Calcolo integrale — Compito di pre-esonero
23 Maggio 2023 — Compito n. 00009

Istruzioni: le prime due caselle (**V** / **F**) permettono di selezionare la risposta vero/falso. La casella "**C**" serve a correggere eventuali errori invertendo la risposta data.
Per selezionare una casella, annerirla completamente: ■ (non ☒ o ☑).

Nome: ______________________

Cognome: ______________________

Matricola: | | | | | | | |

	1A	1B	1C	1D	2A	2B	2C	2D	3A	3B	3C	3D	4A	4B	4C	4D
V	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
F	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
C	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

---

1) Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(t) = \mathrm{e}^{3\,t}\,(7 + y^2(t))\,.$$

1A) L'equazione ha un'unica soluzione.
1B) Esistono infinite soluzioni dell'equazione tali che $y(0) = 4$.
1C) Non esistono soluzioni dell'equazione tali che $y(0) = 0$ e $y'(0) = 7$.
1D) Se $y(0) = 5$, la soluzione è decrescente in un intorno dell'origine.

---

2) Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(t) - 5\,y'(t) + 6\,y(t) = 18\,.$$

2A) Esiste un'unica soluzione dell'equazione tale che $y(0) = 3$, $y'(0) = 0$ e $y''(0) = 0$.
2B) Se $y(0) = 0$ e $y'(0) = 6$, si ha $y''(0) = -12$.
2C) Esiste un'unica soluzione dell'equazione tale che $y'(0) = 1$ e $y''(0) = 5$.
2D) Se $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$, la soluzione dell'equazione è concava in un intorno dell'origine.

---

3) Si consideri il problema di Cauchy

$$(1) \qquad \begin{cases} y'(t) = 5\,y(t) + \mathrm{e}^{5\,t} + 10\,, \\ y(0) = 0\,. \end{cases}$$

3A) Si ha $y'(0) > 0$.
3B) La funzione $y_0(t) = 5\,\mathrm{e}^{5\,t}$ non è soluzione dell'equazione omogenea associata all'equazione di (1).
3C) La soluzione di (1) è $y(t) = (t-2)\,\mathrm{e}^{5\,t} + 2$.
3D) Si ha

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = +\infty\,.$$

---

4) Si consideri l'equazione differenziale

$$(1) \qquad y''(t) + A\,y'(t) + B\,y(t) = 0\,.$$

4A) Se $A = B = 0$, i polinomi di primo grado sono soluzioni di (1).
4B) Se $A = -13$ e $B = 36$, la funzione $y(t) = 3\,\mathrm{e}^{4\,t}$ è soluzione di (1).
4C) Se $A = -8$ e $B = 16$, la funzione $y(t) = 7\,t\,\mathrm{e}^{4\,t}$ è soluzione di (1).
4D) Se $A = 0$ e $B = 81$, tutte le soluzioni non nulle di (1) sono periodiche.

Docente
☐ DelaTorre Pedraza
☐ Orsina

Cognome	**Nome**	**Matricola**	**Compito 00009**

5) Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(t) = 3\,(y(t) + 5)\,\cos(3\,t)\,. \tag{1}$$

a) Quante soluzioni di (1) verificano la condizione $y(0) = 12$? E quante le condizioni $y(0) = 0$ e $y'(0) = 15$?
b) Determinare la soluzione di (1) tale che $y(9) = -5$.
c) Calcolare $T_2(y(t); 0)$, dove $y(t)$ è la soluzione di (1) tale che $y(0) = 0$.
d) Determinare la soluzione di (1) tale che $y(0) = 0$.

☐☐☐☐☐☐☐☐ **Cognome** **Nome** **Matricola** **Compito 00009**

---

6) Si consideri il problema di Cauchy

$$(1) \qquad \begin{cases} y''(t) - 6\,y'(t) + 9\,y(t) = 27\,, \\ y(0) = 4\,, \quad y'(0) = 0\,. \end{cases}$$

a) Quante soluzioni ha (1)? E quante tali che $y''(0) = 26$?
b) Scrivere tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata all'equazione di (1).
c) Determinare una soluzione particolare dell'equazione di (1), e scrivere tutte le soluzioni dell'equazione di (1).
d) Determinare la soluzione di (1).

Soluzioni del compito 00009

1) Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(t) = e^{3\,t}\,(7 + y^2(t))\,.$$

1A) L'equazione ha un'unica soluzione.

Falso: Essendo un'equazione differenziale ordinaria del primo ordine, l'equazione ha infinite soluzioni dipendenti da un parametro reale.

1B) Esistono infinite soluzioni dell'equazione tali che $y(0) = 4$.

Falso: Assegnando la condizione iniziale $y(0) = 4$, si ottiene un problema di Cacuhy per un'equazione differenziale ordinaria del primo ordine, che ha un'unica soluzione.

1C) Non esistono soluzioni dell'equazione tali che $y(0) = 0$ e $y'(0) = 7$.

Falso: Se si assegna la condizione $y(0) = 0$, si ottiene un problema di Cauchy per un'equazione differenziale ordinaria del primo ordine, che ha un'unica soluzione. Per tale soluzione si ha

$$y'(0) = e^{3\cdot 0}\,(7 + y^2(0)) = 1 \cdot (7 + 0) = 7\,.$$

Si ha quindi che la condizione $y'(0) = 7$ è automaticamente soddisfatta, e quindi la soluzione esiste ed è unica.

1D) Se $y(0) = 5$, la soluzione è decrescente in un intorno dell'origine.

Falso: Se $y(0) = 5$, si ha

$$y'(0) = e^{3\cdot 0}\,(7 + y^2(0)) = 1 \cdot (7 + 25) = 32 > 0\,.$$

Per il teorema della permanenza del segno, $y'(t) \geq 0$ in un intorno dell'origine, e quindi la soluzione è crescente in tale intorno.
Alternativamente, e prescindendo dalla condizione iniziale, era sufficiente osservare che

$$y'(t) = e^{3\,t}\,(1 + y^2(t)) \geq e^{3\,t} \geq 0\,,$$

e quindi *ogni* soluzione dell'equazione è crescente.

---

2) Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(t) - 5\,y'(t) + 6\,y(t) = 18\,.$$

2A) Esiste un'unica soluzione dell'equazione tale che $y(0) = 3$, $y'(0) = 0$ e $y''(0) = 0$.

Vero: Se si assegnano le condizioni iniziali $y(0) = 3$ e $y'(0) = 0$, si ottiene un problema di Cauchy per un'equazione differenziale ordinaria del secondo ordine, che ha un'unica soluzione. Per tale soluzione, si ha

$$y''(0) = 18 + 5\,y'(0) - 6\,y(0) = 18 + 5 \cdot 0 - 6 \cdot 3 = 0\,,$$

cosicché la condizione $y''(0) = 0$ è automaticamente soddisfatta, e quindi la soluzione esiste ed è unica.

2B) Se $y(0) = 0$ e $y'(0) = 6$, si ha $y''(0) = -12$.

Falso: Con le condizioni iniziali $y(0) = 0$ e $y'(0) = 6$ si ha, per l'unica soluzione del problema,

$$y''(0) = 18 + 5\,y'(0) - 6\,y(0) = 18 + 5 \cdot 6 - 6 \cdot 0 = 48 \neq -12\,.$$

2C) Esiste un'unica soluzione dell'equazione tale che $y'(0) = 1$ e $y''(0) = 5$.

Vero: Se $y(t)$ è soluzione di (1), sostituendo $t = 0$ nell'equazione si trova

$$y''(0) - 5\,y'(0) + 6\,y(0) = 18\,.$$

Se $y'(0) = 1$ e $y''(0) = 5$, si ha

$$5 - 5 \cdot 1 + 6\,y(0) = 18\,,$$

da cui segue $y(0) = 3$. Consideriamo ora l'unica soluzione di (1) tale che $y(0) = 3$ e $y'(0) = 1$. Per tale soluzione si ha, ovviamente, $y''(0) = 5$, e quindi esiste un'unica soluzione dell'equazione tale che $y'(0) = 1$ e $y''(0) = 5$.

2D) Se $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$, la soluzione dell'equazione è concava in un intorno dell'origine.

Falso: Se $y(0) = y'(0) = 0$ si ha, per l'unica soluzione dell'equazione, che

$$y''(0) = 18 + 5\,y'(0) - 6\,y(0) = 18 + 5 \cdot 0 - 6 \cdot 0 = 18 > 0\,.$$

Per il teorema della permanenza del segno, si ha $y''(t) \geq 0$ in un intorno dell'origine, e quindi $y(t)$ è convessa in tale intorno.

---

3) Si consideri il problema di Cauchy

$$(1) \qquad \begin{cases} y'(t) = 5\,y(t) + e^{5\,t} + 10\,, \\ y(0) = 0\,. \end{cases}$$

Ricordiamo che la soluzione del problema di Cauchy per l'equazione $y'(t) = a(t)\,y(t) + b(t)$, con la condizione $y(0) = y_0$ è data da

$$(2) \qquad y(t) = e^{A(t)} \left[y_0 + \int_0^t b(s)\, e^{-A(s)}\, ds \right],$$

dove

$$A(t) = \int_0^t a(s)\, ds\,.$$

Nel nostro caso, $a(t) = 5$ e $b(t) = e^{5\,t} + 10$ e quindi

$$A(t) = \int_0^t 5\, ds = 5\,t\,.$$

Applicando la (2) con $y_0 = 0$ si ha

$$y(t) = e^{5\,t} \int_0^t [e^{5\,s} + 10]\, e^{-5\,s}\, ds = e^{5\,t}\, [s - 2\, e^{-5\,s}]\Big|_0^t = e^{5\,t}\, [t - 2\, e^{-5\,t} + 2]\,,$$

e quindi, semplificando,

$$(3) \qquad y(t) = (t+2)\, e^{5\,t} - 2\,.$$

3A) Si ha $y'(0) > 0$.

Vero: Sostituendo la condizione iniziale $y(0) = 0$ nell'equazione, si ha

$$y'(0) = 5\,y(0) + e^{5 \cdot 0} + 18 = 5 \cdot 0 + 1 + 18 = 19 > 0\,.$$

3B) La funzione $y_0(t) = 5\, e^{5\,t}$ non è soluzione dell'equazione omogenea associata all'equazione di (1).

Falso: L'equazione omogenea associata all'equazione di (1) è

$$y_0'(t) = 5\, y_0(t)\,,$$

Se $y_0(t) = 5\, e^{5\,t}$, si ha

$$y_0'(t) = 25\, e^{5\,t} = 5 \cdot (5\, e^{5\,t}) = 5\, y_0(t)\,,$$

e quindi $y_0(t)$ è soluzione dell'equazione omogenea associata.

3C) La soluzione di (1) è $y(t) = (t-2)\, e^{5\,t} + 2$.

Falso: La soluzione di (1) è data da (3). Alternativamente, se $y(t) = (t-2)\, e^{5\,t} + 2$, si ha

$$y'(t) = 5\,(t-2)\, e^{5\,t} + e^{5\,t}\,,$$

e

$$5\,y(t) + e^{5\,t} + 10 = 5\,(t-2)\, e^{5\,t} + 10 + e^{5\,t} + 10 = 5\,(t-2)\, e^{5\,t} + e^{5\,t} + 20\,.$$

Pertanto,

$$y'(t) - (5\,y(t) + e^{5\,t} + 10) = e^{5\,t} + 5\,(t-2)\, e^{5\,t} - [5\,(t-2)\, e^{5\,t} + e^{5\,t} + 20] = -20 \neq 0\,,$$

e quindi $y(t)$ non è soluzione di (1).

3D) Si ha

$$\lim_{t \to +\infty} y(t) = +\infty\,.$$

Vero: Dalla (3) segue che

$$\lim_{t \to +\infty} y(t) = \lim_{t \to +\infty} [(t-2)\,\mathrm{e}^{5\,t} + 2] = +\infty\,.$$

4) Si consideri l'equazione differenziale

(1) $$y''(t) + A\,y'(t) + B\,y(t) = 0\,.$$

4A) Se $A = B = 0$, i polinomi di primo grado sono soluzioni di (1).

Vero: Se $A = B = 0$, (1) diventa
$$y''(t) = 0\,.$$
Se $y(t)$ è un polinomio di primo grado, si ha $y(t) = a\,t + b$ per qualche a e b reali. Pertanto, $y'(t) = a$ e quindi $y''(t) = 0$. Ne segue che i polinomi di grado 1 sono soluzioni di (1).

4B) Se $A = -13$ e $B = 36$, la funzione $y(t) = 3\,\mathrm{e}^{4\,t}$ è soluzione di (1).

Vero: Se $A = -13$ e $B = 36$, il polinomio caratteristico associato all'equazione (1) è
$$P(L) = L^2 - 13\,L + 36\,,$$
che ha come soluzioni $L_1 = 4$ e $L_2 = 9$. Pertanto, tutte le soluzioni di (1) sono date da
$$y(t) = C\,\mathrm{e}^{4\,t} + D\,\mathrm{e}^{9\,t}\,,$$
con C e D numeri reali. Scegliendo $C = 3$ e $D = 0$, si vede che $y(t) = 3\,\mathrm{e}^{4\,t}$ è soluzione di (1).

4C) Se $A = -8$ e $B = 16$, la funzione $y(t) = 7\,t\,\mathrm{e}^{4\,t}$ è soluzione di (1).

Vero: Se $A = -8$ e $B = 16$, il polinomio caratteristico associato all'equazione (1) è
$$P(L) = L^2 - 8\,L + 16\,,$$
che ha come soluzioni $L_1 = L_2 = 4$. Pertanto, tutte le soluzioni di (1) sono date da
$$y(t) = (C + D\,t)\,\mathrm{e}^{4\,t}\,,$$
con C e D numeri reali. Scegliendo $C = 0$ e $D = 7$, si vede che $y(t) = 7\,t\,\mathrm{e}^{4\,t}$ è soluzione di (1).

4D) Se $A = 0$ e $B = 81$, tutte le soluzioni non nulle di (1) sono periodiche.

Vero: Se $A = 0$ e $B = 81$, il polinomio caratteristico associato all'equazione (1) è
$$P(L) = L^2 + 81\,,$$
che ha come soluzioni $L_{1,2} = \pm\,9\,i$. Pertanto, tutte le soluzioni di (1) sono date da
$$y(t) = C\,\cos(9\,t) + D\,\sin(9\,t)\,,$$
con C e D numeri reali, e sono quindi periodiche (di periodo $T = \frac{2\pi}{9}$).

---

5) Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(t) = 3\,(y(t)+5)\,\cos(3\,t)\,. \tag{1}$$

a) Quante soluzioni di (1) verificano la condizione $y(0) = 12$? E quante le condizioni $y(0) = 0$ e $y'(0) = 15$?
b) Determinare la soluzione di (1) tale che $y(9) = -5$.
c) Calcolare $T_2(y(t);0)$, dove $y(t)$ è la soluzione di (1) tale che $y(0) = 0$.
d) Determinare la soluzione di (1) tale che $y(0) = 0$.

Soluzione:
Osserviamo preliminarmente che l'equazione (1) è a variabili separabili, essendo della forma

$$y'(t) = f(t)\,g(y(t))\,,$$

con

$$f(t) = 3\,\cos(3\,t)\,, \qquad g(s) = s+5\,. \tag{2}$$

a) Assegnando ad (1) la condizione iniziale $y(0) = 12$ si ottiene un problema di Cauchy per un'equazione differenziale del primo ordine, che ha un'unica soluzione. Analogamente, esiste un'unica soluzione di (1) tale che $y(0) = 0$; per tale soluzione si ha, sostituendo $t = 0$,

$$y'(0) = 3\,(y(0)+5)\,\cos(3\cdot 0) = 3\cdot 5\cdot 1 = 15\,,$$

cosicché la condizione $y'(0) = 15$ è automaticamente soddisfatta dall'unica soluzione di (1) tale che $y(0) = 0$. Ne segue pertanto che esiste un'unica soluzione di (1) tale che $y(0) = 0$ e $y'(0) = 15$.

b) Dato che la funzione $g(s)$ in (2) è tale che $g(-5) = -5+5 = 0$, la funzione $y(t) = -5$ è una soluzione costante di (1). Dato che soddisfa la condizione $y(9) = -5$, è la soluzione di (1) tale che $y(9) = -5$ (essendo tale soluzione unica).

c) Se $y(0) = 0$ abbiamo, sostituendo nell'equazione $t = 0$,

$$y'(0) = 3\,(y(0)+5)\,\cos(3\cdot 0) = 3\cdot 5\cdot 1 = 15\,.$$

Derivando l'equazione, si ha poi

$$y''(t) = 3\,y'(t)\,\cos(3\,t) - 9\,(y(t)+5)\,\sin(3\,t)\,.$$

Calcolando questa espressione in $t = 0$, si ha

$$y''(0) = 3\,y'(0)\,\cos(3\cdot 0) - 9\,(y(0)+5)\,\sin(3\cdot 0) = 3\cdot 15\cdot 1 - 9\cdot 5\cdot 0 = 45\,.$$

Si ha quindi

$$T_2(y(t);0) = y(0) + y'(0)\,t + \frac{y''(0)}{2}\,t^2 = 0 + 15\,t + \frac{45}{2}\,t^2 = 15\,t + \frac{45}{2}\,t^2\,.$$

d) Dato che l'equazione è a variabili separabili, e che $y(t) \equiv y(0) = 0$ non è soluzione dell'equazione (come si verifica facilmente), dividiamo per $y(t)+5$, ottenendo l'equazione equivalente

$$\frac{y'(t)}{y(t)+5} = 3\,\cos(3\,t)\,.$$

Integrando tra 0 e s, si ha

$$\int_0^s \frac{y'(t)}{y(t)+5}\,dt = \int_0^s 3\,\cos(3\,t)\,dt = \sin(3\,t)\Big|_0^s = \sin(3\,s)\,.$$

Per quanto riguarda il primo integrale, con la sostituzione $z = y(t)$, da cui $y'(t)\,dt = dz$, si ha (ricordando che $y(0) = 0$)

$$\int_0^s \frac{y'(t)}{y(t)+5}\,dt = \int_{y(0)}^{y(s)} \frac{dz}{z+5} = \log(|z+5|)\Big|_0^{y(s)} = \log(|y(s)+5|) - \log(5) = \log\Big(\frac{y(s)+5}{5}\Big)\,,$$

dove nell'ultimo passaggio si è usato il fatto che $y(s)+5 \geq 0$ in un intorno di $t=0$ dato che $y(0)+5 = 0+5 = 5 > 0$. Si ha quindi che la soluzione di (1) tale che $y(0)=0$ verifica l'identità

$$\log\Big(\frac{y(s)+5}{5}\Big) = \sin(3\,s)\,,$$

da cui segue che

$$\frac{y(s)+5}{5} = \mathrm{e}^{3\,s}\,,$$

e quindi che

$$y(s) = 5\,\mathrm{e}^{\sin(3\,s)} - 5\,.$$

Si noti che l'equazione (1) può essere riscritta nella forma

$$y'(t) = 3\,\cos(3\,t)\,y(t) + 15\,\cos(3\,t)\,,$$

e quindi è anche della forma

$$y'(t) = a(t)\,y(t) + b(t)\,,$$

con

$$a(t) = 3\,\cos(3\,t)\,, \qquad b(t) = 15\,\cos(3\,t)\,.$$

Per tale equazione, assegnando la condizione $y(0)=0$, si ha la formula risolutiva

$$y(t) = \mathrm{e}^{A(t)}\,\Big(\int_0^t b(s)\,\mathrm{e}^{-A(s)}\,ds\Big)\,, \tag{3}$$

dove

$$A(t) = \int_0^t a(s)\,ds = \int_0^t 3\,\cos(3\,s)\,ds = \sin(3\,s)\Big|_0^t = \sin(3\,t)\,.$$

Pertanto, dalla (3) si ha che

$$y(t) = \mathrm{e}^{\sin(3\,t)}\,\Big(15\int_0^t \cos(3\,s)\,\mathrm{e}^{-\sin(3\,s)}\,ds\Big)\,.$$

Per calcolare l'ulitmo integrale, poniamo $z = \sin(3\,s)$, da cui $dz = 3\,\cos(3\,s)\,ds$. Si ha quindi

$$15\int_0^t \cos(3\,s)\,\mathrm{e}^{-\sin(3\,s)}\,ds = 5\int_0^{\sin(3\,t)} \mathrm{e}^{-z}\,dz = 5\,(1-\mathrm{e}^{-\sin(3\,t)})\,,$$

cosicché la soluzione di (1) tale che $y(0)=0$ è data da

$$y(t) = 5\,\mathrm{e}^{\sin(3\,t)}\,(1-\mathrm{e}^{-\sin(3\,t)}) = 5\,\mathrm{e}^{\sin(3\,t)} - 5\,,$$

come trovato in precedenza.

6) Si consideri il problema di Cauchy

$$(1) \qquad \begin{cases} y''(t) - 6\,y'(t) + 9\,y(t) = 27\,, \\ y(0) = 4\,, \quad y'(0) = 0\,. \end{cases}$$

a) Quante soluzioni ha (1)? E quante tali che $y''(0) = 26$?
b) Scrivere tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata all'equazione di (1).
c) Determinare una soluzione particolare dell'equazione di (1), e scrivere tutte le soluzioni dell'equazione di (1).
d) Determinare la soluzione di (1).

Soluzione:
a) Il problema di Cauchy (1) ha un'unica soluzione. Se $y(t)$ è tale soluzione, si ha, sostituendo $t = 0$ nell'equazione, che

$$y''(0) = y''(0) - 6 \cdot 0 + 9 \cdot 0 = y''(0) - 6\,y'(0) + 9\,y(0) = 27\,.$$

Pertanto, per tale soluzione si ha $y''(0) = 27 \neq 26$, e quindi non esistono soluzioni di (1) tali che $y''(0) = 26$.

b) L'equazione omogenea associata all'equazione di (1) è

$$y_0''(t) - 6\,y_0'(t) + 9\,y_0(t) = 0\,,$$

il cui polinomio caratteristico è

$$P(L) = L^2 - 6\,L + 9\,,$$

che ha come soluzioni $L_{1,2} = 3$. Ne segue pertanto che tutte le soluzioni di (2) sono date da

$$y_0(t) = (C + D\,t)\,\mathrm{e}^{3\,t}\,,$$

con C e D numeri reali.

c) Dato che le funzioni costanti non sono soluzioni dell'equazione omogenea, cerchiamo una soluzione particolare dell'equazione di (1) nella forma $\overline{y}(t) = Q$, con Q numero reale. Sostituendo, e dato che $\overline{y}'(t) = \overline{y}''(t) = 0$, si ha che deve essere

$$\overline{y}''(t) - 6\,\overline{y}'(t) + 9\,\overline{y}(t) = 9\,Q = 27\,,$$

da cui segue $Q = 3$. Ne segue che tutte le soluzioni dell'equazione di (1) sono date da

$$(2) \qquad y(t) = y_0(t) + \overline{y}(t) = (C + D\,t)\,\mathrm{e}^{3\,t} + 3\,.$$

d) Se $y(t)$ è data da (2), si ha, derivando,

$$y'(t) = D\,\mathrm{e}^{3\,t} + 3\,(C + D\,t)\,\mathrm{e}^{3\,t}\,.$$

Pertanto,

$$y(0) = C + 3\,, \qquad y'(0) = D + 3\,C\,.$$

Imponendo le condizioni $y(0) = 4$ e $y'(0) = 0$, si ha

$$C = 1\,, \qquad D = -3\,C = -3\,,$$

e quindi l'unica soluzione di (1) è data da

$$y(t) = (1 - 3\,t)\,\mathrm{e}^{3\,t} + 3\,.$$