Calcolo integrale — Scheda di esercizi n. 9
19 Maggio 2023 — Compito n. 00120

Istruzioni: le prime due caselle (**V** / **F**) permettono di selezionare la risposta vero/falso. La casella "**C**" serve a correggere eventuali errori invertendo la risposta data.
Per selezionare una casella, annerirla completamente: ■ (non ☒ o ☑).

Nome: ____________________

Cognome: ____________________

Matricola: | | | | | | | |

	1A	1B	1C	1D	2A	2B	2C	2D	3A	3B	3C	3D	4A	4B	4C	4D
V	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
F	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
C	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

1) Si consideri l'equazione differenziale:

$$y''(t) + 4\,y'(t) + 8\,y(t) = 0\,.$$

1A) L'equazione ha infinite soluzioni.
1B) Esistono infinite soluzioni dell'equazione tali che $y(8) = 4$.
1C) Esiste un'unica soluzione dell'equazione tale che $y(4) = 7$ e $y'(4) = 4$.
1D) Non esistono soluzioni dell'equazione tali che

$$y(6) = 2\,,\ y'(6) = 2\,,\ y''(6) = 24\,.$$

2) Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(t) - 9\,y'(t) + 14\,y(t) = 70\,. \tag{1}$$

2A) Il polinomio caratteristico dell'equazione è $P(L) = L^2 - 9L + 14$.
2B) La funzione $y_0(t) = 2\,\mathrm{e}^{2\,t}$ è soluzione dell'equazione omogenea associata a (1).
2C) La funzione $\overline{y}(t) = 6$ è una soluzione particolare di (1).
2D) Se $y(0) = 5$ e $y'(0) = 0$, la soluzione di (1) è costante.

3) Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(t) + A\,y(t) + B\,y(t) = 0\,, \quad A\,,B \in \mathbb{R}\,.$$

3A) Il polinomio caratteristico dell'equazione è $P(L) = L^2 - A\,L + B$.
3B) Se $A = 0$ e $B = -4$, la funzione $y(t) = 2\,\mathrm{e}^{2\,t} - 5\,\mathrm{e}^{-2\,t}$ non è soluzione dell'equazione.
3C) Se $A = -3$ e $B = 0$, la funzione $y(t) = 3$ è soluzione dell'equazione.
3D) Se $A = -4$ e $B = 20$, la funzione $y(t) = 3\,\mathrm{e}^{2\,t}\,\sin(4\,t)$ è soluzione dell'equazione.

4) Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(t) - 4\,y'(t) = -24\,.$$

4A) Tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata sono date da $y_0(t) = C + D\,\mathrm{e}^{4\,t}$.
4B) Esistono soluzioni costanti dell'equazione.
4C) La funzione $\overline{y}(t) = 6\,t$ non è soluzione dell'equazione.
4D) Se $y(0) = 8$ e $y'(0) = 6$, la soluzione dell'equazione è un'esponenziale.

Docente
☐ DelaTorre Pedraza
☐ Orsina

5) Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(t) - 10\,y'(t) + 16\,y(t) = -6\,\mathrm{e}^{2\,t}\,. \tag{1}$$

a) Scrivere il polinomio caratteristico dell'equazione in (1) e trovarne le radici.
b) Scrivere tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata a (1).
c) Trovare una soluzione particolare di (1).
d) Trovare l'unica soluzione di (1) tale che $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$.

□□□□□□□□ **Cognome** **Nome** **Matricola** **Compito 00120**

6) Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(t) - 12\,y'(t) + 36\,y(t) = 2\,\mathrm{e}^{6\,t}\,. \tag{1}$$

a) Si determini il polinomio caratteristico di (1) e si trovino tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata a (1).
b) Si trovi una soluzione particolare di (1).
c) Si trovi l'unica soluzione di (1) tale che $y(0) = 0$ e $y'(0) = 8$.
d) Si trovi l'unica soluzione di (1) tale che $y(0) = 5$ e $y'(0) = 0$.

Soluzioni del compito 00120

1) Si consideri l'equazione differenziale:

$$y''(t) + 4\,y'(t) + 8\,y(t) = 0\,.$$

1A) L'equazione ha infinite soluzioni.

Vero: Trattandosi di un'equazione differenziale ordinaria del secondo ordine, ha infinite soluzioni, dipendenti da due parametri reali.

1B) Esistono infinite soluzioni dell'equazione tali che $y(8) = 4$.

Vero: L'equazione ha infinite soluzioni, dipendenti da due parametri reali. Assegnando una sola condizione, si "fissa" uno solo dei due parametri, e quindi l'equazione ha infinite soluzioni tali che $y(8) = 4$.

1C) Esiste un'unica soluzione dell'equazione tale che $y(4) = 7$ e $y'(4) = 4$.

Vero: Assegnando due condizioni, una sulla funzione e una sulla derivata, si ottiene un problema di Cauchy, che ha un'unica soluzione.

1D) Non esistono soluzioni dell'equazione tali che

$$y(6) = 2\,,\ y'(6) = 2\,,\ y''(6) = 24\,.$$

Vero: Se $y(6) = 2$ e $y'(6) = 2$, dall'equazione segue che deve essere

$$0 = y''(6) + 4\,y'(6) + 8\,y(6) = y''(6) + 4 \cdot 2 + 8 \cdot 2 = y''(6) + 24\,,$$

da cui segue che $y''(6) = -24$. Pertanto, l'unica soluzione dell'equazione che soddisfa le condizioni $y(6) = 2$ e $y'(6) = 2$ è tale che $y''(6) = -24 \neq 24$; in altre parole, non esistono soluzioni dell'equazione che soddisfano le tre condizioni richieste.

---

2) Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(t) - 9\,y'(t) + 14\,y(t) = 70\,. \tag{1}$$

2A) Il polinomio caratteristico dell'equazione è $P(L) = L^2 - 9L + 14$.

Vero: Sostituendo y'' con L^2, y' con L e y con 1, si trova che

$$P(L) = L^2 - 9L + 14\,.$$

2B) La funzione $y_0(t) = 2\,e^{2\,t}$ è soluzione dell'equazione omogenea associata a (1).

Vero: Il polinomio caratteristico dell'equazione è $P(L) = L^2 - 9L + 14$, che si annulla per $L_1 = 2$ e $L_2 = 7$. Pertanto, tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata sono date da

$$y_0(t) = C\,e^{2\,t} + D\,e^{7\,t}\,,$$

con C e D numeri reali. Scegliendo $C = 2$ e $D = 0$, si ha che $y_0(t) = 2\,e^{2\,t}$ è soluzione dell'equazione omogenea associata a (1).
Alternativamente, se $y_1(t) = e^{2\,t}$ si ha, derivando,

$$y_1'(t) = 2\,e^{2\,t}\,, \qquad y_1''(t) = 4\,e^{2\,t}\,,$$

e, sostituendo nell'equazione,

$$y_1''(t) - 9\,y_1'(t) + 14\,y_1(t) = [4 - 9 \cdot 2 + 14]\,e^{2\,t} = 0 \cdot e^{2\,t} = 0\,,$$

e quindi $y_1(t)$ è soluzione dell'equazione omogenea associata a (1). Dato che tale equazione è lineare, anche $y_0(t) = 2\,y_1(t)$ è soluzione dell'omogenea.

2C) La funzione $\overline{y}(t) = 6$ è una soluzione particolare di (1).

Falso: Sostituendo nell'equazione si ha, essendo nulle sia la derivata prima che la derivata seconda di $\overline{y}(t)$,

$$y'' - 9\,y' + 14\,y = 14 \cdot 6 = 84 \neq 70\,,$$

e quindi $\overline{y}(t) = 6$ non è una soluzione particolare di (1). Cercando una soluzione particolare della forma $y(t) \equiv Q$ si vede facilmente che deve essere $Q = 5$.

2D) Se $y(0) = 5$ e $y'(0) = 0$, la soluzione di (1) è costante.

Vero: Come detto nell'esercizio **2C**, la funzione $y(t) \equiv 5$ è soluzione dell'equazione (1). Dato che soddisfa inoltre le condizioni $y(0) = 5$ e $y'(0) = 0$, la funzione $y(t) \equiv 5$ è soluzione di un problema di Cauchy per un'equazione differenziale del secondo ordine, e quindi è l'unica soluzione di (1) che soddisfa tali condizioni.

---

3) Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(t) + A\,y(t) + B\,y(t) = 0\,, \quad A\,,B \in \mathbb{R}\,.$$

3A) Il polinomio caratteristico dell'equazione è $P(L) = L^2 - A\,L + B$.

Falso: Sostituendo y'' con L^2, y' con L e y con 1, si trova che

$$P(L) = L^2 + A\,L + B \neq L^2 - A\,L + B\,.$$

3B) Se $A = 0$ e $B = -4$, la funzione $y(t) = 2\,\mathrm{e}^{2\,t} - 5\,\mathrm{e}^{-2\,t}$ non è soluzione dell'equazione.

Falso: Se $A = 0$ e $B = -4$, il polinomio caratteristico dell'equazione è $P(L) = L^2 - 4$ che si annulla per $L = \pm 2$. Pertanto, tutte le soluzioni dell'equazione sono date da

$$y(t) = C\,\mathrm{e}^{2\,t} + D\,\mathrm{e}^{-2\,t}\,.$$

Scegliendo $C = 2$ e $D = -5$, si ha che $y(t) = 2\,\mathrm{e}^{2\,t} - 5\,\mathrm{e}^{-2\,t}$ è soluzione dell'equazione.

3C) Se $A = -3$ e $B = 0$, la funzione $y(t) = 3$ è soluzione dell'equazione.

Vero: Se $A = -3$ e $B = 0$, il polinomio caratteristico dell'equazione è $P(L) = L^2 - 3\,L$ che si annulla per $L = 0$ e per $L = 3$. Pertanto, tutte le soluzioni dell'equazione sono date da

$$y(t) = C\,\mathrm{e}^{0\,t} + D\,\mathrm{e}^{3\,t} = C + D\,\mathrm{e}^{3\,t}\,.$$

Scegliendo $C = 3$ e $D = 0$, si ha che $y(t) = 3$ è soluzione dell'equazione.

3D) Se $A = -4$ e $B = 20$, la funzione $y(t) = 3\,\mathrm{e}^{2\,t}\,\sin(4\,t)$ è soluzione dell'equazione.

Vero: Se $A = -4$ e $B = 20$, il polinomio caratteristico dell'equazione è $P(L) = L^2 - 4\,L + 20$, che si annulla per $L = 2 \pm 4\,i$. Pertanto, tutte le soluzioni dell'equazione sono date da

$$y(t) = \mathrm{e}^{2\,t}[C\,\cos(4\,t) + D\,\sin(4\,t)]\,.$$

Scegliendo $C = 0$ e $D = 3$, si ha che $y(t) = 3\,\mathrm{e}^{2\,t}\,\sin(4\,t)$ è soluzione dell'equazione.

---

4) Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(t) - 4\,y'(t) = -24\,.$$

4A) Tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata sono date da $y_0(t) = C + D\,\mathrm{e}^{4\,t}$.

Vero: Il polinomio caratteristico dell'equazione è $P(L) = L^2 - 4\,L$, che si annulla per $L = 0$ e $L = 4$. Pertanto, tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata sono date da

$$y_0(t) = C\,\mathrm{e}^{0\cdot t} + D\,\mathrm{e}^{4\,t} = C + D\,\mathrm{e}^{4\,t}\,,$$

con C e D numeri reali.

4B) Esistono soluzioni costanti dell'equazione.

Falso: Se $y(t) \equiv Q$ è una costante, sostituendo nell'equazione si ha

$$y''(t) - 4\,y'(t) = 0 - 4\cdot 0 = 0 \neq -24\,,$$

e quindi l'equazione non ha soluzioni costanti. Alternativamente, sappiamo dalla domanda **4A** che le costanti sono soluzioni dell'equazione omogenea, e quindi non possono essere soluzioni dell'equazione "completa".

4C) La funzione $\overline{y}(t) = 6\,t$ non è soluzione dell'equazione.

Falso: Se $\overline{y}(t) = 6\,t$, si ha $\overline{y}'(t) = 6$ e $\overline{y}''(t) = 0$. Sostituendo nell'equazione si ha

$$\overline{y}''(t) - 4\,\overline{y}'(t) = -4\cdot 6 = -24\,,$$

e quindi $\overline{y}(t) = 6\,t$ è soluzione dell'equazione.

4D) Se $y(0) = 8$ e $y'(0) = 6$, la soluzione dell'equazione è un'esponenziale.

Falso: Sappiamo già, dagli esercizi **4A** e **4C**, che tutte le soluzioni dell'equazione sono date da

$$y(t) = y_0(t) + \overline{y}(t) = C + D\,\mathrm{e}^{4\,t} + 6\,t\,,$$

con C e D numeri reali. Pertanto,

$$y'(t) = 4\,D\,\mathrm{e}^{2\,t} + 6\,.$$

Pertanto, assegnando le condizioni iniziali, si ha

$$8 = C + D\,, \qquad 6 = 4\,D + 6\,.$$

Dalla seconda si ricava $D = 0$, e sostituendo nella prima si ricava $C = 8$. Ne segue che l'unica soluzione dell'equazione è

$$y(t) = 8 + 6\,t\,,$$

che è un polinomio di primo grado (e quindi non è un'esponenziale).

---

5) Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(t) - 10\,y'(t) + 16\,y(t) = -6\,e^{2\,t}\,. \tag{1}$$

a) Scrivere il polinomio caratteristico dell'equazione in (1) e trovarne le radici.
b) Scrivere tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata a (1).
c) Trovare una soluzione particolare di (1).
d) Trovare l'unica soluzione di (1) tale che $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$.

Soluzione:
a) Sostituendo in (1) L^2 a y'', L a y' e 1 a y, si trova

$$P(L) = L^2 - 10\,L + 16\,,$$

che si annulla per $L_1 = 2$ e per $L_2 = 8$.

b) Usando le radici del polinomio caratteristico calcolate al punto precedente, abbiamo che tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata a (1) sono date da

$$y_0(t) = C\,e^{2\,t} + D\,e^{8\,t}\,,$$

con C e D numeri reali.

c) Dato che $g(t) = e^{2\,t}$ è una soluzione dell'equazione omogenea, cerchiamo una soluzione particolare della forma

$$\overline{y}(t) = Q\,t\,e^{2\,t}\,.$$

Si ha

$$\overline{y}'(t) = Q\,(1 + 2\,t)\,e^{2\,t}\,, \qquad \overline{y}''(t) = Q\,(4 + 4\,t)\,e^{2\,t}\,.$$

Sostituendo in (1) si ha

$$\overline{y}'' - 10\,\overline{y} + 16\,\overline{y} = Q\,e^{2\,t}\,[4 + 4\,t - 10\,(1 + 2\,t) + 16\,t] = -6\,Q\,e^{2\,t}\,,$$

e quindi $\overline{y}(t)$ è soluzione di (1) se Q è tale che

$$-6\,Q\,e^{2\,t} = -6\,e^{2\,t}\,,$$

da cui segue $Q = 1$ e quindi

$$\overline{y}(t) = t\,e^{2\,t}\,.$$

d) Da **b)** e **c)** abbiamo che tutte le soluzioni di (1) sono date da

$$y(t) = y_0(t) + \overline{y}(t) = C\,e^{2\,t} + D\,e^{8\,t} + t\,e^{2\,t}\,,$$

con C e D numeri reali. Dato che

$$y'(t) = 2\,C\,e^{2\,t} + 8\,D\,e^{8\,t} + e^{2\,t} + 2\,t\,e^{2\,t}\,,$$

si ha $y(0) = C + D$ e $y'(0) = 2\,C + 8\,D + 1$. Imponendo le condizioni iniziali, si ha che deve essere $C + D = 0$ e $2\,C + 8\,D + 1 = 1$, da cui si ricava facilmente $C = D = 0$. Ne segue che l'unica soluzione di (1) che soddisfa le condizioni $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$ è

$$y(t) = t\,e^{2\,t}\,.$$

6) Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(t) - 12\,y'(t) + 36\,y(t) = 2\,\mathrm{e}^{6\,t}\,. \tag{1}$$

a) Si determini il polinomio caratteristico di (1) e si trovino tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata a (1).
b) Si trovi una soluzione particolare di (1).
c) Si trovi l'unica soluzione di (1) tale che $y(0) = 0$ e $y'(0) = 8$.
d) Si trovi l'unica soluzione di (1) tale che $y(0) = 5$ e $y'(0) = 0$.

Soluzione:
a) Il polinomio caratteristico è $P(L) = L^2 - 12\,L + 36$, che si annulla per $L_1 = L_2 = 6$. Conseguentemente, tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata ad (1) sono date da

$$y_0(t) = (C + D\,t)\,\mathrm{e}^{6\,t}\,,$$

con C e D numeri reali.

b) Dato che sia $\mathrm{e}^{6\,t}$ che $t\,\mathrm{e}^{6\,t}$ sono soluzioni dell'equazione omogenea, cerchiamo una soluzione particolare di (1) della forma

$$\overline{y}(t) = Q\,t^2\,\mathrm{e}^{6\,t}\,.$$

Derivando, si ha

$$\overline{y}'(t) = Q\,(2t + 6\,t^2)\,\mathrm{e}^{6\,t}\,, \qquad \overline{y}''(t) = Q\,(2 + 24\,t + 36\,t^2)\,\mathrm{e}^{6\,t}\,.$$

Sostituendo nell'equazione si ha

$$\overline{y}'' - 12\,\overline{y}' + 36\,\overline{y}(t) = Q\,\mathrm{e}^{6\,t}\,[2 + 24\,t + 36\,t^2 - 12\,(2t + 6\,t^2) + 36\,t^2] = 2\,Q\,\mathrm{e}^{6\,t}\,,$$

da cui segue che $\overline{y}(t)$ è soluzione di (1) se $Q = 1$. Si ha dunque che tutte le soluzioni di (1) sono date da

$$y(t) = y_0(t) + \overline{y}(t) = (C + D\,t + t^2)\,\mathrm{e}^{6\,t}\,,$$

da cui segue, derivando, che

$$y'(t) = (6\,C + D + (6\,D + 2)\,t + 6\,t^2)\,\mathrm{e}^{6\,t}\,.$$

Pertanto

$$y(0) = C\,, \qquad y'(0) = 6\,C + D\,. \tag{2}$$

c) Da (2) e dalle condizioni date segue che deve essere $C = 0$ e $6\,C + D = 8$, da cui $C = 0$ e $D = 8$. L'unica soluzione di (1) è quindi data da

$$y(t) = (8\,t + t^2)\,\mathrm{e}^{6\,t}\,.$$

d) Da (2) e dalle condizioni date segue che deve essere $C = 5$ e $6\,C + D = 0$, da cui $D = -30$. L'unica soluzione di (1) è quindi data da

$$y(t) = (5 - 30\,t + t^2)\,\mathrm{e}^{6\,t}\,.$$