Soluzioni del compito 00067

1) Sia
$$F(t) = \int_{-4}^{t} [3\,\mathrm{e}^{4\,|x|} + \sin(7\,x)]\,dx\,.$$

1A) La funzione $F(t)$ è derivabile per ogni t in $\mathbb{R}$.

Vero: Dato che la funzione $f(x) = 3\,\mathrm{e}^{4\,|x|} - \sin(7\,x)$ è continua su $\mathbb{R}$, per il teorema fondamentale del calcolo integrale la funzione $F(t)$ è derivabile per ogni t in $\mathbb{R}$, e si ha $F'(t) = f(t)$ per ogni t.

1B) Si ha $F(-4) = 3\,\mathrm{e}^{16} + \sin(-28)$.

Falso: Si ha
$$F(-4) = \int_{-4}^{-4} [3\,\mathrm{e}^{4\,|x|} + \sin(7\,x)]\,dx = 0 \neq 3\,\mathrm{e}^{16} + \sin(-28)\,,$$
dato che gli estremi di integrazione coincidono.

1C) La funzione $F(t)$ è strettamente crescente su $\mathbb{R}$.

Vero: Si ha
$$F'(t) = 3\,\mathrm{e}^{4\,|t|} + \sin(7\,t) \geq 3 \cdot 1 - 1 = 2 > 0\,,$$
dato che $\mathrm{e}^{4\,|t|} \geq 1$ e che $\sin(7\,t) \geq -1$. Dato che la derivata di $F(t)$ è strettamente positiva per ogni t, $F(t)$ è strettamente crescente su $\mathbb{R}$.

1D) Si ha $F(-7) < 0$.

Vero: Ricordando (si veda l'esercizio **1C**) che la funzione $F(t)$ è strettamente crescente, e che $F(-4) = 0$ (si veda l'esercizio **1B**), si ha
$$F(-7) < F(-4) = 0\,.$$

---

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

2A)

$$\int_0^1 (12x^3 - 9x^2 - 6x + 3)\, dx = 0\,.$$

Vero: Si ha

$$\int_0^1 (12x^3 - 9x^2 - 6x + 3)\, dx = (3x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 3x)\Big|_0^1 = 3 - 3 - 3 + 3 = 0\,.$$

2B)

$$\int_0^\pi x\,\cos(8\,x)\, dx \neq 0\,.$$

Falso: Si ha, integrando per parti (derivando x e integrando $\cos(8\,x)$),

$$\int x\,\cos(8\,x)\, dx = \frac{x\,\sin(8\,x)}{8} - \frac{1}{8}\int \sin(8\,x)\, dx = \frac{x\,\sin(8\,x)}{8} + \frac{\cos(8\,x)}{64} + c\,,$$

dove si è usato che una primitiva di $\cos(8\,x)$ è $\sin(8\,x)/8$, e che una primitiva di $\sin(8\,x)$ è $-\cos(8\,x)/8$. Pertanto,

$$\int_0^\pi x\,\cos(8\,x)\, dx = \frac{x\,\sin(8\,x)}{8} + \frac{\cos(8\,x)}{64}\Big|_0^\pi = \frac{\pi\,\sin(8\,\pi)}{8} + \frac{\cos(8\,\pi)}{64} - \frac{0\cdot\sin(0)}{8} - \frac{\cos(0)}{64} = 0\,,$$

dato che $\sin(8\,\pi) = 0$ e che $\cos(8\,\pi) = 1$.

2C)

$$\int_0^{10} \mathrm{e}^{9\,x}\, dx = \frac{\mathrm{e}^{90} - 1}{9}\,.$$

Vero: Dato che

$$\int \mathrm{e}^{9\,x}\, dx = \frac{\mathrm{e}^{9\,x}}{9} + c\,,$$

si ha

$$\int_0^{10} \mathrm{e}^{9\,x}\, dx = \frac{\mathrm{e}^{9\,x}}{9}\Big|_0^{10} = \frac{\mathrm{e}^{90} - 1}{9}\,.$$

2D)

$$\int_0^1 \frac{9\,x^2 + 6\,x}{6 + x^2 + x^3}\, dx = 3\,\log\left(\frac{3}{4}\right).$$

Falso: Si ha

$$\frac{9\,x^2 + 6\,x}{6 + x^2 + x^3} = 3\,\frac{3x^3 + 2x}{6 + x^2 + x^3} = 3\,\frac{(6 + x^2 + x^3)'}{6 + x^2 + x^3}\,.$$

Pertanto,

$$\int_0^1 \frac{9\,x^2 + 6\,x}{6 + x^2 + x^3}\, dx = 3\,\log(|6 + x^2 + x^3|)\Big|_0^1 = 3\,(\log(8) - \log(6)) = 3\,\log\left(\frac{4}{3}\right) \neq 3\,\log\left(\frac{3}{4}\right).$$

Alternativamente, si poteva osservare che, essendo la funzione integranda positiva su $[0, 1]$, l'integrale non poteva essere negativo.

---

3) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

3A)

$$\int_{-7}^{7} [x\, \mathrm{e}^{7\,x^4} + x\,|x|^7]\, dx \neq 0\,.$$

Falso: Dato che la funzione integranda è dispari, e che l'intervallo di integrazione è simmetrico rispetto all'origine, l'integrale vale zero.

3B)

$$\int_{-8}^{8} [4\,\cos^2(x) + 3\,x^{10}]\, dx = 0\,.$$

Falso: L'integrale è positivo perché la funzione integranda è positiva.

3C)

$$\int_{-9}^{8} [x^3 + \sin(6\,x)]\, dx < 0\,.$$

Vero: Dato che la funzione è dispari, il suo integrale sull'intervallo $[-8, 8]$ è nullo. Pertanto,

$$\int_{-9}^{8} [x^3 + \sin(6\,x)]\, dx = \int_{-9}^{-8} [x^3 + \sin(6\,x)]\, dx\,.$$

Quest'ultimo integrale è negativo perché la funzione integranda è negativa. Infatti, su tutto l'intervallo si ha

$$x^3 + \sin(6\,x) \leq -8^3 + 1 < -8 + 1 = -7 < 0\,.$$

3D)

$$\int_{-3}^{5} [\mathrm{e}^{5\,x^2} - \cos^2(2\,x)]\, dx < 0\,.$$

Falso: Dato che si ha, sull'intervallo $[-3, 5]$,

$$\mathrm{e}^{5\,x^2} - \cos^2(2\,x) \geq \mathrm{e}^0 - 1 = 0\,,$$

la funzione integranda è positiva e quindi l'integrale è positivo.

---

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

4A)

$$\int_5^6 \frac{dx}{x-4} = 5 \int_9^{14} \frac{dx}{x-4}\,.$$

Falso: Si ha

$$\int \frac{dx}{x-4} = \log(|x-4|) + c\,.$$

Pertanto,

$$\int_5^6 \frac{dx}{x-4} = \log(|x-4|)\Big|_5^6 = \log(2) - \log(1) = \log(2)\,,$$

e

$$\int_9^{14} \frac{dx}{x-4} = \log(|x-4|)\Big|_9^{14} = \log(10) - \log(5) = \log(2)\,,$$

e quindi i due integrali sono uguali.

4B)

$$\int_0^4 \frac{dx}{(5\,x-40)^2} = \frac{1}{8}\,.$$

Falso: Si ha

$$\int \frac{dx}{(5\,x-40)^2} = \frac{1}{25} \int \frac{dx}{(x-8)^2} = \frac{1}{25}\,\frac{1}{8-x} + c\,.$$

Pertanto,

$$\int_0^4 \frac{dx}{(5\,x-40)^2} = \frac{1}{25}\Big(\frac{1}{8-4} - \frac{1}{8}\Big) = \frac{1}{25}\cdot\frac{1}{8} = \frac{1}{200} \neq \frac{1}{8}\,.$$

4C)

$$\int_8^9 \frac{dx}{x^2-13x+42} = \log\Big(\frac{4}{3}\Big)\,.$$

Vero: Si ha

$$x^2 - 13x + 42 = (x-7)\,(x-6)\,,$$

e quindi

$$\int \frac{dx}{x^2-13x+42} = \frac{1}{7-6}\,\log\Big(\Big|\frac{x-7}{x-6}\Big|\Big) + c = \log\Big(\Big|\frac{x-7}{x-6}\Big|\Big) + c\,.$$

Pertanto,

$$\int_8^9 \frac{dx}{x^2-13x+42} = \log\Big(\Big|\frac{x-7}{x-6}\Big|\Big)\Big|_8^9 = \log\Big(\frac{2}{3}\Big) - \log\Big(\frac{1}{2}\Big) = \log\Big(\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{1}\Big) = \log\Big(\frac{4}{3}\Big)\,.$$

4D)

$$\int_5^7 \frac{dx}{x^2-10x+29} = \frac{\pi}{4}\,.$$

Falso: Si ha

$$x^2 - 10x + 29 = (x^2 - 10\,x + 25) + 4 = (x-5)^2 + 4 = 4\Big[\Big(\frac{x-5}{2}\Big)^2 + 1\Big]\,.$$

Pertanto,

$$\int \frac{dx}{x^2-10x+29} = \frac{1}{4} \int \frac{dx}{1+\big(\frac{x-5}{2}\big)^2}\,.$$

Con la sostituzione $y = \frac{x-5}{2}$, da cui $dx = 2\,dy$, si ha

$$\int \frac{dx}{x^2-10x+29} = \frac{1}{2}\int \frac{dy}{1+y^2} = \frac{1}{2}\,\arctan(y) + c = \frac{1}{2}\,\arctan\left(\frac{x-5}{2}\right) + c\,.$$

Pertanto,

$$\int_5^7 \frac{dx}{x^2-10x+29} = \frac{1}{2}\,\arctan\left(\frac{x-5}{2}\right)\Big|_5^7 = \frac{1}{2}\,(\arctan(1) - \arctan(0)) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8} \neq \frac{\pi}{4}\,.$$

5) Determinare una primitiva delle funzioni $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ e $k(x)$, e calcolare gli integrali.

$$\textbf{a)}\ f(x) = x^2\,\log(x)\,, \quad \int_1^{e^3} f(x)\,dx\,, \qquad \textbf{b)}\ g(x) = x^2\,\cos(7\,x^3)\,, \quad \int_0^{\sqrt[3]{5\,\pi}} g(x)\,dx\,,$$

$$\textbf{c)}\ h(x) = (2x^2 - 22x + 60)\,e^{2\,x}\,, \quad \int_5^7 h(x)\,dx\,, \qquad \textbf{d)}\ k(x) = \frac{12\,x}{1 + 36\,x^4}\,, \quad \int_0^{1/\sqrt{6}} k(x)\,dx\,.$$

Soluzione:

a) Integriamo per parti, derivando $\log(x)$ e integrando x^2. Si ha

$$\int x^2\,\log(x)\,dx = \frac{x^3\,\log(x)}{3} - \int \frac{x^3}{3}\,\frac{1}{x}\,dx = \frac{x^3\,\log(x)}{3} - \frac{x^3}{9} + c = \frac{x^3}{9}(3\,\log(x) - 1) + c\,.$$

Pertanto,

$$\int_1^{e^3} f(x)\,dx = \frac{x^3}{9}(3\,\log(x) - 1)\Big|_1^{e^3} = \frac{e^9}{9}\,(3\,\log(e^3) - 1) + \frac{1}{9} = \frac{8}{9}\,e^9 + \frac{1}{9}\,.$$

b) Si ha, con la sostituzione $y = 7\,x^3$, da cui $x^2\,dx = dy/21$,

$$\int x^2\,\cos(7\,x^3)\,dx = \frac{1}{21}\int \cos(y)\,dy = \frac{\sin(y)}{21} + c = \frac{\sin(7\,x^3)}{21} + c\,.$$

Pertanto,

$$\int_0^{\sqrt[3]{5\,\pi}} g(x)\,dx = \frac{\sin(7\,x^3)}{21}\Big|_0^{\sqrt[3]{5\,\pi}} = \frac{\sin(35\,\pi) - \sin(0)}{21} = 0\,.$$

c) Ricordiamo che se $P_2(x)$ è un polinomio di grado 2, allora

$$\int P_2(x)\,e^{2\,x}\,dx = Q_2(x)\,e^{2\,x} + c\,,$$

dove $Q_2(x)$ è un polinomio di grado 2 tale che

$$2\,Q_2(x) + Q_2'(x) = P_2(x)\,.$$

Scrivendo il generico polinomio di grado 2 come $Q_2(x) = a\,x^2 + b\,x + c$, si ha

$$2\,Q_2(x) + Q_2'(x) = 2\,a\,x^2 + (2\,b + 2a)\,x + 2\,c + b\,.$$

Imponendo l'uguaglianza

$$2\,a\,x^2 + (2\,b + 2a)\,x + 2\,c + b = 2x^2 - 22x + 60\,,$$

si ha che deve essere $2\,a = 2$, $2\,b + 2a = -22$ e $2\,c + b = 60$. Risolvendo il sistema, si trova $a = 1$, $b = -12$ e $c = 36$. Pertanto,

$$\int (2x^2 - 22x + 60)\,e^{2\,x}\,dx = (x^2 - 12\,x + 36)\,e^{2\,x} = (x - 6)^2\,e^{2\,x} + c\,,$$

e quindi

$$\int_5^7 h(x)\,dx = (x - 6)^2\,e^{2\,x}\Big|_5^7 = e^{14} - e^{10}\,.$$

d) Si ha, con la sostituzione $y = 6\,x^2$, da cui $36\,x^4 = y^2$ e $dy = 12\,x\,dx$,

$$\int \frac{12\,x}{1 + 36\,x^4}\,dx = \int \frac{dy}{1 + y^2} = \arctan(y) + c = \arctan(6\,x^2) + c\,.$$

Pertanto,

$$\int_0^{1/\sqrt{6}} k(x)\,dx = \arctan(6\,x^2)\Big|_0^{1/\sqrt{6}} = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4}\,.$$

6) Sia

$$F(t) = \int_6^t [3\,e^{x^2} + \arctan(5\,|x|)]\,dx\,.$$

a) Dimostrare che $F(t)$ è derivabile per ogni t in $\mathbb{R}$.
b) Calcolare $F(6)$ e $F'(0)$.
c) Dimostrare che $F(t)$ è crescente, e non è né pari né dispari.
d) Dimostrare che

$$\lim_{t\to+\infty} F(t) = +\infty\,.$$

Soluzione:
a) Dato che la funzione $f(x) = 3\,e^{x^2} + \arctan(5\,|x|)$ è una funzione continua, per il teorema fondamentale del calcolo integrale la funzione $F(t)$ è derivabile per ogni t in $\mathbb{R}$, e si ha

$$F'(t) = f(t) = 3\,e^{t^2} + \arctan(5\,|t|)\,, \qquad \forall t \in \mathbb{R}\,. \tag{1}$$

b) Si ha

$$F(6) = \int_6^6 [3\,e^{x^2} + \arctan(5\,|x|)]\,dx = 0\,,$$

e, dalla (1),

$$F'(0) = f(0) = 3\,.$$

c) Sempre dalla (1) si ha

$$F'(t) \geq 7 > 0\,,$$

e quindi $F(t)$ è strettamente crescente. Per quanto riguarda la parità e disparità, osserviamo che si ha

$$F(6) = 0\,.$$

Inoltre, dato che $F(t)$ è strettamente crescente, si ha

$$F(-6) < F(6) = 0\,,$$

e quindi $F(-6) \neq F(6)$ (cosicché $F(t)$ non è pari), e $F(-6) \neq -F(6)$ (cosicché $F(t)$ non è dispari).

d) Osserviamo innanzitutto che il limite di $F(t)$ esiste perché $F(t)$ è crescente. Inoltre, dato che

$$3\,e^{x^2} + \arctan(5\,|x|) \geq 3\,,$$

si ha, se $t \geq 6$,

$$F(t) = \int_6^t [3\,e^{x^2} + \arctan(5\,|x|)]\,dx \geq \int_6^t 3\,dx = 3\,(t-6)\,,$$

da cui segue che

$$\lim_{t\to+\infty} F(t) \geq \lim_{t\to+\infty} 3\,(t-6) = +\infty\,.$$