Calcolo integrale — Compito di pre-esonero
28 Aprile 2023 — Compito n. 00066

Istruzioni: le prime due caselle (**V** / **F**) permettono di selezionare la risposta vero/falso. La casella "**C**" serve a correggere eventuali errori invertendo la risposta data.
Per selezionare una casella, annerirla completamente: ■ (non ☒ o ☑).

Nome: ____________________

Cognome: ____________________

Matricola: | | | | | | | |

Punteggi: 1 punto per ogni risposta esatta, 0 punti per risposte sbagliate o lasciate in bianco.

	1A	1B	1C	1D	2A	2B	2C	2D	3A	3B	3C	3D	4A	4B	4C	4D
V	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
F	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
C	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

---

1) Sia

$$F(t) = \int_0^t [5\,x^2 + \cos^2(7\,x)]\,dx$$

1A) La funzione $F(t)$ è derivabile su tutto $\mathbb{R}$.
1B) Si ha $F'(0) = 0$.
1C) La funzione $F(t)$ è crescente su $\mathbb{R}$.
1D) Si ha $F(9) > 0$.

---

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

2A)

$$\int_0^1 (15x^2 + 6x + 5)\,dx = 13\,.$$

2B)

$$\int_0^{\frac{1}{6}} 144\,x\,\mathrm{e}^{6\,x}\,dx = 4\,\mathrm{e}\,.$$

2C)

$$\int_0^{10\,\pi} \cos(7\,x)\,dx = 5\,.$$

2D)

$$\int_0^{\sqrt{6}} \frac{8\,x}{6 + x^2}\,dx = 8\,\log(2)\,.$$

---

3) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

3A)

$$\int_{-6}^{6} [7\,x^3 + \sin(3\,x)]\,dx \neq 0\,.$$

3B)

$$\int_{-3}^{3} [2\,x^2 + 2\,x\,|x|]\,dx > 0\,.$$

3C)

$$\int_{-4}^{5} [9\,x^3 + 4\,x]\,dx > 0\,.$$

3D)

$$\int_{-4}^{3} \frac{x^7}{8 + x^6}\,dx < 0\,.$$

---

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

4A)

$$\int_{20}^{92} \frac{dx}{x - 8} = \log(7)\,.$$

4B)

$$\int_{13}^{21} \frac{dx}{(x - 9)^2} = \frac{1}{6}\,.$$

4C)

$$\int_{10}^{11} \frac{dx}{(x - 7)\,(x - 9)} = \frac{1}{2}\,\log(3/2)\,.$$

4D)

$$\int_{-3}^{-2} \frac{dx}{x^2 + 6\,x + 10} = 1\,.$$

								Cognome	**Nome**	**Matricola**	**Compito 00066**

5) Determinare una primitiva delle funzioni $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ e $k(x)$, e calcolare gli integrali.

$$\mathbf{a})\ f(x) = x\,\sin(3\,x)\,, \quad \int_0^{5\,\pi} f(x)\,dx\,, \qquad \mathbf{b})\ g(x) = x^2\,\mathrm{e}^{5\,x^3}\,, \quad \int_0^{\sqrt[3]{6}} g(x)\,dx\,,$$

$$\mathbf{c})\ h(x) = (10x^2 + 23x + 3)\,\mathrm{e}^x\,, \quad \int_{-\frac{3}{10}}^0 h(x)\,dx\,, \qquad \mathbf{d})\ k(x) = \frac{1}{1 + 4\,x^2}\,, \quad \int_0^1 k(x)\,dx\,.$$

☐☐☐☐☐☐☐☐ **Cognome** **Nome** **Matricola** **Compito 00066**

6) Sia
$$F(t) = \int_0^t [11\,\mathrm{e}^{x^2} + 10]\,dx\,.$$
a) Dimostrare che $F(t)$ è derivabile per ogni t in $\mathbb{R}$.
b) Calcolare $F(0)$ e $F'(\sqrt{5})$.
c) Dimostrare che $F(t)$ è una funzione crescente e dispari.
d) Dimostrare che
$$\lim_{t\to+\infty} F(t) = +\infty\,.$$

Soluzioni del compito 00066

1) Sia

$$F(t) = \int_0^t [5\,x^2 + \cos^2(7\,x)]\,dx$$

1A) La funzione $F(t)$ è derivabile su tutto $\mathbb{R}$.

Vero: Dato che la funzione $x \mapsto 5\,x^2 + \cos^2(7\,x)$ è continua su $\mathbb{R}$, la funzione $F(t)$ è derivabile su $\mathbb{R}$ per il teorema fondamentale del calcolo integrale, e si ha $F'(t) = 5\,x^2 + \cos^2(7\,t)$.

1B) Si ha $F'(0) = 0$.

Falso: Dato che per il teorema fondamentale del calcolo integrale si ha $F'(t) = 5\,t^2 + \cos^2(7\,t)$, si ha $F'(0) = 1 \neq 0$.

1C) La funzione $F(t)$ è crescente su $\mathbb{R}$.

Vero: Dato che per il teorema fondamentale del calcolo integrale si ha $F'(t) = 5\,t^2 + \cos^2(7\,t)$, si ha $F'(t) \geq 0$ per ogni t in $\mathbb{R}$, e quindi la funzione $F(t)$ è crescente su $\mathbb{R}$.

1D) Si ha $F(9) > 0$.

Vero: Dato che la funzione $F(t)$ è crescente (si veda l'esercizio **1C**), si ha

$$F(9) > F(0) = 0\,.$$

---

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

2A)

$$\int_0^1 (15x^2 + 6x + 5)\,dx = 13\,.$$

Vero: Dato che

$$\int (15x^2 + 6x + 5)\,dx = \frac{15}{3}\,x^3 + \frac{6}{2}\,x^2 + 5\,x = 5\,x^3 + 3\,x^2 + 5\,x + c\,,$$

si ha

$$\int_0^1 (15x^2 + 6x + 5)\,dx = 5\,x^3 + 3\,x^2 + 5\,x\Big|_0^1 = 5 + 3 + 5 = 13\,.$$

2B)

$$\int_0^{\frac{1}{6}} 144\,x\,\mathrm{e}^{6\,x}\,dx = 4\,\mathrm{e}\,.$$

Falso: Si ha, con la sostituzione $y = 6\,x$, da cui $dy = 6\,x$,

$$\int_0^{\frac{1}{6}} 144\,x\,\mathrm{e}^{6\,x}\,dx = 4\int_0^{\frac{1}{6}} (6\,x)\,\mathrm{e}^{6\,x}\,(6\,dx) = 4\int_0^1 y\,\mathrm{e}^y\,dy\,.$$

Dato che una primitiva di $y\,\mathrm{e}^y$ è $(y-1)\,\mathrm{e}^y$, si ha

$$\int_0^{\frac{1}{6}} 144\,x\,\mathrm{e}^{6\,x}\,dx = 4\,(y-1)\,\mathrm{e}^y\Big|_0^1 = 4 \neq 4\,\mathrm{e}\,.$$

2C)

$$\int_0^{10\,\pi} \cos(7\,x)\,dx = 5\,.$$

Falso: Si ha

$$\int_0^{10\,\pi} \cos(7\,x)\,dx = \frac{\sin(7\,x)}{7}\Big|_0^{10\,\pi} = \frac{\sin(70\,\pi) - \sin(0)}{7} = 0 \neq 5\,.$$

2D)

$$\int_0^{\sqrt{6}} \frac{8\,x}{6 + x^2}\,dx = 8\,\log(2)\,.$$

Falso: Dato che

$$\frac{8\,x}{6 + x^2} = 4\,\frac{2x}{6 + x^2} = 4\,\frac{(6 + x^2)'}{6 + x^2}\,,$$

si ha

$$\int_0^{\sqrt{6}} \frac{8\,x}{6 + x^2}\,dx = 4\,\log(6 + x^2)\Big|_0^{\sqrt{6}} = 4\,[\log(12) - \log(6)] = 4\,\log(12/6) = 4\,\log(2) \neq 8\,\log(2)\,.$$

---

3) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

3A)

$$\int_{-6}^{6} [7\,x^3 + \sin(3\,x)]\,dx \neq 0\,.$$

Falso: La funzione integranda è dispari, e l'intervallo di integrazione è simmetrico rispetto all'origine. Pertanto, l'integrale vale zero.

3B)

$$\int_{-3}^{3} [2\,x^2 + 2\,x\,|x|]\,dx > 0\,.$$

Vero: La funzione $x \mapsto 2\,x^2$ è pari, mentre la funzione $x \mapsto 2\,x\,|x|$ è dispari. Dato che l'intervallo è simmetrico rispetto all'origine, si ha

$$\int_{-3}^{3} [2\,x^2 + 2\,x\,|x|]\,dx = \int_{-3}^{3} 2\,x^2\,dx = 2\int_{0}^{3} 2\,x^2\,dx > 0\,,$$

dato che la funzione integranda è positiva.

3C)

$$\int_{-4}^{5} [9\,x^3 + 4\,x]\,dx > 0\,.$$

Vero: La funzione integranda è dispari; pertanto, si ha

$$\int_{-4}^{5} [9\,x^3 + 4\,x]\,dx = \int_{-4}^{4} [9\,x^3 + 4\,x]\,dx + \int_{4}^{5} [9\,x^3 + 4\,x]\,dx = \int_{4}^{5} [9\,x^3 + 4\,x]\,dx\,,$$

e l'ultimo integrale è positivo essendo l'integrale di una funzione positiva.

3D)

$$\int_{-4}^{3} \frac{x^7}{8 + x^6}\,dx < 0\,.$$

Vero: Dato che la funzione integranda è dispari, si ha

$$\int_{-4}^{3} \frac{x^7}{8 + x^6}\,dx = \int_{-4}^{-3} \frac{x^7}{8 + x^6}\,dx + \int_{-3}^{3} \frac{x^7}{8 + x^6}\,dx = \int_{-4}^{-3} \frac{x^7}{8 + x^6}\,dx < 0\,,$$

dato che la funzione integranda è negativa.

---

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

4A)

$$\int_{20}^{92} \frac{dx}{x-8} = \log(7)\,.$$

Vero: Si ha

$$\int_{20}^{92} \frac{dx}{x-8} = \log(|x-8|)\Big|_{20}^{92} = \log(84) - \log(12) = \log(84/12) = \log(7)\,.$$

4B)

$$\int_{13}^{21} \frac{dx}{(x-9)^2} = \frac{1}{6}\,.$$

Vero: Ricordando che

$$\int \frac{dx}{(x-a)^2} = \frac{1}{a-x} + c\,,$$

si ha

$$\int_{13}^{21} \frac{dx}{(x-9)^2} = \frac{1}{9-x}\Big|_{13}^{21} = -\frac{1}{12} + \frac{1}{4} = \frac{1}{6}\,.$$

4C)

$$\int_{10}^{11} \frac{dx}{(x-7)\,(x-9)} = \frac{1}{2}\,\log(3/2)\,.$$

Vero: Dall'identità

$$\frac{1}{(x-7)\,(x-9)} = \frac{A}{x-9} + \frac{B}{x-7}$$

si ricava (moltiplicando per $(x-7)\,(x-9)$) che deve essere

$$1 = A\,(x-7) + B\,(x-9)\,.$$

Scegliendo $x = 7$ si ricava $B = -\frac{1}{2}$, e scegliendo $x = 9$ si ricava $A = \frac{1}{2}$. Pertanto,

$$\frac{1}{(x-7)\,(x-9)} = \frac{1}{2}\Big[\frac{1}{x-9} - \frac{1}{x-7}\Big]\,.$$

Ne segue che

$$\int \frac{dx}{(x-7)\,(x-9)} = \frac{1}{2}\,\log\Big(\Big|\frac{x-9}{x-7}\Big|\Big) + c\,,$$

cosicché

$$\int_{10}^{11} \frac{dx}{(x-7)\,(x-9)} = \frac{1}{2}\,[\log(1/2) - \log(1/3)] = \frac{1}{2}\,\log(3/2)\,.$$

4D)

$$\int_{-3}^{-2} \frac{dx}{x^2 + 6\,x + 10} = 1\,.$$

Falso: Si ha

$$x^2 + 6\,x + 10 = (x+3)^2 + 1\,,$$

e quindi

$$\int \frac{dx}{x^2 + 6\,x + 10} = \int \frac{dx}{1 + (x+3)^2}\,.$$

Con la sostituzione $y = x + 3$, da cui $dx = dy$, si ha

$$\int \frac{dx}{x^2 + 6\,x + 10} = \int \frac{dy}{1 + y^2} = \arctan(y) + c = \arctan(x+3) + c\,.$$

Pertanto,
$$\int_{-3}^{-2} \frac{dx}{x^2+6\,x+10} = \arctan(x+3)\Big|_{-3}^{-2} = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4} \neq 1\,.$$

5) Determinare una primitiva delle funzioni $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ e $k(x)$, e calcolare gli integrali.

$$\textbf{a)}\ f(x) = x\,\sin(3\,x)\,, \quad \int_0^{5\,\pi} f(x)\,dx\,, \qquad \textbf{b)}\ g(x) = x^2\,\mathrm{e}^{5\,x^3}\,, \quad \int_0^{\sqrt[3]{6}} g(x)\,dx\,,$$

$$\textbf{c)}\ h(x) = (10x^2 + 23x + 3)\,\mathrm{e}^x\,, \quad \int_{-\frac{3}{10}}^0 h(x)\,dx\,, \qquad \textbf{d)}\ k(x) = \frac{1}{1+4\,x^2}\,, \quad \int_0^1 k(x)\,dx\,.$$

Soluzione:

a) Si ha, integrando per parti, e ponendo $f'(x) = \sin(3\,x)$, da cui $f(x) = -\frac{\cos(3\,x)}{3}$ e $g(x) = x$, da cui $g'(x) = 1$,

$$\int x\,\sin(3\,x) = -\frac{x\,\cos(3\,x)}{3} + \int 1\cdot\frac{\cos(3\,x)}{3}\,dx = -\frac{x\,\cos(3\,x)}{3} + \frac{\sin(3\,x)}{9} + c\,.$$

Pertanto,

$$\int_0^{5\,\pi} x\,\sin(3\,x)\,dx = -\frac{x\,\cos(3\,x)}{3} + \frac{\sin(3\,x)}{9}\Big|_0^{5\,\pi} = -\frac{5\,\pi\,\cos(15\,\pi)}{3} = \frac{5}{3}\,\pi\,.$$

b) Si ha, con la sostituzione $y = 5\,x^3$, da cui $dy = 15\,x^2\,dx$ (e quindi $x^2\,dx = \frac{dy}{15}$),

$$\int x^2\,\mathrm{e}^{5\,x^3}\,dx = \frac{1}{15}\int \mathrm{e}^y\,dy = \frac{\mathrm{e}^y}{15} + c = \frac{\mathrm{e}^{5\,x^3}}{15} + c\,,$$

da cui segue che

$$\int_0^{\sqrt[3]{6}} x^2\,\mathrm{e}^{5\,x^3}\,dx = \frac{\mathrm{e}^{5\,x^3}}{15}\Big|_0^{\sqrt[3]{6}} = \frac{\mathrm{e}^{30}-1}{15}\,.$$

c) Ricordiamo che se $P_2(x)$ è un polinomio di grado 2, allora

$$\int P_2(x)\,\mathrm{e}^x\,dx = Q_2(x)\,\mathrm{e}^x\,,$$

con $Q_2(x)$ un polinomio di grado 2 tale che $Q_2(x) + Q_2'(x) = P_2(x)$. Pertanto, se $Q_2(x) = a\,x^2 + b\,x + c$, deve essere

$$Q_2(x) + Q_2'(x) = a\,x^2 + (2a+b)\,x + b + c = 10x^2 + 23x + 3\,.$$

Da questa relazione si ricava $a = 10$, $2a + b = 23$ e $b + c = 3$; risolvendo, si trova $a = 10$, $b = 3$ e $c = 0$. Pertanto,

$$\int (10x^2 + 23x + 3)\,\mathrm{e}^x\,dx = (10x^2 + 3x)\,\mathrm{e}^x + c\,,$$

da cui segue che

$$\int_{-\frac{3}{10}}^0 (10x^2 + 23x + 3)\,\mathrm{e}^x\,dx = (10x^2 + 3x)\,\mathrm{e}^x\Big|_{-\frac{3}{10}}^0 = 0\,.$$

d) Si ha, con la sostituzione $y = 2\,x$, da cui $dx = \frac{dy}{2}$,

$$\int \frac{dx}{1+4\,x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dy}{1+y^2} = \frac{\arctan(y)}{2} + c = \frac{\arctan(2\,x)}{2} + c\,.$$

Pertanto,

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+4\,x^2} = \frac{\arctan(2\,x)}{2}\Big|_0^1 = \frac{\arctan(2)}{2}\,.$$

6) Sia
$$F(t) = \int_0^t [11\,\mathrm{e}^{x^2} + 10]\,dx\,.$$
a) Dimostrare che $F(t)$ è derivabile per ogni t in $\mathbb{R}$.
b) Calcolare $F(0)$ e $F'(\sqrt{5})$.
c) Dimostrare che $F(t)$ è una funzione crescente e dispari.
d) Dimostrare che
$$\lim_{t\to+\infty} F(t) = +\infty\,.$$

Soluzione:
a) La funzione $f(x) = 11\,\mathrm{e}^{x^2} + 10$ è continua su $\mathbb{R}$. Pertanto, per il teorema fondamentale del calcolo integrale, la funzione $F(t)$ è derivabile per ogni t in $\mathbb{R}$ e si ha

(1) $$F'(t) = f(t) = 11\,\mathrm{e}^{t^2} + 10\,, \qquad \forall t \in \mathbb{R}\,.$$

b) Si ha
$$F(0) = \int_0^0 [11\,\mathrm{e}^{x^2} + 10]\,dx = 0\,,$$
e, per la (1),
$$F'(\sqrt{5}) = f(\sqrt{5}) = 11\,\mathrm{e}^5 + 10\,.$$

c) Dato che per la (1) la derivata di $F(t)$ è positiva, la funzione $F(t)$ è crescente. Inoltre, dato che la funzione $f(x)$ è pari, la funzione $F(t)$ è dispari. Infatti, con la sostituzione $x = -y$, da cui $dx = -dy$,
$$F(-t) = \int_0^{-t} [11\,\mathrm{e}^{x^2} + 10]\,dx = -\int_0^t [11\,\mathrm{e}^{(-y)^2} + 10]\,dy = -\int_0^t [11\,\mathrm{e}^{y^2} + 10]\,dy = -F(t)\,.$$

d) Si ha, se $t \geq 0$, e dato che $f(x) \geq 10$,
$$F(t) = \int_0^t [11\,\mathrm{e}^{x^2} + 10]\,dx \geq \int_0^t 10\,dx = 10\,t\,,$$
da cui segue che (si noti che il limite di $F(t)$ esiste perché $F(t)$ è crescente)
$$\lim_{t\to+\infty} F(t) \geq \lim_{t\to+\infty} 10\,t = +\infty\,.$$