Soluzioni del compito 00049

1) Sia
$$F(t) = \int_{-8}^{t} [7\,\mathrm{e}^{3\,|x|} + \sin(6\,x)]\,dx\,.$$

1A) La funzione $F(t)$ non è derivabile per qualche t in $\mathbb{R}$.

Falso: Dato che la funzione $f(x) = 7\,\mathrm{e}^{3\,|x|} - \sin(6\,x)$ è continua su $\mathbb{R}$, per il teorema fondamentale del calcolo integrale la funzione $F(t)$ è derivabile per ogni t in $\mathbb{R}$, e si ha $F'(t) = f(t)$ per ogni t.

1B) Si ha $F(-8) = 0$.

Vero: Si ha
$$F(-8) = \int_{-8}^{-8} [7\,\mathrm{e}^{3\,|x|} + \sin(6\,x)]\,dx = 0\,,$$
dato che gli estremi di integrazione coincidono.

1C) La funzione $F(t)$ è strettamente crescente su $\mathbb{R}$.

Vero: Si ha
$$F'(t) = 7\,\mathrm{e}^{3\,|t|} + \sin(6\,t) \geq 7 \cdot 1 - 1 = 6 > 0\,,$$
dato che $\mathrm{e}^{3\,|t|} \geq 1$ e che $\sin(6\,t) \geq -1$. Dato che la derivata di $F(t)$ è strettamente positiva per ogni t, $F(t)$ è strettamente crescente su $\mathbb{R}$.

1D) Si ha $F(-14) < 0$.

Vero: Ricordando (si veda l'esercizio **1C**) che la funzione $F(t)$ è strettamente crescente, e che $F(-8) = 0$ (si veda l'esercizio **1B**), si ha
$$F(-14) < F(-8) = 0\,.$$

---

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

2A)

$$\int_0^1 (12x^3 - 6x^2 - 6x + 2)\, dx \neq 0\,.$$

Falso: Si ha

$$\int_0^1 (12x^3 - 6x^2 - 6x + 2)\, dx = (3x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 2x)\Big|_0^1 = 3 - 2 - 3 + 2 = 0\,.$$

2B)

$$\int_0^\pi x\,\cos(12\,x)\, dx = 0\,.$$

Vero: Si ha, integrando per parti (derivando x e integrando $\cos(12\,x)$),

$$\int x\,\cos(12\,x)\,dx = \frac{x\,\sin(12\,x)}{12} - \frac{1}{12}\int \sin(12\,x)\,dx = \frac{x\,\sin(12\,x)}{12} + \frac{\cos(12\,x)}{144} + c\,,$$

dove si è usato che una primitiva di $\cos(12\,x)$ è $\sin(12\,x)/12$, e che una primitiva di $\sin(12\,x)$ è $-\cos(12\,x)/12$. Pertanto,

$$\int_0^\pi x\,\cos(12\,x)\,dx = \frac{x\,\sin(12\,x)}{12} + \frac{\cos(12\,x)}{144}\Big|_0^\pi = \frac{\pi\,\sin(12\,\pi)}{12} + \frac{\cos(12\,\pi)}{144} - \frac{0\cdot\sin(0)}{12} - \frac{\cos(0)}{144} = 0\,,$$

dato che $\sin(12\,\pi) = 0$ e che $\cos(12\,\pi) = 1$.

2C)

$$\int_0^6 \mathrm{e}^{9\,x}\,dx = \frac{\mathrm{e}^{54} - 1}{9}\,.$$

Vero: Dato che

$$\int \mathrm{e}^{9\,x}\,dx = \frac{\mathrm{e}^{9\,x}}{9} + c\,,$$

si ha

$$\int_0^6 \mathrm{e}^{9\,x}\,dx = \frac{\mathrm{e}^{9\,x}}{9}\Big|_0^6 = \frac{\mathrm{e}^{54} - 1}{9}\,.$$

2D)

$$\int_0^1 \frac{18\,x^2 + 12\,x}{4 + x^2 + x^3}\,dx = 6\,\log\left(\frac{2}{3}\right).$$

Falso: Si ha

$$\frac{18\,x^2 + 12\,x}{4 + x^2 + x^3} = 6\,\frac{3x^3 + 2x}{4 + x^2 + x^3} = 6\,\frac{(4 + x^2 + x^3)'}{4 + x^2 + x^3}\,.$$

Pertanto,

$$\int_0^1 \frac{18\,x^2 + 12\,x}{4 + x^2 + x^3}\,dx = 6\,\log(|4 + x^2 + x^3|)\Big|_0^1 = 6\,(\log(6) - \log(4)) = 6\,\log\left(\frac{3}{2}\right) \neq 6\,\log\left(\frac{2}{3}\right).$$

Alternativamente, si poteva osservare che, essendo la funzione integranda positiva su $[0, 1]$, l'integrale non poteva essere negativo.

---

3) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

3A)

$$\int_{-5}^{5} [x\,\mathrm{e}^{9\,x^4} + x\,|x|^3]\,dx \neq 0\,.$$

Falso: Dato che la funzione integranda è dispari, e che l'intervallo di integrazione è simmetrico rispetto all'origine, l'integrale vale zero.

3B)

$$\int_{-7}^{7} [8\,\cos^2(x) + 2\,x^4]\,dx > 0\,.$$

Vero: L'integrale è positivo perché la funzione integranda è positiva.

3C)

$$\int_{-7}^{6} [x^3 + \sin(7\,x)]\,dx < 0\,.$$

Vero: Dato che la funzione è dispari, il suo integrale sull'intervallo $[-6, 6]$ è nullo. Pertanto,

$$\int_{-7}^{6} [x^3 + \sin(7\,x)]\,dx = \int_{-7}^{-6} [x^3 + \sin(7\,x)]\,dx\,.$$

Quest'ultimo integrale è negativo perché la funzione integranda è negativa. Infatti, su tutto l'intervallo si ha

$$x^3 + \sin(7\,x) \leq -6^3 + 1 < -6 + 1 = -5 < 0\,.$$

3D)

$$\int_{-3}^{5} [\mathrm{e}^{8\,x^2} - \cos^2(6\,x)]\,dx > 0\,.$$

Vero: Dato che si ha, sull'intervallo $[-3, 5]$,

$$\mathrm{e}^{8\,x^2} - \cos^2(6\,x) \geq \mathrm{e}^0 - 1 = 0\,,$$

la funzione integranda è positiva e quindi l'integrale è positivo.

---

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

4A)

$$\int_8^9 \frac{dx}{x-7} = \int_{12}^{17} \frac{dx}{x-7}\,.$$

Vero: Si ha

$$\int \frac{dx}{x-7} = \log(|x-7|) + c\,.$$

Pertanto,

$$\int_8^9 \frac{dx}{x-7} = \log(|x-7|)\Big|_8^9 = \log(2) - \log(1) = \log(2)\,,$$

e

$$\int_{12}^{17} \frac{dx}{x-7} = \log(|x-7|)\Big|_{12}^{17} = \log(10) - \log(5) = \log(2)\,,$$

e quindi i due integrali sono uguali.

4B)

$$\int_0^1 \frac{dx}{(7\,x-14)^2} = \frac{1}{98}\,.$$

Vero: Si ha

$$\int \frac{dx}{(7\,x-14)^2} = \frac{1}{49}\int \frac{dx}{(x-2)^2} = \frac{1}{49}\,\frac{1}{2-x} + c\,.$$

Pertanto,

$$\int_0^1 \frac{dx}{(7\,x-14)^2} = \frac{1}{49}\Big(\frac{1}{2-1} - \frac{1}{2}\Big) = \frac{1}{49}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{98}\,.$$

4C)

$$\int_9^{10} \frac{dx}{x^2-7x+12} = \log\Big(\frac{36}{35}\Big)\,.$$

Vero: Si ha

$$x^2-7x+12 = (x-4)\,(x-3)\,,$$

e quindi

$$\int \frac{dx}{x^2-7x+12} = \frac{1}{4-3}\,\log\Big(\Big|\frac{x-4}{x-3}\Big|\Big) + c = \log\Big(\Big|\frac{x-4}{x-3}\Big|\Big) + c\,.$$

Pertanto,

$$\int_9^{10} \frac{dx}{x^2-7x+12} = \log\Big(\Big|\frac{x-4}{x-3}\Big|\Big)\Big|_9^{10} = \log\Big(\frac{6}{7}\Big) - \log\Big(\frac{5}{6}\Big) = \log\Big(\frac{6}{7}\cdot\frac{6}{5}\Big) = \log\Big(\frac{36}{35}\Big)\,.$$

4D)

$$\int_3^7 \frac{dx}{x^2-6x+25} = \frac{\pi}{16}\,.$$

Vero: Si ha

$$x^2-6x+25 = (x^2-6\,x+9)+16 = (x-3)^2+16 = 16\left[\Big(\frac{x-3}{4}\Big)^2+1\right].$$

Pertanto,

$$\int \frac{dx}{x^2-6x+25} = \frac{1}{16}\int \frac{dx}{1+\big(\frac{x-3}{4}\big)^2}\,.$$

Con la sostituzione $y = \frac{x-3}{4}$, da cui $dx = 4\,dy$, si ha

$$\int \frac{dx}{x^2 - 6x + 25} = \frac{1}{4} \int \frac{dy}{1+y^2} = \frac{1}{4} \arctan(y) + c = \frac{1}{4} \arctan\left(\frac{x-3}{4}\right) + c\,.$$

Pertanto,

$$\int_3^7 \frac{dx}{x^2 - 6x + 25} = \frac{1}{4} \arctan\left(\frac{x-3}{4}\right)\Big|_3^7 = \frac{1}{4}\left(\arctan(1) - \arctan(0)\right) = \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{16}\,.$$

---

5) Determinare una primitiva delle funzioni $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ e $k(x)$, e calcolare gli integrali.

$$\textbf{a)}\ f(x) = x^2 \log(x)\,, \quad \int_1^{e^2} f(x)\,dx\,, \qquad \textbf{b)}\ g(x) = x^2 \cos(6\,x^3)\,, \quad \int_0^{\sqrt[3]{5\,\pi}} g(x)\,dx\,,$$

$$\textbf{c)}\ h(x) = (5x^2 - 48x + 115)\,e^{5\,x}\,, \quad \int_4^6 h(x)\,dx\,, \qquad \textbf{d)}\ k(x) = \frac{10\,x}{1 + 25\,x^4}\,, \quad \int_0^{1/\sqrt{5}} k(x)\,dx\,.$$

Soluzione:

a) Integriamo per parti, derivando $\log(x)$ e integrando x^2. Si ha

$$\int x^2 \log(x)\,dx = \frac{x^3 \log(x)}{3} - \int \frac{x^3}{3}\,\frac{1}{x}\,dx = \frac{x^3 \log(x)}{3} - \frac{x^3}{9} + c = \frac{x^3}{9}(3\log(x) - 1) + c\,.$$

Pertanto,

$$\int_1^{e^2} f(x)\,dx = \frac{x^3}{9}(3\log(x) - 1)\Big|_1^{e^2} = \frac{e^6}{9}\,(3\log(e^2) - 1) + \frac{1}{9} = \frac{5}{9}\,e^6 + \frac{1}{9}\,.$$

b) Si ha, con la sostituzione $y = 6\,x^3$, da cui $x^2\,dx = dy/18$,

$$\int x^2 \cos(6\,x^3)\,dx = \frac{1}{18}\int \cos(y)\,dy = \frac{\sin(y)}{18} + c = \frac{\sin(6\,x^3)}{18} + c\,.$$

Pertanto,

$$\int_0^{\sqrt[3]{5\,\pi}} g(x)\,dx = \frac{\sin(6\,x^3)}{18}\Big|_0^{\sqrt[3]{5\,\pi}} = \frac{\sin(30\,\pi) - \sin(0)}{18} = 0\,.$$

c) Ricordiamo che se $P_2(x)$ è un polinomio di grado 2, allora

$$\int P_2(x)\,e^{5\,x}\,dx = Q_2(x)\,e^{5\,x} + c\,,$$

dove $Q_2(x)$ è un polinomio di grado 2 tale che

$$5\,Q_2(x) + Q_2'(x) = P_2(x)\,.$$

Scrivendo il generico polinomio di grado 2 come $Q_2(x) = a\,x^2 + b\,x + c$, si ha

$$5\,Q_2(x) + Q_2'(x) = 5\,a\,x^2 + (5\,b + 2a)\,x + 5\,c + b\,.$$

Imponendo l'uguaglianza

$$5\,a\,x^2 + (5\,b + 2a)\,x + 5\,c + b = 5x^2 - 48x + 115\,,$$

si ha che deve essere $5\,a = 5$, $5\,b + 2a = -48$ e $5\,c + b = 115$. Risolvendo il sistema, si trova $a = 1$, $b = -10$ e $c = 25$. Pertanto,

$$\int (5x^2 - 48x + 115)\,e^{5\,x}\,dx = (x^2 - 10\,x + 25)\,e^{5\,x} = (x-5)^2\,e^{5\,x} + c\,,$$

e quindi

$$\int_4^6 h(x)\,dx = (x-5)^2\,e^{5\,x}\Big|_4^6 = e^{30} - e^{20}\,.$$

d) Si ha, con la sostituzione $y = 5\,x^2$, da cui $25\,x^4 = y^2$ e $dy = 10\,x\,dx$,

$$\int \frac{10\,x}{1 + 25\,x^4}\,dx = \int \frac{dy}{1 + y^2} = \arctan(y) + c = \arctan(5\,x^2) + c\,.$$

Pertanto,

$$\int_0^{1/\sqrt{5}} k(x)\,dx = \arctan(5\,x^2)\Big|_0^{1/\sqrt{5}} = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4}\,.$$

6) Sia
$$F(t) = \int_2^t [8\,\mathrm{e}^{x^2} + \arctan(5\,|x|)]\,dx\,.$$
a) Dimostrare che $F(t)$ è derivabile per ogni t in $\mathbb{R}$.
b) Calcolare $F(2)$ e $F'(0)$.
c) Dimostrare che $F(t)$ è crescente, e non è né pari né dispari.
d) Dimostrare che
$$\lim_{t\to+\infty} F(t) = +\infty\,.$$

Soluzione:
a) Dato che la funzione $f(x) = 8\,\mathrm{e}^{x^2} + \arctan(5\,|x|)$ è una funzione continua, per il teorema fondamentale del calcolo integrale la funzione $F(t)$ è derivabile per ogni t in $\mathbb{R}$, e si ha

$$F'(t) = f(t) = 8\,\mathrm{e}^{t^2} + \arctan(5\,|t|)\,, \qquad \forall t \in \mathbb{R}\,. \tag{1}$$

b) Si ha
$$F(2) = \int_2^2 [8\,\mathrm{e}^{x^2} + \arctan(5\,|x|)]\,dx = 0\,,$$
e, dalla (1),
$$F'(0) = f(0) = 8\,.$$

c) Sempre dalla (1) si ha
$$F'(t) \geq 7 > 0\,,$$
e quindi $F(t)$ è strettamente crescente. Per quanto riguarda la parità e disparità, osserviamo che si ha
$$F(2) = 0\,.$$
Inoltre, dato che $F(t)$ è strettamente crescente, si ha
$$F(-2) < F(2) = 0\,,$$
e quindi $F(-2) \neq F(2)$ (cosicché $F(t)$ non è pari), e $F(-2) \neq -F(2)$ (cosicché $F(t)$ non è dispari).

d) Osserviamo innanzitutto che il limite di $F(t)$ esiste perché $F(t)$ è crescente. Inoltre, dato che
$$8\,\mathrm{e}^{x^2} + \arctan(5\,|x|) \geq 8\,,$$
si ha, se $t \geq 2$,
$$F(t) = \int_2^t [8\,\mathrm{e}^{x^2} + \arctan(5\,|x|)]\,dx \geq \int_2^t 8\,dx = 8\,(t-2)\,,$$
da cui segue che
$$\lim_{t\to+\infty} F(t) \geq \lim_{t\to+\infty} 8\,(t-2) = +\infty\,.$$