



Calcolo integrale — Scheda di esercizi n. 8  
18 Maggio 2023 — Compito n. 00145

**Istruzioni:** le prime due caselle (**V** / **F**) permettono di selezionare la risposta vero/falso. La casella “**C**” serve a correggere eventuali errori invertendo la risposta data. Per selezionare una casella, annerirla completamente: ☐ (non ☐ o ☐).

Nome: \_\_\_\_\_

Cognome: \_\_\_\_\_

Matricola:

--	--	--	--	--	--	--

	1A	1B	1C	1D	2A	2B	2C	2D	3A	3B	3C	3D	4A	4B	4C	4D
V	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
F	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
C	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

1) Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(t) = (12t + 4)y(t) + Ae^{6t^2+4t}.$$

1A) Esistono infinite soluzioni dell'equazione tali che  $y(6) = 11$ .

1B) Se  $A = 0$ , la funzione  $y(t) = 5e^{6t^2+4t}$  è soluzione dell'equazione.

1C) La funzione  $y(t) = (6 + At)e^{6t^2+4t}$  è soluzione dell'equazione.

1D) Se  $y(0) = 0$  e  $A = 5$ , si ha

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = +\infty.$$

2) Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(t) = 2 \cos(t) y(t) + 11 \sin(t) \cos(t).$$

2A) Se  $y(0) = 0$ , si ha  $y'(0) \neq 0$ .

2B) Se  $y(0) = 0$ , si ha  $y''(0) = 2$ .

2C) Se  $y(0) = 3$ , la soluzione  $y(t)$  è crescente in un intorno di  $t = 0$ .

2D) Se  $y(\frac{\pi}{2}) = 7$ , si ha  $T_1(y(t); \frac{\pi}{2}) = 7$ .

3) Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(t) = \frac{e^{y(t)} - 1}{e^{y(t)}} \cos(t).$$

3A) L'equazione è a variabili separabili.

3B) Se  $y(0) = 0$ , la soluzione  $y(t)$  non è costante.

3C) Se  $y(0) = 2$ , non esiste  $t_0 > 0$  tale che  $y(t_0) = 0$ .

3D) Se  $y(0) = \ln(8)$ , si ha

$$y(s) = \ln(7e^{\sin(s)} + 1).$$

4) Si consideri l'equazione differenziale  $y'(t) = t(y(t)^3 - 81y(t))$ .

4A) Se  $y(0) = 9$ , la soluzione è costante.

4B) Se  $y(0) = 1$ , si ha  $y'(0) = 0$ .

4C) Se  $y(0) = -1$ , si ha  $T_2(y(t); 0) = -1 + 40t^2$ .

4D) Se  $y(0) = 1$ , la soluzione ha un minimo relativo per  $t = 0$ .

Docente

- ☐ DelaTorre Pedraza  
☐ Orsina

--	--	--	--	--	--	--	--

Cognome

Nome

Matricola

Compito 00145

---

5) Si consideri il problema di Cauchy

$$(1) \quad \begin{cases} y'(t) = a(t) y(t) + b(t), \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

a) Si risolva (1) se  $a(t) = -8$ ,  $b(t) = 11$  e  $y_0 = 0$ .

b) Si risolva (1) se  $a(t) = \sin(t)$ ,  $b(t) = 6 \sin(t)$  e  $y(0) = \pi$ .

c) Si scriva il polinomio di Taylor di ordine 1 di  $y(t)$  nell'origine se  $a(t) = e^{2t}$ ,  $b(t) = 5 \cos(t)$  e  $y_0 = 7$ .

d) Si scriva il polinomio di Taylor di ordine 2 di  $y(t)$  nell'origine se  $a(t) = 4t$ ,  $b(t) = 9t^2$  e  $y_0 = 5$ .

---

--	--	--	--	--	--	--	--

Cognome

Nome

Matricola

Compito 00145

---

6) Si risolvano le seguenti equazioni differenziali a variabili separabili.

a)  $y'(t) = 8y(t) + 3$ , se  $y(0) = 0$ .

b)  $y'(t) = 10t(16 + y^2(t))$ , se  $y(0) = 0$ .

c)  $y'(t) = e^{-y(t)} e^{7t}$ , se  $y(0) = 0$ .

d)  $y'(t) = \frac{7(1+y^2(t))}{y(t)}$ , se  $y(0) = 1$ .

---

## Soluzioni del compito 00145

1) Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(t) = (12t + 4)y(t) + A e^{6t^2 + 4t}.$$

---

Ricordiamo la formula risolutiva per il problema di Cauchy

$$(1) \quad \begin{cases} y'(t) = a(t)y(t) + b(t), \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

Posto

$$A(t) = \int_{t_0}^t a(s) ds,$$

si ha

$$(2) \quad y(t) = e^{A(t)} \left[ y_0 + \int_{t_0}^t b(s) e^{-A(s)} ds \right].$$

---

**1A)** Esistono infinite soluzioni dell'equazione tali che  $y(6) = 11$ .

**Falso:** Trattandosi di un'equazione differenziale ordinaria del primo ordine, è sufficiente una sola condizione iniziale affinché esista un'unica soluzione.

---

**1B)** Se  $A = 0$ , la funzione  $y(t) = 5 e^{6t^2 + 4t}$  è soluzione dell'equazione.

**Vero:** Se  $y(t) = 5 e^{6t^2 + 4t}$ , si ha

$$y'(t) = 5(12t + 4)e^{6t^2 + 4t} = (12t + 4)y(t) = (12t + 4)y(t) + A e^{6t^2 + 4t},$$

e quindi  $y(t)$  è soluzione dell'equazione.

---

**1C)** La funzione  $y(t) = (6 + At)e^{6t^2 + 4t}$  è soluzione dell'equazione.

**Vero:** Se  $y(t) = (6 + At)e^{6t^2 + 4t}$ , derivando si ha

$$y'(t) = A e^{6t^2 + 4t} + (6 + At)(12t + 4)e^{6t^2 + 4t} = (12t + 4)y(t) + A e^{6t^2 + 4t},$$

e quindi  $y(t)$  è soluzione dell'equazione.

---

**1D)** Se  $y(0) = 0$  e  $A = 5$ , si ha

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = +\infty.$$

**Vero:** Il problema rientra nel caso (1) con

$$a(t) = 12t + 4, \quad b(t) = 5 e^{6t^2 + 4t}, \quad t_0 = 0, \quad y_0 = 0.$$

Dato che

$$A(t) = \int_0^t a(s) ds = \int_0^t (12s + 4) ds = (6s^2 + 4s) \Big|_0^t = 6t^2 + 4t,$$

e dato che

$$\int_0^t b(s) e^{-A(s)} ds = \int_0^t 5 e^{6s^2 + 4s} e^{-(6s^2 + 4s)} ds = \int_0^t 5 ds = 5t,$$

dalla (2) si ha

$$y(t) = 5t e^{6t^2 + 4t},$$

da cui segue che

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = +\infty.$$



**2)** Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(t) = 2 \cos(t) y(t) + 11 \sin(t) \cos(t).$$

---

Derivando l'equazione si ha

$$(1) \quad y''(t) = -2 \sin(t) y(t) + 2 \cos(t) y'(t) + 11 \cos^2(t) - 11 \sin^2(t).$$

---

**2A)** Se  $y(0) = 0$ , si ha  $y'(0) \neq 0$ .

**Falso:** Dall'equazione, sostituendo  $t = 0$ , si ha

$$y'(0) = 2 \cos(0) y(0) + 11 \sin(0) \cos(0) = 2 \cdot 1 \cdot 0 + 11 \cdot 0 \cdot 1 = 0.$$

---

**2B)** Se  $y(0) = 0$ , si ha  $y''(0) = 2$ .

**Falso:** Dall'equazione con  $t = 0$  si ha (si veda l'esercizio **2A**)

$$y'(0) = 0.$$

Dalla (1) con  $t = 0$  si ha

$$y''(0) = 11 \neq 2,$$

dato che il primo, secondo e quarto termine si annullano.

---

**2C)** Se  $y(0) = 3$ , la soluzione  $y(t)$  è crescente in un intorno di  $t = 0$ .

**Vero:** Dall'equazione si ha

$$y'(0) = 2 \cdot \cos(0) \cdot y(0) = 2 \cdot 3 = 6 > 0,$$

per ipotesi. Essendo  $y'(0) > 0$ , si ha  $y'(t) > 0$  in un intorno dell'origine (per il teorema di permanenza del segno per funzioni continue) e quindi  $y(t)$  è crescente in un intorno dell'origine.

---

**2D)** Se  $y(\frac{\pi}{2}) = 7$ , si ha  $T_1(y(t); \frac{\pi}{2}) = 7$ .

**Vero:** Dall'equazione si ha

$$y'(\frac{\pi}{2}) = 2 \cos(\frac{\pi}{2}) y(\frac{\pi}{2}) + 11 \sin(\frac{\pi}{2}) \cos(\frac{\pi}{2}) = 2 \cdot 0 \cdot 7 + 11 \cdot 1 \cdot 0 = 0.$$

Ricordando che

$$T_1(y(t); \frac{\pi}{2}) = y(\frac{\pi}{2}) + y'(\frac{\pi}{2}) (t - \frac{\pi}{2}),$$

si ha

$$T_1(y(t); \frac{\pi}{2}) = 7.$$

---

**3)** Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(t) = \frac{e^{y(t)} - 1}{e^{y(t)}} \cos(t).$$

---

Osserviamo che l'equazione è a variabili separabili, essendo della forma

$$y'(t) = f(y(t)) g(t),$$

con

$$f(s) = \frac{e^s - 1}{e^s}, \quad g(t) = \cos(t).$$

Dato che  $f(0) = 0$ , se all'equazione abbiniamo la condizione iniziale  $y(0) = 0$  abbiamo la soluzione costante  $y(t) \equiv 0$ . Se, invece  $y(0) = y_0 > 0$  allora  $y(t) \neq 0$  per ogni  $t$  e possiamo separare le variabili, riscrivendo l'equazione come

$$\frac{e^{y(t)} y'(t)}{e^{y(t)} - 1} = \cos(t).$$

Integrando tra zero e  $s$  si ha

$$\int_0^s \frac{e^{y(t)} y'(t)}{e^{y(t)} - 1} dt = \int_0^s \cos(t) dt = \sin(s).$$

Per il primo integrale, con la sostituzione  $z = y(t)$ , da cui  $dz = y'(t) dt$ , si ha

$$\int_0^s \frac{e^{y(t)} y'(t)}{e^{y(t)} - 1} dt = \int_{y_0}^{y(s)} \frac{e^z}{e^z - 1} dz.$$

Con la sostituzione  $w = e^z - 1$ , da cui  $dw = e^z dz$ , si ha

$$\int_{y_0}^{y(s)} \frac{e^z}{e^z - 1} dz = \int_{e^{y_0}-1}^{e^{y(s)}-1} \frac{dw}{w} = \ln(|w|) \Big|_{e^{y_0}-1}^{e^{y(s)}-1} = \ln \left( \left| \frac{e^{y(s)} - 1}{e^{y_0} - 1} \right| \right).$$

Essendo  $y_0 > 0$  possiamo levare i moduli (perché?) e scrivere che

$$\ln \left( \frac{e^{y(s)} - 1}{e^{y_0} - 1} \right) = \sin(s),$$

da cui segue, dopo alcuni calcoli, che

$$(1) \quad y(s) = \ln[(e^{y_0} - 1)e^{\sin(s)} + 1].$$

Osserviamo di passaggio che la (1) è valida anche nel caso in cui  $y_0 = 0$ .

---

**3A)** L'equazione è a variabili separabili.

**Vero:** Per quanto detto sopra, l'equazione è a variabili separabili.

---

**3B)** Se  $y(0) = 0$ , la soluzione  $y(t)$  non è costante.

**Falso:** Dato che  $f(y_0) = f(0) = 0$ , la funzione costante  $y(t) \equiv y_0 = 0$  è soluzione dell'equazione.

---

**3C)** Se  $y(0) = 2$ , non esiste  $t_0 > 0$  tale che  $y(t_0) = 0$ .

**Vero:** Se esistesse  $t_0 > 0$  tale che  $y(t_0) = 0$ , il problema di Cauchy con dato iniziale  $y(t_0) = 0$  avrebbe due soluzioni: la funzione  $y(t)$  che stiamo considerando (e che non è la funzione nulla dato che in  $t = 0$  vale 2), e la funzione  $w(t) \equiv 0$ . Dato che il problema di Cauchy ha un'unica soluzione, si ha  $y(t) \neq 0$  per ogni  $t > 0$ .

---

**3D)** Se  $y(0) = \ln(8)$ , si ha

$$y(s) = \ln(7e^{\sin(s)} + 1).$$

**Vero:** Dalla (1), con  $y_0 = \ln(8)$ , da cui segue che  $e^{y_0} - 1 = 8 - 1 = 7$ , si ha

$$y(s) = \ln(7 e^{\sin(s)} + 1) .$$

---



4) Si consideri l'equazione differenziale  $y'(t) = t(y(t)^3 - 81y(t))$ .

---

Osserviamo che l'equazione è a variabili separabili, essendo della forma

$$y'(t) = f(y(t)) g(t),$$

con

$$(1) \quad f(s) = s^3 - 81s, \quad g(t) = t.$$

---

**4A)** Se  $y(0) = 9$ , la soluzione è costante.

**Vero:** Se  $f(s)$  è come in (1), dato che si ha  $f(9) = 0$ , la funzione costante  $y(t) \equiv 9$  è soluzione dell'equazione.

---

**4B)** Se  $y(0) = 1$ , si ha  $y'(0) = 0$ .

**Vero:** Dall'equazione, scritta per  $t = 0$ , si ha

$$y'(0) = 0 \cdot (y(0)^3 - 81y(0)) = 0 \cdot (1 - 81) = 0.$$

---

**4C)** Se  $y(0) = -1$ , si ha  $T_2(y(t); 0) = -1 + 40t^2$ .

**Vero:** Derivando l'equazione si ha

$$y''(t) = y(t)^3 - 81y(t) + t(3y(t)^2 - 81)y'(t),$$

da cui segue che  $y''(0) = 80$ . Dato che dall'equazione segue che  $y'(0) = 0$  (si veda l'esercizio **4B**), si ha

$$T_2(y(t); 0) = y(0) + y'(0)t + \frac{y''(0)}{2}t^2 = -1 + 40t^2.$$

---

**4D)** Se  $y(0) = 1$ , la soluzione ha un minimo relativo per  $t = 0$ .

**Falso:** Derivando l'equazione si ha

$$y''(t) = y(t)^3 - 81y(t) + t(3y(t)^2 - 81)y'(t),$$

da cui segue che  $y''(0) = -80 < 0$ . Dato che dall'equazione segue che  $y'(0) = 0$  (si veda l'esercizio **4B**), si ha che  $t = 0$  è un punto di massimo relativo per  $y(t)$ .

---

5) Si consideri il problema di Cauchy

$$(1) \quad \begin{cases} y'(t) = a(t) y(t) + b(t), \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

a) Si risolva (1) se  $a(t) = -8$ ,  $b(t) = 11$  e  $y_0 = 0$ .

b) Si risolva (1) se  $a(t) = \sin(t)$ ,  $b(t) = 6 \sin(t)$  e  $y(0) = \pi$ .

c) Si scriva il polinomio di Taylor di ordine 1 di  $y(t)$  nell'origine se  $a(t) = e^{2t}$ ,  $b(t) = 5 \cos(t)$  e  $y_0 = 7$ .

d) Si scriva il polinomio di Taylor di ordine 2 di  $y(t)$  nell'origine se  $a(t) = 4t$ ,  $b(t) = 9t^2$  e  $y_0 = 5$ .

---

**Soluzione:**

Ricordiamo che la soluzione del problema di Cauchy (1) è data da

$$(2) \quad y(t) = e^{A(t)} \left[ y_0 + \int_0^t b(s) e^{-A(s)} ds \right], \quad \text{dove} \quad A(t) = \int_0^t a(s) ds.$$

a) Dato che  $a(t) = -8$ , si ha

$$A(t) = - \int_0^t 8 ds = -8t.$$

Pertanto, per la (2) si ha

$$y(t) = e^{-8t} \left[ 0 + \int_0^t 11 e^{8s} ds \right] = e^{-8t} \left[ \frac{11}{8} e^{8s} \Big|_0^t \right] = \frac{11}{8} e^{-8t} [e^{8t} - 1] = \frac{11}{8} [1 - e^{-8t}].$$

b) Dato che  $a(t) = \sin(t)$ , si ha

$$A(t) = \int_0^t \sin(s) ds = -\cos(s) \Big|_0^t = 1 - \cos(t),$$

e quindi, per la (2),

$$y(t) = e^{1-\cos(t)} \left[ \pi + \int_0^t 6 \sin(s) e^{\cos(s)-1} ds \right].$$

Con il cambio di variabile  $z = \cos(s) - 1$ , da cui  $dz = -\sin(s) ds$ , si ha

$$\int_0^t 6 \sin(s) e^{\cos(s)-1} ds = -6 \int_0^{\cos(t)-1} e^z dz = -6 e^z \Big|_0^{\cos(t)-1} = 6(1 - e^{\cos(t)-1}).$$

Pertanto

$$y(t) = e^{1-\cos(t)} [\pi + 6(1 - e^{\cos(t)-1})] = (\pi + 6) e^{1-\cos(t)} - 6.$$

c) Dall'equazione si ha

$$y'(0) = e^{2 \cdot 0} y(0) + 5 \cos(0) = 1 \cdot 7 + 5 = 12,$$

da cui segue che

$$T_1(y(t); 0) = y(0) + y'(0) t = 7 + 12t.$$

d) Dall'equazione si ha

$$y'(0) = 4 \cdot 0 \cdot y(0) + 9 \cdot 0^2 = 0.$$

Derivando l'equazione si ha poi

$$y''(t) = 4y(t) + 4t y'(t) + 18t,$$

da cui segue che

$$y''(0) = 4y(0) + 4 \cdot 0 \cdot y'(0) + 18 \cdot 0 = 20.$$

Si ha quindi

$$T_2(y(t); 0) = y(0) + y'(0) t + \frac{y''(0)}{2} t^2 = 5 + 10t^2.$$

6) Si risolvano le seguenti equazioni differenziali a variabili separabili.

a)  $y'(t) = 8y(t) + 3$ , se  $y(0) = 0$ .

b)  $y'(t) = 10t(16 + y^2(t))$ , se  $y(0) = 0$ .

c)  $y'(t) = e^{-y(t)} e^{7t}$ , se  $y(0) = 0$ .

d)  $y'(t) = \frac{7(1+y^2(t))}{y(t)}$ , se  $y(0) = 1$ .

---

**Soluzione:**

a) Dividendo per  $8y(t) + 3$ , l'equazione è equivalente a

$$\frac{y'(t)}{8y(t) + 3} = 1.$$

Integrando tra 0 e  $s$  si ha

$$\int_0^s \frac{y'(t)}{8y(t) + 3} dt = \int_0^s 1 dt = s.$$

Con la sostituzione  $z = y(t)$  si ha, ricordando che  $y(0) = 0$ , ed osservando che  $8y(s) + 3 > 0$  per  $s$  vicino a zero,

$$\int_0^s \frac{y'(t)}{8y(t) + 3} dt = \int_0^{y(s)} \frac{dz}{8z + 3} = \frac{1}{8} \ln(|8z + 3|) \Big|_0^{y(s)} = \frac{1}{8} [\ln(8y(s) + 3) - \ln(3)].$$

Pertanto,

$$\frac{1}{8} [\ln(8y(s) + 3) - \ln(3)] = s,$$

da cui segue (dopo facili calcoli...) che

$$\frac{8y(s) + 3}{3} = e^{8s},$$

e quindi che

$$y(s) = \frac{3e^{8s} - 3}{8}.$$

b) Separando le variabili, si ha che deve essere

$$\frac{y'(t)}{16 + y^2(t)} = 10t.$$

Integrando (con la consueta sostituzione  $z = y(t)$ ) si ha

$$\int_0^{y(s)} \frac{dz}{16 + z^2} = \int_0^s 10t dt = 5s^2.$$

Dato che

$$\int \frac{dz}{16 + z^2} = \frac{1}{4} \arctan\left(\frac{z}{4}\right),$$

si ha

$$\frac{1}{4} \arctan\left(\frac{y(s)}{4}\right) = 5s^2,$$

da cui segue che

$$y(s) = 4 \tan(20s^2).$$

c) Separando le variabili si arriva a

$$\int_0^{y(s)} e^z dz = \int_0^s e^{7t} dt = \frac{e^{7s} - 1}{7}.$$

Il primo integrale è immediato, e porta a

$$e^{y(s)} - 1 = \frac{e^{7s} - 1}{7},$$

da cui

$$y(s) = \ln \left( \frac{e^{7s} + 6}{7} \right).$$

**d)** Separando le variabili si arriva a

$$\int_1^{y(s)} \frac{z}{1+z^2} dz = \int_0^s 7 dt = 7s.$$

Dato che

$$\int \frac{z}{1+z^2} dz = \frac{1}{2} \frac{2z}{1+z^2} dz = \frac{1}{2} \ln(1+z^2),$$

si ha

$$\frac{1}{2} \ln(1+y^2(s)) - \frac{1}{2} \ln(2) = 7s,$$

da cui

$$y^2(s) = 2e^{14s} - 1,$$

e quindi

$$y(s) = \sqrt{2e^{14s} - 1}.$$

Perché, tra le due radici, si è scelta quella positiva?