Calcolo integrale — Scheda di esercizi n. 4
4 Aprile 2023 — Compito n. 00021

Istruzioni: le prime due caselle (**V** / **F**) permettono di selezionare la risposta vero/falso. La casella "**C**" serve a correggere eventuali errori invertendo la risposta data.
Per selezionare una casella, annerirla completamente: ■ (non ☒ o ☑).

Nome: ______________________

Cognome: ______________________

Matricola: | | | | | | | |

Punteggi: 1 punto per ogni risposta esatta, 0 punti per risposte sbagliate o lasciate in bianco.

	1A	1B	1C	1D	2A	2B	2C	2D	3A	3B	3C	3D	4A	4B	4C	4D
V	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
F	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
C	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

1) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

1A) La funzione $f(x) = 2x^2 - 6x + 1$ non è integrabile su $[3, 10]$.

1B) La funzione $f(x) = x\,|x|$ non è integrabile su $[5, 7]$.

1C) La funzione

$$f(x) = \begin{cases} 4x + 6 & \text{se } x < 0, \\ -4x - 6 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

non è integrabile su $[-5, 5]$.

1D) La funzione $f(x) = [x]$, dove $[x]$ è la parte intera di x, è integrabile su $[-4, 4]$.

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

2A) Se

$$f(x) = \begin{cases} 6 & \text{se } x \geq 0, \\ 9 & \text{se } x < 0, \end{cases} \qquad \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = -3\,.$$

2B) Se

$$f(x) = \begin{cases} 6 & \text{se } x \leq 1, \\ 12\,x - 6 & \text{se } x > 1, \end{cases} \qquad \int_{0}^{2} f(x)\,dx = 12\,.$$

2C) Se

$$f(x) = \begin{cases} 12\,x & \text{se } x \leq 1, \\ 24 - 12\,x & \text{se } x > 1, \end{cases} \qquad \int_{0}^{2} f(x)\,dx = 12\,.$$

2D) Se

$$f(x) = \begin{cases} 8\,x & \text{se } x \leq 1, \\ 32 - 16\,x & \text{se } x > 1, \end{cases} \qquad \int_{0}^{2} f(x)\,dx = 8\,.$$

3) Siano

$$f(x) = \begin{cases} 10 & \text{se } x \leq 0, \\ 3 & \text{se } x > 0. \end{cases} \qquad F(x) = \int_{0}^{x} f(t)\,dt\,.$$

3A) Si ha $F(0) = 10$.

3B) Si ha

$$F(2) = 20\,.$$

3C) Si ha

$$F(-4) = -40\,.$$

3D) Si ha $F(x) = -10\,x$ per ogni $x < 0$.

4) Sia

$$F(x) = \int_{0}^{x} \cos^2(t)\,dt\,.$$

4A) La funzione $F(x)$ è definita per ogni x in $\mathbb{R}$.

4B) Si ha $F(0) = 0$.

4C) La funzione $F(x)$ non è derivabile su tutto $\mathbb{R}$.

4D) La funzione $F(x)$ è decrescente su $\mathbb{R}$.

Docente: ______________________

☐☐☐☐☐☐☐☐ **Cognome** **Nome** **Matricola** **Compito 00021**

5) Calcolare i seguenti integrali:

$$\mathbf{a1})\ \int_0^{\pi} \sin(11\,x)\,dx\,, \qquad \mathbf{a2})\ \int_0^1 e^{4\,x}\,dx\,, \qquad \mathbf{b1})\ \int_0^1 \frac{4\,x\,dx}{1+2\,x^2}\,, \qquad \mathbf{b2})\ \int_0^1 \frac{dx}{1+36\,x^2}\,,$$

$$\mathbf{c1})\ \int_0^{\sqrt[3]{\pi}} x^2\,\cos(6\,x^3)\,dx\,, \qquad \mathbf{c2})\ \int_0^1 x^2\,e^{x^3}\,dx\,, \qquad \mathbf{d1})\ \int_0^1 \frac{dx}{4\,x+2}\,, \qquad \mathbf{d2})\ \int_0^1 \frac{dx}{(3-x)^2}\,.$$

6) Sia $f(x) = 7\,x^2 + \mathrm{e}^{9\,x}$.
a) Perché la funzione $f(x)$ è integrabile su $[0,1]$?
b) Fissato n in $\mathbb{N}$, calcolare le somme integrali per eccesso e per difetto di $f(x)$ su $[0,1]$.
c) Calcolare la differenza Δ_n tra le somme integrali per eccesso e le somme per difetto, e calcolare il limite di Δ_n per n tendente ad infinito.
d) Ricordando che

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}\,,$$

calcolare

$$\int_0^1 f(x)\,dx\,.$$

Soluzioni del compito 00021

1) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

1A) La funzione $f(x) = 2x^2 - 6x + 1$ non è integrabile su $[3, 10]$.

Falso: Trattandosi di una funzione continua (è un polinomio) definita su un intervallo chiuso e limitato, la funzione è integrabile (come tutte le funzioni continue su intervalli chiusi e limitati).

1B) La funzione $f(x) = x\,|x|$ non è integrabile su $[5, 7]$.

Falso: Trattandosi di una funzione continua (è il prodotto di funzioni continue) definita su un intervallo chiuso e limitato, la funzione è integrabile (come tutte le funzioni continue su intervalli chiusi e limitati).

1C) La funzione

$$f(x) = \begin{cases} 4x + 6 & \text{se } x < 0, \\ -4x - 6 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

non è integrabile su $[-5, 5]$.

Falso: La funzione è continua sia per $x < 0$ che per $x \geq 0$ (essendo un polinomio su ogni intervallo); essendo continua, è integrabile sia su $[-5, 0]$ che su $[0, 5]$, e quindi è integrabile sull'unione dei due intervalli.

1D) La funzione $f(x) = [x]$, dove $[x]$ è la parte intera di x, è integrabile su $[-4, 4]$.

Vero: La funzione "parte intera" è una funzione costante a tratti; sull'intervallo $[-4, 4]$ è discontinua in -3, -2, ..., 3, 4. Avendo un numero finito di punti di discontinuità, è integrabile su $[-4, 4]$.

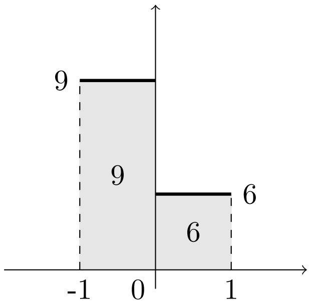
---

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

2A) Se

$$f(x) = \begin{cases} 6 & \text{se } x \geq 0, \\ 9 & \text{se } x < 0, \end{cases} \qquad \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = -3\,.$$

Falso: Si ha (ricordando le formule per l'area di un rettangolo)



Disegno non in scala

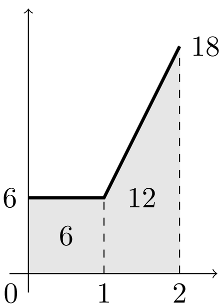
e quindi

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 9 + 6 = 15 \neq -3\,.$$

2B) Se

$$f(x) = \begin{cases} 6 & \text{se } x \leq 1, \\ 12\,x - 6 & \text{se } x > 1, \end{cases} \qquad \int_{0}^{2} f(x)\,dx = 12\,.$$

Falso: Si ha (ricordando le formule per l'area di un rettangolo e di un trapezio)



Disegno non in scala

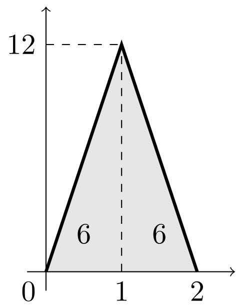
e quindi

$$\int_{0}^{2} f(x)\,dx = 6 + 12 = 18 \neq 12\,.$$

2C) Se

$$f(x) = \begin{cases} 12\,x & \text{se } x \leq 1, \\ 24 - 12\,x & \text{se } x > 1, \end{cases} \qquad \int_{0}^{2} f(x)\,dx = 12\,.$$

Vero: Si ha (ricordando le formule per l'area di un triangolo)



Disegno non in scala

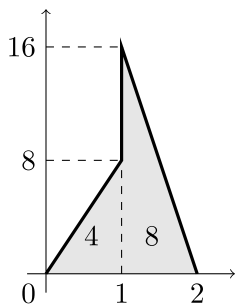
e quindi

$$\int_0^2 f(x)\,dx = 6 + 6 = 12\,.$$

2D) Se

$$f(x) = \begin{cases} 8\,x & \text{se } x \leq 1, \\ 32 - 16\,x & \text{se } x > 1, \end{cases} \qquad \int_0^2 f(x)\,dx = 8\,.$$

Falso: Si ha (ricordando le formule per l'area di un triangolo)



Disegno non in scala

e quindi

$$\int_0^2 f(x)\,dx = 4 + 8 = 12 \neq 8\,.$$

---

3) Siano

$$f(x) = \begin{cases} 10 & \text{se } x \le 0, \\ 3 & \text{se } x > 0. \end{cases} \qquad F(x) = \int_0^x f(t)\,dt\,.$$

3A) Si ha $F(0) = 10$.

Falso: Infatti

$$F(0) = \int_0^0 f(x)\,dx = 0 \neq 10\,,$$

dato che, per ogni $f(x)$ e per ogni a,

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0\,.$$

3B) Si ha

$$F(2) = 20\,.$$

Falso: Infatti

$$F(2) = \int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 3\,dx = 3 \cdot 2 = 6 \neq 20\,.$$

3C) Si ha

$$F(-4) = -40\,.$$

Vero: Infatti

$$F(-4) = \int_0^{-4} f(x)\,dx = -\int_{-4}^0 f(x)\,dx = -\int_{-4}^0 10\,dx = -10 \cdot 4 = -40\,.$$

3D) Si ha $F(x) = -10\,x$ per ogni $x < 0$.

Falso: Infatti, dato che $f(t) \equiv 10$ per ogni $t < 0$, si ha

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x 10\,dt = 10\,x \neq -10\,x\,.$$

---

4) Sia
$$F(x) = \int_0^x \cos^2(t)\,dt\,.$$

4A) La funzione $F(x)$ è definita per ogni x in $\mathbb{R}$.

Vero: Dato che la funzione $t \mapsto \cos^2(t)$ è continua su ogni intervallo chiuso e limitato di $\mathbb{R}$, è integrabile su ogni intervallo chiuso e limitato. In particolare, lo è sugli intervalli della forma $[0, x]$ (se $x \geq 0$) o $[x, 0]$ (se $x < 0$), e quindi la funzione $F(x)$ è definita per ogni x in $\mathbb{R}$.

4B) Si ha $F(0) = 0$.

Vero: Dato che, qualsiasi sia a, e qualsiasi sia $f(x)$, si ha
$$\int_a^a f(x)\,dx = 0\,,$$
allora
$$F(0) = \int_0^0 \cos^2(t)\,dt = 0\,.$$

4C) La funzione $F(x)$ non è derivabile su tutto $\mathbb{R}$.

Falso: Dato che la funzione $t \mapsto \cos^2(t)$ è continua, per il Teorema fondamentale del calcolo integrale la funzione $F(x)$ è derivabile ovunque e si ha
$$F'(x) = \cos^2(x)\,, \qquad \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

4D) La funzione $F(x)$ è decrescente su $\mathbb{R}$.

Falso: Per quanto detto nell'esercizio **4C)**, si ha
$$F'(x) = \cos^2(x)\,, \qquad \forall x \in \mathbb{R}\,.$$
Dato che $F'(x) \geq 0$ per ogni x, la funzione $F(x)$ è crescente su $\mathbb{R}$ (e quindi non è decrescente).

---

5) Calcolare i seguenti integrali:

$$\textbf{a1)}\ \int_0^{\pi} \sin(11\,x)\,dx\,,\qquad \textbf{a2)}\ \int_0^1 \mathrm{e}^{4\,x}\,dx\,,\qquad \textbf{b1)}\ \int_0^1 \frac{4\,x\,dx}{1+2\,x^2}\,,\qquad \textbf{b2)}\ \int_0^1 \frac{dx}{1+36\,x^2}\,,$$

$$\textbf{c1)}\ \int_0^{\sqrt[3]{\pi}} x^2\,\cos(6\,x^3)\,dx\,,\qquad \textbf{c2)}\ \int_0^1 x^2\,\mathrm{e}^{x^3}\,dx\,,\qquad \textbf{d1)}\ \int_0^1 \frac{dx}{4\,x+2}\,,\qquad \textbf{d2)}\ \int_0^1 \frac{dx}{(3-x)^2}\,.$$

Soluzione:

a1) Con la sostituzione $y = 11\,x$, da cui $dy = 11\,dx$, si ha, dato che $\cos(11\,\pi) = -1$,

$$\int_0^{\pi} \sin(11\,x)\,dx = \int_0^{11\,\pi} \sin(y)\,\frac{dy}{11} = -\frac{\cos(y)}{11}\Big|_0^{11\,\pi} = -\frac{\cos(11\,\pi)-1}{11} = \frac{2}{11}\,.$$

a2) Con la sostituzione $y = 4\,x$, da cui $dy = 4\,dx$, si ha

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{4\,x}\,dx = \int_0^4 \mathrm{e}^y\,\frac{dy}{4} = \frac{\mathrm{e}^y}{4}\Big|_0^4 = \frac{\mathrm{e}^4-1}{4}\,.$$

b1) Con la sostituzione $y = 1+2\,x^2$, da cui $dy = 4\,x\,dx$, si ha

$$\int_0^1 \frac{4\,x\,dx}{1+2\,x^2} = \int_1^3 \frac{dy}{y} = \ln(|y|)\Big|_1^3 = \ln(3)-\ln(1) = \ln(3)\,.$$

b2) Con la sostituzione $y = 6\,x$, da cui $dy = 6\,dx$, si ha

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+36\,x^2} = \int_0^6 \frac{1}{6}\,\frac{dy}{1+y^2} = \frac{\arctan(y)}{6}\Big|_0^6 = \frac{\arctan(6)-\arctan(0)}{6} = \frac{\arctan(6)}{6}\,.$$

c1) Con la sostituzione $y = 6\,x^3$, da cui $dy = 18\,x^2\,dx$, si ha

$$\int_0^{\sqrt[3]{\pi}} x^2\,\cos(6\,x^3)\,dx = \int_0^{6\,\pi} \cos(y)\,\frac{dy}{18} = \frac{\sin(y)}{18}\Big|_0^{6\,\pi} = \frac{\sin(6\,\pi)-\sin(0)}{18} = 0\,.$$

c2) Con la sostituzione $y = x^3$, da cui $dy = 3\,x^2\,dx$, si ha

$$\int_0^1 x^2\,\mathrm{e}^{x^3}\,dx = \int_0^1 \mathrm{e}^y\,\frac{dy}{3} = \frac{\mathrm{e}^y}{3}\Big|_0^1 = \frac{\mathrm{e}-1}{3}\,.$$

d1) Ricordando che

$$\int \frac{dy}{a\,y+b} = \frac{\ln(|a\,y+b|)}{a}\,,$$

si ha

$$\int_0^1 \frac{dx}{4\,x+2} = \frac{\ln(|4\,x+2|)}{4}\Big|_0^1 = \frac{\ln(6)-\ln(2)}{4} = \frac{\ln(3)}{4}\,.$$

d2) Ricordando che

$$\int \frac{dy}{(a-y)^2} = \int \frac{dy}{(y-a)^2} = -\frac{1}{y-a}\,,$$

si ha

$$\int_0^1 \frac{dx}{(3-x)^2} = -\frac{1}{x-3}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}-\frac{1}{3} = \frac{1}{6}\,.$$

6) Sia $f(x) = 7\,x^2 + \mathrm{e}^{9\,x}$.
a) Perché la funzione $f(x)$ è integrabile su $[0,1]$?
b) Fissato n in $\mathbb{N}$, calcolare le somme integrali per eccesso e per difetto di $f(x)$ su $[0,1]$.
c) Calcolare la differenza Δ_n tra le somme integrali per eccesso e le somme per difetto, e calcolare il limite di Δ_n per n tendente ad infinito.
d) Ricordando che

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}\,,$$

calcolare

$$\int_0^1 f(x)\,dx\,.$$

Soluzione:
a) La funzione $f(x)$ è integrabile su $[0,1]$ (e su ogni altro intervallo chiuso limitato di $\mathbb{R}$) perché è continua come somma di funzioni continue.

b) Fissato n in $\mathbb{N}$, suddividiamo l'intervallo $[0,1]$ in n parti uguali con i punti

$$x_k = \frac{k}{n}\,, \qquad k = 0\,,\ 1\,,\ \ldots\,,\ n\,.$$

Osserviamo ora che la funzione $f(x)$ è crescente (basta derivare...), e quindi si ha

$$\alpha_k = \min_{[x_k, x_{k+1}]} f(x) = f(x_k)\,, \qquad \beta_k = \max_{[x_k, x_{k+1}]} f(x) = f(x_{k+1})\,.$$

Ricordando la definizione di x_k, si ha quindi

$$\alpha_k = 7\,\frac{k^2}{n^2} + \mathrm{e}^{9\,\frac{k}{n}}\,, \qquad \beta_k = 7\,\frac{(k+1)^2}{n^2} + \mathrm{e}^{9\,\frac{k+1}{n}}\,.$$

Ricordando la definizione di somme integrali per difetto e per eccesso:

$$\underline{S}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k\,, \qquad \overline{S}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \beta_k\,,$$

si ha (usando i valori di α_k e β_k)

$$\underline{S}_n = \frac{1}{n}\left[\sum_{k=0}^{n-1} 7\,\frac{k^2}{n^2} + \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{9\,\frac{k}{n}}\right], \qquad \overline{S}_n = \frac{1}{n}\left[\sum_{k=0}^{n-1} 7\,\frac{(k+1)^2}{n^2} + \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{9\,\frac{k+1}{n}}\right].$$

c) Usando le formule appena trovate, si ha

$$\Delta_n = \overline{S}_n - \underline{S}_n = \frac{7}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1}[(k+1)^2 - k^2] + \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}[\mathrm{e}^{9\,\frac{k+1}{n}} - \mathrm{e}^{9\,\frac{k}{n}}] = A_n + B_n\,.$$

Dato che $(k+1)^2 - k^2 = 2k+1$, si ha

$$A_n = \frac{7}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1}(2k+1) = \frac{7}{n^2}\,[n\,(n+1) + n]\,,$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato che

$$\sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{n\,(n+1)}{2}\,, \qquad \sum_{k=0}^{n-1} 1 = n\,.$$

Pertanto,

$$\lim_{n\to+\infty} A_n = \lim_{n\to+\infty} 7\,\frac{n^2+2n}{n^3} = 0\,.$$

Per quanto riguarda B_n, osservando che

$$\mathrm{e}^{9\,\frac{k+1}{n}} - \mathrm{e}^{9\,\frac{k}{n}} = \mathrm{e}^{9\,\frac{k}{n}}\,[\mathrm{e}^{\frac{9}{n}} - 1]\,,$$

si ha

$$B_n = \frac{\mathrm{e}^{\frac{9}{n}} - 1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{9\,\frac{k}{n}} = \frac{\mathrm{e}^{\frac{9}{n}} - 1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} [\mathrm{e}^{\frac{9}{n}}]^k = \frac{\mathrm{e}^{\frac{9}{n}} - 1}{n}\,\frac{\mathrm{e}^{\frac{9}{n}\,n} - 1}{\mathrm{e}^{\frac{9}{n}} - 1} = \frac{\mathrm{e}^9 - 1}{n}\,,$$

dove nel penultimo passaggio abbiamo usato che

$$\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{q^n - 1}{q - 1}\,, \quad \text{con } q = \mathrm{e}^{\frac{9}{n}}. \tag{1}$$

Si ha quindi

$$\lim_{n\to+\infty} B_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^9 - 1}{n} = 0\,.$$

In definitiva,

$$\lim_{n\to+\infty} \Delta_n = \lim_{n\to+\infty} [A_n + B_n] = 0 + 0 = 0\,.$$

d) Avendo dimostrato al punto **c)** che $f(x)$ è integrabile, calcoliamone l'integrale con la formula

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \underline{S}_n\,.$$

Ricordiamo che

$$\underline{S}_n = \frac{7}{n^3} \sum_{k=0}^{n-1} k^2 + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{9\,\frac{k}{n}} = C_n + D_n\,.$$

Per la formula presente nel testo, si ha

$$C_n = \frac{7}{n^3}\,\frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}\,,$$

da cui segue che

$$\lim_{n\to+\infty} C_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{7}{6}\,\frac{2n^3 + 3n^2 + n}{n^3} = \frac{7}{6}\cdot 2 = \frac{7}{3}\,.$$

D'altra parte, usando la (1), si ha

$$D_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} [\mathrm{e}^{\frac{9}{n}}]^k = \frac{\mathrm{e}^{\frac{9}{n}\,n} - 1}{n\,(\mathrm{e}^{\frac{9}{n}} - 1)} = (\mathrm{e}^9 - 1)\,\frac{\frac{1}{n}}{\mathrm{e}^{\frac{9}{n}} - 1}\,.$$

Pertanto, ricordando che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\frac{9}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} 9\,\frac{\mathrm{e}^{\frac{9}{n}} - 1}{\frac{9}{n}} = 9\cdot 1 = 9\,,$$

si ha

$$\lim_{n\to+\infty} C_n = \lim_{n\to+\infty} (\mathrm{e}^9 - 1)\,\frac{\frac{1}{n}}{\mathrm{e}^{\frac{9}{n}} - 1} = \frac{\mathrm{e}^9 - 1}{9}\,.$$

In definitiva,

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \underline{S}_n = \lim_{n\to+\infty} [C_n + D_n] = \frac{7}{3} + \frac{\mathrm{e}^9 - 1}{9}\,.$$