



Calcolo integrale — Compito di pre-esonero
17 Marzo 2023 — Compito n. 00016

Istruzioni: le prime due caselle (**V** / **F**) permettono di selezionare la risposta vero/falso. La casella "**C**" serve a correggere eventuali errori invertendo la risposta data. Per selezionare una casella, annerirla completamente: ☐ (non ☐ o ☐).

Nome: _____

Cognome: _____

Matricola:

--	--	--	--	--	--	--

Punteggi: 1 punto per ogni risposta esatta, 0 punti per risposte sbagliate o lasciate in bianco.

	1A	1B	1C	1D	2A	2B	2C	2D	3A	3B	3C	3D	4A	4B	4C	4D
V	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
F	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
C	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

1) Sia $a_k \geq 0$ una successione tale che

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k \text{ è convergente.}$$

1A) La successione $\frac{a_k}{a_k+8}$ tende a zero.

1B) La serie di termine generico $\sin(2a_k)$ è divergente.

1C) La serie di termine generico $\frac{\cos(a_k)}{k^2}$ è convergente.

1D) La serie di termine generico $k^8 a_k$ può divergere.

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false

2A)

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (e^{\frac{7}{k}} - 1)^7 \text{ diverge.}$$

2B)

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{8^k k^6}{k!} \text{ diverge.}$$

2C)

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt[6]{k}} \text{ converge.}$$

2D)

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{13k}}{k^2} \text{ diverge assolutamente.}$$

3) Sia $f(x) = \cos(9x)$.

3A) Il raggio di convergenza della serie di Taylor di $f(x)$ è infinito.

3B) Il coefficiente del termine di grado 2 della serie di Taylor di $f(x)$ è uguale a zero.

3C) Se $g(x) = x^6 f(x)$, si ha $g^{(7)}(0) = 0$.

3D) Si ha $f^{(12)}(0) = 9^{12}$.

4) Si consideri la serie di potenze

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{3^k} (x-2)^k.$$

4A) Il centro della serie è $x_0 = 2$.

4B) Se $a_k = 3$ per ogni k , il raggio di convergenza delle serie è $R = \frac{1}{3}$.

4C) Se $a_k = 2^k$, il raggio di convergenza della serie è $R = \frac{2}{3}$.

4D) Se $a_k = \frac{1}{k^5}$, la serie converge per $x = 5$.

Docente: _____

--	--	--	--	--	--	--	--

Cognome

Nome

Matricola

Compito 00016

5) a) Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^7 \tan\left(\frac{4k^6}{4^k}\right).$$

b) Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \sqrt[3]{k} \left(e^{\frac{1}{k}} - 1 - \frac{1}{k} \right).$$

c) Scrivere la serie di Taylor di $f(x) = x^{11} e^{5x}$ e calcolare $f^{(10)}(0)$.

d) Data $f(x) = \cos(4x^2)$, si calcolino $f^{(4)}(0)$ e $f^{(5)}(0)$.

--	--	--	--	--	--	--	--

Cognome**Nome****Matricola****Compito 00016**

6) Si consideri la serie di potenze

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(x-7)^k}{k}.$$

- a) Si determini il centro della serie.
 - b) Si determini il raggio di convergenza della serie.
 - c) Si determini l'insieme di convergenza della serie.
 - d) Si calcoli $f'(x)$.
-

Soluzioni del compito 00016

1) Sia $a_k \geq 0$ una successione tale che

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k \quad \text{è convergente.}$$

1A) La successione $\frac{a_k}{a_k+8}$ tende a zero.

Vero: Dato che la serie di termine generico a_k è convergente, la successione a_k è infinitesima. Pertanto,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{a_k}{a_k + 8} = \frac{0}{0 + 8} = 0.$$

1B) La serie di termine generico $\sin(2 a_k)$ è divergente.

Falso: Dato che la successione a_k tende a zero (essendo la serie di termine generico a_k convergente), si ha

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\sin(2 a_k)}{a_k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\sin(2 a_k)}{2 a_k} 2 = 1 \cdot 2 = 2 \in (0, +\infty).$$

Per il criterio del confronto asintotico, la serie data converge.

1C) La serie di termine generico $\frac{\cos(a_k)}{k^2}$ è convergente.

Vero: Dato che $\cos(a_k)$ tende a 1 (si ricordi che la successione a_k tende a zero perché la serie è convergente), si ha

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\cos(a_k)}{k^2}}{\frac{1}{k^2}} = 1.$$

Per il criterio del confronto asintotico, la serie data ha lo stesso comportmento della serie di termine generico $\frac{1}{k^2}$, che converge essendo una serie armonica generalizzata di esponente $\alpha = 2 > 1$.

1D) La serie di termine generico $k^8 a_k$ può divergere.

Vero: Ad esempio, se $a_k = \frac{1}{k^2}$, la serie di termine generico $k^8 a_k = k^6$ è divergente.

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false

2A)

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (e^{\frac{7}{k}} - 1)^7 \text{ diverge.}$$

Falso: Ricordando che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1,$$

si ha

$$e^{\frac{7}{k}} - 1 \approx \frac{7}{k},$$

e quindi

$$(e^{\frac{7}{k}} - 1)^7 \approx \left(\frac{7}{k}\right)^7 = \frac{7^7}{k^7}.$$

Dato che la serie di termine generico $\frac{7^7}{k^7}$ è convergente (essendo una serie armonica generalizzata di esponente $\alpha = 7 > 1$), la serie data converge per il criterio del confronto asintotico.

2B)

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{8^k k^6}{k!} \text{ diverge.}$$

Falso: Appliciamo il criterio del rapporto: si ha

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\frac{8^{k+1} (k+1)^6}{(k+1)!}}{\frac{8^k k^6}{k!}} = \lim_{k \rightarrow +\infty} 8 \left(\frac{k+1}{k}\right)^6 \frac{1}{k+1} = 8 \cdot 1^6 \cdot 0 = 0 < 1,$$

e quindi la serie converge.

2C)

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt[6]{k}} \text{ converge.}$$

Vero: Dato che la successione $a_k = \frac{1}{\sqrt[6]{k}}$ è positiva, decrescente e infinitesima, la serie converge per il criterio di Leibnitz.

2D)

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{13k}}{k^2} \text{ diverge assolutamente.}$$

Falso: Si ha

$$\left| \frac{(-1)^{13k}}{k^2} \right| = \frac{1}{k^2}.$$

Dato che la serie di termine generico $\frac{1}{k^2}$ converge (essendo una serie armonica generalizzata di esponente $\alpha = 2 > 1$), la serie data converge assolutamente.

3) Sia $f(x) = \cos(9x)$.

Ricordando che

$$\cos(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} t^{2k}, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

si ha, per il principio di sostituzione,

$$(1) \quad f(x) = \cos(9x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} (9x)^{2k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k 9^{2k}}{(2k)!} x^{2k}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

3A) Il raggio di convergenza della serie di Taylor di $f(x)$ è infinito.

Vero: Dalla (1) segue che il raggio di convergenza della serie è infinito.

3B) Il coefficiente del termine di grado 2 della serie di Taylor di $f(x)$ è uguale a zero.

Falso: Dalla (1) si ha che

$$f(x) = 1 - \frac{9^2}{2} x^2 + \text{termini di grado superiore a 2},$$

e quindi il coefficiente del termine di grado 2 vale $-\frac{81}{2}$, che è diverso da zero.

3C) Se $g(x) = x^6 f(x)$, si ha $g^{(7)}(0) = 0$.

Vero: Dalla (1) segue che

$$g(x) = x^6 f(x) = x^6 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k 9^{2k}}{(2k)!} x^{2k} = x^6 - \frac{9^2}{2} x^8 + o(x^8).$$

Dall'ultima espressione, si vede che $g^{(7)}(0) = 0$.

3D) Si ha $f^{(12)}(0) = 9^{12}$.

Vero: Dalla (1), si vede facilmente che il termine di grado 12 nella serie di Taylor di $f(x)$ è

$$a_{12} = \frac{(-1)^6 9^{12}}{12!} = \frac{9^{12}}{12!},$$

da cui segue che $f^{(12)}(0) = a_{12} \cdot 12! = 9^{12}$.

4) Si consideri la serie di potenze

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{3^k} (x-2)^k.$$

Ricordiamo che una serie di potenze è una serie della forma

$$(1) \quad f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k (x-x_0)^k,$$

e che x_0 si dice il centro della serie.

4A) Il centro della serie è $x_0 = 2$.

Vero: Dalla (1), segue che il centro della serie è $x_0 = 2$.

4B) Se $a_k = 3$ per ogni k , il raggio di convergenza delle serie è $R = \frac{1}{3}$.

Falso: Se $a_k = 3$ per ogni k , i coefficienti della serie di potenze sono

$$b_k = \frac{3}{3^k}.$$

Si ha

$$L = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{b_k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[k]{3}}{3} = \frac{1}{3},$$

da cui segue che il raggio di convergenza della serie è $R = \frac{1}{L} = 3 \neq \frac{1}{3}$.

4C) Se $a_k = 2^k$, il raggio di convergenza della serie è $R = \frac{2}{3}$.

Falso: Se $a_k = 2^k$, i coefficienti della serie di potenze sono

$$b_k = \frac{2^k}{3^k} = \left(\frac{2}{3}\right)^k.$$

Dato che

$$L = \lim_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{b_k} = \frac{2}{3},$$

il raggio di convergenza della serie è $R = \frac{1}{L} = \frac{3}{2} \neq \frac{2}{3}$.

4D) Se $a_k = \frac{1}{k^5}$, la serie converge per $x = 5$.

Vero: Se $a_k = \frac{1}{k^5}$ e $x = 5$ la serie diventa

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^5} \frac{(5-2)^k}{3^k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^5} \frac{3^k}{3^k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^5},$$

e l'ultima serie è convergente essendo una serie armonica generalizzata di esponente $\alpha = 5 > 1$.

5) a) Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^7 \tan\left(\frac{4k^6}{4^k}\right).$$

b) Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \sqrt[3]{k} \left(e^{\frac{1}{k}} - 1 - \frac{1}{k} \right).$$

c) Scrivere la serie di Taylor di $f(x) = x^{11} e^{5x}$ e calcolare $f^{(10)}(0)$.

d) Data $f(x) = \cos(4x^2)$, si calcolino $f^{(4)}(0)$ e $f^{(5)}(0)$.

Soluzione:

a) Ricordando che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1, \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{4k^6}{4^k} = 0,$$

si ha

$$a_k = k^7 \tan\left(\frac{4k^6}{4^k}\right) \approx \frac{4k^{13}}{4^k} = b_k.$$

Applicando il criterio del rapporto alla serie di termine generico b_k si ha

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{b_{k+1}}{b_k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{4(k+1)^{13}}{4^{k+1}} \frac{4^k}{4k^{13}} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{4} \left(\frac{k+1}{k} \right)^{13} = \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{4} < 1,$$

e quindi la serie di termine generico b_k è convergente. Per il criterio del confronto asintotico, anche la serie di termine generico a_k è convergente.

b) Ricordando che

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2),$$

si ha che

$$e^{\frac{1}{k}} - 1 - \frac{1}{k} = \frac{1}{2k^2} + o(k^{-2}).$$

Pertanto,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{k}} - 1 - \frac{1}{k}}{\frac{1}{k^2}} = \frac{1}{2},$$

da cui segue che

$$\sqrt[3]{k} \left(e^{\frac{1}{k}} - 1 - \frac{1}{k} \right) \approx k^{\frac{1}{3}} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{k^{\frac{5}{3}}}.$$

Dato che la serie di termine generico $\frac{1}{k^{\frac{5}{3}}}$ è convergente (come serie armonica generalizzata di esponente $\alpha = \frac{5}{3} > 1$), la serie data è convergente per il criterio del confronto asintotico.

c) Ricordando che

$$e^t = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!}, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

si ha

$$e^{5x} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{5^k}{k!} x^k,$$

e quindi

$$f(x) = x^{11} e^{5x} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{5^k}{k!} x^{k+11}.$$

Dato che nella serie non compaiono termini di grado 10 (il grado minimo è 11, corrispondente a $k = 0$), si ha $f^{(10)}(0) = 0$.

d) Ricordando che

$$\cos(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} t^{2k} = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} + o(t^4),$$

si ha

$$f(x) = \cos(4x^2) = 1 - \frac{(4x^2)^2}{2} + \frac{(4x^2)^4}{24} + o(x^8) = 1 - 8x^4 + 0 \cdot x^5 + o(x^5),$$

da cui segue che $f^{(4)}(0) = -8 \cdot 4!$ e che $f^{(5)}(0) = 0$.

6) Si consideri la serie di potenze

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(x-7)^k}{k}.$$

- a) Si determini il centro della serie.
 - b) Si determini il raggio di convergenza della serie.
 - c) Si determini l'insieme di convergenza della serie.
 - d) Si calcoli $f'(x)$.
-

Soluzione:

a) Ricordando che la forma generale di una serie di potenze è

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (x - x_0)^k,$$

dove x_0 è il centro della serie, il centro della serie proposta è $x_0 = 7$.

b) Dato che $a_k = \frac{1}{k}$, si ha

$$L = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{k+1}}{\frac{1}{k}} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{k}{k+1} = 1,$$

da cui segue che il raggio di convergenza della serie è $R = \frac{1}{L} = 1$.

c) Dato che $R = 1$, la serie converge se x è tale che $|x - 7| < 1$, ovvero se x appartiene a $(6, 8)$ e non converge se $|x - 7| > 1$. Rimangono da studiare i due casi $x = 8$ e $x = 6$. Sostituendo si ottengono le due serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}, \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}.$$

La prima diverge, mentre la seconda converge per il criterio di Leibnitz. Ne segue che l'insieme di convergenza della serie è l'intervallo $I = [6, 8)$.

d) Si ha, per x in I ,

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k(x-7)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{+\infty} (x-7)^{k-1} = \sum_{h=0}^{+\infty} (x-7)^h = \frac{1}{1 - (x-7)} = \frac{1}{8-x}.$$