Calcolo integrale — Compito di pre-esonero
23 Maggio 2023 — Compito n. 00023

Istruzioni: le prime due caselle (**V** / **F**) permettono di selezionare la risposta vero/falso. La casella "**C**" serve a correggere eventuali errori invertendo la risposta data.
Per selezionare una casella, annerirla completamente: ■ (non ☒ o ☑).

Nome: ____________________

Cognome: ____________________

Matricola: | | | | | | | |

	1A	1B	1C	1D	2A	2B	2C	2D	3A	3B	3C	3D	4A	4B	4C	4D
V	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
F	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
C	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

1) Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(t) = \mathrm{e}^{2t}\,(5 + y^2(t))\,.$$

1A) L'equazione ha infinite soluzioni.
1B) Esiste un'unica soluzione dell'equazione tale che $y(0) = 7$.
1C) Non esistono soluzioni dell'equazione tali che $y(0) = 0$ e $y'(0) = 5$.
1D) Se $y(0) = 6$, la soluzione è decrescente in un intorno dell'origine.

2) Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(t) - 8\,y'(t) + 7\,y(t) = 28\,.$$

2A) Esiste un'unica soluzione dell'equazione tale che $y(0) = 4$, $y'(0) = 0$ e $y''(0) = 0$.
2B) Se $y(0) = 0$ e $y'(0) = 7$, si ha $y''(0) = -28$.
2C) Esiste un'unica soluzione dell'equazione tale che $y'(0) = 1$ e $y''(0) = 8$.
2D) Se $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$, la soluzione dell'equazione è concava in un intorno dell'origine.

3) Si consideri il problema di Cauchy

$$(1) \qquad \begin{cases} y'(t) = 6\,y(t) + \mathrm{e}^{6t} + 30\,, \\ y(0) = 0\,. \end{cases}$$

3A) Si ha $y'(0) > 0$.
3B) La funzione $y_0(t) = 6\,\mathrm{e}^{6t}$ è soluzione dell'equazione omogenea associata all'equazione di (1).
3C) La soluzione di (1) è $y(t) = (t-5)\,\mathrm{e}^{6t} + 5$.
3D) Si ha

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = 0\,.$$

4) Si consideri l'equazione differenziale

$$(1) \qquad y''(t) + A\,y'(t) + B\,y(t) = 0\,.$$

4A) Se $A = B = 0$, i polinomi di primo grado non sono soluzioni di (1).
4B) Se $A = -9$ e $B = 18$, la funzione $y(t) = 7\,\mathrm{e}^{6t}$ è soluzione di (1).
4C) Se $A = -14$ e $B = 49$, la funzione $y(t) = 8\,t\,\mathrm{e}^{7t}$ è soluzione di (1).
4D) Se $A = 0$ e $B = 9$, tutte le soluzioni non nulle di (1) sono periodiche.

Docente
☐ DelaTorre Pedraza
☐ Orsina

□□□□□□□□ **Cognome** **Nome** **Matricola** **Compito 00023**

---

5) Si consideri l'equazione differenziale

(1) $$y'(t) = 2\,(y(t) + 8)\,\cos(2\,t)\,.$$

a) Quante soluzioni di (1) verificano la condizione $y(0) = 9$? E quante le condizioni $y(0) = 0$ e $y'(0) = 16$?
b) Determinare la soluzione di (1) tale che $y(5) = -8$.
c) Calcolare $T_2(y(t); 0)$, dove $y(t)$ è la soluzione di (1) tale che $y(0) = 0$.
d) Determinare la soluzione di (1) tale che $y(0) = 0$.

☐☐☐☐☐☐☐☐ **Cognome** **Nome** **Matricola** **Compito 00023**

---

6) Si consideri il problema di Cauchy

$$(1) \qquad \begin{cases} y''(t) - 18\,y'(t) + 81\,y(t) = 243\,, \\ y(0) = 4\,, \quad y'(0) = 0\,. \end{cases}$$

a) Quante soluzioni ha (1)? E quante tali che $y''(0) = 242$?

b) Scrivere tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata all'equazione di (1).

c) Determinare una soluzione particolare dell'equazione di (1), e scrivere tutte le soluzioni dell'equazione di (1).

d) Determinare la soluzione di (1).

Soluzioni del compito 00023

1) Si consideri l'equazione differenziale
$$y'(t) = \mathrm{e}^{2\,t}\,(5 + y^2(t))\,.$$

1A) L'equazione ha infinite soluzioni.

Vero: Essendo un'equazione differenziale ordinaria del primo ordine, l'equazione ha infinite soluzioni dipendenti da un parametro reale.

1B) Esiste un'unica soluzione dell'equazione tale che $y(0) = 7$.

Vero: Assegnando la condizione iniziale $y(0) = 7$, si ottiene un problema di Cacuhy per un'equazione differenziale ordinaria del primo ordine, che ha un'unica soluzione.

1C) Non esistono soluzioni dell'equazione tali che $y(0) = 0$ e $y'(0) = 5$.

Falso: Se si assegna la condizione $y(0) = 0$, si ottiene un problema di Cauchy per un'equazione differenziale ordinaria del primo ordine, che ha un'unica soluzione. Per tale soluzione si ha
$$y'(0) = \mathrm{e}^{2\cdot 0}\,(5 + y^2(0)) = 1 \cdot (5 + 0) = 5\,.$$
Si ha quindi che la condizione $y'(0) = 5$ è automaticamente soddisfatta, e quindi la soluzione esiste ed è unica.

1D) Se $y(0) = 6$, la soluzione è decrescente in un intorno dell'origine.

Falso: Se $y(0) = 6$, si ha
$$y'(0) = \mathrm{e}^{2\cdot 0}\,(5 + y^2(0)) = 1 \cdot (5 + 36) = 41 > 0\,.$$
Per il teorema della permanenza del segno, $y'(t) \geq 0$ in un intorno dell'origine, e quindi la soluzione è crescente in tale intorno.
Alternativamente, e prescindendo dalla condizione iniziale, era sufficiente osservare che
$$y'(t) = \mathrm{e}^{2\,t}\,(1 + y^2(t)) \geq \mathrm{e}^{2\,t} \geq 0\,,$$
e quindi *ogni* soluzione dell'equazione è crescente.

---

2) Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(t) - 8\,y'(t) + 7\,y(t) = 28\,.$$

2A) Esiste un'unica soluzione dell'equazione tale che $y(0) = 4$, $y'(0) = 0$ e $y''(0) = 0$.

Vero: Se si assegnano le condizioni iniziali $y(0) = 4$ e $y'(0) = 0$, si ottiene un problema di Cauchy per un'equazione differenziale ordinaria del secondo ordine, che ha un'unica soluzione. Per tale soluzione, si ha

$$y''(0) = 28 + 8\,y'(0) - 7\,y(0) = 28 + 8 \cdot 0 - 7 \cdot 4 = 0\,,$$

cosicché la condizione $y''(0) = 0$ è automaticamente soddisfatta, e quindi la soluzione esiste ed è unica.

2B) Se $y(0) = 0$ e $y'(0) = 7$, si ha $y''(0) = -28$.

Falso: Con le condizioni iniziali $y(0) = 0$ e $y'(0) = 7$ si ha, per l'unica soluzione del problema,

$$y''(0) = 28 + 8\,y'(0) - 7\,y(0) = 28 + 8 \cdot 7 - 7 \cdot 0 = 84 \neq -28\,.$$

2C) Esiste un'unica soluzione dell'equazione tale che $y'(0) = 1$ e $y''(0) = 8$.

Vero: Se $y(t)$ è soluzione di (1), sostituendo $t = 0$ nell'equazione si trova

$$y''(0) - 8\,y'(0) + 7\,y(0) = 28\,.$$

Se $y'(0) = 1$ e $y''(0) = 8$, si ha

$$8 - 8 \cdot 1 + 7\,y(0) = 28\,,$$

da cui segue $y(0) = 4$. Consideriamo ora l'unica soluzione di (1) tale che $y(0) = 4$ e $y'(0) = 1$. Per tale soluzione si ha, ovviamente, $y''(0) = 8$, e quindi esiste un'unica soluzione dell'equazione tale che $y'(0) = 1$ e $y''(0) = 8$.

2D) Se $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$, la soluzione dell'equazione è concava in un intorno dell'origine.

Falso: Se $y(0) = y'(0) = 0$ si ha, per l'unica soluzione dell'equazione, che

$$y''(0) = 28 + 8\,y'(0) - 7\,y(0) = 28 + 8 \cdot 0 - 7 \cdot 0 = 28 > 0\,.$$

Per il teorema della permanenza del segno, si ha $y''(t) \geq 0$ in un intorno dell'origine, e quindi $y(t)$ è convessa in tale intorno.

---

3) Si consideri il problema di Cauchy

$$(1) \qquad \begin{cases} y'(t) = 6\,y(t) + e^{6\,t} + 30\,, \\ y(0) = 0\,. \end{cases}$$

Ricordiamo che la soluzione del problema di Cauchy per l'equazione $y'(t) = a(t)\,y(t) + b(t)$, con la condizione $y(0) = y_0$ è data da

$$(2) \qquad y(t) = e^{A(t)} \left[y_0 + \int_0^t b(s)\, e^{-A(s)}\, ds \right],$$

dove

$$A(t) = \int_0^t a(s)\, ds\,.$$

Nel nostro caso, $a(t) = 6$ e $b(t) = e^{6\,t} + 30$ e quindi

$$A(t) = \int_0^t 6\, ds = 6\,t\,.$$

Applicando la (2) con $y_0 = 0$ si ha

$$y(t) = e^{6\,t} \int_0^t [e^{6\,s} + 30]\, e^{-6\,s}\, ds = e^{6\,t}\, [s - 5\, e^{-6\,s}]\Big|_0^t = e^{6\,t}\, [t - 5\, e^{-6\,t} + 5]\,,$$

e quindi, semplificando,

$$(3) \qquad y(t) = (t + 5)\, e^{6\,t} - 5\,.$$

3A) Si ha $y'(0) > 0$.

Vero: Sostituendo la condizione iniziale $y(0) = 0$ nell'equazione, si ha

$$y'(0) = 6\,y(0) + e^{6\cdot 0} + 28 = 6 \cdot 0 + 1 + 28 = 29 > 0\,.$$

3B) La funzione $y_0(t) = 6\, e^{6\,t}$ è soluzione dell'equazione omogenea associata all'equazione di (1).

Vero: L'equazione omogenea associata all'equazione di (1) è

$$y_0'(t) = 6\, y_0(t)\,,$$

Se $y_0(t) = 6\, e^{6\,t}$, si ha

$$y_0'(t) = 36\, e^{6\,t} = 6 \cdot (6\, e^{6\,t}) = 6\, y_0(t)\,,$$

e quindi $y_0(t)$ è soluzione dell'equazione omogenea associata.

3C) La soluzione di (1) è $y(t) = (t - 5)\, e^{6\,t} + 5$.

Falso: La soluzione di (1) è data da (3). Alternativamente, se $y(t) = (t - 5)\, e^{6\,t} + 5$, si ha

$$y'(t) = 6\,(t - 5)\, e^{6\,t} + e^{6\,t}\,,$$

e

$$6\,y(t) + e^{6\,t} + 30 = 6\,(t - 5)\, e^{6\,t} + 30 + e^{6\,t} + 30 = 6\,(t - 5)\, e^{6\,t} + e^{6\,t} + 60\,.$$

Pertanto,

$$y'(t) - (6\,y(t) + e^{6\,t} + 30) = e^{6\,t} + 6\,(t - 5)\, e^{6\,t} - [6\,(t - 5)\, e^{6\,t} + e^{6\,t} + 60] = -60 \neq 0\,,$$

e quindi $y(t)$ non è soluzione di (1).

3D) Si ha

$$\lim_{t \to +\infty} y(t) = 0\,.$$

Falso: Dalla (3) segue che

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = \lim_{t\to+\infty} [(t-5)\,\mathrm{e}^{6\,t} + 5] = +\infty \neq 0\,.$$

4) Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(t) + A\,y'(t) + B\,y(t) = 0\,. \tag{1}$$

4A) Se $A = B = 0$, i polinomi di primo grado non sono soluzioni di (1).

Falso: Se $A = B = 0$, (1) diventa

$$y''(t) = 0\,.$$

Se $y(t)$ è un polinomio di primo grado, si ha $y(t) = a\,t + b$ per qualche a e b reali. Pertanto, $y'(t) = a$ e quindi $y''(t) = 0$. Ne segue che i polinomi di grado 1 sono soluzioni di (1).

4B) Se $A = -9$ e $B = 18$, la funzione $y(t) = 7\,\mathrm{e}^{6\,t}$ è soluzione di (1).

Vero: Se $A = -9$ e $B = 18$, il polinomio caratteristico associato all'equazione (1) è

$$P(L) = L^2 - 9\,L + 18\,,$$

che ha come soluzioni $L_1 = 6$ e $L_2 = 3$. Pertanto, tutte le soluzioni di (1) sono date da

$$y(t) = C\,\mathrm{e}^{6\,t} + D\,\mathrm{e}^{3\,t}\,,$$

con C e D numeri reali. Scegliendo $C = 7$ e $D = 0$, si vede che $y(t) = 7\,\mathrm{e}^{6\,t}$ è soluzione di (1).

4C) Se $A = -14$ e $B = 49$, la funzione $y(t) = 8\,t\,\mathrm{e}^{7\,t}$ è soluzione di (1).

Vero: Se $A = -14$ e $B = 49$, il polinomio caratteristico associato all'equazione (1) è

$$P(L) = L^2 - 14\,L + 49\,,$$

che ha come soluzioni $L_1 = L_2 = 7$. Pertanto, tutte le soluzioni di (1) sono date da

$$y(t) = (C + D\,t)\,\mathrm{e}^{7\,t}\,,$$

con C e D numeri reali. Scegliendo $C = 0$ e $D = 8$, si vede che $y(t) = 8\,t\,\mathrm{e}^{7\,t}$ è soluzione di (1).

4D) Se $A = 0$ e $B = 9$, tutte le soluzioni non nulle di (1) sono periodiche.

Vero: Se $A = 0$ e $B = 9$, il polinomio caratteristico associato all'equazione (1) è

$$P(L) = L^2 + 9\,,$$

che ha come soluzioni $L_{1,2} = \pm\,3\,i$. Pertanto, tutte le soluzioni di (1) sono date da

$$y(t) = C\,\cos(3\,t) + D\,\sin(3\,t)\,,$$

con C e D numeri reali, e sono quindi periodiche (di periodo $T = \frac{2\pi}{3}$).

---

5) Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(t) = 2\,(y(t) + 8)\,\cos(2\,t)\,. \tag{1}$$

a) Quante soluzioni di (1) verificano la condizione $y(0) = 9$? E quante le condizioni $y(0) = 0$ e $y'(0) = 16$?
b) Determinare la soluzione di (1) tale che $y(5) = -8$.
c) Calcolare $T_2(y(t); 0)$, dove $y(t)$ è la soluzione di (1) tale che $y(0) = 0$.
d) Determinare la soluzione di (1) tale che $y(0) = 0$.

Soluzione:
Osserviamo preliminarmente che l'equazione (1) è a variabili separabili, essendo della forma

$$y'(t) = f(t)\,g(y(t))\,,$$

con

$$f(t) = 2\,\cos(2\,t)\,, \qquad g(s) = s + 8\,. \tag{2}$$

a) Assegnando ad (1) la condizione iniziale $y(0) = 9$ si ottiene un problema di Cauchy per un'equazione differenziale del primo ordine, che ha un'unica soluzione. Analogamente, esiste un'unica soluzione di (1) tale che $y(0) = 0$; per tale soluzione si ha, sostituendo $t = 0$,

$$y'(0) = 2\,(y(0) + 8)\,\cos(2 \cdot 0) = 2 \cdot 8 \cdot 1 = 16\,,$$

cosicché la condizione $y'(0) = 16$ è automaticamente soddisfatta dall'unica soluzione di (1) tale che $y(0) = 0$. Ne segue pertanto che esiste un'unica soluzione di (1) tale che $y(0) = 0$ e $y'(0) = 16$.

b) Dato che la funzione $g(s)$ in (2) è tale che $g(-8) = -8+8 = 0$, la funzione $y(t) = -8$ è una soluzione costante di (1). Dato che soddisfa la condizione $y(5) = -8$, è la soluzione di (1) tale che $y(5) = -8$ (essendo tale soluzione unica).

c) Se $y(0) = 0$ abbiamo, sostituendo nell'equazione $t = 0$,

$$y'(0) = 2\,(y(0) + 8)\,\cos(2 \cdot 0) = 2 \cdot 8 \cdot 1 = 16\,.$$

Derivando l'equazione, si ha poi

$$y''(t) = 2\,y'(t)\,\cos(2\,t) - 4\,(y(t) + 8)\,\sin(2\,t)\,.$$

Calcolando questa espressione in $t = 0$, si ha

$$y''(0) = 2\,y'(0)\,\cos(2 \cdot 0) - 4\,(y(0) + 8)\,\sin(2 \cdot 0) = 2 \cdot 16 \cdot 1 - 4 \cdot 8 \cdot 0 = 32\,.$$

Si ha quindi

$$T_2(y(t); 0) = y(0) + y'(0)\,t + \frac{y''(0)}{2}\,t^2 = 0 + 16\,t + \frac{32}{2}\,t^2 = 16\,t + 16\,t^2\,.$$

d) Dato che l'equazione è a variabili separabili, e che $y(t) \equiv y(0) = 0$ non è soluzione dell'equazione (come si verifica facilmente), dividiamo per $y(t) + 8$, ottenendo l'equazione equivalente

$$\frac{y'(t)}{y(t) + 8} = 2\,\cos(2\,t)\,.$$

Integrando tra 0 e s, si ha

$$\int_0^s \frac{y'(t)}{y(t) + 8}\,dt = \int_0^s 2\,\cos(2\,t)\,dt = \sin(2\,t)\Big|_0^s = \sin(2\,s)\,.$$

Per quanto riguarda il primo integrale, con la sostituzione $z = y(t)$, da cui $y'(t)\,dt = dz$, si ha (ricordando che $y(0) = 0$)

$$\int_0^s \frac{y'(t)}{y(t) + 8}\,dt = \int_{y(0)}^{y(s)} \frac{dz}{z + 8} = \log(|z + 8|)\Big|_0^{y(s)} = \log(|y(s) + 8|) - \log(8) = \log\left(\frac{y(s) + 8}{8}\right),$$

dove nell'ultimo passaggio si è usato il fatto che $y(s)+8 \geq 0$ in un intorno di $t=0$ dato che $y(0)+8 = 0+8 = 8 > 0$. Si ha quindi che la soluzione di (1) tale che $y(0)=0$ verifica l'identità

$$\log\left(\frac{y(s)+8}{8}\right) = \sin(2\,s)\,,$$

da cui segue che

$$\frac{y(s)+8}{8} = \mathrm{e}^{2\,s}\,,$$

e quindi che

$$y(s) = 8\,\mathrm{e}^{\sin(2\,s)} - 8\,.$$

Si noti che l'equazione (1) può essere riscritta nella forma

$$y'(t) = 2\,\cos(2\,t)\,y(t) + 16\,\cos(2\,t)\,,$$

e quindi è anche della forma

$$y'(t) = a(t)\,y(t) + b(t)\,,$$

con

$$a(t) = 2\,\cos(2\,t)\,, \qquad b(t) = 16\,\cos(2\,t)\,.$$

Per tale equazione, assegnando la condizione $y(0)=0$, si ha la formula risolutiva

$$y(t) = \mathrm{e}^{A(t)}\left(\int_0^t b(s)\,\mathrm{e}^{-A(s)}\,ds\right), \tag{3}$$

dove

$$A(t) = \int_0^t a(s)\,ds = \int_0^t 2\,\cos(2\,s)\,ds = \sin(2\,s)\Big|_0^t = \sin(2\,t)\,.$$

Pertanto, dalla (3) si ha che

$$y(t) = \mathrm{e}^{\sin(2\,t)}\left(16\int_0^t \cos(2\,s)\,\mathrm{e}^{-\sin(2\,s)}\,ds\right).$$

Per calcolare l'ulitmo integrale, poniamo $z = \sin(2\,s)$, da cui $dz = 2\,\cos(2\,s)\,ds$. Si ha quindi

$$16\int_0^t \cos(2\,s)\,\mathrm{e}^{-\sin(2\,s)}\,ds = 8\int_0^{\sin(2\,t)} \mathrm{e}^{-z}\,dz = 8\,(1-\mathrm{e}^{-\sin(2\,t)})\,,$$

cosicché la soluzione di (1) tale che $y(0)=0$ è data da

$$y(t) = 8\,\mathrm{e}^{\sin(2\,t)}\,(1-\mathrm{e}^{-\sin(2\,t)}) = 8\,\mathrm{e}^{\sin(2\,t)} - 8\,,$$

come trovato in precedenza.

6) Si consideri il problema di Cauchy

$$(1) \qquad \begin{cases} y''(t) - 18\,y'(t) + 81\,y(t) = 243\,, \\ y(0) = 4\,, \quad y'(0) = 0\,. \end{cases}$$

a) Quante soluzioni ha (1)? E quante tali che $y''(0) = 242$?
b) Scrivere tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata all'equazione di (1).
c) Determinare una soluzione particolare dell'equazione di (1), e scrivere tutte le soluzioni dell'equazione di (1).
d) Determinare la soluzione di (1).

Soluzione:
a) Il problema di Cauchy (1) ha un'unica soluzione. Se $y(t)$ è tale soluzione, si ha, sostituendo $t = 0$ nell'equazione, che

$$y''(0) = y''(0) - 18 \cdot 0 + 81 \cdot 0 = y''(0) - 18\,y'(0) + 81\,y(0) = 243\,.$$

Pertanto, per tale soluzione si ha $y''(0) = 243 \neq 242$, e quindi non esistono soluzioni di (1) tali che $y''(0) = 242$.

b) L'equazione omogenea associata all'equazione di (1) è

$$y_0''(t) - 18\,y_0'(t) + 81\,y_0(t) = 0\,,$$

il cui polinomio caratteristico è

$$P(L) = L^2 - 18\,L + 81\,,$$

che ha come soluzioni $L_{1,2} = 9$. Ne segue pertanto che tutte le soluzioni di (2) sono date da

$$y_0(t) = (C + D\,t)\,\mathrm{e}^{9\,t}\,,$$

con C e D numeri reali.

c) Dato che le funzioni costanti non sono soluzioni dell'equazione omogenea, cerchiamo una soluzione particolare dell'equazione di (1) nella forma $\overline{y}(t) = Q$, con Q numero reale. Sostituendo, e dato che $\overline{y}'(t) = \overline{y}''(t) = 0$, si ha che deve essere

$$\overline{y}''(t) - 18\,\overline{y}'(t) + 81\,\overline{y}(t) = 81\,Q = 243\,,$$

da cui segue $Q = 3$. Ne segue che tutte le soluzioni dell'equazione di (1) sono date da

$$(2) \qquad y(t) = y_0(t) + \overline{y}(t) = (C + D\,t)\,\mathrm{e}^{9\,t} + 3\,.$$

d) Se $y(t)$ è data da (2), si ha, derivando,

$$y'(t) = D\,\mathrm{e}^{9\,t} + 9\,(C + D\,t)\,\mathrm{e}^{9\,t}\,.$$

Pertanto,

$$y(0) = C + 3\,, \qquad y'(0) = D + 9\,C\,.$$

Imponendo le condizioni $y(0) = 4$ e $y'(0) = 0$, si ha

$$C = 1\,, \qquad D = -9\,C = -9\,,$$

e quindi l'unica soluzione di (1) è data da

$$y(t) = (1 - 9\,t)\,\mathrm{e}^{9\,t} + 3\,.$$