



Calcolo integrale — Compito di pre-esonero
28 Aprile 2023 — Compito n. 00013

Istruzioni: le prime due caselle (**V** / **F**) permettono di selezionare la risposta vero/falso. La casella “**C**” serve a correggere eventuali errori invertendo la risposta data. Per selezionare una casella, annerirla completamente: ■ (non ☐ o ☑).

Nome: _____

Cognome: _____

Matricola:

--	--	--	--	--	--	--

Punteggi: 1 punto per ogni risposta esatta, 0 punti per risposte sbagliate o lasciate in bianco.

	1A	1B	1C	1D	2A	2B	2C	2D	3A	3B	3C	3D	4A	4B	4C	4D
V	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
F	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
C	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

1) Sia

$$F(t) = \int_0^t [4x^2 + \cos^2(7x)] dx$$

1A) La funzione $F(t)$ non è derivabile per qualche t in \mathbb{R} .

1B) Si ha $F'(0) = 1$.

1C) La funzione $F(t)$ è crescente su \mathbb{R} .

1D) Si ha $F(9) > 0$.

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

2A)

$$\int_0^1 (6x^2 + 8x + 2) dx = 0.$$

2B)

$$\int_0^{\frac{1}{5}} 50x e^{5x} dx = 2e.$$

2C)

$$\int_0^{4\pi} \cos(2x) dx = 0.$$

2D)

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{8x}{3+x^2} dx = 4 \log(2).$$

3) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

3A)

$$\int_{-2}^2 [2x^3 + \sin(4x)] dx \neq 0.$$

3B)

$$\int_{-7}^7 [9x^2 + 2x|x|] dx > 0.$$

3C)

$$\int_{-4}^5 [4x^3 + 6x] dx > 0.$$

3D)

$$\int_{-5}^4 \frac{x^3}{7+x^2} dx > 0.$$

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

4A)

$$\int_8^{16} \frac{dx}{x-4} = \log(3).$$

4B)

$$\int_{11}^{26} \frac{dx}{(x-6)^2} = \frac{3}{20}.$$

4C)

$$\int_9^{10} \frac{dx}{(x-6)(x-8)} = \frac{1}{2} \log(3/2).$$

4D)

$$\int_{-7}^{-6} \frac{dx}{x^2 + 14x + 50} = 1.$$

--	--	--	--	--	--	--	--

Cognome

Nome

Matricola

Compito 00013

5) Determinare una primitiva delle funzioni $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ e $k(x)$, e calcolare gli integrali.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} f(x) = x \sin(15x), & \int_0^{5\pi} f(x) dx, \quad \text{b)} g(x) = x^2 e^{8x^3}, \quad \int_0^{\sqrt[3]{4}} g(x) dx, \\ \text{c)} h(x) = (6x^2 + 23x + 11) e^x, & \int_{-\frac{11}{6}}^0 h(x) dx, \quad \text{d)} k(x) = \frac{1}{1 + 49x^2}, \quad \int_0^1 k(x) dx. \end{array}$$

--	--	--	--	--	--	--	--

Cognome**Nome****Matricola****Compito 00013**

6) Sia

$$F(t) = \int_0^t [11 e^{x^2} + 2] dx .$$

- a)** Dimostrare che $F(t)$ è derivabile per ogni t in \mathbb{R} .
b) Calcolare $F(0)$ e $F'(\sqrt{8})$.
c) Dimostrare che $F(t)$ è una funzione crescente e dispari.
d) Dimostrare che

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} F(t) = +\infty .$$

Soluzioni del compito 00013

1) Sia

$$F(t) = \int_0^t [4x^2 + \cos^2(7x)] dx$$

1A) La funzione $F(t)$ non è derivabile per qualche t in \mathbb{R} .

Vero: Dato che la funzione $x \mapsto 4x^2 + \cos^2(7x)$ è continua su \mathbb{R} , la funzione $F(t)$ è derivabile su \mathbb{R} per il teorema fondamentale del calcolo integrale, e si ha $F'(t) = 4x^2 + \cos^2(7t)$.

1B) Si ha $F'(0) = 1$.

Vero: Dato che per il teorema fondamentale del calcolo integrale si ha $F'(t) = 4t^2 + \cos^2(7t)$, si ha $F'(0) = 1$.

1C) La funzione $F(t)$ è crescente su \mathbb{R} .

Vero: Dato che per il teorema fondamentale del calcolo integrale si ha $F'(t) = 4t^2 + \cos^2(7t)$, si ha $F'(t) \geq 0$ per ogni t in \mathbb{R} , e quindi la funzione $F(t)$ è crescente su \mathbb{R} .

1D) Si ha $F(9) > 0$.

Vero: Dato che la funzione $F(t)$ è crescente (si veda l'esercizio **1C**), si ha

$$F(9) > F(0) = 0.$$

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

2A)

$$\int_0^1 (6x^2 + 8x + 2) dx = 0.$$

Falso: Dato che

$$\int (6x^2 + 8x + 2) dx = \frac{6}{3} x^3 + \frac{8}{2} x^2 + 2x = 2x^3 + 4x^2 + 2x + c,$$

si ha

$$\int_0^1 (6x^2 + 8x + 2) dx = 2x^3 + 4x^2 + 2x \Big|_0^1 = 2 + 4 + 2 = 8 \neq 0.$$

Alternativamente, si poteva osservare che l'integrale non poteva essere uguale a zero perché la funzione integranda è strettamente positiva sull'intervallo di integrazione.

2B)

$$\int_0^{\frac{1}{5}} 50x e^{5x} dx = 2e.$$

Falso: Si ha, con la sostituzione $y = 5x$, da cui $dy = 5dx$,

$$\int_0^{\frac{1}{5}} 50x e^{5x} dx = 2 \int_0^{\frac{1}{5}} (5x) e^{5x} (5dx) = 2 \int_0^1 y e^y dy.$$

Dato che una primitiva di $y e^y$ è $(y - 1) e^y$, si ha

$$\int_0^{\frac{1}{5}} 50x e^{5x} dx = 2(y - 1) e^y \Big|_0^1 = 2 \neq 2e.$$

2C)

$$\int_0^{4\pi} \cos(2x) dx = 0.$$

Vero: Si ha

$$\int_0^{4\pi} \cos(2x) dx = \frac{\sin(2x)}{2} \Big|_0^{4\pi} = \frac{\sin(8\pi) - \sin(0)}{2} = 0.$$

2D)

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{8x}{3+x^2} dx = 4 \log(2).$$

Vero: Dato che

$$\frac{8x}{3+x^2} = 4 \frac{2x}{3+x^2} = 4 \frac{(3+x^2)'}{3+x^2},$$

si ha

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{8x}{3+x^2} dx = 4 \log(3+x^2) \Big|_0^{\sqrt{3}} = 4 [\log(6) - \log(3)] = 4 \log(6/3) = 4 \log(2).$$

3) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

3A)

$$\int_{-2}^2 [2x^3 + \sin(4x)] dx \neq 0.$$

Falso: La funzione integranda è dispari, e l'intervallo di integrazione è simmetrico rispetto all'origine. Pertanto, l'integrale vale zero.

3B)

$$\int_{-7}^7 [9x^2 + 2x|x|] dx > 0.$$

Vero: La funzione $x \mapsto 9x^2$ è pari, mentre la funzione $x \mapsto 2x|x|$ è dispari. Dato che l'intervallo è simmetrico rispetto all'origine, si ha

$$\int_{-7}^7 [9x^2 + 2x|x|] dx = \int_{-7}^7 9x^2 dx = 2 \int_0^7 9x^2 dx > 0,$$

dato che la funzione integranda è positiva.

3C)

$$\int_{-4}^5 [4x^3 + 6x] dx > 0.$$

Vero: La funzione integranda è dispari; pertanto, si ha

$$\int_{-4}^5 [4x^3 + 6x] dx = \int_{-4}^4 [4x^3 + 6x] dx + \int_4^5 [4x^3 + 6x] dx = \int_4^5 [4x^3 + 6x] dx,$$

e l'ultimo integrale è positivo essendo l'integrale di una funzione positiva.

3D)

$$\int_{-5}^4 \frac{x^3}{7+x^2} dx > 0.$$

Falso: Dato che la funzione integranda è dispari, si ha

$$\int_{-5}^4 \frac{x^3}{7+x^2} dx = \int_{-5}^{-4} \frac{x^3}{7+x^2} dx + \int_{-4}^4 \frac{x^3}{7+x^2} dx = \int_{-5}^{-4} \frac{x^3}{7+x^2} dx < 0,$$

dato che la funzione integranda è negativa.

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

4A)

$$\int_8^{16} \frac{dx}{x-4} = \log(3).$$

Vero: Si ha

$$\int_8^{16} \frac{dx}{x-4} = \log(|x-4|) \Big|_8^{16} = \log(12) - \log(4) = \log(12/4) = \log(3).$$

4B)

$$\int_{11}^{26} \frac{dx}{(x-6)^2} = \frac{3}{20}.$$

Vero: Ricordando che

$$\int \frac{dx}{(x-a)^2} = \frac{1}{a-x} + c,$$

si ha

$$\int_{11}^{26} \frac{dx}{(x-6)^2} = \frac{1}{6-x} \Big|_{11}^{26} = -\frac{1}{20} + \frac{1}{5} = \frac{3}{20}.$$

4C)

$$\int_9^{10} \frac{dx}{(x-6)(x-8)} = \frac{1}{2} \log(3/2).$$

Vero: Dall'identità

$$\frac{1}{(x-6)(x-8)} = \frac{A}{x-8} + \frac{B}{x-6}$$

si ricava (moltiplicando per $(x-6)(x-8)$) che deve essere

$$1 = A(x-6) + B(x-8).$$

Scegliendo $x=6$ si ricava $B = -\frac{1}{2}$, e scegliendo $x=8$ si ricava $A = \frac{1}{2}$. Pertanto,

$$\frac{1}{(x-6)(x-8)} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{x-8} - \frac{1}{x-6} \right].$$

Ne segue che

$$\int \frac{dx}{(x-6)(x-8)} = \frac{1}{2} \log \left(\left| \frac{x-8}{x-6} \right| \right) + c,$$

cosicché

$$\int_9^{10} \frac{dx}{(x-6)(x-8)} = \frac{1}{2} [\log(1/2) - \log(1/3)] = \frac{1}{2} \log(3/2).$$

4D)

$$\int_{-7}^{-6} \frac{dx}{x^2 + 14x + 50} = 1.$$

Falso: Si ha

$$x^2 + 14x + 50 = (x+7)^2 + 1,$$

e quindi

$$\int \frac{dx}{x^2 + 14x + 50} = \int \frac{dx}{1 + (x+7)^2}.$$

Con la sostituzione $y = x+7$, da cui $dx = dy$, si ha

$$\int \frac{dx}{x^2 + 14x + 50} = \int \frac{dy}{1 + y^2} = \arctan(y) + c = \arctan(x+7) + c.$$

Pertanto,

$$\int_{-7}^{-6} \frac{dx}{x^2 + 14x + 50} = \arctan(x + 7) \Big|_{-7}^{-6} = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4} \neq 1.$$

5) Determinare una primitiva delle funzioni $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ e $k(x)$, e calcolare gli integrali.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & f(x) = x \sin(15x), \quad \int_0^{5\pi} f(x) dx, \quad \text{b)} \quad g(x) = x^2 e^{8x^3}, \quad \int_0^{\sqrt[3]{4}} g(x) dx, \\ \text{c)} \quad & h(x) = (6x^2 + 23x + 11) e^x, \quad \int_{-\frac{11}{6}}^0 h(x) dx, \quad \text{d)} \quad k(x) = \frac{1}{1 + 49x^2}, \quad \int_0^1 k(x) dx. \end{aligned}$$

Soluzione:

a) Si ha, integrando per parti, e ponendo $f'(x) = \sin(15x)$, da cui $f(x) = -\frac{\cos(15x)}{15}$ e $g(x) = x$, da cui $g'(x) = 1$,

$$\int x \sin(15x) = -\frac{x \cos(15x)}{15} + \int 1 \cdot \frac{\cos(15x)}{15} dx = -\frac{x \cos(15x)}{15} + \frac{\sin(15x)}{225} + c.$$

Pertanto,

$$\int_0^{5\pi} x \sin(15x) dx = -\frac{x \cos(15x)}{15} + \frac{\sin(15x)}{225} \Big|_0^{5\pi} = -\frac{5\pi \cos(75\pi)}{15} = \frac{1}{3} \pi.$$

b) Si ha, con la sostituzione $y = 8x^3$, da cui $dy = 24x^2 dx$ (e quindi $x^2 dx = \frac{dy}{24}$),

$$\int x^2 e^{8x^3} dx = \frac{1}{24} \int e^y dy = \frac{e^y}{24} + c = \frac{e^{8x^3}}{24} + c,$$

da cui segue che

$$\int_0^{\sqrt[3]{4}} x^2 e^{8x^3} dx = \frac{e^{8x^3}}{24} \Big|_0^{\sqrt[3]{4}} = \frac{e^{32} - 1}{24}.$$

c) Ricordiamo che se $P_2(x)$ è un polinomio di grado 2, allora

$$\int P_2(x) e^x dx = Q_2(x) e^x,$$

con $Q_2(x)$ un polinomio di grado 2 tale che $Q_2(x) + Q_2'(x) = P_2(x)$. Pertanto, se $Q_2(x) = ax^2 + bx + c$, deve essere

$$Q_2(x) + Q_2'(x) = ax^2 + (2a + b)x + b + c = 6x^2 + 23x + 11.$$

Da questa relazione si ricava $a = 6$, $2a + b = 23$ e $b + c = 11$; risolvendo, si trova $a = 6$, $b = 11$ e $c = 0$. Pertanto,

$$\int (6x^2 + 23x + 11) e^x dx = (6x^2 + 11x) e^x + c,$$

da cui segue che

$$\int_{-\frac{11}{6}}^0 (6x^2 + 23x + 11) e^x dx = (6x^2 + 11x) e^x \Big|_{-\frac{11}{6}}^0 = 0.$$

d) Si ha, con la sostituzione $y = 7x$, da cui $dx = \frac{dy}{7}$,

$$\int \frac{dx}{1 + 49x^2} = \frac{1}{7} \int \frac{dy}{1 + y^2} = \frac{\arctan(y)}{7} + c = \frac{\arctan(7x)}{7} + c.$$

Pertanto,

$$\int_0^1 \frac{dx}{1 + 49x^2} = \frac{\arctan(7x)}{7} \Big|_0^1 = \frac{\arctan(7)}{7}.$$

6) Sia

$$F(t) = \int_0^t [11 e^{x^2} + 2] dx .$$

a) Dimostrare che $F(t)$ è derivabile per ogni t in \mathbb{R} .

b) Calcolare $F(0)$ e $F'(\sqrt{8})$.

c) Dimostrare che $F(t)$ è una funzione crescente e dispari.

d) Dimostrare che

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} F(t) = +\infty .$$

Soluzione:

a) La funzione $f(x) = 11 e^{x^2} + 2$ è continua su \mathbb{R} . Pertanto, per il teorema fondamentale del calcolo integrale, la funzione $F(t)$ è derivabile per ogni t in \mathbb{R} e si ha

$$(1) \quad F'(t) = f(t) = 11 e^{t^2} + 2, \quad \forall t \in \mathbb{R} .$$

b) Si ha

$$F(0) = \int_0^0 [11 e^{x^2} + 2] dx = 0 ,$$

e, per la (1),

$$F'(\sqrt{8}) = f(\sqrt{8}) = 11 e^8 + 2 .$$

c) Dato che per la (1) la derivata di $F(t)$ è positiva, la funzione $F(t)$ è crescente. Inoltre, dato che la funzione $f(x)$ è pari, la funzione $F(t)$ è dispari. Infatti, con la sostituzione $x = -y$, da cui $dx = -dy$,

$$F(-t) = \int_0^{-t} [11 e^{x^2} + 2] dx = - \int_0^t [11 e^{(-y)^2} + 2] dy = - \int_0^t [11 e^{y^2} + 2] dy = -F(t) .$$

d) Si ha, se $t \geq 0$, e dato che $f(x) \geq 2$,

$$F(t) = \int_0^t [11 e^{x^2} + 2] dx \geq \int_0^t 2 dx = 2t ,$$

da cui segue che (si noti che il limite di $F(t)$ esiste perché $F(t)$ è crescente)

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} F(t) \geq \lim_{t \rightarrow +\infty} 2t = +\infty .$$