Johdoksia fysiikan matematiikasta

Juuso Kaarela

Sisällys

1 Differentiaalilaskenta **4**
1.1 Derivaattoja 4
1.2 Differentiaalioperaattorien kaavoja 4
1.2.1 Gradientti 4
1.2.2 Divergenssi 6
1.2.3 Roottori 11
1.2.4 Laplacen operaattori 15
1.2.5 Laplacen vektorioperaattori 17
1.2.6 Suunnattu derivaatta 17

2 Differentiaaliyhtälötietoa **18**
2.1 Ominaisuudet 18
2.1.1 Kertaluku 18
2.1.2 Homogeenisyys 18
2.1.3 Autonomisuus 18
2.1.4 Separoituvuus 18
2.2 Lineaarisuus, semilineaarisuus, kvasilineaarisuus, ja epälineaarisuus 18
2.2.1 Lineaariset differentiaaliyhtälöt 18
2.2.2 Semilineaariset differentiaaliyhtälöt 19
2.2.3 Kvasilineaariset differentiaaliyhtälöt 19
2.2.4 Epälineaariset differentiaaliyhtälöt 20
2.3 Parabolisuus, elliptisyys ja hyperbolisuus 21
2.4 Erikoispisteet 21
2.4.1 Tavallinen/säännöllinen piste (ordinary point) 21
2.4.2 Heikko erikoispiste (regular/inessential singularity) 21
2.4.3 Vahva erikoispiste (irregurlar/essential singularity) 22
2.4.4 Piste äärettömydessä 22
2.5 Reunaehdot ja alkuarvot 22
2.5.1 Neumann-reunaehdot 22
2.5.2 Dirichlet-reunaehdot 22
2.6 Differentiaalioperaattoreita 22

3 Tavalliset differentiaaliyhtälöt **24**
3.1 1. kl:n tavalliset differentiaaliyhtälöt 24
3.1.1 Derivaattaoperaattorin ominaisarvohtälö: 24
3.1.2 Homogeenosyysoperaattorin ominaisarvoyhtälö: 24
3.1.3 Lineaarinen vakiokertoiminen homogeeninen: 25
3.1.4 Lineaarinen vakiokertoiminen epähomogeeninen: 25
3.1.5 Lineaarinen homogeeninen: 26
3.1.6 Lineaarinen epähomogeeninen: 26
3.2 Notaationvaihdos: 27

3.3 2. kl:n tavalliset differentiaaliyhtälöt . . . 27
3.3.1 Harmoninen yhtälö (toisen kertaluvun derivaatan ominaisarvoyhtälö) . . . 28
3.3.2 Lineaarinen vakiokertoiminen homogeeninen . . . 30
3.3.3 Heiluriyhtälö: . . . 31
3.3.4 Cauchyn–Eulerin 2. kertaluvun yhtälö . . . 31
3.3.5 Besselin yhtälö . . . 33
3.3.6 Muokattu Besselin yhtälö . . . 37
3.3.7 Besselin pallofunktiot . . . 37
3.3.8 Legendren yhtälö . . . 40
3.3.9 Legendren liittoyhtälö . . . 51
3.3.10 Palloharmoniset funktiot . . . 56
3.3.11 Laguerren yhtälö . . . 58
3.3.12 Laguerren liittoyhtälö . . . 62
3.3.13 Hermiten yhtälö . . . 66
3.3.14 Hypergeometrinen yhtälö . . . 69
3.3.15 Konfluentti hypergeometrinen yhtälö . . . 72
3.3.16 Sturmin–Liouville'n ongelmat . . . 75

4 Osittaisdifferentiaaliyhtälöt 76
4.1 1. kl:n osittaisdifferentiaaliyhtälöt . . . 76
4.1.1 Lineaarinen vakiokertoiminen homogeeninen: . . . 76
4.1.2 Jatkuvuusyhtälö: . . . 76
4.1.3 Burgersin yhtälö (viskositeetti nolla): . . . 76
4.2 2. kl:n osittaisdifferentiaaliyhtälöt . . . 76
4.2.1 Laplacen yhtälö: . . . 76
4.2.2 Poissonin yhtälö: . . . 77
4.2.3 Helmholtzin yhtälö: . . . 77
4.2.4 Lämpöyhtälö: . . . 77
4.2.5 Aaltoyhtälö: . . . 77
4.2.6 Ensimmäisen lajin Lagrange'n yhtälö: . . . 78
4.2.7 Eulerin–Lagrange'n yhtälö (Toisen lajin Lagrange'n yhtälö): . . . 78
4.2.8 Schrödingerin yhtälö: . . . 78
4.2.9 Kleinin–Gordonin yhtälö: . . . 78
4.2.10 Burgersin yhtälö (viskositeetti ei nolla): . . . 78
4.2.11 Navierin–Stokesin yhtälöt: . . . 78

5 Vektoriavaruudet ja funktiot vektoreina 79
5.1 Vektoriavaruuden määrittely . . . 79
5.2 Tärkeitä vektoriavaruuksien ominaisuuksia . . . 80
5.3 Lisää rakennetta: Sisätulot . . . 80
5.4 Lisää rakennetta: Normi . . . 81
5.5 Lisää rakennetta: Metriikka . . . 82
5.6 Lisää rakennetta: Topologia . . . 83
5.7 Lisää rakennetta: Separoituvuus . . . 83
5.8 Funktioavaruudet . . . 83
5.9 Jonoavaruudet . . . 85
5.10 Lineaariset operaattorit . . . 85
5.11 Duaaliavaruudet . . . 85

6 Funktionaaleista, distribuutioista ja funktionaalianalyysistä 87
6.1 Funktionaalit . . . 87
6.1.1 Ensimmäinen variaatio ja EL-yhtälö . . . 88
6.1.2 Beltramin identiteetti . . . 90
6.2 Diracin deltafunktion määritelmä mittateorian avulla . . . 91
6.3 Distribuutiot . . . 92
6.3.1 Moni-indeksit . . . 93
6.3.2 Heikko derivaatta . . . 93
6.3.3 Distribuutiot ja testifunktiot ovat dualismeja . . . 93

7 Approksimaatiot, kasvunopeus ja asymptotiikka 94
7.1 Erilaisia approksimaatioita . . . 94
7.1.1 Binomiapproksimaatio . . . 94
7.1.2 Taylorin polynomit . . . 94
7.2 Funktioiden vertailu . . . 94
7.2.1 O- ja o-notaatio . . . 94
7.2.2 $\ll$, $\lll$, $\gg$ ja $\ggg$ . . . 95
7.2.3 $\lessapprox$, $\lesssim$, $\gtrapprox$ ja $\gtrsim$ . . . 95
7.3 Asymptotiikka . . . 96
7.3.1 Asymptoottisia approksimaatioita . . . 96
7.3.2 Asymptoottisia sarjakehitelmiä . . . 96

1 Differentiaalilaskenta

1.1 Derivaattoja

1.2 Differentiaalioperaattorien kaavoja

1.2.1 Gradientti

Funktion $f(\mathbf{r})$ Gradientti $\nabla f(\mathbf{r})$ on määritelmän mukaan suure, joka yhdistää infinitesimaalisen muutoksen $\mathbf{r}$:ssä tätä vastaavaan infinitesimaaliseen muutokseen f:ssä. Toisin sanoen:

$$\mathrm{d}f = \nabla f \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} \tag{1.1}$$

Gradientti on siis yleistys yksiulotteisesta derivaasta D, jolle pätee:

$$\mathrm{d}f = D\,\mathrm{d}x \tag{1.2}$$

Tai tutummin:

$$D = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \tag{1.3}$$

Gradientille tulisi nyt löytää tulosta (3) vastaava kaava, jotta se voitaisiin määrittää. Tarkastellaan tilannetta eri koordinaatistoissa:

1. **Karteesinen koordinaatisto**

   Karteesisessa koordinaatistossa pätee $f = f(x, y, z)$. f:n differentiaali $\mathrm{d}f$ on tällöin summa:

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}\,\mathrm{d}z \tag{1.4}$$

   Eli f:n muutos riippuu kunkin muuttujan aiheuttamasta muutoksesta f:ään. Mielivaltainen muuttujien inifinitesimaalista muutosta kuvaava vektori $\mathrm{d}\mathbf{r}$ on tällöin:

$$\mathrm{d}\mathbf{r} = \mathrm{d}x\hat{\mathbf{x}} + \mathrm{d}y\hat{\mathbf{y}} + \mathrm{d}z\hat{\mathbf{z}} \tag{1.5}$$

   Sijoitetaan (4) ja (5) yhtälöön (1):

$$\frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}\,\mathrm{d}z = \nabla f \cdot \big(\,\mathrm{d}x\hat{\mathbf{x}} + \mathrm{d}y\hat{\mathbf{y}} + \mathrm{d}z\hat{\mathbf{z}}\big) \tag{1.6}$$

   Merkitään ∇f:n komponentteja $(\nabla f)_i$, jossa $i \in \{x, y, z\}$, jolloin saadaan:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}\,\mathrm{d}z = \Big((\nabla f)_x\hat{\mathbf{x}} + (\nabla f)_y\hat{\mathbf{y}} + (\nabla f)_z\hat{\mathbf{z}}\Big) \cdot (\mathrm{d}x\hat{\mathbf{x}} + \mathrm{d}y\hat{\mathbf{y}} + \mathrm{d}z\hat{\mathbf{z}}) \tag{1.7}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}\,\mathrm{d}z = (\nabla f)_x\,\mathrm{d}x + (\nabla f)_y\,\mathrm{d}y + (\nabla f)_z\,\mathrm{d}z \tag{1.8}$$

   Vertailemalla yhtälön puolia voidaan tehdä identifikaatiot:

$$(\nabla f)_x = \frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{ja} \quad (\nabla f)_y = \frac{\partial f}{\partial y} \quad \text{ja} \quad (\nabla f)_z = \frac{\partial f}{\partial z} \tag{1.9}$$

   Tästä seuraa, että karteesisen koordinaatiston vektorina ∇f on muotoa:

$$\boxed{\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}} \tag{1.10}$$

2. **Sylinterikoordinaatisto**

   Nyt $f = f(\rho, \varphi, z)$, jolloin pätee:

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial \rho}\,\mathrm{d}\rho + \frac{\partial f}{\partial \varphi}\,\mathrm{d}\varphi + \frac{\partial f}{\partial z}\,\mathrm{d}z \tag{1.11}$$

   Siirtymävektori $\mathrm{d}\mathbf{r}$ on nyt:

$$\mathrm{d}\mathbf{r} = \mathrm{d}\rho\hat{\boldsymbol{\rho}} + \rho\,\mathrm{d}\varphi\hat{\boldsymbol{\varphi}} + \mathrm{d}z\hat{\mathbf{z}} \tag{1.12}$$

   Toisessa termissä on ρ-riippuvuus, sillä kulmalla φ kääntäminen aiheuttaa sitä suuremman muutoksen sijaintiin mitä kauempana origosta ollaan. Jälleen sijoittamalla (11) ja (12) yhtälöön (1) ja laskemalla pistetulo auki saadaan:

$$\frac{\partial f}{\partial \rho}\,\mathrm{d}\rho + \frac{\partial f}{\partial \varphi}\,\mathrm{d}\varphi + \frac{\partial f}{\partial z}\,\mathrm{d}z = (\nabla f)_\rho\,\mathrm{d}\rho + (\nabla f)_\varphi \rho\,\mathrm{d}\varphi + (\nabla f)_z\,\mathrm{d}z \tag{1.13}$$

   Tehdään seuraavat identifikaatiot:

$$(\nabla f)_\rho = \frac{\partial f}{\partial \rho} \quad \text{ja} \quad (\nabla f)_\varphi \rho = \frac{\partial f}{\partial \varphi} \iff (\nabla f)_\varphi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \varphi} \quad \text{ja} \quad (\nabla f)_z = \frac{\partial f}{\partial z} \tag{1.14}$$

   Sylinterikoordinaatiston vektorina ∇f on siis muotoa:

$$\boxed{\nabla f = \frac{\partial f}{\partial \rho}\hat{\boldsymbol{\rho}} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\hat{\boldsymbol{\varphi}} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}} \tag{1.15}$$

3. **Pallokoordinaatisto**

   Nyt $f = f(r, \theta, \varphi)$, jolloin pätee:

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial r}\,\mathrm{d}r + \frac{\partial f}{\partial \theta}\,\mathrm{d}\theta + \frac{\partial f}{\partial \varphi}\,\mathrm{d}\varphi \tag{1.16}$$

   Siirtymävektori $\mathrm{d}\mathbf{r}$ on nyt:

$$\mathrm{d}\mathbf{r} = \mathrm{d}r\hat{\mathbf{r}} + r\,\mathrm{d}\theta\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi\hat{\boldsymbol{\varphi}} \tag{1.17}$$

   Vastaavasti kuin sylinterikoordinaatistossa, johtuu toisen termin r-riippuvuus siitä, että kauempana origosta kulmalla θ kääntäminen saa aikaiseksi suuremman paikan muutoksen. Kerroin $r\sin\theta$ viimeisessä termissä johtuu samasta syystä, mutta kulmalla φ kääntämiseen vaikuttaa ainoastaan r:n φ-suuntainen komponentti, joka on $r\sin\theta$. Sijoittamalla (16) ja (17) yhtälöön (1) ja laskemalla pistetulo auki saadaan:

$$\frac{\partial f}{\partial r}\,\mathrm{d}r + \frac{\partial f}{\partial \theta}\,\mathrm{d}\theta + \frac{\partial f}{\partial \varphi}\,\mathrm{d}\varphi = (\nabla f)_r\,\mathrm{d}r + (\nabla f)_\theta r\,\mathrm{d}\theta + (\nabla f)_\varphi r\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi \tag{1.18}$$

   Tehdään identifikaatiot:

$$(\nabla f)_r = \frac{\partial f}{\partial r} \;\; \text{ja} \;\; (\nabla f)_\theta r = \frac{\partial f}{\partial \theta} \iff (\nabla f)_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta} \;\; \text{ja} \;\; (\nabla f)_\varphi r\sin\theta = \frac{\partial f}{\partial \varphi} \iff (\nabla f)_\varphi = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi} \tag{1.19}$$

Pallokoordinaatiston vektorina ∇f on siis muotoa:

$$\boxed{\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\hat{\boldsymbol{\varphi}}} \tag{1.20}$$

1.2.2 Divergenssi

Vektorifunktion $\mathbf{F}$ Divergenssiä merkitään usein $\nabla \cdot \mathbf{F}$, jossa ikään kuin otetaan pistetulo gradientin (esim. karteesisessa kooridaatistossa gradienttivektori on $\nabla = (\partial_x \hat{\mathbf{x}} + \partial_y \hat{\mathbf{y}} + \partial_z \hat{\mathbf{z}}))$ ja vektorin välillä. Tämä on periaatteessa notaation väärinkäyttöä, sillä ei ole takeita siitä, että derivaattaoperaattori käyttäytyy pistetulon kanssa samoin kuin tavallinen muuttuja, ja osoittautuukin että notaation $\nabla \cdot \mathbf{F}$ tulkitseminen naiivisti pistetuloksi toimii vain karteesisessa koordinaatistossa. Sylinteri- ja pallokoordinaatistossa asia ei kuitenkaan ole yhtä yksinkertainen ja divergenssin määrittämisessä tulee olla tarkkana. Alla on esitetty divergenssin johtaminen kussakin koordinaatistossa. Jokaisessa johdoksessa on varovaisia divergenssin määritelmän kanssa, jotta oikea tulos saataisiin ulos.

1. **Karteesinen koordinaatisto:**

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}\right) \cdot (F_x \hat{\mathbf{x}} + F_y \hat{\mathbf{y}} + F_z \hat{\mathbf{z}}) \tag{1.21}$$

Naiivisti pistetulon määritelmää soveltamalla ja tulo $\frac{\partial}{\partial x}a$ tulkitsemalla derivoinniksi $\frac{\partial a}{\partial x}$ saataisiin:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \tag{1.22}$$

Tämä osoittautuu oikeaksi tulokseksi, mutta varmistetaan se vielä tekemällä asiat hieman varovaisemmin. Merkitään aluksi $F_x \hat{\mathbf{x}} + F_y \hat{\mathbf{y}} + F_z \hat{\mathbf{z}} = \mathbf{F}$:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}\right) \cdot \mathbf{F} \tag{1.23}$$

Pistetulo on distributiivinen, jolloin se voidaan ottaa kustakin termistä erikseen:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{F} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{F} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{\mathbf{z}} \cdot \mathbf{F} \tag{1.24}$$

Pistetulo on lineaarinen, jolloin derivaatta voidaan ottaa pistetulon sisään. Jälleen tulkitaan tulo $\frac{\partial}{\partial x}a$ derivoinniksi $\frac{\partial a}{\partial x}$:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \hat{\mathbf{x}} \cdot \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}} \cdot \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}} \cdot \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial z} \tag{1.25}$$

Sijoitetaan $\mathbf{F} = F_x \hat{\mathbf{x}} + F_y \hat{\mathbf{y}} + F_z \hat{\mathbf{z}}$:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \hat{\mathbf{x}} \cdot \frac{\partial}{\partial x}(F_x \hat{\mathbf{x}} + F_y \hat{\mathbf{y}} + F_z \hat{\mathbf{z}}) \tag{1.26}$$

$$+ \hat{\mathbf{y}} \cdot \frac{\partial}{\partial y}(F_x \hat{\mathbf{x}} + F_y \hat{\mathbf{y}} + F_z \hat{\mathbf{z}}) \tag{1.27}$$

$$+ \hat{\mathbf{z}} \cdot \frac{\partial}{\partial z}(F_x \hat{\mathbf{x}} + F_y \hat{\mathbf{y}} + F_z \hat{\mathbf{z}}) \tag{1.28}$$

Derivaatta voidaan ottaa kustakin termistä erikseen:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \hat{\mathbf{x}} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x}(F_x \hat{\mathbf{x}}) + \frac{\partial}{\partial x}(F_y \hat{\mathbf{y}}) + \frac{\partial}{\partial x}(F_z \hat{\mathbf{z}}) \right) \tag{1.29}$$
$$+ \hat{\mathbf{y}} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial y}(F_x \hat{\mathbf{x}}) + \frac{\partial}{\partial y}(F_y \hat{\mathbf{y}}) + \frac{\partial}{\partial y}(F_z \hat{\mathbf{z}}) \right) \tag{1.30}$$
$$+ \hat{\mathbf{z}} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial z}(F_x \hat{\mathbf{x}}) + \frac{\partial}{\partial z}(F_y \hat{\mathbf{y}}) + \frac{\partial}{\partial z}(F_z \hat{\mathbf{z}}) \right) \tag{1.31}$$

Soveltamalla tulon derivointisääntöä saadaan:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \hat{\mathbf{x}} \cdot \left(\left[\frac{\partial F_x}{\partial x} \hat{\mathbf{x}} + F_x \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}}{\partial x} \right] + \left[\frac{\partial F_y}{\partial x} \hat{\mathbf{y}} + F_y \frac{\partial \hat{\mathbf{y}}}{\partial x} \right] + \left[\frac{\partial F_z}{\partial x} \hat{\mathbf{z}} + F_z \frac{\partial \hat{\mathbf{z}}}{\partial x} \right] \right) \tag{1.32}$$
$$+ \hat{\mathbf{y}} \cdot \left(\left[\frac{\partial F_x}{\partial y} \hat{\mathbf{x}} + F_x \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}}{\partial y} \right] + \left[\frac{\partial F_y}{\partial y} \hat{\mathbf{y}} + F_y \frac{\partial \hat{\mathbf{y}}}{\partial y} \right] + \left[\frac{\partial F_z}{\partial y} \hat{\mathbf{z}} + F_z \frac{\partial \hat{\mathbf{z}}}{\partial y} \right] \right) \tag{1.33}$$
$$+ \hat{\mathbf{z}} \cdot \left(\left[\frac{\partial F_x}{\partial z} \hat{\mathbf{x}} + F_x \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}}{\partial z} \right] + \left[\frac{\partial F_y}{\partial z} \hat{\mathbf{y}} + F_y \frac{\partial \hat{\mathbf{y}}}{\partial z} \right] + \left[\frac{\partial F_z}{\partial z} \hat{\mathbf{z}} + F_z \frac{\partial \hat{\mathbf{z}}}{\partial z} \right] \right) \tag{1.34}$$

Karteesisen koordinaatiston kantavektorit $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$ ja $\hat{\mathbf{z}}$ eivät muutu koskaan, jolloin mikä tahansa derivaatta $\frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial u}$, jossa $\hat{\mathbf{u}} \in \{\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}\}$ ja $u \in \{x, y, z\}$ menee nollaan. Jäljelle jää siis vain termit, joissa $\mathbf{F}$:n komponentteja derivoidaan:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \hat{\mathbf{x}} \cdot \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial F_y}{\partial x} \hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial F_z}{\partial x} \hat{\mathbf{z}} \right) \tag{1.35}$$
$$+ \hat{\mathbf{y}} \cdot \left(\frac{\partial F_x}{\partial y} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial F_y}{\partial y} \hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial F_z}{\partial y} \hat{\mathbf{z}} \right) \tag{1.36}$$
$$+ \hat{\mathbf{z}} \cdot \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial F_y}{\partial z} \hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \hat{\mathbf{z}} \right) \tag{1.37}$$

Koska yksikkövektorit ovat ortogonaalisia (kohtisuorassa suhteessa toisiinsa), tuottaa pistetulo yksikkövektorin ja mielivaltaisen vektorin (joita suluissa olevat lausekkeen ovat) välillä yksikkövektorin suuntaisen komponentin. Jäljelle jää siis vain termit, joiden yksikkövektori vastaa sulkujen ulkopuolella olevaa yksikkövektoria ja divergenssin kaavaksi saadaan kuin saadaankin:

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}} \tag{1.38}$$

2. **Sylinterikoordinaatisto:**

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \hat{\boldsymbol{\rho}} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \hat{\boldsymbol{\varphi}} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{\mathbf{z}} \right) \cdot (F_\rho \hat{\boldsymbol{\rho}} + F_\varphi \hat{\boldsymbol{\varphi}} + F_z \hat{\mathbf{z}}) \tag{1.39}$$

Naiivisti pistetulon määritelmää soveltamalla ja tulo $\frac{\partial}{\partial x} a$ tulkitsemalla derivoinniksi $\frac{\partial a}{\partial x}$ saataisiin:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \tag{1.40}$$

Tämä osoittautuu kuitenkin vääräksi, jolloin tehdään asiat vastaavasti kuin karteesisessa koordinaatistossa. Merkitään aluksi $F_\rho \hat{\boldsymbol{\rho}} + F_\varphi \hat{\boldsymbol{\varphi}} + F_z \hat{\mathbf{z}} = \mathbf{F}$:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \hat{\boldsymbol{\rho}} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \hat{\boldsymbol{\varphi}} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{\mathbf{z}} \right) \cdot \mathbf{F} \tag{1.41}$$

Samoilla periaatteilla kuin karteesisessa tapauksessa (Derivaatta pistetulon sisään, sijoitetaan $\mathbf{F}$ ja sovelletaan tulon derivaattaa), voidaan kirjoittaa yhtälöä (1.32) vastaava tulos sylinterikoordinaatistossa:

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{F} = \hat{\boldsymbol{\rho}} \cdot &\left(\left[\frac{\partial F_\rho}{\partial \rho} \hat{\boldsymbol{\rho}} + F_\rho \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\rho}}}{\partial \rho} \right] + \left[\frac{\partial F_\varphi}{\partial \rho} \hat{\boldsymbol{\varphi}} + F_\varphi \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\varphi}}}{\partial \rho} \right] + \left[\frac{\partial F_z}{\partial \rho} \hat{\mathbf{z}} + F_z \frac{\partial \hat{\mathbf{z}}}{\partial \rho} \right] \right) && (1.42) \\
+ \frac{1}{\rho} \hat{\boldsymbol{\varphi}} \cdot &\left(\left[\frac{\partial F_\rho}{\partial \varphi} \hat{\boldsymbol{\rho}} + F_\rho \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\rho}}}{\partial \varphi} \right] + \left[\frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} \hat{\boldsymbol{\varphi}} + F_\varphi \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\varphi}}}{\partial \varphi} \right] + \left[\frac{\partial F_z}{\partial \varphi} \hat{\mathbf{z}} + F_z \frac{\partial \hat{\mathbf{z}}}{\partial \varphi} \right] \right) && (1.43) \\
+ \hat{\mathbf{z}} \cdot &\left(\left[\frac{\partial F_\rho}{\partial z} \hat{\boldsymbol{\rho}} + F_\rho \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\rho}}}{\partial z} \right] + \left[\frac{\partial F_\varphi}{\partial z} \hat{\boldsymbol{\varphi}} + F_\varphi \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\varphi}}}{\partial z} \right] + \left[\frac{\partial F_z}{\partial z} \hat{\mathbf{z}} + F_z \frac{\partial \hat{\mathbf{z}}}{\partial z} \right] \right) && (1.44)
\end{aligned}$$

Sylinterikoordinaatiston kantavektorit $\hat{\boldsymbol{\rho}}$ ja $\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ eivät ole samalla tavalla muuttumattomia kuin karteesisen koordinaatiston kantavektorit, sillä niiden suunta riippuu sen objektin, jonka paikkaa ne kuvaavat, paikasta. Tämä johtuu siitä, että $\hat{\rho}$:n on osoitettava aina radiaalisesti poispäin origosta, jolloin jos kappaleen kulma muuttuu, tulee $\hat{\boldsymbol{\rho}}$:n kääntyä kappaleen mukana. Vastaava logiikka pätee $\hat{\boldsymbol{\varphi}}$-vektoriin, sillä sen on pysyttävä kokoajan ortogonaalisena $\hat{\boldsymbol{\rho}}$-vektorin kanssa. Kantavektori $\hat{\mathbf{z}}$ käyttäytyy edelleen samalla tavalla kuin aiemmin, sillä vaikka $\hat{\boldsymbol{\rho}}$:n ja $\hat{\boldsymbol{\varphi}}$:n suunnat muuttuisivatkin, tapahtuu suunnanmuutos xy-tasossa, jolloin $\hat{\mathbf{z}}$ pysyy kokoajan lineaarisesti riippumattomana muista kantavektoreista. Voidaan siis suoraan sanoa, että derivaatat $\frac{\partial \hat{\mathbf{z}}}{\partial u}$, jossa $u \in \{\rho, \varphi, z\}$ menevät nollaan. Myös derivaatat $\frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial z}$, jossa $\hat{\mathbf{u}} \in \{\hat{\boldsymbol{\rho}}, \hat{\boldsymbol{\varphi}}, \hat{\mathbf{z}}\}$ menevät nollaan, sillä z-koordinaatin muuttuminen ei aiheuta tarvetta muuttaa $\hat{\boldsymbol{\rho}}$:n tai $\hat{\boldsymbol{\varphi}}$:n suuntaa:

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{F} = \hat{\boldsymbol{\rho}} \cdot &\left(\left[\frac{\partial F_\rho}{\partial \rho} \hat{\boldsymbol{\rho}} + F_\rho \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\rho}}}{\partial \rho} \right] + \left[\frac{\partial F_\varphi}{\partial \rho} \hat{\boldsymbol{\varphi}} + F_\varphi \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\varphi}}}{\partial \rho} \right] + \frac{\partial F_z}{\partial \rho} \hat{\mathbf{z}} \right) && (1.45) \\
+ \frac{1}{\rho} \hat{\boldsymbol{\varphi}} \cdot &\left(\left[\frac{\partial F_\rho}{\partial \varphi} \hat{\boldsymbol{\rho}} + F_\rho \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\rho}}}{\partial \varphi} \right] + \left[\frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} \hat{\boldsymbol{\varphi}} + F_\varphi \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\varphi}}}{\partial \varphi} \right] + \frac{\partial F_z}{\partial \varphi} \hat{\mathbf{z}} \right) && (1.46) \\
+ \hat{\mathbf{z}} \cdot &\left(\frac{\partial F_\rho}{\partial z} \hat{\boldsymbol{\rho}} + \frac{\partial F_\varphi}{\partial z} \hat{\boldsymbol{\varphi}} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \hat{\mathbf{z}} \right) && (1.47)
\end{aligned}$$

Tarkastellaan seuraavaksi derivointia ρ:n suhteen. Mikäli ρ, eli kappaleen radiaalinen etäisyys origosta muuttuu, ei $\hat{\boldsymbol{\rho}}$:n tai $\hat{\boldsymbol{\varphi}}$:n tarvitse muuttua kuvatakseen edelleen kappaleen paikkaa oikein. Tällöin derivaatat ρ:n suhteen katoavat. Viimeisenä ovat derivaatat φ:n suhteen. Muista poiketen nämä eivät mene nollaksi, sillä kuten aiemmin todettiin tulee $\hat{\boldsymbol{\rho}}$:n ja $\hat{\boldsymbol{\varphi}}$:n pysyä kokoajan ortogonaalisina, jolloin molempien on muututtava mikäli kulma φ muuttuu. Mikäli kulma φ muuttuu positiiviseen kiertosuuntaan, on $\hat{\boldsymbol{\rho}}$:n seurattava perässä ja käännyttävä hieman positiiviseen kiertosuuntaan. Infinitesimaalisella rajalla (muutoksen suuruus on $\mathrm{d}\varphi$) muutoksen suunta osoittaa tismalleen $\hat{\boldsymbol{\varphi}}$:n suuntaan, jolloin $\frac{\partial \hat{\boldsymbol{\rho}}}{\partial \varphi} = \hat{\boldsymbol{\varphi}}$. Pysyäkseen ortogonaalisena $\hat{\boldsymbol{\rho}}$:n kanssa on $\hat{\boldsymbol{\varphi}}$:n käännyttävä samaan suuntaan. Infinitesimaalisella rajalla muutoksen suunta osoittaa tismalleen $-\hat{\boldsymbol{\rho}}$:n suuntaan, jolloin $\frac{\partial \hat{\boldsymbol{\varphi}}}{\partial \varphi} = -\hat{\boldsymbol{\rho}}$. (Vaihtoehtoisesti tulokset voisi johtaa yksikkövektorien karteesisisia representaatioita $\hat{\boldsymbol{\rho}} = \sin\varphi\hat{\mathbf{x}} + \cos\varphi\hat{\mathbf{y}}$ sekä $\hat{\boldsymbol{\varphi}} = -\sin\varphi\hat{\mathbf{x}} + \cos\varphi\hat{\mathbf{y}}$ derivoimalla.) Saadaan:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \hat{\boldsymbol{\rho}} \cdot \left(\frac{\partial F_\rho}{\partial \rho}\hat{\boldsymbol{\rho}} + \frac{\partial F_\varphi}{\partial \rho}\hat{\boldsymbol{\varphi}} + \frac{\partial F_z}{\partial \rho}\hat{\mathbf{z}} \right) \tag{1.48}$$

$$+ \frac{1}{\rho}\hat{\boldsymbol{\varphi}} \cdot \left(\left[\frac{\partial F_\rho}{\partial \varphi}\hat{\boldsymbol{\rho}} + F_\rho \hat{\boldsymbol{\varphi}} \right] + \left[\frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi}\hat{\boldsymbol{\varphi}} - F_\varphi \hat{\boldsymbol{\rho}} \right] + \frac{\partial F_z}{\partial \varphi}\hat{\mathbf{z}} \right) \tag{1.49}$$

$$+ \hat{\mathbf{z}} \cdot \left(\frac{\partial F_\rho}{\partial z}\hat{\boldsymbol{\rho}} + \frac{\partial F_\varphi}{\partial z}\hat{\boldsymbol{\varphi}} + \frac{\partial F_z}{\partial z}\hat{\mathbf{z}} \right) \tag{1.50}$$

Kootaan komponentit yhteen rivillä (1.49):

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \hat{\boldsymbol{\rho}} \cdot \left(\frac{\partial F_\rho}{\partial \rho}\hat{\boldsymbol{\rho}} + \frac{\partial F_\varphi}{\partial \rho}\hat{\boldsymbol{\varphi}} + \frac{\partial F_z}{\partial \rho}\hat{\mathbf{z}} \right) \tag{1.51}$$

$$+ \frac{1}{\rho}\hat{\boldsymbol{\varphi}} \cdot \left(\left[\frac{\partial F_\rho}{\partial \varphi} - F_\varphi \right] \hat{\boldsymbol{\rho}} + \left[F_\rho + \frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} \right] \hat{\boldsymbol{\varphi}} + \frac{\partial F_z}{\partial \varphi}\hat{\mathbf{z}} \right) \tag{1.52}$$

$$+ \hat{\mathbf{z}} \cdot \left(\frac{\partial F_\rho}{\partial z}\hat{\boldsymbol{\rho}} + \frac{\partial F_\varphi}{\partial z}\hat{\boldsymbol{\varphi}} + \frac{\partial F_z}{\partial z}\hat{\mathbf{z}} \right) \tag{1.53}$$

Jälleen pistetuloista jää kantavektorien ortogonaalisuuden nojalla jäljelle vain keskenään identtisten kantavektorien kertoimet, jolloin saadaan:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\left(F_\rho + \frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial F_z}{\partial z} \tag{1.54}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}F_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \tag{1.55}$$

Otetaan $\frac{1}{\rho}$ yhteiseksi teijäksi kahdesta ensimmäisestä termistä:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{\rho}\left(\rho\frac{\partial F_\rho}{\partial \rho} + F_\rho \right) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \tag{1.56}$$

Sulkujen sisällä oleva lauseke vastaa derivointia $\frac{\partial(\rho F_\rho)}{\partial \rho}$, sillä tulon derivaatan nojalla pätee: $\frac{\partial(\rho F_\rho)}{\partial \rho} = \rho\frac{\partial F_\rho}{\partial \rho} + \frac{\partial \rho}{\partial \rho}F_\rho = \rho\frac{\partial F_\rho}{\partial \rho} + F_\rho$. Lopulliseksi divergenssiksi saadaan siis:

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho F_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial F_z}{\partial z}} \tag{1.57}$$

3. **Pallokoordinaatisto:**

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \left(\frac{\partial}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\hat{\boldsymbol{\varphi}} \right) \cdot (F_r\hat{\mathbf{r}} + F_\theta\hat{\boldsymbol{\theta}} + F_\varphi\hat{\boldsymbol{\varphi}}) \tag{1.58}$$

Naiivisti pistetulon määritelmää soveltamalla ja tulo $\frac{\partial}{\partial x}a$ tulkitsemalla derivoinniksi $\frac{\partial a}{\partial x}$ saataisiin:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} \tag{1.59}$$

Tämä osoittautuu jälleen vääräksi sillä kuten sylinterikoordinaatistossa voivat pallokoordinaatiston kantavektorit muuttua. Merkitään aluksi $F_r\hat{\mathbf{r}} + F_\theta\hat{\boldsymbol{\theta}} + F_\varphi\hat{\boldsymbol{\varphi}} = \mathbf{F}$:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \left(\frac{\partial}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\hat{\boldsymbol{\varphi}} \right) \cdot \mathbf{F} \tag{1.60}$$

Samoilla periaatteilla kuin aiemmin (Derivaatta pistetulon sisään, sijoitetaan $\mathbf{F}$ ja sovelletaan tulon derivaattaa), voidaan kirjoittaa yhtälöjä (1.32) ja (1.42) vastaava tulos pallokoordinaatistossa:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \hat{\mathbf{r}} \cdot \left(\left[\frac{\partial F_r}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + F_r\frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial r} \right] + \left[\frac{\partial F_\theta}{\partial r}\hat{\boldsymbol{\theta}} + F_\theta\frac{\partial \hat{\boldsymbol{\theta}}}{\partial r} \right] + \left[\frac{\partial F_\varphi}{\partial r}\hat{\boldsymbol{\varphi}} + F_\varphi\frac{\partial \hat{\boldsymbol{\varphi}}}{\partial r} \right] \right) \tag{1.61}$$

$$+ \frac{1}{r}\hat{\boldsymbol{\theta}} \cdot \left(\left[\frac{\partial F_r}{\partial \theta}\hat{\mathbf{r}} + F_r\frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial \theta} \right] + \left[\frac{\partial F_\theta}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + F_\theta\frac{\partial \hat{\boldsymbol{\theta}}}{\partial \theta} \right] + \left[\frac{\partial F_\varphi}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{\varphi}} + F_\varphi\frac{\partial \hat{\boldsymbol{\varphi}}}{\partial \theta} \right] \right) \tag{1.62}$$

$$+ \frac{1}{r\sin\theta}\hat{\boldsymbol{\varphi}} \cdot \left(\left[\frac{\partial F_r}{\partial \varphi}\hat{\mathbf{r}} + F_r\frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial \varphi} \right] + \left[\frac{\partial F_\theta}{\partial \varphi}\hat{\boldsymbol{\theta}} + F_\theta\frac{\partial \hat{\boldsymbol{\theta}}}{\partial \varphi} \right] + \left[\frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi}\hat{\boldsymbol{\varphi}} + F_\varphi\frac{\partial \hat{\boldsymbol{\varphi}}}{\partial \varphi} \right] \right) \tag{1.63}$$

Kaikki derivoinnit r:n suhteen menevät nollaan, sillä kappaleen radiaalisen etäisyyden origosta muuttaminen ei vaadi kulman muuttamista:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \hat{\mathbf{r}} \cdot \left(\frac{\partial F_r}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{\partial F_\theta}{\partial r}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{\partial F_\varphi}{\partial r}\hat{\boldsymbol{\varphi}} \right) \tag{1.64}$$

$$+ \frac{1}{r}\hat{\boldsymbol{\theta}} \cdot \left(\left[\frac{\partial F_r}{\partial \theta}\hat{\mathbf{r}} + F_r\frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial \theta} \right] + \left[\frac{\partial F_\theta}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + F_\theta\frac{\partial \hat{\boldsymbol{\theta}}}{\partial \theta} \right] + \left[\frac{\partial F_\varphi}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{\varphi}} + F_\varphi\frac{\partial \hat{\boldsymbol{\varphi}}}{\partial \theta} \right] \right) \tag{1.65}$$

$$+ \frac{1}{r\sin\theta}\hat{\boldsymbol{\varphi}} \cdot \left(\left[\frac{\partial F_r}{\partial \varphi}\hat{\mathbf{r}} + F_r\frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial \varphi} \right] + \left[\frac{\partial F_\theta}{\partial \varphi}\hat{\boldsymbol{\theta}} + F_\theta\frac{\partial \hat{\boldsymbol{\theta}}}{\partial \varphi} \right] + \left[\frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi}\hat{\boldsymbol{\varphi}} + F_\varphi\frac{\partial \hat{\boldsymbol{\varphi}}}{\partial \varphi} \right] \right) \tag{1.66}$$

Loput derivaatat saadaan vastaavanlaisilla geometrisillä argumenteilla kuin sylinterikoordinaatistossa: $\frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial \theta} = \hat{\boldsymbol{\theta}}$, $\frac{\partial \hat{\boldsymbol{\theta}}}{\partial \theta} = -\hat{\mathbf{r}}$, $\frac{\partial \hat{\boldsymbol{\varphi}}}{\partial \theta} = 0$, $\frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial \varphi} = \sin\theta\hat{\boldsymbol{\varphi}}$, $\frac{\partial \hat{\boldsymbol{\theta}}}{\partial \varphi} = \cos\theta\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ ja $\frac{\partial \hat{\boldsymbol{\varphi}}}{\partial \varphi} = -\sin\theta\hat{\mathbf{r}} - \cos\theta\hat{\boldsymbol{\theta}}$. Nyt siis vektorien muutosnopeus riippuu siitä, minkä kulman paikkavektori muodostaa z-akselin kanssa, mikä käy järkeen (Intuitiivisia kuvia tähän?). Saadaan:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \hat{\mathbf{r}} \cdot \left(\frac{\partial F_r}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{\partial F_\theta}{\partial r}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{\partial F_\varphi}{\partial r}\hat{\boldsymbol{\varphi}} \right) \tag{1.67}$$

$$+ \frac{1}{r}\hat{\boldsymbol{\theta}} \cdot \left(\left[\frac{\partial F_r}{\partial \theta}\hat{\mathbf{r}} + F_r\hat{\boldsymbol{\theta}} \right] + \left[\frac{\partial F_\theta}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} - F_\theta\hat{\mathbf{r}} \right] + \frac{\partial F_\varphi}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{\varphi}} \right) \tag{1.68}$$

$$+ \frac{1}{r\sin\theta}\hat{\boldsymbol{\varphi}} \cdot \left(\left[\frac{\partial F_r}{\partial \varphi}\hat{\mathbf{r}} + F_r\sin\theta\hat{\boldsymbol{\varphi}} \right] + \left[\frac{\partial F_\theta}{\partial \varphi}\hat{\boldsymbol{\theta}} + F_\theta\cos\theta\hat{\boldsymbol{\varphi}} \right] + \left[\frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi}\hat{\boldsymbol{\varphi}} - F_\varphi(\sin\theta\hat{\mathbf{r}} + \cos\theta\hat{\boldsymbol{\theta}}) \right] \right) \tag{1.69}$$

Kootaan komponentit yhteen riveillä (1.68) ja (1.69):

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \hat{\mathbf{r}} \cdot \left(\frac{\partial F_r}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{\partial F_\theta}{\partial r} \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{\partial F_\varphi}{\partial r} \hat{\boldsymbol{\varphi}} \right) \tag{1.70}$$

$$+ \frac{1}{r} \hat{\boldsymbol{\theta}} \cdot \left(\left[\frac{\partial F_r}{\partial \theta} - F_\theta \right] \hat{\mathbf{r}} + \left[F_r + \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} \right] \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{\partial F_\varphi}{\partial \theta} \hat{\boldsymbol{\varphi}} \right) \tag{1.71}$$

$$+ \frac{1}{r \sin \theta} \hat{\boldsymbol{\varphi}} \cdot \left(\left[\frac{\partial F_r}{\partial \varphi} - F_\varphi \sin \theta \right] \hat{\mathbf{r}} + \left[\frac{\partial F_\theta}{\partial \varphi} - F_\varphi \cos \theta \right] \hat{\boldsymbol{\theta}} + \left[F_r \sin \theta + F_\theta \cos \theta + \frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} \right] \hat{\boldsymbol{\varphi}} \right) \tag{1.72}$$

Jälleen pistetuloista jää kantavektorien ortogonaalisuuden nojalla jäljelle vain keskenään identtisten kantavektorien kertoimet, jolloin saadaan:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(F_r + \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \left(F_r \sin \theta + F_\theta \cos \theta + \frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} \right) \tag{1.73}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_r}{\partial r} + \frac{1}{r} F_r + \frac{1}{r} \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} F_r \sin \theta + \frac{1}{r \sin \theta} F_\theta \cos \theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} \tag{1.74}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_r}{\partial r} + \frac{1}{r} F_r + \frac{1}{r} \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} F_r + \frac{\cos \theta}{r \sin \theta} F_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} \tag{1.75}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_r}{\partial r} + \frac{2}{r} F_r + \frac{1}{r} \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} + \frac{\cos \theta}{r \sin \theta} F_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} \tag{1.76}$$

Otetaan kahdesta ensimmäisestä termistä yhteinen tekijä $\frac{1}{r^2}$ ja kahdesta seuraavasta $\frac{1}{r \sin \theta}$:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{r^2} \left(r^2 \frac{\partial F_r}{\partial r} + 2 r F_r \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} + \cos \theta F_\theta \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} \tag{1.77}$$

Sulkujen sisällä olevat lausekkeet ovat nyt derivaatat $\frac{\partial (r^2 F_r)}{\partial r}$ ja $\frac{\partial (\sin \theta F_\theta)}{\partial \theta}$, jolloin divergenssiksi pallokoordinaatistossa saadaan:

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 F_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (\sin \theta F_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi}} \tag{1.78}$$

1.2.3 Roottori

Vastaavasti kuin Divergenssiä merkittiin nablan ja vektorikentän pistetulona, merkitään roottoria nablan ja vektorikentän ristitulona $\nabla \times \mathbf{F}$. Jälleen tämä on käytännössä notaation väärinkäyttöä, mutta osoittautuu toimivaksi karteesisessa koordinaatistossa ja varoivaisuutta käyttäen myös sylinteri- ja pallokoordinaatistoissa. Tämä osio hyödyntää edellisessä osiossa saatuja lausekkeita yksikkövektorien derivaatoille, jolloin mahdolliset epäselvyydet ratkeavat lukemalla sitä.

1. **Karteesinen koordinaatisto**

   Karteesisessa koordinaatistossa roottori voidaan tulkita naiivisti ristituloksi:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{\mathbf{z}} \right) \times \left(F_x \hat{\mathbf{x}} + F_y \hat{\mathbf{y}} + F_z \hat{\mathbf{z}} \right) \tag{1.79}$$

Määritetään ristitulo determinantin avulla:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \tag{1.80}$$

$$\nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{x}} - \left(\frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{y}} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{z}} \tag{1.81}$$

Kerrotaan miinusmerkki toisen termin sisään, jolloin roottorin lausekkeeksi karteesisessa koordinaatistossa saadaan:

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{x}} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \hat{\mathbf{y}} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{z}}} \tag{1.82}$$

2. **Sylinterikoordinaatisto**

   Roottoria ei voida enää tulkita naiivisti ristituloksi, vaan tulee olla varovaisempi:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \hat{\boldsymbol{\rho}} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \hat{\boldsymbol{\varphi}} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{\mathbf{z}} \right) \times (F_\rho \hat{\boldsymbol{\rho}} + F_\varphi \hat{\boldsymbol{\varphi}} + F_z \hat{\mathbf{z}}) \tag{1.83}$$

Kirjoitetaan $F_\rho \hat{\boldsymbol{\rho}} + F_\varphi \hat{\boldsymbol{\varphi}} + F_z \hat{\mathbf{z}} = \mathbf{F}$:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \hat{\boldsymbol{\rho}} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \hat{\boldsymbol{\varphi}} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{\mathbf{z}} \right) \times \mathbf{F} \tag{1.84}$$

Ristitulo voidaan ottaa erikseen kustakin termistä distributiivisuutensa ansiosta:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial \rho} \hat{\boldsymbol{\rho}} \times \mathbf{F} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \hat{\boldsymbol{\varphi}} \times \mathbf{F} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{F} \tag{1.85}$$

Skalaarit $\frac{\partial}{\partial a}$ voidaan laittaa ”kertomaan” $\mathbf{F}$:ää eli derivoimaan sitä kussakin termissä:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \hat{\boldsymbol{\rho}} \times \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \hat{\boldsymbol{\varphi}} \times \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \varphi} + \hat{\mathbf{z}} \times \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial z} \tag{1.86}$$

Sijoitetaan $\mathbf{F}$. Derivaatta operoi kutakin termiä erikseen:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \hat{\boldsymbol{\rho}} \times \left(\frac{\partial (F_\rho \hat{\boldsymbol{\rho}})}{\partial \rho} + \frac{\partial (F_\varphi \hat{\boldsymbol{\varphi}})}{\partial \rho} + \frac{\partial (F_z \hat{\mathbf{z}})}{\partial \rho} \right) \tag{1.87}$$

$$+ \frac{1}{\rho} \hat{\boldsymbol{\varphi}} \times \left(\frac{\partial (F_\rho \hat{\boldsymbol{\rho}})}{\partial \varphi} + \frac{\partial (F_\varphi \hat{\boldsymbol{\varphi}})}{\partial \varphi} + \frac{\partial (F_z \hat{\mathbf{z}})}{\partial \varphi} \right) \tag{1.88}$$

$$+ \hat{\mathbf{z}} \times \left(\frac{\partial (F_\rho \hat{\boldsymbol{\rho}})}{\partial z} + \frac{\partial (F_\varphi \hat{\boldsymbol{\varphi}})}{\partial z} + \frac{\partial (F_z \hat{\mathbf{z}})}{\partial z} \right) \tag{1.89}$$

Sovelletaan tulon derivaattaa:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \hat{\boldsymbol{\rho}} \times \left(\left[F_\rho \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\rho}}}{\partial \rho} + \frac{\partial F_\rho}{\partial \rho} \hat{\boldsymbol{\rho}} \right] + \left[F_\varphi \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\varphi}}}{\partial \rho} + \frac{\partial F_\varphi}{\partial \rho} \hat{\boldsymbol{\varphi}} \right] + \left[F_z \frac{\partial \hat{\mathbf{z}}}{\partial \rho} + \frac{\partial F_z}{\partial \rho} \hat{\mathbf{z}} \right] \right) \tag{1.90}$$

$$+ \frac{1}{\rho} \hat{\boldsymbol{\varphi}} \times \left(\left[F_\rho \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\rho}}}{\partial \varphi} + \frac{\partial F_\rho}{\partial \varphi} \hat{\boldsymbol{\rho}} \right] + \left[F_\varphi \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\varphi}}}{\partial \varphi} + \frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} \hat{\boldsymbol{\varphi}} \right] + \left[F_z \frac{\partial \hat{\mathbf{z}}}{\partial \varphi} + \frac{\partial F_z}{\partial \varphi} \hat{\mathbf{z}} \right] \right) \tag{1.91}$$

$$+ \hat{\mathbf{z}} \times \left(\left[F_\rho \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\rho}}}{\partial z} + \frac{\partial F_\rho}{\partial z} \hat{\boldsymbol{\rho}} \right] + \left[F_\varphi \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\varphi}}}{\partial z} + \frac{\partial F_\varphi}{\partial z} \hat{\boldsymbol{\varphi}} \right] + \left[F_z \frac{\partial \hat{\mathbf{z}}}{\partial z} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \hat{\mathbf{z}} \right] \right) \tag{1.92}$$

Kantavektoreiden derivaatoista jäävät jäljelle (ks. divergenssin johto sylinterikoordinaatistossa) vain $\frac{\partial\hat{\boldsymbol{\rho}}}{\partial\varphi} = \hat{\boldsymbol{\varphi}}$ sekä $\frac{\partial\hat{\boldsymbol{\varphi}}}{\partial\varphi} = -\hat{\boldsymbol{\rho}}$. Muut derivaatat menevät nollaan:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \hat{\boldsymbol{\rho}} \times \left(\left[0 + \frac{\partial F_\rho}{\partial \rho}\hat{\boldsymbol{\rho}}\right] + \left[0 + \frac{\partial F_\varphi}{\partial \rho}\hat{\boldsymbol{\varphi}}\right] + \left[0 + \frac{\partial F_z}{\partial \rho}\hat{\mathbf{z}}\right] \right) \tag{1.93}$$

$$+ \frac{1}{\rho}\hat{\boldsymbol{\varphi}} \times \left(\left[F_\rho\hat{\boldsymbol{\varphi}} + \frac{\partial F_\rho}{\partial \varphi}\hat{\boldsymbol{\rho}}\right] + \left[-F_\varphi\hat{\boldsymbol{\rho}} + \frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi}\hat{\boldsymbol{\varphi}}\right] + \left[0 + \frac{\partial F_z}{\partial \varphi}\hat{\mathbf{z}}\right] \right) \tag{1.94}$$

$$+ \hat{\mathbf{z}} \times \left(\left[0 + \frac{\partial F_\rho}{\partial z}\hat{\boldsymbol{\rho}}\right] + \left[0 + \frac{\partial F_\varphi}{\partial z}\hat{\boldsymbol{\varphi}}\right] + \left[0 + \frac{\partial F_z}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}\right] \right) \tag{1.95}$$

Siivotaan lausekkeita ja etenkin toisessa termissä kerätään termit kantavektoreittain yhteen:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \hat{\boldsymbol{\rho}} \times \left(\frac{\partial F_\rho}{\partial \rho}\hat{\boldsymbol{\rho}} + \frac{\partial F_\varphi}{\partial \rho}\hat{\boldsymbol{\varphi}} + \frac{\partial F_z}{\partial \rho}\hat{\mathbf{z}} \right) \tag{1.96}$$

$$+ \frac{1}{\rho}\hat{\boldsymbol{\varphi}} \times \left(\left[\frac{\partial F_\rho}{\partial \varphi} - F_\varphi\right]\hat{\boldsymbol{\rho}} + \left[F_\rho + \frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi}\right]\hat{\boldsymbol{\varphi}} + \frac{\partial F_z}{\partial \varphi}\hat{\mathbf{z}} \right) \tag{1.97}$$

$$+ \hat{\mathbf{z}} \times \left(\frac{\partial F_\rho}{\partial z}\hat{\boldsymbol{\rho}} + \frac{\partial F_\varphi}{\partial z}\hat{\boldsymbol{\varphi}} + \frac{\partial F_z}{\partial z}\hat{\mathbf{z}} \right) \tag{1.98}$$

Lasketaan ristitulot. Tiedetään, että $\hat{\boldsymbol{\rho}} \times \hat{\boldsymbol{\varphi}} = \hat{\mathbf{z}} \iff \hat{\boldsymbol{\varphi}} \times \hat{\boldsymbol{\rho}} = -\hat{\mathbf{z}}$, $\hat{\boldsymbol{\varphi}} \times \hat{\mathbf{z}} = \hat{\boldsymbol{\rho}} \iff \hat{\mathbf{z}} \times \hat{\boldsymbol{\varphi}} = -\hat{\boldsymbol{\rho}}$ ja $\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\boldsymbol{\rho}} = \hat{\boldsymbol{\varphi}} \iff \hat{\boldsymbol{\rho}} \times \hat{\mathbf{z}} = -\hat{\boldsymbol{\varphi}}$. Lisäksi $\hat{\boldsymbol{\rho}} \times \hat{\boldsymbol{\rho}} = \hat{\boldsymbol{\varphi}} \times \hat{\boldsymbol{\varphi}} = \hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{z}} = \mathbf{0}$. Saadaan:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0} + \frac{\partial F_\varphi}{\partial \rho}\hat{\mathbf{z}} + \frac{\partial F_z}{\partial \rho}(-\hat{\boldsymbol{\varphi}}) \tag{1.99}$$

$$+ \frac{1}{\rho}\left(\left[\frac{\partial F_\rho}{\partial \varphi} - F_\varphi\right](-\hat{\mathbf{z}}) + \mathbf{0} + \frac{\partial F_z}{\partial \varphi}\hat{\boldsymbol{\rho}} \right) \tag{1.100}$$

$$+ \frac{\partial F_\rho}{\partial z}\hat{\boldsymbol{\varphi}} + \frac{\partial F_\varphi}{\partial z}(-\hat{\boldsymbol{\rho}}) + \mathbf{0} \tag{1.101}$$

$$\nabla \times \mathbf{F} = \frac{\partial F_\varphi}{\partial \rho}\hat{\mathbf{z}} - \frac{\partial F_z}{\partial \rho}\hat{\boldsymbol{\varphi}} \tag{1.102}$$

$$+ \frac{1}{\rho}\left[F_\varphi - \frac{\partial F_\rho}{\partial \varphi}\right]\hat{\mathbf{z}} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial F_z}{\partial \varphi}\hat{\boldsymbol{\rho}} \tag{1.103}$$

$$+ \frac{\partial F_\rho}{\partial z}\hat{\boldsymbol{\varphi}} - \frac{\partial F_\varphi}{\partial z}\hat{\boldsymbol{\rho}} \tag{1.104}$$

Kootaan termit kantavektoreittain:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial F_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial F_\varphi}{\partial z} \right)\hat{\boldsymbol{\rho}} + \left(\frac{\partial F_\rho}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial \rho} \right)\hat{\boldsymbol{\varphi}} + \left(\frac{\partial F_\varphi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\left[F_\varphi - \frac{\partial F_\rho}{\partial \varphi}\right] \right)\hat{\mathbf{z}} \tag{1.105}$$

Otetaan $\frac{1}{\rho}$ yhteiseksi tekijäksi viimeisestä termistä:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial F_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial F_\varphi}{\partial z} \right)\hat{\boldsymbol{\rho}} + \left(\frac{\partial F_\rho}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial \rho} \right)\hat{\boldsymbol{\varphi}} + \frac{1}{\rho}\left(\rho\frac{\partial F_\varphi}{\partial \rho} + F_\varphi - \frac{\partial F_\rho}{\partial \varphi} \right)\hat{\mathbf{z}} \tag{1.106}$$

Tunnistetaan $\rho\frac{\partial F_\varphi}{\partial \rho} + F_\varphi = \frac{\partial(\rho F_\varphi)}{\partial \rho}$, jolloin lopulliseksi roottorin lausekkeeksi sylinterikoordinaatistossa saadaan:

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial F_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial F_\varphi}{\partial z} \right)\hat{\boldsymbol{\rho}} + \left(\frac{\partial F_\rho}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial \rho} \right)\hat{\boldsymbol{\varphi}} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial(\rho F_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{\partial F_\rho}{\partial \varphi} \right)\hat{\mathbf{z}}} \tag{1.107}$$

3. **Pallokoordinaatisto**

Vastaavasti kuin sylinterikoordinaatistossa, ei roottoria voida pallokoordinaatistossa tulkita naiivisti ristituloksi vaan on oltava varovaisempi:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\hat{\boldsymbol{\varphi}} \right) \times (F_r\hat{\mathbf{r}} + F_\theta\hat{\boldsymbol{\theta}} + F_\varphi\hat{\boldsymbol{\varphi}}) \tag{1.108}$$

Täysin analogisella tavalla kuin sylinterikoordinaatistolle, voidaan pallokoordinaatiston roottorin lauseke johtaa yhtälöä (1.90)-(1.92) vastaavaan muotoon:

$$\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{F} = \hat{\mathbf{r}} \times &\left(\left[F_r \frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial r} + \frac{\partial F_r}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} \right] + \left[F_\theta \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\theta}}}{\partial r} + \frac{\partial F_\theta}{\partial r}\hat{\boldsymbol{\theta}} \right] + \left[F_\varphi \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\varphi}}}{\partial r} + \frac{\partial F_\varphi}{\partial r}\hat{\boldsymbol{\varphi}} \right] \right) &(1.109)\\
+ \frac{1}{r}\hat{\boldsymbol{\theta}} \times &\left(\left[F_r \frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial \theta} + \frac{\partial F_r}{\partial \theta}\hat{\mathbf{r}} \right] + \left[F_\theta \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\theta}}}{\partial \theta} + \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta}\hat{\mathbf{r}} \right] + \left[F_\varphi \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\varphi}}}{\partial \theta} + \frac{\partial F_\varphi}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{\varphi}} \right] \right) &(1.110)\\
+ \frac{1}{r\sin\theta}\hat{\boldsymbol{\varphi}} \times &\left(\left[F_r \frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial \varphi} + \frac{\partial F_r}{\partial \varphi}\hat{\mathbf{r}} \right] + \left[F_\theta \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\theta}}}{\partial \varphi} + \frac{\partial F_\theta}{\partial \varphi}\hat{\boldsymbol{\theta}} \right] + \left[F_\varphi \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\varphi}}}{\partial \varphi} + \frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi}\hat{\boldsymbol{\varphi}} \right] \right) &(1.111)
\end{aligned}$$

Kantavektoreiden derivaatoista jäljelle jäävät (ks. divergenssin johto) $\frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial \theta} = \hat{\boldsymbol{\theta}}$, $\frac{\partial \hat{\boldsymbol{\theta}}}{\partial \theta} = -\hat{\mathbf{r}}$, $\frac{\partial \hat{\boldsymbol{\varphi}}}{\partial \theta} = 0$, $\frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial \varphi} = \sin\theta\hat{\boldsymbol{\varphi}}$, $\frac{\partial \hat{\boldsymbol{\theta}}}{\partial \varphi} = \cos\theta\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ ja $\frac{\partial \hat{\boldsymbol{\varphi}}}{\partial \varphi} = -\sin\theta\hat{\mathbf{r}} - \cos\theta\hat{\boldsymbol{\theta}}$. Muut derivaatat menevät nollaan. Saadaan:

$$\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{F} = \hat{\mathbf{r}} \times &\left(\left[0 + \frac{\partial F_r}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} \right] + \left[0 + \frac{\partial F_\theta}{\partial r}\hat{\boldsymbol{\theta}} \right] + \left[0 + \frac{\partial F_\varphi}{\partial r}\hat{\boldsymbol{\varphi}} \right] \right) &(1.112)\\
+ \frac{1}{r}\hat{\boldsymbol{\theta}} \times &\left(\left[F_r\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{\partial F_r}{\partial \theta}\hat{\mathbf{r}} \right] + \left[F_\theta(-\hat{\mathbf{r}}) + \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta}\hat{\mathbf{r}} \right] + \left[0 + \frac{\partial F_\varphi}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{\varphi}} \right] \right) &(1.113)\\
+ \frac{1}{r\sin\theta}\hat{\boldsymbol{\varphi}} \times &\left(\left[F_r\sin\theta\hat{\boldsymbol{\varphi}} + \frac{\partial F_r}{\partial \varphi}\hat{\mathbf{r}} \right] + \left[F_\theta\cos\theta\hat{\boldsymbol{\varphi}} + \frac{\partial F_\theta}{\partial \varphi}\hat{\boldsymbol{\theta}} \right] + \left[F_\varphi(-\sin\theta\hat{\mathbf{r}} - \cos\theta\hat{\boldsymbol{\theta}}) + \frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi}\hat{\boldsymbol{\varphi}} \right] \right) &(1.114)
\end{aligned}$$

Siivotaan lausekkeita ja ryhmitellään termit kantavektoreittain:

$$\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{F} = \hat{\mathbf{r}} \times &\left(\frac{\partial F_r}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{\partial F_\theta}{\partial r}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{\partial F_\varphi}{\partial r}\hat{\boldsymbol{\varphi}} \right) &(1.115)\\
+ \frac{1}{r}\hat{\boldsymbol{\theta}} \times &\left(\left[\frac{\partial F_r}{\partial \theta} - F_\theta \right]\hat{\mathbf{r}} + F_r\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{\partial F_\varphi}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{\varphi}} \right) &(1.116)\\
+ \frac{1}{r\sin\theta}\hat{\boldsymbol{\varphi}} \times &\left(\left[\frac{\partial F_r}{\partial \varphi} - F_\varphi\sin\theta \right]\hat{\mathbf{r}} + \left[\frac{\partial F_\theta}{\partial \varphi} - F_\varphi\cos\theta \right]\hat{\boldsymbol{\theta}} + \left[F_r\sin\theta + F_\theta\cos\theta + \frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} \right]\hat{\boldsymbol{\varphi}} \right) &(1.117)
\end{aligned}$$

Lasketaan ristitulot. Tiedetään: $\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\boldsymbol{\varphi}} \iff \hat{\boldsymbol{\theta}} \times \hat{\boldsymbol{r}} = -\hat{\boldsymbol{\varphi}}$, $\hat{\boldsymbol{\theta}} \times \hat{\boldsymbol{\varphi}} = \hat{\mathbf{r}} \iff \hat{\boldsymbol{\varphi}} \times \hat{\boldsymbol{\theta}} = -\hat{\mathbf{r}}$ ja $\hat{\boldsymbol{\varphi}} \times \hat{\mathbf{r}} = \hat{\boldsymbol{\theta}} \iff \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\boldsymbol{\varphi}} = -\hat{\boldsymbol{\theta}}$. Lisäksi $\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{r}} = \hat{\boldsymbol{\theta}} \times \hat{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\boldsymbol{\varphi}} \times \hat{\boldsymbol{\varphi}} = \mathbf{0}$. Saadaan:

$$
\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0} &+ \frac{\partial F_\theta}{\partial r}\hat{\boldsymbol{\varphi}} - \frac{\partial F_\varphi}{\partial r}\hat{\boldsymbol{\theta}} && (1.118)\\
&+ \frac{1}{r}\left(\left[\frac{\partial F_r}{\partial \theta} - F_\theta\right](-\hat{\boldsymbol{\varphi}}) + \mathbf{0} + \frac{\partial F_\varphi}{\partial \theta}\hat{\mathbf{r}}\right) && (1.119)\\
&+ \frac{1}{r\sin\theta}\left(\left[\frac{\partial F_r}{\partial \varphi} - F_\varphi \sin\theta\right]\hat{\boldsymbol{\theta}} + \left[\frac{\partial F_\theta}{\partial \varphi} - F_\varphi\cos\theta\right](-\hat{\mathbf{r}}) + \mathbf{0}\right) && (1.120)\\
\nabla \times \mathbf{F} = &\frac{\partial F_\theta}{\partial r}\hat{\boldsymbol{\varphi}} - \frac{\partial F_\varphi}{\partial r}\hat{\boldsymbol{\theta}} && (1.121)\\
&+ \frac{1}{r}\left[F_\theta - \frac{\partial F_r}{\partial \theta}\right]\hat{\boldsymbol{\varphi}} + \frac{1}{r}\frac{\partial F_\varphi}{\partial \theta}\hat{\mathbf{r}} && (1.122)\\
&+ \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial F_r}{\partial \varphi} - F_\varphi\sin\theta\right]\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r\sin\theta}\left[F_\varphi\cos\theta - \frac{\partial F_\theta}{\partial \varphi}\right]\hat{\mathbf{r}} && (1.123)
\end{aligned}
$$

Kootaan termit kantavektoreittain:

$$
\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{F} = &\left(\frac{1}{r}\frac{\partial F_\varphi}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\left[F_\varphi\cos\theta - \frac{\partial F_\theta}{\partial \varphi}\right]\right)\hat{\mathbf{r}} && (1.124)\\
&+ \left(\frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial F_r}{\partial \varphi} - F_\varphi\sin\theta\right] - \frac{\partial F_\varphi}{\partial r}\right)\hat{\boldsymbol{\theta}} && (1.125)\\
&+ \left(\frac{\partial F_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r}\left[F_\theta - \frac{\partial F_r}{\partial \theta}\right]\right)\hat{\boldsymbol{\varphi}} && (1.126)
\end{aligned}
$$

Otetaan ensimmäisestä termistä $\frac{1}{r\sin\theta}$ yhteiseksi tekijäksi ja toisesta sekä kolmannesta termistä $\frac{1}{r}$ yhteiseksi tekijäksi:

$$
\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{F} = &\frac{1}{r\sin\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial F_\varphi}{\partial \theta} + F_\varphi\cos\theta - \frac{\partial F_\theta}{\partial \varphi}\right)\hat{\mathbf{r}} && (1.127)\\
&+ \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial F_r}{\partial \varphi} - F_\varphi - r\frac{\partial F_\varphi}{\partial r}\right)\hat{\boldsymbol{\theta}} && (1.128)\\
&+ \frac{1}{r}\left(r\frac{\partial F_\theta}{\partial r} + F_\theta - \frac{\partial F_r}{\partial \theta}\right)\hat{\boldsymbol{\varphi}} && (1.129)
\end{aligned}
$$

Tunnistetaan seuraavat tulon derivaatat: $\sin\theta\frac{\partial F_\varphi}{\partial\theta} + F_\varphi\cos\theta = \frac{\partial(\sin\theta F_\varphi)}{\partial\theta}$, $-F_\varphi - r\frac{\partial F_\varphi}{\partial r} = -\frac{\partial(rF_\varphi)}{\partial r}$ ja $r\frac{\partial F_\theta}{\partial r} + F_\theta = \frac{\partial(rF_\theta)}{\partial r}$. Lopulliseksi roottorin lausekkeeksi pallokoordinaatistossa saadaan:

$$
\boxed{\nabla \times \mathbf{F} = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial(\sin\theta F_\varphi)}{\partial\theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial\varphi}\right)\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial F_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial(rF_\varphi)}{\partial r}\right)\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rF_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial\theta}\right)\hat{\boldsymbol{\varphi}}} \tag{1.130}
$$

1.2.4 Laplacen operaattori

Laplacen operaattori ∇^2 voidaan tulkita gradientin divergenssinä: $\nabla \cdot \nabla f = (\nabla \cdot \nabla)f = \nabla^2 f$. Tällöin sille voidaan johtaa muoto hyödyntämällä saatuja lausekkeita gradienteilla ja divergensseille.

1. **Karteesinen koordinaatisto**

$$\nabla \cdot \nabla f = \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{\mathbf{z}} \right) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial f}{\partial \hat{\mathbf{z}}} \right) \tag{1.131}$$

Jälleen karteesisessa koordinaatistossa divergenssi voidaan tulkita naiivisti pistetuloksi ja Laplacen operaattoriksi saadaan suoraan:

$$\boxed{\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}} \tag{1.132}$$

2. **Sylinterikoordinaatisto**

$$\nabla \cdot \nabla f = \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \hat{\boldsymbol{\rho}} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \hat{\boldsymbol{\varphi}} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{\mathbf{z}} \right) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial \rho} \hat{\boldsymbol{\rho}} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \hat{\boldsymbol{\varphi}} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{\mathbf{z}} \right) \tag{1.133}$$

Sijoitetaan ∇f sylinterikoordinaatiston divergenssin lausekkeeseen (1.57):

$$\nabla^2 f = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho (\nabla f)_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} ((\nabla f)_\varphi) + \frac{\partial}{\partial z} ((\nabla f)_z) \tag{1.134}$$

Luetaan gradientin komponentit $(\nabla f)_i, i \in \{\rho, \varphi, z\}$ yhtälöstä (1.81):

$$\nabla^2 f = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) \tag{1.135}$$

Otetaan vakiokerroin $\frac{1}{\rho}$ ulos toisesta termistä ja yhdistetään derivaattaoperaattorit toisen kertaluvun derivaatoiksi, jolloin Laplacen operaattoriksi sylinterikoordinaatistossa saadaan:

$$\boxed{\nabla^2 f = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}} \tag{1.136}$$

Jos ensimmäisen termin derivaatta määritetään saadaan vaihtoehtoinen muoto Laplacen operaattorille:

$$\nabla^2 f = \frac{1}{\rho} \left(\rho \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial \rho} \right) \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \tag{1.137}$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{\rho} \left(\rho \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} + \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \tag{1.138}$$

Kerrotaan $\frac{1}{\rho}$ sulkuihin, jolloin vaihtoehtoiseksi muodoksi saadaan:

$$\boxed{\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}} \tag{1.139}$$

3. **Pallokoordinaatisto**

$$\nabla \cdot \nabla f = \left(\frac{\partial}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \hat{\boldsymbol{\varphi}} \right) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \hat{\boldsymbol{\varphi}} \right) \tag{1.140}$$

Sijoitetaan ∇f pallokoordinaatiston divergenssin lausekkeeseen (1.78):

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2(\nabla f)_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta(\nabla f)_\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial((\nabla f)_\varphi)}{\partial\varphi} \tag{1.141}$$

Luetaan gradientin komponentit $(\nabla f)_i, i \in \{r, \theta, \varphi\}$ yhtälöstä (1.88):

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial\varphi}\right) \tag{1.142}$$

Otetaan vekiotermit ulos toisesta ja kolmannesta termistä ja yhdistetään kolmannen termin derivaattaoperaattorit toisen kertaluvun derivaataksi, jolloin Laplacen operaattoriksi pallokoordinaatistossa saadaan:

$$\boxed{\nabla^2 f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}} \tag{1.143}$$

Jos ensimmäisen ja toisen termin derivaatat määritetään saadaan vaihtoehtoinen muoto Laplacen operaattorille:

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2}\left(r^2\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \left(\frac{\partial(r^2)}{\partial r}\right)\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2} + \left(\frac{\partial(\sin\theta)}{\partial\theta}\right)\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2} \tag{1.144}$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2}\left(r^2\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + 2r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2} + \cos\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2} \tag{1.145}$$

Kerrotaan $\frac{1}{r^2}$ ja $\frac{1}{r^2\sin\theta}$ sulkuihin, jolloin vaihtoehtoiseksi muodoksi saadaan:

$$\boxed{\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2} + \frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial\theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}} \tag{1.146}$$

1.2.5 Laplacen vektorioperaattori

$$\nabla^2\mathbf{F} = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{F}) - \nabla\times(\nabla\times\mathbf{F}) \tag{1.147}$$

1.2.6 Suunnattu derivaatta

2 Differentiaaliyhtälötietoa

2.1 Ominaisuudet

2.1.1 Kertaluku

2.1.2 Homogeenisyys

2.1.3 Autonomisuus

2.1.4 Separoituvuus

2.2 Lineaarisuus, semilineaarisuus, kvasilineaarisuus, ja epälineaarisuus

2.2.1 Lineaariset differentiaaliyhtälöt

Lineaarisia differentiaaliyhtälöitä määrittää se, että tuntematon funktio, ja sen kaikki derivaatat esiintyvät lineaarisina termeinä, eli funktiota tai sen derivaattoja ei ole esim. kororettu potenssiin, sijoitettu toisen funktion sisään jne.

- **Tavalliset DY:t**:

  Yleinen ensinmmäisen kertaluvun lineaarinen tavallinen differentiaaliyhtälö on muotoa:

  $$a(x)\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} + b(x)f = c(x) \tag{2.1}$$

  Jossa, a, b ja c ovat mielivaltaisia derivoituvia funktioita, eli niiden ei tarvitse olla lineaarisia

  Vastaavasti yleinen toisen kertaluvun lineaarinen tavallinen differentiaaliyhtälö on muotoa:

  $$a(x)\frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}x^2} + b(x)\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} + c(x)f = d(x) \tag{2.2}$$

  Jossa a, b, c ja d ovat mielivaltaisia derivoituvia funktioita, eli niiden ei tarvitse olla lineaarisia.

- **Osittais-DY:t**:

  Yleinen ensimmäisen kertaluvun lineaarinen osittaisdifferentiaaliyhtälö kahden muuttujan funktiolle on muotoa:

  $$a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x,y)u = d(x,y) \tag{2.3}$$

  Jossa a, b, c ja d ovat mielivaltaisia derivoituvia funktioita, eli niiden ei tarvitse olla lineaarisia.

  Vastaavasti yleinen toisen kertaluvun osittaisdifferentiaaliyhtälö kahden muuttujan funktiolle on muotoa:

  $$a(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + c(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + d(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x} + e(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + f(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + g(x,y)u = h(x,y) \tag{2.4}$$

  Jossa $a, b, c, \ldots h$ ovat mielivaltaisia derivoituvia funktioita, eli niiden ei tarvitse olla lineaarisia.

  Yhtälöt, jotka eivät toteuta lineaarisuuden vaatimuksia ovat epälineaarisia. Epälineaariset yhtälöt jaetaan kolmeen kategoriaan lisääntyvän epälineaarisuuden mukaan.

2.2.2 Semilineaariset differentiaaliyhtälöt

Semilineaarisiin differentiaaliyhtälöihin siirryttäessä vaatimus lineaarisuudesta pätee enää korkeimman kertaluvun derivaatoille eli funktio ja sen derivaatat korkeimman kertaluvun derivaattaa lukuunottamatta voivat esiintyä epälineaarisina termeinä.

- **Tavalliset DY:t**:

  Yleinen ensimmäisen kertaluvun semilineaarinen tavallinen differentiaaliyhtälö on muotoa:

  $$a(x)\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = g(f, x) \tag{2.5}$$

  Jossa a on mielivaltainen derivoituva funktio ja g on sekä f:n että x:n funktio.

  Vastaavasti yleinen toisen kertaluvun semilineaarinen tavallinen differentiaaliyhtälö on muotoa:

  $$a(x)\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} = g(f', f, x) \tag{2.6}$$

  Jossa a on mielivaltainen derivoituva funktio ja g on sekä f':n, f:n että x:n funktio.

- **Osittais-DY:t**:

  Yleinen ensimmäisen kertaluvun semilineaarinen osittaisdifferentiaaliyhtälö kahden muuttujan funktiolle on muotoa:

  $$a(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} = f(u, x, y) \tag{2.7}$$

  Jossa a ja b ovat mielivaltaisia derivoituvia funktioita ja f on sekä u:n, x:n ja y:n funktio.

  Vastaavasti yleinen toisen kertaluvun semilineaarinen osittaisdifferentiaaliyhtälö kahden muuttujan funktiolle on muotoa:

  $$a(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + c(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + d(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x} = f(u_x, u_y, u, x, y) \tag{2.8}$$

  Jossa a, b, c ja d ovat mielivaltaisia derivoituvia funktioita ja f on sekä u_x:n, u_y:n, u:n, x:n ja y:n funktio.

2.2.3 Kvasilineaariset differentiaaliyhtälöt

Kvasilineaarisiin differentiaaliyhtälöihin siirryttäessä vaatimus lineaarisuudesta pätee edelleen korkeimman kertaluvun derivaatoille, mutta nyt niiden kerroinfunktiot voivat olla mielivaltaisia funktion ja sen alemman kertaluvun derivaatojen funktioita.

- **Tavalliset DY:t**:

  Yleinen ensimmäisen kertaluvun kvasilineaarinen tavallinen differentiaaliyhtälö on muotoa:

  $$a(f, x)\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = g(f, x) \tag{2.9}$$

  Jossa a on mielivaltainen derivoituva funktio, joka riippuu nyt x:n lisäksi f:stä ja g on sekä f:n että x:n funktio.

  Vastaavasti yleinen toisen kertaluvun kvasilineaarinen tavallinen differentiaaliyhtälö on muotoa:

$$a(f, f', x)\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} = g(f', f, x) \tag{2.10}$$

Jossa a on mielivaltainen derivoituva funktio, joka riippuu nyt x:n lisäksi f':sta ja f:stä ja g on sekä f':n, f:n että x:n funktio.

- **Osittais-DY:t**:

  Yleinen ensimmäisen kertaluvun kvasilineaarinen osittaisdifferentiaaliyhtälö kahden muuttujan funktiolle on muotoa:

$$a(u, x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(u, x, y)\frac{\partial u}{\partial y} = f(u, x, y) \tag{2.11}$$

  Jossa a ja b ovat mielivaltaisia derivoituvia funktioita ja riippuvat nyt x:n ja y:n lisäksi u:sta ja f on sekä u:n, x:n ja y:n funktio.

  Vastaavasti yleinen toisen kertaluvun kvasilineaarinen osittaisdifferentiaaliyhtälö kahden muuttujan funktiolle on muotoa:

$$a(u_x, u_y, u, x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(u_x, u_y, u, x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + c(u_x, u_y, u, x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + d(u_x, u_y, u, x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x} = f(u_x, u_y, u, x, y) \tag{2.12}$$

  Jossa a, b, c ja d ovat mielivaltaisia derivoituvia funktioita ja f on sekä u_x:n, u_y:n, u:n, x:n ja y:n funktio.

2.2.4 Epälineaariset differentiaaliyhtälöt

Epälineaarisissa differentiaaliyhtälöissä vaatimus funktion tai sen derivaattojen esiintymisestä lineaarisina termeinä katoaa kokonaan, jolloin epälineaariset differentiaaliyhtälöt ovat suurin differentiaaliyhtälöiden kategoria ja samalla myös vaikein, sillä niillä ei ole yhtä tiettyä yhdistävää tekijää tai ominaisuutta toisin kuin aiempien kategorioiden yhtälöillä.

- **Tavalliset DY:t**: Yleinen ensimmäisen kertaluvun epälineaarinen tavallinen differentiaaliyhtälö on muotoa:

$$g(f', f, x) = 0 \tag{2.13}$$

  Jossa g on mielivaltainen funktio, joka riippuu nyt x:n ja f:n lisäksi f':sta

  Vastaavasti yleinen toisen kertaluvun epälineaarinen tavallinen differentiaaliyhtälö on muotoa:

$$g(f'', f', f', x) = 0 \tag{2.14}$$

  Jossa g on mielivaltainen funktio, joka riippuu nyt x:n, f':n ja f:n lisäksi f'':sta.

- **Osittais-DY:t**:

  Yleinen ensimmäisen kertaluvun epälineaarinen osittaisdifferentiaaliyhtälö kahden muuttujan funktiolle on muotoa:

$$f(u_x, u_y, u, x, y) = 0 \tag{2.15}$$

  Jossa f on mielivaltainen funktio, joka riippuu nyt u:n kaikista derivaatoista, u:sta ja x:stä sekä y:stä

Vastaavasti yleinen toisen kertaluvun epälineaarinen osittaisdifferentiaaliyhtälö kahden muuttujan funktiolle on muotoa:

$$f(u_{xx}, u_{yy}, u_{xy}, u_{yx}, u_x, u_y, u, x, y) = 0 \tag{2.16}$$

Jossa f on mielivaltainen funktio, joka riippuu nyt u:n kaikista derivaatoista, u:sta ja x:stä sekä y:stä

Taulukoihin 5.1 ja 5.2 on koottu toisen kertaluvun differentiaaliyhtälötyypit kasvavan epälineaarisuuden mukaan:

Lineaarisuus	Tavallinen 2. kl:n DY
Lineaarinen	$a(x)f'' + b(x)f' + c(x)f = d(x)$
Semilineaarinen	$a(x)f'' = g(f', f, x)$
Kvasilineaarinen	$a(f, f', x)f'' = g(f', f, x)$
Epälineaarinen	$g(f'', f', f', x) = 0$

Taulukko 2.1: Tavalliset 2. kl:n DY:t kasvavan epälineaarisuuden mukaan

Lineaarisuus	2. kl:n osittais-DY
Lineaarinen	$a(x,y)u_{xx} + b(x,y)u_{yy} + c(x,y)u_{xy} + d(x,y)u_{yx} + e(x,y)u_x + f(x,y)u_y + g(x,y)u = h(x,y)$
Semilineaarinen	$a(x,y)u_{xx} + b(x,y)u_{yy} + c(x,y)u_{xy} + d(x,y)u_{yx} = f(u_x, u_y, u, x, y)$
Kvasilineaarinen	$a(u_x, u_y, u, x, y)u_{xx} + b(u_x, u_y, u, x, y)u_{yy} + c(u_x, u_y, u, x, y)u_{xy} + d(u_x, u_y, u, x, y)u_{yx}$
	$= f(u_x, u_y, u, x, y)$
Epälineaarinen	$f(u_{xx}, u_{yy}, u_{xy}, u_{yx}, u_x, u_y, u, x, y) = 0$

Taulukko 2.2: 2. kl:n osittais-DY:t kasvavan epälineaarisuuden mukaan

2.3 Parabolisuus, elliptisyys ja hyperbolisuus

2.4 Erikoispisteet

Tarkastellaan yleistä 2. kertaluvun tavallista homogeenista differentiaaliyhtälöä:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}z^2} + P(z)\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} + Q(z)f = 0, \qquad z \in D \in \mathbb{C}} \tag{2.17}$$

2.4.1 Tavallinen/säännöllinen piste (ordinary point)

Piste $z_0 \in D$ on yhtälön (2.17) tavallinen/säännöllinen piste, jos z_0:n ympäristö $D_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \varepsilon\}$ siten, että P ja Q ovat analyyttisiä

2.4.2 Heikko erikoispiste (regular/inessential singularity)

Piste $z_0 \in D$ on yhtälön (2.17) heikko erikoispiste, jos P:llä on korkeintaan 1. kertaluvun napa z_0:ssa ja Q:lla on korkeintaan 2. kertaluvun napa z_0:ssa

2.4.3 Vahva erikoispiste (irregurlar/essential singularity)

Piste $z_0 \in D$ on yhtälön (2.17) vahva erikoispiste, jos tavallisen pisteen tai heikon erikoispisteen ehdot eivät täyty.

2.4.4 Piste äärettömydessä

Yhtälön käyttäytymistä äärettömyydessä, eli kun $z_0 \to \infty$ voidaan tarkastella muuttujanvaihdoksella $t = \frac{1}{z}$, joka lähestyy nollaa ku z lähestyy ääretöntä. Muuttujanvaihdoksesta seuraa seuraavat ehdot:

- Piste $z_0 = \infty$ on yhtälön (2.17) tavallinen/säännöllinen piste, jos $\frac{2}{t} - \frac{P(1/t)}{t^2}$ ja $\frac{Q(1/t)}{t^4}$ ovat säännöllisiä pisteessä $t = 0$
- Piste $z_0 = \infty$ on yhtälön (2.17) heikko erikoispiste, jos $t = 0$ on korkeinntaan 1. kertaluvun napa lausekkeelle $\frac{2}{t} - \frac{P(1/t)}{t^2}$ ja korkeintaan 2. kertaluvun napa lausekkeelle $\frac{Q(1/t)}{t^4}$.
- Muutoin $z_0 = \infty$ on vahva erikoispiste

2.5 Reunaehdot ja alkuarvot

2.5.1 Neumann-reunaehdot

2.5.2 Dirichlet-reunaehdot

2.6 Differentiaalioperaattoreita

Operaattorin nimi	Merkintäesimerkkejä	Määritelmä	Lisätietoja
Erotusoperaattori	Δf	$f(x+h)-f(x)$	
Erotusosamäärä	$\frac{\Delta f}{\Delta x}$	$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$	
Differentiaali	$\mathrm{d}f$		
2. differentiaali	$\mathrm{d}^2 f$		
Derivaatta	$Df,\quad D_x f,\quad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x},\quad f',\quad \dot{f}$	$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$	
2. derivaatta	$D^2 f,\quad D_x^2 f,\quad \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2},\quad f'',\quad \ddot{f}$	$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}$	
N:s derivaatta	$D^n f,\quad D_x^n f,\quad \frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n},\quad f^{(n)}$	$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f^{(n-1)}(x+h)-f^{(n-1)}(x)}{h}$	
Yleinen lineaarinen	Df	$\sum\limits_{i=1}^{n} a_k D^k f$	
Homogeenisyys	Θf	$x\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$	
Cauchyn–Eulerin	?	$p(x)\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$	
Sturmin–Liouville'n	$Lf,\quad \mathcal{L}f$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p(x)\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)-q(x)f$	
Osittaisdifferentiaali	∂f		
2. osittaisdifferentiaali	$\partial^2 f$		
Osittaisderivaatta	$\partial_x f,\quad \frac{\partial f}{\partial x},\quad f_x$		
2. osittaisderivaatta	$\partial_x^2 f, \partial_x\partial_y f, \partial_{xy} f, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}, f_{xx}, f_{xy}$		
N:s osittaisderivaatta	$\partial_x^n f, \partial_x^k\partial_y^l f, \partial_{ab\ldots z} f, \frac{\partial^n f}{\partial x^n}, \frac{\partial^{a+b+c} f}{\partial x^a\,\partial y^b\,\partial z^c}, f_{ab\ldots z}$		
Gradientti	$\nabla f,\quad \vec{\nabla} f,\quad \mathrm{grad} f,\quad \boldsymbol{\nabla} f$		
Suunnattu derivaatta	$\nabla_{\mathbf{v}} f,\quad \mathbf{v}\cdot\nabla f$		
Divergenssi	$\nabla\cdot\mathbf{F},\quad \vec{\nabla}\cdot\mathbf{F},\quad \mathrm{div}\mathbf{F}$		
Roottori	$\nabla\times\mathbf{F},\quad \vec{\nabla}\times\mathbf{F},\quad \mathrm{curl}\mathbf{F}$		
Laplacen	$\nabla^2 f,\quad \nabla\cdot\nabla f,\quad \Delta f$		
D'Alembertin	$\Box^2 f,\quad \Box f,\quad \Delta_M f$		
Materiaaliderivaatta	$\frac{\mathrm{D}f}{\mathrm{D}t}$	$\frac{\partial f}{\partial t}+\nabla_{\mathbf{v}} f$	
funktionaalidifferentiaali tai 1. variaatio	δf		
2. funktionaalidifferentiaali tai 2. variaatio	$\delta^2 f$		
Funktionaaliderivaatta	$\frac{\delta f}{\delta x}$		
Diracin operaattori	Df	$D^2 f=\nabla^2 f$	

3 Tavalliset differentiaaliyhtälöt

3.1 1. kl:n tavalliset differentiaaliyhtälöt

Tähän osioon on koottu ensimmäisen kertaluokan differentiaaliyhtälöiden ratkaisuja

3.1.1 Derivaattaoperaattorin ominaisarvohtälö:

$$Df = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \lambda f \tag{3.1}$$

Kyseessä on suoraan separoituva yhtälö:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{f}\,\mathrm{d}f &= \lambda\,\mathrm{d}x \\
\int \frac{1}{f}\,\mathrm{d}f &= \lambda \int \mathrm{d}x \\
\ln f &= \lambda x + C \\
f(x) &= e^{\lambda x + C} \\
f(x) &= e^{\lambda x} e^{C}
\end{aligned}$$

Nimetään uudelleen $e^C \to C$:

$$f(x) = Ce^{\lambda x}$$

Yhtälön 3.1 ja samalla tavallisen derivaattaoperaattorin D ominaisfunktiot f_i ominaisarvoilla λ_i ovat siis muotoa:

$$\boxed{f_i(x) = Ce^{\lambda_i x}} \tag{3.2}$$

3.1.2 Homogeenosyysoperaattorin ominaisarvoyhtälö:

$$\Theta f = x\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \lambda f \tag{3.3}$$

Kyseessä on suoraan separoituva yhtälö:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{f}\,\mathrm{d}f &= \frac{\lambda}{x}\,\mathrm{d}x \\
\int \frac{1}{f}\,\mathrm{d}f &= \lambda \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\
\ln f &= \lambda \ln x + C \\
f(x) &= e^{\lambda \ln x + C} \\
f(x) &= e^{(\ln x)^{\lambda}} e^{C}
\end{aligned}$$

Nimetään uudelleen $e^C \to C$:

$$f(x) = Cx^{\lambda}$$

Yhtälön 3.3 ja samalla homogeenisyysoperaattorin Θ ominaisfunktiot f_i ominaisarvoilla λ_i ovat siis muotoa:

$$\boxed{f_i(x) = Cx^{\lambda_i}} \tag{3.4}$$

3.1.3 Lineaarinen vakiokertoiminen homogeeninen:

$$a\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} + bf = 0 \tag{3.5}$$

Suoraan separoituva yhtälö:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{f}\,\mathrm{d}f &= -\frac{b}{a}\,\mathrm{d}x \\
\int \frac{1}{f}\,\mathrm{d}f &= -\frac{b}{a}\int \mathrm{d}x \\
\ln f &= -\frac{b}{a}x + C \\
f(x) &= e^{-\frac{b}{a}x+C} \\
f(x) &= e^{-\frac{b}{a}x}e^{C}
\end{aligned}$$

Nimetään uudelleen $e^C \to C$:

$$f(x) = Ce^{-\frac{b}{a}x}$$

Yhtälön 3.5 yleinen ratkaisu on siis:

$$\boxed{f(x) = Ce^{-\frac{b}{a}x}} \tag{3.6}$$

3.1.4 Lineaarinen vakiokertoiminen epähomogeeninen:

$$a\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} + bf = c(x) \tag{3.7}$$

Yhtälön yleinen ratkaisu $f(x)$ on homogeenisen yhtälön 3.5 ratkaisun $f_h(x)$ ja täydellisen yhtälön 3.7 yksittäisratkaisun $f_y(x)$ summa:

$$f(x) = f_h(x) + f_y(x)$$

Homogeenisen yhtälön ratkaisu on muotoa $f_h(x) = Ce^{-\frac{b}{a}x}$. Määritetään täydellisen yhtälön yksittäisratkaisu vakion varioinnilla, eli sijoitetaan yrite $f_y(x) = C(x)e^{-\frac{b}{a}x}$, jossa integroimisvakio on korotettu funktioksi, täydelliseen yhtälöön:

$$\begin{aligned}
a\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(C(x)e^{-\frac{b}{a}x}\right) + b\left(C(x)e^{-\frac{b}{a}x}\right) &= c(x) \\
-a\frac{b}{a}C(x)e^{-\frac{b}{a}x} + aC'(x)e^{-\frac{b}{a}x} + bC(x)e^{-\frac{b}{a}x} &= c(x) \\
\cancel{-bC(x)e^{-\frac{b}{a}x}} + aC'(x)e^{-\frac{b}{a}x} + \cancel{bC(x)e^{-\frac{b}{a}x}} &= c(x) \\
aC'(x)e^{-\frac{b}{a}x} &= c(x)
\end{aligned}$$

Nyt $C(x)$ voidaan määrittää:

$$\begin{aligned}
C'(x) &= \frac{c(x)}{a}e^{\frac{b}{a}x} \\
C(x) &= \frac{1}{a}\int c(x)e^{\frac{b}{a}x}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Yksittäisratkaisuksi saadaan siis: $f_y(x) = C(x)e^{-\frac{b}{a}x} = \left(\frac{1}{a}\int c(x)e^{\frac{b}{a}x}\,\mathrm{d}x\right)e^{-\frac{b}{a}x}$. Ja yleinen ratkaisu on muotoa:

$$f(x) = f_h(x) + f_y(x) = Ce^{-\frac{b}{a}x} + \left(\frac{1}{a}\int c(x)e^{\frac{b}{a}x}\,\mathrm{d}x\right)e^{-\frac{b}{a}x}$$

$$\boxed{f(x) = e^{-\frac{b}{a}}\left(C + \frac{1}{a}\int c(x)e^{\frac{b}{a}x}\,\mathrm{d}x\right)} \tag{3.8}$$

3.1.5 Lineaarinen homogeeninen:

$$a(x)\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} + b(x)f = 0 \tag{3.9}$$

Suoraan separoituva yhtälö:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{f}\,\mathrm{d}f &= -\frac{b(x)}{a(x)}\,\mathrm{d}x \\
\int \frac{1}{f}\,\mathrm{d}f &= -\int \frac{b(x)}{a(x)}\,\mathrm{d}x \\
\ln f &= -\int \frac{b(x)}{a(x)}\,\mathrm{d}x + C \\
f(x) &= e^{-\int \frac{b(x)}{a(x)}\,\mathrm{d}x + C} \\
f(x) &= e^{-\int \frac{b(x)}{a(x)}\,\mathrm{d}x}e^{C}
\end{aligned}$$

Nimetään uudelleen $e^C \to C$:

$$f(x) = Ce^{-\int \frac{b(x)}{a(x)}\,\mathrm{d}x}$$

Yhtälön 3.9 yleinen ratkaisu on siis:

$$\boxed{f(x) = Ce^{-\int \frac{b(x)}{a(x)}\,\mathrm{d}x}} \tag{3.10}$$

3.1.6 Lineaarinen epähomogeeninen:

$$a(x)\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} + b(x)f = c(x) \tag{3.11}$$

Yhtälön yleinen ratkaisu $f(x)$ on homogeenisen yhtälön 3.9 ratkaisun $f_h(x)$ ja täydellisen yhtälön 3.11 yksittäisratkaisun $f_y(x)$ summa:

$$f(x) = f_h(x) + f_y(x)$$

Homogeenisen yhtälön ratkaisu on muotoa $f_h(x) = Ce^{-\int \frac{b(x)}{a(x)}\,\mathrm{d}x}$. Määritetään täydellisen yhtälön yksittäisratkaisu vakion varioinnilla, eli sijoitetaan yrite $f_y(x) = C(x)e^{-\int \frac{b(x)}{a(x)}\,\mathrm{d}x}$, jossa integroimisvakio on korotettu funktioksi, täydelliseen yhtälöön:

$$
\begin{aligned}
a(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(C(x)e^{-\int\frac{b(x)}{a(x)}\,\mathrm{d}x}\right)+b(x)\left(C(x)e^{-\int\frac{b(x)}{a(x)}\,\mathrm{d}x}\right)&=c(x)\\
-a(x)\frac{b(x)}{a(x)}C(x)e^{-\int\frac{b(x)}{a(x)}\,\mathrm{d}x}+a(x)C'(x)e^{-\int\frac{b(x)}{a(x)}\,\mathrm{d}x}+b(x)C(x)e^{-\int\frac{b(x)}{a(x)}\,\mathrm{d}x}&=c(x)\\
\cancel{-b(x)C(x)e^{-\int\frac{b(x)}{a(x)}\,\mathrm{d}x}}+a(x)C'(x)e^{-\int\frac{b(x)}{a(x)}\,\mathrm{d}x}+\cancel{b(x)C(x)e^{-\int\frac{b(x)}{a(x)}\,\mathrm{d}x}}&=c(x)\\
a(x)C'(x)e^{-\int\frac{b(x)}{a(x)}\,\mathrm{d}x}&=c(x)
\end{aligned}
$$

Nyt $C(x)$ voidaan määrittää:

$$
\begin{aligned}
C'(x)&=\frac{c(x)}{a(x)}e^{\int\frac{b(x)}{a(x)}\,\mathrm{d}x}\\
C(x)&=\int\frac{c(x)}{a(x)}e^{\int\frac{b(x)}{a(x)}\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

Yksittäisratkaisuksi saadaan siis: $f_y(x)=C(x)e^{-\int\frac{b(x)}{a(x)}\,\mathrm{d}x}=\left(\int\frac{c(x)}{a(x)}e^{\int\frac{b(x)}{a(x)}\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x\right)e^{-\int\frac{b(x)}{a(x)}\,\mathrm{d}x}$. Ja yleinen ratkaisu on muotoa:

$$
f(x)=f_h(x)+f_y(x)=Ce^{-\int\frac{b(x)}{a(x)}\,\mathrm{d}x}+\left(\int\frac{c(x)}{a(x)}e^{\int\frac{b(x)}{a(x)}\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x\right)e^{-\int\frac{b(x)}{a(x)}\,\mathrm{d}x}
$$

$$
\boxed{f(x)=e^{-\int\frac{b(x)}{a(x)}\,\mathrm{d}x}\left(C+\int\frac{c(x)}{a(x)}e^{\int\frac{b(x)}{a(x)}\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x\right)} \tag{3.12}
$$

3.2 Notaationvaihdos:

Käytännössä aina derivaatan edessä oleva kerroinfunktio $a(x)$ voidaan jakaa pois, jollon lineaarinen ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälö saadaan muotoon:

$$
\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}+\frac{b(x)}{a(x)}f=\frac{c(x)}{a(x)}
$$

Kun osamäärät $\frac{b(x)}{a(x)}$ ja $\frac{c(x)}{a(x)}$ nimetään uudelleen funktioiksi $p(x)$ ja $q(x)$, saadaan yhtälö muotoon:

$$
\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}+p(x)f=q(x) \tag{3.13}
$$

Nyt yleinen ratkaisut voidaan ilmaista p:n ja q:n avulla:

$$
\boxed{f(x)=e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}\left(C+\int q(x)e^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x\right)} \tag{3.14}
$$

3.3 2. kl:n tavalliset differentiaaliyhtälöt

Tähän osioon on koottu useiden toisen kertaluvun differentiaaliyhtälöiden ratkaisuja.

3.3.1 Harmoninen yhtälö (toisen kertaluvun derivaatan ominaisarvoyhtälö)

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} = -\lambda f \tag{3.15}$$

Siirretään termit samalle puolelle:

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} + \lambda f = 0$$

Muunnetaan separoituvaksi yhtälöksi kertomalla puolittain $2\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$:lla:

$$2\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} + 2\lambda\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}f = 0$$

Nyt voidaan tunnistaa tulon derivaatta:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\left[\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right]^2 + \lambda f^2\right) = 0$$

Integroidaan puolittain x:n suhteen:

$$\left[\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right]^2 + \lambda f^2 = C_1$$

Separoidaan:

$$\begin{aligned}
\left[\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right]^2 &= C_1 - \lambda f^2 \\
\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} &= \sqrt{C_1 - \lambda f^2} \\
\frac{1}{\sqrt{C_1 - \lambda f^2}}\,\mathrm{d}f &= \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Integroidaan puolittain:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{C_1 - \lambda f^2}}\,\mathrm{d}f &= \int \mathrm{d}x \\
\int \frac{1}{\sqrt{C_1 - \lambda f^2}}\,\mathrm{d}f &= x + C_2
\end{aligned}$$

Otetaan λ yhteiseksi tekijäksi neliöjuuressä ja sitä kautta $\sqrt{\lambda}$ ulos integraalista:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int \frac{1}{\sqrt{\frac{C_1}{\lambda} - f^2}}\,\mathrm{d}f = x + C_2$$

Merkitään $\frac{C_1}{\lambda} \to c^2$

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int \frac{1}{\sqrt{c^2 - f^2}}\,\mathrm{d}f = x + C_2$$

Tehdään muuttujanvaihdos $f = c\sin\theta$. Tällöin $\mathrm{d}f = c\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int \frac{1}{\sqrt{c^2 - c^2\sin^2\theta}} c\cos\theta\,\mathrm{d}\theta &= x + C_2 \\
\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int \frac{\cancel{c}\cos\theta}{\cancel{c}\sqrt{1-\sin^2\theta}}\,\mathrm{d}\theta &= x + C_2
\end{aligned}
$$

Tiedetään: $1 - \sin^2\theta = \cos^2\theta$:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int \frac{\cos\theta}{\sqrt{\cos^2\theta}}\,\mathrm{d}\theta &= x + C_2 \\
\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int \frac{\cancel{\cos\theta}}{\cancel{\cos\theta}}\,\mathrm{d}\theta &= x + C_2 \\
\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int \mathrm{d}\theta &= x + C_2 \\
\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\theta &= x + C_2
\end{aligned}
$$

Sijoitetaan $\theta = \arcsin\left(\frac{f}{c}\right)$:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\arcsin\left(\frac{f}{c}\right) &= x + C_2 \\
\arcsin\left(\frac{f}{c}\right) &= \sqrt{\lambda}x + \sqrt{\lambda}C_2
\end{aligned}
$$

Merkitään $\sqrt{\lambda}C_2 \to C_2$:

$$
\begin{aligned}
\frac{f}{c} &= \sin\left(\sqrt{\lambda}x + C_2\right) \\
f &= c\sin\left(\sqrt{\lambda}x + C_2\right)
\end{aligned}
$$

Nimetään $c \to C_1$:

$$
f(x) = C_1\sin\left(\sqrt{\lambda}x + C_2\right)
$$

On saatu yksi lineaarisesti riippumaton ratkaisu, joka voidaan muuntaa kehden lineaarisesti riippumattoman ratkaisun summaksi sinin summakaavalla $\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= C_1\left[\sin\left(\sqrt{\lambda}x\right)\cos C_2 + \cos\left(\sqrt{\lambda}x\right)\sin C_2\right] \\
f(x) &= C_1\cos C_2\sin\left(\sqrt{\lambda}x\right) + C_1\sin C_2\cos\left(\sqrt{\lambda}x\right)
\end{aligned}
$$

Nimetään uudelleen $C_1\cos C_2 \to C_1$ ja $C_1\sin C_2 \to C_2$:

$$
f(x) = C_1\sin\left(\sqrt{\lambda}x\right) + C_2\cos\left(\sqrt{\lambda}x\right)
$$

On saatu harmonisen yhtälön yleinen ratkaisu:

$$\boxed{f(x) = C_1 \sin\left(\sqrt{\lambda}x\right) + C_2 \cos\left(\sqrt{\lambda}x\right), \qquad \lambda > 0} \tag{3.16}$$

Sarjaratkaisumenetelmällä olisi löydetty potenssisarjaesitykset sinille ja kosinille:

$$\boxed{\begin{aligned} \sin x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \\ \cos x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \end{aligned}} \tag{3.17}$$

3.3.2 Lineaarinen vakiokertoiminen homogeeninen

$$a\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} + b\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} + cf = 0 \tag{3.18}$$

Mikäli termi cf siirrettäisiin toiselle puolelle, olisi yhtälö muotoa $af'' + bf' = -cf$, mikä osoittaisi, että funktiot f derivaatat ovat suoraan verrannollisia funktioon f itse. Tiedetään, että eksponenttifunktiolla e^{rx} on tämä ominaisuus, sillä tavallisen derivaattaoperaattorin ominaisfunktiot olivat juuri yleisiä eksponenttifunktioita $Ce^{\lambda_i x}$. Sijoitetaan siis yrite $f(x) = e^{rx}$ yhtälöön:

$$\begin{aligned} a\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}(e^{rx}) + b\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(e^{rx}) + c(e^{rx}) &= 0 \\ ar^2 e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} &= 0 \end{aligned}$$

Eksponenttifunktio on puhtaasti positiivinen, jolloin yhtälö voidaan jakaa puolittain sillä:

$$ar^2 + br + c = 0$$

Kyseessä on toisen asteen yhtälö r:n suhteen, jonka ratkaisu määrittää r:n arvon suhteessa alkuperäisen yhtälön kertoimiin:

$$r_{\pm} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Nyt riippuen siitä, onko yhtälöllä kaksi erillistä juurta vai yksi kaksoisjuuri, näyttää ratkaisu hieman erilaiselta. Mikäli juuria on kaksi, on lopullinen ratkaisu lineaarikombinaatio eksponenttifunktioista $e^{r_+ x}$ sekä $e^{r_- x}$:

$$f(x) = C_1 e^{r_+ x} + C_2 e^{r_- x}$$

Jos taas $b^2 = 4ac$, jolloin $r_+ = r_- = r$, on lopullinen ratkaisu lineaarikombinaatio eksponenttifunktioista e^{rx} sekä xe^{rx}:

$$f(x) = C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx}$$

On siis ratkaistu yleinen toisen kertaluvun homogeeninen vakiokertoiminen yhtälö:

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) = C_1 e^{r_+ x} + C_2 e^{r_- x} = C_1 e^{\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} x} + C_2 e^{\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} x}, &\quad b^2 \neq 4ac \\ f(x) = C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx} = C_1 e^{\frac{-b}{2a} x} + C_2 x e^{\frac{-b}{2a} x}, &\quad b^2 = 4ac \end{aligned}} \tag{3.19}$$

Lisäksi on hyödyllistä tarkastella erikseen tapausta, jossa $b^2 < 4ac$, sillä tällöin juuret $r_\pm$ ovat kompleksisia ja ratkaisu voidaan ilmaista hieman erilaisessa muodossa. Kompleksiset juuret ovat toistensa liittolukuja, jolloin merkitään $r_\pm = \alpha \pm \beta i$. Nyt yleiseksi ratkaisuksi saadaan:

$$\begin{aligned}
f(x) &= C_1 e^{r_+ x} + C_2 e^{r_- x} \\
&= C_1 e^{\alpha x + i\beta x} + C_2 e^{\alpha x - i\beta x} \\
&= C_1 e^{\alpha x + i\beta x} + C_2 e^{\alpha x - i\beta x} \\
&= C_1 e^{\alpha x} e^{i\beta x} + C_2 e^{\alpha x} e^{-i\beta x} \\
&= e^{\alpha x} \left(C_1 e^{i\beta x} + C_2 e^{-i\beta x} \right)
\end{aligned}$$

Ilmaistaan kompleksieksponentiaalit trigonometristen funktioiden avulla:

$$= e^{\alpha x} \left(C_1 \cos(\beta x) + C_1 i \sin(\beta x) + C_2 \cos(-\beta x) + C_2 i \sin(-\beta x) \right)$$

Kosinin parillisuuden nojalla $\cos(-\beta x) = \cos(\beta x)$ ja sinin parittomuuden nojalla $\sin(-\beta x) = -\sin(\beta x)$:

$$\begin{aligned}
&= e^{\alpha x} \left(C_1 \cos(\beta x) + C_1 i \sin(\beta x) + C_2 \cos(\beta x) - C_2 i \sin(\beta x) \right) \\
&= e^{\alpha x} \left([C_1 + C_2] \cos(\beta x) + i[C_1 - C_2] \sin(\beta x) \right)
\end{aligned}$$

Merkitään $A = C_1 + C_2$ ja $B = i[C_1 - C_2]$, jolloin saadaan:

$$f(x) = e^{\alpha x} \left(A \cos(\beta x) + B \sin(\beta x) \right)$$

Kompleksisten juurten tapauksessa ratkaisu voidaan siis myös ilmaista eksponenttifunktion ja trigonometristen funktioiden tulona:

$$\boxed{f(x) = e^{\alpha x} \left(A \cos(\beta x) + B \sin(\beta x) \right), \qquad r_\pm = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \alpha \pm \beta i, \quad b^2 < 4ac} \tag{3.20}$$

3.3.3 Heiluriyhtälö:

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \frac{g}{L} \sin\theta = 0 \tag{3.21}$$

3.3.4 Cauchyn–Eulerin 2. kertaluvun yhtälö

$$x^2 \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} + ax \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} + bf = 0 \tag{3.22}$$

Ratkaistaan muuttujanvaihdoksella $x = e^t \iff t = \ln x$. Määritetään lausekkeet derivaatoille:

- $\underline{\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}:}$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} \\
&= \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} (\ln x) \\
\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} &= \frac{1}{x} \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}
\end{aligned}$$

- $\underline{\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}t^2}}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right) \\
&= \frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right) + \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{x}\right) \\
&= \frac{1}{x}\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\left(-\frac{1}{x^2}\right) \\
&= \frac{1}{x^2}\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}t^2} - \frac{1}{x^2}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} \\
\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} &= \frac{1}{x^2}\left(\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right)
\end{aligned}$$

Sijoitetaan derivaatat yhtälöön:

$$\begin{aligned}
\cancel{x^2}\frac{1}{\cancel{x^2}}\left(\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right) + a\cancel{x}\frac{1}{\cancel{x}}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} + bf = 0 \\
\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} + a\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} + bf = 0 \\
\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}t^2} + (a-1)\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} + bf = 0
\end{aligned}$$

Saatu yhtälö on vakiokertoiminen, jolloin se voidaan ratkaista suoraan karakteristisen polynomin avulla:

$$\begin{aligned}
\lambda^2 + (a-1)\lambda + b = 0 \\
\lambda_{1,2} &= \frac{-(a-1) \pm \sqrt{(a-1)^2 - 4(1)(b)}}{2(1)} \\
\lambda_{1,2} &= \frac{1 - a \pm \sqrt{(a-1)^2 - 4b}}{2}
\end{aligned}$$

Mikäli $(a-1)^2 = 4b$, pätee $\lambda_1 = \lambda_2$. Tällöin yhtälön yleinen ratkaisu on muotoa $C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 t e^{\lambda_1 t}$. Mikäli taas $(a-1)^2 \neq 4b$, pätee $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Tällöin yhtälön yleinen ratkaisu on muotoa $C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$. Tarkastellaan kumpaakin tapausta samanaikaisesti:

$$f(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 t e^{\lambda_1 t} \quad \vee \quad f(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$

Sijoitetaan takaisin $t = \ln x$:

$$\begin{aligned}
f(x) = C_1 e^{\lambda_1 \ln x} + C_2 \ln(x) e^{\lambda_1 \ln x} \quad &\vee \quad f(x) = C_1 e^{\lambda_1 \ln x} + C_2 e^{\lambda_2 \ln x} \\
f(x) = C_1 e^{\ln x^{\lambda_1}} + C_2 \ln(x) e^{\ln x^{\lambda_1}} \quad &\vee \quad f(x) = C_1 e^{\ln x^{\lambda_1}} + C_2 e^{\ln x^{\lambda_2}} \\
f(x) = C_1 x^{\lambda_1} + C_2 \ln(x) x^{\lambda_1} \quad &\vee \quad f(x) = C_1 x^{\lambda_1} + C_2 x^{\lambda_2}
\end{aligned}$$

Ollaan siis löydetty kaksi ratkaisuvaihtoehtoa, jotka kumpikin koostuvat kahdesta lineaarisesti riippumattomasta funktiosta:

$$\boxed{f(x) = C_1 x^{\lambda_1} + C_2 \ln(x) x^{\lambda_1}, \quad \lambda_1 = \frac{1-a}{2}, \quad (a-1)^2 = 4b} \tag{3.23}$$

$$\boxed{f(x) = C_1 x^{\lambda_1} + C_2 x^{\lambda_2}, \quad \lambda_{1,2} = \frac{1-a \pm \sqrt{(a-1)^2 - 4b^2}}{2}, \quad (a-1)^2 \neq 4b} \tag{3.24}$$

3.3.5 Besselin yhtälö

$$x^2 \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} + x \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} + (x^2 - \alpha^2) f = 0, \quad \alpha \in \mathbb{C} \tag{3.25}$$

Ratkaistaan potenssisarjayritteellä $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k x^{k+r}, \quad f_0 \neq 0$. Pätee:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sum_{k=0}^{\infty} f_k x^{k+r} \\
\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} &= \sum_{k=0}^{\infty} f_k \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(x^{k+r}\right) \\
\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} &= \sum_{k=0}^{\infty} f_k (k+r) x^{k+r-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right) \\
\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sum_{k=0}^{\infty} f_k (k+r) x^{k+r-1} \\
\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} &= \sum_{k=0}^{\infty} f_k (k+r) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(x^{k+r-1}\right) \\
\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} &= \sum_{k=0}^{\infty} f_k (k+r)(k+r-1) x^{k+r-2}
\end{aligned}$$

Sijoitetaan Besselin yhtälöön:

$$x^2 \sum_{k=0}^{\infty} f_k (k+r)(k+r-1) x^{k+r-2} + x \sum_{k=0}^{\infty} f_k (k+r) x^{k+r-1} + (x^2 - \alpha^2) \sum_{k=0}^{\infty} f_k x^{k+r} = 0$$

Kerrotaan summien edessä olevat kertoimet summien sisään:

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k (k+r)(k+r-1) x^{k+r} + \sum_{k=0}^{\infty} f_k (k+r) x^{k+r} + \sum_{k=0}^{\infty} f_k \left[x^{k+r+2} - \alpha^2 x^{k+r}\right] = 0$$

Erotellaan viimeinen summa kahdeksi summaksi lineaarisuuden nojalla:

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k (k+r)(k+r-1) x^{k+r} + \sum_{k=0}^{\infty} f_k (k+r) x^{k+r} + \sum_{k=0}^{\infty} f_k x^{k+r+2} - \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^2 x^{k+r} = 0$$

Yhdistetään kaikki summat, joissa x:n potenssit ovat samat:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[(k+r)(k+r-1)+(k+r)-\alpha^2\right]f_k x^{k+r}+\sum_{k=0}^{\infty}f_k x^{k+r+2}=0$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[(k+r)[k+r\cancel{-1+1}]-\alpha^2\right]f_k x^{k+r}+\sum_{k=0}^{\infty}f_k x^{k+r+2}=0$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[(k+r)^2-\alpha^2\right]f_k x^{k+r}+\sum_{k=0}^{\infty}f_k x^{k+r+2}=0$$

Otetaan kaksi ensimmäistä termiä ulos ensimmäisestä summasta:

$$\left[(0+r)^2-\alpha^2\right]f_0 x^{0+r}+\left[(1+r)^2-\alpha^2\right]f_1 x^{1+r}+\sum_{k=2}^{\infty}\left[(k+r)^2-\alpha^2\right]f_k x^{k+r}+\sum_{k=0}^{\infty}f_k x^{k+r+2}=0$$

$$\left[r^2-\alpha^2\right]f_0 x^{r}+\left[(1+r)^2-\alpha^2\right]f_1 x^{1+r}+\sum_{k=2}^{\infty}\left[(k+r)^2-\alpha^2\right]f_k x^{k+r}+\sum_{k=0}^{\infty}f_k x^{k+r+2}=0$$

Nimetään ensimmäisessä summassa indeksi k uudelleen siten, että summaus alkaa jälleen nollasta asettamalla $k=j+2$, sillä tällöin $k=2 \iff j+2=2 \iff j=0$. Vastaavasti toisessa summassa indeksi k voidaan nimetä indeksiksi j yleispätevyyttä menettämättä:

$$\left[r^2-\alpha^2\right]f_0 x^{r}+\left[(1+r)^2-\alpha^2\right]f_1 x^{1+r}+\sum_{j=0}^{\infty}\left[(j+r+2)^2-\alpha^2\right]f_{j+2} x^{j+r+2}+\sum_{j=0}^{\infty}f_j x^{j+r+2}=0$$

Nyt summat voidaan yhdistää yhdeksi summaksi, sillä x:n potenssit ovat samat:

$$\left[r^2-\alpha^2\right]f_0 x^{r}+\left[(1+r)^2-\alpha^2\right]f_1 x^{1+r}+\sum_{j=0}^{\infty}\left\{\left[(j+r+2)^2-\alpha^2\right]f_{j+2}+f_j\right\}x^{j+r+2}=0$$

Kun yhtälön vasen puoli samaistetaan yhtälön oikealla puolella olevan nollasarjan kanssa, tulee jokaisen yksittäisen termin mennä nollaan, eli saadaan kolme ehtoa:

$$\left[r^2-\alpha^2\right]f_0=0 \quad\wedge\quad \left[(1+r)^2-\alpha^2\right]f_1 \quad\wedge\quad \left[(j+r+2)^2-\alpha^2\right]f_{j+2}+f_j=0$$

Koska $f_0\neq 0$, tuottaa ensimmäinen ehto indeksiyhtälön $r^2-\alpha^2=0 \iff r_\pm=\pm\alpha$. Sen sijaan f_1 voi olla nolla, jolloin voidaan asettaa $f_1=0$, jolloin toinen ehto toteutuu. Tarkastellaan seuraavaksi kolmatta ehtoa:

$$\left[(j+r+2)^2-\alpha^2\right]f_{j+2}+f_j=0$$

Ratkaistaan f_{j+2}:

$$f_{j+2}=-\frac{1}{(j+r+2)^2-\alpha^2}f_j$$

Koska f_1 asetettiin nollaan, katoavat kaikki parittoman indeksin omaavat kertoimet, sillä esim. $f_3=-\frac{1}{(1+r+2)^2-\alpha^2}f_1=-\frac{1}{(j+r+2)^2-\alpha^2}\cdot 0=0$, jolloin f_5:lle käy samoin ja niin edelleen. Voidaan siis todeta yleispätevyyttä menettämättä, että $j+2=2n \iff j=2n-2=2(n-1)$, jossa $n\in\mathbb{N}$. Saadaan:

$$f_{2n}=-\frac{1}{(2n\cancel{-2}+r\cancel{+2})^2-\alpha^2}f_{2(n-1)}$$

$$f_{2n}=-\frac{1}{(2n+r)^2-\alpha^2}f_{2(n-1)}$$

Avataan sulut:

$$f_{2n} = -\frac{1}{4n^2 + 4nr + r^2 - \alpha^2} f_{2(n-1)}$$

Sijoitetaan indeksiyhtälön ratkaisu $r_{\pm} = \pm\alpha$:

$$f_{2n} = -\frac{1}{4n^2 \pm 4n\alpha + \cancel{(\pm\alpha)^2 - \alpha^2}} f_{2(n-1)}$$

Otetaan $4n$ yhteiseksi tekijäksi:

$$f_{2n} = -\frac{1}{4n(n \pm \alpha)} f_{2(n-1)}$$

Ilmaistaan $f_{2(n-1)}$ rekursiorelaation avulla $f_{2(n-2)}$:n suhteen:

$$f_{2n} = -\frac{1}{4n(n \pm \alpha)} \left(-\frac{1}{4(n-1)(n-1 \pm \alpha)} \right) f_{2(n-2)}$$

Kun rekursiorelaatiota sovelletaan f_2:een asti saadaan:

$$f_{2n} = -\frac{1}{4n(n \pm \alpha)} \left(-\frac{1}{4(n-1)(n-1 \pm \alpha)} \right) \left(-\frac{1}{4(n-2)(n-2 \pm \alpha)} \right) \cdots \left(-\frac{1}{4(1)(1 \pm \alpha)} \right) f_0$$

Tulossa on n termiä, jolloin pätee:

$$f_{2n} = \frac{(-1)^n}{4^n n! (n \pm \alpha)^{\underline{n}}} f_0$$

Edellisellä rivillä $(n \pm \alpha)^{\underline{n}}$ tarkoittaa laskevaa kertomaa (tai Pochhammerin symbolia), eli esim. $x^{\underline{n}} = x(x-1)(x-2)\ldots(x-(n-1))$. Ilmaistaan 4^n muodossa 2^{2n}, jotta se olisi yhtenevä f_{2n}:n kanssa. Lisäksi laskeva kertoma $\frac{1}{(n\pm\alpha)^{\underline{n}}}$ voidaan ilmaista kertomien osamääränä $\frac{(\pm\alpha)!}{(n\pm\alpha)!}$. Kertoma $(n \pm \alpha)!$ sisältää kaikki kertoman $(\pm\alpha)!$ termit, jolloin jäljelle jää vain laskevan kertoman termit. Koska α voi olla mikä tahansa reaaliluku, ei kertomaa voida aina määrittää, jolloin korvataan kertomat gammafunktiolla, joka hyväksyy reaalilukuargumentin ja jolle pätee: $\Gamma(n+1) = n!$, kun $n \in \mathbb{N}$. Tällöin laskeva kertoma on muotoa: $\frac{\Gamma(\pm\alpha+1)}{\Gamma(n\pm\alpha+1)}$. Saadaan:

$$f_{2n} = \frac{(-1)^n \Gamma(\pm\alpha + 1)}{2^{2n} n! \Gamma(n \pm \alpha + 1)} f_0$$

Kerätään kaikki n-riippumattomat termit etukertoimeksi ja järjestellään termejä hieman:

$$f_{2n} = f_0 \Gamma(\pm\alpha + 1) \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(n \pm \alpha + 1)} \frac{1}{2^{2n}}$$

Sijoitetaan nyt f_{2n} potenssisarjayritteeseen asettamalla $k = 2n$ ja muistamalla, että $r_{\pm} = \pm\alpha$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{2n} x^{2n \pm \alpha}$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_0 \Gamma(\pm\alpha + 1) \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(n \pm \alpha + 1)} \frac{1}{2^{2n}} x^{2n \pm \alpha}$$

Otetaan kaikki n-riippumattomat termit summan ulkopuolelle:

$$f(x) = f_0 \Gamma(\pm\alpha + 1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n \pm \alpha + 1)} \frac{x^{2n\pm\alpha}}{2^{2n}}$$

f_0 voidaan valita miksi n-riippumattomaksi vakioksi tahansa yleispätevyyttä menettämättä. Valitaan f_0 siten, että $\Gamma(\pm\alpha+1)$ supistuu pois ja että $\frac{x^{2n\pm\alpha}}{2^{2n}}$ voidaan saattaa muotoon $\left(\frac{x}{2}\right)^{2n\pm\alpha}$. Asetetaan siis $f_0 = \frac{1}{\Gamma(\pm\alpha+1)2^{\pm\alpha}}$:

$$f(x) = \frac{1}{\cancel{\Gamma(\pm\alpha+1)}2^{\pm\alpha}} \cancel{\Gamma(\pm\alpha+1)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n \pm \alpha + 1)} \frac{x^{2n\pm\alpha}}{2^{2n}}$$
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n \pm \alpha + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n\pm\alpha}$$

Ollaan siis ratkaistu Besselin yhtälö. On huomattavaa, että ratkaisu $f(x)$ riippuu alkuperäisen yhtälön vapaasta parametrista α, jolloin ratkaisuja voidaan merkitä nk. ensimmäisen lajin Besselin funktioilla $J_{\pm\alpha}(x)$:

$$\boxed{J_{\pm\alpha}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n \pm \alpha + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n\pm\alpha}} \tag{3.26}$$

Kun $\alpha \notin \mathbb{Z}$, on Besselin yhtälön yleinen ratkaisu lineaarikombinaatio funktioista $J_\alpha(x)$ ja $J_{-\alpha}(x)$:

$$\boxed{f(x) = C_1 J_\alpha(x) + C_2 J_{-\alpha}(x), \qquad \alpha \notin \mathbb{Z}} \tag{3.27}$$

Jos taas $\alpha \in \mathbb{Z}$, eivät $J_\alpha(x)$ ja $J_{-\alpha}(x)$ ole enää lineaarisesti riippumattomia, sillä pätee relaatio $(-1)^\alpha J_\alpha(x) = J_{-\alpha}(x)$. Tällöin voidaan johtaa uusi lineaarisesti riippumaton ratkaisu, nk. toisen lajin Besselin funktio $Y_\alpha(x)$, käyttäen sarjayritemenetelmän (Frobeniuksen metodin) teoriaa. Toisen lajin Besselin funktiolle pätee seuraavat representaatiot:

$$\boxed{Y_\alpha(x) = \frac{\cos(\alpha\pi) J_\alpha(x) - J_{-\alpha}(x)}{\sin(\alpha\pi)}, \qquad \alpha \notin \mathbb{Z}} \tag{3.28}$$

Kun α on kokonaisluku n, saadaan toisen lajin Besselin funktio raja-arvosta $\alpha \to n$:

$$\boxed{Y_n(x) = \lim_{\alpha \to n} Y_\alpha(x), \qquad \alpha \in \mathbb{Z}} \tag{3.29}$$

Toisen lajin Besselin funktioiden avulla ilmaistuna yhtälön ratkaisu on lineaarikombinaatio:

$$\boxed{f(x) = C_1 J_\alpha(x) + C_2 Y_\alpha(x), \qquad \alpha \notin \mathbb{Z}} \tag{3.30}$$

Lineaarisesti riippumattomat ratkaisut voidaan ilmaista myös nk. kolmannen lajin Besselin funktioiden (Hankelin funktioiden) $H_\alpha^{(1)}(x)$ ja $H_\alpha^{(2)}(x)$ avulla. Ne määritellään seuraavasti:

$$\boxed{\begin{aligned} H_\alpha^{(1)}(x) &= J_\alpha(x) + iY_\alpha(x) = \frac{J_{-\alpha}(x) - e^{-\alpha\pi i} J_\alpha(x)}{i\sin(\alpha\pi)}, \qquad \alpha \notin \mathbb{Z} \\ H_\alpha^{(2)}(x) &= J_\alpha(x) - iY_\alpha(x) = \frac{J_{-\alpha}(x) - e^{\alpha\pi i} J_\alpha(x)}{-i\sin(\alpha\pi)}, \qquad \alpha \notin \mathbb{Z} \end{aligned}} \tag{3.31}$$

Jälleen kun $\alpha \in \mathbb{Z}$, pitää funktiot määrittää raja-arvolla. Nyt Besselin yhtälön ratkaisu voidaan ilmaista muodossa:

$$\boxed{f(x) = C_1 H_\alpha^{(1)}(x) + C_2 H_\alpha^{(2)}(x)} \tag{3.32}$$

3.3.6 Muokattu Besselin yhtälö

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} + x\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} - (x^2+\alpha^2)f = 0, \qquad \alpha \in \mathbb{C} \tag{3.33}$$

Yhtälö saadaan tekemällä muuttujanvaihdos $x \to ix \iff \mathrm{d}x \to i\,\mathrm{d}x$ alkuperäiseen Besselin yhtälöön. Yhtälön ratkaisut ovat ensimmäisen ja toisen lajin muokattuja Besselin funktioita $I_\alpha(x)$ ja $K_\alpha(x)$. Ne määritellään seuraavasti:

$$\boxed{I_{\pm\alpha}(x) = i^{-(\pm\alpha)}J_{\pm\alpha}(ix) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!\Gamma(n\pm\alpha+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n\pm\alpha}} \tag{3.34}$$

$$\boxed{K_\alpha(x) = \frac{\pi}{2}\frac{I_{-\alpha}(x) - I_\alpha(x)}{\sin(\alpha\pi)}, \qquad \alpha \notin \mathbb{Z}} \tag{3.35}$$

Jälleen kun $\alpha \in \mathbb{Z}$, pitää $K_\alpha(x)$ määrittää raja-arvolla. Muokatun Besselin yhtälön ratkaisu on muotoa:

$$\boxed{f(x) = C_1 I_\alpha(x) + C_2 I_{-\alpha}(x), \qquad \alpha \notin \mathbb{Z}} \tag{3.36}$$

$$\boxed{f(x) = C_1 I_\alpha(x) + C_2 K_\alpha(x), \qquad \alpha \in \mathbb{Z}} \tag{3.37}$$

3.3.7 Besselin pallofunktiot

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} + 2x\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} + [k^2x^2 - l(l+1)]f = 0, \qquad l \in \mathbb{Z} \tag{3.38}$$

Yhtälö muistuttaa tavallista Besselin yhtälöä ja voidaankin muuntaa sellaiseksi merkitsemällä ensin $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}g(x)$. f:n derivaatoiksi saadaan:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}g(x)\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{x}}g'(x) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)g(x) \\
&= \frac{1}{\sqrt{x}}g'(x) - \frac{1}{2x\sqrt{x}}g(x) \\
\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} &= \frac{1}{\sqrt{x}}\left(g'(x) - \frac{1}{2x}g(x)\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\left(g'(x) - \frac{1}{2x}g(x)\right)\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{x}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(g'(x) - \frac{1}{2x}g(x)\right) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(g'(x) - \frac{1}{2x}g(x)\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{x}}\left(g''(x) - \frac{1}{2x}g'(x) + \frac{1}{2x^2}g(x)\right) - \frac{1}{2x\sqrt{x}}\left(g'(x) - \frac{1}{2x}g(x)\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{x}}\left(g''(x) - \frac{1}{2x}g'(x) - \frac{1}{2x}g'(x) + \frac{1}{2x^2}g(x) + \frac{1}{4x^2}g(x)\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{x}}\left(g''(x) - \frac{2}{2x}g'(x) + \frac{2+1}{4x^2}g(x)\right) \\
\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} &= \frac{1}{\sqrt{x}}\left(g''(x) - \frac{1}{x}g'(x) + \frac{3}{4x^2}g(x)\right)
\end{aligned}$$

Sijoitetaan Besselin palloyhtälöön:

$$
\begin{aligned}
0 &= x^2 \left[\frac{1}{\sqrt{x}} \left(g''(x) - \frac{1}{x} g'(x) + \frac{3}{4x^2} g(x) \right) \right] + 2x \left[\frac{1}{\sqrt{x}} \left(g'(x) - \frac{1}{2x} g(x) \right) \right] \\
&\quad + [k^2x^2 - l(l+1)] \left[\frac{1}{\sqrt{x}} g(x) \right] \\
0 &= x\sqrt{x} \left(g''(x) - \frac{1}{x} g'(x) + \frac{3}{4x^2} g(x) \right) + 2\sqrt{x} \left(g'(x) - \frac{1}{2x} g(x) \right) \\
&\quad + [k^2x^2 - l(l+1)] \frac{1}{\sqrt{x}} g(x) \\
0 &= x\sqrt{x} g''(x) - \frac{\cancel{x}\sqrt{x}}{\cancel{x}} g'(x) + \frac{3\cancel{x}\sqrt{x}}{4x^{\cancel{2}}} g(x) + 2\sqrt{x} g'(x) - \frac{\cancel{2}\sqrt{x}}{\cancel{2}x} g(x) \\
&\quad + [k^2x^2 - l(l+1)] \frac{1}{\sqrt{x}} g(x) \\
0 &= x\sqrt{x} g''(x) - \sqrt{x} g'(x) + \frac{3\sqrt{x}}{4x} g(x) + 2\sqrt{x} g'(x) - \frac{\sqrt{x}}{x} g(x) \\
&\quad + [k^2x^2 - l(l+1)] \frac{1}{\sqrt{x}} g(x) \\
0 &= x\sqrt{x} g''(x) - \sqrt{x} g'(x) + \frac{3}{4\sqrt{x}} g(x) + 2\sqrt{x} g'(x) - \frac{1}{\sqrt{x}} g(x) \\
&\quad + [k^2x^2 - l(l+1)] \frac{1}{\sqrt{x}} g(x)
\end{aligned}
$$

Ryhmitellään derivaatan kertaluvun mukaan:

$$
\begin{aligned}
0 &= x\sqrt{x} g''(x) + (2\sqrt{x} - \sqrt{x}) g'(x) + \left[k^2x^2 - l(l+1) + \frac{3}{4} - 1 \right] \frac{1}{\sqrt{x}} g(x) \\
0 &= x\sqrt{x} g''(x) + \sqrt{x} g'(x) + \left[k^2x^2 - l(l+1) - \frac{1}{4} \right] \frac{1}{\sqrt{x}} g(x)
\end{aligned}
$$

Kerrotaan puolittain $\sqrt{x}$:llä:

$$
\begin{aligned}
0 &= x\sqrt{x}\sqrt{x} g''(x) + \sqrt{x}\sqrt{x} g'(x) + \left[k^2x^2 - l(l+1) - \frac{1}{4} \right] \frac{\cancel{\sqrt{x}}}{\cancel{\sqrt{x}}} g(x) \\
0 &= x^2 g''(x) + x g'(x) + \left[k^2x^2 - l(l+1) - \frac{1}{4} \right] g(x)
\end{aligned}
$$

Kerrotaan $l(l+1)$ auki:

$$
0 = x^2 g''(x) + x g'(x) + \left[k^2x^2 - l^2 - l - \frac{1}{4} \right] g(x)
$$

Otetaan -1 yhteiseksi tekijäksi:

$$
0 = x^2 g''(x) + x g'(x) + \left[k^2x^2 - \left(l^2 + l + \frac{1}{4} \right) \right] g(x)
$$

Tunnistetaan binomin neliö $l^2 + l + \frac{1}{4} = \left(l + \frac{1}{2}\right)^2$:

$$0 = x^2 g''(x) + x g'(x) + \left[k^2 x^2 - \left(l + \frac{1}{2}\right)^2\right] g(x)$$
$$0 = x^2 \frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}x^2} + x \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} + \left[k^2 x^2 - \left(l + \frac{1}{2}\right)^2\right] g$$

Tehdään muuttujanvaihdos $z = kx \iff x = \frac{z}{k}$. Nyt g:n derivaatoiksi saadaan:

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}z} \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$$
$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}z} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(kx)$$
$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} = k \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}z}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\right) \tag{3.39}$$
$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(k \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}z}) \tag{3.40}$$
$$= k \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}z}\right) \tag{3.41}$$
$$= k \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}z}\right) \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} \tag{3.42}$$
$$= k \frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}z^2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(kx) \tag{3.43}$$
$$\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}x^2} = k^2 \frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}z^2} \tag{3.44}$$

Sijoitetaan Besselin palloyhtälöön:

$$x^2 k^2 \frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}z^2} + xk \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}z} + \left[k^2 x^2 - \left(l + \frac{1}{2}\right)^2\right] g = 0$$

Tunnistetaan $kx = z$ ja $k^2 x^2 = z^2$:

$$z^2 \frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}z^2} + z \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}z} + \left[z^2 - \left(l + \frac{1}{2}\right)^2\right] g = 0$$

Saatu yhtälö on tavallinen Besselin yhtälö parametrin α^2 arvolla $\left(l + \frac{1}{2}\right)^2$. Tällöin sen yleinen ratkaisu on muotoa:

$$g(z) = C_1 J_{l+\frac{1}{2}}(z) + C_2 Y_{l+\frac{1}{2}}(z)$$

Kun muistetaan, että $g(z) = \sqrt{z} f(z)$, saadaan:

$$\sqrt{z}f(z) = C_1 J_{l+\frac{1}{2}}(z) + C_2 Y_{l+\frac{1}{2}}(z)$$
$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{z}}\Big(C_1 J_{l+\frac{1}{2}}(z) + C_2 Y_{l+\frac{1}{2}}(z)\Big)$$

Nimetään uudelleen $z \to x$:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\Big(C_1 J_{l+\frac{1}{2}}(x) + C_2 Y_{l+\frac{1}{2}}(x)\Big)$$

Yleisessä ratkaisussa esiintyvät funktiot $\frac{1}{\sqrt{x}}J_{l+\frac{1}{2}}(x)$ ja $\frac{1}{\sqrt{x}}Y_{l\frac{1}{2}}(x)$ ovat normalisointikerrointa $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ vaille nk. ensimmäisen ja toisen lajin Besselin pallofunktioita:

$$\boxed{j_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}J_{l+\frac{1}{2}}(x)} \tag{3.45}$$

$$\boxed{y_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}Y_{l+\frac{1}{2}}(x) = (-1)^{l+1}\sqrt{\frac{\pi}{2x}}J_{-l-\frac{1}{2}}(x)} \tag{3.46}$$

Suhteessa näihin yhtälön yleinen ratkaisu on siis muotoa:

$$\boxed{f(x) = C_1 j_l(x) + C_2 y_l(x)} \tag{3.47}$$

Yleisesti l:s Besselin pallofunktio saadaan Rayleigh:in kaavojen avulla:

$$\boxed{j_l(x) = (-x)^n\left(\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^l\frac{\sin x}{x}} \tag{3.48}$$

$$\boxed{y_l(x) = -(-x)^n\left(\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^l\frac{\cos x}{x}} \tag{3.49}$$

Vastaavasti kuin tavallisille Besselin funktioille, on olemassa kolmannen lajin Besselin pallofunktioita nk. Hankelin pallofunktioita. Ne ovat lineaarisesti riippumattomia tavallisten Besselin pallofunktioiden kanssa:

$$\boxed{\begin{aligned} h_l^{(1)}(x) &= j_l(x) + iy_l(x) \\ h_l^{(2)}(x) &= j_l(x) - iy_l(x) \end{aligned}} \tag{3.50}$$

Hnkelin pallofunktioiden avulla ilmaistuna Besselin palloyhtälön yleinen ratkaisu on muotoa:

$$\boxed{f(x) = C_1 h_l^{(1)}(x) + C_2 h_l^{(2)}(x)} \tag{3.51}$$

3.3.8 Legendren yhtälö

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} - 2x\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} + l(l+1)f = 0 \tag{3.52}$$

Tarkastellaan Legendren yhtälön erikoispisteitä. Jaetaan se siis $(1-x^2)$:lla:

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} - \frac{2x}{1-x^2}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} + \frac{l(l+1)}{1-x^2} f = 0$$
$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} - \frac{2x}{(1-x)(1+x)}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} + \frac{l(l+1)}{(1-x)(1+x)} f = 0$$

Nyt $P(x) = -\frac{2x}{(1-x)(1+x)}$ ja $P(x) = \frac{l(l+1)}{(1-x)(1+x)}$. Havaitaan, että $x = \pm 1$ ovat yhtälön heikkoja erikoispisteitä, sillä näissä kohdissa P:llä ja Q:lla on ensimmäisen kertaluvun navat. Tarkastellaan pistettä äärettömyydessä:

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0}\left(\frac{2}{t} - \frac{P(1/t)}{t^2}\right) &= \lim_{t\to 0}\left(\frac{2}{t} - \frac{-\frac{2(1/t)}{(1-1/t^2)}}{t^2}\right) \\
&= \lim_{t\to 0}\left(\frac{2}{t} - \frac{-\frac{2}{t(1-1/t^2)}}{t^2}\right) \\
&= \lim_{t\to 0}\left(\frac{2}{t} - \frac{-\frac{2}{(t-1/t)}}{t^2}\right) \\
&= \lim_{t\to 0}\left(\frac{2}{t} + \frac{2}{t^2(t-1/t)}\right) \\
&= \lim_{t\to 0}\left(\frac{2}{t} + \frac{2}{t^3-t}\right) \\
&= \lim_{t\to 0}\left(\frac{2}{t} + \frac{2}{t(t^2-1)}\right) \\
&= \lim_{t\to 0}\left(\frac{2(t^2-1)}{t(t^2-1)} + \frac{2}{t(t^2-1)}\right) \\
&= \lim_{t\to 0}\left(\frac{2(t^2-1)+2}{t(t^2-1)}\right) \\
&= \lim_{t\to 0}\left(\frac{2t^2}{t(t^2-1)}\right) \\
&= \lim_{t\to 0}\left(\frac{2}{t^2-1}\right) \\
&= \frac{2}{0^2-1} \\
\lim_{t\to 0}\left(\frac{2}{t} - \frac{P(1/t)}{t^2}\right) &= -2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0}\left(\frac{Q(1/t)}{t^4}\right) &= \lim_{t\to 0}\left(\frac{\frac{l(l+1)}{1-1/t^2}}{t^4}\right)\\
&= \lim_{t\to 0}\left(\frac{l(l+1)}{t^4(1-1/t^2)}\right)\\
&= \lim_{t\to 0}\left(\frac{l(l+1)}{t^4-t^2}\right)\\
&= \lim_{t\to 0}\left(\frac{l(l+1)}{t^2(t^2-1)}\right)\\
&= \lim_{t\to 0}\left(\frac{l(l+1)}{t^2(t^2-1)}\right)\\
&= \frac{l(l+1)}{0^2(0^2-1)}\\
&= \frac{l(l+1)}{0}\\
\lim_{t\to 0}\left(\frac{Q(1/t)}{t^4}\right) &\to \infty
\end{aligned}$$

Havaitaan siis, että piste äärettömyydessä on yhtälön heikko erikoispiste, sillä Q:lla on siellä kaksinkertainen napa. Legendren yhtälöllä on siis kolme heikkoa erikoispistettä -1, 1 ja ∞. Yhtälö voidaan siis ratkaista potenssisarjayritteellä $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k x^{k+r},\quad f_0 \neq 0$ minkä tahansa pisteen ympäristössä. Derivaatat löytyvät Besselin yhtälön ratkaisusta. Saadaan:

$$(1-x^2)\sum_{k=0}^{\infty} f_k(k+r)(k+r-1)x^{k+r-2} - 2x\sum_{k=0}^{\infty} f_k(k+r)x^{k+r-1} + l(l+1)\sum_{k=0}^{\infty} f_k x^{k+r} = 0$$

Kerrotaan summien edessä olevat kertoimet summien sisään. Erotellaan suoraan ensimmäinen summa kahdeksi erilliseksi summaksi:

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k(k+r)(k+r-1)x^{k+r-2} - \sum_{k=0}^{\infty} f_k(k+r)(k+r-1)x^{k+r} - \sum_{k=0}^{\infty} 2f_k(k+r)x^{k+r} + \sum_{k=0}^{\infty} l(l+1)f_k x^{k+r} = 0$$

Yhdistetään summat, joissa x:n potenssi on sama:

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k(k+r)(k+r-1)x^{k+r-2} + \sum_{k=0}^{\infty}\Big[l(l+1) - 2(k+r) - (k+r)(k+r-1)\Big] f_k x^{k+r} = 0$$

Otetaan ensimmäisestä summasta kaksi ensimmäistä termiä ulos. Ne ovat muotoa: $f_0(0+r)(0+r-1)x^{0+r-2} = f_0 r(r-1)x^{r-2}$ ja $f_1(1+r)(\cancel{1}+r\cancel{-1})x^{1+r-2} = f_1 r(r+1)x^{r-1}$. Saadaan:

$$f_0 r(r-1)x^{r-2} + f_1 r(r+1)x^{r-1} + \sum_{k=2}^{\infty} f_k(k+r)(k+r-1)x^{k+r-2} + \sum_{k=0}^{\infty}\Big[l(l+1) - (k+r)(2+k+r-1)\Big] f_k x^{k+r} = 0$$

Nimetään ensimmäisessä summassa indeksi k uudelleen siten, että summaus alkaa jälleen nollasta asettamalla $k = j+2$, sillä tällöin $k = 2 \iff j+2 = 2 \iff j = 0$. Vastaavasti toisessa summassa indeksi k voidaan nimetä indeksiksi j yleispätevyyttä menettämättä:

$$f_0 r(r-1)x^{r-2}+f_1 r(r+1)x^{r-1}+\sum_{j=0}^{\infty} f_{j+2}(j+r+2)(j+r+1)x^{j+r}+\sum_{j=0}^{\infty}\Big[l(l+1)-(j+r)(j+r+1)\Big] f_j x^{j+r}=0$$

Nyt summat voidaan yhdistää yhdeksi summaksi, sillä x:n potenssit ovat samat:

$$f_0 r(r-1)x^{r-2}+f_1 r(r+1)x^{r-1}+\sum_{j=0}^{\infty}\Big((j+r+2)(j+r+1)f_{j+2}+\Big[l(l+1)-(j+r)(j+r+1)\Big] f_j\Big)\, x^{j+r}=0$$

Kun yhtälön vasen puoli samaistetaan yhtälön oikealla puolella olevan nollasarjan kanssa, tulee jokaisen yksittäisen termin mennä nollaan, eli saadaan kolme ehtoa:

$$f_0 r(r-1)=0 \quad\wedge\quad f_1 r(r+1)=0 \quad\wedge\quad (j+r+2)(j+r+1)f_{j+2}+\Big[l(l+1)-(j+r)(j+r+1)\Big] f_j=0$$

Muodostetaan ensimmäisestä ja toisesta ehdosta yhtälöpari:

$$\begin{cases} f_0 r(r-1)=0 \\ f_1 r(r+1)=0 \end{cases}$$

Mikäli valitaan $r=1$, saadaan:

$$f_0\cdot(1)\cdot(1-1)=0 \iff 0=0 \quad \text{ja} \quad f_1(1)(1+1)=0 \iff 2f_1=0 \iff f_1=0$$

Jos taas valitaan $r=-1$, saadaan:

$$f_0(-1)(-1-1)=0 \iff 2f_0=0 \iff f_0=0 \quad \text{ja} \quad f_1(-1)(-1+1)=0 \iff 0=0$$

Jos taas valitaan $r=0$, saadaan:

$$f_0(0)(0-1)=0 \iff 0=0 \quad \text{ja} \quad f_1(0)(0+1)=0 \iff 0=0$$

Näistä valinnoista $r=0$ antaa suurimman vapauden f_0:n ja f_1:n arvoille, ja ne voidaan myös asettaa nollaan, jolloin valinnat $r=\pm 1$ ovat ikään kuin leivottu sisään valintaan $r=0$. Valitaan siis $r=0$ ja tarkastellaan kolmatta ehtoa:

$$(j+r+2)(j+r+1)f_{j+2}+\Big[l(l+1)-(j+r)(j+r+1)\Big] f_j=0$$

Ratkaistaan f_{j+2}:n suhteen:

$$f_{j+2}=\frac{(j+r)(j+r+1)-l(l+1)}{(j+r+2)(j+r+1)}f_j$$

Sijoitetaan $r=0$:

$$f_{j+2}=\frac{(j+0)(j+0+1)-l(l+1)}{(j+0+2)(j+0+1)}f_j$$
$$f_{j+2}=\frac{j(j+1)-l(l+1)}{(j+2)(j+1)}f_j$$

Koska rekursiorelaatio antaa yhteyden kertoimen f_j ja f_{j+2} välille, ovat parilliset ja parittomat kertoimet täysin toisistaan riippumattomia, jolloin vaikka esim. parilliset kertoimet päättyisivät, voivat parittomat jatkua loputtomiin ja toisinpäin. On huomattavaa, että mikäli $j(j+1) = l(l+1)$, menee kerroin f_{j+2} nollaan, jolloin sarja päättyy näiden termien osalta. Tämä toki tapahtuu vain, mikäli $l(l+1)$ on kokonaisluku, sillä $j(j+1)$ on kokonaisluku. Sarjoissa parilliset ja parittomat kertoimet ovat kuitenkin toisistaan riippumattomia, jolloin jos $l(l+1)$ on parillinen, päättyy parillinen sarja, mutta pariton sarja jatkuu loputtomiin ja toisinpäin. Siispä voidaan todeta, että Legendren yhtälön toisen ratkaisun sarja päättyy, mikäli $l(l+1)$ on kokonaisluku (Tällöin ratkaisuja kutsutaan Legendren polynomeiksi) ja jatkuu loputtomiin, mikäli $l(l+1)$ ei ole kokonaisluku (Tällöin ratkaisuja kutsutaan Legendren funktioiksi). Jatketaan tarkastelua olettamalla, että $l(l+1)$ on kokonaisluku, sillä tämä on usein fysiikassa haluttu vaatimus:

$$f_{j+2} = \frac{j^2 + j - l^2 - l}{(j+2)(j+1)} f_j$$

$j^2 - l^2$ on neliöiden erotus, jolloin se voidaan ilmaista muodossa $(j-l)(j+l)$:

$$f_{j+2} = \frac{(j-l)(j+l) + j - l}{(j+2)(j+1)} f_j$$

Otetaan $(j-l)$ yhteiseksi tekijäksi:

$$f_{j+2} = \frac{(j-l)(j+l+1)}{(j+2)(j+1)} f_j$$

Otetaan vielä (-1) termin eteen:

$$f_{j+2} = (-1)\frac{(l-j)(j+l+1)}{(j+2)(j+1)} f_j$$

Koska l:n oletetaan olevan kokonaisluku, päättyy rekursiorelaatio, mikäli $j = l$, sillä tällöin $l - j = 0$. Jotta j voisi koskaan olla l, tulee j:n ja l:n pariteetin olla samat, sillä j kasvaa aina kahdella, jolloin jos l on parillinen, j saavuttaa sen vain mikäli rekursiorelaatio on alkanut f_0:sta (eli j on parillinen) ja vastaaavasti jos l on pariton, j saavuttaa sen mikäli rekursiorelaatio on alkanut f_1:stä (eli j on pariton). Koska l:n ja j:n pariteetit ovat samat, pätee niiden erotukselle $l - j$ seuraavaa:

- l ja j parillisia:

$$\begin{aligned} l - j &= 2n - 2m \\ l - j &= 2(n-m) \\ l - j &= 2k \end{aligned}$$

  Erotus on siis parillinen.

- l ja j parittomia:

$$\begin{aligned} l - j &= 2n + 1 - (2m+1) \\ l - j &= 2n + 1 - 2m - 1 \\ l - j &= 2n - 2m \\ l - j &= 2(n-m) \end{aligned}$$

  Erotus on siis jälleen parillinen.

Huomataan siis, että erotus $l-j$ on aina parillinen, jolloin tehdään korvaus $l-j=2k \iff j=l-2k$. Saadaan:

$$f_{l-2k+2} = (-1)\frac{2k(l-2k+l+1)}{(l-2k+2)(l-2k+1)}f_{l-2k}$$
$$f_{l-2(k-1)} = (-1)\frac{2k(2l-2k+1)}{(l-2k+1)(l-2k+2)}f_{l-2k}$$

Nyt jos rekursiorelaatiota sovellettaisiin ketjun loppuun asti, ei tiedettäisi, kuinka monta termiä tulossa on. Ratkaistaan sen sijaan rekursiorelaatio f_{l-2k}:n suhteen:

$$f_{l-2k} = (-1)\frac{(l-2k+1)(l-2k+2)}{2k(2l-2k+1)}f_{l-2(k-1)}$$

Nyt siis vasemman puolen indeksissä f_{l-2k} l:stä vähennetään suurempi luku kuin oikean puolen indeksissä $f_{l-2(k-1)}$ $(2(k-1)<2k)$, jolloin oikean puolen indeksi on suurempi ja rekursiorelaatio tuottaa aina seuraavasta indeksistä edellisen indeksin, mikäli siis rekursiorelaatiota sovellettaisiin tasan k kertaa, tulisi oikean puolen indeksiksi $l-2(k-k)=l$, eli olisi johdettu sarjan mielivaltaisen kertoimen f_{l-2k} lauseke suhteessa sarjan viimeiseen kertoimeen f_l. Tehdään siis juuri näin soveltamalla rekursiorelaatiota k kertaa. Nyt sii $2k$ pienenee jokaisella iteraatiolla, sillä $2k=l-j$ ja j kasvaa kun lähestytään l:ää. Samalla logiikalla $l-2k$ kasvaa jokaisella iteraatiolla, sillä $l-2k=j$ ja j kasvaa kun lähestytään l:ää. Saadaan:

$$f_{l-2k} = (-1)\frac{(l-2k+1)(l-2k+2)}{2k(2l-2k+1)}(-1)\frac{(l-2k+1+2)(l-2k+2+2)}{(2k-2)(2l-2k+1-2)}\dots(-1)\frac{(l-1)l}{2(2l-1)}f_{l-2(k-k)}$$

siistitään lauseketta:

$$f_{l-2k} = (-1)^k\frac{(l-2k+1)(l-2k+2)(l-2k+3)\dots(l-1)l}{(2k)(2k-2)(2k-4)\dots(2)(2l-2k+1)(2l-2k+3)(2l-2k+5)\dots(2l-3)(2l-1)}f_l$$

Tulossa $(2k)(2k-2)(2k-4)\dots(2) = (2k)(2[k-1])(2[k-2])\dots(2[1])$ jokaisessa termissä on tekijänä 2, jolloin koko tulosta voidaan ottaa yhteinen tekijä 2^k ja tulo tulee muotoon: $k(k-1)(k-2)\dots(1)=k!$. Saadaan:

$$f_{l-2k} = \frac{(-1)^k}{2^k k!}\frac{(l-2k+1)(l-2k+2)(l-2k+3)\dots(l-1)l}{(2l-2k+1)(2l-2k+3)(2l-2k+5)\dots(2l-3)(2l-1)}f_l$$

Ilmaistaan osoittajan ja nimittäjän tulot nousevan Pochhammerin symbolin avulla. On huomattavaa, että nimittäjässä termit kasvavat kahdella, jolloin käytetään nk. yleistettyä Pochammerin symbolia $\alpha^{\overline{k,2}}$, jossa 2 tarkoittaa että termit kasvavat kahdella. Osoittajan tulossa on $2k$ termiä, sillä jokainen rekursiorelaation iterointi tuotti kaksi uutta termiä osoittajaan ja relaatiota iteroitiin k kertaa. Vastaavasti nimittäjän tulossa termejä on k kappaletta. Saadaan:

$$f_{l-2k} = \frac{(-1)^k}{2^k k!}\frac{(l-2k+1)^{\overline{2k}}}{(2l-2k+1)^{\overline{k,2}}}f_l$$

Yleistetyille Pochhammer-symboleille pätee: $\alpha^{\overline{a,b}} = b^a\left(\frac{\alpha}{b}\right)^{\overline{a}}$ (Helppo todistaa käyttäen yleistetyn Pochammer-symbolin määritelmää). Eritysesti nyt, kun $a=k$ ja $b=2$ saadaan: $\alpha^{\underline{k,2}} = 2^k\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{\underline{k}}$. Käytetään tulosta nimittäjän Pochhammer-symboliin:

$$f_{l-2k} = \frac{(-1)^k}{2^k k!} \frac{(l-2k+1)^{\overline{2k}}}{2^k \left(\frac{2l-2k+1}{2}\right)^{\overline{k}}} f_l$$

$$f_{l-2k} = \frac{(-1)^k}{2^{2k} k!} \frac{(l-2k+1)^{\overline{2k}}}{\left(\frac{2(l-k)+1}{2}\right)^{\overline{k}}} f_l$$

Puolilukujen, kuten $\frac{2(l-k)+1}{2}$ nousevat Pochammer symbolit voidaan ilmaista kaksoiskertoman avulla seuraavasti: $\left(\frac{2m+1}{2}\right)^{\overline{n}} = \frac{(2(m+n)-1)!!}{2^n (2m-1)!!}$. Kaksoiskertoma on kertoma, jossa tulontekijät ovat aina kahden päässä toisistaan. Esimerkiksi $7!! = 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1$ ja $8!! = 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2$. Saadaan:

$$f_{l-2k} = \frac{(-1)^k}{2^{\cancel{2}k} k!} \frac{(l-2k+1)^{\overline{2k}}}{\frac{(2(l\cancel{-k+k})-1)!!}{\cancel{2^k}(2(l-k)-1)!!}} f_l$$

$$f_{l-2k} = \frac{(-1)^k}{2^k k!} \frac{(l-2k+1)^{\overline{2k}}(2(l-k)-1)!!}{(2l-1)!!} f_l$$

Nyt on löydetty tapa ilmaista mielivaltainen kerroin f_{l-2k} viimeisen kertoimen f_l avulla. Sarjaratkaisu saadaan siis seuraavaan muotoon:

$$f_l(x) = \sum_{l-2k=l}^{l-2k=0} f_{l-2k} x^{l-2k+r}$$

Merkinnällä $f_l(x)$ korostetaan sitä, että jokaiselle l:n arvolle on oma ratkaisunsa $f(x)$. Summausrajat seuraavat siitä, että $l-2k=l$ implikoi että $k=0$, sillä tällöin lukujen l ja $2k$ etäisyys on l eli ollaan summan alussa. Vastaavasti $l-2k=l$ implikoi, että $k=\frac{l}{2}$, sillä tällöin lukujen l ja $2k$ etäisyys on 0 eli ollaan summan lopussa. On huomattavaa, että mikäli l on pariton, ei $\frac{l}{2}$ ole kokonaisluku, jolloin otetaan osamäärästä $\frac{l}{2}$ lattiafunktio, $\lfloor\frac{l}{2}\rfloor$. Lisäksi muistetaan, että $r=0$, jolloin saadaan:

$$f_(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor\frac{l}{2}\rfloor} f_{l-2k} x^{l-2k}$$

Sijoitetaan f_{l-2k}:n lauseke:

$$f_l(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor\frac{l}{2}\rfloor} \left(\frac{(-1)^k}{2^k k!} \frac{(l-2k+1)^{\overline{2k}}(2(l-k)-1)!!}{(2l-1)!!} f_l \right) x^{l-2k}$$

Tässä kohtaa asetetaan $f_l = \frac{\binom{2l}{l}}{2^l} = \frac{(2l)!}{2^l (l!)^2} = \frac{(2l-1)!!}{l!}$. Valinta tulee siitä, että se normalisoi ratkaisut $f_l(x)$ siten, että $f_l(1) = 1$ [TÄHÄN EHKÄ JOKIN SYVÄLLISEMPI PERUSTELU]. Saadaan:

$$f_l(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor\frac{l}{2}\rfloor} \left(\frac{(-1)^k}{2^k k!} \frac{(l-2k+1)^{\overline{2k}}(2(l-k)-1)!!}{\cancel{(2l-1)!!}} \frac{\cancel{(2l-1)!!}}{l!} \right) x^{l-2k}$$

$$f_l(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor\frac{l}{2}\rfloor} \left(\frac{(-1)^k}{2^k k! l!} (l-2k+1)^{\overline{2k}}(2(l-k)-1)!! \right) x^{l-2k}$$

Parittoman luvun, jota $2(l-k)-1$ on, kaksoiskertoma voidaan kirjoittaa muodossa $(2m-1)!! = \frac{(2m)!}{2^m m!}$. Saadaan:

$$f_l(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor} \left(\frac{(-1)^k}{2^k k! l!} (l-2k+1)^{\overline{2k}} \frac{(2(l-k))!}{2^{l-k}(l-k)!} \right) x^{l-2k}$$

$$f_l(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor} \left(\frac{(-1)^k (2l-2k)!}{2^{k+l-k} k! l! (l-k)!} (l-2k+1)^{\overline{2k}} \right) x^{l-2k}$$

$$f_l(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor} \left(\frac{(-1)^k (2l-2k)!}{2^l k! l! (l-k)!} (l-2k+1)^{\overline{2k}} \right) x^{l-2k}$$

Muistetaan, että tulo $(l-2k+1)^{\overline{2k}}$ näytti tältä: $(l-2k+1)(l-2k+2)\ldots(l-1)l$. Tällöin se voidaan siis ilmaista laskevan Pochammer-symbolin avulla muodossa $l^{\underline{2k}}$. Saadaan:

$$f_l(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor} \left(\frac{(-1)^k (2l-2k)!}{2^l k! l! (l-k)!} l^{\underline{2k}} \right) x^{l-2k}$$

Kertoma $l!$ sisältää termejä $l(l-1)(l-2)\ldots 2 \cdot 1$. Termit siis vastaavat tiettyyn pisteeseen asti laskevaa Pochammer-symbolia $l^{\underline{2k}} = l(l-1)(l-2)\ldots(l-2k+2)(l-2k+1)$. Kertomasta $l!$ jää siis jäljelle vain kaikki termiä $(l-2k+1)$ pienemmät termit, eli se on muotoa $(l-2k)(l-2k-1)\ldots 2 \cdot 1$ pätee siis: $\frac{l^{\underline{2k}}}{l!} = \frac{1}{(l-2k)!}$. Saadaan:

$$f_l(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor} \left(\frac{(-1)^k (2l-2k)!}{2^l k! (l-k)! (l-2k)!} \right) x^{l-2k}$$

Kirjoitetaan sarja vielä hieman selkeämmin ottamalla esim. vakiokerroin $\frac{1}{2^l}$ sarjan ulkopuolelle:

$$f_l(x) = \frac{1}{2^l} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor} (-1)^k \frac{(2l-2k)!}{k!(l-k)!(l-2k)!} x^{l-2k}$$

Soveltamalla binomikerrointen määritelmää $\binom{a}{b} = \frac{a!}{b!(a-b)!}$ voidaan huomata, että $\frac{1}{k!(l-k)!} = \frac{\binom{l}{k}}{l!}$ ja että $\frac{(2l-2k)!}{(l-2k)!} = l!\binom{2l-2k}{l}$. Saadaan:

$$f_l(x) = \frac{1}{2^l} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor} (-1)^k \frac{\binom{l}{k}}{\cancel{l!}} \cancel{l!} \binom{2l-2k}{l} x^{l-2k}$$

$$f_l(x) = \frac{1}{2^l} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor} (-1)^k \binom{l}{k} \binom{2l-2k}{l} x^{l-2k}$$

Nyt ollaan saatu yksi lineaarisesti riippumaton ratkaisu Legendren yhtälölle. Näitä päättyviä sarjaratkaisuja kutsutaan legendren polynomeiksi $P_l(x)$. Legendren polynomeille voidaan johtaa useita muitakin esitysmuotoa ja tässä niistä muutama mukaan lukien yllä olevat muodot:

$$\boxed{\begin{aligned} P_l(x) &= \frac{1}{2^l}\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor}(-1)^k\binom{l}{k}\binom{2l-2k}{l}x^{l-2k} = \frac{1}{2^l}\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor}(-1)^k\frac{(2l-2k)!}{k!(l-k)!(l-2k)!}x^{l-2k} \\ P_l(x) &= \sum_{k=0}^{l}\binom{n}{k}\binom{n+k}{k}\left(\frac{x-1}{2}\right)^k = \sum_{k=0}^{l}\frac{(n+k)!}{(k!)^2(n-k)!}\left(\frac{x-1}{2}\right)^k \\ P_l(x) &= 2^l\sum_{k=0}^{l}\binom{l}{k}\binom{\frac{l+k-1}{2}}{l}x^k = 2^l\sum_{k=0}^{l}\frac{1}{k!(l-k)!}\left(\frac{l+k-1}{2}\right)^{\underline{l}}x^k \end{aligned}} \tag{3.53}$$

Vaihtoehtoisesti mikäli tunnetaan kaksi edellistä toisen Legendren funktiota, voidaan seuraava määrittää rekursiorelaatiolla:

$$\boxed{P_l(x) = \frac{2l-1}{l}xP_{l-1}(x) - \frac{l-1}{l}P_{l-2}(x)} \tag{3.54}$$

Toinen lineaarisesti riippumaton ratkaisu $g_l(x)$ voidaan määrittää Wronskin determinantin avulla. Teoriasta seuraa, että $g_l(x)$ on muotoa:

$$g_l(x) = f_l(x)\int_{x_0}^{x}\frac{\exp\left(-\int_{x_0}^{x'}P(x'')\,\mathrm{d}x''\right)}{f_l^2(x')}\,\mathrm{d}x'$$

Nyt $P(x'')$ on Legendren yhtälön ensimmäisen kertaluvun derivaatan etukerroin $-\frac{2x''}{1-x''^2}$ ja f_l on Legendren polynomi P_l. Saadaan:

$$g_l(x) = P_l(x)\int_{x_0}^{x}\frac{\exp\left(-\int_{x_0}^{x'}-\frac{2x''}{1-x''^2}\,\mathrm{d}x''\right)}{P_l^2(x')}\,\mathrm{d}x'$$
$$g_l(x) = P_l(x)\int_{x_0}^{x}\frac{\exp\left(\int_{x_0}^{x'}\frac{2x''}{1-x''^2}\,\mathrm{d}x''\right)}{P_l^2(x')}\,\mathrm{d}x'$$

Tehdään osamurtohajotelma $\frac{2x''}{1-x''^2}$:lle:

$$g_l(x) = P_l(x)\int_{x_0}^{x}\frac{\exp\left(\int_{x_0}^{x'}\frac{-1}{x''-1}\,\mathrm{d}x'' + \int_{x_0}^{x'}\frac{-1}{x''+1}\,\mathrm{d}x''\right)}{P_l^2(x')}\,\mathrm{d}x'$$
$$g_l(x) = P_l(x)\int_{x_0}^{x}\frac{\exp\left(-\ln(x'-1)+\ln(x_0-1)-\ln(x'+1)+\ln(x_0+1)\right)}{P_l^2(x')}\,\mathrm{d}x'$$
$$g_l(x) = P_l(x)\int_{x_0}^{x}\frac{\exp\left(\ln\left[\frac{1}{x'-1}\right]+\ln(x_0-1)+\ln\left[\frac{1}{x'+1}\right]+\ln(x_0+1)\right)}{P_l^2(x')}\,\mathrm{d}x'$$
$$g_l(x) = P_l(x)\int_{x_0}^{x}\frac{\exp\left(\ln\left[\frac{(x_0-1)(x_0+1)}{(x'-1)(x'+1)}\right]\right)}{P_l^2(x')}\,\mathrm{d}x'$$
$$g_l(x) = P_l(x)\int_{x_0}^{x}\frac{\frac{(x_0-1)(x_0+1)}{(x'-1)(x'+1)}}{P_l^2(x')}\,\mathrm{d}x'$$
$$g_l(x) = P_l(x)\int_{x_0}^{x}\frac{(x_0-1)(x_0+1)}{P_l^2(x')(x'-1)(x'+1)}\,\mathrm{d}x'$$

Tulo $(x_0-1)(x_0+1)$ on vain jokin mielivaltainen vakio C, joka voidaan ottaa integraalin eteen:

$$g_l(x) = CP_l(x)\int_{x_0}^{x} \frac{1}{P_l^2(x')(x'-1)(x'+1)}\,\mathrm{d}x'$$

Nyt voidaan määrittää $g_l(x)$ kunhan tunnetaan $P_l(x)$. Tiedetään, että $P_0(x) = 1$ ja $P_1(x) = x$. Määritetään $g_0(x)$ ja $g_1(x)$:

- $\underline{g_0(x)}$:

$$g_0(x) = CP_0(x)\int_{x_0}^{x} \frac{1}{P_0^2(x')(x'-1)(x'+1)}\,\mathrm{d}x'$$
$$g_0(x) = C\int_{x_0}^{x} \frac{1}{(x'-1)(x'+1)}\,\mathrm{d}x'$$

Otetaan -1 yhteiseksi tekijäksi ja vakion C sisään:

$$g_0(x) = C\int_{x_0}^{x} \frac{1}{(1-x')(1+x')}\,\mathrm{d}x'$$

Tehdään osamurtohajotelma:

$$g_0(x) = C\left(\int_{x_0}^{x} \frac{1}{2(1+x')}\,\mathrm{d}x' + \int_{x_0}^{x} \frac{1}{2(1-x')}\,\mathrm{d}x'\right)$$
$$g_0(x) = \frac{1}{2}C\left(\int_{x_0}^{x} \frac{1}{1+x'}\,\mathrm{d}x' + \int_{x_0}^{x} \frac{1}{1-x'}\,\mathrm{d}x'\right)$$
$$g_0(x) = \frac{1}{2}C\Big(\ln(1+x) - \ln(1+x_0) - \ln(1-x) + \ln(1-x_0)\Big)$$
$$g_0(x) = \frac{1}{2}C\left(\ln(1+x) - \ln\left[\frac{1}{1+x_0}\right] + \ln\left[\frac{1}{1-x}\right] + \ln(1-x_0)\right)$$
$$g_0(x) = \frac{1}{2}C\left(\ln\left[\frac{1+x}{1-x}\right] + \ln\left[\frac{1-x_0}{1+x_0}\right]\right)$$

Jälleen $\ln\left[\frac{1-x_0}{1+x_0}\right]$ on mielivaltainen vakio D:

$$g_0(x) = \frac{1}{2}C\ln\left[\frac{1+x}{1-x}\right] + \frac{1}{2}CD$$

Kun asetetaan $C = 1$ ja $D = 0$ saadaan toisen lajin Legendren funktio $Q_0(x)$:

$$Q_0(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

- $\underline{g_1(x)}$:

$$g_1(x) = CP_1(x)\int_{x_0}^{x} \frac{1}{P_1^2(x')(x'-1)(x'+1)}\,\mathrm{d}x'$$
$$g_1(x) = Cx\int_{x_0}^{x} \frac{1}{x'^2(x'-1)(x'+1)}\,\mathrm{d}x'$$

Otetaan -1 yhteiseksi tekijäksi ja vakion C sisään:

$$g_1(x) = Cx \int_{x_0}^{x} \frac{1}{x'^2(1-x')(1+x')} \,\mathrm{d}x'$$

Tehdään osamurtohajotelma:

$$\begin{aligned}
g_1(x) &= Cx \left(\int_{x_0}^{x} \frac{1}{2(1+x')} \,\mathrm{d}x' + \int_{x_0}^{x} \frac{1}{2(1-x')} \,\mathrm{d}x' + \int_{x_0}^{x} \frac{1}{x'^2} \,\mathrm{d}x' \right) \\
g_1(x) &= Cx \left(\frac{1}{2} \int_{x_0}^{x} \frac{1}{1+x'} \,\mathrm{d}x' + \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x} \frac{1}{1-x'} \,\mathrm{d}x' + \int_{x_0}^{x} \frac{1}{x'^2} \,\mathrm{d}x' \right) \\
g_1(x) &= Cx \left(\frac{1}{2} \Big[\ln(1+x) - \ln(1+x_0) \Big] + \frac{1}{2} \Big[-\ln(1-x) + \ln(1-x_0) \Big] - \frac{1}{x} + \frac{1}{x_0} \right) \\
g_1(x) &= Cx \left(\frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x} \right) + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1-x_0}{1+x_0} \right) - \frac{1}{x} + \frac{1}{x_0} \right)
\end{aligned}$$

Jälleen $\ln\left(\frac{1-x_0}{1+x_0}\right)$ ja $\frac{1}{x_0}$ ovat mielivaltaisia vakioita D ja E:

$$\begin{aligned}
g_1(x) &= Cx \left(\frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x} \right) + \frac{1}{2} D - \frac{1}{x} + E \right) \\
g_1(x) &= \frac{1}{2} xC \ln\left(\frac{1+x}{1-x} \right) + \frac{1}{2} xCD - \frac{Cx}{x} + CEx \\
g_1(x) &= \frac{1}{2} xC \ln\left(\frac{1+x}{1-x} \right) - C + \frac{1}{2} xCD + CEx
\end{aligned}$$

Kun asetetaan $C = 1$, $D = 0$ ja $E = 0$ saadaan toisen lajin Legendren funktio $Q_1(x)$:

$$Q_1(x) = \frac{1}{2} x \ln\left(\frac{1+x}{1-x} \right) - 1$$

Ooittautuu, että yleisesti toisen lajin legendren funktio voidaan ilmaista muodossa:

$$\boxed{Q_l(x) = \frac{1}{2} P_l(x) \ln\left(\frac{1+x}{1-x} \right) - \sum_{k=1}^{l} \frac{1}{k} P_{k-1}(x) P_{l-k}(x)} \tag{3.55}$$

Jossa $\sum_{k=1}^{l} \frac{1}{k} P_{k-1}(x) P_{l-k}(x) = W_{l-1}(x)$ on $l-1$-asteen polynomi. Vaihtoehtoisesti mikäli tunnetaan kaksi edellistä toisen lajin legendren funktiota, voidaan seuraava määrittää samalla rekursiorelaatiolla kuin aiemminkin:

$$\boxed{Q_l(x) = \frac{2l-1}{l} x Q_{l-1}(x) - \frac{l-1}{l} Q_{l-2}(x)} \tag{3.56}$$

Ollaan siis ratkaistu Legendren yhtälö, kun $l \in \mathbb{Z}$. Yhtälön yleinen ratkaisu on lineaarikombinaatio ensimmäisen ja toisen lajin Legendren funktioista:

$$\boxed{f_l(x) = C_1 P_l(x) + C_2 Q_l(x), \qquad l \in \mathbb{Z}} \tag{3.57}$$

3.3.9 Legendren liittoyhtälö

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} - 2x\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} + \left(l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right) f = 0 \tag{3.58}$$

Legendren littoyhtälö on Legendren yhtälön yleisempi muoto, joka redusoituu tavalliseksi Legendren yhtälöksi, kun $m = 0$. Yhtälö voidaan johtaa derivoimalla tavallista legendren yhtälöä m kertaa. Legenden yhtälö on muotoa:

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} - 2x\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} + l(l+1)f = 0$$

Koska kahdessa ensimmäisessä termissä esiintyy tulo, määritetään niiden m:s derivaatta käyttämällä Leibnizin yleistä tulon derivointisääntöä:

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^k$$

- $\underline{\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}\right]:}$

$$\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}\right] = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \frac{\mathrm{d}^{m-k}}{\mathrm{d}x^{m-k}}(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\left(\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}\right)$$

Koska $1 - x^2$ on toisen asteen polynomi, voidaan sitä derivoida korkeintaan kahdesti ennen kuin se katoaa. Siispä kaikki termit, joissa $m - k > 2$ menevät nollaan, sillä tällöin derivaatta $\frac{\mathrm{d}^{m-k}}{\mathrm{d}x^{m-k}}(1-x^2)$ katoaa. Jäljelle jää siis vain kolme viimeistä termiä, joissa $k = m-2$, $k = m-1$ ja $k = m$. Saadaan:

$$\begin{aligned}
&= \binom{m}{m-2}\frac{\mathrm{d}^{m-(m-2)}}{\mathrm{d}x^{m-(m-2)}}(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^{m-2}}{\mathrm{d}x^{m-2}}\left(\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}\right) \\
&\quad + \binom{m}{m-1}\frac{\mathrm{d}^{m-(m-1)}}{\mathrm{d}x^{m-(m-1)}}(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}x^{m-1}}\left(\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}\right) \\
&\quad + \binom{m}{m}\frac{\mathrm{d}^{m-m}}{\mathrm{d}x^{m-m}}(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^{m}}{\mathrm{d}x^{m}}\left(\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}\right) \\
&= \frac{m!}{(m-2)!(m-(m-2))!}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^{m-2+2} f}{\mathrm{d}x^{m-2+2}} \\
&\quad + \frac{m!}{(m-1)!(m-(m-1))!}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^{m-1+2} f}{\mathrm{d}x^{m-1+2}} \\
&\quad + \frac{m!}{m!(m-m)!}\frac{\mathrm{d}^0}{\mathrm{d}x^0}(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^{m+2} f}{\mathrm{d}x^{m+2}}
\end{aligned}$$

Nollas derivaatta $\frac{\mathrm{d}^0}{\mathrm{d}x^0}$ tarkoittaa, että derivaattaa ei oteta. Saadaan:

$$
\begin{aligned}
&= \frac{m!}{(m-2)!2!}(-2)\frac{\mathrm{d}^m f}{\mathrm{d}x^m} + \frac{m!}{(m-1)!1!}(-2x)\frac{\mathrm{d}^{m+1} f}{\mathrm{d}x^{m+1}} + \frac{1}{0!}(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^{m+2} f}{\mathrm{d}x^{m+2}} \\
&= -\frac{m!}{(m-2)!}\frac{\mathrm{d}^m f}{\mathrm{d}x^m} - \frac{m!}{(m-1)!}2x\frac{\mathrm{d}^{m+1} f}{\mathrm{d}x^{m+1}} + (1-x^2)\frac{\mathrm{d}^{m+2} f}{\mathrm{d}x^{m+2}} \\
&= -m(m-1)\frac{\mathrm{d}^m f}{\mathrm{d}x^m} - 2mx\frac{\mathrm{d}^{m+1} f}{\mathrm{d}x^{m+1}} + (1-x^2)\frac{\mathrm{d}^{m+2} f}{\mathrm{d}x^{m+2}} \\
&= -m(m-1)\frac{\mathrm{d}^m f}{\mathrm{d}x^m} - 2mx\frac{\mathrm{d}^{m+1} f}{\mathrm{d}x^{m+1}} + (1-x^2)\frac{\mathrm{d}^{m+2} f}{\mathrm{d}x^{m+2}} \\
\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}\right] &= (1-x^2)\frac{\mathrm{d}^{m+2} f}{\mathrm{d}x^{m+2}} - 2mx\frac{\mathrm{d}^{m+1} f}{\mathrm{d}x^{m+1}} - m(m-1)\frac{\mathrm{d}^m f}{\mathrm{d}x^m}
\end{aligned}
$$

- $\underline{\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\left[x\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right]:}$

$$
\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\left[x\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right] = \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\frac{\mathrm{d}^{m-k}}{\mathrm{d}x^{m-k}}(x)\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)
$$

Koska x on ensimmäisen asteen polynomi, voidaan sitä derivoida korkeintaan kerran ennen kuin se katoaa. Siispä kaikki termit, joissa $m-k>1$ menevät nollaan, sillä tällöin derivaatta $\frac{\mathrm{d}^{m-k}}{\mathrm{d}x^{m-k}}(x)$ katoaa. Jäljelle jää siis vain kaksi viimeistä termiä, joissa $k=m-1$ ja $k=m$. Saadaan:

$$
\begin{aligned}
&= \binom{m}{m-1}\frac{\mathrm{d}^{m-(m-1)}}{\mathrm{d}x^{m-(m-1)}}(x)\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}x^{m-1}}\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right) + \binom{m}{m}\frac{\mathrm{d}^{m-m}}{\mathrm{d}x^{m-m}}(x)\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right) \\
&= \frac{m!}{(m-1)!(m-(m-1))!}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x)\frac{\mathrm{d}^{m-1+1} f}{\mathrm{d}x^{m-1+1}} + \frac{m!}{m!(m-m)!}\frac{\mathrm{d}^0}{\mathrm{d}x^0}(x)\frac{\mathrm{d}^{m+1} f}{\mathrm{d}x^{m+1}}
\end{aligned}
$$

Nollas derivaatta $\frac{\mathrm{d}^0}{\mathrm{d}x^0}$ tarkoittaa, että derivaattaa ei oteta. Saadaan:

$$
\begin{aligned}
&= \frac{m!}{(m-1)!1!}(1)\frac{\mathrm{d}^m f}{\mathrm{d}x^m} + \frac{1}{0!}(x)\frac{\mathrm{d}^{m+1} f}{\mathrm{d}x^{m+1}} \\
&= \frac{m!}{(m-1)!}\frac{\mathrm{d}^m f}{\mathrm{d}x^m} + x\frac{\mathrm{d}^{m+1} f}{\mathrm{d}x^{m+1}} \\
&= m\frac{\mathrm{d}^m f}{\mathrm{d}x^m} + x\frac{\mathrm{d}^{m+1} f}{\mathrm{d}x^{m+1}} \\
\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\left[x\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right] &= x\frac{\mathrm{d}^{m+1} f}{\mathrm{d}x^{m+1}} + m\frac{\mathrm{d}^m f}{\mathrm{d}x^m}
\end{aligned}
$$

Sijoitetaan tulokset Legendren yhtälöön ja derivoidaan samalla viimeistä termiä $l(l+1)f$:

$$
(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^{m+2} f}{\mathrm{d}x^{m+2}} - 2mx\frac{\mathrm{d}^{m+1} f}{\mathrm{d}x^{m+1}} - m(m-1)\frac{\mathrm{d}^m f}{\mathrm{d}x^m} - 2x\frac{\mathrm{d}^{m+1} f}{\mathrm{d}x^{m+1}} - 2m\frac{\mathrm{d}^m f}{\mathrm{d}x^m} + l(l+1)\frac{\mathrm{d}^m f}{\mathrm{d}x^m} = 0
$$

$$
\begin{aligned}
(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^{m+2} f}{\mathrm{d}x^{m+2}} - 2(m+1)x\frac{\mathrm{d}^{m+1} f}{\mathrm{d}x^{m+1}} + \Big[l(l+1) - m(m-1) - 2m\Big]\frac{\mathrm{d}^m f}{\mathrm{d}x^m} &= 0 \\
(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^{m+2} f}{\mathrm{d}x^{m+2}} - 2(m+1)x\frac{\mathrm{d}^{m+1} f}{\mathrm{d}x^{m+1}} + \Big[l(l+1) - m(m-1+2)\Big]\frac{\mathrm{d}^m f}{\mathrm{d}x^m} &= 0 \\
(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^{m+2} f}{\mathrm{d}x^{m+2}} - 2(m+1)x\frac{\mathrm{d}^{m+1} f}{\mathrm{d}x^{m+1}} + \Big[l(l+1) - m(m+1)\Big]\frac{\mathrm{d}^m f}{\mathrm{d}x^m} &= 0
\end{aligned}
$$

Merkitään $\frac{\mathrm{d}^m f}{\mathrm{d}x^m} = g(x)$. Saadaan:

$$\begin{aligned}
(1-x^2)g''(x) - 2(m+1)xg'(x) + \Big[l(l+1) - m(m+1)\Big]g(x) = 0 \\
(1-x^2)g''(x) - 2(m+1)xg'(x) + \Big[l^2 + l - m^2 - m\Big]g(x) = 0
\end{aligned}$$

$l^2 - m^2$ on neliöiden erotus:

$$\begin{aligned}
(1-x^2)g''(x) - 2(m+1)xg'(x) + \Big[(l-m)(l+m) + l - m\Big]g(x) = 0 \\
(1-x^2)g''(x) - 2(m+1)xg'(x) + (l-m)(l+m+1)g(x) = 0
\end{aligned}$$

Määritellään uusi funktio $h(x) = (1-x^2)^{m/2}g(x) \iff g(x) = (1-x^2)^{-m/2}h(x)$. Määritetään $g'(x)$ ja $g''(x)$:

- $\underline{g'(x)}$:

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[(1-x^2)^{-m/2}h(x)\Big] \\
&= (1-x^2)^{-m/2}h'(x) + h(x)\left(-\frac{m}{2}\right)(1-x^2)^{-m/2-1}(-2x) \\
&= (1-x^2)^{-m/2}h'(x) + mxh(x)(1-x^2)^{-m/2-1} \\
&= (1-x^2)^{-m/2}\left(h'(x) + mxh(x)(1-x^2)^{-1}\right) \\
g'(x) &= (1-x^2)^{-m/2}\left(h'(x) + \frac{mx}{1-x^2}h(x)\right)
\end{aligned}$$

- $\underline{g''(x)}$:

$$
\begin{aligned}
g''(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)^{-m/2}\left(h'(x)+\frac{mx}{1-x^2}h(x)\right)\right] \\
&= (1-x^2)^{-m/2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(h'(x)+\frac{mx}{1-x^2}h(x)\right)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)^{-m/2}\right]\left(h'(x)+\frac{mx}{1-x^2}h(x)\right) \\
&= (1-x^2)^{-m/2}\left(h''(x)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{mx}{1-x^2}h(x)\right]\right)+\left(-\frac{m}{2}\right)(1-x^2)^{-m/2-1}(-2x)\left(h'(x)+\frac{mx}{1-x^2}h(x)\right) \\
&= (1-x^2)^{-m/2}\left(h''(x)+mxh(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{1}{1-x^2}\right]+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[mxh(x)]\frac{1}{1-x^2}\right) \\
&\quad + mx(1-x^2)^{-m/2-1}\left(h'(x)+\frac{mx}{1-x^2}h(x)\right) \\
&= (1-x^2)^{-m/2}\left(h''(x)+mxh(x)(-1)\frac{1}{(1-x^2)^2}(-2x)+\frac{mxh'(x)+mh(x)}{1-x^2}\right) \\
&\quad + (1-x^2)^{-m/2}\left(\frac{mx}{1-x^2}h'(x)+\frac{m^2x^2}{(1-x^2)^2}h(x)\right) \\
&= (1-x^2)^{-m/2}\Bigg(h''(x)+\frac{2mx^2}{(1-x^2)^2}h(x)+\frac{mx}{1-x^2}h'(x)+\frac{m}{1-x^2}h(x) \\
&\quad + \frac{mx}{1-x^2}h'(x)+\frac{m^2x^2}{(1-x^2)^2}h(x)\Bigg) \\
&= (1-x^2)^{-m/2}\left(h''(x)+\frac{2mx}{1-x^2}h'(x)+\frac{m}{1-x^2}h(x)+\frac{2mx^2+m^2x^2}{(1-x^2)^2}h(x)\right) \\
g''(x) &= (1-x^2)^{-m/2}\left(h''(x)+\frac{2mx}{1-x^2}h'(x)+\frac{m}{1-x^2}h(x)+\frac{m(m+2)x^2}{(1-x^2)^2}h(x)\right)
\end{aligned}
$$

Sijoitetaan g ja sen derivaatat differentiaaliyhtälöön:

$$
\begin{aligned}
0 &= (1-x^2)(1-x^2)^{-m/2}\left(h''(x)+\frac{2mx}{1-x^2}h'(x)+\frac{m}{1-x^2}h(x)+\frac{m(m+2)x^2}{(1-x^2)^2}h(x)\right) \\
&\quad - 2(m+1)x(1-x^2)^{-m/2}\left(h'(x)+\frac{mx}{1-x^2}h(x)\right)+(l-m)(l+m+1)(1-x^2)^{-m/2}h(x)
\end{aligned}
$$

Kerrotaan koko yhtälö $(1-x^2)^{m/2}$:lla:

$$\begin{aligned}
0 &= (1-x^2)\left(h''(x) + \frac{2mx}{1-x^2}h'(x) + \frac{m}{1-x^2}h(x) + \frac{m(m+2)x^2}{(1-x^2)^2}h(x)\right) \\
&\quad - 2(m+1)x\left(h'(x) + \frac{mx}{1-x^2}h(x)\right) + (l-m)(l+m+1)h(x) \\
0 &= (1-x^2)h''(x) + 2mxh'(x) + mh(x) + \frac{m(m+2)x^2}{1-x^2}h(x) \\
&\quad - 2(m+1)xh'(x) - \frac{2m(m+1)x^2}{1-x^2}h(x) + (l-m)(l+m+1)h(x) \\
0 &= (1-x^2)h''(x) + (2mx - 2(m+1)x)h'(x) + \frac{m(m+2)x^2 - 2m(m+1)x^2}{1-x^2}h(x) \\
&\quad + \Big[(l-m)(l+m+1) + m\Big]h(x) \\
0 &= (1-x^2)h''(x) + 2x(m-m-1)h'(x) + \frac{mx^2(m+2-2(m+1))}{1-x^2}h(x) \\
&\quad + \Big[(l-m)(l+m) + l - \cancel{m} + \cancel{m}\Big]h(x) \\
0 &= (1-x^2)h''(x) - 2xh'(x) + \frac{mx^2(m+\cancel{2}-2m-\cancel{2})}{1-x^2}h(x) + \Big[(l-m)(l+m)+l\Big]h(x) \\
0 &= (1-x^2)h''(x) - 2xh'(x) + \frac{mx^2(-m)}{1-x^2}h(x) + \Big[l^2 - m^2 + l\Big]h(x) \\
0 &= (1-x^2)h''(x) - 2xh'(x) - \frac{m^2x^2}{1-x^2}h(x) + \Big[l(l+1) - m^2\Big]h(x) \\
0 &= (1-x^2)h''(x) - 2xh'(x) + \left[l(l+1) - \frac{m^2x^2}{1-x^2} - m^2\right]h(x) \\
0 &= (1-x^2)h''(x) - 2xh'(x) + \left[l(l+1) - \left(\frac{m^2x^2}{1-x^2} + \frac{m^2(1-x^2)}{1-x^2}\right)\right]h(x) \\
0 &= (1-x^2)h''(x) - 2xh'(x) + \left[l(l+1) - \left(\frac{m^2x^2 + m^2(1-x^2)}{1-x^2}\right)\right]h(x) \\
0 &= (1-x^2)h''(x) - 2xh'(x) + \left[l(l+1) - \left(\frac{\cancel{m^2x^2} + m^2 - \cancel{m^2x^2}}{1-x^2}\right)\right]h(x) \\
0 &= (1-x^2)h''(x) - 2xh'(x) + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right]h(x)
\end{aligned}$$

On siis johdettu Legendren liittoyhtälö lähtien liikkeelle tavallisesta legendren yhtälöstä. Koska lähdettiin liikkeelle Legendren yhtälöstä, ovat funktiot $g(x) = \frac{\mathrm{d}^m f}{\mathrm{d}x^m}$ Legendren ensimmäisen ja toisen lajin funktioiden derivaattoja, sillä $f(x) = P_x$ ja $f(x) = Q_l(x)$ ratkaisevat Legendren yhtälön. Pätee siis: $g(x) = \frac{\mathrm{d}^m P_l(x)}{\mathrm{d}x^m}$ ja $g(x) = \frac{\mathrm{d}^m Q_l(x)}{\mathrm{d}x^m}$. Koska Legendren liittoyhtälö johdettiin Legendren yhtälöstä joiden ratkaisuja Legendren funktiot ovat, on $h(x)$:n ratkaistava Legendren liittoyhtälö. $h(x)$ määriteltiin seuraavasti:

$$h(x) = (1-x^2)^{m/2}g(x)$$

Eli kun sijoitetaan $g(x)$ saadaan:

$$h(x) = (1-x^2)^{m/2}\frac{\mathrm{d}^m P_l(x)}{\mathrm{d}x^m} \quad \text{tai} \quad h(x) = (1-x^2)^{m/2}\frac{\mathrm{d}^m Q_l(x)}{\mathrm{d}x^m}$$

Ollaan siis löydetty kaksi lineaarisesti riippumatonta ratkaisua Legendren liittoyhtälölle. Ratkaisujen lineaarinen riippumattomuus seuraa siitä, että toinen ratkaisu on verrannollinen $P_l(x)$:ään ja toinen

$Q_l(x)$:ään, jotka ovat keskenään lineaarisesti riippumattomia. Näitä ratkaisuja kutsutaan Legendren ensimmäisen ja toisen lajin liittofunktioiksi $P_l^m(x)$ ja $Q_l^m(x)$ ja ne on määritelty seuraavasti:

$$\boxed{P_l^m(x) = (1-x^2)^{m/2}\frac{\mathrm{d}^m P_l(x)}{\mathrm{d}x^m}} \tag{3.59}$$

$$\boxed{Q_l^m(x) = (1-x^2)^{m/2}\frac{\mathrm{d}^m Q_l(x)}{\mathrm{d}x^m}} \tag{3.60}$$

Ollaan siis ratkaistu Legendren liittoyhtälö, kun $l, m \in \mathbb{Z}, \quad -l \leq m \leq l$. Yhtälön yleinen ratkaisu on lineaarikombinaatio ensimmäisen ja toisen lajin Legendren liittofunktioista:

$$\boxed{f_l^m(x) = C_1 P_l^m(x) + C_2 Q_l^m(x), \qquad l, m \in \mathbb{Z}, \quad -l \leq m \leq l} \tag{3.61}$$

Seuraava tärkeä tulos voidaan johtaa $P_l^m(x)$:lle Rodriguesin kaavan avulla:

$$\boxed{P_l^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(x)} \tag{3.62}$$

Tulos mahdollistaa ratkaisujen laajentamiseen edellämainitulle alueelle $-l \leq m \leq l$ sen sijaan etttä oltaisiin rajoitettu alueelle $0 \leq m \leq l$.

3.3.10 Palloharmoniset funktiot

Helmholtzin yhtälön separointi pallokoordinaatistossa johtaa radiaaliseen yhtälöön ja kulmayhtälöön. Kulmayhtälö on muotoa:

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}\varphi^2} + Kf = 0 \tag{3.63}$$

Kun myös kulmayhtälö separoidaan yritteellä $f(\theta, \varphi) = g(\varphi)h(\theta)$, saadaan kaksi tavallista differentiaaliyhtälöä:

$$\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}\varphi^2} = -m^2 g$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\theta}\right) + \left(K - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right)h = 0$$

Ensimmäinen yhtälöistä on yksinkertaisesti harmoninen yhtälö, jolloin sen yleinen ratkaisu voidaan ilmaista kompleksieksponentiaalin avulla muodossa:

$$\boxed{h_m(x) = C_1 e^{im\varphi}} \tag{3.64}$$

Lasketaan toisen yhtälön derivaattatermi auki:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sin\theta}\left[\sin\theta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\theta}\right) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}(\sin\theta)\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\theta}\right] + \left(K - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right)h = 0\\ \frac{1}{\sin\theta}\left[\sin\theta\frac{\mathrm{d}^2 h}{\mathrm{d}\theta^2} + \cos\theta\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\theta}\right] + \left(K - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right)h = 0\end{aligned}$$

Kun toiseen yhtälöön tehdään muuttujanvaihdos $x = \cos\theta$, muuttuvat derivaatat seuraavasti:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\theta} &= \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} \\
&= \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}(\cos\theta) \\
\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\theta} &= -\sin\theta\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2h}{\mathrm{d}\theta^2} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\theta}\right) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(-\sin\theta\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}\right) \\
&= -\sin\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\theta\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}\right) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}(\sin\theta)\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} \\
&= -\sin\theta\frac{\mathrm{d}^2h}{\mathrm{d}x^2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} - \cos\theta\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} \\
&= -\sin\theta\frac{\mathrm{d}^2h}{\mathrm{d}x^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}(\cos\theta) - \cos\theta\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} \\
\frac{\mathrm{d}^2h}{\mathrm{d}\theta^2} &= \sin^2\theta\frac{\mathrm{d}^2h}{\mathrm{d}x^2} - \cos\theta\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}
\end{aligned}
$$

Sijoitetaan yhtälöön:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\sin\theta}\left[\sin\theta\left(\sin^2\theta\frac{\mathrm{d}^2h}{\mathrm{d}x^2} - \cos\theta\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}\right) + \cos\theta\left(-\sin\theta\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}\right)\right] + \left(K - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right)h &= 0 \\
\sin^2\theta\frac{\mathrm{d}^2h}{\mathrm{d}x^2} - \cos\theta\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} - \cos\theta\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} + \left(K - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right)h &= 0 \\
\sin^2\theta\frac{\mathrm{d}^2h}{\mathrm{d}x^2} - 2\cos\theta\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} + \left(K - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right)h &= 0
\end{aligned}
$$

Ilmaistaan sinit kosinin avulla:

$$(1-\cos^2\theta)\frac{\mathrm{d}^2h}{\mathrm{d}x^2} - 2\cos\theta\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} + \left(K - \frac{m^2}{1-\cos^2\theta}\right)h = 0$$

Tiedetään: $\cos\theta = x$:

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2h}{\mathrm{d}x^2} - 2x\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} + \left(K - \frac{m^2}{1-x^2}\right)h = 0$$

Mikäli $K = l(l+1)$ (voidaan osoittaa, että vain $K = l(l+1)$ tuottaa fysikaalisesti järkeviä ratkaisuja), saadaan Legendren liittoyhtälö:

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2h}{\mathrm{d}x^2} - 2x\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} + \left(l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right)h = 0$$

Toisen yhtälön ratkaisu on siis legendren liittofunktio:

$$\boxed{h(\theta) = C_2 P_l^m(x) = C_2 P_l^m(\cos\theta)} \tag{3.65}$$

Helmholtzin yhtälön radiaalisen yhtälön ratkaisu on siis tulo $g(\varphi)h(\theta)$, eli:

$$f(\varphi, \theta) = C_1 C_2 e^{im\varphi} P_l^m(\cos\theta)$$

Kun ratkaisua f kerrotaan normalisaatiokertoimella $(-1)^m \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}}$, saadaan nk. Palloharmonisen funktiot $Y_l^m(\theta, \varphi)$:

$$\boxed{Y_l^m(\theta, \varphi) = (-1)^m \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}} P_l^m(\cos\theta) e^{im\varphi}} \tag{3.66}$$

Tuloksesta (3.62) seuraa palloharmonisille funktioille:

$$\boxed{Y_l^{-m}(\theta, \varphi) = (-1)^m [Y_l^m(\theta, \varphi)]^*} \tag{3.67}$$

3.3.11 Laguerren yhtälö

$$x\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} + (1-x)\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} + nf = 0 \tag{3.68}$$

Ratkaistaan potenssisarjayritteellä $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k x^{k+r}$. Derivaatat Besselin yhtälön ratkaisusta. Saadaan:

$$x\sum_{k=0}^{\infty} f_k(k+r)(k+r-1)x^{k+r-2} + (1-x)\sum_{k=0}^{\infty} f_k(k+r)x^{k+r-1} + n\sum_{k=0}^{\infty} f_k x^{k+r} = 0$$

Kerrotaan eutkertoimet summien sisään. Termistä $(1-x)$ tulee kaksi summaa:

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k(k+r)(k+r-1)x^{k+r-1} + \sum_{k=0}^{\infty} f_k(k+r)x^{k+r-1} - \sum_{k=0}^{\infty} f_k(k+r)x^{k+r} + \sum_{k=0}^{\infty} nf_k x^{k+r} = 0$$

Yhdistetään summat, joissa x:n potenssi on sama:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty}\Big[(k+r)(k+r-1) + (k+r)\Big] f_k x^{k+r-1} + \sum_{k=0}^{\infty}\Big[n-(k+r)\Big] f_k x^{k+r} &= 0 \\
\sum_{k=0}^{\infty}\Big[(k+r)(k+r-\cancel{1}+\cancel{1})\Big] f_k x^{k+r-1} + \sum_{k=0}^{\infty}(n-k-r) f_k x^{k+r} &= 0 \\
\sum_{k=0}^{\infty}(k+r)^2 f_k x^{k+r-1} + \sum_{k=0}^{\infty}(n-k-r) f_k x^{k+r} &= 0
\end{aligned}$$

Otetaan ensimmäisestä summasta ensimmäinen termi ulos:

$$\begin{aligned}
(0+r)^2 f_0 x^{0+r-1} + \sum_{k=1}^{\infty}(k+r)^2 f_k x^{k+r-1} + \sum_{k=0}^{\infty}(n-k-r) f_k x^{k+r} &= 0 \\
r^2 f_0 x^{r-1} + \sum_{k=1}^{\infty}(k+r)^2 f_k x^{k+r-1} + \sum_{k=0}^{\infty}(n-k-r) f_k x^{k+r} &= 0
\end{aligned}$$

Merkitään enimmäisessä summassa $k = j + 1 \iff j = k - 1$ ja nimetään toisen summan indeksit uudelleen $k \to j$:

$$r^2 f_0 x^{r-1} + \sum_{j=0}^{\infty} (j + r + 1)^2 f_{j+1} x^{j+r} + \sum_{j=0}^{\infty} (n - j - r) f_j x^{j+r} = 0$$

Nyt summat voidaan yhdistää:

$$r^2 f_0 x^{r-1} + \sum_{j=0}^{\infty} \Big[(j + r + 1)^2 f_{j+1} + (n - j - r) f_j \Big] x^{j+r} = 0$$

Kun vasemman puolen sarja samaistetaan oikean puolen nollaksisarjan kanssa, saadaan seuraavat ehdot:

$$r^2 f_0 x^{r-1} = 0 \qquad \wedge \qquad (j + r + 1)^2 f_{j+1} + (n - j - r) f_j = 0$$

Ensimmäinen ehto, indeksiyhtälö, tuottaa kaksoisjuuren $r = 0$, jolloin tiedetään, että sarjakehitelmästä saadaan vain yksi lineaarisesti riippumaton ratkaisu. Tarkastellaan toista ehtoa:

$$(j + r + 1)^2 f_{j+1} + (n - j - r) f_j = 0$$

Ratkaistaan f_{j+1}:

$$f_{j+1} = \frac{-(n - j - r)}{(j + r + 1)^2} f_j$$

$$f_{j+1} = \frac{(j + r - n)}{(j + r + 1)^2} f_j$$

Sijoitetaan $r = 0$:

$$f_{j+1} = \frac{(j - n)}{(j + 1)^2} f_j$$

Sovelletaan rekursiorelaatiota f_j:lle:

$$f_{j+1} = \frac{(j - n)}{(j + 1)^2} \frac{(j - n - 1)}{j^2} f_{j-1}$$

Kun rekursiorelaatiota iteroidaan f_1:een saakka saadaan:

$$f_{j+1} = \frac{(j - n)}{(j + 1)^2} \frac{(j - n - 1)}{j^2} \frac{(j - n - 2)}{(j - 1)^2} \cdots \frac{1 - n}{1^2} f_0$$

Tiedetään, että kussakin tulossa on yhteensä $j + 1$ termiä, jolloin ne voidaan ilmaista kompaktimmin:

$$f_{j+1} = \frac{(-n)^{\overline{j+1}}}{[(j + 1)!]^2} f_0$$

Merkitään jälleen $k = j + 1$:

$$f_k = \frac{(-n)^{\overline{k}}}{(k!)^2} f_0$$

Otetaan -1 ulos nousevasta Pochhammer-symbolista, jolloin se muuttuu laskevaksi:

$$f_k = \frac{(-1)^k n^{\underline{k}}}{(k!)^2} f_0$$

Laskevalle Pochhamer-symbolille pätee: $\frac{a^{\underline{b}}}{b!} = \binom{a}{b}$. Saadaan:

$$f_k = \frac{(-1)^k \binom{n}{k}}{k!} f_0$$

Sijoitetaan kertoimet sarjayritteeseen:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k x^{k+0}$$
$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \binom{n}{k}}{k!} f_0 x^k$$

On olemassa eri normituksia b_0:lle. Perinteisesti $b_0 = 0$. Fysiikassa puolestaan käytetään usein normitusta $b_0 = n!$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \binom{n}{k} x^k \quad \vee \quad f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \binom{n}{k} n! x^k$$
$$\vee \quad f(x) = n! \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \binom{n}{k} x^k$$

Ollaan siis löydetty yksi lineaarisesti riippumaton ratkaisu Laguerren yhtälölle. Mikäli n on kokonaisluku (niinkuin se sovelluksisa onkin), päättyy sarja, sillä rekursiorelaatio $f_{j+1} = \frac{(j-n)}{(j+1)^2} f_j$ menee nollaan, kun $j = n$. Tällöin jäljelle jäävää lauseketta kutsutaan Laguerren polynomiksi $L_n(x)$:

$$\boxed{L_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \binom{n}{k} x^k = n! \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2 (n-k)!} x^k} \tag{3.69}$$

Ja vastaavasti fysiikassa käytetyllä konventiolla kirjoitettuna:

$$\boxed{\bar{L}_n(x) = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \binom{n}{k} x^k = (n!)^2 \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(k!)^2 (n-k)!} x^k} \tag{3.70}$$

Tavallisen ja fysiikan kovention välillä on siis relaatio:

$$\boxed{\bar{L}_n(x) = n! L_n(x)} \tag{3.71}$$

Kun tarkastellaan Laguerren yhtälöä havaitaan, että se vastaa konfluenttia hypergeometrista yhtälöä parametrien arvoilla $a = -n$ ja $c = 1$. Siispä sille voidaan löytää vaihtoehtoinen merkintätapa ilmaisemalla se ensimmäisen lajin konfluentin hypergeometrisen funktion nk. Kummerin funktion avulla:

$$ {}_1F_1(-n;1;x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-n)^{\overline{k}}}{k!1^{\overline{k}}} x^k $$

$1^{\overline{k}}$ on yksinkertaisesti $k!$. Otetaan miinusmerkki ulos nousevasta Pochhammer-symbolista, jolloin se muuttuu laskevaksi:

$$ {}_1F_1(-n;1;x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k n^{\underline{k}}}{(k!)^2} x^k $$

Laskevalle Pochhamer-symbolille pätee: $\frac{a^{\underline{b}}}{b!} = \binom{a}{b}$. Saadaan:

$$ \begin{aligned} {}_1F_1(-n;1;x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \binom{n}{k}}{k!} x^k \\ {}_1F_1(-n;1;x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \binom{n}{k} x^k \end{aligned} $$

Kun $k > n$, menee binomikerroin nollaksi, jolloin sarja redusoituu summaksi:

$$ {}_1F_1(-n;1;x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \binom{n}{k} x^k $$

Tunnistetaan yhtälön oikealta puolelta Laguerren polynomi $L_n(x)$, jolloin saadaan yhteys:

$$ L_n(x) = {}_1F_1(-n;1;x) = M(-n,1,x) $$

Todetaan siis, että konventiosta riippuen Laguerren polynomit voidaan ilmaista ensimmäisen lajin konfluentteina hypergeometrisina funktioina seuraavasti:

$$ \boxed{L_n(x) = {}_1F_1(-n;1;x) = M(-n,1,x) \quad \bar{L}_n(x) = n!\,{}_1F_1(-n;1;x) = n!M(-n,1,x)} \tag{3.72} $$

Laguerren yhtälön lineaarisesti riippumaton ratkaisu on selvästi konfluentin hypergeometrisen yhtälön lineaarisesti riippumaton ratkaisu $x^{1-c}{}_1F_1(1+a-c;2-c;x)$, nk. toisen lajin hyoergeometrinen funktio tai Tricomin funktio. Jälleen $a = -n$ ja $c = 1$, jolloin lineaarisesti riippumattomaksi ratkaisuksi saadaan:

$$ \begin{aligned} x^{1-c}{}_1F_1(1+a-c;2-c;x) &= x^{1-1}{}_1F_1(1-n-1;2-1;x) \\ x^{1-c}{}_1F_1(1+a-c;2-c;x) &= {}_1F_1(-n;1;x) \end{aligned} $$

Havaitaan, että lineaarisesti riippumaton ratkaisu redusoituu alkuperäiseksi ratkaisuksi, jolloin yhtälölle ei löydy muita ratkaisuja. [VOIKO OLLA?] Ollaan siis ratkaistu Laguerren yhtälö:

$$ \boxed{f_n(x) = C_1 L_n(x) = C_1\,{}_1F_1(-n;1;x) \quad \vee \quad f_n(x) = C_1\bar{L}_n(x) = C_1 n!\,{}_1F_1(-n;1;x)} \tag{3.73} $$

3.3.12 Laguerren liittoyhtälö

$$x\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} + (\alpha + 1 - x)\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} + nf = 0 \tag{3.74}$$

Laguerren liittoyhtälö on Laguerren yhtälön yleisempi muoto, joka redusoituu Laguerren yhtälöksi, kun $\alpha = 0$. Yhtälö voitaisiin ratkaista sarjayritemenetelmällä, mutta sen sijaan tunnistetaan liittoyhtälö konfluentiksi hypergeometriseksi yhtälöksi, jossa $a = -n$ ja $c = \alpha + 1$. Tällöin yhtälön ratkaisevat ensimmäisen ja toisen lajin konfluentit hypergeometriset funktiot:

$$\begin{aligned}
f(x) &= {}_1F_1(-n; \alpha + 1; x) \\
f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-n)^{\overline{k}}}{k!(\alpha + 1)^{\overline{k}}} x^k
\end{aligned}$$

Otetaan miinusmerkki ulos osoittajan nousevasta Pochhammer-symbolista, jolloin se muuttuu laskevaksi:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k n^{\underline{k}}}{k!(\alpha + 1)^{\overline{k}}} x^k$$

Laskevalle Pochhamer-symbolille pätee: $\frac{a^{\underline{b}}}{b!} = \binom{a}{b}$. Vastaavasti nousevalle Pochammer-symbolille pätee: $\frac{a^{\overline{b}}}{b!} = \binom{a+b-1}{b}$. Saadaan:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\binom{\alpha+1+k-1}{k} k!} \binom{n}{k} x^k \\
f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\binom{\alpha+k}{k} k!} \binom{n}{k} x^k \\
f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\binom{n}{k}}{\binom{\alpha+k}{k}} x^k \\
f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\frac{n!}{k!(n-k)!}}{\frac{(\alpha+k)!}{k!(\alpha+k-k)!}} x^k \\
f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{n!}{\cancel{k}!(n-k)!} \frac{\cancel{k}!\alpha!}{(\alpha+k)!} x^k \\
f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{\alpha!}{(\alpha+k)!} x^k
\end{aligned}$$

Laguerren liittofunktioiden $L_n^{\alpha}(x)$ normalisaatio on valittu siten, että hypergeometrista funktiota kertoo vakiotermi $\binom{n+\alpha}{\alpha}$, jolloin saadaan:

$$L_n^\alpha(x) = \binom{n+\alpha}{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{\alpha!}{(\alpha+k)!} x^k \tag{3.75}$$

$$L_n^\alpha(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{\alpha!}{(\alpha+k)!} \binom{n+\alpha}{\alpha} x^k \tag{3.76}$$

$$L_n^\alpha(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\cancel{n!}}{k!(n-k)!} \frac{\alpha!}{(\alpha+k)!} \frac{(n+\alpha)!}{\cancel{n!}(n+\alpha-n)!} x^k \tag{3.77}$$

$$L_n^\alpha(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!(n-k)!} \frac{\cancel{\alpha!}}{(\alpha+k)!} \frac{(n+\alpha)!}{\cancel{\alpha!}} x^k \tag{3.78}$$

$$L_n^\alpha(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!(n-k)!} \frac{1}{(\alpha+k)!} (n+\alpha)! x^k \tag{3.79}$$

$$L_n^\alpha(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(n+\alpha)!}{k!(n-k)!(\alpha+k)!} x^k \tag{3.80}$$

Kun tunnistetaan $\binom{n+\alpha}{n-k} = \frac{(n+\alpha)!}{(n-k)!(n+\alpha-n+k)!} = \frac{(n+\alpha)!}{(n-k)!(\alpha+k)!}$ saadaan Laguerren liittofunktioille esitys myös binomikertoimien suhteen:

$$L_n^\alpha(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \binom{n+\alpha}{n-k} x^k \tag{3.81}$$

Termit menevät nollaksi, kun $k > n$, jolloin sarja supistuu summaksi:

$$L_n^\alpha(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \binom{n+\alpha}{n-k} x^k \tag{3.82}$$

$$\tag{3.83}$$

On siis saatu kuvaus nk. Laguerren liittofunktioille:

$$\boxed{\begin{aligned} L_n^\alpha(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \binom{n+\alpha}{n-k} x^k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{(n+\alpha)!}{k!(n-k)!(\alpha+k)!} x^k \\ &= \binom{n+\alpha}{\alpha} {}_1F_1(-n; \alpha+1; x) \end{aligned}} \tag{3.84}$$

Vastaavasti kuin tavallisille Laguerren polynomeille on fysiikassa käytössä konventio, jossa Laguerren liittopolynomit on skaalattu termillä $(n+\alpha)!$:

$$\boxed{\begin{aligned} \bar{L}_n^\alpha(x) &= (n+\alpha)! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \binom{n+\alpha}{n-k} x^k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{[(n+\alpha)!]^2}{k!(n-k)!(\alpha+k)!} x^k \\ &= (n+\alpha)! \binom{n+\alpha}{\alpha} {}_1F_1(-n; \alpha+1; x) \end{aligned}} \tag{3.85}$$

Tavallisen konvention ja fysiikkakonvention välillä on siis relaatio:

$$\boxed{\bar{L}_n^\alpha(x) = (n+\alpha)! L_n^\alpha(x)} \tag{3.86}$$

Vaihtoehtoisesti Laguerren liittofunktiot voidaan johtaa suoraan tavallisista Laguerren funktioista seuraavan määritelmän avulla:

$$\boxed{L_n^\alpha(x) = (-1)^\alpha \frac{\mathrm{d}^\alpha}{\mathrm{d}x^\alpha} L_{n+\alpha}(x)} \tag{3.87}$$

Sijoitetaan $L_{\alpha+n}(x)$ ja derivoidaan:

$$L_n^\alpha(x) = (-1)^\alpha \frac{\mathrm{d}^\alpha}{\mathrm{d}x^\alpha} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \binom{n+\alpha}{k} x^k \right]$$

Ainoa x-riippuvainen termi on x^k:

$$L_n^\alpha(x) = (-1)^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \binom{n+\alpha}{k} \frac{\mathrm{d}^\alpha}{\mathrm{d}x^\alpha}(x^k)$$

Mikäli $\alpha > k$, katoaa x^k kokonaan kun sitä derivoidaan. Summa siis alkaa termistä $k = \alpha$. Kun monomia x^k derivoidaan α kertaa tulee sen eteen kertoimeksi $k^{\underline{\alpha}}$ ja sen eksponentti pienenee α:n verran: $x^{k-\alpha}$:

$$L_n^\alpha(x) = (-1)^\alpha \sum_{k=\alpha}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \binom{n+\alpha}{k} k^{\underline{\alpha}} x^{k-\alpha}$$

Ilmaistaan laskeva Pochhammer-symboli tavallisten kertomien osamääränä: $a^{\underline{b}} = \frac{a!}{(a-b)!}$. Otetaan lisäksi vakio $(-1)^\alpha$ summan sisään:

$$L_n^\alpha(x) = \sum_{k=\alpha}^{\infty} \frac{(-1)^{k+\alpha}}{\cancel{k!}} \binom{n+\alpha}{k} \frac{\cancel{k!}}{(k-\alpha)!} x^{k-\alpha}$$

$$L_n^\alpha(x) = \sum_{k=\alpha}^{\infty} (-1)^{k+\alpha} \frac{(n+\alpha)!}{k!(n+\alpha-k)!} \frac{1}{(k-\alpha)!} x^{k-\alpha}$$

Otetaan käyttöön uusi indeksi $j = k - \alpha \iff k = j + \alpha$, jolloin summa saadaan jälleen alkamaan nollasta:

$$L_n^\alpha(x) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^{j+\alpha+\alpha} \frac{(n+\alpha)!}{(j+\alpha)!(n+\alpha-j-\alpha)!} \frac{1}{(j+\alpha-\alpha)!} x^j$$

$$L_n^\alpha(x) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^{j+2\alpha} \frac{(n+\alpha)!}{(j+\alpha)!(n-j)!} \frac{1}{j!} x^j$$

Tunnistetaan jälleen $\frac{(n+\alpha)!}{(j+\alpha)!(n-j)!} = \binom{n+\alpha}{n-\alpha}$. Lisäksi $(-1)^{j+2\alpha} = (-1)^j(-1)^{2\alpha}$. Koska 2α on parillinen luku, on $(-1)^{2\alpha}$ aina 1. Saadaan:

$$L_n^\alpha(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!} \binom{n+\alpha}{n-\alpha} x^j$$

Tunnistetaan näin saatu muoto yhteneväksi aiemman muodon kanssa.

Laguerren liittoyhtälön lineaarisesti riippumaton ratkaisu $g(x)$ saadaan toisen lajin konfluentista hypergeometrisesta funktiosta parametreillä $a = -n$ ja $c = \alpha + 1$:

$$
\begin{aligned}
g(x) &= x^{1-c}{}_1F_1(1 + a - c; 2 - c; x) \\
g(x) &= x^{1-\alpha-1}{}_1F_1(1 - n - \alpha - 1; 2 - \alpha - 1; x) \\
g(x) &= x^{-\alpha}{}_1F_1(-n - \alpha; 1 - \alpha; x) \\
g(x) &= x^{-\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-n-\alpha)^{\overline{k}}}{k!(1-\alpha)^{\overline{k}}} x^k
\end{aligned}
$$

Otetaan miinusmerkki ulos kustakin nousevasta Pochhammer-symbolista, jolloin ne muuttuvat laskeviksi:

$$
g(x) = x^{-\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cancel{(-1)^k}(n+\alpha)^{\underline{k}}}{k!\cancel{(-1)^k}(\alpha-1)^{\underline{k}}} x^k
$$

Laskevalle Pochhamer-symbolille pätee: $\frac{a^{\underline{b}}}{b!} = \binom{a}{b}$. Saadaan:

$$
\begin{aligned}
g(x) &= x^{-\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\binom{n+\alpha}{k}}{\binom{\alpha-1}{k}k!} x^k \\
g(x) &= x^{-\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{\binom{n+\alpha}{k}}{\binom{\alpha-1}{k}} x^k \\
g(x) &= x^{-\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{\frac{(n+\alpha)!}{k!(n+\alpha-k)!}}{\frac{(\alpha-1)!}{k!(\alpha-1-k)!}} x^k \\
g(x) &= x^{-\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{(n+\alpha)!}{\cancel{k!}(n+\alpha-k)!} \frac{\cancel{k!}(\alpha-1-k)!}{(\alpha-1)!} x^k \\
g(x) &= x^{-\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{(n+\alpha)!}{(n+\alpha-k)!} \frac{(\alpha-1-k)!}{(\alpha-1)!} x^k
\end{aligned}
$$

Koska nyt α voi olla mikä tahansa reaaliluku, korvataan kertomat Gammafunktiolla, jolle pätee $\Gamma(k+1) = k!$, kun $k \in \mathbb{Z}$:

$$
g(x) = x^{-\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+\alpha+1-k)} \frac{\Gamma(\alpha-k)}{\Gamma(\alpha)} x^k
$$

Otetaan vakiot summan ulkopuolelle:

$$
g(x) = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)} x^{-\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha-k)}{k!\Gamma(\alpha-k+n+1)} x^k
$$

Ollaan siis läydetty lineaarisesti riippumaton ratkaisu $g(x)$ Laguerren liittoyhtälölle. Tällä funktiolla ei ole [AINAKAAN MINUN TIETÄÄKSENI] omaa erillistä nimeä, sillä se voidaan esittää toisen lajin konfluenttin hypergeometrisen funktion avulla, mutta merkitään sitä täydellisyyden vuoksi $M_n^{\alpha}(x)$:

$$\boxed{M_n^\alpha(x) = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)} x^{-\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha-k)}{k!\Gamma(\alpha-k+n+1)} x^k = x^{-\alpha}{}_1F_1(-n-\alpha; 1-\alpha; x)} \tag{3.88}$$

Ollaan siis ratkaistu Laguerren liittoyhtälö, jonka yleinen ratkaisu on lineaarikombinaatio saaduista ratkaisuista:

$$\boxed{f_n^\alpha(x) = C_1 L_n^\alpha(x) + C_2 M_n^\alpha(x) = C_1 L_n^\alpha(x) + C_2 x^{-\alpha}{}_1F_1(-n-\alpha; 1-\alpha; x)} \tag{3.89}$$

Vastaavasti fyysikkokonventiolla ratkaisu olisi muotoa:

$$\boxed{f_n^\alpha(x) = C_1 (n+\alpha)! L_n^\alpha(x) + C_2 M_n^\alpha(x) = C_1 (n+\alpha)! L_n^\alpha(x) + C_2 x^{-\alpha}{}_1F_1(-n-\alpha; 1-\alpha; x)} \tag{3.90}$$

On huomattavaa, että kun $\alpha = 0$, redusoituu ratkaisu tavallisen Laguerren yhtälön ratkaisuksi, mikä onkin toivottavaa.

3.3.13 Hermiten yhtälö

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} - 2x\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} + 2nf = 0 \tag{3.91}$$

Ratkaistaan potenssisarjayritteellä $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k x^{k+r}$. Derivaatat Besselin yhtälön ratkaisusta. Saadaan:

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k (k+r)(k+r-1) x^{k+r-2} - 2x \sum_{k=0}^{\infty} f_k (k+r) x^{k+r-1} + 2n \sum_{k=0}^{\infty} f_k x^{k+r} = 0$$

Kerrotaan eutkertoimet summien sisään:

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k (k+r)(k+r-1) x^{k+r-2} - \sum_{k=0}^{\infty} 2 f_k (k+r) x^{k+r} + \sum_{k=0}^{\infty} 2n f_k x^{k+r} = 0$$

Yhdistetään kaksi viimeistä summaa ja otetaan ensimmäisestä summasta kaksi ensimmäistä termiä ulos:

$$(0+r)(0+r-1) f_0 x^{0+r-2} + (1+r)(1+r-1) f_1 x^{1+r-2} + \sum_{k=2}^{\infty} f_k (k+r)(k+r-1) x^{k+r-2} + \sum_{k=0}^{\infty} 2(n-k-r) f_k x^{k+r} = 0$$

$$r(r-1) f_0 x^{r-2} + r(r+1) f_1 x^{r-1} + \sum_{k=2}^{\infty} f_k (k+r)(k+r-1) x^{k+r-2} + \sum_{k=0}^{\infty} 2(n-k-r) f_k x^{k+r} = 0$$

Merkitään enimmäisessä summassa $k = j+2 \iff j = k-2$ ja nimetään toisen summan indeksit uudelleen $k \to j$:

$$r(r-1) f_0 x^{r-2} + r(r+1) f_1 x^{r-1} + \sum_{j=0}^{\infty} f_{j+2} (j+2+r)(j+2+r-1) x^{j+r} + \sum_{j=0}^{\infty} 2(n-j-r) f_j x^{j+r} = 0$$

Nyt summat voidaan yhdistää:

$$r(r-1)f_0x^{r-2}+r(r+1)f_1x^{r-1}+\sum_{j=0}^{\infty}\Big[(j+2+r)(j+1+r)f_{j+2}+2(n-j-r)f_j\Big]x^{j+r}=0$$

Kun vasemman puolen sarja samaistetaan oikena puolen nollasarjan kanssa, saadaan seuraavat ehdot:

$$r(r-1)f_0=0 \quad \wedge \quad r(r+1)f_1=0 \quad \wedge \quad (j+2+r)(j+1+r)f_{j+2}+2(n-j-r)f_j=0$$

Vastaavalla argumentoinnilla kuin Legendren yhtälölle, voidaan valita $r=0$ ja riippuen onko $f_0=0$ vai $f_1=0$, ratkaisussa on vain parittomia tai parillisia termejä. Tarkastllaan kolmatta ehtoa:

$$(j+2+r)(j+1+r)f_{j+2}+2(n-j-r)f_j=0$$

Ratkaistaan f_{j+2}:

$$f_{j+2}=-\frac{2(n-j-r)}{(j+2+r)(j+1+r)}f_j$$

Sijoitetaan $r=0$:

$$f_{j+2}=-\frac{2(n-j)}{(j+2)(j+1)}f_j$$

Vastaavasti kuin Legendren yhtälölle koska rekursiorelaatio antaa yhteyden kertoimen f_j ja f_{j+2} välille, ovat parilliset ja parittomat kertoimet täysin toisistaan riippumattomia, jolloin vaikka esim. parilliset kertoimet päättyisivät, voivat parittomat jatkua loputtomiin ja toisinpäin. On huomattavaa, että mikäli $n=j$, menee kerroin f_{j+2} nollaan, jolloin sarja päättyy näiden termien osalta. Tämä toki tapahtuu vain, mikäli n on kokonaisluku, sillä j on kokonaisluku. Sarjoissa parilliset ja parittomat kertoimet ovat kuitenkin toisistaan riippumattomia, jolloin jos n on parillinen, päättyy parillinen sarja, mutta pariton sarja jatkuu loputtomiin ja toisinpäin. Siispä voidaan todeta, että Hermiten yhtälön toisen ratkaisun sarja päättyy, mikäli n on kokonaisluku (Tällöin ratkaisuja kutsutaan Hermiten polynomeiksi) ja jatkuu loputtomiin, mikäli n ei ole kokonaisluku (Tällöin ratkaisuja kutsutaan Hermiten funktioiksi). Jatketaan tarkastelua olettamalla, että n on kokonaisluku, sillä tämä on käytännössä aina totta fysiikan sovelluksissa.

Vastaavasti kuin Legendren yhtälölle koska n:n oletetaan olevan kokonaisluku, päättyy rekursiorelaatio, mikäli $j=n$, sillä tällöin $n-j=0$. Jotta j voisi koskaan olla n, tulee j:n ja n:n pariteetin olla samat, sillä j kasvaa aina kahdella, jolloin jos n on parillinen, j saavuttaa sen vain mikäli rekursiorelaatio on alkanut f_0:sta (eli j on parillinen) ja vastaaavasti jos n on pariton, j saavuttaa sen mikäli rekursiorelaatio on alkanut f_1:stä (eli j on pariton). Koska ln:n ja j:n pariteetit ovat samat, on niiden erotus $n-j$ aina parillinen luku $2k$ (Todistus Legendren yhtälön ratkaisussa). Tehdään siis sijoitus $n-j=2k \iff j=n-2k$:

$$f_{n-2k+2}=-\frac{2(2k)}{(n-2k+2)(n-2k+1)}f_{n-2k}$$

Nyt jos rekursiorelaatiota sovellettaisiin ketjun loppuun asti, ei tiedettäisi, kuinka monta termiä tulossa on. Ratkaistaan sen sijaan rekursiorelaatio f_{n-2k}:n suhteen:

$$f_{n-2k}=-\frac{(n-2k+1)(n-2k+2)}{2(2k)}f_{n-2k+2}$$

Nyt siis vasemman puolen indeksissä f_{n-2k} n:stä vähennetään suurempi luku kuin oikean puolen indeksissä $f_{n-2(k-1)}$ $(2(k-1) < 2k)$, jolloin oikean puolen indeksi on suurempi ja rekursiorelaatio tuottaa aina seuraavasta indeksistä edellisen indeksin, mikäli siis rekursiorelaatiota sovellettaisiin tasan k kertaa, tulisi oikean puolen indeksiksi $n - 2(k - k) = n$, eli olisi johdettu sarjan mielivaltaisen kertoimen f_{n-2k} lauseke suhteessa sarjan viimeiseen kertoimeen f_n. Tehdään siis juuri näin soveltamalla rekursiorelaatiota k kertaa. Nyt siis $2k$ pienenee jokaisella iteraatiolla, sillä $2k = n - j$ ja j kasvaa kun lähestytään n:ää. Samalla logiikalla $n - 2k$ kasvaa jokaisella iteraatiolla, sillä $n - 2k = j$ ja j kasvaa kun lähestytään n:ää. Saadaan:

$$f_{n-2k} = (-1)\frac{(n-2k+1)(n-2k+2)}{2(2k)}(-1)\frac{(n-2k+1+2)(n-2k+2+2)}{2(2k-2)}\dots(-1)\frac{(n-1)n}{2(2)}f_{n-2(k-k)}$$

siistitään lauseketta:

$$f_{n-2k} = \frac{(-1)^k}{2^k}\frac{(n-2k+1)(n-2k+2)(n-2k+3)\dots(n-1)n}{(2k)(2k-2)(2k-4)\dots(2)}f_n$$

Tulossa $(2k)(2k-2)(2k-4)\dots(2) = (2k)(2[k-1])(2[k-2])\dots(2[1])$ jokaisessa termissä on tekijänä 2, jolloin koko tulosta voidaan ottaa yhteinen tekijä 2^k ja tulo tulee muotoon: $k(k-1)(k-2)\dots(1) = k!$. Saadaan:

$$f_{n-2k} = \frac{(-1)^k}{2^{2k}k!}(n-2k+1)(n-2k+2)(n-2k+3)\dots(n-1)nf_n$$

Tulo $(n-2k+1)(n-2k+2)(n-2k+3)\dots(n-1)n$ vastaa laskevaa Pochammer-symbolia $n^{\underline{2k}}$, joka voidaan puolestaan ilmaista tavallisen kertoman avulla muodossa $\frac{n!}{(n-2k)!}$. Saadaan:

$$f_{n-2k} = \frac{(-1)^k n!}{2^{2k}k!(n-2k)!}f_n$$

Ollan siis ilmaistu sarjan mielivaltainen kerroin suhteessa sarjan viimeiseen kertoimeen. Sijoitetaan tulos sarjayritteeseen:

$$f_n(x) = \sum_{n-2k=n}^{n-2k=0} f_{n-2k}x^{n-2k+r}$$

Merkinnällä $f_n(x)$ korostetaan sitä, että jokaiselle n:n arvolle on oma ratkaisunsa $f(x)$. Summausrajat seuraavat siitä, että $n-2k = n$ implikoi että $k = 0$, sillä tällöin lukujen n ja $2k$ etäisyys on n eli ollaan summan alussa. Vastaavasti $n - 2k = 0$ implikoi, että $k = \frac{n}{2}$, sillä tällöin lukujen n ja $2k$ etäisyys on 0 eli ollaan summan lopussa. On huomattavaa, että mikäli n on pariton, ei $\frac{n}{2}$ ole kokonaisluku, jolloin otetaan osamäärästä $\frac{n}{2}$ lattiafunktio, $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Lisäksi muistetaan, että $r = 0$, jolloin saadaan:

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} f_{n-2k}x^{n-2k}$$

Sijoitetaan f_{n-2k}:n lauseke:

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \left(\frac{(-1)^k n!}{2^{2k}k!(n-2k)!}f_n\right)x^{n-2k}$$

Tässä kohtaa asetetaan $f_n = 2^n$. [TÄHÄN EHKÄ JOKIN SYVÄLLISEMPI PERUSTELU]. Saadaan:

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \left(\frac{(-1)^k n!}{k!(n-2k)!} 2^{n-2k} \right) x^{n-2k}$$
$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k n!}{k!(n-2k)!} (2x)^{n-2k}$$

Nyt ollaan saatu yksi lineaarisesti riippumaton ratkaisu Hermiten yhtälölle. Näitä päättyviä sarjaratkaisuja kutsutaan Hermiten polynomeiksi $H_n(x)$:

$$\boxed{H_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k n!}{k!(n-2k)!} (2x)^{n-2k}} \tag{3.92}$$

3.3.14 Hypergeometrinen yhtälö

$$x(1-x)\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} + [c - (a+b+1)x]\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} - abf = 0 \tag{3.93}$$

Ratkaistaan potenssisarjayritteellä $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k x^{k+r}$. Derivaatat Besselin yhtälön ratkaisusta. Saadaan:

$$x(1-x)\sum_{k=0}^{\infty} f_k(k+r)(k+r-1)x^{k+r-2} + [c-(a+b+1)x]\sum_{k=0}^{\infty} f_k(k+r)x^{k+r-1} - ab\sum_{k=0}^{\infty} f_k x^{k+r} = 0$$

Kerrotaan eutkertoimet summien sisään. Termistä $x(1-x) = x - x^2$ tulee kaksi summaa samoin kuin termistä $[c - (a+b+1)x]$:

$$\begin{aligned}
0 = &\sum_{k=0}^{\infty} f_k(k+r)(k+r-1)x^{k+r-1} - \sum_{k=0}^{\infty} f_k(k+r)(k+r-1)x^{k+r} \\
&+ \sum_{k=0}^{\infty} cf_k(k+r)x^{k+r-1} - \sum_{k=0}^{\infty}(a+b+1)f_k(k+r)x^{k+r} \\
&- \sum_{k=0}^{\infty} abf_k x^{k+r} = 0
\end{aligned}$$

Otetaan ensimmäisestä ja kolmannesta summasta yksi termi ulos ja yhdistetään muut summat yhdeksi summaksi:

$$\begin{aligned}
0 = &f_0(0+r)(0+r-1)x^{0+r-1} + cf_0(0+r)x^{0+r-1} \\
&+ \sum_{k=1}^{\infty} f_k(k+r)(k+r-1)x^{k+r-1} + \sum_{k=1}^{\infty} cf_k(k+r)x^{k+r-1} \\
&- \sum_{k=0}^{\infty} \Big[(k+r)(k+r-1) + (a+b+1)(k+r) + ab\Big] f_k x^{k+r}
\end{aligned}$$

Yhdistetään kaksi ensimmäistä summaa:

$$0 = [r(r-1) + cr]f_0 x^{r-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \Big[(k+r)(k+r-1) + c(k+r)\Big] f_k x^{k+r-1}$$
$$- \sum_{k=0}^{\infty} \Big[(k+r)(k+r\cancel{-1}+a+b+\cancel{1}) + ab\Big] f_k x^{k+r}$$
$$0 = r(r-1+c)f_0 x^{r-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \Big[(k+r)(k+r-1+c)\Big] f_k x^{k+r-1} - \sum_{k=0}^{\infty} \Big[(k+r)(k+r+a+b) + ab\Big] f_k x^{k+r}$$

Merkitään enimmäisessä summassa $k = j+1 \iff j = k-1$ ja nimetään toisen summan indeksit uudelleen $k \to j$:

$$0 = r(r-1+c)f_0 x^{r-1} + \sum_{j=0}^{\infty} \Big[(j+r+1)(j+r+c)\Big] f_{j+1} x^{j+r} - \sum_{j=0}^{\infty} \Big[(j+r)(j+r+a+b) + ab\Big] f_j x^{j+r}$$

Nyt summat voidaan yhdistää:

$$0 = r(r-1+c)f_0 x^{r-1} + \sum_{j=0}^{\infty} \Big[(j+r+1)(j+r+c)f_{j+1} - [(j+r)(j+r+a+b) + ab]f_j\Big] x^{j+r}$$

Kun oikean puolen sarja samaistetaan vasemman puolen nollasarjan kanssa, saadaan seuraavat ehdot:

$$r(r-1+c) = 0 \qquad \wedge \qquad (j+r+1)(j+r+c)f_{j+1} - [(j+r)(j+r+a+b) + ab]f_j = 0$$

Ensimmäinen ehto, indeksiyhtälö, tuottaa ratkaisut $r = 0 \vee r = 1-c$. Toisesta reunaehdosta puolestaan saadaan:

$$(j+r+1)(j+r+c)f_{j+1} - [(j+r)(j+r+a+b) + ab]f_j = 0$$

Ratkaistaan f_{j+1}:n suhteen:

$$f_{j+1} = \frac{(j+r)(j+r+a+b) + ab}{(j+r+1)(j+r+c)} f_j$$

Jaetaan tekijöihin:

$$f_{j+1} = \frac{(j+r)(j+r+a) + b(j+r) + ab}{(j+r+1)(j+r+c)} f_j$$
$$f_{j+1} = \frac{(j+r)(j+r+a) + b(j+r+a)}{(j+r+1)(j+r+c)} f_j$$
$$f_{j+1} = \frac{(j+r+b)(j+r+a)}{(j+r+1)(j+r+c)} f_j$$

Ilmaistaan f_j rekursiorelaation avulla:

$$
f_{j+1} = \frac{(j+r+b)(j+r+a)}{(j+r+1)(j+r+c)} \frac{(j-1+r+b)(j-1+r+a)}{(j\cancel{-1}+r+\cancel{1})(j-1+r+c)} f_{j-1}
$$
$$
f_{j+1} = \frac{(j+r+b)(j+r+a)}{(j+r+1)(j+r+c)} \frac{(j-1+r+b)(j-1+r+a)}{(j+r)(j-1+r+c)} f_{j-1}
$$

Kun rekursiorelaatiota sovelletaan f_1:n saakka saadaan:

$$
f_{j+1} = \frac{(j+r+b)(j+r+a)}{(j+r+1)(j+r+c)} \frac{(j-1+r+b)(j-1+r+a)}{(j+r)(j-1+r+c)} \cdots \frac{(j-j+r+b)(j-j+r+a)}{(j-(j-1)+r)(j-j+r+c)} f_0
$$
$$
f_{j+1} = \frac{(j+r+b)(j+r+a)}{(j+r+1)(j+r+c)} \frac{(j-1+r+b)(j-1+r+a)}{(j+r)(j-1+r+c)} \cdots \frac{(r+b)(r+a)}{(1+r)(r+c)} f_0
$$

Tiedetään, että kussakin neljässä tulossa on yhteensä $j+1$ termiä, jolloin ne voidaan ilmaista nousevan Pochhammerin symbolin avulla kompaktisti:

$$
f_{j+1} = \frac{(r+b)^{\overline{j+1}}(r+a)^{\overline{j+1}}}{(1+r)^{\overline{j+1}}(r+c)^{\overline{j+1}}} f_0
$$

Merkitään jälleen $k = j+1$:

$$
f_k = \frac{(r+b)^{\overline{k}}(r+a)^{\overline{k}}}{(1+r)^{\overline{k}}(r+c)^{\overline{k}}} f_0
$$

Sijoitetaan rekursiorelaatio alkuperäiseen sarjayritteeseen, jolloin saadaan:

$$
f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(r+b)^{\overline{k}}(r+a)^{\overline{k}}}{(1+r)^{\overline{k}}(r+c)^{\overline{k}}} f_0 x^{k+r}
$$
$$
f(x) = f_0 x^r \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(r+b)^{\overline{k}}(r+a)^{\overline{k}}}{(1+r)^{\overline{k}}(r+c)^{\overline{k}}} x^k
$$

Sijoitetaan indeksiyhtälön ratkaisut $r = 0$ ja $r = 1-c$:

$$
f(x) = f_0 x^0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(0+b)^{\overline{k}}(0+a)^{\overline{k}}}{(1+0)^{\overline{k}}(0+c)^{\overline{k}}} x^k \quad \vee \quad f(x) = f_0 x^{1-c} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-c+b)^{\overline{k}}(1-c+a)^{\overline{k}}}{(1+1-c)^{\overline{k}}(1-c+c)^{\overline{k}}} x^k
$$

f_0 voidaan asettaa ykköseksi yleispätevyyttä menettämättä, sillä differentiaaliyhtälön yleisessä ratkaisussa on jokatapauksessa määräämätön vakiotermi. Tunnistetaan lisäksi $1^{\overline{k}} = k!$:

$$
f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b^{\overline{k}} a^{\overline{k}}}{k! c^{\overline{k}}} x^k \quad \vee \quad f(x) = x^{1-c} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-c+b)^{\overline{k}}(1-c+a)^{\overline{k}}}{(2-c)^{\overline{k}} k!} x^k
$$

Muutetaan hieman termien järjestystä asettamalla ne aakkosjärjestykseen:

$$
f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^{\overline{k}} b^{\overline{k}}}{k! c^{\overline{k}}} x^k \quad \vee \quad f(x) = x^{1-c} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1+a-c)^{\overline{k}}(1+b-c)^{\overline{k}}}{k!(2-c)^{\overline{k}}} x^k
$$

Ollaan siis ratkaistu hypergeometrinen yhtälö. Kun $1-c \notin \mathbb{Z}$, ovat saadut ratkaisut lineaarisesti riippumattomia ja yleinen ratkaisu saadaan näiden lineaarikombinaatiosta. Hypergeometristä funktiota merkitään usein muodossa ${}_2F_1(a,b;c;x)$ tai yksinkertaisesti $F(a,b;c;x)$, jolloin yleiseksi ratkaisuksi saadaan:

$$\boxed{f(x) = C_1\, {}_2F_1(a,b;c;x) + C_2\, {}_2F_1(1+a-c, 1+b-c; 2-c; x), \quad 1-c \notin \mathbb{Z}} \tag{3.94}$$

Jossa:

$$\boxed{{}_2F_1(a,b;c;x) = F(a,b;c;x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^{\overline{k}} b^{\overline{k}}}{k! c^{\overline{k}}} x^k} \tag{3.95}$$

Hypergeometrinen funktio redusoituu monen tutun funktion sarjaksi oikeilla parametrien a, b ja c arvoilla. Ohessa esimerkkejä:

Hypergeometrinen funktio	Tulos
${}_2F_1(a,b;b;x)$	$(1-x)^{-a}$
${}_2F_1(1,1;2;-x)$	$\frac{\ln(1+x)}{x}$
$\lim_{m\to\infty} {}_2F_1\left(1,m;1;\frac{x}{m}\right)$	e^x
${}_2F_1\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2};\frac{1}{2};\sin^2 x\right)$	$\cos x$
${}_2F_1\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2};\frac{3}{2};x^2\right)$	$\frac{\arcsin x}{x}$
${}_2F_1\left(m+1,-m;1;\frac{1-x}{2}\right), \quad m=2n\in\mathbb{Z}$	$P_m(x)$

Taulukko 3.1: Muutamia esimerkkejä funktioista, jotka voidaan ilmaista hypergeometrisen funktion avulla

3.3.15 Konfluentti hypergeometrinen yhtälö

$$x\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} + (c-x)\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} - af = 0 \tag{3.96}$$

Johdetaan ensin konfluentti hypergeometrinen yhtälö alkuperäisestä hypergeometrisestä yhtälöstä:

$$x(1-x)\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} + [c-(a+b+1)x]\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} - abf = 0$$

Tehdään muuttujanvaihdos $x = \frac{u}{b} \iff u = bx$. Nyt $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(bx) = b\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u}$ ja $\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(b\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u}\right) = b\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left(b\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u}\right) = b^2\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}u^2}$. Saadaan:

$$\begin{aligned}
\frac{u}{b}\left(1-\frac{u}{b}\right)b^2\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}u^2} + \left[c-(a+b+1)\frac{u}{b}\right]b\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u} - abf = 0 \\
bu\left(1-\frac{u}{b}\right)\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}u^2} + \left[c-\left(\frac{au}{b}+\frac{bu}{b}+\frac{u}{b}\right)\right]b\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u} - abf = 0 \\
bu\left(1-\frac{u}{b}\right)\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}u^2} + \left[c-\left(\frac{au}{b}+u+\frac{u}{b}\right)\right]b\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u} - abf = 0
\end{aligned}$$

Jaetaan yhtälö b:llä:

$$u\left(1-\frac{u}{b}\right)\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}u^2}+\left[c-\left(\frac{au}{b}+u+\frac{u}{b}\right)\right]\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u}-af=0$$

Otetaan raja-arvo, kun $b\to\infty$:

$$\begin{aligned}u\left(1-\cancel{\frac{u}{b}}\right)\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}u^2}+\left[c-\left(\cancel{\frac{au}{b}}+u+\cancel{\frac{u}{b}}\right)\right]\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u}-af=0\\ u\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}u^2}+[c-u]\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u}-af=0\end{aligned}$$

Nimetään uudelleen $u\to x$, jolloin saadaan Konfluentti hypergeometrinen yhtälö:

$$x\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}+(c-x)\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}-af=0$$

Konfluentti hypergeometrinen yhtälö on siis hypergeometrisen yhtälön muoto, jossa heikko erikoispiste pisteessä $x=1$ on kadonnut sillä se on yhdistettu heikkoon erikoispisteeseen äärettömyydessä. Ratkaistaan yhtälö potenssisarjayritteellä $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}f_k x^{k+r}$. Derivaatat löytyvät jälleen Besselin yhtälön ratkaisusta. Saadaan:

$$x\sum_{k=0}^{\infty}f_k(k+r)(k+r-1)x^{k+r-2}+(c-x)\sum_{k=0}^{\infty}f_k(k+r)x^{k+r-1}-a\sum_{k=0}^{\infty}f_k x^{k+r}=0$$

Kerrotaan etukertoimet summien sisään. Kerroin $(c-x)$ tuottaa kaksi summaa:

$$\sum_{k=0}^{\infty}f_k(k+r)(k+r-1)x^{k+r-1}+\sum_{k=0}^{\infty}cf_k(k+r)x^{k+r-1}-\sum_{k=0}^{\infty}f_k(k+r)x^{k+r}-\sum_{k=0}^{\infty}af_k x^{k+r}=0$$

Yhdistetään kaksi ensimmäistä summaa ja kaksi viimeistä summaa:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}\Big[(k+r)(k+r-1)+c(k+r)\Big]f_k x^{k+r-1}-\sum_{k=0}^{\infty}\Big[(k+r)+a\Big]f_k x^{k+r}=0\\ \sum_{k=0}^{\infty}(k+r)(k+r-1+c)f_k x^{k+r-1}-\sum_{k=0}^{\infty}(k+r+a)f_k x^{k+r}=0\end{aligned}$$

Otetaan ensimmäinen termi ulos ensimmäisestä summasta:

$$\begin{aligned}(0+r)(0+r-1+c)f_0 x^{0+r-1}+\sum_{k=1}^{\infty}(k+r)(k+r-1+c)f_k x^{k+r-1}-\sum_{k=0}^{\infty}(k+r+a)f_k x^{k+r}=0\\ r(r-1+c)f_0 x^{r-1}+\sum_{k=1}^{\infty}(k+r)(k+r-1+c)f_k x^{k+r-1}-\sum_{k=0}^{\infty}(k+r+a)f_k x^{k+r}=0\end{aligned}$$

Asetetaan ensimmäiseen summaan uusi indeksi $j=k+1 \iff k=j-1$ ja nimetään toisen summan indeksit uudelleen $k\to j$:

$$r(r-1+c)f_0 x^{r-1}+\sum_{j=0}^{\infty}(j+r+1)(j+r+c)f_{j+1}x^{j+r}-\sum_{j=0}^{\infty}(j+r+a)f_j x^{j+r}=0$$

Nyt summat voidaan yhdistää:

$$r(r-1+c)f_0x^{r-1} + \sum_{j=0}^{\infty}\Big[(j+r+1)(j+r+c)f_{j+1} - (j+r+a)f_j\Big]x^{j+r} = 0$$

Vaatimalla vasemman puolen yhtenevyys oikean puolen nollasarjan kanssa saadaan kaksi ehtoa:

$$r(r-1+c) = 0 \quad \vee \quad (j+r+1)(j+r+c)f_{j+1} - (j+r+a)f_j = 0$$

Indeksiyhtälö (ensimmäinen ehto) tuottaa $r = 0$ tai $r = 1 - c$. Tarkastellaan seuraavaksi toista ehtoa:

$$(j+r+1)(j+r+c)f_{j+1} - (j+r+a)f_j = 0$$

Ratkaistaan f_{j+1}:

$$f_{j+1} = \frac{(j+r+a)}{(j+r+1)(j+r+c)}f_j$$

Ilmaistaan f_j myös rekursiorelaation avulla:

$$f_{j+1} = \frac{(j+r+a)}{(j+r+1)(j+r+c)}\frac{(j-1+r+a)}{(j+r)(j-1+r+c)}f_{j-1}$$

Kun rekursiorelaatiota sovelletaan f_1:een asti saadaan:

$$f_{j+1} = \frac{(j+r+a)}{(j+r+1)(j+r+c)}\frac{(j-1+r+a)}{(j+r)(j-1+r+c)}\cdots\frac{(j-j+r+a)}{(j-j+r+1)(j-j+r+c)}f_0$$
$$f_{j+1} = \frac{(j+r+a)}{(j+r+1)(j+r+c)}\frac{(j-1+r+a)}{(j+r)(j-1+r+c)}\cdots\frac{(r+a)}{(r+1)(r+c)}f_0$$

Kussakin tulossa on $j+1$ termiä, jolloin ne voidaan ilmaista nousevan Pochhammerin symbolin avulla:

$$f_{j+1} = \frac{(r+a)^{\overline{j+1}}}{(r+1)^{\overline{j+1}}(r+c)^{\overline{j+1}}}f_0$$

Merkitään jälleen $k = j+1$, jolloin saadaan:

$$f_k = \frac{(r+a)^{\overline{k}}}{(r+1)^{\overline{k}}(r+c)^{\overline{k}}}f_0$$

Sijoitetaan rekursiorelaatio alkuperäiseen sarjayritteeseen, jolloin saadaan:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(r+a)^{\overline{k}}}{(r+1)^{\overline{k}}(r+c)^{\overline{k}}}f_0x^{k+r}$$
$$f(x) = f_0x^r\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(r+a)^{\overline{k}}}{(r+1)^{\overline{k}}(r+c)^{\overline{k}}}x^k$$

Sijoitetaan indeksiyhtälön ratkaisut $r = 0$ ja $r = 1 - c$:

$$f(x) = f_0 x^0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(0+a)^{\overline{k}}}{(0+1)^{\overline{k}}(0+c)^{\overline{k}}} x^k \quad \vee \quad f(x) = f_0 x^{1-c} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-c+a)^{\overline{k}}}{(1-c+1)^{\overline{k}}(1-c+c)^{\overline{k}}} x^k$$

f_0 voidaan asettaa ykköseksi yleispätevyyttä menettämättä, sillä differentiaaliyhtälön yleisessä ratkaisussa on jokatapauksessa määräämätön vakiotermi. Tunnistetaan lisäksi $1^{\overline{k}} = k!$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^{\overline{k}}}{k! c^{\overline{k}}} x^k \quad \vee \quad f(x) = x^{1-c} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1+a-c)^{\overline{k}}}{(2-c)^{\overline{k}} k!} x^k$$

Ollaan siis ratkaistu konfluentti hypergeometrinen yhtälö. Kun $1 - c \notin \mathbb{Z}$, ovat saadun ratkaisut lineaarisesti riippumattomia ja yleinen ratkaisu saadaan näiden lineaarikombinaatiosta. Konfluentteja hypergeometristä funktiota merkitään usein muodossa ${}_1F_1(a;c;x)$ tai yksinkertaisesti $M(a,c,x)$, jossa M on nk. Kummerin funktiot. Yleiseksi ratkaisuksi saadaan siis:

$$\boxed{f(x) = C_1\, {}_1F_1(a;c;x) + C_2\, x^{1-c}\, {}_1F_1(1+a-c; 2-c; x), \qquad 1 - c \notin \mathbb{Z}} \tag{3.97}$$

Jossa:

$$\boxed{{}_1F_1(a;c;x) = M(a,c,x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^{\overline{k}}}{k! c^{\overline{k}}} x^k} \tag{3.98}$$

$$\boxed{x^{1-c}\, {}_1F_1(1+a-c; 2-c; x) = M(1+a-c, 2-c, x) = x^{1-c} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1+a-c)^{\overline{k}}}{k!(2-c)^{\overline{k}}} x^k} \tag{3.99}$$

Tai vaihtoehtoisesti Kummerin funktion avulla ilmaistuna saadaan:

$$\boxed{f(x) = C_1 M(a,c,x) + C_2 x^{1-c} M(1+a-c, 2-c, x) \quad 1 - c \notin \mathbb{Z}} \tag{3.100}$$

Lisäksi tavallisten hypergeometrisen funktioiden ja konfluenttien hypergeometristen funktioiden välillä on seuraavat relaatiot:

$$\boxed{{}_1F_1(a;c;x) = M(a,c,x) = \lim_{b\to\infty} {}_2F_1\left(a, b; c; \frac{x}{b}\right)} \tag{3.101}$$

On olemassa myös yhdistelmäfunktio $U(a,c,x)$, joka yhdistää saadut lineaarisesti riippumattomat ratkaisut. U on nimeltään Tricomin funktio ja on muotoa:

$$\boxed{U(a,c,x) = \frac{\Gamma(1-b)}{\Gamma(a+1-b)} M(a,c,x) + \frac{\Gamma(b-1)}{\Gamma(a)} x^{1-c} M(a+1-c, 2-b, x)} \tag{3.102}$$

3.3.16 Sturmin–Liouville'n ongelmat

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p(x)\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right) + q(x) f = -\lambda w(x) f \tag{3.103}$$

SL-ongelma	SL-muoto	Ominaisfunktiot f_k ominaisarvoilla λ_k
Harmoninen yhtälö	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)=\frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}x^2}=-\omega^2 f$	$f_k(x)=C_1\sin(\omega_k x)+C_2\cos(\omega_k x), \lambda_k=\omega_k^2$
Hyperbolinen yhtälö	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)=\frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}x^2}=\omega^2 f$	$f_k(x)=C_1\sinh(\omega_k x)+C_2\cosh(\omega_k x), \lambda_k=\omega_k^2$
Cauchyn–Eulerin	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^a\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)=-bx^{a-2}f$	$f_k(x)=C_1x^{\lambda_k}+C_2x^{\lambda_k}, \lambda_k=\frac{1-a\pm\sqrt{(a-1)^2-4b}}{2}$
Besselin yhtälö	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)-\alpha^2 f=-\omega^2x^2 f$	$f_k(x)=C_1J_\alpha(\omega_k x)+C_2Y_\alpha(\omega_k x), \lambda_k=\omega_k^2$
Muokattu Bessel	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)+\alpha^2 f=\omega^2x^2 f$	$f_k(x)=C_1I_\alpha(\omega_k x)+C_2K_\alpha(\omega_k x), \lambda_k=\omega_k^2$
Legendren yhtälö	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left((1-x^2)\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)=-l(l+1)f$	$f_l(x)=C_1P_l(x)+C_2Q_l(x), \lambda_l=l(l+1)$
Legendren liitto	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left((1-x^2)\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)-\frac{m^2}{1-x^2}f$ $=-l(l+1)f(x)$	$f_l(x)=C_1P_l^m(x)+C_2Q_l^m(x),$ $\lambda_l=l(l+1)$
Laguerren yhtälö	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(xe^{-x}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)=-ne^{-x}f$	$f_n(x)=C_1L_n(x)+C_2\,{}_1F_1(-n;1;x), \lambda_n=n$
Laguerren liitto	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^{\alpha+1}e^{-x}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)=-nx^\alpha e^{-x}f$	$f_n(x)=C_1L_n^\alpha(x)+C_2x^{-\alpha}\,{}_1F_1(-n;\alpha+1;x), \lambda_n=n$
Hermiten yhtälö	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(e^{-x^2}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)=-2ne^{-x^2}f$	$f_n(x)=C_1H_n(x)+C_2\,{}_1F_1\left(-\frac{n}{2};\frac{1}{2};x^2\right), \lambda_n=2n$
Hypergeom. yhtälö	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^c(1-x)^{a+b-c+1}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)$ $=abx^{c-1}(1-x)^{a+b-c}f$	$f(x)=C_1\,{}_2F_1(a,b;c;x)$ $+C_2x^{1-c}\,{}_2F_1(a-c+1,b-c+1;2-c;x), \lambda=-ab$
Konfluentti hypergeom.	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^ce^{-x}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)=ax^{c-1}e^{-x}f$	$f(x)=C_1\,{}_1F_1(a;c;x)+C_2x^{1-c}\,{}_1F_1(a-c+1;2-c;x),$ $\lambda=-a$

Taulukko 3.2: Muutamia 2. kertaluvun yhtälöitä SL-muodossa ominaisfunktioineen

4 Osittaisdifferentiaaliyhtälöt

4.1 1. kl:n osittaisdifferentiaaliyhtälöt

4.1.1 Lineaarinen vakiokertoiminen homogeeninen:

$$a\frac{\partial f}{\partial x}+b\frac{\partial f}{\partial y}+cf=0 \tag{4.1}$$

4.1.2 Jatkuvuusyhtälö:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\nabla\cdot\mathbf{j}=\sigma \tag{4.2}$$

4.1.3 Burgersin yhtälö (viskositeetti nolla):

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=0 \tag{4.3}$$

4.2 2. kl:n osittaisdifferentiaaliyhtälöt

4.2.1 Laplacen yhtälö:

$$\nabla^2 f=0 \tag{4.4}$$

Laplacen operaattorin homogeeninen yhtälö. Ratkaistaan kahdessa ja kolmessa ulottuvuudessa eri koordinaatistoissa

1. **Karteesisessa koordinaatistossa**
   Analyyttiset kompleksifunktiot 2D:ssä
2. **Sylinterikoordinaatistossa**
   Besselin funktiot
3. **Pallokoordinaatistossa**
   Palloharmoniset funktiot

4.2.2 Poissonin yhtälö:

$$\nabla^2 f = u \tag{4.5}$$

Laplacen yhtälön epähomogeeninen versio.

1. **Karteesisessa koordinaatistossa**
2. **Sylinterikoordinaatistossa**
3. **Pallokoordinaatistossa**

4.2.3 Helmholtzin yhtälö:

$$\nabla^2 f = -k^2 f \tag{4.6}$$

Laplacen operaattorin ominaisarvoyhtälö.

1. **Karteesisessa koordinaatistossa**
2. **Sylinterikoordinaatistossa**
3. **Pallokoordinaatistossa**
   Radiaalisen yhtälön ratkaisee Besselin pallofunktiot.

   Kulmayhtälön ratkaisee palloharmoniset funktiot.

4.2.4 Lämpöyhtälö:

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \alpha \nabla^2 T = 0 \tag{4.7}$$

Redusoituu laplacen yhtälöksi staattisessa tapauksessa, eli kun lämpö ei enää virtaa.

1. **Karteesisessa koordinaatistossa**
2. **Sylinterikoordinaatistossa**
   Besselin funktiot
3. **Pallokoordinaatistossa**

4.2.5 Aaltoyhtälö:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 u = 0 \quad \text{tai} \quad \Box^2 u = 0 \tag{4.8}$$

D'Alembertin operaattorin homogeeninen yhtälö.

4.2.6 Ensimmäisen lajin Lagrange'n yhtälö:

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_k} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_k} + \sum_{i=1}^{C} \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{r}_k} = 0 \tag{4.9}$$

Jossa $\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_k} = \left(\frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial y_k}, \frac{\partial}{\partial z_k}\right)$ ja $\frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{r}}_k} = \left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}_k}, \frac{\partial}{\partial \dot{y}_k}, \frac{\partial}{\partial \dot{z}_k}\right)$

4.2.7 Eulerin–Lagrange'n yhtälö (Toisen lajin Lagrange'n yhtälö):

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = 0 \tag{4.10}$$

4.2.8 Schrödingerin yhtälö:

Eräänlainen diffuusioyhtälö.

1. **Yksiulotteinen**:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x,t)\right)\Psi(x,t) \tag{4.11}$$

2. **Yleinen aikariippuvainen**:

$$i\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} |\Psi(t)\rangle = \hat{H} |\Psi(t)\rangle \tag{4.12}$$

3. **Yleinen aikariippumaton**:

$$\hat{H} |\Psi\rangle = E |\Psi\rangle \tag{4.13}$$

Vapaan hiukkasen radiaalisen yhtälön sylinteri- ja pallokoordinaatistoissa ratkaiseen Besselin funktiot

4.2.9 Kleinin–Gordonin yhtälö:

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\psi(x,t) = 0 \quad \text{tai} \quad (\Box^2 + \mu^2)\psi = 0, \quad \mu = mc/\hbar \tag{4.14}$$

Relativistinen aaltoyhtälö

4.2.10 Burgersin yhtälö (viskositeetti ei nolla):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{4.15}$$

4.2.11 Navierin–Stokesin yhtälöt:

5 Vektoriavaruudet ja funktiot vektoreina

Vektoriavaruudet ovat eräs matemaattinen rakenne, jota esiintyy kaikkialla fysiikassa. Oli kyseessä sitten klassiset paikka-, nopeus-, ja kiihtyvyysvektorit, kvanttimekaaniset tilavektorit, suhteellisuusteorian nelivektorit, funktiot, funktionaalit, distribuutiot tai niihin liittyvät testifunktiot. Kaikkia näitä konsepteja yhdistää se, että niiden voidaan hyvin luontevasti ajatella olevan erilaisten vektoriavaruuksien alkioita. On siis hyvin olennaista ymmärtää, mitä vektoriavaruudet ovat ja miten niiden ominaisuuksia voidaan hyödyntää.

5.1 Vektoriavaruuden määrittely

Kaikkein yksinkertaisimmillaan vektoriavaruudet kokoavat tietyntyyppisiä vektoreita yhteen niiden samankaltaisuuden nojalla. Jotta objekti voi olla vektoriavaruuden jäsen ja sitä kautta vektori, tulee vektorin ja avaruuden johon se kuuluu toteuttaa kahdeksan ehtoa. Ehdot ovat pitkälti intuitiivisia henkilölle joka on aiemmin tutustunut vektoreihin numeroiden listoina ja joka osaa tulkita nämä numeroiden listat geometrisesti nuolina avaruudessa. Säännöt liittyvät siihen, miten vektoreita saa summata toisiinsa ja skaalata luvuilla jolloin mikäli geometrinen tulkinta on hallussa löytyy kaikille säännöille helposti visuaalinen perustelu. On tärkeää muistaa että säännöt eivät ole absoluuttisia siinä mielessä että niiden pitää olla juuri sellaiset kuin ne ovat. Päin vastoin säännöt ovat juuri sellaiset kuin ne ovat sillä on huomattu että tällaisten sääntöjen muodostamia rakenteita esiintyy erittäin monessa kontekstissa jolloin on ollut hyödyllistä yleistää tästä vektoriavaruuden käsite.

Ennen kuin tarkastellaan sääntöjä, on tärkeää määritellä minkä asioiden suhteen vektoriavaruudet määritellään. Koska fysiikassa mitattavat suureet voivat käytännössä saada mitä arvoja tahansa, määritellään fysiikassa lähes aina vektoriavaruudet suhteessa reaalilukuihin $\mathbb{R}$ tai kompleksilukuihin $\mathbb{C}$. Pitäydymme siis näissä joukoissa tässäkin tekstissä. Lukijan on siis oltava sinut reaalilukujen ja kompleksilukujen sekä niille määriteltyjen operaatioiden ($+$, $-$, $\cdot$, $/$, $\sqrt[n]{}$, log, a^b) kanssa (nk. reaalilukujen kunta ja kompleksilukujen kunta). Mitä tämä määrittely kunnan $\mathbb{R}$ tai $\mathbb{C}$ suhteen käytännössä tarkoittaa, on että vektorien mahdolliset numeeriset representaatiot (esim. vektorit lukujen listoina tai funktion arvo jossakin kohdassa) tapahtuvat näiden kuntien sisällä.

Kunnan lisäksi vektoriavaruuksissa on oltava kaksi vektoreita muokkaavaa operaatiota, joilla vektoreita voidaan yhdistellä ja skaalata. Nämä operaatiot ovat (vektorien) yhteenlasku ja skalaarilla kertominen. Merkitään tästä eteenpäin mielivaltaista vektoriavaruutta V:llä. Nimensä mukaisesti (vektorien) yhteenlasku $+$ ottaa argumentikseen kaksi vektoria ja palauttaa kolmannen vektorin. Toisin sanoen se on kuvaus $+ : V \times V \to V$. Se, miten kahden vektorin summa määritetään riippuu vektorien representaatiosta (esim. ovatko ne numerolistoja, nuolia avaruudessa tai vaikka funktioita) mutta operaatio on kaikille vektoriavaruuksille olemassa ja käyttäytyy samalla tavalla kaikille vektoriavaruuksille sillä kahdeksan sääntöä vaativat näin.

Skalaarilla kertominen tarkoittaa vektorin kertomista jollakin sen kunnan $\mathbb{F}$ ($\mathbb{R}$ tai $\mathbb{C}$) jäsenellä jonka yli vektoriavaruus on määritelty. Se ottaa siis argumentikseen luvun ja vektorin ja palauttaa toisen vektorin. Toisin sanoen se on kuvaus $\mathbb{F} \times V \to V$. Jälleen se, miten skalaarilla kertomisen tulos määritetään riippuu vektorien representaatiosta mutta operaatioiden ominaisuudet ovat kaikille avaruuksille samat.

Nyt päästään vektoriavaruuden formaaliin määritelmään. Vektoriavaruus kunnan $\mathbb{F}$ ($\mathbb{R}$ tai $\mathbb{C}$) yli on joukko V jossa on määritelty kaksi operaatiota yhteenlasku ja skalaarilla kertominen. Lisäksi jokaiselle vektorille $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c} \in V$ sekä skalaarille (luvulle) $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ pätee seuraavat kahdeksan aksioomaa:

1. Vektorien yhteenlasku on liitännäinen operaatio: $\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$

2. Vektorien yhteenlasku on vaihdannainen operaatio: $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$

3. On olemassa yhteenlaskun identiteettielementti, nk. nollavektori $\mathbf{0} \in V$, jolle pätee: $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$

4. Jokaiselle vektorille $\mathbf{a} \in V$ on olemassa yhteenlaskun käänteiselementti $-a \in V$, jolle pätee: $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$

5. Skalaarilla kertominen ja kunnan $\mathbb{F}$ sisäinen kertolasku ovat yhteensopivat: $\alpha(\beta\mathbf{a}) = (\alpha\beta)\mathbf{a}$
6. On olemassa skalaarilla kertomisen identiteettielementti, joka on sama kuin kunnan $\mathbb{F}$ kertolaskun identiteettielementti 1, jolle pätee: $1\mathbf{a} = \mathbf{a}$
7. Skalaarilla kertomiselle pätee osittelulaki vektorien yhteenlaskun suhteen: $\alpha(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \alpha\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b}$
8. Skalaarilla kertomiselle pätee osittelulaki kunnan yhteenlaskun suhteen: $(\alpha + \beta)\mathbf{a} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{a}$

Kaikki nämä ominaisuudet on helppo varmistaa itselleen ja sitä kautta myös perustella tarkastelemalla vektoreita numeroiden listoina ja nuolina, jolloin sääntöjen valinta tuntuu vähemmän mielivaltaiselta ja enemmän intuitiiviselta. On myös hyvä pitää mielessä että sääntöihin tarvitsee harvoin vedota kun tottuu vektoreiden kanssa työskentelyyn sillä vektoreiden kanssa työskentely muuttuu nopeasti yhtä helpoksi kuin tavallisten muuttujien kanssa työskentely notaation samankaltaisuuden ja objektien samanlaisten ominaisuuksien vuoksi.

5.2 Tärkeitä vektoriavaruuksien ominaisuuksia

Vektoriavaruuksilla on monia tärkeitä ominaisuuksia, jotka on hyvä tuntea. Kenties olennaisin näistä on vektoriavaruuden kanta. Kanta on se joukko vektoreita $\mathbf{a}_i \in V$, joiden avulla mikä tahansa muu avaruuden vektori voidaan ilmaista. Kaikilla vektoriavaruuksilla on kanta ja se mahdollistaa esimerkiksi vektorien tulkitsemisen numeroiden listana. Jos siis joukko $K = \{\mathbf{a}_i\} \subset V$ on kanta ja luvut $\alpha_i \in \mathbb{F}$, pätee kaikille $\mathbf{b} \in V$:

$$\mathbf{b} = \alpha_1\mathbf{a}_1 + \alpha_2\mathbf{a}_2 + \dots \tag{5.1}$$

Kannan vektorien on oltava keskenään lineaarisesti riippumattomia, mikä tarkoittaa että niitä ei voi ilmaista toistensa suhteen. Jos nimittäin jokin kannan vektoreista $\mathbf{a}$ voitaisiin ilmaista kannan muiden vektorien avulla, ei tätä tarvittaisi mielivaltaisen vektori ilmaisemiseen, sillä tällöin $\mathbf{a}$ voitaisiin aina korvata sen representaatiolla kannan suhteen jolloin $\mathbf{a}$ ei kuuluisi kantaan alun alkaenkaan. Lineaarisen riippumattomuuden ehdon voi ilmaista seuraavasti. Joukko vektoreita on lineaarisesti riippumaton jos ja vain jos niiden lineaarikombinaatio ei ole koskaan nollavektori:

$$\alpha_1\mathbf{a}_1 + \alpha_2\mathbf{a}_2 + \dots \neq \mathbf{0}, \qquad \alpha_i \neq 0 \tag{5.2}$$

Vektoriavaruuden ulottuvuus liittyy hyvin läheisesti kantaan. Se on nimittäin kannan K mahtavuus (kardinaliteetti) eli kantavektoreiden lukumäärä. Esimerkiksi kaksiulotteisella vektoriavaruudella on kaksi kantavektoria, kolmiulotteisella kolme ja N-ulotteisella N. Vektoriavaruuden V ulottuvuutta merkitään $\dim V$.

Vektoriavaruuden sisällä on myös monia vektoriavaruuksia. Jos esimerkiksi valitaan alkuperäisen avaruuden V kannasta K jokin alijoukko J, pystytään tällä uudella kannalla ilmaisemaan vain osa V:n vektoreista, jolloin tämä vektoriavaruus W on V:n aliavaruus.

5.3 Lisää rakennetta: Sisätulot

Vektorit kuvaavat usein jotakin fysikaalista, jolloin niiden mittaaminen ja keskinäisen etäisyyden tai kulman määrittäminen on usein tavoiteltavaa. Tämän tekemiseksi on määriteltävä, mitä tarkoittaa vektorin pituus tai etäisyys kahden vektorin välillä. Näiden määritelmät riippuvat hyvin paljon vektoreiden sovelluskohteista eikä niitä aina tarvita, jolloin niitä ei ole suoraan sisällytetty vektoriavaruuksien määritelmään. Fysiikassa vektorin pituuden halutaan tyypillisesti vastaavan jonkin fysikaalisen objektin pituutta, jonkin vektorisuureen suuruutta (esim. nopeusvektorin pituus on kappaleen vauhti), jonkin tapahtuman todennäköisyyttä (kvanttimekaniikassa tilavektorin pituus on verrannollinen tilan todennäköisyyteen) tai funktion itseisarvoa.

Tähän mennessä määritellyssä vektoriavaruudessa ei ole mitään keinoa vertailla vektoreita keskenään tai määrittää niiden pituuksia. Tätä varten on siis lisättävä uusi operaatio, joka mahdollistaa vektorien vertailun ja mittaamisen. Tavallisissa euklidisissa vektoriavaruuksissa tämä operaatio on nk. pistetulo, joka palauttaa positiivisen luvun kun kahden vektorin kulma on alle 90 astetta, nollan kun se on tismalleen 90 astetta ja negatiivisen luvun muulloin. Tämän vuoksi sen avulla voidaan mitata vektorien välisiä kulmia. Sisätulo on konseptina tavallisen pistetulon yleistys mielivaltaiselle vektoriavaruudelle, joka antaa erilaisesta nimestään huolimatta samanlaista rakennetta avaruudelle kuin pistetulo antaa euklidisille avaruuksille.

Formaalisti sisätulo on kuvaus, joka yhdistää kaksi vektoriavaruuden alkiota johonkin avaruuden määrittelemän kunnan elementtiin. Sisätulo P määritellään vektoriavaruudelle kuvauksena $P : V \times V \to \mathbb{F}$. Se siis ottaa argumentikseen kaksi vektoria ja palauttaa vektorikentän määrittävän kunnan elementin (reaali- tai kompleksiluvun). Kahden vektorin sisätuloa voidaan merkitä useilla eri tavoilla: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$, $\langle \mathbf{a} \mid \mathbf{b} \rangle$ ja $(\mathbf{a} \mid \mathbf{b})$. Toistaiseksi käytämme merkinnöistä toista $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$. Sisätulolle pätee seuraavat vaatimukset:

1. Symmetrinen kompleksikonjugaation suhteen: $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle^*$
2. Lineaarisuus toisen argumentin suhteen: $\langle \mathbf{c}, \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = \alpha\langle \mathbf{c}, \mathbf{a} \rangle + \beta\langle \mathbf{c}, \mathbf{b} \rangle$
3. Puhtaasti positiivinen: $\mathbf{a} \neq \mathbf{0} \implies \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle > 0$

Näistä vaatimuksista seuraa seuraavanlaisia ominaisuuksia sisätulolle:

1. Sisätulo nollavektorin kanssa on nolla: $\langle \mathbf{a}, \mathbf{0} \rangle = \langle \mathbf{0}, \mathbf{a} = 0$
2. Sisätulo itsensä kanssa on reaalinen ja epänegatiivinen: $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle \geq 0 \ \wedge \ \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle \in \mathbb{R}$
3. Antilineaarisuus ensimmäisen argumentin suhteen (seuraa kompleksikonjugaatiosymmetriasta): $\langle \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = \alpha^*\langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle + \beta^*\langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle$

Se, että sisätulo on lineaarinen toisen argumentin suhteen ja antilineaarinen ensimmäisen suhteen varmistaa että sisätulolle toivotut ominaisuudet toteutuvat kompleksivektoriavaruuksissakin. Tätä yhdistelmää lineaarisuudesta ja antilineaarisuudesta kutsutaan sesquilineaarisuudeksi. Kun vektoriavaruus on määritelty reaalilukujen yli, on sisätulo symmetrinen ja lineaarinen kunkin argumentin suhteen ja täten suora yleistys pistetulosta. Kun vektoriavaruuteen lisätään sisätulo, kutsutaan syntynyttä avaruutta sisätuloavaruudeksi.

Sisätulon avulla määritellään uusia hyödyllisiä käsitteitä, kuten ortogonaalisuus ja ortogonaalinen komplementti. Kaksi vektoria $\mathbf{a}$ ja $\mathbf{b}$ ovat keskenään kohtisuorassa $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$, eli ortogonaalisia, mikäli $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 0$. Ortogonaalisuuden avulla voidaan määritellä nk. ortogonaalinen komplementti. Vektoriavaruuden V aliavaruuden C ortogonaalinen komplementti $C^\perp$ on joukko niitä vektoreita, jotka ovat ortogonaalisia kaikkien C:n vektorien kanssa, eli:

$$C^\perp = \{\mathbf{a} \in V \mid \forall \mathbf{b} \in C : \langle a, b \rangle = 0\} \tag{5.3}$$

5.4 Lisää rakennetta: Normi

Sisätulon lisääminen vektoriavaruuteen teki siitä sisätuloavaruuden. Tämä mahdollistaa vektorien vertailun keskenään. Sisätulon avulla on myös mahdollista määritellä miten vektorin pituus tai sitä vastaava abstraktimpi käsite lasketaan. Sisätulo indusoi siis avaruudelle nk. normin, joka tekee avaruudesta automaattisesti normitetun vektoriavaruuden. Sisätulon indusoima normi määritellään seuraavasti (Huom! Normi voidaan määritellä lukuisilla muillakin tavoilla mutta useimmiten se tehdään sisätulon suhteen.):

$$||\mathbf{a}|| = \sqrt{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle} \tag{5.4}$$

Koska vektorin sisätulo tisensä kanssa on aina positiinen, on myös normi positiivinen luku. Normi vastaa fysikaalisesti vektorin pituutta tai suureen voimakkuutta. Sillä on lukuisia ominaisuuksia:

1. Absoluuttinen homogeenisyys: $||\alpha\mathbf{a}|| = |\alpha|\,||\mathbf{a}||$
2. Kolmioepäyhtälö: $||\mathbf{a}+\mathbf{b}|| \leq ||\mathbf{a}|| + ||\mathbf{b}||$
3. Cauchyn–Schwarzin epäyhtälö: $|\langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle| \leq ||\mathbf{a}||\,||\mathbf{b}||$
4. Suunnikassääntö: $\|\mathbf{a}+\mathbf{b}\|^2 + \|\mathbf{a}-\mathbf{b}\|^2 = 2\|\mathbf{a}\|^2 + 2\|\mathbf{b}\|^2$
5. Polarisaatioidentiteetti: $\|\mathbf{a}+\mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle$

Polarisaatioidentiteetin avulla kahden vektorin sisätulo voidaan saada ulos normista. Sisätulon imaginääriosa saadaan sisätulon $\langle\mathbf{a}, i\mathbf{b}\rangle$ reaaliosasta. Muita normin ja sisätulon yhdistäviä tuloksia ovat:

1. Pythagoraan lause: $\mathbf{a}\perp\mathbf{b} \iff \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{a}+\mathbf{b}\|^2$
2. Pythagoraan lauseen induktio, Parsevalin identiteetti: $\forall i \neq j \leq N : \mathbf{a}_i \perp \mathbf{a}_j \iff \sum_{i=1}^N \|\mathbf{a}_i\|^2 = \left\|\sum_{i=1}^N \mathbf{a}_i\right\|^2$

5.5 Lisää rakennetta: Metriikka

Siinä missä sisätulo indsusoi vektoriavaruudelle normin, normi indusoi vektoriavaruudelle nk. metriikan tai etäisyysfunktion. Se määrittelee määrittelee kahden vektorin välisen etäisyyden yksikäsitteisesti. Vastaavasti kuin vektoriavaruuksille, liittyy metriikkan määritelmään muutamia vaatimuksia, jotka ovat intuitiivisia kun oletetaan etäisyyden käyttäytyvän samalla tavalla kuin etäisyydetä käyttäytyvät todellisessa maailmassa mutta jotka ovat jälleen sääntöjä vain koska sellaisten sääntöjen luomista konstruktioista on ollut hyödyllistä puhua.

Formaalisti metrinen avaruus on joukko M, jolle on määritelty metriikka $d : M \times M \to \mathbb{R}$. Metriikka kuvaa siis joukon M elementtejä reaaliluvuiksi ja tämä luku vastaa näiden objektien välistä "etäisyyttä". Olkoot $a, b, c \in M$. Ollakseen metriikka, tulee d:lle päteä seuraavat neljä aksioomaa:

1. Pisteen etäisyys itsestään on nolla: $d(a,a) = 0$
2. Kahden erillisen pisteen etäisyys on aina positiivinen: $a \neq b \implies d(a,b) > 0$
3. Etäisyys on symmetrinen. a:n etäisyys b:stä on sama kuin b:n etäisyys a:sta: $d(a,b) = d(b,a)$
4. Etäisyys toteuttaa kolmioepäyhtälön: $d(a,c) \leq d(a,b) + d(b,c)$

Viimeinen vaatimus saattaa tuntua hatusta vedetyltä, mutta kolmioepäyhtälö on hyvin luonnollinen vaatimus etäisyydelle ei pelkästään sen takia että fysikaalinen etäisyys noudattaa aina kolmioepäyhtälöä vaan myös sen takia, että abstraktisti käy järkeen että mikäli a, b ja c ovat keskenään erillisiä pisteitä, on matkustaminen suoraan a:sta c:hen aina helpompaa tai yhtä helppoa kuin matkustaminen a:sta ensin b:hen ja sitten vasta c:hen.

Kuten havaitaan, metriikan määritelmä ei kerro mikä metriikka vektoriavaruudelle tulisi antaa. Se vain kertoo mitkä asiat tulee toteutua, jotta jokin funktio olisi metriikka. Klassisia esimerkkejä metriikoista ovat mm. kahden reaaliluvun etäisyys $d(a,b) = |a-b|$, kahden kaksiulotteisen pisteen etäisyys: $d(P,Q) = \sqrt{(P_x - Q_x)^2 + (P_y - Q_y)^2}$ ja kahden kaksiulotteisen pisteen taksinkuljettajan etäisyys $d(P,Q) = |P_x - Q_x| + |P_y - Q_y|$. Vektoriavaruuksien tapauksessa metriikan indusoi avaruuteen normi, jolloin on osoitettava, että normilla on metriikkaan vaadittavat ominaisuudet. Tarkastellaan normia metriikkana:

1. Pisteen etäisyys itsestään on nolla, eli nollavektorin normi on nolla: $\|\mathbf{a}-\mathbf{a}\| = \|\mathbf{0}\| = 0$
2. Kahden erillisen vektorin etäisyys on aina positiivinen: $\mathbf{a} \neq \mathbf{b} \implies \|\mathbf{a}-\mathbf{b}\| > 0$

3. Etäisyys on symmetrinen: $\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| = \|\mathbf{b} - \mathbf{a}\|$
4. Etäisyys toteuttaa kolmioepäyhtälön: $\|\mathbf{a} - \mathbf{c}\| \leq \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| + \|\mathbf{b} - \mathbf{c}\|$

Kaikki ominaisuudet on helppo osoittaa todeksi, jolloin normi indusoi kuin indusoikin avaruudelle metriikan

5.6 Lisää rakennetta: Topologia

On vielä yksi asia, jota vektoriavaruudessamme ei voi tehdä. Emme voi käsitellä vektorien sarjoja, eli äärettömiä summia sillä ei ole varmuutta siitä, onko ääretön summa vektoriavaruuden alkio. Esimerkiksi mikäli vektoriavaruutemme olisi polynomit lukuvälillä $[0, 1]$, voitaisiin niiden äärettömällä sarjalla (Taylorin sarja) approksimoida mitä tahansa jaktuvaa funktiota, eli myös funktioita, jotka eivät ole polynomeja (eksponenttifunktio, logaritmifunktio, trigonometriset funktiot). Nämä funktiot eivät ole vektoriavaruutemme alkioita, jolloin polynomien sarja ei ole suljettu vektoriavaruuden sisään. Vastaavasti kaikkien lukuvälillä $[0, 1]$ määriteltyjen jatkuvien funktioiden vektoriavaruus olisi suljettu sarjojen suhteen. Vektoriavaruutta, joka on suljettu sarjojen suhteen eli jolle kaikki sarjat suppenevat uudeksi vektoriavaruuden alkioksi, kutsutaan täydelliseksi vektoriavaruudeksi. Vektoriavaruus on täydellinen, mikäli kaikki nk. Cauchyn lukujonot suppenevat. Jotta suppenevuutta voidaan tarkastella tulee määritellä käsite vektoreiden läheisyydestä, jota kutsutaan tässä tapauksessa vektoriavaruuden topologiaksi. Tämän topologian indusoi aiemmin normin avulla määrittelemämme metriikka, jolloin voimme sanoa että vektoreiden $\mathbf{a}_n$ jono suppenee $\mathbf{a}$:han jos ja vain jos:

$$\lim_{n\to\infty} ||\mathbf{a}_n - \mathbf{a}|| = 0 \tag{5.5}$$

Kun vektoriavaruudelle annetaan topologia, johtaa se äärellisulotteisten vektoriavaruuksien tapauksessa ekvivalenttiin suppenemiseen. Jos ulottuvuuksia on ääretön määrä, on suppeneminen perustavanlaatuisesti erilaista erilaisille topologioille. Tästä seuraa että topologian lisääminen tuottaa erilaisia avaruuksia joihin voisimme edetä. Kun valitaan sisätulo määrittämään avaruudelle normin kautta topologia saadaan nk. Hilbertin avaruus johon törmätään kvanttimekaniikassa. Jos puolestaan suoraan määritellään avaruudelle normi, joka määrittelee topologian, saadaan nk. Banachin avaruus. Se, mikä erottaa Hilbertin avaruudet muista Banachin avaruuksista on juurikin avaruuden suhde sisätuloon. Siinä missä millä tahansa normitetulla vektoriavaruudella (Banach) on nk. L-semi-sisätulo (semi-sisätulo Lumerin mukaan) eli sisätulo jonka ei tarvitse olla puhtaasti positiivinen ($\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle > 0$) vaan se on puhtaasti epänegatiivinen ($\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle \geq 0$), on Hilbertin avaruuksilla nimenomaan sisätulo, joka on puhtaasti positiivinen.

5.7 Lisää rakennetta: Separoituvuus

Aiemmin pääsimme Hilbertin avaruuden formaaliin määritelmään vaatimalla, että vektoriavaruutemme on täydellinen sisätulon indusoiman metriikan suhteen. Fysiikassa kuitenkin lisätään usein vielä yksi vaatimus Hilbertin avaruudelle: separoituvuus. Avaruus on separoituva, jos siihen sisältyy numeroituva ja tiheä alijoukko. Toisin sanoen on oltava jokin jono $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ joka kuuluu avaruuteen siten että jokainen avaruuden alkio on joko a_n tai mielivaltaisen lähellä jokaista a_n:nää. Tiheys on helpointa ymmärtää rationaalilukujen ja reaalilukjen kontekstissa. Rationaaliluvut ovat numeroituva joukko (eli niiden kardinaliteetti on sama kuin luonnollisten lukujen $\aleph_0$) ja ne ovat tiheitä reaaliluvuissa, sillä rationaaliluvuilla voidaan päästä mielivaltaisen lähelle mitä tahansa rationaalilukua.

Separoituvuudesta (yhdistettynä Zornin lemmaan) seuraa erittäin tärkeä tulos: Separoituva Hilbertin avaruus $\iff$ Hilbertin avaruus, jonka kanta on numeroituva.

5.8 Funktioavaruudet

Nimensä mukaisesti funktioavaruudet ovat funktioiden muodostamia vektoriavaruuksia. Niitä esiintyy runsaasti fysiikassa. N:nen kertaluvun differentiaaliyhtälön ratkaisut muodostavat N-ulotteisen funktioavaruuden, sillä yhtälöllä on N lineaarisesti riippumatonta ratkaisua. Toisen asteen polynomit muodostavat kolmiulotteisen vektoriavaruuden, jossa kantavektorit ova x^0, x^1 ja x^2. Neliöintegroitavat funktiot muodostavat funktioavaruuden. Distribuutiot muodostavat funktioavaruuden. Lista jatkuu.

Myöa funktioavaruuksille on hyödyllistä määritellä aiemmin mainittuja lisärakenteita, kuten sisätulon käsite ja normi. Näiden rakenteiden avulla myös funktiot voivat esimerkiksi olla Hilbertin avaruuksien alkioita. Määritelmiä tehdessä törmätään kuitenkin ongelmaan: siinä missä tavallisille vektoreille sisätulo on vain summa (tai sarja ääretönulotteisen avaruuden tapauksessa), ei jatkuvaa funktiota voi summata kaikkien argumenttiensa yli niiden epänumeroituvuuden vuoksi. Tämän vuoksi funktioiden sisätulon on oltava jollakin tavalla jatkuva analogia tavallisten vektoreiden välisestä sisätulosta. Mikä sitten on summan jatkuva analogia? No integraali! Funktioiden välinen sisätulo määritelläänkin usein integraalin avulla. Oletetaan, että funktiot f ja g ovat (kompleksi)funktioita ja että ne ovat neliöintegroituvia välillä $[0,1]$ ja ovat täten funktioavaruuden $L^2([0,1])$ (Neliöintegroituvat funktiot välillä $[0,1]$) alkioita. Tällöin niiden välille voidaan määrittää sisätulo seuraavanlaisena integraalina:

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f^*(x)g(x)\,\mathrm{d}x \tag{5.6}$$

Osoittautuu, että L^p-avaruuksista ainoastaan L^2-avaruudet ovat yhteensopivia sisätulon kanssa, eli vaikka kaikki L^p-avaruudet ovat normitettuja ja täydellisiä (eli ovat Banachin avaruuksia). Vain L^2-avaruudet ovat normitettuja, täydellisiä sisätuloavaruuksia eli Hilbertin avaruuksia. Tarkastellaan nyt tarkemmin L^p avaruuksia.

L^p-avaruudet ovat siis normitettuja funktioavaruuksia, jossa p kertoo, mikä normi funktioavaruudelle on annettu. Nk. p-normit määritellään diskreetissä tapauksessa summana:

$$\|\mathbf{a}\|_p = \left(\sum_i |a_i|^p\right)^{1/p} \tag{5.7}$$

Kun $p = 1$, saadaan taksinkuljettajan etäisyys ja kun $p = 2$ saadaan tavallinen euklidinen normi. 2-normille ominaista on se, että se indusoituu kanonisesta sisätilosta, eli $\|\mathbf{a}\|_2 = \sqrt{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a}\rangle}$. Kun $p = \infty$, on kyseessä nk. supremum normi, joka on määritelty seuraavasti:

$$\|\mathbf{a}\|_\infty = \sup\{|a_1|, |a_2|, \dots |a_i|, \dots\} \tag{5.8}$$

Määritelmä on luonteva kun miettii miten p-normi käyttäytyy kun p kasvaa. Kaikki 2-normin 1 omaavat vektorit ($\|\mathbf{a}\|_2 = 1$) muodostavat yksikköympyrän tai sen korkeampiulotteisen vastineen origon ympärille. Kun p-kasvaa muuttuu tämä alue yhä neliömäisemmäksi, kunnes rajankäynnillä äärettömyydessä on luontevaa määritellä että kaikki ∞-normin 1 omaavat vektorit ($\|\mathbf{a}\|_\infty = 1$) muodostavat neliön tai sen korkeampiulotteisen vastineen, jonka sivun pituus on kaksi, origon ympärille.

On huomattavaa, että arvoille $0 < p < 1$ p-normi ei toteuta enää kolmioepäyhtälöä, jolloin se ei ole perinteisessä mielessä normi. Tästä huolimatta näissäkin tilanteissa on mahdollista määrittää avaruudelle metriikka, jolloin kaikki L^p-avaruudet ovat täydellisiä metrisiä vektoriavaruuksia. Jotta kuitenkin voitaisiin käsitellä funktioiden normeja tarvitaan jatkuva analogia p-normille. Olkoon $f \in L^p(S)$. Tällöin p-normi on integraali:

$$\|f\|_p = \left(\int_S |f|^p\,\mathrm{d}\mu\right)^{1/p} < \infty \tag{5.9}$$

Ollakseen $L^p(S)$-avaruuden jäsen, tulee funktion olla p-integroituva, eli toteuttaa ehto:

$$\int_S |f|^p\,\mathrm{d}x < \infty \tag{5.10}$$

Kun $p = 2$ tätä kutsutaan neliöintegroituvuudeksi ja kuten aiemmin todettiin vain L^2-avaruudet ovat Hilbertin avaruuksia

5.9 Jonoavaruudet

Nimensä mukaisesti ovat äärettömien jonojen vektoriavaruuksia. Vastaavasti kuin L^p-avaruudet, merkitään tietyntyyppisiä jonoavaruuksia ℓ^p, jossa p kertoo jälleen ehdon jonon suppenemiselle sekä normin, joka jonolle on määritelty. Ollakseen ℓ^p-avaruuden jäsen, on jonon toteutettava ehto:

$$\sum_n |x_n|^p \leq \infty \tag{5.11}$$

Kun $p = 2$ tätä kutsutaan neliösummautuvuudeksi ja jälleen vain ℓ^2 on Hilbertin avaruus, sillä 2-normin on p-normeista ainoa, joka indusoituu kanonisesta sisätulosta.

5.10 Lineaariset operaattorit

Kuvaukset vektoriavaruudesta toiseen tai avaruuteen itseensä

5.11 Duaaliavaruudet

Jokaisella vektoriavaruudella on nk. duaaliavaruus, joka on nimensä mukaisesti jollakin tavalla alkuperäisen avaruuden ”kaksoisolento” tai ”peilikuva”. Syy tälle nimelle ei ole itsestäänselvä pelkästään duaaliavaruuden määritelmän kuullessa, vaan vaatii hieman enemmän konstekstia. Nimestä voi kuitenkin päätellä, että kyseessä on hyvin tärkeä käsite, sillä matematiikassa kahden eri asian välinen duaalisuus on hyvin syvä yhteys ja mahdollistaa usein jonkin asian ymmärtämisen kahdesta erilaisesta perspektiivistä. Näin on myös duaaliavaruuksien tapauksessa.

Formaalisti vektoriavaruden V duaaliavaruus V^* (myös V') on joukko lineaarisia funktionaaleja f V:stä siihen kuntaan $\mathbb{F}$, jonka yli V on määritelty. Toisin sanoen f on kuvaus $f : V \to \mathbb{F}$. Funktionaaleista puhutaan myöhemmin tarkemmin, mutta tässä vaiheessa on olennaista että lineaarinen funktionaali kuvaa vektoreita joko reaali- tai kompleksiluvuiksi.

Kun f:lle määritellään säännöt yhteenlaskun ja skalaarilla kertomisen suhteen, tulee myös V^*:sta vektoriavaruus, jossa vektorit ovat edellä mainittuja lineaarisia funktionaaleja ja skalaarit kunnan $\mathbb{F}$ alkioita. Lineaarisille funktionaaleille pätee siis:

1. Additiivisuus: $(f + g)[\mathbf{a}] = f[\mathbf{a}] + g[\mathbf{a}]$
2. Skalaarilla kertominen $(\alpha f)[\mathbf{a}] = \alpha(f[\mathbf{a}])$

On huomattavaa, että funktionaalien argumentit merkitään usein hakasulkeisiin kaarisulkeiden sijaan. Tällä halutaan korostaa, että ne voivat ottaa argumenteikseen muutakin kuin pelkkiä muuttujia (esim. kokonaisia funktioita ja niiden derivaattoja).

Nyt muodostuneen vektoriavaruuden V^* alkoita kutsutaan usein kovektoreiksi (liittyy läheisesti kontravarianssin ja kovarianssin käsitteisiin) tai lineaarisiksi funktionaaleiksi. Miksi sitten duaaliavaruuksia kutsutaan juuri duaaliavaruuksiksi? Ensimmäinen hyvä syy tähän on, että duaaliavaruuden dimensio on sama kuin alkuperäisen avaruuden ja että ainakin äärellisulotteisessa tapauksessa alkuperäisen avaruuden kannasta $\{\mathbf{a}_i\}$ voidaan muodostaa duaaliavaruuden kanta $\{\mathbf{a}^i\}$ nimeltään duaalikanta seuraavan relaation avulla:

$$\mathbf{a}^i(c^1\mathbf{a}_1 + \cdots + c^n\mathbf{e}_n) = c^i, \quad i = 1, \ldots, n, \quad c^i \in \mathbb{F} \tag{5.12}$$

Kun kukin c^i asetetaan vuorollaan ykköseksi ja muut nollaksi saadaan yhtälöryhmä:

$$\mathbf{a}^i\mathbf{a}_j = \delta^i_j \tag{5.13}$$

Ylläolevassa yhtälössä oikea puoli on yksi vain, jos $i = j$ ja muutoin se on nolla. Mikäli V:n vektorit ovat tavallisia pystyvektoreita (sarakevektoreita), voidaan V^*:n vektorit tulkita vaakavektoreiksi (rivivektoreiksi), sillä vaakavektorin ja pystyvektorin tulo on skalaari, jolloin V^*:n elementillä V:n elementtiin operoiminen tuottaa kuin tuottaakin kunnan $\mathbb{F}$ jäsenen. Olkoon $\mathbf{a} \in V$ ja $\mathbf{b} \in V^*$. Tällöin pätee:

$$\mathbf{ba} = \begin{bmatrix} b^1 & b^2 & \dots & b^N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix} = b^1 a_1 + b^2 a_2 + \cdots + b^N a_N = c \in \mathbb{F} \tag{5.14}$$

Tässä kohtaa voidaan tehdä tärkeä havainto: Laskutoimitus **ba** näyttää hyvin samanlaiselta tavallisen sisätulon laskutoimituksen kanssa. Tälle on hyvä syy. On nimittäin olemassa nk. luonnollinen paritus, joka yhdistää duaaliavaruuden alkioita ja alkuperäisen avaruuden alkioita erään bilineaarisen kuvauksen kautta ja jota merkitään $\langle f, \mathbf{a} \rangle$. Notaation samanlaisuus sisätulon kanssa ei ole sattumaa, sillä osoittautuu että jokainen sisätulo kahden vektorin välillä voidaan myös tulkita duaaliavaruuden elementin ja vektorin väliseksi tuloksi, jolloin duaaliavaruuksilla on syvä yhteys sisätuloihin. Aiemmin näimme esimerkin tavallisten koordinaattivektorien tapauksessa, jossa pistetulo voitiin tulkita vaaka- ja pystyvektorien väliseksi matriisituloksi. Toinen luonnollinen paritus on funktioavaruuksissa määrättyjen integraalien ja funktioiden välillä. Jos $f(x) \in C([a,b])$ (jatkuvat funktiot välillä $[a,b]$) ja $I[f] = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ on lineaarinen funktionaali $C[a,b]$:stä reaalilukuihin, on näiden välillä luonnollinen paritus $\langle I[f], f(x) \rangle$, joka tuottaa $f(x)$:n neliön määrätyn integraalin, eli $f(x)$:n sisätulon itsensä kanssa! Kyseessä on siis dualismi sisätulon $\langle f, f \rangle$ ja lineaarisen funktionaalin $I[f]$ välillä!

$$\langle I[f], f \rangle = (I[f])[f] = \int_a^b [f(x)]^2 \,\mathrm{d}x = \langle f, f \rangle \tag{5.15}$$

6 Funktionaaleista, distribuutioista ja funktionaalianalyysistä

Monet tämän osion aiheet ovat seurausta siitä, matemaatikot ovat halunneet formalisoida joitakin fyysikoiden käyttämiä menetelmiä differentiaaliyhtälöiden ratkaisemisessa sekä kvanttimekaniikassa. Kirjoitan näistä, koska aihe kiinnostaa ja haluan ymmärtää konsepteja kuten Diracin deltafunktio, Hilbertin avaruus, Lineaarinen funktionaali, operaattoriteoria, spektraaliteoria ja monet muut paremmin.

6.1 Funktionaalit

Funktionaaleille on monta määritelmää, joista klassisisin on jotakuinkin: Funktionaali on funktion yleistys, joka ottaa muuttujien sijasta funktioita argumentikseen. Toisin sanoen siinä missä funktiot ottavat jonkin arvon $x = x_0$ ja muuntavat sen arvoksi $f(x_0)$:

$$x_0 \mapsto f(x_0)$$

Funktionaalit ottavat jonkin funktion f ja muuntavat sen arvoksi $f(x_0)$ (HUOM! Nyt x_0 ei ole argumentti, vaan parametri eli tässä ei syötetä arvoa x_0 funktioon f vaan x_0 on sisäänrakenttettu funktioon f):

$$f \mapsto f(x_0)$$

Usein tarkastellaan lineaarisia funktionaaleja (eli niille pätee lineaarisuuden ehdot), jolloin itseasiassa funktiot ja funktionaalit ovat toistensa dualismeja ja molempia kutsutaan termillä *lineaarinen funktionaali*. Tähän törmättiin kun huomattiin, että funktioavaruuksissa esimerkiksi määrätty integrointi on duaaliavaruudessa elävä funktionaali.

Koska funktionaalit kuvaavat funktioita yksittäisiksi (kompleksi)luvuiksi, on funktionaalien määrittelyjoukkona jokin avaruus S, joka sisältää tietyntyyyppisiä funktioita (vektoreita) ja arvojoukkona reaali- tai kompleksilukujen joukko. Toisin sanoen funktionaali J on kuvaus:

$$J : S \to \mathbb{R} \quad \vee \quad J : S \to \mathbb{C}$$

Funktionaaleja merkitään usein laittamalla funktio, jota funktionaali operoi hakasulkeisiin, esimerkiksi $J[f]$ tai $\mathcal{L}[g]$. Fysiikassa funktionaalit ovat tyypillisesti lineaarisia, sillä fysiikassa esiintyvät funktionaalit ovat pitkälti jonkinlaisia määrättyjä integraaleja tai vaihtoehtoisesti jonkinlaisia sisätuloja. Taulukkoon 5.1 on koottu muutamia esimerkkejä funktionaaleista, joita esiintyy fysiikassa. Funktionaalien syvällisempi tarkastelu jää myöhemmälle.

Rajoitutaan nyt tarkastelemaan seuraavaa muotoa olevia funtkionaaleja:

$$J[y] = \int_a^b f(y, y', x)\,\mathrm{d}x \tag{6.1}$$

Nyt f:n on oltava derivoituva vähintään kerran kunkin argumentin suhteen ja y:n on kuuluttava välillä $[a, b]$ kahdesti derivoituviin funktioihin C^2. Tällaisia funktionaaleja esiintyy nk. variaatiolaskennassa.

Siinä missä tavalliset funktiot ovat stationäärisiä jonkin yksittäisen pisteen suhteen derivaatan nollakohdissa, ovat variaatiolaskennan funktionaalit stationäärisiä kokonaisten käyrien suhteen kun nk. funktionaaliderivaatta menee nollaan. Tästä funktionaaliderivaatan nollaan menemisestä seuraa nk. Eulerin–Lagrangen yhtälönä tunnettu differentiaaliyhtälö, joka määrittää stationäärisen käyrän muodon.

Johdetaan EL-yhtälö käyttäen kahta menetelmää. Menetelmä 1 perustuu nk. ensimmäiseen variaatioon ja toinen edellämainittuun funktionaaliderivaattaan.

Nimi	Määritelmä	Funktioavaruus/Lähtöjoukko	Maalijoukk
Määrätty integraali	$I[f] : f \mapsto \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$	Riemann-integ. funktiot	$\mathbb{R}$
Käyrän alla oleva pinta-ala	$A[f] : f \mapsto \int_a^b \lvert f(x)\rvert\,\mathrm{d}x$	Riemann-integ. funktiot	$\mathbb{R}$
Käyrän pituus	$L[f] : f \mapsto \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x$	Rectifiable curves	$\mathbb{R}$
Pyör.kappaleen vaipan pinta-ala	$A[f] : f \mapsto \int_a^b 2\pi f\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x$	Rectifiable curves	$\mathbb{R}$
Pyörähdyskappaleen tilavuus	$V[f] : f \mapsto \int_a^b \pi[f(x)]^2\,\mathrm{d}x$	Riemann-integ. funktiot	$\mathbb{R}$
Aktio	$S[f] : f \mapsto \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(\dot{f}, f, t)\,\mathrm{d}t$	Riemann-integ. funktio	$\mathbb{R}$
$L^2([a,b])$-avaruuden normi	$N[f] : f \mapsto \sqrt{\int_a^b f^*(x)f(x)\,\mathrm{d}x}$	Neliöintegroituvat funktiot	$\mathbb{C}$
$L^p([a,b])$-avaruuden "normi"	$N[f] : f \mapsto \left(\int_a^b \lvert f(x)\rvert^p\,\mathrm{d}x\right)^{1/p}$	p-integroituvat funktiot	$\mathbb{C}$
3D-Euklidisen avaruuden sisätulo	$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$	Euklidiset vektorit	$\mathbb{R}$
Kompleksivektoriavaruuden sisätulo	$\langle u\vert v\rangle : \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}$	N-ulotteiset kompleksivektorit	$\mathbb{C}$
Kompleksifunktioiden sisätulo	$\langle f,g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x)g(x)\,\mathrm{d}x$	Kompleksifunktiot	$\mathbb{C}$
Diracin deltafunktio	$\delta[f] : f \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)f(x)\,\mathrm{d}x = f(0)$	Testifunktiot	$\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$
Distribuutiot	$F[f] : f \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} F(\mathbf{x})f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}^n x$	Testifunktiot	$\mathbb{R}$

Taulukko 6.1: Muutamia esimerkkejä fysiikassa esiintyvistä integraaleista funktionaaleiksi tulkittuna.

6.1.1 Ensimmäinen variaatio ja EL-yhtälö

Yhtälön (6.1) fuktionaalia voidaan varioida lisäämällä käyrään y pieni perturbaatio η, joka muuttaa y:n muotoa hieman. Varmistetaan kuitenkin, että y:n arvot välin reunoilla $y(a)$ ja $y(b)$ pysyvät vakioina, eli vaaditaan, että perturbaatio menee reunoilla nollaan: $\eta(a) = \eta(b) = 0$. Merkitään varioidun funktionaalin ja alkuperäisen funktionaalin erotusta δJ, jolloin saadaan:

$$\begin{aligned}
\delta J &= J[y+\eta] - J[y] \\
\delta J &= \int_a^b f(y'+\eta', y+\eta, x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(y', y, x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Kehitetään ensimmäisen termin f Taylorin sarjaksi pisteen y', y, x ympäristössä muuttujien $y'+\eta'$ ja $y+\eta$ suhteen. Kahden muuttujan Taylorin sarja ensimmäiseen asteeseen asti kirjoitettuna pisteen (x_0, y_0) ympäristössä on muotoa:

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(x,y)=(x_0,y_0)}(x-x_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(x,y)=(x_0,y_0)}(y-y_0) + O(x^2,y^2) \tag{6.2}$$

Saadaan:

$$\begin{aligned}
\delta J = &\int_a^b \left[f(y',y,x) + \left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)_{(y',y,x)=(y',y,x)}(\cancel{y'}+\eta'-\cancel{y'}) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(y',y,x)=(y',y,x)}(\cancel{y}+\eta-\cancel{y}) + O\left([y'+\eta']^2, [y+\eta]^2\right)\right]\mathrm{d}x \\
&- \int_a^b f(y',y,x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Havaitaan, että muuttujiksi jää jäljelle vain η' ja η. Lisäksi jätetään kompaktiuden vuoksi merkitsemättä piste, jossa derivaatat määritetään. Saadaan:

$$\delta J = \int_a^b \left[f(y', y, x) + \left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\eta' + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\eta + O\left(\eta'^2, \eta^2\right)\right] \mathrm{d}x - \int_a^b f(y', y, x)\,\mathrm{d}x$$

Integroinnin lineaarisuuden nojalla integraali voidaan erotellaan useksi integraaliksi:

$$\delta J = \cancel{\int_a^b f(y', y, x)\,\mathrm{d}x} + \int_a^b \left[\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\eta' + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\eta\right] \mathrm{d}x + \int_a^b O\left(\eta'^2, \eta^2\right) \mathrm{d}x - \cancel{\int_a^b f(y', y, x)\,\mathrm{d}x}$$

J on sationäärinen, mikäli sen variaatio δJ katoaa ensimmäiseen asteeseen, eli mikäli $\delta J = 0 + O\left(\eta'^2, \eta^2\right)$ Saadaan siis vaatimus:

$$\int_a^b \left[\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\eta' + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\eta\right] \mathrm{d}x = 0$$

Erotellaan integraali kahdeksi:

$$\int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\eta'\,\mathrm{d}x + \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\eta\,\mathrm{d}x = 0$$

Oaittaisintegroidaan ensimmäistä integraalia. Valitaan $u = \frac{\partial f}{\partial y'} \iff \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)$ ja $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \eta' \iff v = \eta$. Saadaan:

$$[uv]_a^b - \int_a^b v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\eta\,\mathrm{d}x = 0$$
$$\left[\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\eta\right]_a^b - \int_a^b \eta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\mathrm{d}x + \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\eta\,\mathrm{d}x = 0$$

Perturbaatio η valittiin siten, että $\eta(a) = \eta(b) = 0$, jolloin sijoitustermi katoaa. Yhdistetään jäljellä olevat integraalit, jolloin saadaan:

$$\int_a^b \left[\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\eta - \eta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right] \mathrm{d}x = 0$$

Otetaan η yhteiseksi tekijäksi:

$$\int_a^b \eta\left[\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right] \mathrm{d}x = 0$$

Jotta integraali menisi nollaan, tulee toisen tulontekijöistä mennä nollaan. Koska η:n on tarkoitus olla perturbaatio y:hyn, ei se ole nolla, jolloin saadaan Eulerin–Lagrangen yhtälö:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0} \tag{6.3}$$

Ollaan johdettu ehto $J[y]$:n stationarisoitumiselle, eli y stationarisoi $J[y]$:n, kun f toteuttaa yllä olevan differentiaaliyhtälön.

Mikäli haluttaisiin tietää, onko stationäärinen käyrä funktionaalin minimi vai maksimi, tulisi määrittää nk. toinen variaatio $\delta^2 J$, jonka etumerkki kertoisi derivaatoille analogisella tavalla onko kyseessä minimi vai maksimi. Tästä seuraa Legendren ehtoina tunnetut tulokset. Olkoon $\tilde{y}$ EL-yhtälön ratkaisu funktiolle $f(y', y', x), x \in [a, b]$. Tällöin $\tilde{y}$ voi olla minimi, mikäli:

$$\boxed{\forall x \in [a,b] : \quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial (y')^2}\right)_{y=\tilde{y}} \geq 0} \tag{6.4}$$

Vastaavasti $\tilde{y}$ voi olla maksimi, mikäli:

$$\boxed{\forall x \in [a,b] : \quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial (y')^2}\right)_{y=\tilde{y}} \leq 0} \tag{6.5}$$

Kuten sanamuodosta saattoi huomata, nämä ehdot eivät ole yksin riittäviä kertomaan, mikäli jokin käyrä on minimi tai maksimi. Ne ovat kuitenkin välttämättömiä ehtoa, jolloin mikäli esimerkiksi ensimmäinen ehto ei toteudu, kyseessä ei ainakaan ole minimi.

6.1.2 Beltramin identiteetti

Erittäin hyödyllinen erikoistapaus EL-yhtälöstä, joka tunnetaan nimellä Beltramin identiteetti, saadaan kun f ei riipu eksplisiittisesti x:stä, eli kun $f = f(y', y)$ eikä $f = f(y', y, x)$. Esimerkiksi pyörähdyskappaleen vaipan pinta-alan kaavassa esiintyvä funktio $f = 2\pi y\sqrt{1 + (y')^2}$ ei riipu eksplisiittisesti x:stä, jolloin Beltramin identiteettiä voitaisiin soveltaa. Johdetaan Beltramin itdentiteetti tarkastelemalla kokonaisderivaattaa $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$. Koska f on usean muuttujan funktio, riippuu kokonaisderivaatta kaikista f:n muuttujista ketjusäännön kautta:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x}$$

y' on määritelmän mukaan $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, jolloin $\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = y''$. Lisäksi $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} = 1$. Saadaan:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) y'' + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) y' + \frac{\partial f}{\partial x}$$

Koska f valittiin siten, ettei se riipu eksplisiittisesti x:stä, menee osittaisderivaatta $\frac{\partial f}{\partial x}$ nollaan:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) y'' + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) y'$$

EL-yhtälön nojalla $\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0 \iff \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)$. Saadaan:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) y'' + \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right) y'$$

Tunnistetaan tulon derivaatta:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(y'\frac{\partial f}{\partial y'}\right)$$

Siirretään termit samalle puolelle ja hyödynnetään derivaatan lineaarisuutta ottamalla se lausekkeen ulkopuolelle:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(f - y'\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0$$

Jos jonkin suureen derivaatta on nolla, on tämän suureen itse oltava vakio, jolloin saadaan Beltramin identiteetti:

$$\boxed{f - y'\frac{\partial f}{\partial y'} = C} \tag{6.6}$$

On huomattavaa, että siinä missa EL-yhtälö on toisen kertaluvun differentiaaliyhtälö, on Beltramin identiteetti vain ensimmäistä kertalukua, mikä tekee siitä monessa tilanteessa helpomman ratkaista olettaen että sitä voidaan käyttää.

6.2 Diracin deltafunktion määritelmä mittateorian avulla

Diracin delta*funktio* on nimestään huolimatta itseasiassa lineaarinen *funktionaali*, joka ottaa argumentikseen funktion ja palauttaa sen arvon kohdassa nolla. Toisin sanoen:

$$\delta[f] : f \mapsto f(0)$$

Tämä on kuitenkin harvoin se tapa, jolla Diracin deltafunktio esitellään tai määritellään. Sitä kun käytetään usein fysiikassa idealisaationa lyhyestä impulssista tai pistevarauksesta, jolloin olennaista on sen käytettävyys fysikaalisissa tilanteissa. Tämän takia usein määritellään epäformaalisti:

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty, x = 0 \\ 0, x \neq 0 \end{cases}$$

Tämä on kuitenkin hyvin epätäsmällinen ja käsiä heilutteleva määritelmä, sillä se ei täytä funktion vaatimuksia ja deltafunktion ”seulomisominaisuus”, jossa se palauttaa funktion arvon kohdassa nolla tuntuu absurdilta tämän määritelmän valossa. Formaalin määritelmän saamiseksi onkin tarkasteltava tilannetta hieman eri tavalla. Aivan aluksi otetaan annettuna nk. Rieszin–Markovin–Kakutanin lause siitä, että kaikki lineaariset funktionaalit $L[f]$ voidaan esittää integraalimuodossa, kun integroidaan suhteessa johonkin mittaan μ:

$$L[f] = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\mu \tag{6.7}$$

Tulos otetaan annettuna, sillä sen todistaminen ei ole yksinkertaista. Keskitytään seuraavaksi tarkastelemaan, mikä on mitta. Karkeasti mitta on funktio, joka liittää johonkin tutkittavaan joukkoon jonkin halutun suureen. Esimerkiksi funktio, joka palauttaa lukuvälin pituuden on mitta, sillä se liittää tutkittavaan joukkoon (lukuväli) halutun suureen (välin pituus). Mitta voi myös palauttaa lukumäärän, massan, pinta-alan, tilavuuden, todennäköisyyden ja käytännössä mitä vain kunhan mitta täyttää muutamat formaalit ominaisuudet. Formaaleilla ominaisuuksilla ei tässä kohdassa ole niin paljon väliä, mutta ne noudattavat pitkälti intuitiivista käsitystä fysikaalisista suureista, esim. mitta on nolla, jos tarkasteltava joukko on tyhjä ja kahden erillisen joukon mittojen summa on sama kuin joukkojen unionin mitta (vrt. kahden eri käsipainon massojen summa on sama kuin kahden yhteen sidotun käsipainon massa).

Tavallisimmin integroinnissa käytetty mitta on nk. Lebesguen mitta m, joka vastaa yksinkertaisesti lukuvälin pituutta eli:

$$m([a, b]) = |b - a|$$

Mitan voidaan kuvitella antavan integroimsvälille jonkin massan, joka painottaa sitä kun jotakin funktiota intgegroidaan. Kun mittana on Lebesguen mitta m, vastaa integrointi tavallista Riemannin integraalia, sillä funktion kokonaismassa jollakin lukuvälillä $[a, b]$ on karkeasti funktion arvo $f(x)$ kerrottuna välin mitalla, eli tässä tapauksessa pituudella $f(x)m([a, b])$. Kun lukuväli viedään nollaan, lähestyy mitta infinitesimaalia $\mathrm{d}m$, jolloin funktion infinitesimaalisen osan $\mathrm{d}f$ massa on $f(x)\,\mathrm{d}m$. Koska $m([a,b])$ kuvaa lukuvälin pituutta, voidaan $\mathrm{d}m$ korvata $\mathrm{d}x$:llä ja massaksi tulee $f(x)\,\mathrm{d}x$, mikä vastaa tavallisen Riemannin integraalin integroitavaa lauseketta.

Nyt tullaan tärkeään käännepisteeseen: voimme valita vapaasti mitan, jonka suhteen integrointi tapahtuu ja tällä valinnalla on seurauksia sille, mitä saamme tulokseksi integraalista. Tämä on avain, joka avaa oven Diracin deltaan, sillä Diracin delta on yksinkertaisesti lineaarinen funktionaali (6.7), jossa mittana toimii nk. Diracin mitta. Diracin mitta antaa seuraavan massan lukusuotalle:

$$\delta([a,b]) = \begin{cases} 1, [a,b] = \{0\} \\ 0, [a,b] \neq \{0\} \end{cases}$$

Eli mikäli tarkasteltava väli on kohta $x = 0$, antaa diracin mitta sille massan 1 ja kaikissa muissa tapauksissa massa on 0. Tällöin jos funktiota integroidaan Diracin mitan suhteen saadaan:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}\delta = f(0) \tag{6.8}$$

Tämä seuraa suoraan siitä, että δ palauttaa nollan kaikissa muissa pisteissä paitsi pisteessä $x = 0$, jolloin se palauttaa ykkösen eli ainoa jäljelle jäävä termi on $f(0)$. Tässä kohdassa voidaan pienellä notaation väärinkäytöllä johtaa perinteisesti esitelty kaava Diracin deltan seulomisominaisuudelle. Koska Diracin mitta yksinkertaisesti painottaa tavallisen lukusuoran uudelleen, voidaan se kirjoittaa tavallisen lukusuoran mitan ja jonkinlaisen tiheys"funktion" tulona $\mathrm{d}\delta = \delta(x)\,\mathrm{d}x$. Kyseessä ei voi olla tavallinen funktio, sillä pisteen nolla tiheys on ääretön, mutta notaatio on silti hyödyllinen, sillä se mahdollistaa seulomisominaisuuden kirjoittamisen tavallisen integraalin näköisenä lausekkeena:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}\delta = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)\,\mathrm{d}x = f(0)$$

Kertauksena siis Diracin delta on lineaarinen funktionaali, joka palauttaa funktion arvon kohdassa nolla ja sitä (niin kuin mitä tahansa lineaarista funktionaalia) voidaan merkitä Rieszin–Markovin–Kakutanin lauseen nojalla integraalina nk. Diracin mitan suhteen:

$$\delta[f] : f \mapsto f(0) \iff \delta[f] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}\delta \approx \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)\,\mathrm{d}x = f(0) \tag{6.9}$$

6.3 Distribuutiot

Distribuutiot ovat eräs funktionaalien alakategoria, jotka kuvaavat jonkin testifunktioavaruuden funktioita (kompleksi)luvuiksi. Distribuutioille olennaista on se, että testifunktiot ovat rajoitettuja ja katoavat riittävän nopeasti, sillä muuten epäoleellinen integraali testifunktion kanssa hajaantuisi. Esimerkkejä funktioavaruuksista, jotka sopivat testifunktioavaruuksiksi ovat S_n: Nopeasti pienenevät n:n muuttujan funktiot. Vaatimuksena S_n:n funktioille on ääretön derivoituvuus C^∞ (eli sileys) ja se, että kun $|\mathbf{x}| \to \infty$ niin $f(\mathbf{x}) \to 0$ ja samoin kaikille f:n osittaisderivaatoille. D_n: Sileät kompaktikantajaiset n:n muuttujan funktiot. Näille funktioille pätee $\exists R \in \mathbb{R} : |\mathbf{x}| \geq R \implies f(\mathbf{x}) = 0$ eli funktiot menevät nollaan ja pysyvät siellä äärellisellä etäisyydellä origosta. Nyt mikä tahansa (rajoitettu) skalaarikenttä $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ määrittelee distribuution S_n:lle tai D_n:lle, jos määritellään:

$$F[f] = \int_{\mathbb{R}^n} F(x)f(x)\,\mathrm{d}^n x, \qquad f \in S_n \ \lor \ f \in D_n$$

Funktion F on usein oltava rajoitettu, jotta integraali ei hajaantuisi mutta esimerkiksi polynomit, jotka eivät ole rajoitettuja, voivat mahdollisesti silti tuottaa distribuution sillä kun ne kerrotaan testifunktiolla voi lopputulos olla integroituva.

6.3.1 Moni-indeksit

6.3.2 Heikko derivaatta

6.3.3 Distribuutiot ja testifunktiot ovat dualismeja

7 Approksimaatiot, kasvunopeus ja asymptotiikka

7.1 Erilaisia approksimaatioita

7.1.1 Binomiapproksimaatio

Binomiapproksimaatiolla nimensä mukaisesti approksimoidaan binomeja, tarkemmin muotoa $(1+x)^\alpha$ olevia binomeja, jossa $x, \alpha \in \mathbb{C}$ ja joille pätee $|x| < 1$ ja $|\alpha x| \ll 1$. Kun nämä ehdot täyttyvät, voidaan kirjoittaa:

$$(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x \tag{7.1}$$

Tulos voidaan johtaa tekemällä funktiolle $f(x) = (1+x)^\alpha$ lineaarinen approksimaatio pisteen $x = 0$ ympäristössä. Approksimaatio on muotoa $L(x) = kx + b$ oleva suora, jossa $k = f'(0)$ ja $b = f(0)$. Saadaan:

$$f'(x)|_{x=0} = \alpha(1+x)^{\alpha-1}|_{x=0} = \alpha(1+0)^{\alpha-1} = \alpha$$

$$f(0) = (1+0)^\alpha = 1$$

Lineaarinen approksimaatio on siis:

$$L(x) = kx + b = f'(0)x + f(0) = \alpha x + 1$$

Myös seuraavassa osiossa esiteltävillä Taylorin polynomeilla voidaan johtaa binomiapproksimaatio.

7.1.2 Taylorin polynomit

7.2 Funktioiden vertailu

7.2.1 O- ja o-notaatio

Iso O:

$$f(x) = O(g(x)) \iff \exists M \in \mathbb{R}_+, x_0 \in \mathbb{R} : (\forall x \geq x_0 : |f(x)| \leq Mg(x)) \tag{7.2}$$

Pikku o:

$$f(x) = o(g(x)) \iff \forall M \in \mathbb{R}_+ : (\exists x_0 \in \mathbb{R} : (\forall x \geq x_0 : |f(x)| \leq Mg(x))) \tag{7.3}$$

Pikku o rajoittaa enemmän kuin iso O, sillä isolle O:lle riittää että on olemassa jokin M, jolle epäyhtälö $|f(x)| \leq Mg(x)$ pätee jossakin vaiheessa kun $x \geq x_0$, mutta pieni o vaatii, että kaikille M:lle on olemassa jokin x_0, jonka jälkeen epäyhtälö $|f(x)| \leq Mg(x)$ pätee. Eli vaikka M olisi hyvin lähellä nollaa, tulee $g(x)$:n kasvaa niin paljon nopeammin kuin $|f(x)|$:n että $Mg(x)$ päihittää $|f(x)|$:n lopulta.

Vaihtoehtoisesti iso ja pieni o voidaan määritellä raja-arvojen avulla:

$$f(x) = O(g(x)) \iff \limsup_{x\to\infty} \frac{|f(x)|}{g(x)} < \infty \tag{7.4}$$

$$f(x) = o(g(x)) \iff \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \tag{7.5}$$

7.2.2 $\ll$, $\lll$, $\gg$ ja $\ggg$

Symboleille $\ll$ ja $\gg$ ei ole eksaktia määritelmää, mutta voidaan silti muodostaa konsistentti määritelmä sarjakehitelmiin liittyen. Oletetaan, että A ja B ovat jotakin suureita, joita on merkityksellistä vertailla (esim. etäisyyksiä, massoja, nopeuksia jne.). Oletetaan myös, että on jokin funktio f, joka riippuu jollakin tavalla A:sta ja B:stä. Tällöin voidaan sanoa, että $A \ll B$, jos f:n sarjakehitelmässä $f\left(\frac{A}{B}\right) - f(0)$ johtavan termin jälkeiset termit voidaan jättää huomiotta. Se, että termit voidaan jättää huomiotta riippuu mittausten tarkkuudesta tai teoreettisten parametrien epävarmuudesta, jolloin tälle ei ole yhtä tiettyä määritelmää. Sen sijaan se riippuu tilanteesta. Lisäksi on olennaista, että funktion f sarjakehitelmän kertoimet f_n eivät kasva suuresti kun termien asteluku kasvaa, sillä tällöin termejä ei voitaisi jättää huomiotta pelkästään pienen argumentin arvon takia. Usein fysiikassa funktiot kuitenkin ovat sellaisia, että kertoimet f_n ovat kertaluokaltaan lähellä ykköstä eivätkä ne kasva asteluvun kasvaessa (esim. $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots$) vaan usein jopa pienentyvät (esim. $e^x, \sin x, \cos x$, $\tan x$, $\sinh x$, $\cosh x$, $\tanh x$).

Olkoon $f(x)$:n sarjakehitelmä muotoa:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k x^k = f_0 + f_1 x + f_2 x^2 + \dots$$

Tällöin $f\left(\frac{A}{B}\right)$ on:

$$f\left(\frac{A}{B}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \left(\frac{A}{B}\right)^k = f_0 + f_1\left(\frac{A}{B}\right) + f_2\left(\frac{A}{B}\right)^2 \dots$$

Ja $f(0) = f_0 + \cancel{f_1 \cdot (0)} + \cancel{f_2 \cdot (0)^2} + \dots = f_0$. Nyt erotus $f\left(\frac{A}{B}\right) - f(0)$ on muotoa:

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{A}{B}\right) - f(0) &= \sum_{k=0}^{\infty} f_k \left(\frac{A}{B}\right)^k - f_0 \\
&= f_0 + f_1\left(\frac{A}{B}\right) + f_2\left(\frac{A}{B}\right)^2 + f_3\left(\frac{A}{B}\right)^3 + \dots - f_0 \\
f\left(\frac{A}{B}\right) - f(0) &= f_1\left(\frac{A}{B}\right) + f_2\left(\frac{A}{B}\right)^2 + f_3\left(\frac{A}{B}\right)^3 + \dots
\end{aligned}$$

Nyt siis $A \ll B$, mikäli termit $O\left(\frac{A^2}{B^2}\right)$ voidaan jättää huomiotta tilanteen puitteissa.

Merkinnöille $\lll$ ja $\ggg$ on vielä epätäsmällisempi määritelmä: Ne tarkoittavat sitä, mitä niiden halutaan tarkoittavan. Esimerkiksi voitaisiin määritellä aiemman innoittamana, että $A \lll B$, jos sarjakehitelmän $f\left(\frac{A}{B}\right) - f(0)$ termit $O\left(\frac{A}{B}\right)$ voidaan jättää huomiotta tilanteen puitteissa, eli että $\frac{A}{B} \approx 0$ tarkkuuden rajoissa. Kuitenkin karkeasti $\lll$ ja $\ggg$ ovat jollakin tavalla rajoittavampia versioita $\ll$:stä ja $\gg$:stä. Eli jos $\ll$ on "paljon pienempi kuin", olisi $\lll$ "paljon, paljon pienempi kuin".

7.2.3 $\lessapprox$, $\lesssim$, $\gtrapprox$ ja $\gtrsim$

Näillä symboleilla halutaan korostaa, että suure A on pienempi tai suurempi kuin B tai jopa yhtä suuri kuin B mutta että yhtäsuuruus on aprokksimaattista sen sijaan että se olisi tarkkaa. Symbolit $\lessapprox$ ja $\lesssim$ ovat vaihtoehtoiset kirjoitusasut samaa tarkoittavalle symbolille samoin kuin $\gtrapprox$ ja $\gtrsim$. Siinä missä $A \leq B$ kertoo, että A on joko pienempi kuin B tai tarkalleen B, kertoo $A \lesssim B$, että A on joko pienempi kuin B tai approksimaattisesti B. Oletetaan kuitenkin, että $A \ngtr B$. Tämän perusteella voidaan muodostaa hierarkia vertailuoperaattoreista niiden rajoittavuuden mukaan. Olkoon $\prec$ "on rajoittavampi kuin", eli $A \prec B$ tarkoittaa, että vertailuoperaattori A rajoittaa mahdollisia arvoja jotka toteuttavat vertailun enemmän kuin vertailuoperaattori B Olkoon $\preceq$ ”on rajoittavampi tai yhtä rajoittava kuin”. Tällöin pätee seuraava rajoittavuushierarkia:

$$(\lll) \preceq (\ll) \prec (<) \prec (\lesssim) \preceq (\leq) \tag{7.6}$$

Ja vastaavasti:

$$(\ggg) \preceq (\gg) \prec (>) \prec (\gtrsim) \preceq (\geq) \tag{7.7}$$

Operaatioiden $\lll$ ja $\ll$ sekä $\ggg$ ja $\gg$ välillä on relaatio $\preceq$, sillä $\lll$ ja $\ggg$ ovat hyvin epäformaalisti määriteltyjä symboleita, jolloin on mahdollista että ne määritellään karkeasti samalla tavalla kuin $\ll$ ja $\gg$. Operaatioiden $\lesssim$ ja $\leq$ sekä $\gtrsim$ ja $\geq$ välillä puolestaan on relaatio $\preceq$, sillä mikäli $A \lesssim B$, voi olla $A = B$, sillä $A \approx B$ sisältää mahdollisuuden yhtäsuuruudelle. Sama pätee $\gtrsim$:lle.

7.3 Asymptotiikka

$\sim$:n määritelmä

$$f(x) \sim g(x) \iff \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \tag{7.8}$$

Vaihtoehtoisesti erityisesti jaksollisille funktioille $g(x)$:

$$f(x) \sim g(x) \iff f(x) = g(x)(1 + o(1)) \tag{7.9}$$

7.3.1 Asymptoottisia approksimaatioita

7.3.2 Asymptoottisia sarjakehitelmiä