Calcolo integrale — Scheda di esercizi n. 6
21 Aprile 2023 — Compito n. 00029

Istruzioni: le prime due caselle (**V** / **F**) permettono di selezionare la risposta vero/falso. La casella "**C**" serve a correggere eventuali errori invertendo la risposta data.
Per selezionare una casella, annerirla completamente: ■ (non ☒ o ☑).

Nome: ____________________

Cognome: ____________________

Matricola: | | | | | | | |

Punteggi: 1 punto per ogni risposta esatta, 0 punti per risposte sbagliate o lasciate in bianco.

	1A	1B	1C	1D	2A	2B	2C	2D	3A	3B	3C	3D	4A	4B	4C	4D
V	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
F	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
C	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

1) Sia

$$F(t) = \int_{-4}^{t} [\cos^2(6\,x^2) + 4\,x^2]\,dx\,.$$

1A) Si ha $F(0) < 0$.
1B) La funzione $F(t)$ è crescente su $\mathbb{R}$.
1C) La funzione $F(t)$ è una funzione dispari.
1D) Si ha

$$\lim_{t\to+\infty} F(t) < +\infty\,.$$

---

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false

2A)

$$\int_{-5}^{5} [x^5 + \sin(3\,x)]\,dx \neq 0\,.$$

2B)

$$\int_{-4}^{4} [x^{10} + x^9]\,dx > 0\,.$$

2C)

$$\int_{11}^{16} \frac{dx}{x-6} = \int_{21}^{36} \frac{dx}{x-6}\,.$$

2D)

$$\int_0^{\pi/9} \sin(9\,x)\,dx = \frac{1}{9}\int_0^{\pi} \sin(x)\,dx\,.$$

3) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false

3A)

$$\int_0^{\pi} \sin(5\,x)\,dx = 10$$

3B)

$$\int_0^{1/\sqrt{7}} x\,\mathrm{e}^{7\,x^2}\,dx = 14\,(\mathrm{e}-1)\,.$$

3C)

$$\int_0^{1} 6\,x\,\mathrm{e}^{x}\,dx = 6\,.$$

3D)

$$\int_0^{5\,\pi} \sin^2(x)\,dx = \frac{\pi}{2}\,.$$

---

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false

4A)

$$\int_6^{7} \frac{dx}{|x-5|} = -\ln(2)\,.$$

4B)

$$\int_7^{8} \frac{dx}{(x-6)^2} = \frac{1}{2}\,.$$

4C)

$$\int_4^{8} \frac{dx}{x^2+4x} = \ln(4/3)\,.$$

4D)

$$\int_0^{8} \frac{x}{x^2+225}\,dx = \ln\left(\frac{17}{15}\right)\,.$$

Docente
☐ DelaTorre Pedraza
☐ Orsina

☐☐☐☐☐☐☐☐ **Cognome** **Nome** **Matricola** **Compito 00029**

---

5) Calcolare una primitiva delle funzioni $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ e $k(x)$ e calcolare gli integrali.

$$\textbf{a12)}\ f(x) = \frac{1}{x+3}\,, \quad \int_0^1 f(x)\,dx\,, \qquad \textbf{b12)}\ g(x) = \frac{1}{x^2-6\,x}\,, \quad \int_{10}^{14} g(x)\,dx\,,$$

$$\textbf{c12)}\ h(x) = \frac{12\,x+30}{x^2+5\,x+1}\,, \quad \int_0^1 h(x)\,dx\,, \qquad \textbf{d12)}\ k(x) = \frac{x^3}{x^2-4}\,, \quad \int_{-1}^1 k(x)\,dx\,,$$

☐☐☐☐☐☐☐☐ **Cognome** **Nome** **Matricola** **Compito 00029**

6) Calcolare una primitiva delle funzioni $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ e $k(x)$ e calcolare gli integrali.

$$\textbf{a12)}\ f(x) = x^3\,\cos(x^2)\,, \quad \int_0^{\sqrt{5\,\pi}} f(x)\,dx\,, \qquad \textbf{b12)}\ g(x) = (x^2 + 2x - 9)\,\mathrm{e}^x\,, \quad \int_0^3 g(x)\,dx\,,$$

$$\textbf{c12)}\ h(x) = \cos^3(x)\,, \quad \int_0^{\frac{5}{2}\,\pi} h(x)\,dx\,, \qquad \textbf{d12)}\ k(x) = \frac{4x-5}{5}\,\ln(x)\,, \quad \int_1^5 k(x)\,dx\,,$$

Soluzioni del compito 00029

1) Sia
$$F(t) = \int_{-4}^{t} [\cos^2(6\,x^2) + 4\,x^2]\,dx\,.$$

1A) Si ha $F(0) < 0$.

Falso: Si ha
$$F(0) = \int_{-6}^{0} [\cos^2(6\,x^2) + 4\,x^2]\,dx > 0\,,$$
dato che la funzione integranda è positiva.

1B) La funzione $F(t)$ è crescente su $\mathbb{R}$.

Vero: Per il teorema fondamentale del calcolo integrale si ha
$$F'(t) = \cos^2(6\,t^2) + 4\,t^2 \geq 0\,,$$
e quindi la funzione $F(t)$ è crescente.

1C) La funzione $F(t)$ è una funzione dispari.

Falso: Se la funzione $F(t)$ fosse dispari, si avrebbe
$$F(-4) = -F(4)\,.$$
Tuttavia,
$$F(-4) = \int_{-4}^{-4} [\cos^2(6\,x^2) + 4\,x^2]\,dx = 0\,,$$
e quindi (se la funzione $F(t)$ fosse dispari), dovrebbe essere $F(4) = 0$. Dato però che la funzione $F(t)$ è strettamente crescente, si ha $F(4) > F(-4) = 0$, e quindi $F(t)$ non è dispari.

1D) Si ha
$$\lim_{t\to+\infty} F(t) < +\infty\,.$$

Falso: Si ha, per $t \geq -4$,
$$F(t) = \int_{-4}^{t} [\cos^2(6\,x^2) + 4\,x^2]\,dx \geq \int_{-4}^{t} 4\,x^2\,dx = \frac{4}{3}\,t^3 - \frac{4}{3}\,4^3\,.$$
Pertanto,
$$\lim_{t\to+\infty} F(t) \geq \lim_{t\to+\infty} \frac{4}{3}\,t^3 - \frac{256}{3} = +\infty\,.$$

---

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false

2A)

$$\int_{-5}^{5} [x^5 + \sin(3\,x)]\,dx \neq 0\,.$$

Falso: Dal momento che le funzioni $x \mapsto x^5$ e $x \mapsto \sin(3\,x)$ sono funzioni dispari, e che l'intervallo di integrazione è simmetrico rispetto all'origine, l'integrale vale zero.

2B)

$$\int_{-4}^{4} [x^{10} + x^9]\,dx > 0\,.$$

Vero: Dal momento che la funzione $x \mapsto x^9$ è una funzione dispari, e che l'intervallo di integrazione è simmetrico rispetto all'origine, l'integrale di x^9 vale zero; d'altra parte, dato che la funzione $x \mapsto x^{10}$ è una funzione pari, e che l'intervallo è simmetrico rispetto all'origine, si ha

$$\int_{-4}^{4} x^{10}\,dx = 2\int_{0}^{4} x^{10} = \frac{2}{11}\,4^{11} > 0\,.$$

2C)

$$\int_{11}^{16} \frac{dx}{x-6} = \int_{21}^{36} \frac{dx}{x-6}\,.$$

Vero: Infatti si ha

$$\int_{11}^{16} \frac{dx}{x-6} = \ln(|x-6|)\Big|_{11}^{16} = \ln(10) - \ln(5) = \ln(2)\,,$$

e

$$\int_{21}^{36} \frac{dx}{x-6} = \ln(|x-6|)\Big|_{21}^{36} = \ln(30) - \ln(15) = \ln(2)\,,$$

e quindi i due integrali sono uguali.

2D)

$$\int_{0}^{\pi/9} \sin(9\,x)\,dx = \frac{1}{9}\int_{0}^{\pi} \sin(x)\,dx\,.$$

Vero: Si ha

$$\int_{0}^{\pi/9} \sin(9\,x)\,dx = -\frac{1}{9}\cos(9\,x)\Big|_{0}^{\pi/9} = -\frac{\cos(9\cdot\pi/9) - \cos(0)}{9} = \frac{2}{9}\,,$$

e

$$\int_{0}^{\pi} \sin(x)\,dx = -\cos(x)\Big|_{0}^{\pi} = -\cos(\pi) + \cos(0) = 2\,,$$

e quindi

$$\int_{0}^{\pi/9} \sin(9\,x)\,dx = \frac{2}{9} = \frac{1}{9}\cdot 2 = \frac{1}{9}\int_{0}^{\pi} \sin(x)\,dx$$

---

3) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false

3A)

$$\int_0^{\pi} \sin(5\,x)\,dx = 10$$

Falso: Si ha infatti

$$\int_0^{\pi} \sin(5\,x)\,dx = -\frac{\cos(5\,x)}{5}\Big|_0^{\pi} = -\frac{\cos(5\,\pi) - \cos(0)}{5} = \frac{2}{5} \neq 10\,.$$

3B)

$$\int_0^{1/\sqrt{7}} x\,\mathrm{e}^{7\,x^2}\,dx = 14\,(\mathrm{e} - 1)\,.$$

Falso: Si ha, con la sostituzione $y = 7\,x^2$, da cui $dy = 14\,x\,dx$ e quindi $x\,dx = \frac{dy}{14}$,

$$\int_0^{1/\sqrt{7}} x\,\mathrm{e}^{7\,x^2}\,dx = \frac{1}{14}\int_0^1 \mathrm{e}^y\,dy = \frac{\mathrm{e} - 1}{14} \neq 14\,(\mathrm{e} - 1)\,.$$

3C)

$$\int_0^1 6\,x\,\mathrm{e}^x\,dx = 6\,.$$

Vero: Si ha, integrando per parti (derivando $6\,x$ e integrando l'esponenziale),

$$\int_0^1 6\,x\,\mathrm{e}^x\,dx = 6\,x\,\mathrm{e}^x\Big|_0^1 - 6\int_0^1 \mathrm{e}^x\,dx = 6\,\mathrm{e} - 6\,\mathrm{e}^x\Big|_0^1 = 6\,\mathrm{e} - 6\,\mathrm{e} + 6 = 6\,.$$

3D)

$$\int_0^{5\,\pi} \sin^2(x)\,dx = \frac{\pi}{2}\,.$$

Falso: Iniziamo con il calcolare una primitiva di $\sin^2(x)$; ricordando la formula

$$\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}\,,$$

si ha

$$\int \sin^2(x)\,dx = \frac{1}{2}\int [1 - \cos(2x)]\,dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4}\,.$$

Si ha pertanto

$$\int_0^{5\,\pi} \sin^2(x)\,dx = \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4}\right]\Big|_0^{5\,\pi} = \frac{5}{2}\,\pi \neq \frac{\pi}{2}\,,$$

dato che $\sin(10\,\pi) = 0 = \sin(0)$.

---

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false

4A)

$$\int_6^7 \frac{dx}{|x-5|} = -\ln(2)\,.$$

Falso: Iniziamo con l'osservare che si ha $x-5 \geq 0$ sull'intervallo $[6,7]$; su tale intervallo si ha pertanto $|x-5| = x-5$. Si ha allora

$$\int_6^7 \frac{dx}{|x-5|} = \int_6^7 \frac{dx}{x-5} = \ln(|x-5|)\Big|_6^7 = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2) \neq -\ln(2)\,.$$

Alternativamente, si poteva osservare che, essendo la funzione integranda positiva, l'integrale non poteva venire un numero negativo.

4B)

$$\int_7^8 \frac{dx}{(x-6)^2} = \frac{1}{2}\,.$$

Vero: Infatti si ha

$$\int_7^8 \frac{dx}{(x-6)^2} = -\frac{1}{x-6}\Big|_7^8 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}\,.$$

4C)

$$\int_4^8 \frac{dx}{x^2+4x} = \ln(4/3)\,.$$

Falso: Il polinomio al denominatore si scompone come

$$x^2 + 4x = x\,(x+4)\,,$$

che ha come radici $x_1 = -4$ e $x_2 = 0$. Ricordando che

$$\int \frac{dx}{(x-x_1)\,(x-x_2)} = \frac{1}{x_2-x_1}\,\ln\left(\left|\frac{x-x_2}{x-x_1}\right|\right),$$

si ha quindi

$$\int_4^8 \frac{dx}{x^2+4x} = \int_4^8 \frac{dx}{x\,(x+4)} = \frac{1}{4}\,\ln\left(\left|\frac{x}{x+4}\right|\right)\Big|_4^8 = \frac{1}{4}\left[\ln\left(\frac{8}{12}\right) - \ln\left(\frac{4}{8}\right)\right] = \frac{1}{4}\,\ln(4/3) \neq \ln(4/3)\,.$$

4D)

$$\int_0^8 \frac{x}{x^2+225}\,dx = \ln\left(\frac{17}{15}\right).$$

Vero: Si ha, facendo comparire al numeratore la derivata del denominatore,

$$\int_0^8 \frac{x}{x^2+225}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^8 \frac{2x}{x^2+225}\,dx = \frac{1}{2}\,\ln(|x^2+225|)\Big|_0^8.$$

Svolgendo i calcoli, si ha allora

$$\int_0^8 \frac{x}{x^2+225}\,dx = \frac{\ln(289)-\ln(225)}{2} = \frac{1}{2}\,\ln\left(\frac{17^2}{15^2}\right) = \ln\left(\frac{17}{15}\right).$$

---

5) Calcolare una primitiva delle funzioni $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ e $k(x)$ e calcolare gli integrali.

$$\textbf{a12)}\ f(x) = \frac{1}{x+3}\,, \quad \int_0^1 f(x)\,dx\,, \qquad \textbf{b12)}\ g(x) = \frac{1}{x^2-6\,x}\,, \quad \int_{10}^{14} g(x)\,dx\,,$$

$$\textbf{c12)}\ h(x) = \frac{12\,x+30}{x^2+5\,x+1}\,, \quad \int_0^1 h(x)\,dx\,, \qquad \textbf{d12)}\ k(x) = \frac{x^3}{x^2-4}\,, \quad \int_{-1}^1 k(x)\,dx\,,$$

Soluzione:

a12) Ricordando che si ha

$$\int \frac{dx}{x+a} = \ln(|x+a|)\,,$$

si ha

$$\int \frac{dx}{x+3} = \ln(|x+3|)\,,$$

e quindi

$$\int_0^1 \frac{dx}{x+3} = \ln(|x+3|)\Big|_0^1 = \ln(4) - \ln(3) = \ln\left(\frac{4}{3}\right).$$

b12) Ricordando che si ha

$$\int \frac{dx}{(x-x_2)\,(x-x_1)} = \frac{1}{x_2-x_1}\,\ln\left(\left|\frac{x-x_2}{x-x_1}\right|\right),$$

ed essendo $x^2-6\,x = x\,(x-6) = (x-0)(x-6)$, si ha

$$\int \frac{dx}{x^2-6\,x} = \frac{1}{6}\,\ln\left(\left|\frac{x-6}{x}\right|\right).$$

Pertanto,

$$\int_{10}^{14} \frac{dx}{x^2-6\,x} = \frac{1}{6}\,\ln\left(\left|\frac{x-6}{x}\right|\right)\Big|_{10}^{14} = \frac{1}{6}\left[\ln\left(\frac{8}{14}\right) - \ln\left(\frac{4}{10}\right)\right] = \frac{1}{6}\,\ln\left(\frac{10}{7}\right).$$

c12) La derivata del denominatore è:

$$[x^2+5\,x+1]' = 2x+5\,,$$

mentre il numeratore si può scrivere come:

$$12\,x+30 = 6\,(2x+5)\,.$$

Si ha allora

$$\int \frac{12\,x+30}{x^2+5\,x+1}\,dx = 6\int \frac{2x+5}{x^2+5\,x+1}\,dx = 6\,\ln(|x^2+5\,x+1|)\,,$$

da cui segue che

$$\int_0^1 \frac{12\,x+30}{x^2+5\,x+1}\,dx = 6\,\ln(|x^2+5\,x+1|)\Big|_0^1 = 6\,[\ln(7)-\ln(1)] = 6\,\ln(7)\,.$$

d12) Si ha

$$x^3 = x^3 - 4\,x + 4\,x = x\,(x^2-4) + 4\,x\,,$$

e quindi

$$\frac{x^3}{x^2-4} = \frac{x\,(x^2-4)+4\,x}{x^2-4} = x + \frac{4\,x}{x^2-4} = x + 2\,\frac{2x}{x^2-4}\,.$$

Ne segue che

$$\int \frac{x^3}{x^2-4}\,dx = \int \left[x + 2\,\frac{2x}{x^2-4}\right]dx = \frac{x^2}{2} + 2\,\ln(|x^2-4|)\,,$$

e quindi che

$$\int_{-1}^1 \frac{x^3}{x^2-4}\,dx = \left[\frac{x^2}{2} + 2\,\ln(|x^2-4|)\right]\Big|_{-1}^1 = \frac{1}{2} + 2\,\ln(3) - \frac{1}{2} - 2\,\ln(3) = 0\,.$$

Si noti che, essendo la funzione integranda dispari e l'intervallo simmetrico rispetto all'origine, si poteva concludere che l'integrale valeva zero **senza** calcolare la primitiva.

6) Calcolare una primitiva delle funzioni $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ e $k(x)$ e calcolare gli integrali.

$$\textbf{a12)}\ f(x) = x^3 \cos(x^2)\,, \quad \int_0^{\sqrt{5\,\pi}} f(x)\,dx\,, \qquad \textbf{b12)}\ g(x) = (x^2+2x-9)\,\mathrm{e}^x\,, \quad \int_0^3 g(x)\,dx\,,$$

$$\textbf{c12)}\ h(x) = \cos^3(x)\,, \quad \int_0^{\frac{5}{2}\,\pi} h(x)\,dx\,, \qquad \textbf{d12)}\ k(x) = \frac{4x-5}{5}\,\ln(x)\,, \quad \int_1^5 k(x)\,dx\,,$$

Soluzione:

a12) Con la sostituzione $y = x^2$, da cui $dy = 2x\,dx$, e quindi $x\,dx = \frac{dy}{2}$, si ha

$$\int x^3 \cos(x^2)\,dx = \int x^2 \cos(x^2)\,x\,dx = \frac{1}{2}\int y\,\cos(y)\,dy\,.$$

Integrando per parti (al solito, derivando y ed integrando il coseno), si ha

$$\int y\,\cos(y)\,dy = y\,\sin(y) - \int \sin(y)\,dy = y\,\sin(y) + \cos(y)\,,$$

da cui segue (ricordando la sostituzione) che

$$\int x^3 \cos(x^2)\,dx = \frac{x^2\,\sin(x^2) + \cos(x^2)}{2}\,.$$

Si ha dunque

$$\int_0^{\sqrt{5\,\pi}} x^3 \cos(x^2) = \frac{x^2\,\sin(x^2) + \cos(x^2)}{2}\Big|_0^{\sqrt{5\,\pi}} = \frac{\cos(5\,\pi) - \cos(0)}{2} = -1\,.$$

b12) Ricordiamo che se $P(x)$ è un polinomio, si ha

$$\int P(x)\,\mathrm{e}^x\,dx = Q(x)\,\mathrm{e}^x\,,$$

dove $Q(x)$ è un polinomio dello stesso grado di $P(x)$ e tale che

$$P(x) = Q(x) + Q'(x)\,.$$

Considerando un generico polinomio di secondo grado $Q(x) = a\,x^2 + b\,x + c$, si ha dunque

$$Q(x) + Q'(x) = x^2 + (2a+b)\,x + (b+c) = x^2 + 2x - 9\,,$$

da cui si deduce che deve essere $a = 1$, $2a + b = 2$ e $b + c = -9$; da queste tre equazioni si ricava facilmente che $a = 1$, $b = 0$ e $c = -9$, cosicché si ha

$$\int (x^2+2x-9)\,\mathrm{e}^x\,dx = (x^2-9)\,\mathrm{e}^x\,.$$

Se ne deduce che

$$\int_0^3 (x^2+2x-9)\,\mathrm{e}^x\,dx = (x^2-9)\,\mathrm{e}^x\Big|_0^3 = 9\,.$$

c12) Iniziamo a scrivere

$$\cos^3(x) = \cos^2(x)\,\cos(x) = (1-\sin^2(x))\,\cos(x)\,,$$

cosicché si tratta di calcolare

$$\int (1-\sin^2(x))\,\cos(x)\,dx\,.$$

Con la sostituzione $y = \sin(x)$, da cui $dy = \cos(x)\,dx$, si ha

$$\int (1-\sin^2(x))\,\cos(x)\,dx = \int (1-y^2)\,dy = y - \frac{y^3}{3} = \sin(x) - \frac{\sin^3(x)}{3}\,.$$

Se ne deduce che

$$\int_0^{\frac{5}{2}\,\pi} \cos^3(x)\,dx = \Big[\sin(x) - \frac{\sin^3(x)}{3}\Big]\Big|_0^{\frac{5}{2}\,\pi} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}\,.$$

d12) Integrando per parti (derivando il logaritmo e integrando il polinomio) si ha

$$\begin{aligned}\int \frac{4x-5}{5}\,\ln(x)\,dx &= \frac{2x^2-5\,x}{5}\,\ln(x) - \int \frac{2x^2-5\,x}{5}\,\frac{1}{x}\,dx = \frac{2x^2-5\,x}{5}\,\ln(x) - \int \frac{2x-5}{5}\,dx \\ &= \frac{2x^2-5\,x}{5}\,\ln(x) - \frac{x^2-5\,x}{5}\,.\end{aligned}$$

Ne segue che

$$\int_1^5 \frac{4x-5}{5}\,\ln(x)\,dx = \Big[\frac{2x^2-5\,x}{5}\,\ln(x) - \frac{x^2-5\,x}{5}\Big]\Big|_1^5 = 5\,\ln(5) - 0 - 0 + \frac{1-5}{5} = 5\,\ln(5) - \frac{4}{5}\,.$$