Calcolo integrale — Compito di pre-esonero
28 Aprile 2023 — Compito n. 00091

Istruzioni: le prime due caselle (**V** / **F**) permettono di selezionare la risposta vero/falso. La casella "**C**" serve a correggere eventuali errori invertendo la risposta data.
Per selezionare una casella, annerirla completamente: ■ (non ⊠ o ☑).

Nome: ____________________

Cognome: ____________________

Matricola: | | | | | | | |

Punteggi: 1 punto per ogni risposta esatta, 0 punti per risposte sbagliate o lasciate in bianco.

	1A	1B	1C	1D	2A	2B	2C	2D	3A	3B	3C	3D	4A	4B	4C	4D
V	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
F	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
C	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□

---

1) Sia

$$F(t) = \int_0^t [7\,x^2 + \cos^2(9\,x)]\,dx$$

1A) La funzione $F(t)$ è derivabile su tutto $\mathbb{R}$.
1B) Si ha $F'(0) = 1$.
1C) La funzione $F(t)$ è decrescente su $\mathbb{R}$.
1D) Si ha $F(9) > 0$.

---

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

2A)

$$\int_0^1 (18x^2 + 4x + 6)\,dx = 0\,.$$

2B)

$$\int_0^{\frac{1}{2}} 8\,x\,\mathrm{e}^{2\,x}\,dx = 2\,.$$

2C)

$$\int_0^{8\,\pi} \cos(5\,x)\,dx = 0\,.$$

2D)

$$\int_0^{\sqrt{7}} \frac{10\,x}{7 + x^2}\,dx = 10\,\log(2)\,.$$

---

3) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

3A)

$$\int_{-8}^{8} [5\,x^3 + \sin(5\,x)]\,dx = 0\,.$$

3B)

$$\int_{-2}^{2} [4\,x^2 + 2\,x\,|x|]\,dx > 0\,.$$

3C)

$$\int_{-4}^{5} [4\,x^3 + 9\,x]\,dx > 0\,.$$

3D)

$$\int_{-6}^{5} \frac{x^5}{2 + x^4}\,dx > 0\,.$$

---

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

4A)

$$\int_{11}^{27} \frac{dx}{x - 3} = \log(8)\,.$$

4B)

$$\int_6^{12} \frac{dx}{(x - 3)^2} = \frac{2}{9}\,.$$

4C)

$$\int_8^9 \frac{dx}{(x - 5)\,(x - 7)} = \frac{1}{2}\,\log(3/2)\,.$$

4D)

$$\int_{-5}^{-4} \frac{dx}{x^2 + 10\,x + 26} = \frac{\pi}{4}\,.$$

☐☐☐☐☐☐☐☐ **Cognome** **Nome** **Matricola** **Compito 00091**

5) Determinare una primitiva delle funzioni $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ e $k(x)$, e calcolare gli integrali.

$$\textbf{a)}\ f(x) = x\,\sin(11\,x)\,, \quad \int_0^{13\,\pi} f(x)\,dx\,, \qquad \textbf{b)}\ g(x) = x^2\,\mathrm{e}^{4\,x^3}\,, \quad \int_0^{\sqrt[3]{4}} g(x)\,dx\,,$$

$$\textbf{c)}\ h(x) = (10x^2 + 31x + 11)\,\mathrm{e}^x\,, \quad \int_{-\frac{11}{10}}^{0} h(x)\,dx\,, \qquad \textbf{d)}\ k(x) = \frac{1}{1 + 4\,x^2}\,, \quad \int_0^1 k(x)\,dx\,.$$

☐☐☐☐☐☐☐☐ **Cognome** **Nome** **Matricola** **Compito 00091**

6) Sia

$$F(t) = \int_0^t [9\,\mathrm{e}^{x^2} + 4]\,dx\,.$$

a) Dimostrare che $F(t)$ è derivabile per ogni t in $\mathbb{R}$.
b) Calcolare $F(0)$ e $F'(\sqrt{3})$.
c) Dimostrare che $F(t)$ è una funzione crescente e dispari.
d) Dimostrare che

$$\lim_{t \to +\infty} F(t) = +\infty\,.$$

Soluzioni del compito 00091

1) Sia

$$F(t) = \int_0^t [7\,x^2 + \cos^2(9\,x)]\,dx$$

1A) La funzione $F(t)$ è derivabile su tutto $\mathbb{R}$.

Vero: Dato che la funzione $x \mapsto 7\,x^2 + \cos^2(9\,x)$ è continua su $\mathbb{R}$, la funzione $F(t)$ è derivabile su $\mathbb{R}$ per il teorema fondamentale del calcolo integrale, e si ha $F'(t) = 7\,x^2 + \cos^2(9\,t)$.

1B) Si ha $F'(0) = 1$.

Vero: Dato che per il teorema fondamentale del calcolo integrale si ha $F'(t) = 7\,t^2 + \cos^2(9\,t)$, si ha $F'(0) = 1$.

1C) La funzione $F(t)$ è decrescente su $\mathbb{R}$.

Falso: Dato che per il teorema fondamentale del calcolo integrale si ha $F'(t) = 7\,t^2 + \cos^2(9\,t)$, si ha $F'(t) \geq 0$ per ogni t in $\mathbb{R}$, e quindi la funzione $F(t)$ è crescente su $\mathbb{R}$.

1D) Si ha $F(9) > 0$.

Vero: Dato che la funzione $F(t)$ è crescente (si veda l'esercizio **1C**), si ha

$$F(9) > F(0) = 0\,.$$

---

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

2A)

$$\int_0^1 (18x^2 + 4x + 6)\, dx = 0\,.$$

Falso: Dato che

$$\int (18x^2 + 4x + 6)\, dx = \frac{18}{3}\, x^3 + \frac{4}{2}\, x^2 + 6\,x = 6\,x^3 + 2\,x^2 + 6\,x + c\,,$$

si ha

$$\int_0^1 (18x^2 + 4x + 6)\, dx = 6\,x^3 + 2\,x^2 + 6\,x\Big|_0^1 = 6 + 2 + 6 = 14 \neq 0\,.$$

Alternativamente, si poteva osservare che l'integrale non poteva essere uguale a zero perché la funzione integranda è strettamente positiva sull'intervallo di integrazione.

2B)

$$\int_0^{\frac{1}{2}} 8\,x\,\mathrm{e}^{2\,x}\, dx = 2\,.$$

Vero: Si ha, con la sostituzione $y = 2\,x$, da cui $dy = 2\,x$,

$$\int_0^{\frac{1}{2}} 8\,x\,\mathrm{e}^{2\,x}\, dx = 2\int_0^{\frac{1}{2}} (2\,x)\,\mathrm{e}^{2\,x}\,(2\,dx) = 2\int_0^1 y\,\mathrm{e}^y\, dy\,.$$

Dato che una primitiva di $y\,\mathrm{e}^y$ è $(y-1)\,\mathrm{e}^y$, si ha

$$\int_0^{\frac{1}{2}} 8\,x\,\mathrm{e}^{2\,x}\, dx = 2\,(y-1)\,\mathrm{e}^y\Big|_0^1 = 2\,.$$

2C)

$$\int_0^{8\,\pi} \cos(5\,x)\, dx = 0\,.$$

Vero: Si ha

$$\int_0^{8\,\pi} \cos(5\,x)\, dx = \frac{\sin(5\,x)}{5}\Big|_0^{8\,\pi} = \frac{\sin(40\,\pi) - \sin(0)}{5} = 0\,.$$

2D)

$$\int_0^{\sqrt{7}} \frac{10\,x}{7 + x^2}\, dx = 10\,\log(2)\,.$$

Falso: Dato che

$$\frac{10\,x}{7 + x^2} = 5\,\frac{2x}{7 + x^2} = 5\,\frac{(7 + x^2)'}{7 + x^2}\,,$$

si ha

$$\int_0^{\sqrt{7}} \frac{10\,x}{7 + x^2}\, dx = 5\,\log(7 + x^2)\Big|_0^{\sqrt{7}} = 5\,[\log(14) - \log(7)] = 5\,\log(14/7) = 5\,\log(2) \neq 10\,\log(2)\,.$$

---

3) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

3A)

$$\int_{-8}^{8} [5\,x^3 + \sin(5\,x)]\,dx = 0\,.$$

Vero: La funzione integranda è dispari, e l'intervallo di integrazione è simmetrico rispetto all'origine. Pertanto, l'integrale vale zero.

3B)

$$\int_{-2}^{2} [4\,x^2 + 2\,x\,|x|]\,dx > 0\,.$$

Vero: La funzione $x \mapsto 4\,x^2$ è pari, mentre la funzione $x \mapsto 2\,x\,|x|$ è dispari. Dato che l'intervallo è simmetrico rispetto all'origine, si ha

$$\int_{-2}^{2} [4\,x^2 + 2\,x\,|x|]\,dx = \int_{-2}^{2} 4\,x^2\,dx = 2\int_{0}^{2} 4\,x^2\,dx > 0\,,$$

dato che la funzione integranda è positiva.

3C)

$$\int_{-4}^{5} [4\,x^3 + 9\,x]\,dx > 0\,.$$

Vero: La funzione integranda è dispari; pertanto, si ha

$$\int_{-4}^{5} [4\,x^3 + 9\,x]\,dx = \int_{-4}^{4} [4\,x^3 + 9\,x]\,dx + \int_{4}^{5} [4\,x^3 + 9\,x]\,dx = \int_{4}^{5} [4\,x^3 + 9\,x]\,dx\,,$$

e l'ultimo integrale è positivo essendo l'integrale di una funzione positiva.

3D)

$$\int_{-6}^{5} \frac{x^5}{2 + x^4}\,dx > 0\,.$$

Falso: Dato che la funzione integranda è dispari, si ha

$$\int_{-6}^{5} \frac{x^5}{2 + x^4}\,dx = \int_{-6}^{-5} \frac{x^5}{2 + x^4}\,dx + \int_{-5}^{5} \frac{x^5}{2 + x^4}\,dx = \int_{-6}^{-5} \frac{x^5}{2 + x^4}\,dx < 0\,,$$

dato che la funzione integranda è negativa.

---

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

4A)

$$\int_{11}^{27} \frac{dx}{x-3} = \log(8)\,.$$

Falso: Si ha

$$\int_{11}^{27} \frac{dx}{x-3} = \log(|x-3|)\Big|_{11}^{27} = \log(24) - \log(8) = \log(24/8) = \log(3) \neq \log(8)\,.$$

4B)

$$\int_{6}^{12} \frac{dx}{(x-3)^2} = \frac{2}{9}\,.$$

Vero: Ricordando che

$$\int \frac{dx}{(x-a)^2} = \frac{1}{a-x} + c\,,$$

si ha

$$\int_{6}^{12} \frac{dx}{(x-3)^2} = \frac{1}{3-x}\Big|_{6}^{12} = -\frac{1}{9} + \frac{1}{3} = \frac{2}{9}\,.$$

4C)

$$\int_{8}^{9} \frac{dx}{(x-5)\,(x-7)} = \frac{1}{2}\,\log(3/2)\,.$$

Vero: Dall'identità

$$\frac{1}{(x-5)\,(x-7)} = \frac{A}{x-7} + \frac{B}{x-5}$$

si ricava (moltiplicando per $(x-5)\,(x-7)$) che deve essere

$$1 = A\,(x-5) + B\,(x-7)\,.$$

Scegliendo $x = 5$ si ricava $B = -\frac{1}{2}$, e scegliendo $x = 7$ si ricava $A = \frac{1}{2}$. Pertanto,

$$\frac{1}{(x-5)\,(x-7)} = \frac{1}{2}\Big[\frac{1}{x-7} - \frac{1}{x-5}\Big]\,.$$

Ne segue che

$$\int \frac{dx}{(x-5)\,(x-7)} = \frac{1}{2}\,\log\left(\left|\frac{x-7}{x-5}\right|\right) + c\,,$$

cosicché

$$\int_{8}^{9} \frac{dx}{(x-5)\,(x-7)} = \frac{1}{2}\,[\log(1/2) - \log(1/3)] = \frac{1}{2}\,\log(3/2)\,.$$

4D)

$$\int_{-5}^{-4} \frac{dx}{x^2 + 10\,x + 26} = \frac{\pi}{4}\,.$$

Vero: Si ha

$$x^2 + 10\,x + 26 = (x+5)^2 + 1\,,$$

e quindi

$$\int \frac{dx}{x^2 + 10\,x + 26} = \int \frac{dx}{1 + (x+5)^2}\,.$$

Con la sostituzione $y = x + 5$, da cui $dx = dy$, si ha

$$\int \frac{dx}{x^2 + 10\,x + 26} = \int \frac{dy}{1+y^2} = \arctan(y) + c = \arctan(x+5) + c\,.$$

Pertanto,
$$\int_{-5}^{-4} \frac{dx}{x^2+10\,x+26} = \arctan(x+5)\Big|_{-5}^{-4} = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4}\,.$$

5) Determinare una primitiva delle funzioni $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ e $k(x)$, e calcolare gli integrali.

$$\mathbf{a})\ f(x) = x\,\sin(11\,x)\,, \quad \int_0^{13\,\pi} f(x)\,dx\,, \qquad \mathbf{b})\ g(x) = x^2\,\mathrm{e}^{4\,x^3}\,, \quad \int_0^{\sqrt[3]{4}} g(x)\,dx\,,$$

$$\mathbf{c})\ h(x) = (10x^2 + 31x + 11)\,\mathrm{e}^x\,, \quad \int_{-\frac{11}{10}}^{0} h(x)\,dx\,, \qquad \mathbf{d})\ k(x) = \frac{1}{1 + 4\,x^2}\,, \quad \int_0^1 k(x)\,dx\,.$$

Soluzione:

a) Si ha, integrando per parti, e ponendo $f'(x) = \sin(11\,x)$, da cui $f(x) = -\frac{\cos(11\,x)}{11}$ e $g(x) = x$, da cui $g'(x) = 1$,

$$\int x\,\sin(11\,x) = -\frac{x\,\cos(11\,x)}{11} + \int 1 \cdot \frac{\cos(11\,x)}{11}\,dx = -\frac{x\,\cos(11\,x)}{11} + \frac{\sin(11\,x)}{121} + c\,.$$

Pertanto,

$$\int_0^{13\,\pi} x\,\sin(11\,x)\,dx = -\frac{x\,\cos(11\,x)}{11} + \frac{\sin(11\,x)}{121}\Bigg|_0^{13\,\pi} = -\frac{13\,\pi\,\cos(143\,\pi)}{11} = \frac{13}{11}\,\pi\,.$$

b) Si ha, con la sostituzione $y = 4\,x^3$, da cui $dy = 12\,x^2\,dx$ (e quindi $x^2\,dx = \frac{dy}{12}$),

$$\int x^2\,\mathrm{e}^{4\,x^3}\,dx = \frac{1}{12}\int \mathrm{e}^y\,dy = \frac{\mathrm{e}^y}{12} + c = \frac{\mathrm{e}^{4\,x^3}}{12} + c\,,$$

da cui segue che

$$\int_0^{\sqrt[3]{4}} x^2\,\mathrm{e}^{4\,x^3}\,dx = \frac{\mathrm{e}^{4\,x^3}}{12}\Bigg|_0^{\sqrt[3]{4}} = \frac{\mathrm{e}^{16} - 1}{12}\,.$$

c) Ricordiamo che se $P_2(x)$ è un polinomio di grado 2, allora

$$\int P_2(x)\,\mathrm{e}^x\,dx = Q_2(x)\,\mathrm{e}^x\,,$$

con $Q_2(x)$ un polinomio di grado 2 tale che $Q_2(x) + Q_2'(x) = P_2(x)$. Pertanto, se $Q_2(x) = a\,x^2 + b\,x + c$, deve essere

$$Q_2(x) + Q_2'(x) = a\,x^2 + (2a + b)\,x + b + c = 10x^2 + 31x + 11\,.$$

Da questa relazione si ricava $a = 10$, $2a + b = 31$ e $b + c = 11$; risolvendo, si trova $a = 10$, $b = 11$ e $c = 0$. Pertanto,

$$\int (10x^2 + 31x + 11)\,\mathrm{e}^x\,dx = (10x^2 + 11x)\,\mathrm{e}^x + c\,,$$

da cui segue che

$$\int_{-\frac{11}{10}}^{0} (10x^2 + 31x + 11)\,\mathrm{e}^x\,dx = (10x^2 + 11x)\,\mathrm{e}^x\Big|_{-\frac{11}{10}}^{0} = 0\,.$$

d) Si ha, con la sostituzione $y = 2\,x$, da cui $dx = \frac{dy}{2}$,

$$\int \frac{dx}{1 + 4\,x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dy}{1 + y^2} = \frac{\arctan(y)}{2} + c = \frac{\arctan(2\,x)}{2} + c\,.$$

Pertanto,

$$\int_0^1 \frac{dx}{1 + 4\,x^2} = \frac{\arctan(2\,x)}{2}\Bigg|_0^1 = \frac{\arctan(2)}{2}\,.$$

6) Sia

$$F(t) = \int_0^t [9\,\mathrm{e}^{x^2} + 4]\,dx\,.$$

a) Dimostrare che $F(t)$ è derivabile per ogni t in $\mathbb{R}$.
b) Calcolare $F(0)$ e $F'(\sqrt{3})$.
c) Dimostrare che $F(t)$ è una funzione crescente e dispari.
d) Dimostrare che

$$\lim_{t\to+\infty} F(t) = +\infty\,.$$

Soluzione:
a) La funzione $f(x) = 9\,\mathrm{e}^{x^2} + 4$ è continua su $\mathbb{R}$. Pertanto, per il teorema fondamentale del calcolo integrale, la funzione $F(t)$ è derivabile per ogni t in $\mathbb{R}$ e si ha

$$F'(t) = f(t) = 9\,\mathrm{e}^{t^2} + 4\,, \qquad \forall t \in \mathbb{R}\,. \tag{1}$$

b) Si ha

$$F(0) = \int_0^0 [9\,\mathrm{e}^{x^2} + 4]\,dx = 0\,,$$

e, per la (1),

$$F'(\sqrt{3}) = f(\sqrt{3}) = 9\,\mathrm{e}^3 + 4\,.$$

c) Dato che per la (1) la derivata di $F(t)$ è positiva, la funzione $F(t)$ è crescente. Inoltre, dato che la funzione $f(x)$ è pari, la funzione $F(t)$ è dispari. Infatti, con la sostituzione $x = -y$, da cui $dx = -dy$,

$$F(-t) = \int_0^{-t} [9\,\mathrm{e}^{x^2} + 4]\,dx = -\int_0^t [9\,\mathrm{e}^{(-y)^2} + 4]\,dy = -\int_0^t [9\,\mathrm{e}^{y^2} + 4]\,dy = -F(t)\,.$$

d) Si ha, se $t \geq 0$, e dato che $f(x) \geq 4$,

$$F(t) = \int_0^t [9\,\mathrm{e}^{x^2} + 4]\,dx \geq \int_0^t 4\,dx = 4\,t\,,$$

da cui segue che (si noti che il limite di $F(t)$ esiste perché $F(t)$ è crescente)

$$\lim_{t\to+\infty} F(t) \geq \lim_{t\to+\infty} 4\,t = +\infty\,.$$