



Calcolo integrale — Scheda di esercizi n. 9  
19 Maggio 2023 — Compito n. 00145

**Istruzioni:** le prime due caselle (**V** / **F**) permettono di selezionare la risposta vero/falso. La casella “**C**” serve a correggere eventuali errori invertendo la risposta data. Per selezionare una casella, annerirla completamente: ☐ (non ☐ o ☐).

Nome: \_\_\_\_\_

Cognome: \_\_\_\_\_

Matricola:

--	--	--	--	--	--	--

	1A	1B	1C	1D	2A	2B	2C	2D	3A	3B	3C	3D	4A	4B	4C	4D
V	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
F	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
C	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

1) Si consideri l'equazione differenziale:

$$y''(t) + 4y'(t) + 4y(t) = 0.$$

1A) L'equazione ha infinite soluzioni.

1B) Esiste un'unica soluzione dell'equazione tale che  $y(6) = 3$ .

1C) Esistono infinite soluzioni dell'equazione tali che  $y(6) = 7$  e  $y'(6) = 8$ .

1D) Non esistono soluzioni dell'equazione tali che  $y(6) = 5$ ,  $y'(6) = 6$ ,  $y''(6) = 44$ .

2) Si consideri l'equazione differenziale

$$(1) \quad y''(t) - 15y'(t) + 54y(t) = 432.$$

2A) Il polinomio caratteristico dell'equazione è  $P(L) = L^2 - 15L + 54$ .

2B) La funzione  $y_0(t) = 7e^{6t}$  è soluzione dell'equazione omogenea associata a (1).

2C) La funzione  $\bar{y}(t) = 9$  è una soluzione particolare di (1).

2D) Se  $y(0) = 9$  e  $y'(0) = 0$ , la soluzione di (1) è costante.

3) Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(t) + Ay(t) + By(t) = 0, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

3A) Il polinomio caratteristico dell'equazione è  $P(L) = L^2 - AL + B$ .

3B) Se  $A = 0$  e  $B = -16$ , la funzione  $y(t) = 4e^{4t} - 11e^{-4t}$  è soluzione dell'equazione.

3C) Se  $A = -4$  e  $B = 0$ , la funzione  $y(t) = 2$  è soluzione dell'equazione.

3D) Se  $A = -12$  e  $B = 45$ , la funzione  $y(t) = 4e^{6t} \sin(3t)$  non è soluzione dell'equazione.

4) Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(t) - 7y'(t) = -56.$$

4A) Tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata sono date da  $y_0(t) = Ce^{7t}$ .

4B) Esistono soluzioni costanti dell'equazione.

4C) La funzione  $\bar{y}(t) = 8t$  è soluzione dell'equazione.

4D) Se  $y(0) = 7$  e  $y'(0) = 8$ , la soluzione dell'equazione è un'esponenziale.

Docente

- ☐ DelaTorre Pedraza  
☐ Orsina

--	--	--	--	--	--	--	--

Cognome

Nome

Matricola

Compito 00145

---

5) Si consideri l'equazione differenziale

(1) 
$$y''(t) - 14y'(t) + 33y(t) = -8e^{3t}.$$

a) Scrivere il polinomio caratteristico dell'equazione in (1) e trovarne le radici.

b) Scrivere tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata a (1).

c) Trovare una soluzione particolare di (1).

d) Trovare l'unica soluzione di (1) tale che  $y(0) = 0$  e  $y'(0) = 1$ .

---

--	--	--	--	--	--	--	--

Cognome

Nome

Matricola

Compito 00145

---

6) Si consideri l'equazione differenziale

(1)

$$y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = 2e^{2t}.$$

a) Si determini il polinomio caratteristico di (1) e si trovino tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata a (1).

b) Si trovi una soluzione particolare di (1).

c) Si trovi l'unica soluzione di (1) tale che  $y(0) = 0$  e  $y'(0) = 3$ .

d) Si trovi l'unica soluzione di (1) tale che  $y(0) = 2$  e  $y'(0) = 0$ .

---

## Soluzioni del compito 00145

1) Si consideri l'equazione differenziale:

$$y''(t) + 4y'(t) + 4y(t) = 0.$$

---

**1A)** L'equazione ha infinite soluzioni.

**Vero:** Trattandosi di un'equazione differenziale ordinaria del secondo ordine, ha infinite soluzioni, dipendenti da due parametri reali.

---

**1B)** Esiste un'unica soluzione dell'equazione tale che  $y(6) = 3$ .

**Falso:** L'equazione ha infinite soluzioni, dipendenti da due parametri reali. Assegnando una sola condizione, si “fissa” uno solo dei due parametri, e quindi l'equazione ha infinite soluzioni tali che  $y(6) = 3$ .

---

**1C)** Esistono infinite soluzioni dell'equazione tali che  $y(6) = 7$  e  $y'(6) = 8$ .

**Falso:** Assegnando due condizioni, una sulla funzione e una sulla derivata, si ottiene un problema di Cauchy, che ha un'unica soluzione.

---

**1D)** Non esistono soluzioni dell'equazione tali che

$$y(6) = 5, \quad y'(6) = 6, \quad y''(6) = 44.$$

**Vero:** Se  $y(6) = 5$  e  $y'(6) = 6$ , dall'equazione segue che deve essere

$$0 = y''(6) + 4y'(6) + 4y(6) = y''(6) + 4 \cdot 5 + 4 \cdot 6 = y''(6) + 44,$$

da cui segue che  $y''(6) = -44$ . Pertanto, l'unica soluzione dell'equazione che soddisfa le condizioni  $y(6) = 5$  e  $y'(6) = 6$  è tale che  $y''(6) = -44 \neq 44$ ; in altre parole, non esistono soluzioni dell'equazione che soddisfano le tre condizioni richieste.

---

**2)** Si consideri l'equazione differenziale

$$(1) \quad y''(t) - 15y'(t) + 54y(t) = 432.$$

---

**2A)** Il polinomio caratteristico dell'equazione è  $P(L) = L^2 - 15L + 54$ .

**Vero:** Sostituendo  $y''$  con  $L^2$ ,  $y'$  con  $L$  e  $y$  con 1, si trova che

$$P(L) = L^2 - 15L + 54.$$

---

**2B)** La funzione  $y_0(t) = 7e^{6t}$  è soluzione dell'equazione omogenea associata a (1).

**Vero:** Il polinomio caratteristico dell'equazione è  $P(L) = L^2 - 15L + 54$ , che si annulla per  $L_1 = 6$  e  $L_2 = 9$ . Pertanto, tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata sono date da

$$y_0(t) = Ce^{6t} + De^{9t},$$

con  $C$  e  $D$  numeri reali. Scegliendo  $C = 7$  e  $D = 0$ , si ha che  $y_0(t) = 7e^{6t}$  è soluzione dell'equazione omogenea associata a (1).

Alternativamente, se  $y_1(t) = e^{6t}$  si ha, derivando,

$$y_1'(t) = 6e^{6t}, \quad y_1''(t) = 36e^{6t},$$

e, sostituendo nell'equazione,

$$y_1''(t) - 15y_1'(t) + 54y_1(t) = [36 - 15 \cdot 6 + 54]e^{6t} = 0 \cdot e^{6t} = 0,$$

e quindi  $y_1(t)$  è soluzione dell'equazione omogenea associata a (1). Dato che tale equazione è lineare, anche  $y_0(t) = 7y_1(t)$  è soluzione dell'omogenea.

---

**2C)** La funzione  $\bar{y}(t) = 9$  è una soluzione particolare di (1).

**Falso:** Sostituendo nell'equazione si ha, essendo nulle sia la derivata prima che la derivata seconda di  $\bar{y}(t)$ ,

$$y'' - 15y' + 54y = 54 \cdot 9 = 486 \neq 432,$$

e quindi  $\bar{y}(t) = 9$  non è una soluzione particolare di (1). Cercando una soluzione particolare della forma  $y(t) \equiv Q$  si vede facilmente che deve essere  $Q = 8$ .

---

**2D)** Se  $y(0) = 9$  e  $y'(0) = 0$ , la soluzione di (1) è costante.

**Falso:** Se (1) avesse una soluzione costante tale che  $y(0) = 9$ , chiaramente tale soluzione non può che essere  $y(t) \equiv y(0) = 9$  (si noti che la condizione  $y'(0) = 0$  è verificata). Sostituendo però nell'equazione  $y(t) = 9$  si trova

$$y'' - 15y' + 54y = 54 \cdot 9 = 486 \neq 432,$$

e quindi  $y(t) \equiv 9$  non è soluzione dell'equazione; questo vuol dire che l'unica soluzione del problema di Cauchy per (1) con le condizioni iniziali  $y(0) = 9$  e  $y'(0) = 0$  non è costante.

---

**3)** Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(t) + A y(t) + B y(t) = 0, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

---

**3A)** Il polinomio caratteristico dell'equazione è  $P(L) = L^2 - A L + B$ .

**Falso:** Sostituendo  $y''$  con  $L^2$ ,  $y'$  con  $L$  e  $y$  con 1, si trova che

$$P(L) = L^2 + A L + B \neq L^2 - A L + B.$$

---

**3B)** Se  $A = 0$  e  $B = -16$ , la funzione  $y(t) = 4e^{4t} - 11e^{-4t}$  è soluzione dell'equazione.

**Vero:** Se  $A = 0$  e  $B = -16$ , il polinomio caratteristico dell'equazione è  $P(L) = L^2 - 16$  che si annulla per  $L = \pm 4$ . Pertanto, tutte le soluzioni dell'equazione sono date da

$$y(t) = C e^{4t} + D e^{-4t}.$$

Scegliendo  $C = 4$  e  $D = -11$ , si ha che  $y(t) = 4e^{4t} - 11e^{-4t}$  è soluzione dell'equazione.

---

**3C)** Se  $A = -4$  e  $B = 0$ , la funzione  $y(t) = 2$  è soluzione dell'equazione.

**Vero:** Se  $A = -4$  e  $B = 0$ , il polinomio caratteristico dell'equazione è  $P(L) = L^2 - 4L$  che si annulla per  $L = 0$  e per  $L = 4$ . Pertanto, tutte le soluzioni dell'equazione sono date da

$$y(t) = C e^{0t} + D e^{4t} = C + D e^{4t}.$$

Scegliendo  $C = 2$  e  $D = 0$ , si ha che  $y(t) = 2$  è soluzione dell'equazione.

---

**3D)** Se  $A = -12$  e  $B = 45$ , la funzione  $y(t) = 4e^{6t} \sin(3t)$  non è soluzione dell'equazione.

**Falso:** Se  $A = -12$  e  $B = 45$ , il polinomio caratteristico dell'equazione è  $P(L) = L^2 - 12L + 45$ , che si annulla per  $L = 6 \pm 3i$ . Pertanto, tutte le soluzioni dell'equazione sono date da

$$y(t) = e^{6t} [C \cos(3t) + D \sin(3t)].$$

Scegliendo  $C = 0$  e  $D = 4$ , si ha che  $y(t) = 4e^{6t} \sin(3t)$  è soluzione dell'equazione.

---

4) Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(t) - 7y'(t) = -56.$$

---

**4A)** Tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata sono date da  $y_0(t) = C e^{7t}$ .

**Falso:** Il polinomio caratteristico dell'equazione è  $P(L) = L^2 - 7L$ , che si annulla per  $L = 0$  e  $L = 7$ . Pertanto, tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata sono date da

$$y_0(t) = C e^{0t} + D e^{7t} = C + D e^{7t},$$

con  $C$  e  $D$  numeri reali. Pertanto, non tutte le soluzioni dell'omogenea associata sono date da  $y_0(t) = C e^{7t}$ : mancano le soluzioni costanti.

---

**4B)** Esistono soluzioni costanti dell'equazione.

**Falso:** Se  $y(t) \equiv Q$  è una costante, sostituendo nell'equazione si ha

$$y''(t) - 7y'(t) = 0 - 7 \cdot 0 = 0 \neq -56,$$

e quindi l'equazione non ha soluzioni costanti. Alternativamente, sappiamo dalla domanda **4A** che le costanti sono soluzioni dell'equazione omogenea, e quindi non possono essere soluzioni dell'equazione “completa”.

---

**4C)** La funzione  $\bar{y}(t) = 8t$  è soluzione dell'equazione.

**Vero:** Se  $\bar{y}(t) = 8t$ , si ha  $\bar{y}'(t) = 8$  e  $\bar{y}''(t) = 0$ . Sostituendo nell'equazione si ha

$$\bar{y}''(t) - 7\bar{y}'(t) = -7 \cdot 8 = -56,$$

e quindi  $\bar{y}(t) = 8t$  è soluzione dell'equazione.

---

**4D)** Se  $y(0) = 7$  e  $y'(0) = 8$ , la soluzione dell'equazione è un'esponenziale.

**Falso:** Sappiamo già, dagli esercizi **4A** e **4C**, che tutte le soluzioni dell'equazione sono date da

$$y(t) = y_0(t) + \bar{y}(t) = C + D e^{7t} + 8t,$$

con  $C$  e  $D$  numeri reali. Pertanto,

$$y'(t) = 7D e^{6t} + 8.$$

Pertanto, assegnando le condizioni iniziali, si ha

$$7 = C + D, \quad 8 = 7D + 8.$$

Dalla seconda si ricava  $D = 0$ , e sostituendo nella prima si ricava  $C = 7$ . Ne segue che l'unica soluzione dell'equazione è

$$y(t) = 7 + 8t,$$

che è un polinomio di primo grado (e quindi non è un'esponenziale).

---

5) Si consideri l'equazione differenziale

$$(1) \quad y''(t) - 14y'(t) + 33y(t) = -8e^{3t}.$$

a) Scrivere il polinomio caratteristico dell'equazione in (1) e trovarne le radici.

b) Scrivere tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata a (1).

c) Trovare una soluzione particolare di (1).

d) Trovare l'unica soluzione di (1) tale che  $y(0) = 0$  e  $y'(0) = 1$ .

---

**Soluzione:**

a) Sostituendo in (1)  $L^2$  a  $y''$ ,  $L$  a  $y'$  e 1 a  $y$ , si trova

$$P(L) = L^2 - 14L + 33,$$

che si annulla per  $L_1 = 3$  e per  $L_2 = 11$ .

b) Usando le radici del polinomio caratteristico calcolate al punto precedente, abbiamo che tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata a (1) sono date da

$$y_0(t) = C e^{3t} + D e^{11t},$$

con  $C$  e  $D$  numeri reali.

c) Dato che  $g(t) = e^{3t}$  è una soluzione dell'equazione omogenea, cerchiamo una soluzione particolare della forma

$$\bar{y}(t) = Q t e^{3t}.$$

Si ha

$$\bar{y}'(t) = Q(1 + 3t)e^{3t}, \quad \bar{y}''(t) = Q(6 + 9t)e^{3t}.$$

Sostituendo in (1) si ha

$$\bar{y}'' - 14\bar{y}' + 33\bar{y} = Q e^{3t} [6 + 9t - 14(1 + 3t) + 33t] = -8Q e^{3t},$$

e quindi  $\bar{y}(t)$  è soluzione di (1) se  $Q$  è tale che

$$-8Q e^{3t} = -8e^{3t},$$

da cui segue  $Q = 1$  e quindi

$$\bar{y}(t) = t e^{3t}.$$

d) Da b) e c) abbiamo che tutte le soluzioni di (1) sono date da

$$y(t) = y_0(t) + \bar{y}(t) = C e^{3t} + D e^{11t} + t e^{3t},$$

con  $C$  e  $D$  numeri reali. Dato che

$$y'(t) = 3C e^{3t} + 11D e^{11t} + e^{3t} + 3t e^{3t},$$

si ha  $y(0) = C + D$  e  $y'(0) = 3C + 11D + 1$ . Imponendo le condizioni iniziali, si ha che deve essere  $C + D = 0$  e  $3C + 11D + 1 = 1$ , da cui si ricava facilmente  $C = D = 0$ . Ne segue che l'unica soluzione di (1) che soddisfa le condizioni  $y(0) = 0$  e  $y'(0) = 1$  è

$$y(t) = t e^{3t}.$$



6) Si consideri l'equazione differenziale

$$(1) \quad y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = 2e^{2t}.$$

a) Si determini il polinomio caratteristico di (1) e si trovino tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata a (1).

b) Si trovi una soluzione particolare di (1).

c) Si trovi l'unica soluzione di (1) tale che  $y(0) = 0$  e  $y'(0) = 3$ .

d) Si trovi l'unica soluzione di (1) tale che  $y(0) = 2$  e  $y'(0) = 0$ .

---

**Soluzione:**

a) Il polinomio caratteristico è  $P(L) = L^2 - 4L + 4$ , che si annulla per  $L_1 = L_2 = 2$ . Conseguentemente, tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata ad (1) sono date da

$$y_0(t) = (C + Dt)e^{2t},$$

con  $C$  e  $D$  numeri reali.

b) Dato che sia  $e^{2t}$  che  $t e^{2t}$  sono soluzioni dell'equazione omogenea, cerchiamo una soluzione particolare di (1) della forma

$$\bar{y}(t) = Q t^2 e^{2t}.$$

Derivando, si ha

$$\bar{y}'(t) = Q(2t + 2t^2)e^{2t}, \quad \bar{y}''(t) = Q(2 + 8t + 4t^2)e^{2t}.$$

Sostituendo nell'equazione si ha

$$\bar{y}'' - 4\bar{y}' + 4\bar{y}(t) = Q e^{2t} [2 + 8t + 4t^2 - 4(2t + 2t^2) + 4t^2] = 2Q e^{2t},$$

da cui segue che  $\bar{y}(t)$  è soluzione di (1) se  $Q = 1$ . Si ha dunque che tutte le soluzioni di (1) sono date da

$$y(t) = y_0(t) + \bar{y}(t) = (C + Dt + t^2)e^{2t},$$

da cui segue, derivando, che

$$y'(t) = (2C + D + (2D + 2)t + 2t^2)e^{2t}.$$

Pertanto

$$(2) \quad y(0) = C, \quad y'(0) = 2C + D.$$

c) Da (2) e dalle condizioni date segue che deve essere  $C = 0$  e  $2C + D = 3$ , da cui  $C = 0$  e  $D = 3$ . L'unica soluzione di (1) è quindi data da

$$y(t) = (3t + t^2)e^{2t}.$$

d) Da (2) e dalle condizioni date segue che deve essere  $C = 2$  e  $2C + D = 0$ , da cui  $D = -4$ . L'unica soluzione di (1) è quindi data da

$$y(t) = (2 - 4t + t^2)e^{2t}.$$