



Calcolo integrale — Scheda di esercizi n. 6
21 Aprile 2023 — Compito n. 00053

Istruzioni: le prime due caselle (**V** / **F**) permettono di selezionare la risposta vero/falso. La casella “**C**” serve a correggere eventuali errori invertendo la risposta data. Per selezionare una casella, annerirla completamente: ☐ (non ☐ o ☐).

Nome: _____

Cognome: _____

Matricola:

| | | | | | | |
|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | |
|--|--|--|--|--|--|--|

Punteggi: 1 punto per ogni risposta esatta, 0 punti per risposte sbagliate o lasciate in bianco.

| | 1A | 1B | 1C | 1D | 2A | 2B | 2C | 2D | 3A | 3B | 3C | 3D | 4A | 4B | 4C | 4D |
|---|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| V | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| F | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| C | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

1) Sia

$$F(t) = \int_{-7}^t [\cos^2(2x^2) + 5x^2] dx.$$

1A) Si ha $F(0) > 0$.

1B) La funzione $F(t)$ è decrescente su \mathbb{R} .

1C) La funzione $F(t)$ è una funzione dispari.

1D) Si ha

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} F(t) = +\infty.$$

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false

2A)

$$\int_{-6}^6 [x^9 + \sin(2x)] dx \neq 0.$$

2B)

$$\int_{-6}^6 [x^8 + x^9] dx > 0.$$

2C)

$$\int_7^9 \frac{dx}{x-5} \neq \int_{17}^{29} \frac{dx}{x-5}.$$

2D)

$$\int_0^{\pi/3} \sin(3x) dx = 3 \int_0^{\pi} \sin(x) dx.$$

3) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false

3A)

$$\int_0^{\pi} \sin(7x) dx = 14$$

3B)

$$\int_0^{1/\sqrt{5}} x e^{5x^2} dx = \frac{e-1}{10}.$$

3C)

$$\int_0^1 4x e^x dx = 4.$$

3D)

$$\int_0^{7\pi} \sin^2(x) dx = \frac{\pi}{2}.$$

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false

4A)

$$\int_7^8 \frac{dx}{|x-6|} = \ln(2).$$

4B)

$$\int_7^8 \frac{dx}{(x-6)^2} = \frac{1}{2}.$$

4C)

$$\int_6^{12} \frac{dx}{x^2+6x} = \ln(4/3).$$

4D)

$$\int_0^6 \frac{x}{x^2+64} dx = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{10}{8}\right).$$

Docente

- ☐ DelaTorre Pedraza
☐ Orsina

| | | | | | | | |
|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | |
|--|--|--|--|--|--|--|--|

Cognome

Nome

Matricola

Compito 00053

5) Calcolare una primitiva delle funzioni $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ e $k(x)$ e calcolare gli integrali.

$$\mathbf{a12)} \quad f(x) = \frac{1}{x+6}, \quad \int_0^1 f(x) dx, \quad \mathbf{b12)} \quad g(x) = \frac{1}{x^2-3x}, \quad \int_9^{15} g(x) dx,$$

$$\mathbf{c12)} \quad h(x) = \frac{6x+12}{x^2+4x+1}, \quad \int_0^1 h(x) dx, \quad \mathbf{d12)} \quad k(x) = \frac{x^3}{x^2-100}, \quad \int_{-1}^1 k(x) dx,$$

| | | | | | | | |
|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | |
|--|--|--|--|--|--|--|--|

Cognome

Nome

Matricola

Compito 00053

6) Calcolare una primitiva delle funzioni $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ e $k(x)$ e calcolare gli integrali.

$$\mathbf{a12)} \quad f(x) = x^3 \cos(x^2), \quad \int_0^{\sqrt{3}\pi} f(x) dx, \quad \mathbf{b12)} \quad g(x) = (x^2 + 2x - 16) e^x, \quad \int_0^4 g(x) dx,$$

$$\mathbf{c12)} \quad h(x) = \cos^3(x), \quad \int_0^{\frac{17}{2}\pi} h(x) dx, \quad \mathbf{d12)} \quad k(x) = \frac{4x-6}{6} \ln(x), \quad \int_1^6 k(x) dx,$$

Soluzioni del compito 00053

1) Sia

$$F(t) = \int_{-7}^t [\cos^2(2x^2) + 5x^2] dx.$$

1A) Si ha $F(0) > 0$.

Vero: Si ha

$$F(0) = \int_{-6}^0 [\cos^2(2x^2) + 5x^2] dx > 0,$$

dato che la funzione integranda è positiva.

1B) La funzione $F(t)$ è decrescente su \mathbb{R} .

Falso: Per il teorema fondamentale del calcolo integrale si ha

$$F'(t) = \cos^2(2t^2) + 5t^2 \geq 0,$$

e quindi la funzione $F(t)$ è crescente.

1C) La funzione $F(t)$ è una funzione dispari.

Falso: Se la funzione $F(t)$ fosse dispari, si avrebbe

$$F(-7) = -F(7).$$

Tuttavia,

$$F(-7) = \int_{-7}^{-7} [\cos^2(2x^2) + 5x^2] dx = 0,$$

e quindi (se la funzione $F(t)$ fosse dispari), dovrebbe essere $F(7) = 0$. Dato però che la funzione $F(t)$ è strettamente crescente, si ha $F(7) > F(-7) = 0$, e quindi $F(t)$ non è dispari.

1D) Si ha

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} F(t) = +\infty.$$

Vero: Si ha, per $t \geq -7$,

$$F(t) = \int_{-7}^t [\cos^2(2x^2) + 5x^2] dx \geq \int_{-7}^t 5x^2 dx = \frac{5}{3}t^3 - \frac{1715}{3}.$$

Pertanto,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} F(t) \geq \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{5}{3}t^3 - \frac{1715}{3} \right) = +\infty.$$

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false

2A)

$$\int_{-6}^6 [x^9 + \sin(2x)] dx \neq 0.$$

Falso: Dal momento che le funzioni $x \mapsto x^9$ e $x \mapsto \sin(2x)$ sono funzioni dispari, e che l'intervallo di integrazione è simmetrico rispetto all'origine, l'integrale vale zero.

2B)

$$\int_{-6}^6 [x^8 + x^9] dx > 0.$$

Vero: Dal momento che la funzione $x \mapsto x^9$ è una funzione dispari, e che l'intervallo di integrazione è simmetrico rispetto all'origine, l'integrale di x^9 vale zero; d'altra parte, dato che la funzione $x \mapsto x^8$ è una funzione pari, e che l'intervallo è simmetrico rispetto all'origine, si ha

$$\int_{-6}^6 x^8 dx = 2 \int_0^6 x^8 dx = \frac{2}{9} 6^9 > 0.$$

2C)

$$\int_7^9 \frac{dx}{x-5} \neq \int_{17}^{29} \frac{dx}{x-5}.$$

Falso: Infatti si ha

$$\int_7^9 \frac{dx}{x-5} = \ln(|x-5|) \Big|_7^9 = \ln(4) - \ln(2) = \ln(2),$$

e

$$\int_{17}^{29} \frac{dx}{x-5} = \ln(|x-5|) \Big|_{17}^{29} = \ln(24) - \ln(12) = \ln(2),$$

e quindi i due integrali sono uguali (e non diversi).

2D)

$$\int_0^{\pi/3} \sin(3x) dx = 3 \int_0^{\pi} \sin(x) dx.$$

Falso: Si ha

$$\int_0^{\pi/3} \sin(3x) dx = -\frac{1}{3} \cos(3x) \Big|_0^{\pi/3} = -\frac{\cos(3 \cdot \pi/3) - \cos(0)}{3} = \frac{2}{3},$$

e

$$\int_0^{\pi} \sin(x) dx = -\cos(x) \Big|_0^{\pi} = -\cos(\pi) + \cos(0) = 2,$$

e quindi

$$\int_0^{\pi/3} \sin(3x) dx = \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{1}{3} \int_0^{\pi} \sin(x) dx \neq 3 \int_0^{\pi} \sin(x) dx.$$

3) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false

3A)

$$\int_0^\pi \sin(7x) dx = 14$$

Falso: Si ha infatti

$$\int_0^\pi \sin(7x) dx = -\frac{\cos(7x)}{7} \Big|_0^\pi = -\frac{\cos(7\pi) - \cos(0)}{7} = \frac{2}{7} \neq 14.$$

3B)

$$\int_0^{1/\sqrt{5}} x e^{5x^2} dx = \frac{e-1}{10}.$$

Vero: Si ha, con la sostituzione $y = 5x^2$, da cui $dy = 10x dx$ e quindi $x dx = \frac{dy}{10}$,

$$\int_0^{1/\sqrt{5}} x e^{5x^2} dx = \frac{1}{10} \int_0^1 e^y dy = \frac{e-1}{10}.$$

3C)

$$\int_0^1 4x e^x dx = 4.$$

Vero: Si ha, integrando per parti (derivando $4x$ e integrando l'esponenziale),

$$\int_0^1 4x e^x dx = 4x e^x \Big|_0^1 - 4 \int_0^1 e^x dx = 4e - 4e^x \Big|_0^1 = 4e - 4e + 4 = 4.$$

3D)

$$\int_0^{7\pi} \sin^2(x) dx = \frac{\pi}{2}.$$

Falso: Iniziamo con il calcolare una primitiva di $\sin^2(x)$; ricordando la formula

$$\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2},$$

si ha

$$\int \sin^2(x) dx = \frac{1}{2} \int [1 - \cos(2x)] dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4}.$$

Si ha pertanto

$$\int_0^{7\pi} \sin^2(x) dx = \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} \right] \Big|_0^{7\pi} = \frac{7}{2} \pi \neq \frac{\pi}{2},$$

dato che $\sin(14\pi) = 0 = \sin(0)$.

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false

4A)

$$\int_7^8 \frac{dx}{|x-6|} = \ln(2).$$

Vero: Iniziamo con l'osservare che si ha $x-6 \geq 0$ sull'intervallo $[7, 8]$; su tale intervallo si ha pertanto $|x-6| = x-6$. Si ha allora

$$\int_7^8 \frac{dx}{|x-6|} = \int_7^8 \frac{dx}{x-6} = \ln(|x-6|) \Big|_7^8 = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2).$$

4B)

$$\int_7^8 \frac{dx}{(x-6)^2} = \frac{1}{2}.$$

Vero: Infatti si ha

$$\int_7^8 \frac{dx}{(x-6)^2} = -\frac{1}{x-6} \Big|_7^8 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}.$$

4C)

$$\int_6^{12} \frac{dx}{x^2+6x} = \ln(4/3).$$

Falso: Il polinomio al denominatore si scompone come

$$x^2+6x = x(x+6),$$

che ha come radici $x_1 = -6$ e $x_2 = 0$. Ricordando che

$$\int \frac{dx}{(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{1}{x_2-x_1} \ln \left(\left| \frac{x-x_2}{x-x_1} \right| \right),$$

si ha quindi

$$\int_6^{12} \frac{dx}{x^2+6x} = \int_6^{12} \frac{dx}{x(x+6)} = \frac{1}{6} \ln \left(\left| \frac{x}{x+6} \right| \right) \Big|_6^{12} = \frac{1}{6} \left[\ln \left(\frac{12}{18} \right) - \ln \left(\frac{6}{12} \right) \right] = \frac{1}{6} \ln(4/3) \neq \ln(4/3).$$

4D)

$$\int_0^6 \frac{x}{x^2+64} dx = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{10}{8} \right).$$

Falso: Si ha, facendo comparire al numeratore la derivata del denominatore,

$$\int_0^6 \frac{x}{x^2+64} dx = \frac{1}{2} \int_0^6 \frac{2x}{x^2+64} dx = \frac{1}{2} \ln(|x^2+64|) \Big|_0^6.$$

Svolgendo i calcoli, si ha allora

$$\int_0^6 \frac{x}{x^2+64} dx = \frac{\ln(100) - \ln(64)}{2} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{10^2}{8^2} \right) = \ln \left(\frac{10}{8} \right) \neq \frac{1}{2} \ln \left(\frac{10}{8} \right).$$

5) Calcolare una primitiva delle funzioni $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ e $k(x)$ e calcolare gli integrali.

$$\begin{aligned} \mathbf{a12)} \quad f(x) &= \frac{1}{x+6}, \quad \int_0^1 f(x) dx, & \mathbf{b12)} \quad g(x) &= \frac{1}{x^2-3x}, \quad \int_9^{15} g(x) dx, \\ \mathbf{c12)} \quad h(x) &= \frac{6x+12}{x^2+4x+1}, \quad \int_0^1 h(x) dx, & \mathbf{d12)} \quad k(x) &= \frac{x^3}{x^2-100}, \quad \int_{-1}^1 k(x) dx, \end{aligned}$$

Soluzione:

a12) Ricordando che si ha

$$\int \frac{dx}{x+a} = \ln(|x+a|),$$

si ha

$$\int \frac{dx}{x+6} = \ln(|x+6|),$$

e quindi

$$\int_0^1 \frac{dx}{x+6} = \ln(|x+6|) \Big|_0^1 = \ln(7) - \ln(6) = \ln\left(\frac{7}{6}\right).$$

b12) Ricordando che si ha

$$\int \frac{dx}{(x-x_2)(x-x_1)} = \frac{1}{x_2-x_1} \ln\left(\left|\frac{x-x_2}{x-x_1}\right|\right),$$

ed essendo $x^2-3x = x(x-3) = (x-0)(x-3)$, si ha

$$\int \frac{dx}{x^2-3x} = \frac{1}{3} \ln\left(\left|\frac{x-3}{x}\right|\right).$$

Pertanto,

$$\int_9^{15} \frac{dx}{x^2-3x} = \frac{1}{3} \ln\left(\left|\frac{x-3}{x}\right|\right) \Big|_9^{15} = \frac{1}{3} \left[\ln\left(\frac{12}{15}\right) - \ln\left(\frac{6}{9}\right) \right] = \frac{1}{3} \ln\left(\frac{6}{5}\right).$$

c12) La derivata del denominatore è:

$$[x^2+4x+1]' = 2x+4,$$

mentre il numeratore si può scrivere come:

$$6x+12 = 3(2x+4).$$

Si ha allora

$$\int \frac{6x+12}{x^2+4x+1} dx = 3 \int \frac{2x+4}{x^2+4x+1} dx = 3 \ln(|x^2+4x+1|),$$

da cui segue che

$$\int_0^1 \frac{6x+12}{x^2+4x+1} dx = 3 \ln(|x^2+4x+1|) \Big|_0^1 = 3 [\ln(6) - \ln(1)] = 3 \ln(6).$$

d12) Si ha

$$x^3 = x^3 - 100x + 100x = x(x^2-100) + 100x,$$

e quindi

$$\frac{x^3}{x^2-100} = \frac{x(x^2-100) + 100x}{x^2-100} = x + \frac{100x}{x^2-100} = x + 50 \frac{2x}{x^2-100}.$$

Ne segue che

$$\int \frac{x^3}{x^2-100} dx = \int \left[x + 50 \frac{2x}{x^2-100} \right] dx = \frac{x^2}{2} + 50 \ln(|x^2-100|),$$

e quindi che

$$\int_{-1}^1 \frac{x^3}{x^2-100} dx = \left[\frac{x^2}{2} + 50 \ln(|x^2-100|) \right] \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{2} + 50 \ln(99) - \frac{1}{2} - 50 \ln(99) = 0.$$

Si noti che, essendo la funzione integranda dispari e l'intervallo simmetrico rispetto all'origine, si poteva concludere che l'integrale valeva zero **senza** calcolare la primitiva.

6) Calcolare una primitiva delle funzioni $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ e $k(x)$ e calcolare gli integrali.

$$\mathbf{a12)} \quad f(x) = x^3 \cos(x^2), \quad \int_0^{\sqrt{3}\pi} f(x) dx, \quad \mathbf{b12)} \quad g(x) = (x^2 + 2x - 16)e^x, \quad \int_0^4 g(x) dx,$$

$$\mathbf{c12)} \quad h(x) = \cos^3(x), \quad \int_0^{\frac{17}{2}\pi} h(x) dx, \quad \mathbf{d12)} \quad k(x) = \frac{4x-6}{6} \ln(x), \quad \int_1^6 k(x) dx,$$

Soluzione:

a12) Con la sostituzione $y = x^2$, da cui $dy = 2x dx$, e quindi $x dx = \frac{dy}{2}$, si ha

$$\int x^3 \cos(x^2) dx = \int x^2 \cos(x^2) x dx = \frac{1}{2} \int y \cos(y) dy.$$

Integrando per parti (al solito, derivando y ed integrando il coseno), si ha

$$\int y \cos(y) dy = y \sin(y) - \int \sin(y) dy = y \sin(y) + \cos(y),$$

da cui segue (ricordando la sostituzione) che

$$\int x^3 \cos(x^2) dx = \frac{x^2 \sin(x^2) + \cos(x^2)}{2}.$$

Si ha dunque

$$\int_0^{\sqrt{3}\pi} x^3 \cos(x^2) = \frac{x^2 \sin(x^2) + \cos(x^2)}{2} \Big|_0^{\sqrt{3}\pi} = \frac{\cos(3\pi) - \cos(0)}{2} = -1.$$

b12) Ricordiamo che se $P(x)$ è un polinomio, si ha

$$\int P(x) e^x dx = Q(x) e^x,$$

dove $Q(x)$ è un polinomio dello stesso grado di $P(x)$ e tale che

$$P(x) = Q(x) + Q'(x).$$

Considerando un generico polinomio di secondo grado $Q(x) = ax^2 + bx + c$, si ha dunque

$$Q(x) + Q'(x) = x^2 + (2a + b)x + (b + c) = x^2 + 2x - 16,$$

da cui si deduce che deve essere $a = 1$, $2a + b = 2$ e $b + c = -16$; da queste tre equazioni si ricava facilmente che $a = 1$, $b = 0$ e $c = -16$, cosicché si ha

$$\int (x^2 + 2x - 16) e^x dx = (x^2 - 16) e^x.$$

Se ne deduce che

$$\int_0^4 (x^2 + 2x - 16) e^x dx = (x^2 - 16) e^x \Big|_0^4 = 16.$$

c12) Iniziamo a scrivere

$$\cos^3(x) = \cos^2(x) \cos(x) = (1 - \sin^2(x)) \cos(x),$$

cosicché si tratta di calcolare

$$\int (1 - \sin^2(x)) \cos(x) dx.$$

Con la sostituzione $y = \sin(x)$, da cui $dy = \cos(x) dx$, si ha

$$\int (1 - \sin^2(x)) \cos(x) dx = \int (1 - y^2) dy = y - \frac{y^3}{3} = \sin(x) - \frac{\sin^3(x)}{3}.$$

Se ne deduce che

$$\int_0^{\frac{17}{2}\pi} \cos^3(x) dx = \left[\sin(x) - \frac{\sin^3(x)}{3} \right] \Big|_0^{\frac{17}{2}\pi} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

d12) Integrando per parti (derivando il logaritmo e integrando il polinomio) si ha

$$\begin{aligned}\int \frac{4x-6}{6} \ln(x) dx &= \frac{2x^2-6x}{6} \ln(x) - \int \frac{2x^2-6x}{6} \frac{1}{x} dx = \frac{2x^2-6x}{6} \ln(x) - \int \frac{2x-6}{6} dx \\ &= \frac{2x^2-6x}{6} \ln(x) - \frac{x^2-6x}{6}.\end{aligned}$$

Ne segue che

$$\int_1^6 \frac{4x-6}{6} \ln(x) dx = \left[\frac{2x^2-6x}{6} \ln(x) - \frac{x^2-6x}{6} \right] \Big|_1^6 = 6 \ln(6) - 0 - 0 + \frac{1-6}{6} = 6 \ln(6) - \frac{5}{6}.$$