

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRENTO

LABORATORIO DI FISICA I

Deformazione elastica

AUTORI - GRUPPO L13

Piferi Alessandro

Appoloni Alberto

08 Luglio 2020

Sommario

L'esperienza ivi descritta è volta alla verifica del comportamento elastico di una molla, in relazione alle già note leggi fisiche che regolano il fenomeno. Sono state svolte due tipologie di misurazioni: la prima, di tipo statico, analizza l'elongazione di una molla in funzione di forze sollecitanti note; la seconda, di tipo dinamico, esamina il periodo di oscillazione di sistemi composti da una molla e da masse variabili. Le misurazioni statiche hanno permesso il calcolo della costante elastica della molla e la verifica della linearità della relazione, che intercorre fra dilatazione e forza applicata. Le misure dinamiche invece non sono state risolutive, i dati raccolti non risultano sufficientemente in accordo con le previsioni.

1 Introduzione

Con la seguente esperienza si è voluto analizzare il comportamento di una molla reale rispetto alle previsioni teoriche della legge di Hooke sulla deformazione elastica: $F_e = k\Delta X$. Quest'analisi è stata svolta seguendo due diverse metodologie di studio. In un primo momento, si è valutata la deformazione della molla, lungo una sola coordinata spaziale, sottoponendola alla sollecitazione di forze note, valutato l'andamento dei punti rispetto alla previsione teorica lineare e calcolata una stima della costante elastica della molla. Dall'equazione del moto di un corpo soggetto all'azione della forza elastica si può ricavare l'espressione per il periodo di oscillazione del sistema, $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$, e notare una dipendenza lineare fra il quadrato dello stesso e il valore della massa. Il secondo metodo verifica questo aspetto, si sono quindi registrati i tempi di oscillazione, attorno al punto di equilibrio, per sistemi formati da una molla e da cilindretti di varie masse. In fine si è stimato un nuovo valore di k per confrontarlo con quello ricavato dai dati statici di deformazione. Durante l'esperienza è stata posta particolare attenzione alla propagazione delle incertezze e alla somma dei contributi delle stesse. Per verificare la compatibilità dei modelli teorici con i dati sperimentali sono stati introdotti differenti metodi comparativi che sono stati messi a confronto in termini qualitativi e quantitativi. Dal punto di vista quantitativo si è sfruttato il test del chi quadro come misura della discrepanza fra i dati raccolti e le previsioni teoriche.

2 Procedure operative

2.1 Strumentazione

Il materiale usato è: una molla, supporto regolabile con asta metrica, masse varie, gancio con supporto per le masse (massa nominale $m_{\text{ganc.}} = 25 \text{ g}$), asta metrica millimetrata (risoluzione $\Delta z = 5 \cdot 10^{-4} \text{ m}$), cronometro (risoluzione $\Delta t = 0.01 \text{ s}$), bilancia elettronica (risoluzione $\Delta m = 0.1 \text{ g}$). Il sostegno verticale manteneva la riga metallica perpendicolare al piano di lavoro e permetteva l'aggancio della molla in modo che quest'ultima fosse affiancata al metro senza possibilità di toccarlo; alla molla sono state poi appese tramite il gancio masse di varia entità.

2.2 Metodo statico

Come prima cosa si è scelta una massa di riferimento, $M_0 = 50,3 \pm 0,03 \text{ g}$, con rispettivo errore di misura, necessaria ad annullare il pretensionamento della molla selezionata. Si è quindi allineata l'estremità inferiore del gancio porta masse, con la "zavorra" caricata, ad una quota di riferimento chiamata z_0 , dalla quale registrare poi la deformazione della molla. È ovvio che la lettura della quota (sia la z_0 che le altre) possa essere affetta da errore di parallasse ed errore casuale, addizionali all'errore dovuto alla risoluzione dell'asta metrica. Al fine di determinare l'errore statistico commesso si sono effettuate 12 prove ripetute di lettura della quota per due masse e se n'è calcolato lo scarto quadratico

medio, ottenendo così un'incertezza tipo:

Massa usata (g)	Scarto quadratico medio quote (m)
210,0	0,000144
80,4	0,000152

Nell'appendice sono state riportate in tabella tutte le prove ripetute fatte (Tabella 1). Come si evince dai valori trovati, l'errore dipende in modo del tutto approssimabile dalla massa, quindi si può considerare come incertezza sulla lettura di ogni quota la seguente:

$$\sigma_{z_i} = \sqrt{\sigma_{\text{ErrCas}}^2 + \sigma_{\text{Ris}}^2} = 2 \cdot 10^{-4} m \quad (1)$$

Dove per σ_{ErrCas} ci si riferisce all'errore casuale più grande nella tabella sopra, mentre $\sigma_{\text{Ris}} = \frac{\Delta z}{\sqrt{12}} = 1,4 \cdot 10^{-4} m$ è l'incertezza dovuta alla risoluzione. Si nota che $\sigma_{z_i} = \sigma_{z_0}$ essendo misure indipendenti ed equivalenti per metodo usato. A questo punto si sono misurate le posizioni sull'asta metrica per le varie masse scelte, ricavando la deformazione come: $y_i = z_0 - z_i$, dove z_i sono le quote lette per ogni massa e y_i sono le rispettive deformazioni. L'incertezza sulla deformazione è stata calcolata come:

$$\sigma_{y_i} = \sigma_{z_0} \cdot \sqrt{2} = 3 \cdot 10^{-4} m \quad (2)$$

In appendice si trova la tabella con tutti i dati raccolti (Tabella 2).

2.3 Metodo dinamico

Le misurazioni dinamiche sono state svolte caricando la molla con 9 set di masse, per ogni tentativo si è segnata sull'asta metrica la posizione di equilibrio del sistema, quindi la molla è stata compressa di circa 4 cm ed è stata rilasciata avendo cura di non imprimere alcuna forza alle massette, ovviamente questo non è del tutto possibile quindi nelle cause di errore sarà considerato anche questo aspetto. Si sono registrati con il cronometro 5 periodi di oscillazione consecutivi così da diluire l'errore casuale, i tempi sono stati presi a partire da un passaggio arbitrario dell'estremità inferiore del gancio sulla posizione di equilibrio. Si sono effettuate almeno 12 misure ripetute per ogni massa. L'incertezza delle masse è la medesima del metodo statico, mentre per i tempi registrati si sono eseguiti vari tipi di misurazioni al fine di determinare se l'incertezza fosse indipendente o meno dalla massa usata. L'argomento verrà trattato nel dettaglio nella sezione dell'analisi dati del metodo dinamico. Si sottolinea che questa misurazione è stata limitata dalle caratteristiche della molla, infatti si è riscontrata una leggera deformazione ad una delle spire che ha reso impossibile la misurazione di periodi con masse inferiori ai 120 g.

Note

L'incertezza sulla massa è stata calcolata come scarto quadratico medio della distribuzione a densità uniforme:

$$\sigma_{m_i} = \sigma_{M_0} = \frac{\Delta m}{\sqrt{12}} = 3 \cdot 10^{-5} \text{ kg}.$$

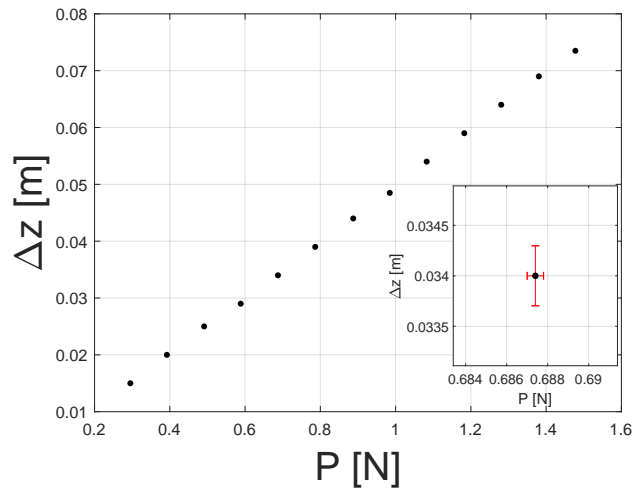
3 Analisi dati

x

3.1 Metodo statico

3.1.1 Forza peso e dilatazione

Per verificare il modello teorico si associa ad ogni massa usata la relativa forza peso, alla quale deve corrispondere un determinato allungamento verticale della molla; tuttavia è stata utilizzata una massa ed una posizione di riferimento arbitraria, quindi le deformazioni devono essere messe in relazione alla forza peso data dal contributo della massa totale caricata, meno la massa di riferimento, fruttando la matematica seguente: $(z_0 - z_i) = C \cdot (m_i - M_0)$. Si assume privo di incertezza il valore di $g = 9,806 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, quindi la forza peso avrà incertezza: $\sigma_{P_i} = g \cdot \sigma_{m_i} \cdot \sqrt{2}$. Si graficano i punti tabulati e si osserva un andamento lineare.



Pesi (N) [$\pm 4 \cdot 10^{-4}$]	Deformazione (m) [$\pm 3 \cdot 10^{-4}$]
0,2952	0,0150
0,3922	0,0200
0,4913	0,0250
0,5884	0,0290
0,6874	0,0340
0,7864	0,0390
0,8874	0,0440
0,9845	0,0485
1,0826	0,0540
1,1826	0,0590
1,2807	0,0640
1,3807	0,0690
1,4778	0,0735

3.1.2 Calcolo della costante elastica

Si procede a calcolare i valori della costante elastica della molla per ogni coppia di valori (P_i, y_i) , secondo la relazione espressa dalla legge di Hooke. L'incertezza sulla costante elastica sarà data da:

$$\sigma_{k_i} = k_i \cdot \sqrt{\left(\frac{\sigma_{y_i}}{y_i}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{P_i}}{P_i}\right)^2} \quad (3)$$

Si trascura la covarianza non essendoci motivi per credere che le grandezze coinvolte siano statisticamente dipendenti. Al fine di determinare un valore unico di k si calcola la media pesata sui pesi statistici $w_i = \frac{1}{\sigma_{k_i}^2}$, $k_w = 20,08 \text{ Nm}$, l'incertezza sul valore di k_w è: $\sigma_{k_w} = \frac{1}{\sqrt{\sum w_i^2}} = 0,03 \text{ Nm}$. In appendice è riportato il grafico dei vari k con relativa incertezza ed il valore di k_w . [Figura 2]

3.1.3 Metodo dei minimi quadrati

Si nota che, essendo la dilatazione della molla in relazione di diretta proporzionalità con la forza peso, è possibile costruire infinite rette passanti per l'origine che approssimano l'andamento dei punti sperimentali e calcolarne il relativo coefficiente angolare. Le rette avranno equazione: $y = b \cdot P$, dove $b = \frac{1}{k}$. Trovare quindi il coefficiente angolare della retta, che meglio approssima i punti sperimentali, equivale a trovare la miglior stima del valore k della costante elastica. A tal scopo si è utilizzato il metodo dei minimi quadrati che minimizza la distanza fra punti sperimentali e la retta stessa. Sfruttando la trascurabilità dell'incertezza sulle forze peso, rispetto all'incertezza sulla deformazione, si calcola il valore b_0 e il rispettivo errore come:

$$b_0 = \frac{\sum_i P_i \cdot y_i}{\sum_i P_i^2} = 0,04981 Nm^{-1} \quad \sigma_{b_0} = \frac{\sigma_{y_i}}{\sqrt{\sum_i P_i^2}} = 9 \cdot 10^{-5} Nm^{-1} \quad (4)$$

Il valore di k_0 e la rispettiva incertezza saranno quindi:

$$k_0 = \frac{1}{b_0} = 20.09 Nm \quad \sigma_{k_0} = k_0 \cdot \frac{\sigma_{b_0}}{b_0} = 0.03 Nm \quad (5)$$

In appendice si riporta il grafico dei punti sperimentali con relativo modello ottenuto dalla regressione lineare [Figura 1], ove si osserva qualitativamente una buona compatibilità fra modello e punti sperimentali. Il valore numerico di k_0 è molto vicino al valore della media pesata, questo è concorde con le aspettative.

3.1.4 Test del χ^2 e residui

Si vuole ottenere una valutazione quantitativa dell'affinità fra i valori ottenuti e la legge di diretta proporzionalità, per fare ciò si utilizza il test del chi quadrato, procedura lecita data la trascurabilità delle incertezze sulle ascisse. Avendo 13 gradi di libertà e avendo calcolato un solo parametro per la distribuzione teorica, il valore della speranza matematica del χ^2 è 12. Si esegue il test sia per il b_0 ottenuto con il metodo dei minimi quadrati sia per il valore di k_w calcolato con la media pesata:

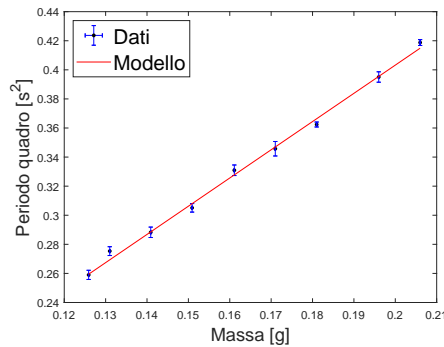
$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \frac{(y_i - b \cdot P_i)^2}{(\sigma_{y_i})^2} \quad (6)$$

Per $b = b_0$ il $\chi_{\text{oss}}^2 = 13.83$, mentre per $b = \frac{1}{k_w}$ il $\chi_{\text{oss}}^2 = 13.84$. L'intervallo di accettazione si calcola come: $[N - \nu - \sqrt{2(N - \nu)}; N - \nu + \sqrt{2(N - \nu)}] = [7, 101; 16, 899]$, dove ν indica il numero di parametri calcolati. I valori ottenuti ricadono entrambi nell'intervallo di accettazione scelto, il test ha avuto esito positivo ciò implica che il valore di k trovato è una buona stima della costante elastica della molla e che i punti sperimentali confermano il modello teorico ipotizzato. Per completezza si riporta in appendice il grafico dei residui, ove non si notano strutture riconducibili a errori sistematici.[Figura 3]

3.2 Metodo dinamico

3.2.1 Periodi al quadrato e Regressione Lineare

Vista la difficoltà riscontrata nell'ottenere la misura del periodo, si è deciso di fare misure ripetute per ogni massa, calcolando la media aritmetica delle misure e la deviazione standard. L'incertezza è stata quindi valutata singolarmente per ogni campione dividendo lo scarto quadratico medio per la radice del numero di prove. In appendice si trova la tabella con i valori calcolati e le rispettive incertezze [Tabella 3]. Si riportano in grafico i periodi al quadrato in funzione delle masse con il modello lineare derivante dal metodo dei minimi quadrati.



Per ottenere il modello si sono fatte considerazioni puramente dimensionali, imponendo la proporzionalità fra T e m , che hanno permesso di ricavare la seguente relazione: $T = C \cdot \sqrt{m/k}$. La quale è stata integrata con il contributo all'oscillazione della massa efficace della molla, arrivando a stabilire una legge di diretta proporzionalità che ha fornito le previsioni richieste: $T^2 = \frac{C^2 \cdot m_e}{k} + \frac{C^2}{k} \cdot m_i$. I valori che sono stati ricavati dal metodo dei minimi quadrati hanno permesso una stima della massa efficace, della costante elastica della molla e delle rispettive incertezze.

$$k_{\text{din}} = 21,1 Nm \quad \sigma_{k_{\text{din}}} = 0,2 Nm \quad m_e = 13,3 \cdot 10^{-3} kg \quad \sigma_{m_e} = 1 \cdot 10^{-3} kg \quad (7)$$

3.2.2 Test del χ^2

Anche in questo caso, vista la trascurabilità dell'incertezza sulla massa, si è potuto calcolare il χ^2 con un valore atteso di 7 corrispondente a N-2 gradi di libertà, avendo calcolato due parametri. L'intervallo di confidenza aperto è stato calcolato come per il metodo statico, il risultato del test è:

$$\chi_{\text{oss}}^2 = 19,43 \quad \text{intervallo} = [3,258; 10,742] \quad (8)$$

Il test del χ^2 è negativo i dati raccolti non seguono le previsioni teoriche, il k calcolato non è attendibile così come il valore della massa efficace, affetta per giunta da un'incertezza troppo alta perché il dato abbia significato. Per completezza è stato riportato il grafico dei residui in appendice.[Figura 4]

4 Conclusioni

Il metodo statico di misura ha confermato le previsioni teoriche, si è potuta osservare con sufficiente approssimazione la dipendenza lineare delle grandezze studiate e ha fornito una buona stima della costante elastica della molla. Il metodo dinamico invece non ha

prodotto risultati attendibili, il test del chi quadrato ha generato un valore superiore alle aspettative, il modello non collima con i dati raccolti. Questo risultato può essere imputabile al comportamento non ideale della molla che ha subito la deformazione, che ha probabilmente dissipato energia in oscillazioni non verticali con conseguente perdita della validità del modello scelto, confrontare quindi il valore di k con quello del metodo statico non ha significato, nonostante i due non si discostino molto fra loro.

A Appendice

z_i , per massa=210 g [$10^{-2} \dot{m}$]	z_i , per massa=80,4 g [$10^{-2} \cdot m$]	massa [g] [$\pm 3 \cdot 10^{-5}$]	z_i [cm] [$\pm 2 \cdot 10^{-4}$]	y_i [cm] [$\pm 3 \cdot 10^{-4}$]
32,60	38,60	80,40	38,80	1,50
32,70	38,55	90,3	38,00	2,00
32,60	38,60	100,4	37,50	2,50
32,70	38,50	110,3	37,10	2,90
32,60	38,60	120,4	36,60	3,40
32,60	38,65	130,5	36,10	3,90
32,65	38,50	140,8	35,60	4,40
32,70	38,60	150,7	35,15	4,85
32,60	38,55	160,7	34,60	5,40
32,70	38,60	170,9	34,10	5,90
32,70	38,50	180,9	33,60	6,40
32,60	38,50	191,1	33,10	6,90
		201,0	32,65	7,35
σ_{ErrCas} $1,44 \cdot 10^{-4} \text{m}$	σ_{ErrCas} $1,52 \cdot 10^{-4} \text{m}$			

Tabella 1

Tabella 2

Massa (g)	Media tempi (s)	Scarto quad. medio (s)	Periodi (s)	$\sigma_{Periodi} (s \cdot 10^{-3})$
125,9 $\pm 0,03$	2,552	0,015	0,510	1
131,0 $\pm 0,03$	2,606	0,007	0,521	0,7
140,9 $\pm 0,03$	2,685	0,016	0,537	1
150,9 $\pm 0,03$	2,762	0,013	0,552	1
161,1 $\pm 0,03$	2,866	0,010	0,573	0,8
171,0 $\pm 0,03$	2,929	0,022	0,586	1
181,0 $\pm 0,03$	3,010	0,007	0,602	0,7
196,0 $\pm 0,03$	3,135	0,012	0,627	0,9
206,0 $\pm 0,03$	3,212	0,013	0,642	0,9

Tabella 3

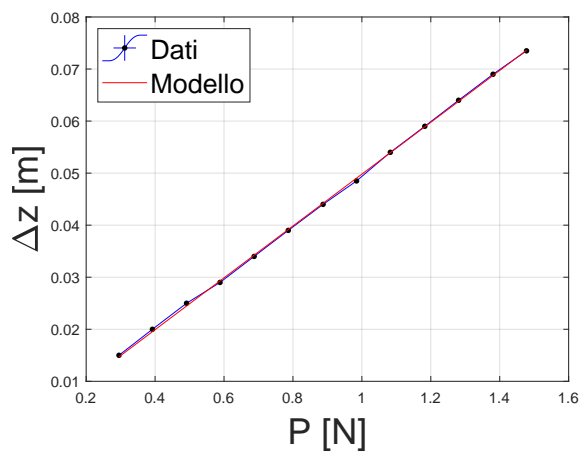


Figura 1

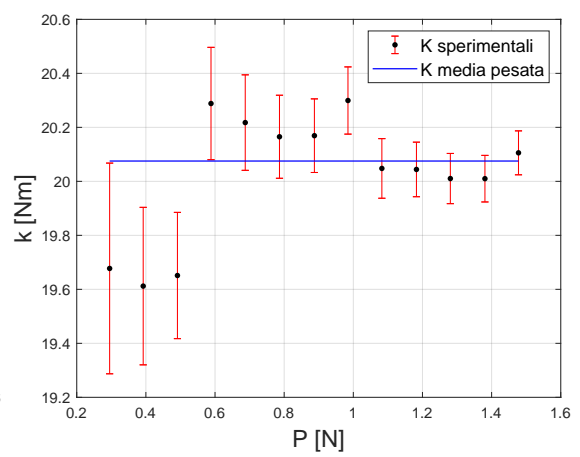


Figura 2

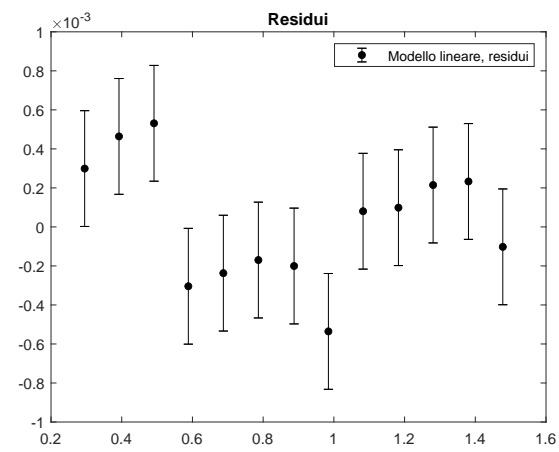


Figura 3

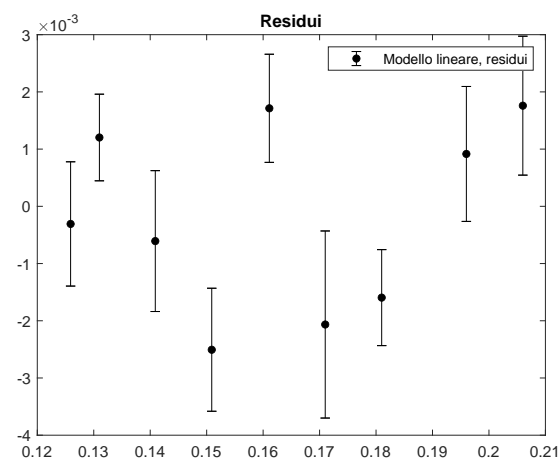


Figura 4