Omega$ , 1 k $\Omega$  e 820  $\Omega$ .

### 2.2 Procedura operativa

#### 2.2.1 Scarica del condensatore

Si monta il circuito come in figura.



Si imposta come segnale d'ingresso un'onda quadra con  $V_0 = 3.6$  V e si acquisisce la forma d'onda per la fase di scarica del condensatore in funzione della prima resistenza per sei forme d'onda, impostando l'offset a 1 V.

Si ripete il procedimento per le altre cinque resistenze. L'incertezza sui valori  $\Delta V$  otte-

nuti è data da  $\sigma_{\Delta V} = \frac{8}{100}\sigma_{fs}$  dove  $\sigma_{fs}$  è il fondo scala dell'oscilloscopio.

Si rimuove il condensatore  $C$ , si inseriscono le resistenze da 450 k $\Omega$  e 460 k $\Omega$  in serie e si acquisiscono 6 forme d'onda.

Infine si misurano con il DMM i valori dei componenti passivi utilizzati (il condensatore  $C$ , le resistenze  $R_i$  e  $C_{OSC}$  dei cavi coassiali).

### 2.2.2 Filtro RC passa basso

Figura 1

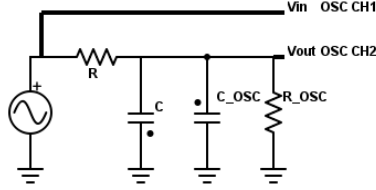
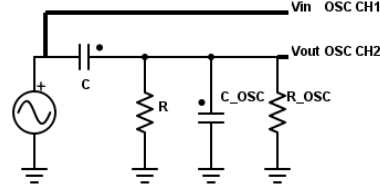


Figura 2



Si monta il circuito come in Figura 1 utilizzando lo stesso condensatore  $C$  della parte precedente e scegliendo 3 diversi valori per  $R$ , scelti in modo da avere frequenze di taglio  $f_{3db}$  dai valori di circa 300 Hz, 3 kHz e 30 kHz.

$$f_{3db} = \frac{1}{2\pi\tau} \quad (1)$$

dove  $\tau = RC$  e  $C = 7.20 \times 10^{-9}$  nF (misurato con il DMM nella scorsa parte dell'esperienza), si ricavano valori di resistenza rispettivamente  $R_1 = 73.7$  k $\Omega$ ,  $R_2 = 7.4$  k $\Omega$  e  $R_3 = 740$   $\Omega$ . Scegliamo dunque:

- $R_1^{sper} = 3.3 + 68 = 71.30 \pm 0.04$  k $\Omega$  per il primo circuito;
- $R_2^{sper} = 3.3 + 3.3 + 1.0 = 7.60 \pm 0.05$  k $\Omega$  per il secondo circuito;
- $R_3^{sper} = 820.0 \pm 0.3$   $\Omega$  per il terzo circuito.

Si imposta la ddp erogata a  $V_{GEN} = 2 V_{PP}$ .

Per misurare la funzione di trasferimento  $H(f)$  si varia in modo casuale la frequenza immessa  $f$  nell'intervallo  $[f_{3db}/10, 100]$  kHz misurando  $V_{IN}$ ,  $V_{OUT}$  e la differenza di fase  $\Delta\Phi_{1,2}$  per 8 frequenze diverse.

Inserendo una resistenza di carico  $R_L = 120$   $\Omega$  si misura l'impedenza in uscita del filtro a due frequenze, una sotto ed una sopra a  $f_{3db}$  del circuito per ognuna delle tre configurazioni di circuito.

Costruendo il circuito passa-alto come in Figura 2, ovvero invertendo le posizioni di  $R$  e  $C$  nel circuito, si misurano  $V_{IN}$ ,  $V_{OUT}$  e la differenza di fase  $\Delta\Phi_{1,2}$  per 8 frequenze diverse.

Si monta il circuito come in Figura 2 e si ripete il medesimo procedimento descritto in precedenza con il filtro passa alto.

### 3 Risultati e discussione

#### 3.1 Scarica con condensatore

Figura 3

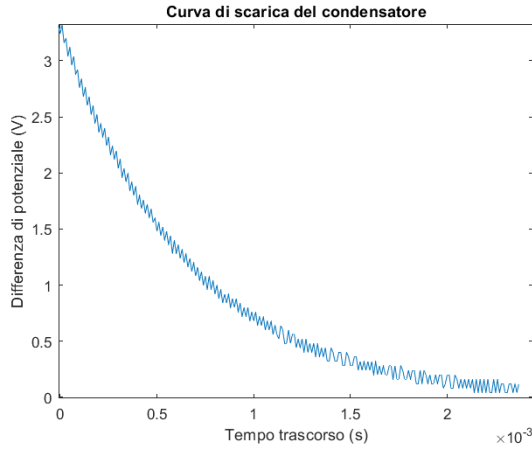
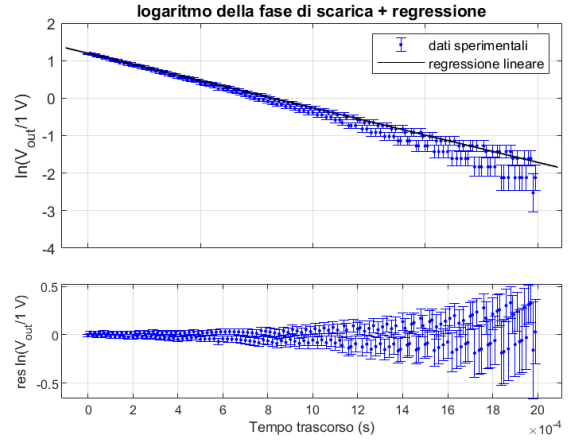


Figura 4



Si estraggono tramite regressione lineare i valori di  $\tau$ , sapendo che:

$$V_{Out} = \varepsilon^* \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + \delta V = \varepsilon^* \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \left( 1 + \frac{\delta V}{\varepsilon^* \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}} \right) \simeq \varepsilon^* \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \left( 1 + \frac{\delta V}{V_{Out}} \right)$$

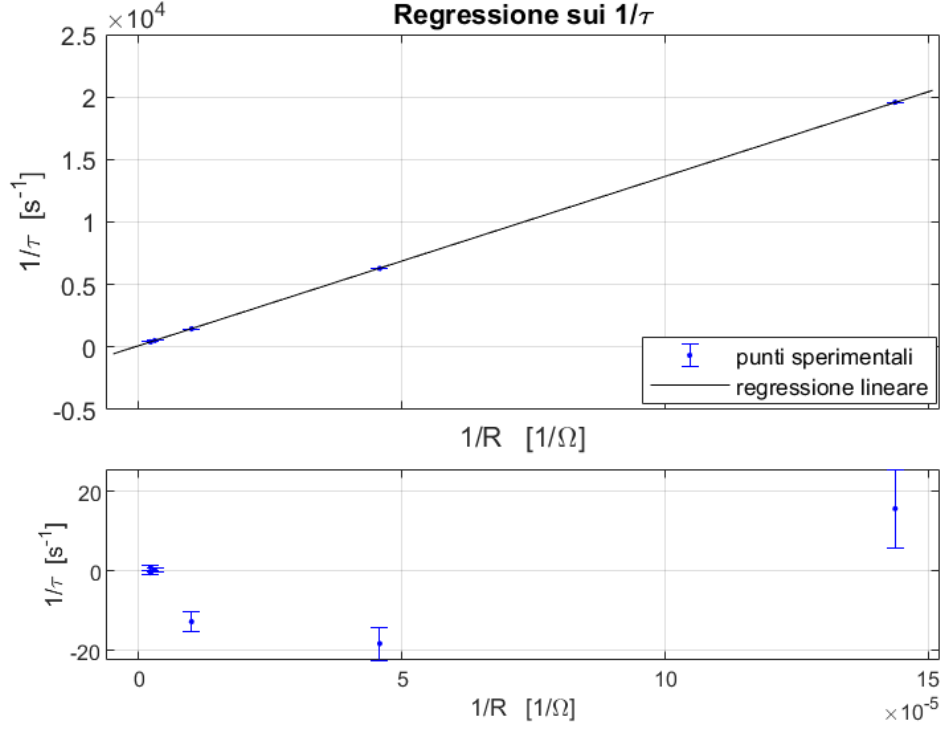
$$\rightarrow \ln(V_{Out}) = \ln(\varepsilon^*) - \frac{t}{\tau} + D \left( \frac{1}{V_{Out}} \right) = A + Bt + D \left( \frac{1}{V_{Out}} \right).$$

dove  $B = -\frac{1}{\tau}$ ,  $A = \ln(\varepsilon^*)$ ,  $\tau = RC$  e  $D = \delta V$  è l'offset (errore nello zero dello strumento).  $B$  è differente per ogni resistenza inserita ed è uguale alla media dei  $B$  per ogni curva di scarica ottenuta e l'incertezza relativa  $\sigma_B$  è data dalla deviazione standard dei  $B$  diviso la radice quadrata del numero delle misure.

Si riporta in grafico la curva di scarica del condensatore per la resistenza di 100 k $\Omega$  (Figura 3) insieme al modello della regressione lineare e i relativi residui (Figura 4). L'analisi dati si limita all'intervallo  $[0, 3\tau]$  per ogni coppia R-C.

Nel grafico dei residui, alla fine della scarica, si nota una struttura causata dalla quantizzazione dell'oscilloscopio. Il chi-quadro ridotto di  $\chi^2/197 = 1.5$  conferma quantitativamente la compatibilità tra i nostri dati e il modello.

Figura 5



Si riporta il grafico dei punti sperimentali insieme al modello per  $\frac{1}{\tau}$  in funzione di  $\frac{1}{R}$ . Qualitativamente si può notare che il modello è in accordo con i punti sperimentali e i residui non formano particolari strutture.

Un'analisi del  $\chi^2$  conferma la compatibilità tra i nostri punti sperimentali e il modello della regressione lineare. Infatti il  $\chi^2$  ridotto risulta  $\chi^2/4=4$ . Pertanto con una confidenza del 99.7% pari a  $3\sigma$ , l'intervallo di accettazione è  $[0.13; 17.00]$  e il test ha avuto esito positivo.

Per trovare il modello della retta si è usato:

$$\tau = \frac{C_{TOT}}{\frac{1}{R_{TOT}} + \frac{1}{R_{OSC}}} \rightarrow \frac{1}{\tau} = \frac{1}{C_{TOT}(\frac{1}{R_{TOT}} + \frac{1}{R_{OSC}})} \rightarrow \frac{1}{\tau} = b + m \frac{1}{R_{TOT}}$$

Quindi:  $C_{TOT} = \frac{1}{m} = 7.388 \pm 0.004$  nF mentre  $R_{OSC} = \frac{1}{C_{TOT}b} = 1.158 \pm 0.004$  MΩ. Le incertezze sono assegnate usando la legge di propagazione:  $\sigma_{C_{TOT}} = \frac{\sigma_m}{m^2}$  e

$$\sigma_{R_{OSC}} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{C_{TOT}}}{C_{TOT}^2 \cdot b}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_b}{b^2 \cdot C_{TOT}}\right)^2}$$

### 3.2 Scarica senza condensatore

Si estraggono tramite regressione lineare i valori di  $\tau$  come fatto all'inizio. Si trova così:  $C_{OSC} = -\frac{1}{BR} = 106 \pm 43$  pF, dove  $R=910$  k $\Omega$ .

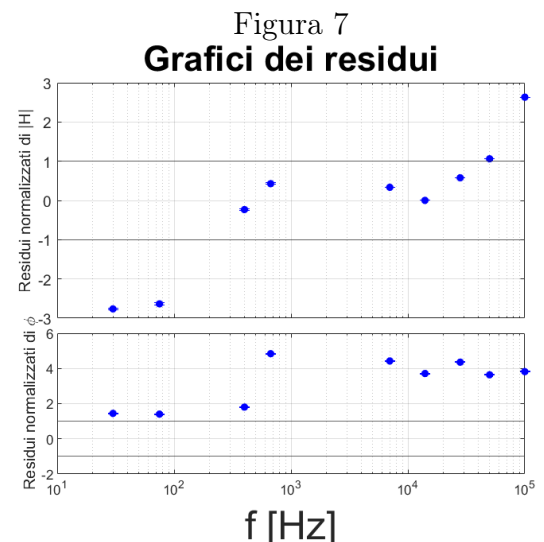
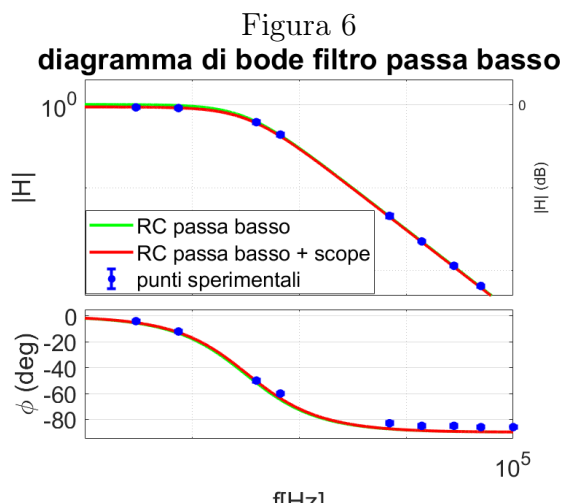
Si ricava il valore finale della capacità del condensatore:  $C = C_{TOT} - C_{OSC} = 7.28 \pm 0.04$  pF, dove  $\sigma_C = \sqrt{\sigma_{C_{TOT}}^2 + \sigma_{C_{OSC}}^2}$  è l'incertezza su  $C$ .

Tabella 1

	$C$	$R_{OSC}$	$C_{OSC}$
Regressione	$7.28 \pm 0.04$ nF	$1.158 \pm 0.004$ M $\Omega$	$106 \pm 43$ pF
Nominale	$6.8 \pm 1.4$ nF	1 M $\Omega$	116 pF
DMM	$7.20 \pm 0.03$ nF	/	$120.0 \pm 0.3$ pF

I valori trovati tramite regressione risultano compatibili con i valori nominali e con i valori misurati tramite DMM a meno di due  $\sigma$ . L'incertezza nominale del condensatore è stata assegnata come il 20% della misura nominale a causa dell'età e dell'usura del condensatore. L'incertezza del DMM è stata trovata come l'incertezza di risoluzione  $\sigma_{DMM} = \frac{\sigma_R}{\sqrt{12}}$  dove  $\sigma_R$  è la risoluzione.

### 3.3 Filtro passa basso



Si costruisce il diagramma di Bode per il filtro passa basso [Figura 6] per la resistenza di 71.3 k $\Omega$ , si confronta la funzione di trasferimento misurata e il modello teorico per RC come filtro passa basso senza l'impedenza dell'oscilloscopio e con

l'impedenza dell'oscilloscopio. Si trova la funzione di trasferimento sperimentale:

$$H(\omega) = \frac{V_{OUT}(\omega)}{V_{IN}(\omega)} \cdot e^{j\Delta\Phi}$$

Si nota qualitativamente un buon accordo tra i punti sperimentali e il modello. Ciò si conferma osservando i grafici dei residui normalizzati [Figura 7]: i residui si discostano dal modello per non più di  $3\sigma$ .

Si riporta in appendice il diagramma di bode per il filtro passa alto [Figura 8].

## 4 Conclusione

La regressione lineare ottenuta per  $\ln V_{out}(t)$  risulta compatibile qualitativamente e quantitativamente con la curva di scarica del condensatore.

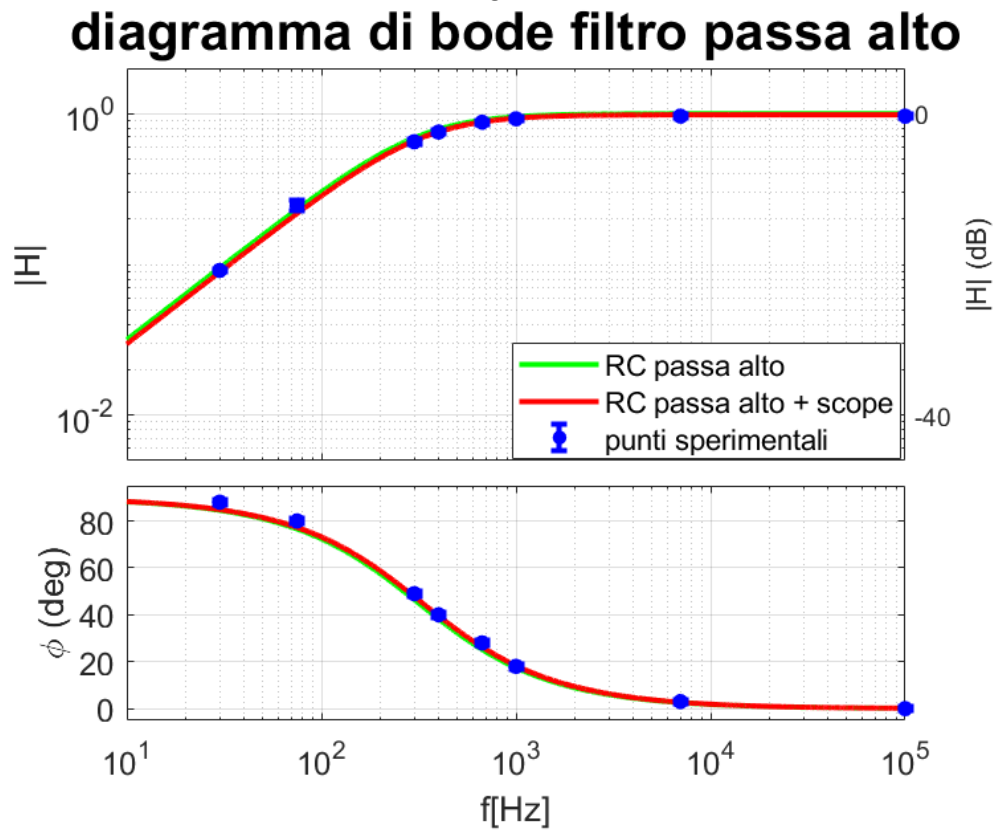
Il modello per estrarre  $C_{TOT}$  e  $R_{TOT}$  è compatibile con i punti sperimentali sia qualitativamente che quantitativamente: il  $\chi^2/4=4$ , con una confidenza del 99.7%, cade nell'intervallo  $[0.13; 17]$  e conferma il modello.

I valori finali di  $C$ ,  $R_{OSC}$  e  $C_{OSC}$  si rivelano compatibili a meno di  $2\sigma$  con i valori misurati tramite il DMM e i valori nominali.

Infine, i grafici tra la funzione di trasferimento misurata e il modello RC sono compatibili a meno di  $3\sigma$  come si può evincere dal grafico dei residui [Figura 7].

## 5 Appendice

Figura 8



Si riporta il diagramma di Bode del filtro passa alto per la resistenza di 71.3 k $\Omega$ .