Calcolo integrale — Scheda di esercizi n. 5
14 Aprile 2023 — Compito n. 00038

Istruzioni: le prime due caselle (**V** / **F**) permettono di selezionare la risposta vero/falso. La casella "**C**" serve a correggere eventuali errori invertendo la risposta data.
Per selezionare una casella, annerirla completamente: ■ (non ☒ o ☑).

Nome: ______________________

Cognome: ______________________

Matricola: ☐☐☐☐☐☐☐

Punteggi: 1 punto per ogni risposta esatta, 0 punti per risposte sbagliate o lasciate in bianco.

	1A	**1B**	**1C**	**1D**	**2A**	**2B**	**2C**	**2D**	**3A**	**3B**	**3C**	**3D**	**4A**	**4B**	**4C**	**4D**
V	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
F	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
C	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

---

1) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false

1A) La funzione $f(x) = 5x^2 - 6x + 6$ è integrabile su ogni intervallo chiuso e limitato di $\mathbb{R}$.
1B) Esistono intervalli chiusi e limitati di $\mathbb{R}$ su cui la funzione $f(x) = |x-2|$ non è integrabile.
1C) La funzione $f(x) = \frac{x+6}{x-3}$ è integrabile su ogni intervallo chiuso e limitato di $\mathbb{R}$.
1D) La funzione $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$ è integrabile su ogni intervallo chiuso e limitato di $\mathbb{R}$.

---

2) Sia

$$F(t) = \int_0^t x\, \mathrm{e}^{-4\,x^4}\, dx\,.$$

2A) La funzione $F(t)$ non è derivabile per ogni t in $\mathbb{R}$.
2B) Si ha $F'(0) = 0$.
2C) La funzione $F(t)$ è una funzione pari.
2D) La funzione $F(t)$ è crescente per $t \geq 0$.

---

3) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false

3A) La funzione $x^6 \sin(x^7)$ si integra per sostituzione.
3B) La funzione $x^4 \sin(x)$ si integra per sostituzione.
3C) La funzione $x^9 \sin(x^2)$ si integra per sostituzione prima, e per parti poi.
3D) La funzione $f(x) = x^{10} \arctan(x)$ si integra per sostituzione prima, e per parti poi.

---

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false

4A) Si ha

$$\int_4^{17} \frac{dx}{x} = \ln\left(\frac{4}{17}\right).$$

4B) Si ha

$$\int_{14}^{16} \frac{dx}{x-2} = \ln\left(\frac{8}{7}\right).$$

4C) Si ha

$$\int_8^{12} \frac{dx}{6-x} = \ln(3)\,.$$

4D) Si ha

$$\int_0^1 \frac{dx}{3\,x-16} = \ln\left(\frac{13}{16}\right).$$

Docente
- ☐ DelaTorre Pedraza
- ☐ Orsina

☐☐☐☐☐☐☐☐ **Cognome** **Nome** **Matricola** **Compito 00038**

5) Calcolare una primitiva delle seguenti funzioni

$$\textbf{a1})\ x\,\sin(x)\,,\qquad \textbf{a2})\ x^3\,e^x\,,\qquad \textbf{b1})\ x^2\,\ln(x)\,,\qquad \textbf{b2})\ (x^2-4x+4)\,e^x\,,$$

$$\textbf{c1})\ x\,e^{6\,x}\,,\qquad \textbf{c2})\ x\,\cos(5\,x)\,,\qquad \textbf{d1})\ e^{\sqrt{x}}\,,\qquad \textbf{d2})\ \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}\,,$$

☐☐☐☐☐☐☐☐ **Cognome** **Nome** **Matricola** **Compito 00038**

6)

a1) - a2) Trovare una primitiva di $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 8x + 16}$ e calcolare $\displaystyle\int_5^6 f(x)\,dx$.

b1) - b2) Trovare una primitiva di $g(x) = \dfrac{1}{x^2 - 13x + 30}$ e calcolare $\displaystyle\int_{11}^{12} g(x)\,dx$.

c1) - c2) Trovare una primitiva di $h(x) = \dfrac{1}{x^2 - 10x + 50}$ e calcolare $\displaystyle\int_5^{10} h(x)\,dx$.

d1) - d2) Trovare una primitiva di $k(x) = \dfrac{2x - 9}{x^2 - 10x + 21}$ e di $j(x) = \dfrac{x^3}{10 + x^2}$.

☐☐☐☐☐☐☐☐ **Cognome** **Nome** **Matricola** **Compito 00038**

7) Trovare una primitiva di

a1) $x\,\mathrm{e}^{2\,x}$, **a2)** $\mathrm{e}^{x}\,\sin(2\,x)$, **b1)** $\sin^2(5\,x)$, **b2)** $\cos^3(4\,x)$,

c1) $(10x+3)\,\mathrm{e}^{x}$, **c2)** $(3x^2-2x+4)\,\mathrm{e}^{x}$, **d1)** $x^2\,\ln(5\,x)$, **d2)** $6\,x\,\arctan(3\,x)$.

Soluzioni del compito 00038

1) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false

1A) La funzione $f(x) = 5x^2 - 6x + 6$ è integrabile su ogni intervallo chiuso e limitato di $\mathbb{R}$.

Vero: Dal momento che la funzione $f(x) = 5x^2 - 6x + 6$ è una funzione continua, è integrabile su ogni intervallo chiuso e limitato di $\mathbb{R}$.

1B) Esistono intervalli chiusi e limitati di $\mathbb{R}$ su cui la funzione $f(x) = |x - 2|$ non è integrabile.

Falso: Dal momento che la funzione $f(x) = |x - 2|$ è una funzione continua, è integrabile su ogni intervallo chiuso e limitato di $\mathbb{R}$.

1C) La funzione $f(x) = \frac{x+6}{x-3}$ è integrabile su ogni intervallo chiuso e limitato di $\mathbb{R}$.

Falso: Dal momento che la funzione è illimitata (sia superiormente che inferiormente) in ogni intervallo chiuso e limitato che contenga $x = 3$ al suo interno (ad esempio: l'intervallo $[2, 4]$), la funzione non è integrabile su tali intervalli.

1D) La funzione $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$ è integrabile su ogni intervallo chiuso e limitato di $\mathbb{R}$.

Vero: Dal momento che $x^2 - 9 = (x - 3)\,(x + 3)$, si ha, se $x \neq 3$,

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \frac{(x - 3)\,(x + 3)}{x - 3} = x + 3\,.$$

Ne consegue che la funzione $f(x)$ coincide, in tutti punti tranne $x = 3$, con la funzione continua $g(x) = x + 3$, che è integrabile su ogni intervallo chiuso e limitato di $\mathbb{R}$; dunque, anche la funzione $f(x)$ è integrabile su tali intervalli.

---

2) Sia

$$F(t) = \int_0^t x\,\mathrm{e}^{-4\,x^4}\,dx\,.$$

2A) La funzione $F(t)$ non è derivabile per ogni t in $\mathbb{R}$.

Falso: Dal momento che la funzione $f(x) = x\,\mathrm{e}^{-4\,x^4}$ è una funzione continua, per il teorema fondamentale del calcolo integrale la funzione $F(t)$ è derivabile, e si ha

$$F'(t) = f(t) = t\,\mathrm{e}^{-4\,t^4} \qquad \forall t \in \mathbb{R}\,.$$

2B) Si ha $F'(0) = 0$.

Vero: Dato che $F'(t) = t\,\mathrm{e}^{-4\,t^4}$ (si veda la domanda 2A), si ha $F'(0) = 0$.

2C) La funzione $F(t)$ è una funzione pari.

Vero: Dal momento che la funzione $f(x) = x\,\mathrm{e}^{-4\,x^4}$ è una funzione dispari, la funzione $F(t)$ è una funzione pari. Infatti,

$$F(-t) = \int_0^{-t} x\,\mathrm{e}^{-4\,x^4}\,dx = \begin{bmatrix} y = -x \\ dy = -dx \end{bmatrix} = -\int_0^t (-y)\,\mathrm{e}^{-4\,(-y)^4}\,dy = \int_0^t y\,\mathrm{e}^{-4\,y^4}\,dy = F(t)\,.$$

2D) La funzione $F(t)$ è crescente per $t \geq 0$.

Vero: Dato che $F'(t) = t\,\mathrm{e}^{-4\,t^4}$ (si veda la domanda 2A), si ha $F'(t) \geq 0$ per $t \geq 0$, e quindi la funzione $F(t)$ è crescente su tale insieme.

---

3) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false

3A) La funzione $x^6 \sin(x^7)$ si integra per sostituzione.

Vero: Infatti, definendo $y = x^7$, da cui $dy = 7x^6\,dx$, si ha

$$\int x^6 \sin(x^7)\,dx = \frac{1}{7}\int \sin(y)\,dy\,,$$

che è un integrale immediato.

3B) La funzione $x^4 \sin(x)$ si integra per sostituzione.

Falso: No, si integra per parti. Infatti, derivando il termine polinomiale x^4 e integrando la funzione trigonometrica, si ha

$$\int x^4 \sin(x)\,dx = -x^4 \cos(x) + 4\int x^3 \cos(x)\,dx\,.$$

Il procedimento continua 3 volte, finché non si arriva ad un integrale immediato (di $\sin(x)$ o di $\cos(x)$).

3C) La funzione $x^9 \sin(x^2)$ si integra per sostituzione prima, e per parti poi.

Vero: Infatti, definendo $y = x^2$, da cui $dy = 2x\,dx$, si ha

$$\int x^9 \sin(x^2)\,dx = \int (x^2)^4 \sin(x^2)\,x\,dx = \frac{1}{2}\int y^4 \sin(y)\,dy\,,$$

e l'ultimo integrale si svolge per parti (si veda la domanda 3B).

3D) La funzione $f(x) = x^{10} \arctan(x)$ si integra per sostituzione prima, e per parti poi.

Falso: No, è il contrario. Infatti, integrando il monomio e derivando l'arcotangente, si ha

$$\int x^{10} \arctan(x)\,dx = \frac{x^{11}}{11}\arctan(x) - \frac{1}{11}\int \frac{x^{11}}{1+x^2}\,dx\,.$$

L'ultimo integrale si svolge per sostituzione, ponendo $y = 1 + x^2$, da cui $dy = 2x\,dx$. Si ha

$$\int \frac{x^{11}}{1+x^2}\,dx = \int \frac{(x^2)^5}{1+x^2}\,x\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{(y-1)^5}{y}\,dy\,,$$

e quest'ultimo integrale, dopo aver sviluppato la potenza del binomio, è la somma di 6 integrali immediati.

---

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false

4A) Si ha
$$\int_4^{17} \frac{dx}{x} = \ln\left(\frac{4}{17}\right).$$
Falso: Infatti, si ha
$$\int_4^{17} \frac{dx}{x} = \ln(|x|)\Big|_4^{17} = \ln(17) - \ln(4) = \ln\left(\frac{17}{4}\right) \neq \ln\left(\frac{4}{17}\right).$$

4B) Si ha
$$\int_{14}^{16} \frac{dx}{x-2} = \ln\left(\frac{8}{7}\right).$$
Falso: Infatti,
$$\int_{14}^{16} \frac{dx}{x-2} = \ln(|x-2|)\Big|_{14}^{16} = \ln(14) - \ln(12) = \ln\left(\frac{7}{6}\right) \neq \ln\left(\frac{8}{7}\right).$$

4C) Si ha
$$\int_8^{12} \frac{dx}{6-x} = \ln(3).$$
Falso: Infatti,
$$\int_8^{12} \frac{dx}{6-x} = -\int_8^{12} \frac{dx}{x-6} = -\ln(|x-6|)\Big|_8^{12} = -\ln(6) + \ln(2) = -\ln(3) \neq \ln(3).$$

4D) Si ha
$$\int_0^1 \frac{dx}{3\,x-16} = \ln\left(\frac{13}{16}\right).$$
Falso: Infatti, con la sostituzione $y = 3\,x - 16$, da cui $dy = 3\,dx$, si ha
$$\int_0^1 \frac{dx}{3\,x-16} = \frac{1}{3}\int_{-16}^{-13} \frac{dy}{y} = \frac{\ln(|y|)}{3}\Big|_{-16}^{-13} = \frac{\ln(13) - \ln(16)}{3} = \frac{1}{3}\,\ln\left(\frac{13}{16}\right) \neq \ln\left(\frac{13}{16}\right).$$

---

5) Calcolare una primitiva delle seguenti funzioni

$$\textbf{a1)}\ x\,\sin(x)\,,\qquad \textbf{a2)}\ x^3\,\mathrm{e}^x\,,\qquad \textbf{b1)}\ x^2\,\ln(x)\,,\qquad \textbf{b2)}\ (x^2-4x+4)\,\mathrm{e}^x\,,$$

$$\textbf{c1)}\ x\,\mathrm{e}^{6\,x}\,,\qquad \textbf{c2)}\ x\,\cos(5\,x)\,,\qquad \textbf{d1)}\ \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\,,\qquad \textbf{d2)}\ \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x^3}\,,$$

Soluzione:

a1) Integriamo per parti, derivando x e integrando $\sin(x)$:

$$\int x\,\sin(x)\,dx = \left[\begin{array}{ccc} f'(x)=\sin(x) & \to & f(x)=-\cos(x) \\ g(x)=x & \to & g'(x)=1 \end{array}\right] = -x\,\cos(x) - \int(-\cos(x))\,dx\,,$$

da cui

$$\int x\,\sin(x)\,dx = -x\,\cos(x)+\sin(x)\,.$$

a1) Integriamo per parti, derivando x^3 e integrando e^x:

$$\int x^3\,\mathrm{e}^x\,dx = \left[\begin{array}{ccc} f'(x)=\mathrm{e}^x & \to & f(x)=\mathrm{e}^x \\ g(x)=x^3 & \to & g'(x)=3\,x^2 \end{array}\right] = x^3\,\mathrm{e}^x - 3\int x^2\,\mathrm{e}^x\,dx\,.$$

Per l'integrale rimasto, integriamo per parti, derivando x^2 e integrando e^x:

$$\int x^2\,\mathrm{e}^x\,dx = \left[\begin{array}{ccc} f'(x)=\mathrm{e}^x & \to & f(x)=\mathrm{e}^x \\ g(x)=x^2 & \to & g'(x)=2\,x \end{array}\right] = x^2\,\mathrm{e}^x - 2\int x\,\mathrm{e}^x\,dx\,.$$

Per l'ultimo integrale, integriamo per parti, derivando x e integrando e^x:

$$\int x\,\mathrm{e}^x\,dx = \left[\begin{array}{ccc} f'(x)=\mathrm{e}^x & \to & f(x)=\mathrm{e}^x \\ g(x)=x & \to & g'(x)=1 \end{array}\right] = x\,\mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x\,dx = x\,\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x\,.$$

Rimettendo insieme i risultati, si ha

$$\int x^3\,\mathrm{e}^x = x^3\,\mathrm{e}^x - 3\,x^2\,\mathrm{e}^x + 6\,x\,\mathrm{e}^x - 6\,\mathrm{e}^x = (x^3-3x^2+6x-6)\,\mathrm{e}^x\,.$$

b1) Integriamo per parti, derivando $\ln(x)$ e integrando x^2:

$$\int x^2\,\ln(x)\,dx = \left[\begin{array}{ccc} f'(x)=x^2 & \to & f(x)=\frac{x^3}{3} \\ g(x)=\ln(x) & \to & g'(x)=\frac{1}{x} \end{array}\right] = \frac{x^3\,\ln(x)}{3} - \int\frac{x^3}{3}\,\frac{1}{x}\,dx\,,$$

da cui

$$\int x^2\,\ln(x)\,dx = \frac{x^3\,\ln(x)}{3} - \int\frac{x^2}{3}\,dx = \frac{x^3\,\ln(x)}{3} - \frac{x^3}{9} = \frac{x^3}{9}\,(3\,\ln(x)-1)\,.$$

b2) Ricordiamo il seguente risultato: se $P(x)$ è un polinomio, allora

$$\int P(x)\,\mathrm{e}^x\,dx = Q(x)\,\mathrm{e}^x\,,$$

dove $Q(x)$ è un polinomio dello stesso grado di $P(x)$ e tale che

$$Q(x)+Q'(x)=P(x)\,.$$

Pertanto,

$$\int (x^2-4x+4)\,\mathrm{e}^x\,dx = Q(x)\,\mathrm{e}^x\,,$$

dove $Q(x)$ è un polinomio di secondo grado tale che

$$Q(x)+Q'(x)=x^2-4x+4\,.$$

Scrivendo $Q(x)=a\,x^2+b\,x+c$, si ha $Q'(x)=2a\,x+b$, da cui

$$Q'(x)+Q(x)=a\,x^2+(2a+b)\,x+(b+c)=x^2-4x+4\,,$$

e quindi,per il principio di identità dei polinomi, deve essere $a = 1$, $2a + b = -4$ e $b + c = 4$, da cui segue $a = 1$, $b = -6$ e $c = 10$. In definitiva,

$$\int (x^2 - 4x + 4)\, e^x \, dx = (x^2 - 6x + 10)\, e^x \,.$$

c1) Sostituiamo $y = 6\,x$, da cui $dy = 6\,dx$; si ha

$$\int x\, e^{6\,x} \, dx = \frac{1}{36} \int y\, e^y \, dy \,.$$

L'ultimo integrale si svolge per parti:

$$\int y\, e^y \, dy = \left[\begin{array}{ccc} f'(x) = e^y & \to & f(x) = e^y \\ g(x) = y & \to & g'(x) = 1 \end{array} \right] = y\, e^y - \int e^y \, dy = (y-1)\, e^y \,,$$

e quindi

$$\int x\, e^{6\,x} \, dx = \frac{(6\,x - 1)\, e^{6\,x}}{36} \,.$$

c2) Sostituiamo $y = 5\,x$, da cui $dy = 5\,dx$; si ha

$$\int x\, \cos(5\,x) \, dx = \frac{1}{25} \int y\, \cos(y) \, dy \,.$$

L'ultimo integrale si svolge per parti:

$$\int y\, \cos(y) \, dy = \left[\begin{array}{ccc} f'(x) = \cos(y) & \to & f(x) = \sin(y) \\ g(x) = y & \to & g'(x) = 1 \end{array} \right] = y\, \sin(y) - \int \sin(y) \, dy = y\, \sin(y) + \cos(y) \,,$$

e quindi

$$\int x\, \cos(5\,x) \, dx = \frac{5\,x\, \sin(5\,x) + \cos(5\,x)}{25} \,.$$

d1) Sostituiamo $x = y^2$, da cui $dx = 2\,y\,dy$. Pertanto,

$$\int e^{\sqrt{x}} \, dx = 2 \int e^y\, y \, dy \,.$$

Svolgendo l'ultimo integrale per parti, si ha

$$\int y\, e^y \, dy = \left[\begin{array}{ccc} f'(x) = e^y & \to & f(x) = e^y \\ g(x) = y & \to & g'(x) = 1 \end{array} \right] = y\, e^y - \int e^y \, dy = (y-1)\, e^y \,,$$

da cui segue che

$$\int e^{\sqrt{x}} \, dx = 2\, (\sqrt{x} - 1)\, e^{\sqrt{x}} \,.$$

d2) Sostituiamo $y = \frac{1}{x}$, da cui $dy = -\frac{dx}{x^2}$. Pertanto,

$$\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3} \, dx = \int \frac{e^{\frac{1}{y}}}{x} \frac{dx}{x^2} = -\int y\, e^y \, dy \,.$$

Svolgendo l'ultimo integrale per parti, come nell'esercizio **d1)**, si ha

$$\int y\, e^y \, dy = (y-1)\, e^y \,,$$

da cui segue che

$$\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3} \, dx = \left(1 - \frac{1}{x}\right) e^{\frac{1}{x}} \,.$$

6)

a1) - a2) Trovare una primitiva di $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 8x + 16}$ e calcolare $\displaystyle\int_5^6 f(x)\, dx\,.$

b1) - b2) Trovare una primitiva di $g(x) = \dfrac{1}{x^2 - 13x + 30}$ e calcolare $\displaystyle\int_{11}^{12} g(x)\, dx\,.$

c1) - c2) Trovare una primitiva di $h(x) = \dfrac{1}{x^2 - 10x + 50}$ e calcolare $\displaystyle\int_5^{10} h(x)\, dx\,.$

d1) - d2) Trovare una primitiva di $k(x) = \dfrac{2x - 9}{x^2 - 10x + 21}$ e di $j(x) = \dfrac{x^3}{10 + x^2}$.

Soluzione:

a1) - a2) Osserviamo che si ha $x^2 - 8x + 16 = (x - 4)^2$. Pertanto,

$$\int \frac{dx}{x^2 - 8x + 16} = \int \frac{dx}{(x - 4)^2} = -\frac{1}{x - 4}\,,$$

e quindi

$$\int_5^6 \frac{dx}{x^2 - 8x + 16} = -\frac{1}{x - 4}\Big|_5^6 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}\,.$$

b1) - b2) Osserviamo che si ha $x^2 - 13x + 30 = (x - 10)\,(x - 3)$. Cerchiamo dunque A e B tali che

$$\frac{1}{(x - 10)\,(x - 3)} = \frac{A}{x - 10} + \frac{B}{x - 3}\,.$$

Moltiplicando una volta per $x - 10$ e una volta per $x - 3$ si ottiene

$$\frac{1}{x - 3} = A + B\,\frac{x - 10}{x - 3} \quad \text{e} \quad \frac{1}{x - 10} = A\,\frac{x - 3}{x - 10} + B\,.$$

Scegliendo $x = 10$ nella prima e $x = 3$ nella seconda, si trova $A = \frac{1}{7} = -B$, cosicché

$$\frac{1}{x^2 - 13x + 30} = \frac{1}{(x - 10)\,(x - 3)} = \frac{1}{7\,(x - 10)} - \frac{1}{7\,(x - 3)}\,,$$

da cui segue che

$$\int \frac{dx}{x^2 - 13x + 30} = \int \Big[\frac{1}{7\,(x - 10)} - \frac{1}{7\,(x - 3)}\Big]\, dx = \frac{\ln(|x - 10|) - \ln(|x - 3|)}{7} = \frac{1}{7}\,\ln\Big(\Big|\frac{x - 10}{x - 3}\Big|\Big)\,.$$

Pertanto,

$$\int_{11}^{12} \frac{dx}{x^2 - 13x + 30} = \frac{1}{7}\,\ln\Big(\Big|\frac{x - 10}{x - 3}\Big|\Big)\Big|_{11}^{12} = \frac{1}{7}\Big[\ln\Big(\frac{2}{9}\Big) - \ln\Big(\frac{1}{8}\Big)\Big] = \frac{1}{7}\,\ln\Big(\frac{16}{9}\Big)\,.$$

c1) - c2) Osserviamo che si ha $x^2 - 10x + 50 = (x - 5)^2 + 25$. Possiamo allora scrivere

$$x^2 - 10x + 50 = 25\,\Big[1 + \Big(\frac{x - 5}{5}\Big)^2\Big]\,,$$

e quindi si ha

$$\int \frac{dx}{x^2 - 10x + 50} = \frac{1}{25}\int \frac{dx}{1 + \big(\frac{x-5}{5}\big)^2}\,.$$

Con la sostituzione $y = \frac{x-5}{5}$, da cui $dy = \frac{dx}{5}$, si ha

$$\int \frac{dx}{x^2 - 10x + 50} = \frac{1}{5}\int \frac{dy}{1 + y^2} = \frac{1}{5}\,\arctan(y) = \frac{1}{5}\,\arctan\Big(\frac{x - 5}{5}\Big)\,.$$

Si ha pertanto

$$\int_5^{10} \frac{dx}{x^2 - 10x + 50} = \frac{1}{5}\,\arctan\Big(\frac{x - 5}{5}\Big)\Big|_5^{10} = \frac{\arctan(1) - \arctan(0)}{5} = \frac{\pi}{20}\,.$$

d1) Osserviamo che si ha
$$\frac{2x-9}{x^2-10x+21}=\frac{2x-10}{x^2-10x+21}+\frac{1}{x^2-10x+21}\,.$$
Dal momento che al numeratore compare la derivata del denominatore, si ha
$$\int\frac{2x-10}{x^2-10x+21}\,dx=\ln(|x^2-10x+21|)\,.$$
Per calcolare il secondo integrale, osserviamo che si ha $x^2-10x+21=(x-7)\,(x-3)$. Con conti analoghi a quelli visti nello svolgimento dell'esercizio **b1) - b2)** si ha che
$$\frac{1}{x^2-10x+21}=\frac{1}{(x-7)\,(x-3)}=\frac{1}{4\,(x-7)}-\frac{1}{4\,(x-3)}\,,$$
cosicché
$$\int\frac{dx}{x^2-10x+21}=\int\left[\frac{1}{4\,(x-7)}-\frac{1}{4\,(x-3)}\right]dx=\frac{1}{4}\,\ln\left(\left|\frac{x-7}{x-3}\right|\right).$$
Mettendo insieme i risultati trovati, si ha
$$\int\frac{2x-9}{x^2-10x+21}=\ln(|x^2-10x+21|)+\frac{1}{4}\,\ln\left(\left|\frac{x-7}{x-3}\right|\right).$$

d2) Scriviamo
$$\frac{x^3}{10+x^2}=\frac{x^3+10\,x-10\,x}{10+x^2}=x-\frac{10\,x}{10+x^2}\,.$$
Abbiamo quindi
$$\int\frac{x^3}{10+x^2}\,dx=\int\left[x-\frac{10\,x}{10+x^2}\right]dx=\frac{x^2}{2}-\int\frac{10\,x}{10+x^2}\,dx\,.$$
Per calcolare l'ultimo integrale, poniamo $y=10+x^2$, da cui $dy=2x\,dx$, e otteniamo
$$\int\frac{10\,x}{10+x^2}\,dx=\int\frac{5\,dy}{y}=5\,\ln(|y|)=5\,\ln(x^2+10)\,,$$
dove si è tolto il modulo dato che la funzione x^2+10 è positiva. In definitiva,
$$\int\frac{x^3}{10+x^2}\,dx=\frac{x^2}{2}-5\,\ln(x^2+10)\,.$$

7) Trovare una primitiva di

$$\textbf{a1)}\ x\,\mathrm{e}^{2\,x}\,,\qquad \textbf{a2)}\ \mathrm{e}^{x}\,\sin(2\,x)\,,\qquad \textbf{b1)}\ \sin^2(5\,x)\,,\qquad \textbf{b2)}\ \cos^3(4\,x)\,,$$

$$\textbf{c1)}\ (10x+3)\,\mathrm{e}^{x}\,,\qquad \textbf{c2)}\ (3x^2-2x+4)\,\mathrm{e}^{x}\,,\qquad \textbf{d1)}\ x^2\,\ln(5\,x)\,,\qquad \textbf{d2)}\ 6\,x\,\arctan(3\,x)\,.$$

Soluzione:

a1) Integriamo per parti, derivando x e integrando $\mathrm{e}^{2\,x}$. Si ha

$$\int x\,\mathrm{e}^{2\,x}\,dx = \frac{x}{2}\,\mathrm{e}^{2\,x} - \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{2\,x}\,dx = \frac{x}{2}\,\mathrm{e}^{2\,x} - \frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{2\,x} = \frac{2\,x-1}{4}\,\mathrm{e}^{2\,x}\,.$$

a2) Integriamo per parti, derivando $\sin(2\,x)$ e integrando l'esponenziale. Si ha

$$\int \mathrm{e}^{x}\,\sin(2\,x)\,dx = \mathrm{e}^{x}\,\sin(2\,x) - 2\int \mathrm{e}^{x}\,\cos(2\,x)\,dx\,.$$

Per calcolare l'ultimo integrale, operiamo per parti, derivando $\cos(2\,x)$ e integrando l'esponenziale. Si ha

$$\int \mathrm{e}^{x}\,\cos(2\,x)\,dx = \mathrm{e}^{x}\,\cos(2\,x) + 2\int \mathrm{e}^{x}\,\sin(2\,x)\,dx\,.$$

Mettendo insieme i risultati, si ha

$$\int \mathrm{e}^{x}\,\sin(2\,x)\,dx = \mathrm{e}^{x}\,[\sin(2\,x) - 2\,\cos(2\,x)] - 4\int \mathrm{e}^{x}\,\sin(2\,x)\,dx\,,$$

da cui si ricava (portando l'integrale a secondo membro a sinistra)

$$\int \mathrm{e}^{x}\,\sin(2\,x)\,dx = \frac{\mathrm{e}^{x}}{5}[\sin(2\,x) - 2\,\cos(2\,x)]\,.$$

b1) Integriamo per parti, derivando e integrando $\sin(5\,x)$. Si ha

$$\int \sin^2(5\,x)\,dx = \int \sin(5\,x)\,\sin(5\,x)\,dx = -\frac{1}{5}\,\sin(5\,x)\,\cos(5\,x) + \int \cos^2(5\,x)\,dx\,.$$

Ora si ha

$$\int \cos^2(5\,x)\,dx = \int [1-\sin^2(5\,x)]\,dx = x - \int \sin^2(5\,x)\,dx\,.$$

Si ha dunque

$$\int \sin^2(5\,x)\,dx = -\frac{1}{5}\,\sin(5\,x)\,\cos(5\,x) + x - \int \sin^2(5\,x)\,dx\,.$$

Portando a sinistra una parte dell'integrale a destra si ottiene

$$2\int \sin^2(5\,x)\,dx = -\frac{1}{5}\,\sin(5\,x)\,\cos(5\,x) + x\,,$$

da cui segue che

$$\int \sin^2(5\,x)\,dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{10}\,\sin(5\,x)\,\cos(5\,x)\,.$$

b2) Osserviamo che si ha

$$\cos^3(4\,x) = \cos^2(4\,x)\,\cos(4\,x) = [1-\sin^2(4\,x)]\,\cos(4\,x)\,.$$

Pertanto, con la sostituzione $y = \sin(4\,x)$, da cui $dy = 4\,\cos(4\,x)\,dx$, si ha

$$\int \cos^3(4\,x)\,dx = \int [1-\sin^2(4\,x)]\,\cos(4\,x)\,dx = \frac{1}{4}\int (1-y^2)\,dy = \frac{1}{4}\left[y - \frac{y^3}{3}\right],$$

e quindi

$$\int \cos^3(4\,x)\,dx = \frac{\sin(4\,x)}{4} - \frac{\sin^3(4\,x)}{12}\,.$$

c1) Integriamo per parti, derivando il binomio e integrando l'esponenziale. Si ha

$$\int (10x+3)\,\mathrm{e}^x\,dx = (10x+3)\,\mathrm{e}^x - 10\int \mathrm{e}^x\,dx = (10x-7)\,\mathrm{e}^x\,.$$

c2) Sappiamo che si ha

$$\int (3x^2-2x+4)\,\mathrm{e}^x\,dx = Q(x)\,\mathrm{e}^x\,,$$

dove $Q(x)$ è un polinomio di secondo grado tale che $Q(x)+Q'(x) = 3x^2-2x+4$. Se $Q(x) = a\,x^2+b\,x+c$ è un generico polinomio di secondo grado, si ha

$$Q(x)+Q'(x) = a\,x^2+(2a+b)\,x+(b+c)\,,$$

e imponendo che si abbia $Q(x)+Q'(x) = 3x^2-2x+4$ si ha che deve essere

$$a=3\,,\qquad 2a+b=-2\,,\qquad b+c=4\,,$$

da cui si ricava facilmente che

$$a=3\,,\qquad b=-8\,,\qquad c=12\,,$$

e quindi

$$\int (3x^2-2x+4)\,\mathrm{e}^x\,dx = (3x^2-8x+12)\,\mathrm{e}^x\,.$$

d1) Integriamo per parti, derivando il logaritmo e integrando x^2. Si ha

$$\int x^2\,\ln(5\,x)\,dx = \frac{x^3}{3}\,\ln(5\,x) - \frac{1}{3}\int x^3\,\frac{5}{5\,x}\,dx = \frac{x^3}{3}\,\ln(5\,x) - \frac{x^3}{9} = \frac{x^3}{9}[3\,\ln(5\,x)-1]\,.$$

d2) Integriamo per parti, integrando il monomio e derivando l'arcotangente. Si ha

$$\int 6\,x\,\arctan(3\,x)\,dx = 3\,x^2\,\arctan(3\,x) - \int \frac{9\,x^2}{1+9\,x^2}\,dx\,.$$

Per calcolare l'ultimo integrale, aggiungiamo e togliamo 1 al numeratore:

$$\int \frac{9\,x^2}{1+9\,x^2}\,dx = \int \frac{1+9\,x^2-1}{1+9\,x^2}\,dx = \int \left[1-\frac{1}{1+9\,x^2}\right]dx = x - \int \frac{dx}{1+9\,x^2}\,.$$

L'ultimo integrale si calcola ponendo $y=3\,x$, da cui $dy = 3\,dx$ per ottenere

$$\int \frac{dx}{1+9\,x^2} = \frac{1}{3}\int \frac{dy}{1+y^2} = \frac{\arctan(y)}{3} = \frac{\arctan(3\,x)}{3}\,.$$

In definitiva, si ha

$$\int 6\,x\,\arctan(3\,x)\,dx = 3\,x^2\,\arctan(3\,x) - x + \frac{\arctan(3\,x)}{3}\,.$$