Satulapisteapproksimaatiosta

Juuso Kaarela

28. huhtikuuta 2025

1 Laplacen menetelmä

Satulapisteapproksimaation erikoistapaus reaaliselle integraalille on nk. Laplacen menetelmä, jossa approksimoidaan muotoa

$$I(x) = \int_a^b f(t)e^{xg(t)}\,\mathrm{d}t, \quad x \to \infty \tag{1.1}$$

olevien integraalien asymptoottista käytöstä ($x \to \infty$). Integraalissa $I(x)$ funktiolla $g(t)$ on maksimikohta t_0 välillä $[a, b]$. Approksimaatio perustuu ideaan, että integraalin suurin kontribuutio tulee $g(t)$:n maksimikohdassa $t = t_0$, sillä tällöin eksponenttitermi on suurimmillaan. Tällöin koko integraalia voidaan approksimoida tarkastelemalla ainoastaan integroitavan funktion arvoa mielivaltaisen lähellä pistettä $t = t_0$.

1.1 Maksimi välin päätepisteessä

Jos maksimikohta t_0 on välin alkupisteessä, eli pätee $t_0 = a$, on $g(t)$:n oltava vähenevä funktio pisteessä t_0. Pätee siis $g'(t_0) < 0$. Jos maksimikohta t_0 puolestaan on välin loppupisteessä $t_0 = b$, on $g(t)$:n oltava kasvava pisteessä t_0, jolloin pätee $g'(t_0) > 0$. $g'(t_0)$ ei siis ole kummassakaan tapauksessa nolla, jolloin $g(t)$:tä voidaan approksimoida pisteen t_0 ympäristössä ensimmäisen asteen taylorin polynomilla:

$$g(t) \approx g(t_0) + (t - t_0)g'(t_0) \tag{1.2}$$

Tarkastellaan ensin tilannetta, jossa $t_0 = a$. Integraalin suurin kontribuutio tulee tällöin pisteen a ympäristöstä, eli väliltä $[a, a+\varepsilon]$, jossa $\varepsilon > 0$ on jokin mielivaltaisen lähellä pistettä a oleva luku. Sijoittamalla nämä integroimisrajat sekä $g(t)$:n approksimaatio (1.2) integraaliin (1.1), saadaan integraalille approksimaatio:

$$I(x) \sim \int_a^{a+\varepsilon} f(a)e^{x\left(g(a)+(t-a)g'(a)\right)}\,\mathrm{d}t \tag{1.3}$$

$$I(x) \sim \int_a^{a+\varepsilon} f(a)e^{xg(a)}e^{x(t-a)g'(a)}\,\mathrm{d}t \tag{1.4}$$

Otetaan integraalin suhteen vakiot $f(a)$ sekä $e^{xg(a)}$ ulos integraalista:

$$I(x) \sim f(a)e^{xg(a)} \int_a^{a+\varepsilon} e^{x(t-a)g'(a)}\,\mathrm{d}t \tag{1.5}$$

Määritetään integraali. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(e^{x(t-a)g'(a)}\right) = xg'(a)e^{x(t-a)g'(a)}$, jolloin saadaan:

$$I(x) \sim f(a)e^{xg(a)}\left[\frac{1}{xg'(a)}\int_a^{a+\varepsilon} xg'(a)e^{x(t-a)g'(a)}\,\mathrm{d}t\right] \tag{1.6}$$

$$I(x) \sim \frac{f(a)e^{xg(a)}}{xg'(a)}\left[e^{x(t-a)g'(a)}\right]_a^{a+\varepsilon} \tag{1.7}$$

$$I(x) \sim \frac{f(a)e^{xg(a)}}{xg'(a)}\left[e^{x(a+\varepsilon-a)g'(a)} - e^{x(a-a)g'(a)}\right] \tag{1.8}$$

$$I(x) \sim \frac{f(a)e^{xg(a)}}{xg'(a)}\left[e^{x\varepsilon g'(a)} - 1\right] \tag{1.9}$$

Kun $x \to \infty$, pienenee termi $e^{x\varepsilon g'(a)}$ eksponentiaalisesti, sillä $g'(a) < 0$. Saadaan:

$$I(x) \sim \frac{f(a)e^{xg(a)}}{xg'(a)}[0-1] \tag{1.10}$$

$$\boxed{I(x) \sim -\frac{f(a)e^{xg(a)}}{xg'(a)}} \tag{1.11}$$

Tarkastellaan seuraavaksi tilannetta, jossa $t_0 = b$. Integraalin suurin kontribuutio tulee tällöin pisteen b ympäristöstä, eli väliltä $[b-\varepsilon, b]$, jossa jälleen $\varepsilon > 0$ on mielivaltaisen lähellä b:tä. Vastaavasti kuin aiemmin integraalille saadaan approksimaatio:

$$I(x) \sim \int_{b-\varepsilon}^{b} f(b)e^{x\left(g(b)+(t-b)g'(b)\right)}\,\mathrm{d}t \tag{1.12}$$

$$I(x) \sim \int_{b-\varepsilon}^{b} f(b)e^{xg(b)}e^{x(t-b)g'(b)}\,\mathrm{d}t \tag{1.13}$$

Otetaan integraalin suhteen vakiot $f(b)$ sekä $e^{xg(b)}$ ulos integraalista:

$$I(x) \sim f(b)e^{xg(b)}\int_{b-\varepsilon}^{b} e^{x(t-b)g'(b)}\,\mathrm{d}t \tag{1.14}$$

Määritetään integraali. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(e^{x(t-b)g'(b)}\right) = xg'(b)e^{x(t-b)g'(b)}$, jolloin saadaan:

$$I(x) \sim f(b)e^{xg(b)}\left[\frac{1}{xg'(b)}\int_{b-\varepsilon}^{b} xg'(b)e^{x(t-b)g'(b)}\,\mathrm{d}t\right] \tag{1.15}$$

$$I(x) \sim \frac{f(b)e^{xg(b)}}{xg'(b)}\left[e^{x(t-b)g'(b)}\right]_{b-\varepsilon}^{b} \tag{1.16}$$

$$I(x) \sim \frac{f(b)e^{xg(b)}}{xg'(b)}\left[e^{x(b-b)g'(b)} - e^{x(b-\varepsilon-b)g'(b)}\right] \tag{1.17}$$

$$I(x) \sim \frac{f(b)e^{xg(b)}}{xg'(b)}\left[1 - e^{-x\varepsilon g'(b)}\right] \tag{1.18}$$

Kun $x \to \infty$, pienenee termi $e^{-x\varepsilon g'(b)}$ eksponentiaalisesti, sillä $g'(b) > 0$. Saadaan:

$$I(x) \sim \frac{f(b)e^{xg(b)}}{xg'(b)}[1-0] \tag{1.19}$$

$$\boxed{I(x) \sim \frac{f(b)e^{xg(b)}}{xg'(b)}} \tag{1.20}$$

1.2 Maksimi välin keskellä

Jos maksimikohta t_0 on välin keskellä, pätee $g'(t_0) = 0$. Vastaavasti toiselle derivaatalle pätee maksimikohdassa $g''(t_0) < 0$. Tällöin $g(t)$:tä approksimoitaessa Taylorin polynomilla, on mentävä toisen asteen termiin asti, jotta approksimaatio olisi riittävän tarkka:

$$g(t) \approx g(t_0) + \cancel{(t-t_0)g'(t_0)} + \frac{1}{2}(t-t_0)^2 g''(t_0) \tag{1.21}$$

$$g(t) \approx g(t_0) + \frac{1}{2}(t-t_0)^2 g''(t_0) \tag{1.22}$$

Koska maksimikohta t_0 on välin $[a, b]$ keskellä, tulee integraalin suurin kontribuutio pisteen t_0 ympäristöstä, eli väliltä $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$, jossa $\varepsilon > 0$ on mielivaltaisen lähellä muuttujaa t_0. Sijoitetaan integroimisrajat ja $g(t)$:n approksimaatio (1.22) integraaliin (1.1), jolloin integraalille saadaan approksimaatio:

$$I(x) \sim \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} f(t_0)e^{x\left(g(t_0)+\frac{1}{2}(t-t_0)^2 g''(t_0)\right)} \,\mathrm{d}t \tag{1.23}$$

$$I(x) \sim \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} f(t_0)e^{xg(t_0)}e^{x\frac{1}{2}(t-t_0)^2 g''(t_0)} \,\mathrm{d}t \tag{1.24}$$

Otetaan integraalin suhteen vakiot $f(t_0)$ sekä $e^{xg(t_0)}$ ulos integraalista:

$$I(x) \sim f(t_0)e^{xg(t_0)} \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} e^{x\frac{1}{2}(t-t_0)^2 g''(t_0)} \,\mathrm{d}t \tag{1.25}$$

Tehdään muuttujanvaihdos $-s^2 = x\frac{1}{2}(t-t_0)^2 g''(t_0) \iff s = \sqrt{-x\frac{1}{2}(t-t_0)^2 g''(t_0)} = (t-t_0)\sqrt{-\frac{xg''(t_0)}{2}}$. Tällöin $\mathrm{d}s = \sqrt{-\frac{xg''(t_0)}{2}}\,\mathrm{d}t \iff \mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{-\frac{xg''(t_0)}{2}}}\,\mathrm{d}s = \sqrt{-\frac{2}{xg''(t_0)}}\,\mathrm{d}s$. Uudet integroimisrajat: Kun $t = t_0 - \varepsilon$, pätee $s = ((t_0 - \varepsilon) - t_0)\sqrt{-\frac{xg''(t_0)}{2}} = -\varepsilon\sqrt{-\frac{xg''(t_0)}{2}}$. Ja vastaavasti kun $t = t_0 + \varepsilon$, pätee $s = ((t_0 + \varepsilon) - t_0)\sqrt{-\frac{xg''(t_0)}{2}} = \varepsilon\sqrt{-\frac{xg''(t_0)}{2}}$. Integraali saadaan nyt siis muotoon:

$$I(x) \sim f(t_0)e^{xg(t_0)} \int_{-\varepsilon\sqrt{-xg''(t_0)/2}}^{\varepsilon\sqrt{-xg''(t_0)/2}} e^{-s^2}\sqrt{-\frac{2}{xg''(t_0)}} \,\mathrm{d}s \tag{1.26}$$

Otetaan vakio $\sqrt{-\frac{2}{xg''(t_0)}}$ integraalin ulkopuolelle:

$$I(x) \sim f(t_0)e^{xg(t_0)}\sqrt{-\frac{2}{xg''(t_0)}} \int_{-\varepsilon\sqrt{-xg''(t_0)/2}}^{\varepsilon\sqrt{-xg''(t_0)/2}} e^{-s^2} \,\mathrm{d}s \tag{1.27}$$

Integroimisrajat voidaan viedä äärettömyyteen, sillä funktio e^{-s^2} lähestyy eksponentiaalisesti nollaa kun $s \to \infty$, jolloin rajojen muuttaminen tuo integraaliin eksponentiaalisen pienen virheen:

$$I(x) \sim \frac{\sqrt{2}f(t_0)e^{xg(t_0)}}{\sqrt{-xg''(t_0)}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2}\,\mathrm{d}s \tag{1.28}$$

Funktio e^{-s^2} on parillinen, jolloin integroimisrajat voidaan muuttaa $[0,\infty[$ kertomalla koko integraali kahdella:

$$I(x) \sim \frac{\sqrt{2}f(t_0)e^{xg(t_0)}}{\sqrt{-xg''(t_0)}} 2\int_{0}^{\infty} e^{-s^2}\,\mathrm{d}s \tag{1.29}$$

Tehdään muuttujanvaihdos $u = s^2 \iff s = \sqrt{u}$, jolloin $\mathrm{d}u = 2s\,\mathrm{d}s \iff \mathrm{d}s = \frac{1}{2s}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}u^{-1/2}\,\mathrm{d}u$. Integroimisrajat eivät muutu, sillä kyseessä on epäoleellinen integraali, jolloin s:n mennessä äärettömyyteen, menee $u = s^2$ myös äärettömyyteen:

$$I(x) \sim \frac{\sqrt{2}f(t_0)e^{xg(t_0)}}{\sqrt{-xg''(t_0)}} 2\int_{0}^{\infty} \frac{1}{2}u^{-1/2}e^{-u}\,\mathrm{d}u \tag{1.30}$$

$$I(x) \sim \frac{\sqrt{2}f(t_0)e^{xg(t_0)}}{\sqrt{-xg''(t_0)}} \int_{0}^{\infty} u^{1/2-1}e^{-u}\,\mathrm{d}u \tag{1.31}$$

Tunnistetaan Eulerin gammafunktion määritelmän nojalla, että $\int_0^\infty u^{1/2-1}e^{-u}\,\mathrm{d}u = \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$. Lopulliseksi approksimaatioksi saadaan siis:

$$I(x) \sim \frac{\sqrt{2\pi}f(t_0)e^{xg(t_0)}}{\sqrt{-xg''(t_0)}} \tag{1.32}$$

$$\boxed{I(x) \sim f(t_0)e^{xg(t_0)}\sqrt{\frac{2\pi}{-xg''(t_0)}}} \tag{1.33}$$

2 Satulapisteapproksimaatio

Satulapisteapproksimaatiolla approksimoitava integraali voi yleisessä tapauksessa olla kompleksinen, jolloin