Calcolo integrale — Scheda di esercizi n. 8
18 Maggio 2023 — Compito n. 00022

Istruzioni: le prime due caselle (**V** / **F**) permettono di selezionare la risposta vero/falso. La casella "**C**" serve a correggere eventuali errori invertendo la risposta data.
Per selezionare una casella, annerirla completamente: ■ (non ☒ o ☑).

Nome: ____________________

Cognome: ____________________

Matricola: | | | | | | | |

	1A	1B	1C	1D	2A	2B	2C	2D	3A	3B	3C	3D	4A	4B	4C	4D
V	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
F	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
C	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

1) Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(t) = (12t+3)\,y(t) + A\,\mathrm{e}^{6t^2+3t}\,.$$

1A) Esiste un'unica soluzione dell'equazione tale che $y(2) = 13$.
1B) Se $A = 0$, la funzione $y(t) = 5\,\mathrm{e}^{6t^2+3t}$ è soluzione dell'equazione.
1C) La funzione $y(t) = (3 + A\,t)\,\mathrm{e}^{6t^2+3t}$ è soluzione dell'equazione.
1D) Se $y(0) = 0$ e $A = 5$, si ha

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = 0\,.$$

2) Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(t) = 6\,\cos(t)\,y(t) + 9\,\sin(t)\,\cos(t)\,.$$

2A) Se $y(0) = 0$, si ha $y'(0) = 0$.
2B) Se $y(0) = 0$, si ha $y''(0) = 9$.
2C) Se $y(0) = 4$, la soluzione $y(t)$ è crescente in un intorno di $t = 0$.
2D) Se $y(\frac{\pi}{2}) = 5$, si ha $T_1(y(t); \frac{\pi}{2}) = 5 + (t - \frac{\pi}{2})$.

3) Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(t) = \frac{\mathrm{e}^{y(t)} - 1}{\mathrm{e}^{y(t)}}\,\cos(t)\,.$$

3A) L'equazione è a variabili separabili.
3B) Se $y(0) = 0$, la soluzione $y(t)$ è costante.
3C) Se $y(0) = 3$, non esiste $t_0 > 0$ tale che $y(t_0) = 0$.
3D) Se $y(0) = \ln(7)$, si ha

$$y(s) = \ln(6) + \sin(s)\,.$$

4) Si consideri l'equazione differenziale $y'(t) = t\,(y(t)^3 - 9y(t))$.

4A) Se $y(0) = 3$, la soluzione non è costante.
4B) Se $y(0) = 1$, si ha $y'(0) \neq 0$.
4C) Se $y(0) = -1$, si ha $T_2(y(t); 0) = -1 + 4\,t^2$.
4D) Se $y(0) = 1$, la soluzione ha un massimo relativo per $t = 0$.

Docente
☐ DelaTorre Pedraza
☐ Orsina

☐☐☐☐☐☐☐☐ **Cognome** **Nome** **Matricola** **Compito 00022**

---

5) Si consideri il problema di Cauchy

$$(1) \qquad \begin{cases} y'(t) = a(t)\, y(t) + b(t)\,, \\ y(0) = y_0\,. \end{cases}$$

a) Si risolva (1) se $a(t) = -2$, $b(t) = 7$ e $y_0 = 0$.
b) Si risolva (1) se $a(t) = \sin(t)$, $b(t) = 6\,\sin(t)$ e $y(0) = \pi$.
c) Si scriva il polinomio di Taylor di ordine 1 di $y(t)$ nell'origine se $a(t) = \mathrm{e}^{2\,t}$, $b(t) = 3\,\cos(t)$ e $y_0 = 5$.
d) Si scriva il polinomio di Taylor di ordine 2 di $y(t)$ nell'origine se $a(t) = 4\,t$, $b(t) = 11\,t^2$ e $y_0 = 5$.

□□□□□□□□ **Cognome** **Nome** **Matricola** **Compito 00022**

---

6) Si risolvano le seguenti equazioni differenziali a variabili separabili.
a) $y'(t) = 2\,y(t) + 3$, se $y(0) = 0$.
b) $y'(t) = 4\,t\,(4 + y^2(t))$, se $y(0) = 0$.
c) $y'(t) = \mathrm{e}^{-y(t)}\,\mathrm{e}^{4\,t}$, se $y(0) = 0$.
d) $y'(t) = \frac{5\,(1+y^2(t))}{y(t)}$, se $y(0) = 1$.

Soluzioni del compito 00022

1) Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(t) = (12t + 3)\, y(t) + A\, e^{6t^2+3t}\,.$$

Ricordiamo la formula risolutiva per il problema di Cauchy

$$\text{(1)}\qquad \begin{cases} y'(t) = a(t)\, y(t) + b(t)\,, \\ y(t_0) = y_0\,. \end{cases}$$

Posto

$$A(t) = \int_{t_0}^{t} a(s)\, ds\,,$$

si ha

$$\text{(2)}\qquad y(t) = e^{A(t)}\left[y_0 + \int_{t_0}^{t} b(s)\, e^{-A(s)}\, ds\right].$$

1A) Esiste un'unica soluzione dell'equazione tale che $y(2) = 13$.

Vero: Trattandosi di un'equazione differenziale ordinaria del primo ordine, è sufficiente una sola condizione iniziale affinché esista un'unica soluzione.

1B) Se $A = 0$, la funzione $y(t) = 5\, e^{6t^2+3t}$ è soluzione dell'equazione.

Vero: Se $y(t) = 5\, e^{6t^2+3t}$, si ha

$$y'(t) = 5\,(12t + 3)\, e^{6t^2+3t} = (12t + 3)\, y(t) = (12t + 3)\, y(t) + A\, e^{6t^2+3t}\,,$$

e quindi $y(t)$ è soluzione dell'equazione.

1C) La funzione $y(t) = (3 + A\,t)\, e^{6t^2+3t}$ è soluzione dell'equazione.

Vero: Se $y(t) = (3 + A\,t)\, e^{6t^2+3t}$, derivando si ha

$$y'(t) = A\, e^{6t^2+3t} + (3 + A\,t)\,(12t + 3)\, e^{6t^2+3t} = (12t + 3)\, y(t) + A\, e^{6t^2+3t}\,,$$

e quindi $y(t)$ è soluzione dell'equazione.

1D) Se $y(0) = 0$ e $A = 5$, si ha

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = 0\,.$$

Falso: Il problema rientra nel caso (1) con

$$a(t) = 12t + 3\,, \quad b(t) = 5\, e^{6t^2+3t}\,, \qquad t_0 = 0\,, \quad y_0 = 0\,.$$

Dato che

$$A(t) = \int_0^t a(s)\, ds = \int_0^t (12s + 3)\, ds = (6s^2 + 3s)\Big|_0^t = 6t^2 + 3t\,,$$

e dato che

$$\int_0^t b(s)\, e^{-A(s)}\, ds = \int_0^t 5\, e^{6s^2+3s}\, e^{-(6s^2+3s)}\, ds = \int_0^t 5\, ds = 5\,t\,,$$

dalla (2) si ha

$$y(t) = 5\,t\, e^{6t^2+3t}\,,$$

da cui segue che

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = +\infty \neq 0\,.$$

2) Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(t) = 6\,\cos(t)\,y(t) + 9\,\sin(t)\,\cos(t)\,.$$

Derivando l'equazione si ha

$$y''(t) = -6\,\sin(t)\,y(t) + 6\,\cos(t)\,y'(t) + 9\,\cos^2(t) - 9\,\sin^2(t)\,. \tag{1}$$

2A) Se $y(0) = 0$, si ha $y'(0) = 0$.

Vero: Dall'equazione, sostituendo $t = 0$, si ha

$$y'(0) = 6\,\cos(0)\,y(0) + 9\,\sin(0)\,\cos(0) = 6 \cdot 1 \cdot 0 + 9 \cdot 0 \cdot 1 = 0\,.$$

2B) Se $y(0) = 0$, si ha $y''(0) = 9$.

Vero: Dall'equazione con $t = 0$ si ha (si veda l'esercizio **2A**)

$$y'(0) = 0\,.$$

Dalla (1) con $t = 0$ si ha

$$y''(0) = 9\,,$$

dato che il primo, secondo e quarto termine si annullano.

2C) Se $y(0) = 4$, la soluzione $y(t)$ è crescente in un intorno di $t = 0$.

Vero: Dall'equazione si ha

$$y'(0) = 6 \cdot \cos(0) \cdot y(0) = 6 \cdot 4 = 24 > 0\,,$$

per ipotesi. Essendo $y'(0) > 0$, si ha $y'(t) > 0$ in un intorno dell'origine (per il teorema di permanenza del segno per funzioni continue) e quindi $y(t)$ è crescente in un intorno dell'origine.

2D) Se $y(\frac{\pi}{2}) = 5$, si ha $T_1(y(t); \frac{\pi}{2}) = 5 + (t - \frac{\pi}{2})$.

Falso: Dall'equazione si ha

$$y'(\tfrac{\pi}{2}) = 6\,\cos(\tfrac{\pi}{2})\,y(\tfrac{\pi}{2}) + 9\,\sin(\tfrac{\pi}{2})\,\cos(\tfrac{\pi}{2}) = 6 \cdot 0 \cdot 5 + 9 \cdot 1 \cdot 0 = 0\,.$$

Ricordando che

$$T_1(y(t); \tfrac{\pi}{2}) = y(\tfrac{\pi}{2}) + y'(\tfrac{\pi}{2})\,(t - \tfrac{\pi}{2})\,,$$

si ha

$$T_1(y(t); \tfrac{\pi}{2}) = 5 \neq 5 + (t - \tfrac{\pi}{2})\,.$$

---

3) Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(t) = \frac{e^{y(t)} - 1}{e^{y(t)}} \cos(t)\,.$$

Osserviamo che l'equazione è a variabili separabili, essendo della forma

$$y'(t) = f(y(t))\, g(t)\,,$$

con

$$f(s) = \frac{e^s - 1}{e^s}\,, \qquad g(t) = \cos(t)\,.$$

Dato che $f(0) = 0$, se all'equazione abbiniamo la condizione iniziale $y(0) = 0$ abbiamo la soluzione costante $y(t) \equiv 0$. Se, invece $y(0) = y_0 > 0$ allora $y(t) \neq 0$ per ogni t e possiamo separare le variabili, riscrivendo l'equazione come

$$\frac{e^{y(t)}\, y'(t)}{e^{y(t)} - 1} = \cos(t)\,.$$

Integrando tra zero e s si ha

$$\int_0^s \frac{e^{y(t)}\, y'(t)}{e^{y(t)} - 1}\, dt = \int_0^s \cos(t)\, dt = \sin(s)\,.$$

Per il primo integrale, con la sostituzione $z = y(t)$, da cui $dz = y'(t)\, dt$, si ha

$$\int_0^s \frac{e^{y(t)}\, y'(t)}{e^{y(t)} - 1}\, dt = \int_{y_0}^{y(s)} \frac{e^z}{e^z - 1}\, dz\,.$$

Con la sostituzione $w = e^z - 1$, da cui $dw = e^z\, dz$, si ha

$$\int_{y_0}^{y(s)} \frac{e^z}{e^z - 1}\, dz = \int_{e^{y_0}-1}^{e^{y(s)}-1} \frac{dw}{w} = \ln(|w|)\Big|_{e^{y_0}-1}^{e^{y(s)}-1} = \ln\left(\left|\frac{e^{y(s)} - 1}{e^{y_0} - 1}\right|\right).$$

Essendo $y_0 > 0$ possiamo levare i moduli (perché?) e scrivere che

$$\ln\left(\frac{e^{y(s)} - 1}{e^{y_0} - 1}\right) = \sin(s)\,,$$

da cui segue, dopo alcuni calcoli, che

$$y(s) = \ln[(e^{y_0} - 1)\, e^{\sin(s)} + 1]\,. \tag{1}$$

Osserviamo di passaggio che la (1) è valida anche nel caso in cui $y_0 = 0$.

3A) L'equazione è a variabili separabili.

Vero: Per quanto detto sopra, l'equazione è a variabili separabili.

3B) Se $y(0) = 0$, la soluzione $y(t)$ è costante.

Vero: Dato che $f(y_0) = f(0) = 0$, la funzione costante $y(t) \equiv y_0 = 0$ è soluzione dell'equazione.

3C) Se $y(0) = 3$, non esiste $t_0 > 0$ tale che $y(t_0) = 0$.

Vero: Se esistesse $t_0 > 0$ tale che $y(t_0) = 0$, il problema di Cauchy con dato iniziale $y(t_0) = 0$ avrebbe due soluzioni: la funzione $y(t)$ che stiamo considerando (e che non è la funzione nulla dato che in $t = 0$ vale 3), e la funzione $w(t) \equiv 0$. Dato che il problema di Cauchy ha un'unica soluzione, si ha $y(t) \neq 0$ per ogni $t > 0$.

3D) Se $y(0) = \ln(7)$, si ha

$$y(s) = \ln(6) + \sin(s)\,.$$

Falso: Dalla (1), con $y_0 = \ln(7)$, da cui segue che $\mathrm{e}^{y_0} - 1 = 7 - 1 = 6$, si ha

$$y(s) = \ln(6\,\mathrm{e}^{\sin(s)} + 1) \neq \ln(6) + \sin(s)\,.$$

4) Si consideri l'equazione differenziale $y'(t) = t\,(y(t)^3 - 9y(t))$.

Osserviamo che l'equazione è a variabili separabili, essendo della forma

$$y'(t) = f(y(t))\,g(t)\,,$$

con

$$f(s) = s^3 - 9s\,, \qquad g(t) = t\,. \tag{1}$$

4A) Se $y(0) = 3$, la soluzione non è costante.

Falso: Se $f(s)$ è come in (1), dato che si ha $f(3) = 0$, la funzione costante $y(t) \equiv 3$ è soluzione dell'equazione.

4B) Se $y(0) = 1$, si ha $y'(0) \neq 0$.

Falso: Dall'equazione, scritta per $t = 0$, si ha

$$y'(0) = 0 \cdot (y(0)^3 - 9y(0)) = 0 \cdot (1 - 9) = 0\,.$$

4C) Se $y(0) = -1$, si ha $T_2(y(t); 0) = -1 + 4\,t^2$.

Vero: Derivando l'equazione si ha

$$y''(t) = y(t)^3 - 9y(t) + t\,(3y(t)^2 - 9)\,y'(t)\,,$$

da cui segue che $y''(0) = 8$. Dato che dall'equazione segue che $y'(0) = 0$ (si veda l'esercizio **4B**), si ha

$$T_2(y(t); 0) = y(0) + y'(0)\,t + \frac{y''(0)}{2}\,t^2 = -1 + 4\,t^2\,.$$

4D) Se $y(0) = 1$, la soluzione ha un massimo relativo per $t = 0$.

Vero: Derivando l'equazione si ha

$$y''(t) = y(t)^3 - 9y(t) + t\,(3y(t)^2 - 9)\,y'(t)\,,$$

da cui segue che $y''(0) = -8 < 0$. Dato che dall'equazione segue che $y'(0) = 0$ (si veda l'esercizio **4B**), si ha che $t = 0$ è un punto di massimo relativo per $y(t)$.

---

5) Si consideri il problema di Cauchy

$$(1) \qquad \begin{cases} y'(t) = a(t)\,y(t) + b(t)\,, \\ y(0) = y_0\,. \end{cases}$$

a) Si risolva (1) se $a(t) = -2$, $b(t) = 7$ e $y_0 = 0$.
b) Si risolva (1) se $a(t) = \sin(t)$, $b(t) = 6\,\sin(t)$ e $y(0) = \pi$.
c) Si scriva il polinomio di Taylor di ordine 1 di $y(t)$ nell'origine se $a(t) = \mathrm{e}^{2\,t}$, $b(t) = 3\,\cos(t)$ e $y_0 = 5$.
d) Si scriva il polinomio di Taylor di ordine 2 di $y(t)$ nell'origine se $a(t) = 4\,t$, $b(t) = 11\,t^2$ e $y_0 = 5$.

Soluzione:
Ricordiamo che la soluzione del problema di Cauchy (1) è data da

$$(2) \qquad y(t) = \mathrm{e}^{A(t)}\left[y_0 + \int_0^t b(s)\,\mathrm{e}^{-A(s)}\,ds\right], \qquad \text{dove} \qquad A(t) = \int_0^t a(s)\,ds\,.$$

a) Dato che $a(t) = -2$, si ha

$$A(t) = -\int_0^t 2\,ds = -2\,t\,.$$

Pertanto, per la (2) si ha

$$y(t) = \mathrm{e}^{-2\,t}\left[0 + \int_0^t 7\,\mathrm{e}^{2\,s}\,ds\right] = \mathrm{e}^{-2\,t}\left[\frac{7}{2}\,\mathrm{e}^{2\,s}\Big|_0^t\right] = \frac{7}{2}\,\mathrm{e}^{-2\,t}\,[\mathrm{e}^{2\,t} - 1] = \frac{7}{2}\,[1 - \mathrm{e}^{-2\,t}]\,.$$

b) Dato che $a(t) = \sin(t)$, si ha

$$A(t) = \int_0^t \sin(s)\,ds = -\cos(s)\Big|_0^t = 1 - \cos(t)\,,$$

e quindi, per la (2),

$$y(t) = \mathrm{e}^{1-\cos(t)}\left[\pi + \int_0^t 6\,\sin(s)\,\mathrm{e}^{\cos(s)-1}\,ds\right].$$

Con il cambio di variabile $z = \cos(s) - 1$, da cui $dz = -\sin(s)\,ds$, si ha

$$\int_0^t 6\,\sin(s)\,\mathrm{e}^{\cos(s)-1}\,ds = -6\int_0^{\cos(t)-1} \mathrm{e}^z\,dz = -6\,\mathrm{e}^z\Big|_0^{\cos(t)-1} = 6(1 - \mathrm{e}^{\cos(t)-1})\,.$$

Pertanto

$$y(t) = \mathrm{e}^{1-\cos(t)}\,[\pi + 6\,(1 - \mathrm{e}^{\cos(t)-1})] = (\pi + 6)\,\mathrm{e}^{1-\cos(t)} - 6\,.$$

c) Dall'equazione si ha

$$y'(0) = \mathrm{e}^{2\cdot 0}\,y(0) + 3\,\cos(0) = 1\cdot 5 + 3 = 8\,,$$

da cui segue che

$$T_1(y(t); 0) = y(0) + y'(0)\,t = 5 + 8\,t\,.$$

d) Dall'equazione si ha

$$y'(0) = 4\cdot 0\cdot y(0) + 11\cdot 0^2 = 0\,.$$

Derivando l'equazione si ha poi

$$y''(t) = 4\,y(t) + 4\,t\,y'(t) + 22\,t\,,$$

da cui segue che

$$y''(0) = 4\,y(0) + 4\cdot 0\cdot y'(0) + 22\cdot 0 = 20\,.$$

Si ha quindi

$$T_2(y(t); 0) = y(0) + y'(0)\,t + \frac{y''(0)}{2}\,t^2 = 5 + 10\,t^2\,.$$

6) Si risolvano le seguenti equazioni differenziali a variabili separabili.
a) $y'(t) = 2\,y(t) + 3$, se $y(0) = 0$.
b) $y'(t) = 4\,t\,(4 + y^2(t))$, se $y(0) = 0$.
c) $y'(t) = \mathrm{e}^{-y(t)}\,\mathrm{e}^{4\,t}$, se $y(0) = 0$.
d) $y'(t) = \frac{5\,(1+y^2(t))}{y(t)}$, se $y(0) = 1$.

Soluzione:
a) Dividendo per $2\,y(t) + 3$, l'equazione è equivalente a

$$\frac{y'(t)}{2\,y(t)+3} = 1\,.$$

Integrando tra 0 e s si ha

$$\int_0^s \frac{y'(t)}{2\,y(t)+3}\,dt = \int_0^s 1\,dt = s\,.$$

Con la sostituzione $z = y(t)$ si ha, ricordando che $y(0) = 0$, ed osservando che $2\,y(s) + 3 > 0$ per s vicino a zero,

$$\int_0^s \frac{y'(t)}{2\,y(t)+3}\,dt = \int_0^{y(s)} \frac{dz}{2\,z+3} = \frac{1}{2}\,\ln(|2\,z+3|)\Big|_0^{y(s)} = \frac{1}{2}\,[\ln(2\,y(s)+3) - \ln(3)]\,.$$

Pertanto,

$$\frac{1}{2}\,[\ln(2\,y(s)+3) - \ln(3)] = s\,,$$

da cui segue (dopo facili calcoli...) che

$$\frac{2\,y(s)+3}{3} = \mathrm{e}^{2\,s}\,,$$

e quindi che

$$y(s) = \frac{3\,\mathrm{e}^{2\,s} - 3}{2}\,.$$

b) Separando le variabili, si ha che deve essere

$$\frac{y'(t)}{4+y^2(t)} = 4\,t\,.$$

Integrando (con la consueta sostituzione $z = y(t)$) si ha

$$\int_0^{y(s)} \frac{dz}{4+z^2} = \int_0^s 4\,t\,dt = 2\,s^2\,.$$

Dato che

$$\int \frac{dz}{4+z^2} = \frac{1}{2}\,\arctan\left(\frac{z}{2}\right),$$

si ha

$$\frac{1}{2}\,\arctan\left(\frac{y(s)}{2}\right) = 2\,s^2\,,$$

da cui segue che

$$y(s) = 2\,\tan(4\,s^2)\,.$$

c) Separando le variabili si arriva a

$$\int_0^{y(s)} \mathrm{e}^z\,dz = \int_0^s \mathrm{e}^{4\,t}\,dt = \frac{\mathrm{e}^{4\,s}-1}{4}\,.$$

Il primo integrale è immediato, e porta a

$$\mathrm{e}^{y(s)} - 1 = \frac{\mathrm{e}^{4\,s}-1}{4}\,,$$

da cui

$$y(s) = \ln\left(\frac{\mathrm{e}^{4\,s} + 3}{4}\right).$$

d) Separando le variabili si arriva a

$$\int_1^{y(s)} \frac{z}{1+z^2}\,dz = \int_0^s 5\,dt = 5\,s\,.$$

Dato che

$$\int \frac{z}{1+z^2}\,dz = \frac{1}{2}\,\frac{2z}{1+z^2}\,dz = \frac{1}{2}\,\ln(1+z^2)\,,$$

si ha

$$\frac{1}{2}\,\ln(1+y^2(s)) - \frac{1}{2}\,\ln(2) = 5\,s\,,$$

da cui

$$y^2(s) = 2\,\mathrm{e}^{10\,s} - 1\,,$$

e quindi

$$y(s) = \sqrt{2\,\mathrm{e}^{10\,s} - 1}\,.$$

Perché, tra le due radici, si è scelta quella positiva?