

## Soluzioni del compito 00053

1) Sia  $a_k > 0$  una successione tale che

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k \quad \text{è convergente.}$$

---

Osserviamo che dato che la serie è convergente, si ha

$$(1) \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} a_k = 0.$$

---

**1A)** La successione  $a_k^8 + a_k^3$  tende a zero.

**Vero:** Per la (1), e per i teoremi sui limiti, si ha

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} a_k^8 + a_k^3 = 0 + 0 = 0.$$

---

**1B)** La serie di termine generico  $\frac{e^{a_k}}{k^6}$  è convergente.

**Vero:** Dato che  $e^{a_k}$  tende a 1 (per la (1)), si ha

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\frac{e^{a_k}}{k^6}}{\frac{1}{k^6}} = 1.$$

Per il criterio del confronto asintotico, la serie data ha lo stesso comportamento della serie di termine generico  $\frac{1}{k^6}$ , che converge essendo una serie armonica generalizzata di esponente  $\alpha = 6 > 1$ .

---

**1C)** La serie di termine generico  $\frac{k a_k}{a_k + 5 k^2}$  è divergente.

**Falso:** Si ha, dato che  $a_k > 0$  e che  $k \geq 1$ ,

$$0 \leq \frac{k a_k}{a_k + 5 k^2} \leq \frac{k a_k}{5 k^2} = \frac{a_k}{5 k} \leq \frac{a_k}{5}.$$

Dato che la serie di termine generico  $\frac{a_k}{5}$  è convergente per ipotesi, la serie data è convergente per il criterio del confronto.

---

**1D)** La serie di termine generico  $\frac{e^{8 a_k^2} - 1}{a_k}$  è divergente.

**Falso:** Per la (1), e per uno dei limiti notevoli, si ha

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\frac{e^{8 a_k^2} - 1}{a_k}}{a_k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{e^{8 a_k^2} - 1}{8 a_k^2} 8 = 1 \cdot 8 = 8 \in (0, +\infty).$$

Per il criterio del confronto asintotico, la serie data converge, dato che ha lo stesso carattere della serie di termine generico  $a_k$ .

---

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false

---

2A)

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \cos\left(\frac{1}{k^7+9}\right) \sin\left(\frac{1}{\sqrt[8]{k}}\right) \text{ diverge.}$$

**Vero:** Dato che

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \cos\left(\frac{1}{k^7+9}\right) = 1 \in (0, +\infty),$$

la serie data si comporta (per il criterio del confronto asintotico) come la serie di termine generico

$$b_k = \sin\left(\frac{1}{\sqrt[8]{k}}\right),$$

la quale (per il limite notevole di  $\frac{\sin(x)}{x}$  e nuovamente per il criterio del confronto asintotico) si comporta come la serie di termine generico

$$\frac{1}{\sqrt[8]{k}} = \frac{1}{k^{\frac{1}{8}}},$$

che diverge essendo una serie armonica generalizzata di esponente  $\alpha = \frac{1}{8} < 1$ .

---

2B)

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \tan\left(\frac{3^k k^2}{k!}\right) \text{ diverge.}$$

**Falso:** Dato che

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{3^k k^2}{k!} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{6^k}{k!} \cdot \frac{k^2}{2^k} = 0 \cdot 0 = 0,$$

e dato che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1,$$

la serie data si comporta (per il criterio del confronto asintotico) come la serie di termine generico

$$b_k = \frac{3^k k^2}{k!}.$$

Applichiamo il criterio del rapporto a  $b_k$ :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{b_{k+1}}{b_k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\frac{3^{k+1} (k+1)^2}{(k+1)!}}{\frac{3^k k^2}{k!}} = \lim_{k \rightarrow +\infty} 3 \left(\frac{k+1}{k}\right)^2 \frac{1}{k+1} = 3 \cdot 1^2 \cdot 0 = 0 < 1.$$

Pertanto la serie di termine generico  $b_k$  converge, e quindi converge anche la serie data.

---

2C)

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \cos\left(\frac{1}{k^{10}}\right) \text{ è indeterminata.}$$

**Vero:** Dato che il termine generico non tende a zero, e che la serie è a segni alterni, la serie è indeterminata.

---

2D)

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \log\left(1 + \frac{1}{\sqrt[10]{k}}\right) \text{ converge assolutamente.}$$

**Falso:** La serie dei valori assoluti è la serie di termine generico

$$b_k = \log \left( 1 + \frac{1}{\sqrt[10]{k}} \right).$$

Dato che  $\log(1+x) \approx x$ , si ha

$$b_k \approx \frac{1}{\sqrt[10]{k}} = \frac{1}{k^{\frac{1}{10}}},$$

e quindi la serie di termine generico  $b_k$  è divergente avendo lo stesso comportamento di una serie armonica generalizzata di esponente  $\alpha = \frac{1}{10} < 1$ .

---

**3)** Sia  $f(x) = x^9 \sin(6x)$ .

---

Ricordando che

$$\sin(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} t^{2k+1}, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

si ha, per il principio di sostituzione,

$$(1) \quad f(x) = x^9 \sin(6x) = x^9 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} (6x)^{2k+1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k 6^{2k+1}}{(2k+1)!} x^{2k+10}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

---

**3A)** Il raggio di convergenza della serie di Taylor di  $f(x)$  è finito.

**Falso:** Dalla (1) segue che il raggio di convergenza della serie è infinito.

---

**3B)** Il coefficiente del termine di grado 10 della serie di Taylor di  $f(x)$  è diverso da zero.

**Vero:** Dalla (1) si ha che

$$f(x) = 6x^{10} + \text{termini di grado maggiore di } 10,$$

e quindi il coefficiente del termine di grado 10 vale 6, che è diverso da zero.

---

**3C)** Se  $g(x) = \frac{f(x)}{x^8}$ , si ha  $g''(0) = 12$ .

**Vero:** Dalla (1) segue che

$$g(x) = \frac{f(x)}{x^8} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k 6^{2k+1}}{(2k+1)!} x^{2k+2} = 6x^2 + \text{termini di grado superiore a } 2.$$

Dall'ultima espressione, si vede che  $g''(0) = 12$ . Alternativamente, dalla formula della serie di Taylor di  $g(x)$ , si ha  $g''(0) = 2! a_2 = 12$  dato che  $a_2 = 6$ .

---

**3D)** Si ha  $f^{(12)}(0) = -\frac{12!}{3!}$ .

**Falso:** Dalla (1) si ha che

$$f(x) = 6x^{10} - \frac{6^3}{3!} x^{12} + \text{termini di grado superiore a } 12.$$

Dato che il coefficiente del termine di grado 12 nel polinomio di Taylor di  $f(x)$  è dato da

$$\frac{f^{(12)}(0)}{12!},$$

si ha

$$f^{(12)}(0) = -\frac{6^3 12!}{3!} \neq -\frac{12!}{3!}.$$

---

4) Si consideri la serie di potenze

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k (8x - 5)^k.$$

---

Si ha

$$(1) \quad \sum_{k=1}^{+\infty} a_k (8x - 5)^k = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k 8^k \left(x - \frac{5}{8}\right)^k.$$

---

**4A)** Il centro della serie è  $x_0 = 5$ .

**Falso:** Dalla (1), segue che il centro della serie è  $x_0 = \frac{5}{8} \neq 5$ .

---

**4B)** Se  $a_k = 9$  per ogni  $k$ , il raggio di convergenza delle serie è  $R = \frac{1}{8}$ .

**Vero:** Se  $a_k = 9$  per ogni  $k$ , dalla (1) segue che i coefficienti della serie di potenze sono

$$b_k = 9 \cdot 8^k.$$

Si ha

$$L = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{b_k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{9 \cdot 8^k} = 8,$$

da cui segue che il raggio di convergenza della serie è  $R = \frac{1}{L} = \frac{1}{8}$ .

---

**4C)** Se  $a_k = \frac{1}{11^k}$ , il raggio di convergenza della serie è  $R = \frac{11}{8}$ .

**Vero:** Se  $a_k = \frac{1}{11^k}$ , dalla (1) segue che i coefficienti della serie di potenze sono

$$b_k = \frac{8^k}{11^k} = \left(\frac{8}{11}\right)^k.$$

Dato che

$$L = \lim_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{b_k} = \frac{8}{11},$$

il raggio di convergenza della serie è  $R = \frac{1}{L} = \frac{11}{8}$ .

---

**4D)** Se  $a_k = \frac{1}{\sqrt[9]{k}}$ , la serie converge per  $x = \frac{1}{2}$ .

**Vero:** Se  $a_k = \frac{1}{\sqrt[9]{k}}$  e  $x = \frac{1}{2}$  la serie diventa

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[9]{k}} \left(8 \cdot \frac{1}{2} - 5\right)^k = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{1}{\sqrt[9]{k}}.$$

che converge per il criterio di Leibnitz dato che la successione  $b_k = 1/\sqrt[9]{k}$  è positiva, decrescente e infinitesima.

---

5) a) Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} 6^k \sin\left(\frac{1}{7^k}\right).$$

b) Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{\sqrt[17]{k^6}} - \sin\left(\frac{1}{\sqrt[17]{k^6}}\right) \right).$$

c) Scrivere la serie di Taylor di  $f(x) = x^4 \sin(2x^2)$  e calcolare  $f^{(5)}(0)$ .

d) Data  $f(x) = x e^{5x^2}$ , calcolare  $f^{(3)}(0)$  e  $f^{(4)}(0)$ .

---

**Soluzione:**

a) Ricordando che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1, \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{7^k} = 0,$$

si ha

$$a_k = 6^k \sin\left(\frac{1}{7^k}\right) \approx \frac{6^k}{7^k} = \left(\frac{6}{7}\right)^k,$$

che è il termine generico di una serie geometrica di ragione  $q = \frac{6}{7}$ . Dato che  $q = \frac{6}{7} < 1$ , la serie data converge per il criterio del confronto asintotico.

b) Ricordando che

$$\sin(t) = t - \frac{t^3}{6} + o(t^3),$$

da cui segue che

$$t - \sin(t) = \frac{t^3}{6} + o(t^3),$$

si ha che

$$\frac{1}{\sqrt[17]{k^6}} - \sin\left(\frac{1}{\sqrt[17]{k^6}}\right) = \frac{1}{6} \frac{1}{(\sqrt[17]{k^6})^3} + o\left(\frac{1}{(\sqrt[17]{k^6})^3}\right).$$

Dato che

$$(\sqrt[17]{k^6})^3 = k^{\frac{18}{17}},$$

la serie di termine generico

$$\frac{1}{6} \frac{1}{(\sqrt[17]{k^6})^3}$$

è convergente (come serie armonica generalizzata di esponente  $\alpha = \frac{18}{17} > 1$ ). Ne segue pertanto che la serie data è convergente per il criterio del confronto asintotico.

c) Ricordando che

$$\sin(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} t^{2k+1}, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

si ha

$$\sin(2x^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k+1}}{(2k+1)!} x^{4k+2},$$

e quindi

$$f(x) = x^4 \sin(2x^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k+1}}{(2k+1)!} x^{4k+6} = 2x^6 + \text{termini di grado superiore a 6}.$$

Dato che nella serie non compaiono termini di grado 5, si ha  $f^{(5)}(0) = 0$ .

**d)** Ricordando che

$$e^t = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} = 1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2),$$

si ha

$$e^{5x^2} = 1 + 5x^2 + \frac{(5x^2)^2}{2} + o((x^2)^2) = 1 + 5x^2 + \frac{25}{2}x^4 + o(x^4),$$

e quindi

$$f(x) = x e^{5x^2} = x + 5x^3 + \frac{25}{2}x^5 + o(x^5).$$

Dall'ultima espressione segue facilmente che  $f^{(3)}(0) = 5 \cdot 3! = 30$  e che  $f^{(4)}(0) = 0$ .

6) Si consideri la serie

$$\sum_{k=3}^{+\infty} \frac{(10x-7)^k}{k(k-1)(k-2)}.$$

- a) Si scriva la serie come serie di potenze e se ne determinino il centro e i coefficienti.
- b) Si determini il raggio di convergenza della serie di potenze.
- c) Si determini l'insieme di convergenza della serie di potenze.
- d) Si calcoli  $f^{(3)}(x)$ .

---

**Soluzione:**

a) Si ha

$$\sum_{k=3}^{+\infty} \frac{(10x-7)^k}{k(k-1)(k-2)} = \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{10^k}{k(k-1)(k-2)} \left(x - \frac{7}{10}\right)^k,$$

che è una serie di potenze di centro  $x_0 = \frac{7}{10}$  e di coefficienti

$$a_k = \frac{10^k}{k(k-1)(k-2)}.$$

b) Dato che

$$a_k = \frac{10^k}{k(k-1)(k-2)},$$

si ha

$$L = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} 10 \frac{k-2}{k+1} = 10,$$

da cui segue che il raggio di convergenza della serie è  $R = \frac{1}{L} = \frac{1}{10}$ .

c) Dato che  $R = \frac{1}{10}$ , la serie converge se  $x$  è tale che  $|x - 7/10| < 1/10$ , e non converge se  $x$  è tale che  $|x - 7/10| > 1/10$ . Svolgendo la disuguaglianza, si ha che la serie converge se  $x$  appartiene a

$$I = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right).$$

Rimangono da studiare i due casi  $x = 3/5$  e  $x = 4/5$ , in corrispondenza dei quali si trovano le due serie

$$\sum_{k=3}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k(k-1)(k-2)} \quad \text{e} \quad \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{1}{k(k-1)(k-2)}.$$

Dato che entrambe le serie sono convergenti (per Leibnitz la prima, per confronto con la serie  $\frac{1}{k^3}$  la seconda), l'insieme di convergenza della serie è l'intervallo

$$J = \left[\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right].$$

d) Partendo dalla serie originale, e derivando, si trova

$$f'(x) = \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{10k}{k(k-1)(k-2)} (10x-7)^{k-1} = \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{10}{(k-1)(k-2)} (10x-7)^{k-1}.$$

Derivando ulteriormente, si trova

$$f''(x) = \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{10^2}{k-2} (10x-7)^{k-2},$$

e

$$f^{(3)}(x) = \sum_{k=3}^{+\infty} 10^3 (10x-7)^{k-3} = 10^3 \sum_{h=0}^{+\infty} (10x-7)^h.$$



Ricordando la formula per la somma di una serie geometrica si ha pertanto

$$f^{(3)}(x) = \frac{10^3}{1 - (10x - 7)} = \frac{10^3}{8 - 10x}.$$