

ESPERIENZA 6

Teoria del Campionamento

Appoloni Alberto, Cisamolo Anna
(Dated: April 8, 2025)

Lo scopo dell'esperienza è sperimentare il funzionamento del teorema del campionamento di Nyquist-Shannon. Per fare ciò verranno campionati ed in seguito ricostruiti dei segnali per poi confrontali con il segnale originale. La ricostruzione avrà luogo sia numericamente, sia via hardware. Nella prima parte dell'esperienza sarà costruito un oscillatore a rilassamento in modo da poter generare il segnale digitale richiesto dalle operazioni di campionamento.

I. INTRODUZIONE TEORICA

Sebbene ogni segnale che passa in un circuito trasporti informazione in modo continuo, la lettura di tali informazioni può avvenire solo tramite un campionamento discreto. È infatti impossibile riuscire a raccogliere i valori del segnale in ogni singolo istante. Se infatti $f(t)$ è un segnale generico ciò che ci è consentito fare è selezionare il valore di f ad intervalli di tempo t arbitrariamente piccoli ma pur sempre discreti. Per avere un campionamento su un numero elevato di valori si usa stabilire un periodo di campionamento T , a cui è associato una frequenza di campionamento $f = \frac{1}{T}$, che determina ogni quanto viene letto il valore del segnale. In questo modo si viene a creare una sequenza di valori $\{f(nT)\}$ che ricalca l'andamento della funzione $f(t)$ ma ad intervalli discreti.

Notiamo ora la seguente cosa. Sia $\tilde{f}(\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$ la trasformata di Fourier del segnale originale $f(t)$. Definiamo una nuova funzione, detta funzione di *folding*, che agisce nello spazio delle frequenze ed è tale che:

$$\bar{f}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\omega + n \omega_s) \quad (1)$$

dove $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$

La funzione \bar{f} costruisce una funzione periodica sommando, per n che va da $n = -\infty$ a $n = +\infty$, il valore della funzione $\tilde{f}(\omega)$, ciascuna volta traslata di una frequenza pari a $\frac{n}{T}$.

Sappiamo che ogni funzione periodica può essere riscritta in termini di una combinazione lineare di funzioni sinusoidali, tramite la serie di

Fourier. Dal momento che $\bar{f}(\omega)$ è, per definizione, periodica qualunque sia $f(t)$ si può scrivere che

$$\bar{f}(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{ikT\omega} \quad (2)$$

dove

$$a_k = \frac{1}{\omega_s} \int_{-\frac{\omega_s}{2}}^{\frac{\omega_s}{2}} \bar{f}(\omega) e^{-ikT\omega} d\omega$$

Inserendo nel calcolo di a_k la definizione di $\bar{f}(\omega)$, Eq. 1, si trova che

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\omega_s} \int_{-\frac{\omega_s}{2}}^{\frac{\omega_s}{2}} \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\omega + n \omega_s) \right] e^{-ikT\omega} d\omega \\ &= \frac{1}{\omega_s} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\frac{\omega_s}{2}}^{\frac{\omega_s}{2}} \tilde{f}(\omega + n \omega_s) e^{-ikT\omega} d\omega \right] \end{aligned}$$

Cambiando variabili e ponendo $\omega + n \omega_s = \omega'$ si ha che

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\omega_s} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\frac{\omega_s}{2} + n\omega_s}^{\frac{\omega_s}{2} + n\omega_s} \tilde{f}(\omega') e^{-ikT(\omega' - n\omega_s)} d\omega' \right] \\ &= \frac{1}{\omega_s} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\frac{\omega_s}{2} + n\omega_s}^{\frac{\omega_s}{2} + n\omega_s} \tilde{f}(\omega') e^{-ikT\omega'} e^{inkT\frac{2\pi}{T}} d\omega' \right] \\ &= \frac{1}{\omega_s} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\frac{\omega_s}{2} + n\omega_s}^{\frac{\omega_s}{2} + n\omega_s} \tilde{f}(\omega') e^{-ikT\omega'} e^{2\pi ink} d\omega' \right] \\ &= \frac{1}{\omega_s} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\frac{\omega_s}{2} + n\omega_s}^{\frac{\omega_s}{2} + n\omega_s} \tilde{f}(\omega') e^{-ikT\omega'} \cdot 1 d\omega' \right] \end{aligned}$$

Sommando da $n = -\infty$ a $n = +\infty$ gli integrali si ha che

$$= \frac{1}{\omega_s} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\omega) e^{-ikT\omega} d\omega$$

Notiamo che, chiamando $t^* = kT$ e a meno di un fattore $\frac{1}{2\pi}$, l'integrale è pari all'antitrasformata di Fourier di $\tilde{f}(\omega)$. In definitiva otteniamo quindi che

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2\pi}{\omega_s} f(t^*) \\ &= \frac{2\pi}{\omega_s} f(kT) \end{aligned}$$

che inserita in 2 dà

$$\begin{aligned}\bar{f}(w) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{2\pi}{\omega_s} f(kT) e^{ikT\omega} \right] \\ &= T \sum_{k=-\infty}^{+\infty} [f(kT) e^{ikT\omega}]\end{aligned}$$

Questa espressione è nota come *formula di somministrazione di Poisson*

Osserviamo che l'antitrasformata di Fourier di $\bar{f}(\omega)$ è data da

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}[\bar{f}(\omega)] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} T \sum_{k=-\infty}^{+\infty} [f(kT) e^{ikT\omega}] d\omega \\ &= T \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left[f(kT) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} 1 \cdot e^{ikT\omega} d\omega \right] \\ &= T \sum_{k=-\infty}^{+\infty} [f(kT) \mathcal{F}^{-1}[1]] \\ &= T \sum_{k=-\infty}^{+\infty} [f(kT) \delta(t - kT)]\end{aligned}$$

Consideriamo ora un particolare tipo di funzioni tali che la loro trasformata di Fourier sia compresa in una zona limitata di \mathbb{R} , racchiusa tra $\omega = \frac{\pi}{T} = \frac{\omega_s}{2}$ e $\omega = -\frac{\pi}{T} = -\frac{\omega_s}{2}$, e zero al di fuori, ovvero in simboli

$$\mathcal{F}[f(t)](\omega) = \begin{cases} \tilde{f}(\omega) & \text{se } |\omega| < \frac{\pi}{T} = \frac{\omega_s}{2} \\ 0 & \text{se } |\omega| \geq \frac{\pi}{T} = \frac{\omega_s}{2} \end{cases}$$

Questo tipo di funzioni può essere scritto anche come

$$\mathcal{F}[f(t)](\omega) = W_{\frac{\pi}{T}} \tilde{f}(\omega)$$

dove W_a è la finestra o banda di Nyquist definita come

$$W_a(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{se } |\omega| < a \\ 0 & \text{se } |\omega| \geq a \end{cases}$$

Notiamo inoltre che un'altra scrittura possibile è

$$\tilde{f}(\omega) = W_{\frac{\pi}{T}}(\omega) \bar{f}(\omega)$$

Infatti la funzione di folding, agendo su una funzione diversa da zero solo in una finestra, ha come unico risultato quello di creare una funzione periodica in cui ogni periodo ha la forma della funzione di partenza. Moltiplicando tale funzione per la banda di Nyquist si ritorna quindi alla funzione iniziale.

Volendo ritornare nello spazio dei tempi applichiamo l'antitrasformata di Fourier a $\tilde{f}(\omega)$

$$\begin{aligned}f(t) &= \mathcal{F}^{-1}[\tilde{f}(\omega)] \\ &= \mathcal{F}^{-1}[W_{\frac{\pi}{T}}(\omega) \bar{f}(\omega)] \\ &= \mathcal{F}^{-1}[W_{\frac{\pi}{T}}(\omega)] * \mathcal{F}^{-1}[\bar{f}(\omega)]\end{aligned}\quad (3)$$

Abbiamo già calcolato che

$$\mathcal{F}^{-1}[\bar{f}(\omega)] = T \sum_{k=-\infty}^{+\infty} [f(kT) \delta(t - kT)]$$

mentre per $\mathcal{F}^{-1}[W_{\frac{\pi}{T}}(\omega)]$ abbiamo che

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}[W_{\frac{\pi}{T}}(\omega)] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} W_{\frac{\pi}{T}}(\omega) \cdot e^{-i\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} 1 \cdot e^{-i\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{-it} e^{-i\omega t} \right]_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} \\ &= \frac{1}{\pi t} \left[\frac{-e^{-i\frac{\pi}{T}t} + e^{i\frac{\pi}{T}t}}{2i} \right] \\ &= \frac{\sin\left(\frac{\pi t}{T}\right)}{\pi t} \\ &= \frac{1}{T} \text{sinc}\left(\frac{\pi t}{T}\right)\end{aligned}$$

dove abbiamo definito $\text{sinc}(x)$ quella funzione tale che

$$\text{sinc}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 0 \\ \frac{\sin(x)}{x} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Inserendo questi risultati in 3 otteniamo che

$$\begin{aligned}f(t) &= \mathcal{F}^{-1}[W_{\frac{\pi}{T}}(\omega)] * \mathcal{F}^{-1}[\bar{f}(\omega)] \\ &= \left[\frac{1}{T} \text{sinc}\left(\frac{\pi t}{T}\right) \right] * \left[T \sum_{k=-\infty}^{+\infty} [f(kT) \delta(t - kT)] \right]\end{aligned}$$

Sviluppando la convoluzione troviamo che

$$\begin{aligned}f(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} \text{sinc}\left(\frac{\pi(t-y)}{T}\right) \cdot \\ &\quad \cdot T \sum_{k=-\infty}^{+\infty} [f(kT) \delta((y - kT))] dy \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(kT) \left[\int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}\left(\frac{\pi(t-y)}{T}\right) \cdot \right. \\ &\quad \left. \cdot \delta((y - kT)) dy \right]\end{aligned}$$

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(kT) \text{sinc}\left(\frac{\pi(t - kT)}{T}\right)$$

Questo risultato è fondamentale: data una funzione limitata nella banda di Nyquist, i dati raccolti a intervalli regolari T con il campionamento, $f(kT)$, consente di ricostruire perfettamente il segnale originale. In altre parole, è sufficiente conoscere una serie discreta di valori per poter estrarre l'intera informazione trasportata dal segnale. Questo importante risultato prende il nome di *Teorema del campionamento*.

Sottolineiamo il fatto che il teorema vale solo se le funzioni sono $\frac{\pi}{T}$ -BL. Se ciò non valesse, infatti, la funzione di folding produrrebbe una funzione periodica che però, una volta ristretta nuovamente alla banda di Nyquist, non corrisponde più alla funzione di partenza e quindi tutti i calcoli verrebbero fatti su una funzione diversa dall'originale. La funzione ricostruita quindi non avrà nulla a che fare con il segnale campionato. Questo fatto è conosciuto come *aliasing*.

Un caso particolare di aliasing riguarda i segnali sinusoidali che violano il fatto di essere limitati in banda di Nyquist. Consideriamo un segnale sinusoidale di frequenza $\omega_0 > 0$

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \cos(\omega_0 t - \varphi)$$

La sua trasformata di Fourier è pari a

$$(\omega) = e^{i\varphi} \delta(\omega - \omega_0) + e^{-i\varphi} \delta(\omega + \omega_0)$$

Se il segnale viene campionato a frequenza $\frac{\omega_s}{2\pi}$ abbiamo che

$$\bar{f}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [e^{i\varphi} \delta(\omega - \omega_0 + n\omega_s) + e^{-i\varphi} \delta(\omega + \omega_0 + n\omega_s)]$$

Per semplificare i calcoli esprimiamo la pulsazione ω_0 in termini di ω_s . Dal momento che sia ω_0 che ω_s sono fissati è sempre vero che

$$\left(\omega_0 + \frac{\omega_s}{2}\right) \frac{1}{\omega_s} = c$$

con $c \in \mathbb{R}$ una costante che può essere suddivisa nella sua parte intera e nella sua parte decimale scrivendo $c = m + r$ con $m \in \mathbb{N}$ e $r \in [0, 1[\subset \mathbb{R}$. Svolgendo i calcoli si trova quindi che

$$\omega_0 = \omega_s \left(m + r - \frac{1}{2}\right)$$

Segue che

$$\begin{aligned} \bar{f}(\omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[e^{i\varphi} \delta\left(\omega - \omega_s \left(m + r - \frac{1}{2}\right) + n\omega_s\right) \right. \\ &\quad \left. + e^{-i\varphi} \delta\left(\omega + \omega_s \left(m + r - \frac{1}{2}\right) + n\omega_s\right) \right] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[e^{i\varphi} \delta\left(\omega - \left(r - \frac{1}{2}\right) \omega_s + (n - m) \omega_s\right) \right. \\ &\quad \left. + e^{-i\varphi} \delta\left(\omega + \left(r - \frac{1}{2}\right) \omega_s + (n + m) \omega_s\right) \right] \end{aligned}$$

Limitando nuovamente il tutto in banda di Nyquist otteniamo che

$$\begin{aligned} \bar{f}(\omega) W_{\frac{\pi}{T}}(\omega) &= \\ &= \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[e^{i\varphi} \delta\left(\omega - \left(r - \frac{1}{2}\right) \omega_s + (n - m) \omega_s\right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + e^{-i\varphi} \delta\left(\omega + \left(r - \frac{1}{2}\right) \omega_s + (n + m) \omega_s\right) \right] \right\} W_{\frac{\pi}{T}}(\omega) \end{aligned}$$

Poiché far variare la n equivale a spostare le delta di Dirac di un fattore $n\omega_s$ lungo l'asse delle frequenze, moltiplicare $\bar{f}(\omega)$ per $W_{\frac{\pi}{T}} = W_{\frac{\omega_s}{2}}$ equivale a considerare solo le delta comprese tra $-\frac{\omega_s}{2}$ e $\frac{\omega_s}{2}$ ovvero solo quelle per cui vale la relazione $n \pm m = 0$. Otteniamo quindi

$$\begin{aligned} \bar{f}(\omega) W_{\frac{\pi}{T}}(\omega) &= \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[e^{i\varphi} \delta\left(\omega - \left(r - \frac{1}{2}\right) \omega_s + (n - m) \omega_s\right) \cdot \delta_{n,m} \right. \\ &\quad \left. + e^{-i\varphi} \delta\left(\omega + \left(r - \frac{1}{2}\right) \omega_s + (n + m) \omega_s\right) \cdot \delta_{n,-m} \right] \\ &= e^{i\varphi} \delta\left(\omega - \left(r - \frac{1}{2}\right) \omega_s\right) + e^{-i\varphi} \delta\left(\omega + \left(r - \frac{1}{2}\right) \omega_s\right) \end{aligned}$$

Ricostruendo la funzione facendo la trasformata

inversa troviamo che

$$\begin{aligned}
 f_r(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{f}(\omega) W_{\frac{\pi}{T}}(\omega) \cdot e^{-i\omega t} d\omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[e^{i\varphi} \delta\left(\omega - \left(r - \frac{1}{2}\right)\omega_s\right) + \right. \\
 &\quad \left. + e^{-i\varphi} \delta\left(\omega + \left(r - \frac{1}{2}\right)\omega_s\right) \right] e^{-i\omega t} d\omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} e^{i\varphi} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - \left(r - \frac{1}{2}\right)\omega_s\right) e^{-i\omega t} d\omega \\
 &\quad + \frac{1}{2\pi} e^{-i\varphi} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega + \left(r - \frac{1}{2}\right)\omega_s\right) e^{-i\omega t} d\omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left[e^{i\varphi} e^{-i\left(r - \frac{1}{2}\right)\omega_s t} + e^{-i\varphi} e^{i\left(r - \frac{1}{2}\right)\omega_s t} \right] \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left[e^{i\varphi - i\left(r - \frac{1}{2}\right)\omega_s t} + e^{-i\varphi + i\left(r - \frac{1}{2}\right)\omega_s t} \right] \\
 &= \frac{1}{\pi} \cos\left(\left(r - \frac{1}{2}\right)\omega_s t - \varphi\right)
 \end{aligned}$$

La funzione ricostruita ha frequenza pari a

$$\begin{aligned}
 \omega_r &= \omega_s \left(r - \frac{1}{2}\right) \\
 &= \omega_s \left[\left(\frac{\omega_0}{\omega_s} - m + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\right] \\
 &= \omega_0 - m \omega_s \\
 &= \omega_0 - \left[\frac{\omega_0}{\omega_s} - r + \frac{1}{2}\right]
 \end{aligned}$$

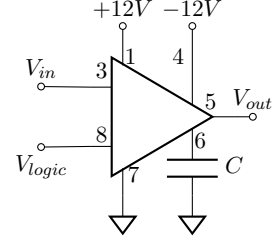
Siccome r è un numero compreso tra 0 e 1 la somma di r agisce solo nella parte decimale, quindi, poiché sappiamo che m è un numero intero, possiamo scrivere che

$$\begin{aligned}
 \omega_r &= \omega_s \left(r - \frac{1}{2}\right) \\
 &= \omega_0 - \left[\frac{\omega_0}{\omega_s} - r + \frac{1}{2}\right] \\
 &= \omega_0 - \left[\frac{\omega_0}{\omega_s} + \frac{1}{2}\right]
 \end{aligned}$$

La funzione ha quindi una frequenza diversa da quella originale.

II. SVOLGIMENTO

Iniziamo l'esperienza preparando la breadboard. Colleghiamo in 3 linee di alimentazione tre segnali a tensione costante +12 V, -12 V, 5 V e usiamo una quarta connessione per la massa. Impostiamo poi il limite per ciascun ramo



Circuit 1: Sample and hold

dell'alimentatore a 20 mA. Cominciamo montando l'oscillatore a rilassamento schematizzato in figura 2. Scegliamo una capacità $C = 100$ nF, due resistenze $R = 10$ kΩ, una resistenza $R_2 = 10$ kΩ, una resistenza $R_3 = 1$ kΩ, un trimmer da 100 kΩ, un transistor npn 2N2222, un diodo e un op-amp uA741 opportunamente alimentato. Regoliamo, poi, il trimmer in modo da ottenere un segnale di frequenza $f = 1$ kHz, misuriamo quindi il duty cycle e l'ampiezza del segnale in uscita.

Montiamo poi il circuito in figura 1 utilizzando come segnale logico di clock V_{logic} , l'output del circuito in figura 2. Usiamo un integrato LF398 opportunamente alimentato e una capacità $C = 10$ nF. Verifichiamo il funzionamento del circuito utilizzando un segnale sinusoidale in ingresso di frequenza $f_{in} = 100$ Hz e ampiezza di circa 1 V. Successivamente regoliamo la frequenza f_{in} affinché V_{out} risulti pressoché costante e misuriamo la frequenza a cui ciò accade una volta al minuto per 5 minuti. Impostando, poi, la risoluzione dell'oscilloscopio pari a 5 ms per divisione, scarichiamo mediante chiavetta USB le forme d'onda sinusoidali e triangolari con ampiezza 1V e frequenze pari a 50 Hz, 100 Hz, 200 Hz e 900 Hz. Infine ricostruiamo per tutti gli 8 segnali, il segnale originale utilizzando come funzioni kernel $k(t)$ le funzioni:

$$k_{tr}(t) = \begin{cases} \frac{T-|t|}{T} & \text{per } |t| \leq T \\ 0 & \text{per } |t| > T \end{cases}$$

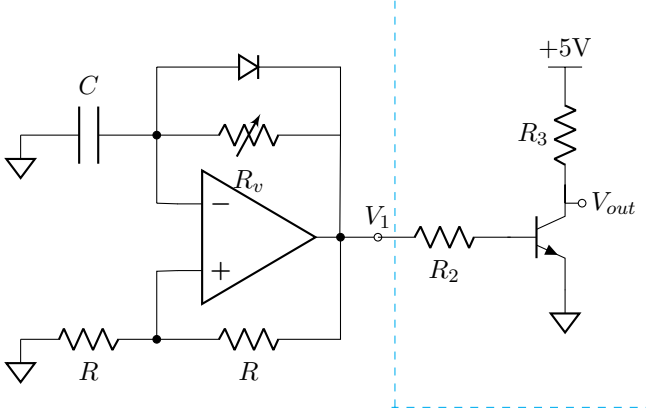
e

$$k_{sinc}(t) = \text{sinc}\left(\frac{\pi t}{T}\right)$$

Realizziamo il circuito in figura 4 utilizzando due op-amp OP07 opportunamente alimentati, come resistenze: $R_A = 100$ kΩ, $R_B = 90$ kΩ, $R_L = 1$ kΩ, $R_1 = 33$ Ω, $R_2 = 33$ Ω, mentre come capacità: $C_L = 100$ nF, $C_1 = 133$ nF, $C_2 = 50$ nF. Come segnale in ingresso V_{SH} usiamo l'output del circuito precedente 1. Impostiamo come segnale in ingresso un'onda triangolare di frequenza 50Hz, bypassando o meno il primo dei due filtri, osserviamo l'output V_{out} . Infine visualizziamo il

funzionamento del circuito utilizzando come segnale in ingresso forme d'onda sinusoidali, triangolari ed onde quadre.

III. ANALISI



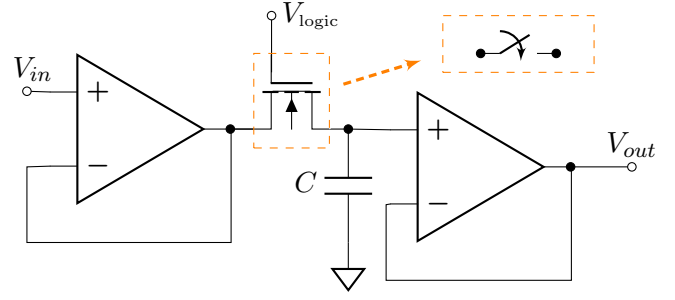
Circuit 2: Oscillatore a rilassamento

Per poter operare il campionamento abbiamo bisogno di un modo per definire gli istanti in cui raccogliere i dati e quindi il periodo di campionamento. Tale compito è assolto dal circuito in figura Circuit 2. Il suo segnale in uscita è infatti un treno di impulsi a frequenza regolare che ci permettono quindi di definire i tempi a cui compiere la misurazione.

Questo circuito riprende un oscillatore a rilassamento, che sappiamo creare un onda quadra, ma questa volta, in parallelo alla resistenza che opera la retroazione nell'ingresso invertente, inseriamo un diodo. Il diodo agisce come circuito aperto per una V_1 positiva, facendo quindi scorrere tutta la corrente attraverso la resistenza. Quando invece V_1 è negativa, la resistenza del diodo può essere approssimata a zero e quindi la corrente gli scorrerà molto rapidamente attraverso. Nel primo caso, quindi, il circuito impiegherà un certo tempo Δt a caricarsi mentre nel secondo la scarica avverrà in modo repentino. La forma d'onda che si viene a creare con questo andamento del potenziale sarà quindi il treno di impulsi.

Nel nostro caso creiamo, come richiesto, un segnale di frequenza $f = 1$ kHz. La larghezza dell'impulso è pari a $2.12 \mu s$ che corrisponde, su un periodo di 1 ms, a un duty cycle pari al 2.12 %.

La misurazione vera e propria è poi portata a termine da un circuito integrato LF398 che svolge la funzione di *sample and hold*. L'effetto di questo circuito è di selezionare ad un dato tempo t , corrispondente all'immissione di un segnale impul-



Circuit 3: Circuito integrato

sivo nel circuito, un valore del segnale da campionare e mantenerlo poi costante fino all'impulso successivo.

Il chip LF398 ha un comportamento che può essere schematizzato tramite il circuito 3

Il transistor MOSFET, contornato di arancione nel circuito 3, si comporta infatti come un interruttore pilotato dal segnale V_{logic} . Quando V_{logic} è pari a zero il circuito è aperto mentre con $V_{logic} \neq 0$ l'interruttore viene chiuso. Quando ciò accade il condensatore C , considerato ideale, si carica o scarica in modo tale da raggiungere il valore della differenza di potenziale V_{in} in quel momento. Quando poi l'interruttore si apre nuovamente, il condensatore mantiene la d.d.p. acquisita per tutto il tempo in cui l'interruttore rimane aperto. Una volta che questo si richiude il ciclo ricomincia. Quello che si ottiene in uscita è, quindi, un segnale a gradini che riporta, a tempi regolari definiti dalla frequenza del segnale V_{logic} , il valore di V_{in} . I due amplificatori operazionali in configurazione *follower*, posti prima e dopo il condensatore, servono per disaccoppiare dal punto di vista dell'impedenza le parti del circuito che precedono e seguono.

L'impulso immesso in V_{logic} deve essere di tipo digitale ovvero variare tra 0 e 5 V. Tuttavia il segnale che otteniamo dall'oscillatore a rilassamento varia tra $\pm V_{sat}$, tensione di saturazione dell'amplificatore operazionale. Per ottenere il segnale desiderato inseriamo quindi in uscita dall'oscillatore un generatore di segnale digitale TTL (contornato in azzurro nel circuito 2). Questo circuito, basato sul funzionamento di un transistor, consente infatti di portare segnali impulsivi con ampiezza qualsiasi in segnali digitali 0 – 5 V. Se infatti V_1 è negativo la giunzione base emettitore del transistor si comporta come un diodo in polarizzazione inversa, impedendo, quindi, lo scorrere della corrente. Per le proprietà del transistor non passerà corrente nemmeno nel collettore e di conseguenza nemmeno nella resistenza R_3 . Otteniamo quindi che

$V_{out} = 5V - i_C R_3 = 5V$. Viceversa se V_1 è positiva, scorre corrente nella base e quindi nel collettore e nella resistenza R_3 . Tuttavia la corrente in B è tale da mandare in saturazione il transistor. Abbiamo quindi che la tensione tra collettore ed emettitore è approssimabile a zero. Segue quindi che $V_{out} = 5V - i_C R_3 = V_{CE} \simeq 0V$.

Il segnale che otteniamo in uscita dal *sample and hold* mantiene le caratteristiche di frequenza e duty cycle dell'impulso in V_1 ma possiede un'ampiezza pari a $V_{out} = 4.925 V$

Utilizziamo quindi l'apparato appena realizzato per campionare un segnale sinusoidale.

Per prima cosa osserviamo il comportamento di aliasing, cercando per quali valori della frequenza del segnale in ingresso, il segnale campionato è un segnale costante. Ripetendo le misurazioni troviamo i valori riportati in tabella:

$f_{in} [Hz]$
1006.38
1006.19
1006.67
1006.52
1006.64

TABLE I: Frequenze corrispondenti al segnale costante

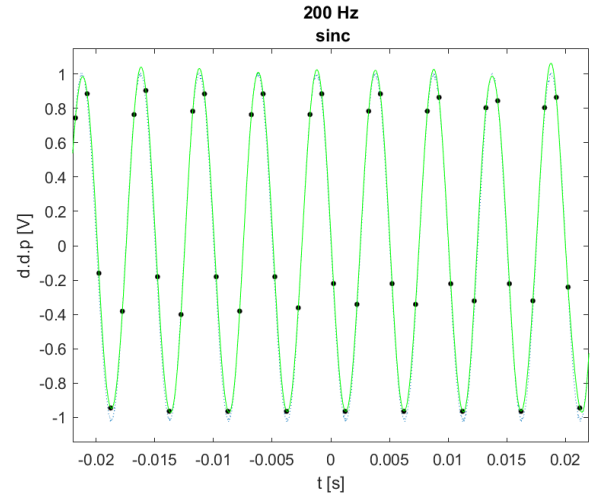
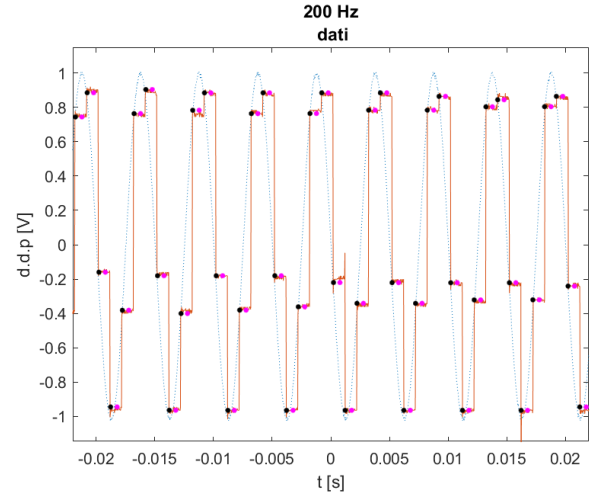
Il valore che ci aspettiamo di ottenere è pari a $\omega_0 = \omega_s = 1kHz$. Infatti sappiamo che in caso di segnali non limitati nella banda di Nyquist, quali possono essere segnali sinusoidali con frequenza maggiore della metà della frequenza di campionamento, il segnale ricostruito ha pulsazione pari a

$$\begin{aligned} \omega_r &= \omega_s \left(r - \frac{1}{2} \right) \\ &= \omega_0 - \left[\frac{\omega_0}{\omega_s} + \frac{1}{2} \right] \end{aligned}$$

Volendo ottenere un segnale costante dobbiamo porre $r = \frac{1}{2}$ che significa avere

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &= \frac{\omega_0}{\omega_s} - m + \frac{1}{2} \\ \omega_0 &= m \cdot \omega_s \end{aligned}$$

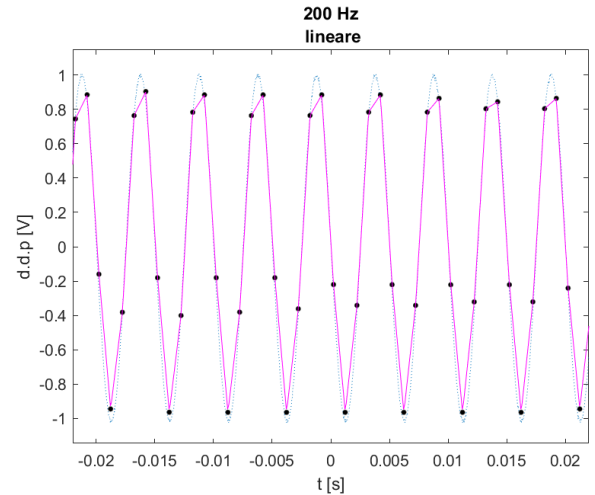
Il segnale in uscita costante si ottiene quindi ogni qualvolta che la frequenza dell'onda in ingresso è un multiplo intero della frequenza di campionamento. Il fatto che i valori della frequenza in cui ciò accade oscillino è dovuto al fatto che i componenti, che sono responsabili del comportamento del circuito, non hanno valori costanti ma sono

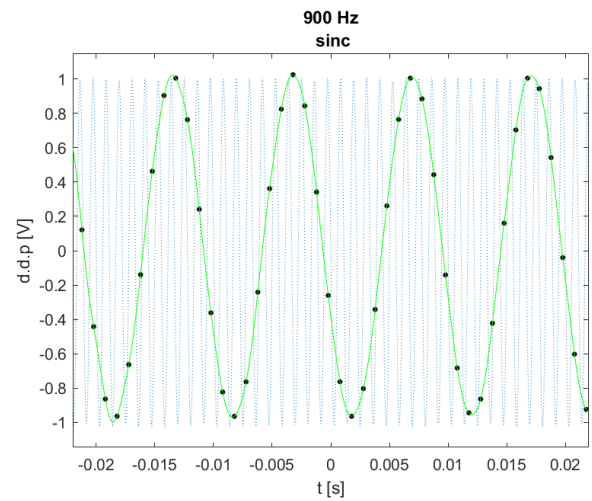
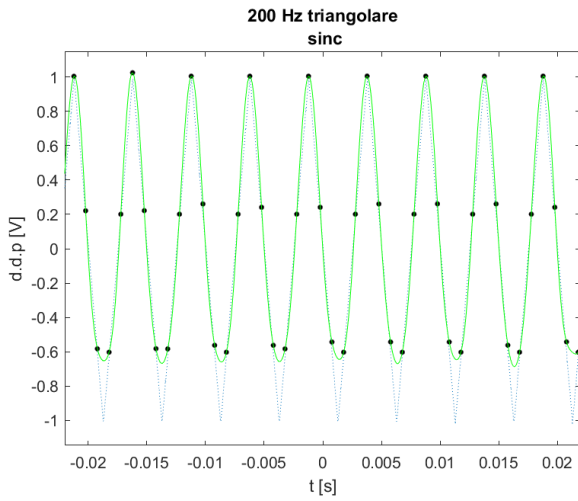
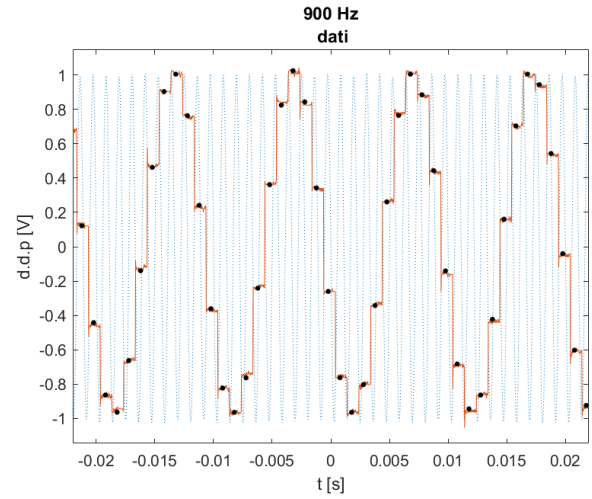
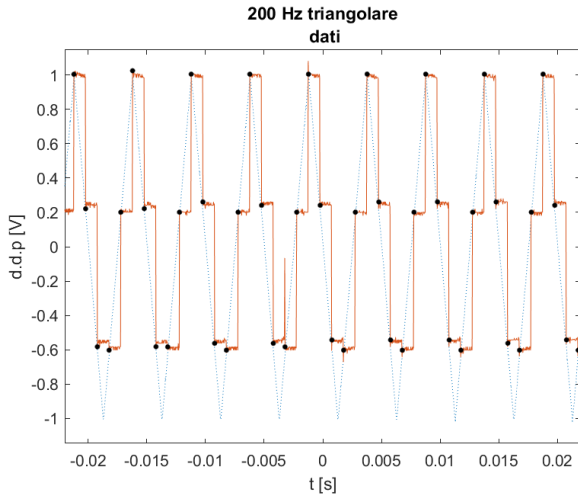


sensibili, ad esempio, a variazioni della temperatura e quindi ω_s non è del tutto stabile.

Cominciamo poi a effettuare il campionamento. Carichiamo i dati su una chiavetta e poi, tramite il codice che inseriamo in allegato, ricostruiamo numericamente il segnale. Riportiamo qui a titolo di esempio i grafici relativi ai dati raccolti per le frequenze 200 Hz e 900 Hz.

Inseriamo in allegato tutti gli altri segnali ricostruiti. Osserviamo che il segnale ricostruito

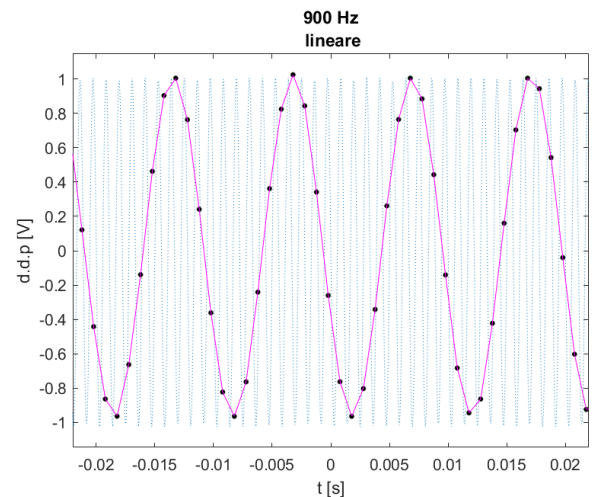
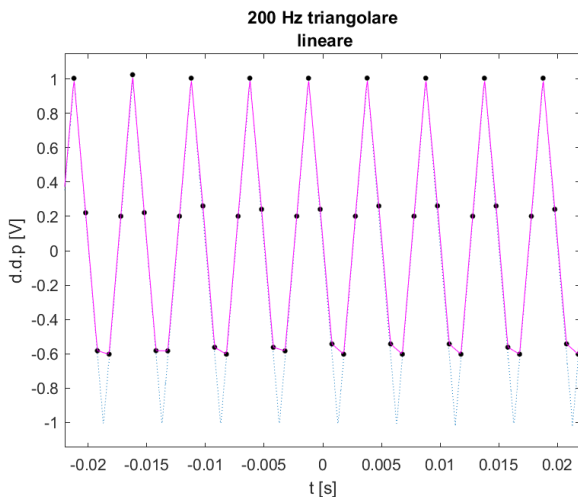


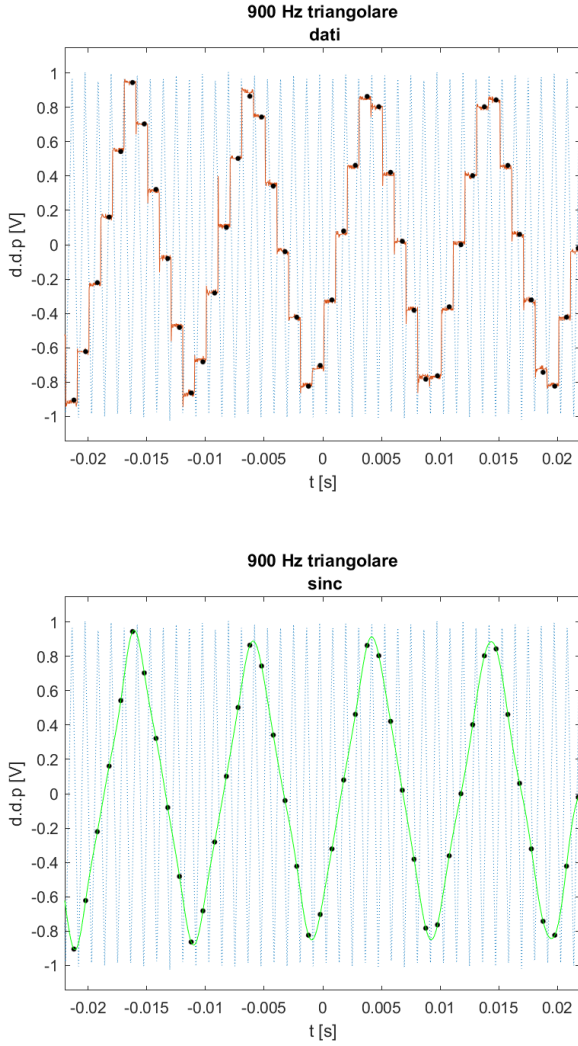


ito utilizzando come *kernel* la funzione sinc coincide quasi perfettamente con il segnale originale quando si tratta di ricostruire la funzione seno, come ci aspettiamo da quanto detto nell'introduzione teorica. Per quanto riguarda invece l'onda triangolare la ricostruzione è meno precisa in quanto essa non è una funzione limitata nella banda di Nyquist. Essa infatti scritta in serie di Fourier è composta da frequenze che si estendono anche oltre alla finestra di Nyquist,

come possiamo vedere anche dalla figura 1. Per quanto riguarda invece le onde triangolari la ricostruzione è migliore applicando di kernel lineare.

Nei grafici relativi alla frequenza 900 Hz è evidente l'effetto di *aliasing*. La funzione ricostruita ha infatti una frequenza minore di quella originale. Il segnale campionato infatti non è band-limited in quanto la sua trasformata di Fourier è una delta di Dirac centrata nel valore 900 Hz





e quindi si trova ben al di fuori dalla banda di Nyquist che ha come limite $\frac{f}{2} \simeq 500$ Hz. Come ultima cosa ricostruiamo via hardware il segnale campionato a partire dalla tensione V_{SH} del sample and hold. Utilizzando un'onda triangolare di frequenza 50Hz come segnale in ingresso al S&H e bypassando il primo filtro, osserviamo in V_{out} una sinusoide con un piccolo ritardo di fase e con un guadagno di circa $\frac{1}{3}$. Senza bypassare il primo filtro vediamo, invece, in V_{out} un'onda triangolare di ampiezza quasi uguale a quella in ingresso ma invertita con un piccolo ritardo.

IV. CONCLUSIONI

Nella prima parte dell'esperienza abbiamo regolato il trimmer in modo da ottenere un segnale con una frequenza $f = 1$ kHz, quindi abbiamo trovato che l'ampiezza dell'impulso del circuito 2 è pari a $2.12 \mu s$ che corrisponde su un periodo di 1 ms a un duty cycle pari al 2.12 %. Nella seconda parte abbiamo osservato un seg-

nale a gradini in uscita dal circuito 1 che riporta a intervalli regolari, scanditi dalla frequenza di

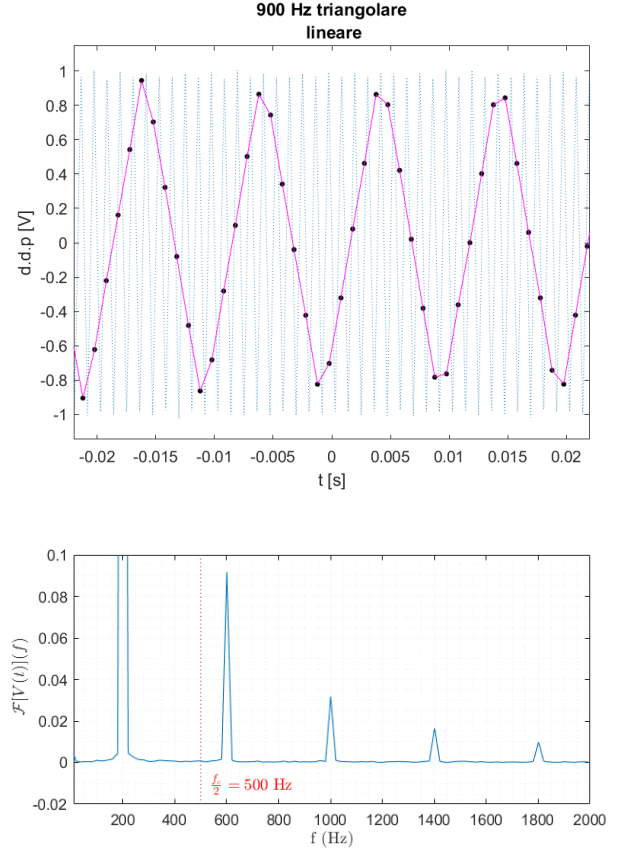
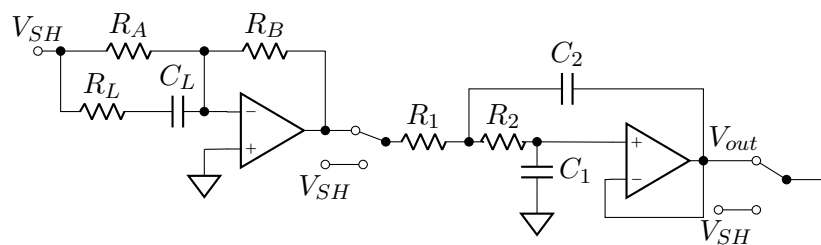


FIG. 1: Trasformata di Fourier onda triangolare

V_{logic} , i valori di V_{in} . Abbiamo, poi, stimato il valore di f_{in} tale per cui il segnale in output rimanga costante. I valori trovati sono riportati in tabella I e si attestano in torno a 1 kHz come ci aspettavamo dalla teoria. Successivamente abbiamo ricostruito il segnale originale per le forme d'onda sinusoidali e triangolari di frequenze 50 Hz, 100 Hz, 200 Hz e 900 Hz tramite le funzioni II. Abbiamo osservato che la funzione seno ricostruita coincide perfettamente con il segnale originale mentre l'onda triangolare ricostruita è meno precisa in quanto non è una funzione limitata nella banda di Nyquist. Per la frequenza di 900Hz abbiamo osservato l'effetto di alising, infatti la funzione ricostruita ha una frequenza minore rispetto a quella originale in quanto la sua trasformata di Fourier è al di fuori della banda di Nyquist (limite $\frac{f}{2} \simeq 500$ Hz). Infine abbiamo osservato l'output del circuito in figura 4. Bypassando il primo filtro abbiamo visualizzato sull'oscilloscopio un'onda sinusoidale con un piccolo ritardo di fase e un guadagno di circa $\frac{1}{3}$ rispetto al segnale in entrata V_{SH} . Senza bypassare il primo filtro, invece, abbiamo notato un'onda triangolare con un piccolo ritardo e invertita confrontandola con V_{SH} .



Circuit 4: Circuito di ricostruzione del segnale campionato