



Calcolo integrale — Scheda di esercizi n. 5
14 Aprile 2023 — Compito n. 00111

Istruzioni: le prime due caselle (**V** / **F**) permettono di selezionare la risposta vero/falso. La casella “**C**” serve a correggere eventuali errori invertendo la risposta data. Per selezionare una casella, annerirla completamente: ■ (non ☒ o ☑).

Nome: _____

Cognome: _____

Matricola:

--	--	--	--	--	--	--

Punteggi: 1 punto per ogni risposta esatta, 0 punti per risposte sbagliate o lasciate in bianco.

	1A	1B	1C	1D	2A	2B	2C	2D	3A	3B	3C	3D	4A	4B	4C	4D
V	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
F	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
C	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

1) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false

1A) Esistono intervalli chiusi e limitati di \mathbb{R} su cui la funzione $f(x) = 4x^2 - 6x + 5$ non è integrabile.

1B) La funzione $f(x) = |x - 4|$ è integrabile su ogni intervallo chiuso e limitato di \mathbb{R} .

1C) La funzione $f(x) = \frac{x+2}{x-3}$ è integrabile su ogni intervallo chiuso e limitato di \mathbb{R} .

1D) La funzione $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ è integrabile su ogni intervallo chiuso e limitato di \mathbb{R} .

2) Sia

$$F(t) = \int_0^t x e^{-4x^4} dx.$$

2A) La funzione $F(t)$ è derivabile per ogni t in \mathbb{R} .

2B) Si ha $F'(0) = 0$.

2C) La funzione $F(t)$ è una funzione dispari.

2D) La funzione $F(t)$ è crescente per $t \geq 0$.

3) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false

3A) La funzione $x^2 \sin(x^3)$ si integra per parti.

3B) La funzione $x^6 \sin(x)$ si integra per parti.

3C) La funzione $x^{13} \sin(x^2)$ si integra per sostituzione prima, e per parti poi.

3D) La funzione $f(x) = x^{10} \arctan(x)$ si integra per parti prima, e per sostituzione poi.

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false

4A) Si ha

$$\int_8^{23} \frac{dx}{x} = \ln\left(\frac{8}{23}\right).$$

4B) Si ha

$$\int_{30}^{36} \frac{dx}{x-6} = \ln\left(\frac{5}{4}\right).$$

4C) Si ha

$$\int_8^{20} \frac{dx}{4-x} = \ln(4).$$

4D) Si ha

$$\int_0^1 \frac{dx}{3x-10} = \ln\left(\frac{7}{10}\right).$$

Docente

- ☐ DelaTorre Pedraza
☐ Orsina

--	--	--	--	--	--	--	--

Cognome

Nome

Matricola

Compito 00111

5) Calcolare una primitiva delle seguenti funzioni

a1) $x \sin(x)$, **a2)** $x^3 e^x$, **b1)** $x^2 \ln(x)$, **b2)** $(x^2 - 3x + 4) e^x$,

c1) $x e^{3x}$, **c2)** $x \cos(7x)$, **d1)** $e^{\sqrt{x}}$, **d2)** $\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}$,

--	--	--	--	--	--	--	--

Cognome

Nome

Matricola

Compito 00111

6)

a1) - a2) Trovare una primitiva di $f(x) = \frac{1}{x^2 - 12x + 36}$ e calcolare $\int_7^8 f(x) dx$.

b1) - b2) Trovare una primitiva di $g(x) = \frac{1}{x^2 - 11x + 30}$ e calcolare $\int_7^8 g(x) dx$.

c1) - c2) Trovare una primitiva di $h(x) = \frac{1}{x^2 - 8x + 20}$ e calcolare $\int_4^6 h(x) dx$.

d1) - d2) Trovare una primitiva di $k(x) = \frac{2x - 13}{x^2 - 14x + 48}$ e di $j(x) = \frac{x^3}{6 + x^2}$.

--	--	--	--	--	--	--	--

Cognome

Nome

Matricola

Compito 00111

7) Trovare una primitiva di

a1) $x e^{6x}$, **a2)** $e^x \sin(4x)$, **b1)** $\sin^2(2x)$, **b2)** $\cos^3(2x)$,

c1) $(6x + 9) e^x$, **c2)** $(11x^2 - 6x + 2) e^x$, **d1)** $x^2 \ln(5x)$, **d2)** $4x \arctan(2x)$.

Soluzioni del compito 00111

1) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false

1A) Esistono intervalli chiusi e limitati di \mathbb{R} su cui la funzione $f(x) = 4x^2 - 6x + 5$ non è integrabile.

Falso: Dal momento che la funzione $f(x) = 4x^2 - 6x + 5$ è una funzione continua, è integrabile su ogni intervallo chiuso e limitato di \mathbb{R} .

1B) La funzione $f(x) = |x - 4|$ è integrabile su ogni intervallo chiuso e limitato di \mathbb{R} .

Vero: Dal momento che la funzione $f(x) = |x - 4|$ è una funzione continua, è integrabile su ogni intervallo chiuso e limitato di \mathbb{R} .

1C) La funzione $f(x) = \frac{x+2}{x-3}$ è integrabile su ogni intervallo chiuso e limitato di \mathbb{R} .

Falso: Dal momento che la funzione è illimitata (sia superiormente che inferiormente) in ogni intervallo chiuso e limitato che contenga $x = 3$ al suo interno (ad esempio: l'intervallo $[2, 4]$), la funzione non è integrabile su tali intervalli.

1D) La funzione $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ è integrabile su ogni intervallo chiuso e limitato di \mathbb{R} .

Vero: Dal momento che $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$, si ha, se $x \neq 2$,

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = x + 2.$$

Ne consegue che la funzione $f(x)$ coincide, in tutti i punti tranne $x = 2$, con la funzione continua $g(x) = x + 2$, che è integrabile su ogni intervallo chiuso e limitato di \mathbb{R} ; dunque, anche la funzione $f(x)$ è integrabile su tali intervalli.

2) Sia

$$F(t) = \int_0^t x e^{-4x^4} dx.$$

2A) La funzione $F(t)$ è derivabile per ogni t in \mathbb{R} .

Vero: Dal momento che la funzione $f(x) = x e^{-4x^4}$ è una funzione continua, per il teorema fondamentale del calcolo integrale la funzione $F(t)$ è derivabile, e si ha

$$F'(t) = f(t) = t e^{-4t^4} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

2B) Si ha $F'(0) = 0$.

Vero: Dato che $F'(t) = t e^{-4t^4}$ (si veda la domanda 2A), si ha $F'(0) = 0$.

2C) La funzione $F(t)$ è una funzione dispari.

Falso: Dal momento che la funzione $f(x) = x e^{-4x^4}$ è una funzione dispari, la funzione $F(t)$ è una funzione pari (e non dispari). Infatti,

$$F(-t) = \int_0^{-t} x e^{-4x^4} dx = \left[\begin{array}{l} y = -x \\ dy = -dx \end{array} \right] = - \int_0^t (-y) e^{-4(-y)^4} dy = \int_0^t y e^{-4y^4} dy = F(t).$$

2D) La funzione $F(t)$ è crescente per $t \geq 0$.

Vero: Dato che $F'(t) = t e^{-4t^4}$ (si veda la domanda 2A), si ha $F'(t) \geq 0$ per $t \geq 0$, e quindi la funzione $F(t)$ è crescente su tale insieme.

3) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false

3A) La funzione $x^2 \sin(x^3)$ si integra per parti.

Falso: No, si integra per sostituzione: definendo $y = x^3$, da cui $dy = 3x^2 dx$, si ha

$$\int x^2 \sin(x^3) dx = \frac{1}{3} \int \sin(y) dy,$$

che è un integrale immediato.

3B) La funzione $x^6 \sin(x)$ si integra per parti.

Vero: Infatti, derivando il termine polinomiale x^6 e integrando la funzione trigonometrica, si ha

$$\int x^6 \sin(x) dx = -x^6 \cos(x) + 6 \int x^5 \cos(x) dx.$$

Il procedimento continua 5 volte, finché non si arriva ad un integrale immediato (di $\sin(x)$ o di $\cos(x)$).

3C) La funzione $x^{13} \sin(x^2)$ si integra per sostituzione prima, e per parti poi.

Vero: Infatti, definendo $y = x^2$, da cui $dy = 2x dx$, si ha

$$\int x^{13} \sin(x^2) dx = \int (x^2)^6 \sin(x^2) x dx = \frac{1}{2} \int y^6 \sin(y) dy,$$

e l'ultimo integrale si svolge per parti (si veda la domanda 3B).

3D) La funzione $f(x) = x^{10} \arctan(x)$ si integra per parti prima, e per sostituzione poi.

Vero: Infatti, integrando il monomio e derivando l'arcotangente, si ha

$$\int x^{10} \arctan(x) dx = \frac{x^{11}}{11} \arctan(x) - \frac{1}{11} \int \frac{x^{11}}{1+x^2} dx.$$

L'ultimo integrale si svolge per sostituzione, ponendo $y = 1 + x^2$, da cui $dy = 2x dx$. Si ha

$$\int \frac{x^{11}}{1+x^2} dx = \int \frac{(x^2)^5}{1+x^2} x dx = \frac{1}{2} \int \frac{(y-1)^5}{y} dy,$$

e quest'ultimo integrale, dopo aver sviluppato la potenza del binomio, è la somma di 6 integrali immediati.

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false

4A) Si ha

$$\int_8^{23} \frac{dx}{x} = \ln\left(\frac{8}{23}\right).$$

Falso: Infatti, si ha

$$\int_8^{23} \frac{dx}{x} = \ln(|x|) \Big|_8^{23} = \ln(23) - \ln(8) = \ln\left(\frac{23}{8}\right) \neq \ln\left(\frac{8}{23}\right).$$

4B) Si ha

$$\int_{30}^{36} \frac{dx}{x-6} = \ln\left(\frac{5}{4}\right).$$

Vero: Infatti,

$$\int_{30}^{36} \frac{dx}{x-6} = \ln(|x-6|) \Big|_{30}^{36} = \ln(30) - \ln(24) = \ln\left(\frac{5}{4}\right).$$

4C) Si ha

$$\int_8^{20} \frac{dx}{4-x} = \ln(4).$$

Falso: Infatti,

$$\int_8^{20} \frac{dx}{4-x} = - \int_8^{20} \frac{dx}{x-4} = - \ln(|x-4|) \Big|_8^{20} = - \ln(16) + \ln(4) = - \ln(4) \neq \ln(4).$$

4D) Si ha

$$\int_0^1 \frac{dx}{3x-10} = \ln\left(\frac{7}{10}\right).$$

Falso: Infatti, con la sostituzione $y = 3x - 10$, da cui $dy = 3dx$, si ha

$$\int_0^1 \frac{dx}{3x-10} = \frac{1}{3} \int_{-10}^{-7} \frac{dy}{y} = \frac{\ln(|y|)}{3} \Big|_{-10}^{-7} = \frac{\ln(7) - \ln(10)}{3} = \frac{1}{3} \ln\left(\frac{7}{10}\right) \neq \ln\left(\frac{7}{10}\right).$$

5) Calcolare una primitiva delle seguenti funzioni

$$\begin{array}{llll} \mathbf{a1)} & x \sin(x), & \mathbf{a2)} & x^3 e^x, & \mathbf{b1)} & x^2 \ln(x), & \mathbf{b2)} & (x^2 - 3x + 4) e^x, \\ & & \mathbf{c1)} & x e^{3x}, & \mathbf{c2)} & x \cos(7x), & \mathbf{d1)} & e^{\sqrt{x}}, & \mathbf{d2)} & \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}, \end{array}$$

Soluzione:

a1) Integriamo per parti, derivando x e integrando $\sin(x)$:

$$\int x \sin(x) dx = \left[\begin{array}{ll} f'(x) = \sin(x) & \rightarrow f(x) = -\cos(x) \\ g(x) = x & \rightarrow g'(x) = 1 \end{array} \right] = -x \cos(x) - \int (-\cos(x)) dx,$$

da cui

$$\int x \sin(x) dx = -x \cos(x) + \sin(x).$$

a1) Integriamo per parti, derivando x^3 e integrando e^x :

$$\int x^3 e^x dx = \left[\begin{array}{ll} f'(x) = e^x & \rightarrow f(x) = e^x \\ g(x) = x^3 & \rightarrow g'(x) = 3x^2 \end{array} \right] = x^3 e^x - 3 \int x^2 e^x dx.$$

Per l'integrale rimasto, integriamo per parti, derivando x^2 e integrando e^x :

$$\int x^2 e^x dx = \left[\begin{array}{ll} f'(x) = e^x & \rightarrow f(x) = e^x \\ g(x) = x^2 & \rightarrow g'(x) = 2x \end{array} \right] = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx.$$

Per l'ultimo integrale, integriamo per parti, derivando x e integrando e^x :

$$\int x e^x dx = \left[\begin{array}{ll} f'(x) = e^x & \rightarrow f(x) = e^x \\ g(x) = x & \rightarrow g'(x) = 1 \end{array} \right] = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x.$$

Rimettendo insieme i risultati, si ha

$$\int x^3 e^x = x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6x e^x - 6e^x = (x^3 - 3x^2 + 6x - 6) e^x.$$

b1) Integriamo per parti, derivando $\ln(x)$ e integrando x^2 :

$$\int x^2 \ln(x) dx = \left[\begin{array}{ll} f'(x) = x^2 & \rightarrow f(x) = \frac{x^3}{3} \\ g(x) = \ln(x) & \rightarrow g'(x) = \frac{1}{x} \end{array} \right] = \frac{x^3 \ln(x)}{3} - \int \frac{x^3}{3} \frac{1}{x} dx,$$

da cui

$$\int x^2 \ln(x) dx = \frac{x^3 \ln(x)}{3} - \int \frac{x^2}{3} dx = \frac{x^3 \ln(x)}{3} - \frac{x^3}{9} = \frac{x^3}{9} (3 \ln(x) - 1).$$

b2) Ricordiamo il seguente risultato: se $P(x)$ è un polinomio, allora

$$\int P(x) e^x dx = Q(x) e^x,$$

dove $Q(x)$ è un polinomio dello stesso grado di $P(x)$ e tale che

$$Q(x) + Q'(x) = P(x).$$

Pertanto,

$$\int (x^2 - 3x + 4) e^x dx = Q(x) e^x,$$

dove $Q(x)$ è un polinomio di secondo grado tale che

$$Q(x) + Q'(x) = x^2 - 3x + 4.$$

Scrivendo $Q(x) = ax^2 + bx + c$, si ha $Q'(x) = 2ax + b$, da cui

$$Q'(x) + Q(x) = ax^2 + (2a + b)x + (b + c) = x^2 - 3x + 4,$$

e quindi, per il principio di identità dei polinomi, deve essere $a = 1$, $2a + b = -3$ e $b + c = 4$, da cui segue $a = 1$, $b = -5$ e $c = 9$. In definitiva,

$$\int (x^2 - 3x + 4) e^x dx = (x^2 - 5x + 9) e^x.$$

c1) Sostituiamo $y = 3x$, da cui $dy = 3 dx$; si ha

$$\int x e^{3x} dx = \frac{1}{9} \int y e^y dy.$$

L'ultimo integrale si svolge per parti:

$$\int y e^y dy = \left[\begin{array}{ll} f'(x) = e^y & \rightarrow f(x) = e^y \\ g(x) = y & \rightarrow g'(x) = 1 \end{array} \right] = y e^y - \int e^y dy = (y - 1) e^y,$$

e quindi

$$\int x e^{3x} dx = \frac{(3x - 1) e^{3x}}{9}.$$

c2) Sostituiamo $y = 7x$, da cui $dy = 7 dx$; si ha

$$\int x \cos(7x) dx = \frac{1}{49} \int y \cos(y) dy.$$

L'ultimo integrale si svolge per parti:

$$\int y \cos(y) dy = \left[\begin{array}{ll} f'(x) = \cos(y) & \rightarrow f(x) = \sin(y) \\ g(x) = y & \rightarrow g'(x) = 1 \end{array} \right] = y \sin(y) - \int \sin(y) dy = y \sin(y) + \cos(y),$$

e quindi

$$\int x \cos(7x) dx = \frac{7x \sin(7x) + \cos(7x)}{49}.$$

d1) Sostituiamo $x = y^2$, da cui $dx = 2y dy$. Pertanto,

$$\int e^{\sqrt{x}} dx = 2 \int e^y y dy.$$

Svolgendo l'ultimo integrale per parti, si ha

$$\int y e^y dy = \left[\begin{array}{ll} f'(x) = e^y & \rightarrow f(x) = e^y \\ g(x) = y & \rightarrow g'(x) = 1 \end{array} \right] = y e^y - \int e^y dy = (y - 1) e^y,$$

da cui segue che

$$\int e^{\sqrt{x}} dx = 2(\sqrt{x} - 1) e^{\sqrt{x}}.$$

d2) Sostituiamo $y = \frac{1}{x}$, da cui $dy = -\frac{dx}{x^2}$. Pertanto,

$$\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3} dx = \int \frac{e^y}{x} \frac{dx}{x^2} = - \int y e^y dy.$$

Svolgendo l'ultimo integrale per parti, come nell'esercizio **d1)**, si ha

$$\int y e^y dy = (y - 1) e^y,$$

da cui segue che

$$\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3} dx = \left(1 - \frac{1}{x}\right) e^{\frac{1}{x}}.$$

6)

a1) - a2) Trovare una primitiva di $f(x) = \frac{1}{x^2 - 12x + 36}$ e calcolare $\int_7^8 f(x) dx$.

b1) - b2) Trovare una primitiva di $g(x) = \frac{1}{x^2 - 11x + 30}$ e calcolare $\int_7^8 g(x) dx$.

c1) - c2) Trovare una primitiva di $h(x) = \frac{1}{x^2 - 8x + 20}$ e calcolare $\int_4^6 h(x) dx$.

d1) - d2) Trovare una primitiva di $k(x) = \frac{2x - 13}{x^2 - 14x + 48}$ e di $j(x) = \frac{x^3}{6 + x^2}$.

Soluzione:

a1) - a2) Osserviamo che si ha $x^2 - 12x + 36 = (x - 6)^2$. Pertanto,

$$\int \frac{dx}{x^2 - 12x + 36} = \int \frac{dx}{(x - 6)^2} = -\frac{1}{x - 6},$$

e quindi

$$\int_7^8 \frac{dx}{x^2 - 12x + 36} = -\frac{1}{x - 6} \Big|_7^8 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}.$$

b1) - b2) Osserviamo che si ha $x^2 - 11x + 30 = (x - 6)(x - 5)$. Cerchiamo dunque A e B tali che

$$\frac{1}{(x - 6)(x - 5)} = \frac{A}{x - 6} + \frac{B}{x - 5}.$$

Moltiplicando una volta per $x - 6$ e una volta per $x - 5$ si ottiene

$$\frac{1}{x - 5} = A + B \frac{x - 6}{x - 5} \quad \text{e} \quad \frac{1}{x - 6} = A \frac{x - 5}{x - 6} + B.$$

Scegliendo $x = 6$ nella prima e $x = 5$ nella seconda, si trova $A = \frac{1}{1} = -B$, cosicché

$$\frac{1}{x^2 - 11x + 30} = \frac{1}{(x - 6)(x - 5)} = \frac{1}{1(x - 6)} - \frac{1}{1(x - 5)},$$

da cui segue che

$$\int \frac{dx}{x^2 - 11x + 30} = \int \left[\frac{1}{1(x - 6)} - \frac{1}{1(x - 5)} \right] dx = \frac{\ln(|x - 6|) - \ln(|x - 5|)}{1} = \frac{1}{1} \ln \left(\left| \frac{x - 6}{x - 5} \right| \right).$$

Pertanto,

$$\int_7^8 \frac{dx}{x^2 - 11x + 30} = \frac{1}{1} \ln \left(\left| \frac{x - 6}{x - 5} \right| \right) \Big|_7^8 = \frac{1}{1} \left[\ln \left(\frac{2}{3} \right) - \ln \left(\frac{1}{2} \right) \right] = \frac{1}{1} \ln \left(\frac{4}{3} \right).$$

c1) - c2) Osserviamo che si ha $x^2 - 8x + 20 = (x - 4)^2 + 4$. Possiamo allora scrivere

$$x^2 - 8x + 20 = 4 \left[1 + \left(\frac{x - 4}{2} \right)^2 \right],$$

e quindi si ha

$$\int \frac{dx}{x^2 - 8x + 20} = \frac{1}{4} \int \frac{dx}{1 + \left(\frac{x - 4}{2} \right)^2}.$$

Con la sostituzione $y = \frac{x - 4}{2}$, da cui $dy = \frac{dx}{2}$, si ha

$$\int \frac{dx}{x^2 - 8x + 20} = \frac{1}{2} \int \frac{dy}{1 + y^2} = \frac{1}{2} \arctan(y) = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{x - 4}{2} \right).$$

Si ha pertanto

$$\int_4^6 \frac{dx}{x^2 - 8x + 20} = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{x - 4}{2} \right) \Big|_4^6 = \frac{\arctan(1) - \arctan(0)}{2} = \frac{\pi}{8}.$$

d1) Osserviamo che si ha

$$\frac{2x-13}{x^2-14x+48} = \frac{2x-14}{x^2-14x+48} + \frac{1}{x^2-14x+48}.$$

Dal momento che al numeratore compare la derivata del denominatore, si ha

$$\int \frac{2x-14}{x^2-14x+48} dx = \ln(|x^2-14x+48|).$$

Per calcolare il secondo integrale, osserviamo che si ha $x^2-14x+48 = (x-8)(x-6)$. Con conti analoghi a quelli visti nello svolgimento dell'esercizio **b1)** - **b2)** si ha che

$$\frac{1}{x^2-14x+48} = \frac{1}{(x-8)(x-6)} = \frac{1}{2(x-8)} - \frac{1}{2(x-6)},$$

cosicch 

$$\int \frac{dx}{x^2-14x+48} = \int \left[\frac{1}{2(x-8)} - \frac{1}{2(x-6)} \right] dx = \frac{1}{2} \ln \left(\left| \frac{x-8}{x-6} \right| \right).$$

Mettendo insieme i risultati trovati, si ha

$$\int \frac{2x-13}{x^2-14x+48} = \ln(|x^2-14x+48|) + \frac{1}{2} \ln \left(\left| \frac{x-8}{x-6} \right| \right).$$

d2) Scriviamo

$$\frac{x^3}{6+x^2} = \frac{x^3+6x-6x}{6+x^2} = x - \frac{6x}{6+x^2}.$$

Abbiamo quindi

$$\int \frac{x^3}{6+x^2} dx = \int \left[x - \frac{6x}{6+x^2} \right] dx = \frac{x^2}{2} - \int \frac{6x}{6+x^2} dx.$$

Per calcolare l'ultimo integrale, poniamo $y = 6+x^2$, da cui $dy = 2x dx$, e otteniamo

$$\int \frac{6x}{6+x^2} dx = \int \frac{3 dy}{y} = 3 \ln(|y|) = 3 \ln(x^2+6),$$

dove si   tolto il modulo dato che la funzione x^2+6   positiva. In definitiva,

$$\int \frac{x^3}{6+x^2} dx = \frac{x^2}{2} - 3 \ln(x^2+6).$$

7) Trovare una primitiva di

$$\begin{array}{llll} \mathbf{a1)} & x e^{6x}, & \mathbf{a2)} & e^x \sin(4x), & \mathbf{b1)} & \sin^2(2x), & \mathbf{b2)} & \cos^3(2x), \\ \mathbf{c1)} & (6x+9)e^x, & \mathbf{c2)} & (11x^2-6x+2)e^x, & \mathbf{d1)} & x^2 \ln(5x), & \mathbf{d2)} & 4x \arctan(2x). \end{array}$$

Soluzione:

a1) Integriamo per parti, derivando x e integrando e^{6x} . Si ha

$$\int x e^{6x} dx = \frac{x}{6} e^{6x} - \frac{1}{6} \int e^{6x} dx = \frac{x}{6} e^{6x} - \frac{1}{36} e^{6x} = \frac{6x-1}{36} e^{6x}.$$

a2) Integriamo per parti, derivando $\sin(4x)$ e integrando l'esponenziale. Si ha

$$\int e^x \sin(4x) dx = e^x \sin(4x) - 4 \int e^x \cos(4x) dx.$$

Per calcolare l'ultimo integrale, operiamo per parti, derivando $\cos(4x)$ e integrando l'esponenziale. Si ha

$$\int e^x \cos(4x) dx = e^x \cos(4x) + 4 \int e^x \sin(4x) dx.$$

Mettendo insieme i risultati, si ha

$$\int e^x \sin(4x) dx = e^x [\sin(4x) - 4 \cos(4x)] - 16 \int e^x \sin(4x) dx,$$

da cui si ricava (portando l'integrale a secondo membro a sinistra)

$$\int e^x \sin(4x) dx = \frac{e^x}{17} [\sin(4x) - 4 \cos(4x)].$$

b1) Integriamo per parti, derivando e integrando $\sin(2x)$. Si ha

$$\int \sin^2(2x) dx = \int \sin(2x) \sin(2x) dx = -\frac{1}{2} \sin(2x) \cos(2x) + \int \cos^2(2x) dx.$$

Ora si ha

$$\int \cos^2(2x) dx = \int [1 - \sin^2(2x)] dx = x - \int \sin^2(2x) dx.$$

Si ha dunque

$$\int \sin^2(2x) dx = -\frac{1}{2} \sin(2x) \cos(2x) + x - \int \sin^2(2x) dx.$$

Portando a sinistra una parte dell'integrale a destra si ottiene

$$2 \int \sin^2(2x) dx = -\frac{1}{2} \sin(2x) \cos(2x) + x,$$

da cui segue che

$$\int \sin^2(2x) dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin(2x) \cos(2x).$$

b2) Osserviamo che si ha

$$\cos^3(2x) = \cos^2(2x) \cos(2x) = [1 - \sin^2(2x)] \cos(2x).$$

Pertanto, con la sostituzione $y = \sin(2x)$, da cui $dy = 2 \cos(2x) dx$, si ha

$$\int \cos^3(2x) dx = \int [1 - \sin^2(2x)] \cos(2x) dx = \frac{1}{2} \int (1 - y^2) dy = \frac{1}{2} \left[y - \frac{y^3}{3} \right],$$

e quindi

$$\int \cos^3(2x) dx = \frac{\sin(2x)}{2} - \frac{\sin^3(2x)}{6}.$$

c1) Integriamo per parti, derivando il binomio e integrando l'esponenziale. Si ha

$$\int (6x + 9) e^x dx = (6x + 9) e^x - 6 \int e^x dx = (6x + 3) e^x.$$

c2) Sappiamo che si ha

$$\int (11x^2 - 6x + 2) e^x dx = Q(x) e^x,$$

dove $Q(x)$ è un polinomio di secondo grado tale che $Q(x) + Q'(x) = 11x^2 - 6x + 2$. Se $Q(x) = ax^2 + bx + c$ è un generico polinomio di secondo grado, si ha

$$Q(x) + Q'(x) = ax^2 + (2a + b)x + (b + c),$$

e imponendo che si abbia $Q(x) + Q'(x) = 11x^2 - 6x + 2$ si ha che deve essere

$$a = 11, \quad 2a + b = -6, \quad b + c = 2,$$

da cui si ricava facilmente che

$$a = 11, \quad b = -28, \quad c = 30,$$

e quindi

$$\int (11x^2 - 6x + 2) e^x dx = (11x^2 - 28x + 30) e^x.$$

d1) Integriamo per parti, derivando il logaritmo e integrando x^2 . Si ha

$$\int x^2 \ln(5x) dx = \frac{x^3}{3} \ln(5x) - \frac{1}{3} \int x^3 \frac{5}{5x} dx = \frac{x^3}{3} \ln(5x) - \frac{x^3}{9} = \frac{x^3}{9} [3 \ln(5x) - 1].$$

d2) Integriamo per parti, integrando il monomio e derivando l'arcotangente. Si ha

$$\int 4x \arctan(2x) dx = 2x^2 \arctan(2x) - \int \frac{4x^2}{1 + 4x^2} dx.$$

Per calcolare l'ultimo integrale, aggiungiamo e togliamo 1 al numeratore:

$$\int \frac{4x^2}{1 + 4x^2} dx = \int \frac{1 + 4x^2 - 1}{1 + 4x^2} dx = \int \left[1 - \frac{1}{1 + 4x^2} \right] dx = x - \int \frac{dx}{1 + 4x^2}.$$

L'ultimo integrale si calcola ponendo $y = 2x$, da cui $dy = 2dx$ per ottenere

$$\int \frac{dx}{1 + 4x^2} = \frac{1}{2} \int \frac{dy}{1 + y^2} = \frac{\arctan(y)}{2} = \frac{\arctan(2x)}{2}.$$

In definitiva, si ha

$$\int 4x \arctan(2x) dx = 2x^2 \arctan(2x) - x + \frac{\arctan(2x)}{2}.$$

