



Calcolo integrale — Compito di pre-esonero
23 Maggio 2023 — Compito n. 00119

Istruzioni: le prime due caselle (**V** / **F**) permettono di selezionare la risposta vero/falso. La casella “**C**” serve a correggere eventuali errori invertendo la risposta data. Per selezionare una casella, annerirla completamente: ☐ (non ☐ o ☐).

Nome: _____

Cognome: _____

Matricola:

--	--	--	--	--	--	--

	1A	1B	1C	1D	2A	2B	2C	2D	3A	3B	3C	3D	4A	4B	4C	4D
V	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
F	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
C	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

1) Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(t) = e^{6t} (4 + y^2(t)).$$

1A) L'equazione ha infinite soluzioni.

1B) Esistono infinite soluzioni dell'equazione tali che $y(0) = 9$.

1C) Esiste un'unica soluzione dell'equazione tale che $y(0) = 0$ e $y'(0) = 4$.

1D) Se $y(0) = 4$, la soluzione è crescente in un intorno dell'origine.

2) Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(t) - 2y'(t) + 3y(t) = 15.$$

2A) Non esistono soluzioni dell'equazione tali che $y(0) = 5$, $y'(0) = 0$ e $y''(0) = 0$.

2B) Se $y(0) = 0$ e $y'(0) = 3$, si ha $y''(0) = 9$.

2C) Non esistono soluzioni dell'equazione tali che $y'(0) = 1$ e $y''(0) = 2$.

2D) Se $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$, la soluzione dell'equazione è concava in un intorno dell'origine.

3) Si consideri il problema di Cauchy

$$(1) \quad \begin{cases} y'(t) = 3y(t) + e^{3t} + 9, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

3A) Si ha $y'(0) > 0$.

3B) La funzione $y_0(t) = 2e^{3t}$ è soluzione dell'equazione omogenea associata all'equazione di (1).

3C) La soluzione di (1) è $y(t) = (t + 3)e^{3t} - 3$.

3D) Si ha

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0.$$

4) Si consideri l'equazione differenziale

$$(1) \quad y''(t) + Ay'(t) + By(t) = 0.$$

4A) Se $A = B = 0$, i polinomi di primo grado non sono soluzioni di (1).

4B) Se $A = -11$ e $B = 18$, la funzione $y(t) = 5e^{9t}$ non è soluzione di (1).

4C) Se $A = -14$ e $B = 49$, la funzione $y(t) = 3te^{7t}$ è soluzione di (1).

4D) Se $A = 0$ e $B = 9$, esistono soluzioni non nulle di (1) che non sono periodiche.

Docente

- ☐ DelaTorre Pedraza
☐ Orsina

--	--	--	--	--	--	--	--

Cognome

Nome

Matricola

Compito 00119

5) Si consideri l'equazione differenziale

(1)

$$y'(t) = 5(y(t) + 7) \cos(5t).$$

a) Quante soluzioni di (1) verificano la condizione $y(0) = 4$? E quante le condizioni $y(0) = 0$ e $y'(0) = 35$?

b) Determinare la soluzione di (1) tale che $y(5) = -7$.

c) Calcolare $T_2(y(t); 0)$, dove $y(t)$ è la soluzione di (1) tale che $y(0) = 0$.

d) Determinare la soluzione di (1) tale che $y(0) = 0$.

--	--	--	--	--	--	--	--

Cognome**Nome****Matricola****Compito 00119**

6) Si consideri il problema di Cauchy

$$(1) \quad \begin{cases} y''(t) - 18y'(t) + 81y(t) = 486, \\ y(0) = 7, \quad y'(0) = 0. \end{cases}$$

a) Quante soluzioni ha (1)? E quante tali che $y''(0) = 485$?

b) Scrivere tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata all'equazione di (1).

c) Determinare una soluzione particolare dell'equazione di (1), e scrivere tutte le soluzioni dell'equazione di (1).

d) Determinare la soluzione di (1).

Soluzioni del compito 00119

1) Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(t) = e^{6t} (4 + y^2(t)).$$

1A) L'equazione ha infinite soluzioni.

Vero: Essendo un'equazione differenziale ordinaria del primo ordine, l'equazione ha infinite soluzioni dipendenti da un parametro reale.

1B) Esistono infinite soluzioni dell'equazione tali che $y(0) = 9$.

Falso: Assegnando la condizione iniziale $y(0) = 9$, si ottiene un problema di Cauchy per un'equazione differenziale ordinaria del primo ordine, che ha un'unica soluzione.

1C) Esiste un'unica soluzione dell'equazione tale che $y(0) = 0$ e $y'(0) = 4$.

Vero: Se si assegna la condizione $y(0) = 0$, si ottiene un problema di Cauchy per un'equazione differenziale ordinaria del primo ordine, che ha un'unica soluzione. Per tale soluzione si ha

$$y'(0) = e^{6 \cdot 0} (4 + y^2(0)) = 1 \cdot (4 + 0) = 4.$$

Si ha quindi che la condizione $y'(0) = 4$ è automaticamente soddisfatta, e quindi la soluzione esiste ed è unica.

1D) Se $y(0) = 4$, la soluzione è crescente in un intorno dell'origine.

Vero: Se $y(0) = 4$, si ha

$$y'(0) = e^{6 \cdot 0} (4 + y^2(0)) = 1 \cdot (4 + 16) = 20 > 0.$$

Per il teorema della permanenza del segno, $y'(t) \geq 0$ in un intorno dell'origine, e quindi la soluzione è crescente in tale intorno.

Alternativamente, e prescindendo dalla condizione iniziale, era sufficiente osservare che

$$y'(t) = e^{6t} (4 + y^2(t)) \geq e^{6t} \geq 0,$$

e quindi ogni soluzione dell'equazione è crescente.

2) Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(t) - 2y'(t) + 3y(t) = 15.$$

2A) Non esistono soluzioni dell'equazione tali che $y(0) = 5$, $y'(0) = 0$ e $y''(0) = 0$.

Falso: Se si assegnano le condizioni iniziali $y(0) = 5$ e $y'(0) = 0$, si ottiene un problema di Cauchy per un'equazione differenziale ordinaria del secondo ordine, che ha un'unica soluzione. Per tale soluzione, si ha

$$y''(0) = 15 + 2y'(0) - 3y(0) = 15 + 2 \cdot 0 - 3 \cdot 5 = 15 - 15 = 0,$$

cosicché la condizione $y''(0) = 0$ è automaticamente soddisfatta, e quindi la soluzione esiste ed è unica.

2B) Se $y(0) = 0$ e $y'(0) = 3$, si ha $y''(0) = 9$.

Falso: Con le condizioni iniziali $y(0) = 0$ e $y'(0) = 3$ si ha, per l'unica soluzione del problema,

$$y''(0) = 15 + 2y'(0) - 3y(0) = 15 + 2 \cdot 3 - 3 \cdot 0 = 21 \neq 9.$$

2C) Non esistono soluzioni dell'equazione tali che $y'(0) = 1$ e $y''(0) = 2$.

Falso: Se $y(t)$ è soluzione di (1), sostituendo $t = 0$ nell'equazione si trova

$$y''(0) - 2y'(0) + 3y(0) = 15.$$

Se $y'(0) = 1$ e $y''(0) = 2$, si ha

$$2 - 2 \cdot 1 + 3y(0) = 15,$$

da cui segue $y(0) = 5$. Consideriamo ora l'unica soluzione di (1) tale che $y(0) = 5$ e $y'(0) = 1$. Per tale soluzione si ha, ovviamente, $y''(0) = 2$, e quindi esiste un'unica soluzione dell'equazione tale che $y'(0) = 1$ e $y''(0) = 2$.

2D) Se $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$, la soluzione dell'equazione è concava in un intorno dell'origine.

Falso: Se $y(0) = y'(0) = 0$ si ha, per l'unica soluzione dell'equazione, che

$$y''(0) = 15 + 2y'(0) - 3y(0) = 15 + 2 \cdot 0 - 3 \cdot 0 = 15 > 0.$$

Per il teorema della permanenza del segno, si ha $y''(t) \geq 0$ in un intorno dell'origine, e quindi $y(t)$ è convessa in tale intorno.

3) Si consideri il problema di Cauchy

$$(1) \quad \begin{cases} y'(t) = 3y(t) + e^{3t} + 9, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Ricordiamo che la soluzione del problema di Cauchy per l'equazione $y'(t) = a(t)y(t) + b(t)$, con la condizione $y(0) = y_0$ è data da

$$(2) \quad y(t) = e^{A(t)} \left[y_0 + \int_0^t b(s) e^{-A(s)} ds \right],$$

dove

$$A(t) = \int_0^t a(s) ds.$$

Nel nostro caso, $a(t) = 3$ e $b(t) = e^{3t} + 9$ e quindi

$$A(t) = \int_0^t 3 ds = 3t.$$

Applicando la (2) con $y_0 = 0$ si ha

$$y(t) = e^{3t} \int_0^t [e^{3s} + 9] e^{-3s} ds = e^{3t} [s - 3e^{-3s}] \Big|_0^t = e^{3t} [t - 3e^{-3t} + 3],$$

e quindi, semplificando,

$$(3) \quad y(t) = (t + 3)e^{3t} - 3.$$

3A) Si ha $y'(0) > 0$.

Vero: Sostituendo la condizione iniziale $y(0) = 0$ nell'equazione, si ha

$$y'(0) = 3y(0) + e^{3 \cdot 0} + 15 = 3 \cdot 0 + 1 + 15 = 16 > 0.$$

3B) La funzione $y_0(t) = 2e^{3t}$ è soluzione dell'equazione omogenea associata all'equazione di (1).

Vero: L'equazione omogenea associata all'equazione di (1) è

$$y'_0(t) = 3y_0(t),$$

Se $y_0(t) = 2e^{3t}$, si ha

$$y'_0(t) = 6e^{3t} = 3 \cdot (2e^{3t}) = 3y_0(t),$$

e quindi $y_0(t)$ è soluzione dell'equazione omogenea associata.

3C) La soluzione di (1) è $y(t) = (t + 3)e^{3t} - 3$.

Vero: Per la (3), la funzione proposta è l'unica soluzione di (1).

3D) Si ha

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0.$$

Falso: Dalla (3) segue che

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} [(t + 3)e^{3t} - 3] = +\infty \neq 0.$$

4) Si consideri l'equazione differenziale

$$(1) \quad y''(t) + A y'(t) + B y(t) = 0.$$

4A) Se $A = B = 0$, i polinomi di primo grado non sono soluzioni di (1).

Falso: Se $A = B = 0$, (1) diventa

$$y''(t) = 0.$$

Se $y(t)$ è un polinomio di primo grado, si ha $y(t) = at + b$ per qualche a e b reali. Pertanto, $y'(t) = a$ e quindi $y''(t) = 0$. Ne segue che i polinomi di grado 1 sono soluzioni di (1).

4B) Se $A = -11$ e $B = 18$, la funzione $y(t) = 5e^{9t}$ non è soluzione di (1).

Falso: Se $A = -11$ e $B = 18$, il polinomio caratteristico associato all'equazione (1) è

$$P(L) = L^2 - 11L + 18,$$

che ha come soluzioni $L_1 = 2$ e $L_2 = 9$. Pertanto, tutte le soluzioni di (1) sono date da

$$y(t) = C e^{2t} + D e^{9t},$$

con C e D numeri reali. Scegliendo $C = 0$ e $D = 5$, si vede che $y(t) = 5e^{9t}$ è soluzione di (1).

4C) Se $A = -14$ e $B = 49$, la funzione $y(t) = 3te^{7t}$ è soluzione di (1).

Vero: Se $A = -14$ e $B = 49$, il polinomio caratteristico associato all'equazione (1) è

$$P(L) = L^2 - 14L + 49,$$

che ha come soluzioni $L_1 = L_2 = 7$. Pertanto, tutte le soluzioni di (1) sono date da

$$y(t) = (C + Dt) e^{7t},$$

con C e D numeri reali. Scegliendo $C = 0$ e $D = 3$, si vede che $y(t) = 3te^{7t}$ è soluzione di (1).

4D) Se $A = 0$ e $B = 9$, esistono soluzioni non nulle di (1) che non sono periodiche.

Falso: Se $A = 0$ e $B = 9$, il polinomio caratteristico associato all'equazione (1) è

$$P(L) = L^2 + 9,$$

che ha come soluzioni $L_{1,2} = \pm 3i$. Pertanto, tutte le soluzioni di (1) sono date da

$$y(t) = C \cos(3t) + D \sin(3t),$$

con C e D numeri reali, e sono quindi periodiche (di periodo $T = \frac{2\pi}{3}$).

5) Si consideri l'equazione differenziale

$$(1) \quad y'(t) = 5(y(t) + 7) \cos(5t).$$

a) Quante soluzioni di (1) verificano la condizione $y(0) = 4$? E quante le condizioni $y(0) = 0$ e $y'(0) = 35$?

b) Determinare la soluzione di (1) tale che $y(5) = -7$.

c) Calcolare $T_2(y(t); 0)$, dove $y(t)$ è la soluzione di (1) tale che $y(0) = 0$.

d) Determinare la soluzione di (1) tale che $y(0) = 0$.

Soluzione:

Osserviamo preliminarmente che l'equazione (1) è a variabili separabili, essendo della forma

$$y'(t) = f(t) g(y(t)),$$

con

$$(2) \quad f(t) = 5 \cos(5t), \quad g(s) = s + 7.$$

a) Assegnando ad (1) la condizione iniziale $y(0) = 4$ si ottiene un problema di Cauchy per un'equazione differenziale del primo ordine, che ha un'unica soluzione. Analogamente, esiste un'unica soluzione di (1) tale che $y(0) = 0$; per tale soluzione si ha, sostituendo $t = 0$,

$$y'(0) = 5(y(0) + 7) \cos(5 \cdot 0) = 5 \cdot 7 \cdot 1 = 35,$$

cosicché la condizione $y'(0) = 35$ è automaticamente soddisfatta dall'unica soluzione di (1) tale che $y(0) = 0$. Ne segue pertanto che esiste un'unica soluzione di (1) tale che $y(0) = 0$ e $y'(0) = 35$.

b) Dato che la funzione $g(s)$ in (2) è tale che $g(-7) = -7 + 7 = 0$, la funzione $y(t) = -7$ è una soluzione costante di (1). Dato che soddisfa la condizione $y(5) = -7$, è la soluzione di (1) tale che $y(5) = -7$ (essendo tale soluzione unica).

c) Se $y(0) = 0$ abbiamo, sostituendo nell'equazione $t = 0$,

$$y'(0) = 5(y(0) + 7) \cos(5 \cdot 0) = 5 \cdot 7 \cdot 1 = 35.$$

Derivando l'equazione, si ha poi

$$y''(t) = 5 y'(t) \cos(5t) - 25(y(t) + 7) \sin(5t).$$

Calcolando questa espressione in $t = 0$, si ha

$$y''(0) = 5 y'(0) \cos(5 \cdot 0) - 25(y(0) + 7) \sin(5 \cdot 0) = 5 \cdot 35 \cdot 1 - 25 \cdot 7 \cdot 0 = 175.$$

Si ha quindi

$$T_2(y(t); 0) = y(0) + y'(0)t + \frac{y''(0)}{2}t^2 = 0 + 35t + \frac{175}{2}t^2 = 35t + \frac{175}{2}t^2.$$

d) Dato che l'equazione è a variabili separabili, e che $y(t) \equiv y(0) = 0$ non è soluzione dell'equazione (come si verifica facilmente), dividiamo per $y(t) + 7$, ottenendo l'equazione equivalente

$$\frac{y'(t)}{y(t) + 7} = 5 \cos(5t).$$

Integrando tra 0 e s , si ha

$$\int_0^s \frac{y'(t)}{y(t) + 7} dt = \int_0^s 5 \cos(5t) dt = \sin(5t) \Big|_0^s = \sin(5s).$$

Per quanto riguarda il primo integrale, con la sostituzione $z = y(t)$, da cui $y'(t) dt = dz$, si ha (ricordando che $y(0) = 0$)

$$\int_0^s \frac{y'(t)}{y(t) + 7} dt = \int_{y(0)}^{y(s)} \frac{dz}{z + 7} = \log(|z + 7|) \Big|_0^{y(s)} = \log(|y(s) + 7|) - \log(7) = \log\left(\frac{y(s) + 7}{7}\right),$$

dove nell'ultimo passaggio si è usato il fatto che $y(s) + 7 \geq 0$ in un intorno di $t = 0$ dato che $y(0) + 7 = 0 + 7 = 7 > 0$. Si ha quindi che la soluzione di (1) tale che $y(0) = 0$ verifica l'identità

$$\log \left(\frac{y(s) + 7}{7} \right) = \sin(5s),$$

da cui segue che

$$\frac{y(s) + 7}{7} = e^{5s},$$

e quindi che

$$y(s) = 7e^{\sin(5s)} - 7.$$

Si noti che l'equazione (1) può essere riscritta nella forma

$$y'(t) = 5 \cos(5t) y(t) + 35 \cos(5t),$$

e quindi è anche della forma

$$y'(t) = a(t) y(t) + b(t),$$

con

$$a(t) = 5 \cos(5t), \quad b(t) = 35 \cos(5t).$$

Per tale equazione, assegnando la condizione $y(0) = 0$, si ha la formula risolutiva

$$(3) \quad y(t) = e^{A(t)} \left(\int_0^t b(s) e^{-A(s)} ds \right),$$

dove

$$A(t) = \int_0^t a(s) ds = \int_0^t 5 \cos(5s) ds = \sin(5s) \Big|_0^t = \sin(5t).$$

Pertanto, dalla (3) si ha che

$$y(t) = e^{\sin(5t)} \left(35 \int_0^t \cos(5s) e^{-\sin(5s)} ds \right).$$

Per calcolare l'ultimo integrale, poniamo $z = \sin(5s)$, da cui $dz = 5 \cos(5s) ds$. Si ha quindi

$$35 \int_0^t \cos(5s) e^{-\sin(5s)} ds = 7 \int_0^{\sin(5t)} e^{-z} dz = 7(1 - e^{-\sin(5t)}),$$

cosicché la soluzione di (1) tale che $y(0) = 0$ è data da

$$y(t) = 7e^{\sin(5t)} (1 - e^{-\sin(5t)}) = 7e^{\sin(5t)} - 7,$$

come trovato in precedenza.

6) Si consideri il problema di Cauchy

$$(1) \quad \begin{cases} y''(t) - 18y'(t) + 81y(t) = 486, \\ y(0) = 7, \quad y'(0) = 0. \end{cases}$$

a) Quante soluzioni ha (1)? E quante tali che $y''(0) = 485$?

b) Scrivere tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata all'equazione di (1).

c) Determinare una soluzione particolare dell'equazione di (1), e scrivere tutte le soluzioni dell'equazione di (1).

d) Determinare la soluzione di (1).

Soluzione:

a) Il problema di Cauchy (1) ha un'unica soluzione. Se $y(t)$ è tale soluzione, si ha, sostituendo $t = 0$ nell'equazione, che

$$y''(0) = y''(0) - 18 \cdot 0 + 81 \cdot 0 = y''(0) - 18y'(0) + 81y(0) = 486.$$

Pertanto, per tale soluzione si ha $y''(0) = 486 \neq 485$, e quindi non esistono soluzioni di (1) tali che $y''(0) = 485$.

b) L'equazione omogenea associata all'equazione di (1) è

$$y_0''(t) - 18y_0'(t) + 81y_0(t) = 0,$$

il cui polinomio caratteristico è

$$P(L) = L^2 - 18L + 81,$$

che ha come soluzioni $L_{1,2} = 9$. Ne segue pertanto che tutte le soluzioni di (2) sono date da

$$y_0(t) = (C + Dt)e^{9t},$$

con C e D numeri reali.

c) Dato che le funzioni costanti non sono soluzioni dell'equazione omogenea, cerchiamo una soluzione particolare dell'equazione di (1) nella forma $\bar{y}(t) = Q$, con Q numero reale. Sostituendo, e dato che $\bar{y}'(t) = \bar{y}''(t) = 0$, si ha che deve essere

$$\bar{y}''(t) - 18\bar{y}'(t) + 81\bar{y}(t) = 81Q = 486,$$

da cui segue $Q = 6$. Ne segue che tutte le soluzioni dell'equazione di (1) sono date da

$$(2) \quad y(t) = y_0(t) + \bar{y}(t) = (C + Dt)e^{9t} + 6.$$

d) Se $y(t)$ è data da (2), si ha, derivando,

$$y'(t) = D e^{9t} + 9(C + Dt)e^{9t}.$$

Pertanto,

$$y(0) = C + 6, \quad y'(0) = D + 9C.$$

Imponendo le condizioni $y(0) = 7$ e $y'(0) = 0$, si ha

$$C = 1, \quad D = -9C = -9,$$

e quindi l'unica soluzione di (1) è data da

$$y(t) = (1 - 9t)e^{9t} + 6.$$