Calcolo integrale — Scheda di esercizi n. 9
19 Maggio 2023 — Compito n. 00042

Istruzioni: le prime due caselle (**V** / **F**) permettono di selezionare la risposta vero/falso. La casella "**C**" serve a correggere eventuali errori invertendo la risposta data.
Per selezionare una casella, annerirla completamente: ■ (non ☒ o ☑).

Nome: ____________________

Cognome: ____________________

Matricola: | | | | | | | |

	1A	1B	1C	1D	2A	2B	2C	2D	3A	3B	3C	3D	4A	4B	4C	4D
V	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
F	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
C	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

1) Si consideri l'equazione differenziale:

$$y''(t) + 3\,y'(t) + 4\,y(t) = 0\,.$$

1A) L'equazione ha infinite soluzioni.
1B) Esistono infinite soluzioni dell'equazione tali che $y(5) = 5$.
1C) Esistono infinite soluzioni dell'equazione tali che $y(8) = 2$ e $y'(8) = 4$.
1D) Esiste un'unica soluzione dell'equazione tale che

$$y(4) = 6\,,\ y'(4) = 8\,,\ y''(4) = 49\,.$$

2) Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(t) - 12\,y'(t) + 32\,y(t) = 160\,. \tag{1}$$

2A) Il polinomio caratteristico dell'equazione è $P(L) = L^2 + 12L + 32$.
2B) La funzione $y_0(t) = 4\,e^{4\,t}$ è soluzione dell'equazione omogenea associata a (1).
2C) La funzione $\overline{y}(t) = 6$ è una soluzione particolare di (1).
2D) Se $y(0) = 6$ e $y'(0) = 0$, la soluzione di (1) è costante.

3) Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(t) + A\,y(t) + B\,y(t) = 0\,, \quad A\,, B \in \mathbb{R}\,.$$

3A) Il polinomio caratteristico dell'equazione è $P(L) = L^2 + A\,L + B$.
3B) Se $A = 0$ e $B = -25$, la funzione $y(t) = 6\,e^{5\,t} - 9\,e^{-5\,t}$ è soluzione dell'equazione.
3C) Se $A = -4$ e $B = 0$, la funzione $y(t) = 3$ è soluzione dell'equazione.
3D) Se $A = -10$ e $B = 29$, la funzione $y(t) = 5\,e^{5\,t}\,\sin(2\,t)$ non è soluzione dell'equazione.

4) Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(t) - 7\,y'(t) = -21\,.$$

4A) Tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata sono date da $y_0(t) = C\,e^{7\,t}$.
4B) Esistono soluzioni costanti dell'equazione.
4C) La funzione $\overline{y}(t) = 3\,t$ non è soluzione dell'equazione.
4D) Se $y(0) = 3$ e $y'(0) = 3$, la soluzione dell'equazione è un'esponenziale.

Docente
☐ DelaTorre Pedraza
☐ Orsina

☐☐☐☐☐☐☐☐ **Cognome** **Nome** **Matricola** **Compito 00042**

5) Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(t) - 11\, y'(t) + 28\, y(t) = -3\, e^{4\, t}\,. \tag{1}$$

a) Scrivere il polinomio caratteristico dell'equazione in (1) e trovarne le radici.
b) Scrivere tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata a (1).
c) Trovare una soluzione particolare di (1).
d) Trovare l'unica soluzione di (1) tale che $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$.

☐☐☐☐☐☐☐☐ **Cognome** **Nome** **Matricola** **Compito 00042**

6) Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(t) - 14\,y'(t) + 49\,y(t) = 2\,\mathrm{e}^{7\,t}\,. \tag{1}$$

a) Si determini il polinomio caratteristico di (1) e si trovino tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata a (1).
b) Si trovi una soluzione particolare di (1).
c) Si trovi l'unica soluzione di (1) tale che $y(0) = 0$ e $y'(0) = 4$.
d) Si trovi l'unica soluzione di (1) tale che $y(0) = 4$ e $y'(0) = 0$.

Soluzioni del compito 00042

1) Si consideri l'equazione differenziale:

$$y''(t) + 3\,y'(t) + 4\,y(t) = 0\,.$$

1A) L'equazione ha infinite soluzioni.

Vero: Trattandosi di un'equazione differenziale ordinaria del secondo ordine, ha infinite soluzioni, dipendenti da due parametri reali.

1B) Esistono infinite soluzioni dell'equazione tali che $y(5) = 5$.

Vero: L'equazione ha infinite soluzioni, dipendenti da due parametri reali. Assegnando una sola condizione, si "fissa" uno solo dei due parametri, e quindi l'equazione ha infinite soluzioni tali che $y(5) = 5$.

1C) Esistono infinite soluzioni dell'equazione tali che $y(8) = 2$ e $y'(8) = 4$.

Falso: Assegnando due condizioni, una sulla funzione e una sulla derivata, si ottiene un problema di Cauchy, che ha un'unica soluzione.

1D) Esiste un'unica soluzione dell'equazione tale che

$$y(4) = 6\,,\ y'(4) = 8\,,\ y''(4) = 49\,.$$

Falso: Se $y(4) = 6$ e $y'(4) = 8$, dall'equazione segue che deve essere

$$0 = y''(4) + 3\,y'(4) + 4\,y(4) = y''(4) + 3 \cdot 6 + 4 \cdot 8 = y''(4) + 50\,,$$

da cui segue che $y''(4) = -50$. Pertanto, l'unica soluzione dell'equazione che soddisfa le condizioni $y(4) = 6$ e $y'(4) = 8$ è tale che $y''(4) = -50 \neq 50$; in altre parole, non esistono soluzioni dell'equazione che soddisfano le tre condizioni richieste.

---

2) Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(t) - 12\,y'(t) + 32\,y(t) = 160\,. \tag{1}$$

2A) Il polinomio caratteristico dell'equazione è $P(L) = L^2 + 12L + 32$.

Falso: Sostituendo y'' con L^2, y' con L e y con 1, si trova che

$$P(L) = L^2 - 12L + 32 \neq L^2 + 12L + 32\,.$$

2B) La funzione $y_0(t) = 4\,\mathrm{e}^{4\,t}$ è soluzione dell'equazione omogenea associata a (1).

Vero: Il polinomio caratteristico dell'equazione è $P(L) = L^2 - 12L + 32$, che si annulla per $L_1 = 4$ e $L_2 = 8$. Pertanto, tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata sono date da

$$y_0(t) = C\,\mathrm{e}^{4\,t} + D\,\mathrm{e}^{8\,t}\,,$$

con C e D numeri reali. Scegliendo $C = 4$ e $D = 0$, si ha che $y_0(t) = 4\,\mathrm{e}^{4\,t}$ è soluzione dell'equazione omogenea associata a (1).
Alternativamente, se $y_1(t) = \mathrm{e}^{4\,t}$ si ha, derivando,

$$y_1'(t) = 4\,\mathrm{e}^{4\,t}\,, \qquad y_1''(t) = 16\,\mathrm{e}^{4\,t}\,,$$

e, sostituendo nell'equazione,

$$y_1''(t) - 12\,y_1'(t) + 32\,y_1(t) = [16 - 12 \cdot 4 + 32]\,\mathrm{e}^{4\,t} = 0 \cdot \mathrm{e}^{4\,t} = 0\,,$$

e quindi $y_1(t)$ è soluzione dell'equazione omogenea associata a (1). Dato che tale equazione è lineare, anche $y_0(t) = 4\,y_1(t)$ è soluzione dell'omogenea.

2C) La funzione $\overline{y}(t) = 6$ è una soluzione particolare di (1).

Falso: Sostituendo nell'equazione si ha, essendo nulle sia la derivata prima che la derivata seconda di $\overline{y}(t)$,

$$y'' - 12\,y' + 32\,y = 32 \cdot 6 = 192 \neq 160\,,$$

e quindi $\overline{y}(t) = 6$ non è una soluzione particolare di (1). Cercando una soluzione particolare della forma $y(t) \equiv Q$ si vede facilmente che deve essere $Q = 5$.

2D) Se $y(0) = 6$ e $y'(0) = 0$, la soluzione di (1) è costante.

Falso: Se (1) avesse una soluzione costante tale che $y(0) = 6$, chiaramente tale soluzione non può che essere $y(t) \equiv y(0) = 6$ (si noti che la condizione $y'(0) = 0$ è verificata). Sostituendo però nell'equazione $y(t) = 6$ si trova

$$y'' - 12\,y' + 32\,y = 32 \cdot 6 = 192 \neq 160\,,$$

e quindi $y(t) \equiv 6$ non è soluzione dell'equazione; questo vuol dire che l'unica soluzione del problema di Cauchy per (1) con le condizioni iniziali $y(0) = 6$ e $y'(0) = 0$ non è costante.

---

3) Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(t) + A\,y(t) + B\,y(t) = 0\,, \quad A\,,B \in \mathbb{R}\,.$$

3A) Il polinomio caratteristico dell'equazione è $P(L) = L^2 + A\,L + B$.

Vero: Sostituendo y'' con L^2, y' con L e y con 1, si trova che

$$P(L) = L^2 + A\,L + B\,.$$

3B) Se $A = 0$ e $B = -25$, la funzione $y(t) = 6\,\mathrm{e}^{5\,t} - 9\,\mathrm{e}^{-5\,t}$ è soluzione dell'equazione.

Vero: Se $A = 0$ e $B = -25$, il polinomio caratteristico dell'equazione è $P(L) = L^2 - 25$ che si annulla per $L = \pm 5$. Pertanto, tutte le soluzioni dell'equazione sono date da

$$y(t) = C\,\mathrm{e}^{5\,t} + D\,\mathrm{e}^{-5\,t}\,.$$

Scegliendo $C = 6$ e $D = -9$, si ha che $y(t) = 6\,\mathrm{e}^{5\,t} - 9\,\mathrm{e}^{-5\,t}$ è soluzione dell'equazione.

3C) Se $A = -4$ e $B = 0$, la funzione $y(t) = 3$ è soluzione dell'equazione.

Vero: Se $A = -4$ e $B = 0$, il polinomio caratteristico dell'equazione è $P(L) = L^2 - 4\,L$ che si annulla per $L = 0$ e per $L = 4$. Pertanto, tutte le soluzioni dell'equazione sono date da

$$y(t) = C\,\mathrm{e}^{0\,t} + D\,\mathrm{e}^{4\,t} = C + D\,\mathrm{e}^{4\,t}\,.$$

Scegliendo $C = 3$ e $D = 0$, si ha che $y(t) = 3$ è soluzione dell'equazione.

3D) Se $A = -10$ e $B = 29$, la funzione $y(t) = 5\,\mathrm{e}^{5\,t}\,\sin(2\,t)$ non è soluzione dell'equazione.

Falso: Se $A = -10$ e $B = 29$, il polinomio caratteristico dell'equazione è $P(L) = L^2 - 10\,L + 29$, che si annulla per $L = 5 \pm 2\,i$. Pertanto, tutte le soluzioni dell'equazione sono date da

$$y(t) = \mathrm{e}^{5\,t}[C\,\cos(2\,t) + D\,\sin(2\,t)]\,.$$

Scegliendo $C = 0$ e $D = 5$, si ha che $y(t) = 5\,\mathrm{e}^{5\,t}\,\sin(2\,t)$ è soluzione dell'equazione.

---

4) Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(t) - 7\,y'(t) = -21\,.$$

4A) Tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata sono date da $y_0(t) = C\,\mathrm{e}^{7\,t}$.

Falso: Il polinomio caratteristico dell'equazione è $P(L) = L^2 - 7\,L$, che si annulla per $L = 0$ e $L = 7$. Pertanto, tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata sono date da

$$y_0(t) = C\,\mathrm{e}^{0\cdot t} + D\,\mathrm{e}^{7\,t} = C + D\,\mathrm{e}^{7\,t}\,,$$

con C e D numeri reali. Pertanto, non tutte le soluzioni dell'omogenea associata sono date da $y_0(t) = C\,\mathrm{e}^{7\,t}$: mancano le soluzioni costanti.

4B) Esistono soluzioni costanti dell'equazione.

Falso: Se $y(t) \equiv Q$ è una costante, sostituendo nell'equazione si ha

$$y''(t) - 7\,y'(t) = 0 - 7 \cdot 0 = 0 \neq -21\,,$$

e quindi l'equazione non ha soluzioni costanti. Alternativamente, sappiamo dalla domanda **4A** che le costanti sono soluzioni dell'equazione omogenea, e quindi non possono essere soluzioni dell'equazione "completa".

4C) La funzione $\overline{y}(t) = 3\,t$ non è soluzione dell'equazione.

Falso: Se $\overline{y}(t) = 3\,t$, si ha $\overline{y}'(t) = 3$ e $\overline{y}''(t) = 0$. Sostituendo nell'equazione si ha

$$\overline{y}''(t) - 7\,\overline{y}'(t) = -7 \cdot 3 = -21\,,$$

e quindi $\overline{y}(t) = 3\,t$ è soluzione dell'equazione.

4D) Se $y(0) = 3$ e $y'(0) = 3$, la soluzione dell'equazione è un'esponenziale.

Falso: Sappiamo già, dagli esercizi **4A** e **4C**, che tutte le soluzioni dell'equazione sono date da

$$y(t) = y_0(t) + \overline{y}(t) = C + D\,\mathrm{e}^{7\,t} + 3\,t\,,$$

con C e D numeri reali. Pertanto,

$$y'(t) = 7\,D\,\mathrm{e}^{5\,t} + 3\,.$$

Pertanto, assegnando le condizioni iniziali, si ha

$$3 = C + D\,, \qquad 3 = 7\,D + 3\,.$$

Dalla seconda si ricava $D = 0$, e sostituendo nella prima si ricava $C = 3$. Ne segue che l'unica soluzione dell'equazione è

$$y(t) = 3 + 3\,t\,,$$

che è un polinomio di primo grado (e quindi non è un'esponenziale).

---

5) Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(t) - 11\,y'(t) + 28\,y(t) = -3\,e^{4\,t}\,. \tag{1}$$

a) Scrivere il polinomio caratteristico dell'equazione in (1) e trovarne le radici.
b) Scrivere tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata a (1).
c) Trovare una soluzione particolare di (1).
d) Trovare l'unica soluzione di (1) tale che $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$.

Soluzione:
a) Sostituendo in (1) L^2 a y'', L a y' e 1 a y, si trova

$$P(L) = L^2 - 11\,L + 28\,,$$

che si annulla per $L_1 = 4$ e per $L_2 = 7$.

b) Usando le radici del polinomio caratteristico calcolate al punto precedente, abbiamo che tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata a (1) sono date da

$$y_0(t) = C\,e^{4\,t} + D\,e^{7\,t}\,,$$

con C e D numeri reali.

c) Dato che $g(t) = e^{4\,t}$ è una soluzione dell'equazione omogenea, cerchiamo una soluzione particolare della forma

$$\overline{y}(t) = Q\,t\,e^{4\,t}\,.$$

Si ha

$$\overline{y}'(t) = Q\,(1 + 4\,t)\,e^{4\,t}\,, \qquad \overline{y}''(t) = Q\,(8 + 16\,t)\,e^{4\,t}\,.$$

Sostituendo in (1) si ha

$$\overline{y}'' - 11\,\overline{y} + 28\,\overline{y} = Q\,e^{4\,t}\,[8 + 16\,t - 11\,(1 + 4\,t) + 28\,t] = -3\,Q\,e^{4\,t}\,,$$

e quindi $\overline{y}(t)$ è soluzione di (1) se Q è tale che

$$-3\,Q\,e^{4\,t} = -3\,e^{4\,t}\,,$$

da cui segue $Q = 1$ e quindi

$$\overline{y}(t) = t\,e^{4\,t}\,.$$

d) Da **b)** e **c)** abbiamo che tutte le soluzioni di (1) sono date da

$$y(t) = y_0(t) + \overline{y}(t) = C\,e^{4\,t} + D\,e^{7\,t} + t\,e^{4\,t}\,,$$

con C e D numeri reali. Dato che

$$y'(t) = 4\,C\,e^{4\,t} + 7\,D\,e^{7\,t} + e^{4\,t} + 4\,t\,e^{4\,t}\,,$$

si ha $y(0) = C + D$ e $y'(0) = 4\,C + 7\,D + 1$. Imponendo le condizioni iniziali, si ha che deve essere $C + D = 0$ e $4\,C + 7\,D + 1 = 1$, da cui si ricava facilmente $C = D = 0$. Ne segue che l'unica soluzione di (1) che soddisfa le condizioni $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$ è

$$y(t) = t\,e^{4\,t}\,.$$

6) Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(t) - 14\,y'(t) + 49\,y(t) = 2\,\mathrm{e}^{7\,t}\,. \tag{1}$$

a) Si determini il polinomio caratteristico di (1) e si trovino tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata a (1).
b) Si trovi una soluzione particolare di (1).
c) Si trovi l'unica soluzione di (1) tale che $y(0) = 0$ e $y'(0) = 4$.
d) Si trovi l'unica soluzione di (1) tale che $y(0) = 4$ e $y'(0) = 0$.

Soluzione:
a) Il polinomio caratteristico è $P(L) = L^2 - 14\,L + 49$, che si annulla per $L_1 = L_2 = 7$. Conseguentemente, tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata ad (1) sono date da

$$y_0(t) = (C + D\,t)\,\mathrm{e}^{7\,t}\,,$$

con C e D numeri reali.

b) Dato che sia $\mathrm{e}^{7\,t}$ che $t\,\mathrm{e}^{7\,t}$ sono soluzioni dell'equazione omogenea, cerchiamo una soluzione particolare di (1) della forma

$$\overline{y}(t) = Q\,t^2\,\mathrm{e}^{7\,t}\,.$$

Derivando, si ha

$$\overline{y}'(t) = Q\,(2t + 7\,t^2)\,\mathrm{e}^{7\,t}\,, \qquad \overline{y}''(t) = Q\,(2 + 28\,t + 49\,t^2)\,\mathrm{e}^{7\,t}\,.$$

Sostituendo nell'equazione si ha

$$\overline{y}'' - 14\,\overline{y}' + 49\,\overline{y}(t) = Q\,\mathrm{e}^{7\,t}\,[2 + 28\,t + 49\,t^2 - 14\,(2t + 7\,t^2) + 49\,t^2] = 2\,Q\,\mathrm{e}^{7\,t}\,,$$

da cui segue che $\overline{y}(t)$ è soluzione di (1) se $Q = 1$. Si ha dunque che tutte le soluzioni di (1) sono date da

$$y(t) = y_0(t) + \overline{y}(t) = (C + D\,t + t^2)\,\mathrm{e}^{7\,t}\,,$$

da cui segue, derivando, che

$$y'(t) = (7\,C + D + (7\,D + 2)\,t + 7\,t^2)\,\mathrm{e}^{7\,t}\,.$$

Pertanto

$$y(0) = C\,, \qquad y'(0) = 7\,C + D\,. \tag{2}$$

c) Da (2) e dalle condizioni date segue che deve essere $C = 0$ e $7\,C + D = 4$, da cui $C = 0$ e $D = 4$. L'unica soluzione di (1) è quindi data da

$$y(t) = (4\,t + t^2)\,\mathrm{e}^{7\,t}\,.$$

d) Da (2) e dalle condizioni date segue che deve essere $C = 4$ e $7\,C + D = 0$, da cui $D = -28$. L'unica soluzione di (1) è quindi data da

$$y(t) = (4 - 28\,t + t^2)\,\mathrm{e}^{7\,t}\,.$$