Calcolo integrale — Compito di pre-esonero
28 Aprile 2023 — Compito n. 00040

Istruzioni: le prime due caselle (**V** / **F**) permettono di selezionare la risposta vero/falso. La casella "**C**" serve a correggere eventuali errori invertendo la risposta data.
Per selezionare una casella, annerirla completamente: ■ (non ☒ o ☑).

Nome: ____________________

Cognome: ____________________

Matricola: | | | | | | | |

Punteggi: 1 punto per ogni risposta esatta, 0 punti per risposte sbagliate o lasciate in bianco.

	1A	1B	1C	1D	2A	2B	2C	2D	3A	3B	3C	3D	4A	4B	4C	4D
V	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
F	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
C	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

---

1) Sia

$$F(t) = \int_0^t [9\,x^2 + \cos^2(7\,x)]\,dx$$

1A) La funzione $F(t)$ è derivabile su tutto $\mathbb{R}$.
1B) Si ha $F'(0) = 0$.
1C) La funzione $F(t)$ è decrescente su $\mathbb{R}$.
1D) Si ha $F(4) > 0$.

---

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

2A)

$$\int_0^1 (15x^2 + 12x + 2)\,dx = 13\,.$$

2B)

$$\int_0^{\frac{1}{3}} 45\,x\,\mathrm{e}^{3\,x}\,dx = 5\,\mathrm{e}\,.$$

2C)

$$\int_0^{4\,\pi} \cos(3\,x)\,dx = 0\,.$$

2D)

$$\int_0^{\sqrt{7}} \frac{12\,x}{7 + x^2}\,dx = 6\,\log(2)\,.$$

---

3) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

3A)

$$\int_{-8}^{8} [7\,x^3 + \sin(3\,x)]\,dx \neq 0\,.$$

3B)

$$\int_{-6}^{6} [2\,x^2 + 3\,x\,|x|]\,dx > 0\,.$$

3C)

$$\int_{-5}^{6} [7\,x^3 + 3\,x]\,dx > 0\,.$$

3D)

$$\int_{-3}^{2} \frac{x^3}{7 + x^2}\,dx > 0\,.$$

---

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

4A)

$$\int_9^{21} \frac{dx}{x - 7} = \log(2)\,.$$

4B)

$$\int_{10}^{18} \frac{dx}{(x - 8)^2} = \frac{2}{5}\,.$$

4C)

$$\int_9^{10} \frac{dx}{(x - 6)\,(x - 8)} = \frac{1}{2}\,\log(3/2)\,.$$

4D)

$$\int_{-9}^{-8} \frac{dx}{x^2 + 18\,x + 82} = 1\,.$$

$\square\square\square\square\square\square\square\square$ **Cognome** **Nome** **Matricola** **Compito 00040**

5) Determinare una primitiva delle funzioni $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ e $k(x)$, e calcolare gli integrali.

$$\textbf{a)}\ f(x) = x\,\sin(7\,x)\,, \quad \int_0^{5\,\pi} f(x)\,dx\,, \qquad \textbf{b)}\ g(x) = x^2\,\mathrm{e}^{8\,x^3}\,, \quad \int_0^{\sqrt[3]{3}} g(x)\,dx\,,$$

$$\textbf{c)}\ h(x) = (4x^2 + 15x + 7)\,\mathrm{e}^x\,, \quad \int_{-\frac{7}{4}}^0 h(x)\,dx\,, \qquad \textbf{d)}\ k(x) = \frac{1}{1 + 49\,x^2}\,, \quad \int_0^1 k(x)\,dx\,.$$

☐☐☐☐☐☐☐☐ **Cognome** **Nome** **Matricola** **Compito 00040**

6) Sia
$$F(t) = \int_0^t [7\,\mathrm{e}^{x^2} + 10]\,dx\,.$$
a) Dimostrare che $F(t)$ è derivabile per ogni t in $\mathbb{R}$.
b) Calcolare $F(0)$ e $F'(\sqrt{7})$.
c) Dimostrare che $F(t)$ è una funzione crescente e dispari.
d) Dimostrare che
$$\lim_{t\to+\infty} F(t) = +\infty\,.$$

Soluzioni del compito 00040

1) Sia

$$F(t) = \int_0^t [9\,x^2 + \cos^2(7\,x)]\,dx$$

1A) La funzione $F(t)$ è derivabile su tutto $\mathbb{R}$.

Vero: Dato che la funzione $x \mapsto 9\,x^2 + \cos^2(7\,x)$ è continua su $\mathbb{R}$, la funzione $F(t)$ è derivabile su $\mathbb{R}$ per il teorema fondamentale del calcolo integrale, e si ha $F'(t) = 9\,x^2 + \cos^2(7\,t)$.

1B) Si ha $F'(0) = 0$.

Falso: Dato che per il teorema fondamentale del calcolo integrale si ha $F'(t) = 9\,t^2 + \cos^2(7\,t)$, si ha $F'(0) = 1 \neq 0$.

1C) La funzione $F(t)$ è decrescente su $\mathbb{R}$.

Falso: Dato che per il teorema fondamentale del calcolo integrale si ha $F'(t) = 9\,t^2 + \cos^2(7\,t)$, si ha $F'(t) \geq 0$ per ogni t in $\mathbb{R}$, e quindi la funzione $F(t)$ è crescente su $\mathbb{R}$.

1D) Si ha $F(4) > 0$.

Vero: Dato che la funzione $F(t)$ è crescente (si veda l'esercizio **1C**), si ha

$$F(4) > F(0) = 0\,.$$

---

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

2A)

$$\int_0^1 (15x^2 + 12x + 2)\, dx = 13\,.$$

Vero: Dato che

$$\int (15x^2 + 12x + 2)\, dx = \frac{15}{3}\, x^3 + \frac{12}{2}\, x^2 + 2\, x = 5\, x^3 + 6\, x^2 + 2\, x + c\,,$$

si ha

$$\int_0^1 (15x^2 + 12x + 2)\, dx = 5\, x^3 + 6\, x^2 + 2\, x\Big|_0^1 = 5 + 6 + 2 = 13\,.$$

2B)

$$\int_0^{\frac{1}{3}} 45\, x\, \mathrm{e}^{3\,x}\, dx = 5\, \mathrm{e}\,.$$

Falso: Si ha, con la sostituzione $y = 3\,x$, da cui $dy = 3\,x$,

$$\int_0^{\frac{1}{3}} 45\, x\, \mathrm{e}^{3\,x}\, dx = 5\, \int_0^{\frac{1}{3}} (3\,x)\, \mathrm{e}^{3\,x}\, (3\, dx) = 5\, \int_0^1 y\, \mathrm{e}^y\, dy\,.$$

Dato che una primitiva di $y\, \mathrm{e}^y$ è $(y-1)\, \mathrm{e}^y$, si ha

$$\int_0^{\frac{1}{3}} 45\, x\, \mathrm{e}^{3\,x}\, dx = 5\, (y-1)\, \mathrm{e}^y\Big|_0^1 = 5 \neq 5\, \mathrm{e}\,.$$

2C)

$$\int_0^{4\,\pi} \cos(3\,x)\, dx = 0\,.$$

Vero: Si ha

$$\int_0^{4\,\pi} \cos(3\,x)\, dx = \frac{\sin(3\,x)}{3}\Big|_0^{4\,\pi} = \frac{\sin(12\,\pi) - \sin(0)}{3} = 0\,.$$

2D)

$$\int_0^{\sqrt{7}} \frac{12\,x}{7 + x^2}\, dx = 6\, \log(2)\,.$$

Vero: Dato che

$$\frac{12\,x}{7 + x^2} = 6\, \frac{2x}{7 + x^2} = 6\, \frac{(7 + x^2)'}{7 + x^2}\,,$$

si ha

$$\int_0^{\sqrt{7}} \frac{12\,x}{7 + x^2}\, dx = 6\, \log(7 + x^2)\Big|_0^{\sqrt{7}} = 6\,[\log(14) - \log(7)] = 6\, \log(14/7) = 6\, \log(2)\,.$$

---

3) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

3A)

$$\int_{-8}^{8} [7\,x^3 + \sin(3\,x)]\,dx \neq 0\,.$$

Falso: La funzione integranda è dispari, e l'intervallo di integrazione è simmetrico rispetto all'origine. Pertanto, l'integrale vale zero.

3B)

$$\int_{-6}^{6} [2\,x^2 + 3\,x\,|x|]\,dx > 0\,.$$

Vero: La funzione $x \mapsto 2\,x^2$ è pari, mentre la funzione $x \mapsto 3\,x\,|x|$ è dispari. Dato che l'intervallo è simmetrico rispetto all'origine, si ha

$$\int_{-6}^{6} [2\,x^2 + 3\,x\,|x|]\,dx = \int_{-6}^{6} 2\,x^2\,dx = 2\int_{0}^{6} 2\,x^2\,dx > 0\,,$$

dato che la funzione integranda è positiva.

3C)

$$\int_{-5}^{6} [7\,x^3 + 3\,x]\,dx > 0\,.$$

Vero: La funzione integranda è dispari; pertanto, si ha

$$\int_{-5}^{6} [7\,x^3 + 3\,x]\,dx = \int_{-5}^{5} [7\,x^3 + 3\,x]\,dx + \int_{5}^{6} [7\,x^3 + 3\,x]\,dx = \int_{5}^{6} [7\,x^3 + 3\,x]\,dx\,,$$

e l'ultimo integrale è positivo essendo l'integrale di una funzione positiva.

3D)

$$\int_{-3}^{2} \frac{x^3}{7 + x^2}\,dx > 0\,.$$

Falso: Dato che la funzione integranda è dispari, si ha

$$\int_{-3}^{2} \frac{x^3}{7 + x^2}\,dx = \int_{-3}^{-2} \frac{x^3}{7 + x^2}\,dx + \int_{-2}^{2} \frac{x^3}{7 + x^2}\,dx = \int_{-3}^{-2} \frac{x^3}{7 + x^2}\,dx < 0\,,$$

dato che la funzione integranda è negativa.

---

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

4A)
$$\int_9^{21} \frac{dx}{x-7} = \log(2)\,.$$

Falso: Si ha
$$\int_9^{21} \frac{dx}{x-7} = \log(|x-7|)\Big|_9^{21} = \log(14) - \log(2) = \log(14/2) = \log(7) \neq \log(2)\,.$$

4B)
$$\int_{10}^{18} \frac{dx}{(x-8)^2} = \frac{2}{5}\,.$$

Vero: Ricordando che
$$\int \frac{dx}{(x-a)^2} = \frac{1}{a-x} + c\,,$$
si ha
$$\int_{10}^{18} \frac{dx}{(x-8)^2} = \frac{1}{8-x}\Big|_{10}^{18} = -\frac{1}{10} + \frac{1}{2} = \frac{2}{5}\,.$$

4C)
$$\int_9^{10} \frac{dx}{(x-6)\,(x-8)} = \frac{1}{2}\,\log(3/2)\,.$$

Vero: Dall'identità
$$\frac{1}{(x-6)\,(x-8)} = \frac{A}{x-8} + \frac{B}{x-6}$$
si ricava (moltiplicando per $(x-6)\,(x-8)$) che deve essere
$$1 = A\,(x-6) + B\,(x-8)\,.$$
Scegliendo $x=6$ si ricava $B = -\frac{1}{2}$, e scegliendo $x=8$ si ricava $A = \frac{1}{2}$. Pertanto,
$$\frac{1}{(x-6)\,(x-8)} = \frac{1}{2}\Big[\frac{1}{x-8} - \frac{1}{x-6}\Big]\,.$$
Ne segue che
$$\int \frac{dx}{(x-6)\,(x-8)} = \frac{1}{2}\,\log\left(\Big|\frac{x-8}{x-6}\Big|\right) + c\,,$$
cosicché
$$\int_9^{10} \frac{dx}{(x-6)\,(x-8)} = \frac{1}{2}\,[\log(1/2) - \log(1/3)] = \frac{1}{2}\,\log(3/2)\,.$$

4D)
$$\int_{-9}^{-8} \frac{dx}{x^2 + 18\,x + 82} = 1\,.$$

Falso: Si ha
$$x^2 + 18\,x + 82 = (x+9)^2 + 1\,,$$
e quindi
$$\int \frac{dx}{x^2 + 18\,x + 82} = \int \frac{dx}{1 + (x+9)^2}\,.$$
Con la sostituzione $y = x+9$, da cui $dx = dy$, si ha
$$\int \frac{dx}{x^2 + 18\,x + 82} = \int \frac{dy}{1+y^2} = \arctan(y) + c = \arctan(x+9) + c\,.$$

Pertanto,

$$\int_{-9}^{-8} \frac{dx}{x^2 + 18\,x + 82} = \arctan(x+9)\Big|_{-9}^{-8} = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4} \neq 1\,.$$

5) Determinare una primitiva delle funzioni $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ e $k(x)$, e calcolare gli integrali.

$$\textbf{a)}\ f(x) = x\,\sin(7\,x)\,, \quad \int_0^{5\,\pi} f(x)\,dx\,, \qquad \textbf{b)}\ g(x) = x^2\,\mathrm{e}^{8\,x^3}\,, \quad \int_0^{\sqrt[3]{3}} g(x)\,dx\,,$$

$$\textbf{c)}\ h(x) = (4x^2 + 15x + 7)\,\mathrm{e}^x\,, \quad \int_{-\frac{7}{4}}^0 h(x)\,dx\,, \qquad \textbf{d)}\ k(x) = \frac{1}{1 + 49\,x^2}\,, \quad \int_0^1 k(x)\,dx\,.$$

Soluzione:

a) Si ha, integrando per parti, e ponendo $f'(x) = \sin(7\,x)$, da cui $f(x) = -\frac{\cos(7\,x)}{7}$ e $g(x) = x$, da cui $g'(x) = 1$,

$$\int x\,\sin(7\,x) = -\frac{x\,\cos(7\,x)}{7} + \int 1 \cdot \frac{\cos(7\,x)}{7}\,dx = -\frac{x\,\cos(7\,x)}{7} + \frac{\sin(7\,x)}{49} + c\,.$$

Pertanto,

$$\int_0^{5\,\pi} x\,\sin(7\,x)\,dx = -\frac{x\,\cos(7\,x)}{7} + \frac{\sin(7\,x)}{49}\Big|_0^{5\,\pi} = -\frac{5\,\pi\,\cos(35\,\pi)}{7} = \frac{5}{7}\,\pi\,.$$

b) Si ha, con la sostituzione $y = 8\,x^3$, da cui $dy = 24\,x^2\,dx$ (e quindi $x^2\,dx = \frac{dy}{24}$),

$$\int x^2\,\mathrm{e}^{8\,x^3}\,dx = \frac{1}{24}\int \mathrm{e}^y\,dy = \frac{\mathrm{e}^y}{24} + c = \frac{\mathrm{e}^{8\,x^3}}{24} + c\,,$$

da cui segue che

$$\int_0^{\sqrt[3]{3}} x^2\,\mathrm{e}^{8\,x^3}\,dx = \frac{\mathrm{e}^{8\,x^3}}{24}\Big|_0^{\sqrt[3]{3}} = \frac{\mathrm{e}^{24} - 1}{24}\,.$$

c) Ricordiamo che se $P_2(x)$ è un polinomio di grado 2, allora

$$\int P_2(x)\,\mathrm{e}^x\,dx = Q_2(x)\,\mathrm{e}^x\,,$$

con $Q_2(x)$ un polinomio di grado 2 tale che $Q_2(x) + Q_2'(x) = P_2(x)$. Pertanto, se $Q_2(x) = a\,x^2 + b\,x + c$, deve essere

$$Q_2(x) + Q_2'(x) = a\,x^2 + (2a + b)\,x + b + c = 4x^2 + 15x + 7\,.$$

Da questa relazione si ricava $a = 4$, $2a + b = 15$ e $b + c = 7$; risolvendo, si trova $a = 4$, $b = 7$ e $c = 0$. Pertanto,

$$\int (4x^2 + 15x + 7)\,\mathrm{e}^x\,dx = (4x^2 + 7x)\,\mathrm{e}^x + c\,,$$

da cui segue che

$$\int_{-\frac{7}{4}}^0 (4x^2 + 15x + 7)\,\mathrm{e}^x\,dx = (4x^2 + 7x)\,\mathrm{e}^x\Big|_{-\frac{7}{4}}^0 = 0\,.$$

d) Si ha, con la sostituzione $y = 7\,x$, da cui $dx = \frac{dy}{7}$,

$$\int \frac{dx}{1 + 49\,x^2} = \frac{1}{7}\int \frac{dy}{1 + y^2} = \frac{\arctan(y)}{7} + c = \frac{\arctan(7\,x)}{7} + c\,.$$

Pertanto,

$$\int_0^1 \frac{dx}{1 + 49\,x^2} = \frac{\arctan(7\,x)}{7}\Big|_0^1 = \frac{\arctan(7)}{7}\,.$$

6) Sia

$$F(t) = \int_0^t [7\,e^{x^2} + 10]\,dx\,.$$

a) Dimostrare che $F(t)$ è derivabile per ogni t in $\mathbb{R}$.
b) Calcolare $F(0)$ e $F'(\sqrt{7})$.
c) Dimostrare che $F(t)$ è una funzione crescente e dispari.
d) Dimostrare che

$$\lim_{t\to+\infty} F(t) = +\infty\,.$$

Soluzione:
a) La funzione $f(x) = 7\,e^{x^2} + 10$ è continua su $\mathbb{R}$. Pertanto, per il teorema fondamentale del calcolo integrale, la funzione $F(t)$ è derivabile per ogni t in $\mathbb{R}$ e si ha

$$F'(t) = f(t) = 7\,e^{t^2} + 10\,, \qquad \forall t \in \mathbb{R}\,. \tag{1}$$

b) Si ha

$$F(0) = \int_0^0 [7\,e^{x^2} + 10]\,dx = 0\,,$$

e, per la (1),

$$F'(\sqrt{7}) = f(\sqrt{7}) = 7\,e^7 + 10\,.$$

c) Dato che per la (1) la derivata di $F(t)$ è positiva, la funzione $F(t)$ è crescente. Inoltre, dato che la funzione $f(x)$ è pari, la funzione $F(t)$ è dispari. Infatti, con la sostituzione $x = -y$, da cui $dx = -dy$,

$$F(-t) = \int_0^{-t} [7\,e^{x^2} + 10]\,dx = -\int_0^t [7\,e^{(-y)^2} + 10]\,dy = -\int_0^t [7\,e^{y^2} + 10]\,dy = -F(t)\,.$$

d) Si ha, se $t \ge 0$, e dato che $f(x) \ge 10$,

$$F(t) = \int_0^t [7\,e^{x^2} + 10]\,dx \ge \int_0^t 10\,dx = 10\,t\,,$$

da cui segue che (si noti che il limite di $F(t)$ esiste perché $F(t)$ è crescente)

$$\lim_{t\to+\infty} F(t) \ge \lim_{t\to+\infty} 10\,t = +\infty\,.$$