



Calcolo integrale — Scheda di esercizi n. 4
4 Aprile 2023 — Compito n. 00078

Istruzioni: le prime due caselle (**V** / **F**) permettono di selezionare la risposta vero/falso. La casella "**C**" serve a correggere eventuali errori invertendo la risposta data. Per selezionare una casella, annerirla completamente: ■ (non ☐ o ☑).

Nome: _____

Cognome: _____

Matricola:

--	--	--	--	--	--	--

Punteggi: 1 punto per ogni risposta esatta, 0 punti per risposte sbagliate o lasciate in bianco.

	1A	1B	1C	1D	2A	2B	2C	2D	3A	3B	3C	3D	4A	4B	4C	4D
V	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
F	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
C	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

1) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

1A) La funzione $f(x) = 6x^2 - 2x + 1$ non è integrabile su $[2, 7]$.

1B) La funzione $f(x) = x|x|$ non è integrabile su $[3, 10]$.

1C) La funzione

$$f(x) = \begin{cases} 6x + 5 & \text{se } x < 0, \\ -6x - 5 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

è integrabile su $[-5, 2]$.

1D) La funzione $f(x) = [x]$, dove $[x]$ è la parte intera di x , è integrabile su $[-5, 3]$.

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

2A) Se

$$f(x) = \begin{cases} 6 & \text{se } x \geq 0, \\ 11 & \text{se } x < 0, \end{cases} \quad \int_{-1}^1 f(x) dx = 17.$$

2B) Se

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{se } x \leq 1, \\ 6x - 3 & \text{se } x > 1, \end{cases} \quad \int_0^2 f(x) dx = 9.$$

2C) Se

$$f(x) = \begin{cases} 12x & \text{se } x \leq 1, \\ 24 - 12x & \text{se } x > 1, \end{cases} \quad \int_0^2 f(x) dx = 12.$$

2D) Se

$$f(x) = \begin{cases} 6x & \text{se } x \leq 1, \\ 24 - 12x & \text{se } x > 1, \end{cases} \quad \int_0^2 f(x) dx = 9.$$

3) Siano

$$f(x) = \begin{cases} 10 & \text{se } x \leq 0, \\ 9 & \text{se } x > 0. \end{cases} \quad F(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

3A) Si ha $F(0) = 0$.

3B) Si ha

$$F(6) = 60.$$

3C) Si ha

$$F(-5) = 50.$$

3D) Si ha $F(x) = 10x$ per ogni $x < 0$.

4) Sia

$$F(x) = \int_0^x \cos^6(t) dt.$$

4A) La funzione $F(x)$ non è definita per ogni x in \mathbb{R} .

4B) Si ha $F(0) = 1$.

4C) La funzione $F(x)$ è derivabile su tutto \mathbb{R} .

4D) La funzione $F(x)$ è crescente su \mathbb{R} .

Docente: _____

--	--	--	--	--	--	--	--

Cognome

Nome

Matricola

Compito 00078

5) Calcolare i seguenti integrali:

$$\begin{array}{llll} \mathbf{a1)} \int_0^\pi \sin(5x) \, dx, & \mathbf{a2)} \int_0^1 e^{3x} \, dx, & \mathbf{b1)} \int_0^1 \frac{4x \, dx}{1+2x^2}, & \mathbf{b2)} \int_0^1 \frac{dx}{1+16x^2}, \\ \mathbf{c1)} \int_0^{\sqrt[3]{\pi}} x^2 \cos(4x^3) \, dx, & \mathbf{c2)} \int_0^1 x^6 e^{x^7} \, dx, & \mathbf{d1)} \int_0^1 \frac{dx}{12x+6}, & \mathbf{d2)} \int_0^1 \frac{dx}{(3-x)^2}. \end{array}$$

--	--	--	--	--	--	--	--

Cognome

Nome

Matricola

Compito 00078

6) Sia $f(x) = 6x^2 + e^{9x}$.

a) Perché la funzione $f(x)$ è integrabile su $[0, 1]$?

b) Fissato n in \mathbb{N} , calcolare le somme integrali per eccesso e per difetto di $f(x)$ su $[0, 1]$.

c) Calcolare la differenza Δ_n tra le somme integrali per eccesso e le somme per difetto, e calcolare il limite di Δ_n per n tendente ad infinito.

d) Ricordando che

$$\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

calcolare

$$\int_0^1 f(x) dx.$$

Soluzioni del compito 00078

1) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

1A) La funzione $f(x) = 6x^2 - 2x + 1$ non è integrabile su $[2, 7]$.

Falso: Trattandosi di una funzione continua (è un polinomio) definita su un intervallo chiuso e limitato, la funzione è integrabile (come tutte le funzioni continue su intervalli chiusi e limitati).

1B) La funzione $f(x) = x|x|$ non è integrabile su $[3, 10]$.

Falso: Trattandosi di una funzione continua (è il prodotto di funzioni continue) definita su un intervallo chiuso e limitato, la funzione è integrabile (come tutte le funzioni continue su intervalli chiusi e limitati).

1C) La funzione

$$f(x) = \begin{cases} 6x + 5 & \text{se } x < 0, \\ -6x - 5 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

è integrabile su $[-5, 2]$.

Vero: La funzione è continua sia per $x < 0$ che per $x \geq 0$ (essendo un polinomio su ogni intervallo); essendo continua, è integrabile sia su $[-5, 0]$ che su $[0, 2]$, e quindi è integrabile sull'unione dei due intervalli.

1D) La funzione $f(x) = [x]$, dove $[x]$ è la parte intera di x , è integrabile su $[-5, 3]$.

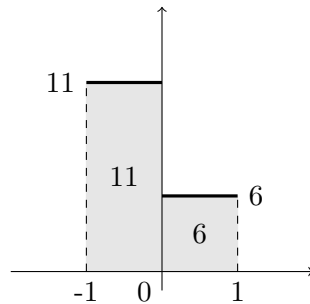
Vero: La funzione “parte intera” è una funzione costante a tratti; sull'intervallo $[-5, 3]$ è discontinua in $-4, -3, \dots, 2, 3$. Avendo un numero finito di punti di discontinuità, è integrabile su $[-5, 3]$.

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

2A) Se

$$f(x) = \begin{cases} 6 & \text{se } x \geq 0, \\ 11 & \text{se } x < 0, \end{cases} \quad \int_{-1}^1 f(x) dx = 17.$$

Vero: Si ha (ricordando le formule per l'area di un rettangolo)



Disegno non in scala

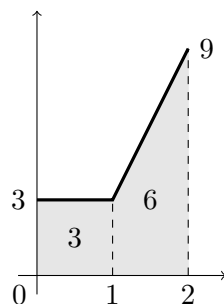
e quindi

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = 11 + 6 = 17.$$

2B) Se

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{se } x \leq 1, \\ 6x - 3 & \text{se } x > 1, \end{cases} \quad \int_0^2 f(x) dx = 9.$$

Vero: Si ha (ricordando le formule per l'area di un rettangolo e di un trapezio)



Disegno non in scala

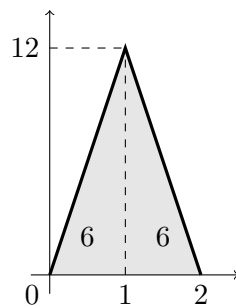
e quindi

$$\int_0^2 f(x) dx = 3 + 6 = 9.$$

2C) Se

$$f(x) = \begin{cases} 12x & \text{se } x \leq 1, \\ 24 - 12x & \text{se } x > 1, \end{cases} \quad \int_0^2 f(x) dx = 12.$$

Vero: Si ha (ricordando le formule per l'area di un triangolo)



Disegno non in scala

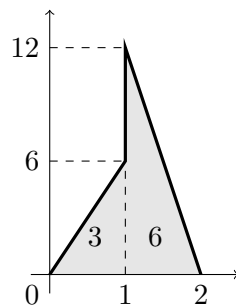
e quindi

$$\int_0^2 f(x) dx = 6 + 6 = 12.$$

2D) Se

$$f(x) = \begin{cases} 6x & \text{se } x \leq 1, \\ 24 - 12x & \text{se } x > 1, \end{cases} \quad \int_0^2 f(x) dx = 9.$$

Vero: Si ha (ricordando le formule per l'area di un triangolo)



Disegno non in scala

e quindi

$$\int_0^2 f(x) dx = 3 + 6 = 9.$$

3) Siano

$$f(x) = \begin{cases} 10 & \text{se } x \leq 0, \\ 9 & \text{se } x > 0. \end{cases} \quad F(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

3A) Si ha $F(0) = 0$.

Vero: Infatti

$$F(0) = \int_0^0 f(x) dx = 0,$$

dato che, per ogni $f(x)$ e per ogni a ,

$$\int_a^a f(x) dx = 0.$$

3B) Si ha

$$F(6) = 60.$$

Falso: Infatti

$$F(6) = \int_0^6 f(x) dx = \int_0^6 9 dx = 9 \cdot 6 = 54 \neq 60.$$

3C) Si ha

$$F(-5) = 50.$$

Falso: Infatti

$$F(-5) = \int_0^{-5} f(x) dx = - \int_{-5}^0 f(x) dx = - \int_{-5}^0 10 dx = -10 \cdot 5 = -50 \neq 50.$$

3D) Si ha $F(x) = 10x$ per ogni $x < 0$.

Vero: Infatti, dato che $f(t) \equiv 10$ per ogni $t < 0$, si ha

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt = \int_0^x 10 dt = 10x.$$

4) Sia

$$F(x) = \int_0^x \cos^6(t) dt.$$

4A) La funzione $F(x)$ non è definita per ogni x in \mathbb{R} .

Falso: Dato che la funzione $t \mapsto \cos^6(t)$ è continua su ogni intervallo chiuso e limitato di \mathbb{R} , è integrabile su ogni intervallo chiuso e limitato. In particolare, lo è sugli intervalli della forma $[0, x]$ (se $x \geq 0$) o $[x, 0]$ (se $x < 0$), e quindi la funzione $F(x)$ è definita per ogni x in \mathbb{R} .

4B) Si ha $F(0) = 1$.

Falso: Dato che, qualsiasi sia a , e qualsiasi sia $f(x)$, si ha

$$\int_a^a f(x) dx = 0,$$

allora

$$F(0) = \int_0^0 \cos^6(t) dt = 0 \neq 1.$$

4C) La funzione $F(x)$ è derivabile su tutto \mathbb{R} .

Vero: Dato che la funzione $t \mapsto \cos^6(t)$ è continua, per il Teorema fondamentale del calcolo integrale la funzione $F(x)$ è derivabile ovunque e si ha

$$F'(x) = \cos^6(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

4D) La funzione $F(x)$ è crescente su \mathbb{R} .

Vero: Per quanto detto nell'esercizio **4C**), si ha

$$F'(x) = \cos^6(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Dato che $F'(x) \geq 0$ per ogni x , la funzione $F(x)$ è crescente su \mathbb{R} .

5) Calcolare i seguenti integrali:

$$\begin{array}{llll} \mathbf{a1)} & \int_0^\pi \sin(5x) dx, & \mathbf{a2)} & \int_0^1 e^{3x} dx, & \mathbf{b1)} & \int_0^1 \frac{4x dx}{1+2x^2}, & \mathbf{b2)} & \int_0^1 \frac{dx}{1+16x^2}, \\ \mathbf{c1)} & \int_0^{\sqrt[3]{\pi}} x^2 \cos(4x^3) dx, & \mathbf{c2)} & \int_0^1 x^6 e^{x^7} dx, & \mathbf{d1)} & \int_0^1 \frac{dx}{12x+6}, & \mathbf{d2)} & \int_0^1 \frac{dx}{(3-x)^2}. \end{array}$$

Soluzione:

a1) Con la sostituzione $y = 5x$, da cui $dy = 5 dx$, si ha, dato che $\cos(5\pi) = -1$,

$$\int_0^\pi \sin(5x) dx = \int_0^{5\pi} \sin(y) \frac{dy}{5} = -\frac{\cos(y)}{5} \Big|_0^{5\pi} = -\frac{\cos(5\pi) - 1}{5} = \frac{2}{5}.$$

a2) Con la sostituzione $y = 3x$, da cui $dy = 3 dx$, si ha

$$\int_0^1 e^{3x} dx = \int_0^3 e^y \frac{dy}{3} = \frac{e^y}{3} \Big|_0^3 = \frac{e^3 - 1}{3}.$$

b1) Con la sostituzione $y = 1 + 2x^2$, da cui $dy = 4x dx$, si ha

$$\int_0^1 \frac{4x dx}{1+2x^2} = \int_1^3 \frac{dy}{y} = \ln(|y|) \Big|_1^3 = \ln(3) - \ln(1) = \ln(3).$$

b2) Con la sostituzione $y = 4x$, da cui $dy = 4 dx$, si ha

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+16x^2} = \int_0^4 \frac{1}{4} \frac{dy}{1+y^2} = \frac{\arctan(y)}{4} \Big|_0^4 = \frac{\arctan(4) - \arctan(0)}{4} = \frac{\arctan(4)}{4}.$$

c1) Con la sostituzione $y = 4x^3$, da cui $dy = 12x^2 dx$, si ha

$$\int_0^{\sqrt[3]{\pi}} x^2 \cos(4x^3) dx = \int_0^{4\pi} \cos(y) \frac{dy}{12} = \frac{\sin(y)}{12} \Big|_0^{4\pi} = \frac{\sin(4\pi) - \sin(0)}{12} = 0.$$

c2) Con la sostituzione $y = x^7$, da cui $dy = 7x^6 dx$, si ha

$$\int_0^1 x^6 e^{x^7} dx = \int_0^1 e^y \frac{dy}{7} = \frac{e^y}{7} \Big|_0^1 = \frac{e - 1}{7}.$$

d1) Ricordando che

$$\int \frac{dy}{ay+b} = \frac{\ln(|ay+b|)}{a},$$

si ha

$$\int_0^1 \frac{dx}{12x+6} = \frac{\ln(|12x+6|)}{12} \Big|_0^1 = \frac{\ln(18) - \ln(6)}{12} = \frac{\ln(3)}{12}.$$

d2) Ricordando che

$$\int \frac{dy}{(a-y)^2} = \int \frac{dy}{(y-a)^2} = -\frac{1}{y-a},$$

si ha

$$\int_0^1 \frac{dx}{(3-x)^2} = -\frac{1}{x-3} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

6) Sia $f(x) = 6x^2 + e^{9x}$.

a) Perché la funzione $f(x)$ è integrabile su $[0, 1]$?

b) Fissato n in \mathbb{N} , calcolare le somme integrali per eccesso e per difetto di $f(x)$ su $[0, 1]$.

c) Calcolare la differenza Δ_n tra le somme integrali per eccesso e le somme per difetto, e calcolare il limite di Δ_n per n tendente ad infinito.

d) Ricordando che

$$\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

calcolare

$$\int_0^1 f(x) dx.$$

Soluzione:

a) La funzione $f(x)$ è integrabile su $[0, 1]$ (e su ogni altro intervallo chiuso limitato di \mathbb{R}) perché è continua come somma di funzioni continue.

b) Fissato n in \mathbb{N} , suddividiamo l'intervallo $[0, 1]$ in n parti uguali con i punti

$$x_k = \frac{k}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Osserviamo ora che la funzione $f(x)$ è crescente (basta derivare...), e quindi si ha

$$\alpha_k = \min_{[x_k, x_{k+1}]} f(x) = f(x_k), \quad \beta_k = \max_{[x_k, x_{k+1}]} f(x) = f(x_{k+1}).$$

Ricordando la definizione di x_k , si ha quindi

$$\alpha_k = 6 \frac{k^2}{n^2} + e^{9\frac{k}{n}}, \quad \beta_k = 6 \frac{(k+1)^2}{n^2} + e^{9\frac{k+1}{n}}.$$

Ricordando la definizione di somme integrali per difetto e per eccesso:

$$\underline{S}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k, \quad \overline{S}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k,$$

si ha (usando i valori di α_k e β_k)

$$\underline{S}_n = \frac{1}{n} \left[\sum_{k=0}^{n-1} 6 \frac{k^2}{n^2} + \sum_{k=0}^{n-1} e^{9\frac{k}{n}} \right], \quad \overline{S}_n = \frac{1}{n} \left[\sum_{k=0}^{n-1} 6 \frac{(k+1)^2}{n^2} + \sum_{k=0}^{n-1} e^{9\frac{k+1}{n}} \right].$$

c) Usando le formule appena trovate, si ha

$$\Delta_n = \overline{S}_n - \underline{S}_n = \frac{6}{n^3} \sum_{k=0}^{n-1} [(k+1)^2 - k^2] + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} [e^{9\frac{k+1}{n}} - e^{9\frac{k}{n}}] = A_n + B_n.$$

Dato che $(k+1)^2 - k^2 = 2k+1$, si ha

$$A_n = \frac{6}{n^3} \sum_{k=0}^{n-1} (2k+1) = \frac{6}{n^2} [n(n+1) + n],$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato che

$$\sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2}, \quad \sum_{k=0}^{n-1} 1 = n.$$

Pertanto,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 6 \frac{n^2 + 2n}{n^3} = 0.$$

Per quanto riguarda B_n , osservando che

$$e^{9 \frac{k+1}{n}} - e^{9 \frac{k}{n}} = e^{9 \frac{k}{n}} [e^{\frac{9}{n}} - 1],$$

si ha

$$B_n = \frac{e^{\frac{9}{n}} - 1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{9 \frac{k}{n}} = \frac{e^{\frac{9}{n}} - 1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} [e^{\frac{9}{n}}]^k = \frac{e^{\frac{9}{n}} - 1}{n} \frac{e^{\frac{9}{n}n} - 1}{e^{\frac{9}{n}} - 1} = \frac{e^9 - 1}{n},$$

dove nel penultimo passaggio abbiamo usato che

$$(1) \quad \sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{q^n - 1}{q - 1}, \quad \text{con } q = e^{\frac{9}{n}}.$$

Si ha quindi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} B_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^9 - 1}{n} = 0.$$

In definitiva,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \Delta_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} [A_n + B_n] = 0 + 0 = 0.$$

d) Avendo dimostrato al punto **c)** che $f(x)$ è integrabile, calcoliamone l'integrale con la formula

$$\int_0^1 f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \underline{S}_n.$$

Ricordiamo che

$$\underline{S}_n = \frac{6}{n^3} \sum_{k=0}^{n-1} k^2 + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{9 \frac{k}{n}} = C_n + D_n.$$

Per la formula presente nel testo, si ha

$$C_n = \frac{6}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

da cui segue che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} C_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{6}{6} \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{n^3} = \frac{6}{6} \cdot 2 = 2.$$

D'altra parte, usando la (1), si ha

$$D_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} [e^{\frac{9}{n}}]^k = \frac{e^{\frac{9}{n}n} - 1}{n(e^{\frac{9}{n}} - 1)} = (e^9 - 1) \frac{\frac{1}{n}}{e^{\frac{9}{n}} - 1}.$$

Pertanto, ricordando che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{9}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 9 \frac{e^{\frac{9}{n}} - 1}{\frac{9}{n}} = 9 \cdot 1 = 9,$$

si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} D_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (e^9 - 1) \frac{\frac{1}{n}}{e^{\frac{9}{n}} - 1} = \frac{e^9 - 1}{9}.$$

In definitiva,

$$\int_0^1 f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \underline{S}_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} [C_n + D_n] = 2 + \frac{e^9 - 1}{9}.$$