Calcolo integrale — Compito di pre-esonero
17 Marzo 2023 — Compito n. 00029

Istruzioni: le prime due caselle (**V** / **F**) permettono di selezionare la risposta vero/falso. La casella "**C**" serve a correggere eventuali errori invertendo la risposta data.
Per selezionare una casella, annerirla completamente: ■ (non ☒ o ☑).

Nome: ______________________

Cognome: ______________________

Matricola: | | | | | | | |

Punteggi: 1 punto per ogni risposta esatta, 0 punti per risposte sbagliate o lasciate in bianco.

	1A	1B	1C	1D	2A	2B	2C	2D	3A	3B	3C	3D	4A	4B	4C	4D
V	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
F	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
C	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

1) Sia $a_k \geq 0$ una successione tale che

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k \quad \text{è convergente.}$$

1A) La successione $\frac{a_k}{a_k+6}$ non tende a zero.
1B) La serie di termine generico $\sin(7\,a_k)$ è divergente.
1C) La serie di termine generico $\frac{\cos(a_k)}{k^8}$ è convergente.
1D) La serie di termine generico $k^7\,a_k$ può divergere.

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false

2A)

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\mathrm{e}^{\frac{3}{k}} - 1\right)^{10} \text{ diverge.}$$

2B)

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{9^k\,k^5}{k!} \text{ converge.}$$

2C)

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt[6]{k}} \text{ è indeterminata.}$$

2D)

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{7\,k}}{k^9} \text{ converge assolutamente.}$$

3) Sia $f(x) = \cos(6\,x)$.

3A) Il raggio di convergenza della serie di Taylor di $f(x)$ è finito.
3B) Il coefficiente del termine di grado 2 della serie di Taylor di $f(x)$ è uguale a zero.
3C) Se $g(x) = x^7\,f(x)$, si ha $g^{(8)}(0) = 7!$.
3D) Si ha $f^{(12)}(0) = 6^{12}$.

4) Si consideri la serie di potenze

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{3^k}\,(x-9)^k\,.$$

4A) Il centro della serie è $x_0 = 0$.
4B) Se $a_k = 8$ per ogni k, il raggio di convergenza delle serie è $R = 3$.
4C) Se $a_k = 2^k$, il raggio di convergenza della serie è $R = \frac{3}{2}$.
4D) Se $a_k = \frac{1}{k^9}$, la serie diverge per $x = 12$.

Docente: ______________________

$\square\square\square\square\square\square\square\square$ **Cognome** **Nome** **Matricola** **Compito 00029**

5) a) Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^9 \, \tan\left(\frac{3\,k^2}{3^k}\right).$$

b) Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \sqrt[3]{k}\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{k}} - 1 - \frac{1}{k}\right).$$

c) Scrivere la serie di Taylor di $f(x) = x^5\,\mathrm{e}^{2\,x}$ e calcolare $f^{(4)}(0)$.

d) Data $f(x) = \cos(3\,x^2)$, si calcolino $f^{(4)}(0)$ e $f^{(5)}(0)$.

☐☐☐☐☐☐☐☐ **Cognome** **Nome** **Matricola** **Compito 00029**

6) Si consideri la serie di potenze
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(x-12)^k}{k}\,.$$
a) Si determini il centro della serie.
b) Si determini il raggio di convergenza della serie.
c) Si determini l'insieme di convergenza della serie.
d) Si calcoli $f'(x)$.

Soluzioni del compito 00029

1) Sia $a_k \geq 0$ una successione tale che

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k \quad \text{è convergente.}$$

1A) La successione $\frac{a_k}{a_k+6}$ non tende a zero.

Falso: Dato che la serie di termine generico a_k è convergente, la successione a_k è infinitesima. Pertanto,

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{a_k}{a_k+6} = \frac{0}{0+6} = 0\,.$$

1B) La serie di termine generico $\sin(7\,a_k)$ è divergente.

Falso: Dato che la successione a_k tende a zero (essendo la serie di termine generico a_k convergente), si ha

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\sin(7\,a_k)}{a_k} = \lim_{k\to+\infty} \frac{\sin(7\,a_k)}{7\,a_k}\,7 = 1\cdot 7 = 7 \in (0,+\infty)\,.$$

Per il criterio del confronto asintotico, la serie data converge.

1C) La serie di termine generico $\frac{\cos(a_k)}{k^8}$ è convergente.

Vero: Dato che $\cos(a_k)$ tende a 1 (si ricordi che la successione a_k tende a zero perché la serie è convergente), si ha

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\frac{\cos(a_k)}{k^8}}{\frac{1}{k^8}} = 1\,.$$

Per il criterio del confronto asintotico, la serie data ha lo stesso comportmanto della serie di termine generico $\frac{1}{k^8}$, che converge essendo una serie armonica generalizzata di esponente $\alpha = 8 > 1$.

1D) La serie di termine generico $k^7\,a_k$ può divergere.

Vero: Ad esempio, se $a_k = \frac{1}{k^2}$, la serie di termine generico $k^7\,a_k = k^5$ è divergente.

---

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false

2A)

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(e^{\frac{3}{k}} - 1\right)^{10} \text{ diverge.}$$

Falso: Ricordando che

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1\,,$$

si ha

$$e^{\frac{3}{k}} - 1 \approx \frac{3}{k}\,,$$

e quindi

$$\left(e^{\frac{3}{k}} - 1\right)^{10} \approx \left(\frac{3}{k}\right)^{10} = \frac{3^{10}}{k^{10}}\,.$$

Dato che la serie di termine generico $\frac{3^{10}}{k^{10}}$ è convergente (essendo una serie armonica generalizzata di esponente $\alpha = 10 > 1$), la serie data converge per il criterio del confronto asintotico.

2B)

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{9^k\, k^5}{k!} \text{ converge.}$$

Vero: Applichiamo il criterio del rapporto: si ha

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k \to +\infty} \frac{\frac{9^{k+1}\,(k+1)^5}{(k+1)!}}{\frac{9^k\, k^5}{k!}} = \lim_{k \to +\infty} 9 \left(\frac{k+1}{k}\right)^5 \frac{1}{k+1} = 9 \cdot 1^5 \cdot 0 = 0 < 1\,,$$

e quindi la serie converge.

2C)

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt[6]{k}} \text{ è indeterminata.}$$

Falso: Dato che la successione $a_k = \frac{1}{\sqrt[6]{k}}$ è positiva, decrescente e infinitesima, la serie converge per il criterio di Leibniz.

2D)

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{7\,k}}{k^9} \text{ converge assolutamente.}$$

Vero: Si ha

$$\left|\frac{(-1)^{7\,k}}{k^9}\right| = \frac{1}{k^9}\,.$$

Dato che la serie di termine generico $\frac{1}{k^9}$ converge (essendo una serie armonica generalizzata di esponente $\alpha = 9 > 1$), la serie data converge assolutamente.

---

3) Sia $f(x) = \cos(6\,x)$.

Ricordando che

$$\cos(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\, t^{2k}\,, \qquad \forall t \in \mathbb{R}\,,$$

si ha, per il principio di sostituzione,

$$f(x) = \cos(6\,x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\,(6\,x)^{2k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k\,6^{2k}}{(2k)!}\,x^{2k}\,, \qquad \forall x \in \mathbb{R}\,. \tag{1}$$

3A) Il raggio di convergenza della serie di Taylor di $f(x)$ è finito.

Falso: Dalla (1) segue che il raggio di convergenza della serie è infinito.

3B) Il coefficiente del termine di grado 2 della serie di Taylor di $f(x)$ è uguale a zero.

Falso: Dalla (1) si ha che

$$f(x) = 1 - \frac{6^2}{2}\,x^2 + \text{ termini di grado superiore a } 2\,,$$

e quindi il coefficiente del termine di grado 2 vale -18, che è diverso da zero.

3C) Se $g(x) = x^7\,f(x)$, si ha $g^{(8)}(0) = 7!$.

Falso: Dalla (1) segue che

$$g(x) = x^7\,f(x) = x^7 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k\,6^{2k}}{(2k)!}\,x^{2k} = x^7 - \frac{6^2}{2}\,x^9 + \mathrm{o}(x^9)\,.$$

Dall'ultima espressione, si vede che $g^{(8)}(0) = 0$.

3D) Si ha $f^{(12)}(0) = 6^{12}$.

Vero: Dalla (1), si vede facilmente che il termine di grado 12 nella serie di Taylor di $f(x)$ è

$$a_{12} = \frac{(-1)^6\,6^{12}}{12!} = \frac{6^{12}}{12!}\,,$$

da cui segue che $f^{(12)}(0) = a_{12} \cdot 12! = 6^{12}$.

---

4) Si consideri la serie di potenze

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{3^k} (x-9)^k .$$

Ricordiamo che una serie di potenze è una serie della forma

$$f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k (x - x_0)^k , \tag{1}$$

e che x_0 si dice il centro della serie.

4A) Il centro della serie è $x_0 = 0$.

Falso: Dalla (1), segue che il centro della serie è $x_0 = 9 \neq 0$.

4B) Se $a_k = 8$ per ogni k, il raggio di convergenza delle serie è $R = 3$.

Vero: Se $a_k = 8$ per ogni k, i coefficienti della serie di potenze sono

$$b_k = \frac{8}{3^k} .$$

Si ha

$$L = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{b_k} = \lim_{k\to+\infty} \frac{\sqrt[k]{8}}{3} = \frac{1}{3} ,$$

da cui segue che il raggio di convergenza della serie è $R = \frac{1}{L} = 3$.

4C) Se $a_k = 2^k$, il raggio di convergenza della serie è $R = \frac{3}{2}$.

Vero: Se $a_k = 2^k$, i coefficienti della serie di potenze sono

$$b_k = \frac{2^k}{3^k} = \left(\frac{2}{3}\right)^k .$$

Dato che

$$L = \lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{b_k} = \frac{2}{3} ,$$

il raggio di convergenza della serie è $R = \frac{1}{L} = \frac{3}{2}$.

4D) Se $a_k = \frac{1}{k^9}$, la serie diverge per $x = 12$.

Falso: Se $a_k = \frac{1}{k^9}$ e $x = 12$ la serie diventa

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^9} \frac{(12-9)^k}{3^k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^9} \frac{3^k}{3^k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^9} ,$$

e l'ultima serie è convergente essendo una serie armonica generalizzata di esponente $\alpha = 9 > 1$.

---

5) a) Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^9 \tan\Big(\frac{3\,k^2}{3^k}\Big).$$

b) Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \sqrt[3]{k}\,\Big(e^{\frac{1}{k}} - 1 - \frac{1}{k}\Big).$$

c) Scrivere la serie di Taylor di $f(x) = x^5\,e^{2\,x}$ e calcolare $f^{(4)}(0)$.
d) Data $f(x) = \cos(3\,x^2)$, si calcolino $f^{(4)}(0)$ e $f^{(5)}(0)$.

Soluzione:
a) Ricordando che

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1\,, \qquad \lim_{k\to+\infty} \frac{3\,k^2}{3^k} = 0\,,$$

si ha

$$a_k = k^9 \tan\Big(\frac{3\,k^2}{3^k}\Big) \approx \frac{3\,k^{11}}{3^k} = b_k\,.$$

Applicando il criterio del rapporto alla serie di termine generico b_k si ha

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{b_{k+1}}{b_k} = \lim_{k\to+\infty} \frac{3\,(k+1)^{11}}{3^{k+1}}\,\frac{3^k}{3\,k^{11}} = \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{3}\Big(\frac{k+1}{k}\Big)^{11} = \frac{1}{3}\cdot 1 = \frac{1}{3} < 1\,,$$

e quindi la serie di termine generico b_k è convergente. Per il criterio del confronto asintotico, anche la serie di termine generico a_k è convergente.

b) Ricordando che

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2)\,,$$

si ha che

$$e^{\frac{1}{k}} - 1 - \frac{1}{k} = \frac{1}{2k^2} + o(k^{-2})\,.$$

Pertanto,

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{e^{\frac{1}{k}} - 1 - \frac{1}{k}}{\frac{1}{k^2}} = \frac{1}{2}\,,$$

da cui segue che

$$\sqrt[3]{k}\,\Big(e^{\frac{1}{k}} - 1 - \frac{1}{k}\Big) \approx k^{\frac{1}{3}}\,\frac{1}{k^2} = \frac{1}{k^{\frac{5}{3}}}\,.$$

Dato che la serie di termine generico $\frac{1}{k^{\frac{5}{3}}}$ è convergente (come serie armonica generalizzata di esponente $\alpha = \frac{5}{3} > 1$, la serie data è convergente per il criterio del confronto asintotico.

c) Ricordando che

$$e^t = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!}\,, \qquad \forall t \in \mathbb{R}\,,$$

si ha

$$e^{2\,x} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k}{k!}\,x^k\,,$$

e quindi

$$f(x) = x^5\,e^{2\,x} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k}{k!}\,x^{k+5}\,.$$

Dato che nella serie non compaiono termini di grado 4 (il grado minimo è 5, corrispondente a $k = 0$), si ha $f^{(4)}(0) = 0$.

d) Ricordando che

$$\cos(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\, t^{2k} = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} + \mathrm{o}(t^4)\,,$$

si ha

$$f(x) = \cos(3\,x^2) = 1 - \frac{(3\,x^2)^2}{2} + \frac{(3\,x^2)^4}{24} + \mathrm{o}(x^8) = 1 - \frac{9}{2}\,x^4 + 0 \cdot x^5 + \mathrm{o}(x^5)\,,$$

da cui segue che $f^{(4)}(0) = -\frac{9}{2} \cdot 4!$ e che $f^{(5)}(0) = 0$.

6) Si consideri la serie di potenze

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(x-12)^k}{k} .$$

a) Si determini il centro della serie.
b) Si determini il raggio di convergenza della serie.
c) Si determini l'insieme di convergenza della serie.
d) Si calcoli $f'(x)$.

Soluzione:
a) Ricordando che la forma generale di una serie di potenze è

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \, (x-x_0)^k \,,$$

dove x_0 è il centro della serie, il centro della serie proposta è $x_0 = 12$.

b) Dato che $a_k = \frac{1}{k}$, si ha

$$L = \lim_{k\to+\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to+\infty} \frac{\frac{1}{k+1}}{\frac{1}{k}} = \lim_{k\to+\infty} \frac{k}{k+1} = 1 \,,$$

da cui segue che il raggio di convergenza della serie è $R = \frac{1}{L} = 1$.

c) Dato che $R = 1$, la serie converge se x è tale che $|x-12| < 1$, ovvero se x appartiene a $(11, 13)$ e non converge se $|x-12| > 1$. Rimangono da studiare i due casi $x = 13$ e $x = 11$. Sostituendo si ottengono le due serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} \,, \qquad \text{e} \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} \,.$$

La prima diverge, mentre la seconda converge per il criterio di Leibnitz. Ne segue che l'insieme di convergenza della serie è l'intervallo $I = [11, 13)$.

d) Si ha, per x in I,

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k\,(x-12)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{+\infty} (x-12)^{k-1} = \sum_{h=0}^{+\infty} (x-12)^h = \frac{1}{1-(x-12)} = \frac{1}{13-x} \,.$$