



Calcolo integrale — Compito di pre-esonero
23 Maggio 2023 — Compito n. 00062

Istruzioni: le prime due caselle (**V** / **F**) permettono di selezionare la risposta vero/falso. La casella “**C**” serve a correggere eventuali errori invertendo la risposta data. Per selezionare una casella, annerirla completamente: ☐ (non ☐ o ☐).

Nome: _____

Cognome: _____

Matricola:

--	--	--	--	--	--	--

	1A	1B	1C	1D	2A	2B	2C	2D	3A	3B	3C	3D	4A	4B	4C	4D
V	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
F	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
C	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

1) Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(t) = e^{9t} (4 + y^2(t)).$$

1A) L'equazione ha infinite soluzioni.

1B) Esistono infinite soluzioni dell'equazione tali che $y(0) = 2$.

1C) Esiste un'unica soluzione dell'equazione tale che $y(0) = 0$ e $y'(0) = 4$.

1D) Se $y(0) = 5$, la soluzione è decrescente in un intorno dell'origine.

2) Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(t) - 5y'(t) + 3y(t) = 15.$$

2A) Non esistono soluzioni dell'equazione tali che $y(0) = 5$, $y'(0) = 0$ e $y''(0) = 0$.

2B) Se $y(0) = 0$ e $y'(0) = 3$, si ha $y''(0) = 0$.

2C) Non esistono soluzioni dell'equazione tali che $y'(0) = 1$ e $y''(0) = 5$.

2D) Se $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$, la soluzione dell'equazione è convessa in un intorno dell'origine.

3) Si consideri il problema di Cauchy

$$(1) \quad \begin{cases} y'(t) = 4y(t) + e^{4t} + 20, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

3A) Si ha $y'(0) > 0$.

3B) La funzione $y_0(t) = 3e^{4t}$ non è soluzione dell'equazione omogenea associata all'equazione di (1).

3C) La soluzione di (1) è $y(t) = (t + 5)e^{4t} - 5$.

3D) Si ha

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = +\infty.$$

4) Si consideri l'equazione differenziale

$$(1) \quad y''(t) + Ay'(t) + By(t) = 0.$$

4A) Se $A = B = 0$, i polinomi di primo grado non sono soluzioni di (1).

4B) Se $A = -13$ e $B = 40$, la funzione $y(t) = 9e^{5t}$ non è soluzione di (1).

4C) Se $A = -12$ e $B = 36$, la funzione $y(t) = 9te^{6t}$ non è soluzione di (1).

4D) Se $A = 0$ e $B = 9$, esistono soluzioni non nulle di (1) che non sono periodiche.

Docente

- ☐ DelaTorre Pedraza
☐ Orsina

--	--	--	--	--	--	--	--

Cognome

Nome

Matricola

Compito 00062

5) Si consideri l'equazione differenziale

(1)
$$y'(t) = 4(y(t) + 6) \cos(4t).$$

a) Quante soluzioni di (1) verificano la condizione $y(0) = 10$? E quante le condizioni $y(0) = 0$ e $y'(0) = 24$?

b) Determinare la soluzione di (1) tale che $y(6) = -6$.

c) Calcolare $T_2(y(t); 0)$, dove $y(t)$ è la soluzione di (1) tale che $y(0) = 0$.

d) Determinare la soluzione di (1) tale che $y(0) = 0$.

--	--	--	--	--	--	--	--

Cognome**Nome****Matricola****Compito 00062**

6) Si consideri il problema di Cauchy

$$(1) \quad \begin{cases} y''(t) - 14y'(t) + 49y(t) = 196, \\ y(0) = 5, \quad y'(0) = 0. \end{cases}$$

a) Quante soluzioni ha (1)? E quante tali che $y''(0) = 195$?

b) Scrivere tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata all'equazione di (1).

c) Determinare una soluzione particolare dell'equazione di (1), e scrivere tutte le soluzioni dell'equazione di (1).

d) Determinare la soluzione di (1).

Soluzioni del compito 00062

1) Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(t) = e^{9t} (4 + y^2(t)).$$

1A) L'equazione ha infinite soluzioni.

Vero: Essendo un'equazione differenziale ordinaria del primo ordine, l'equazione ha infinite soluzioni dipendenti da un parametro reale.

1B) Esistono infinite soluzioni dell'equazione tali che $y(0) = 2$.

Falso: Assegnando la condizione iniziale $y(0) = 2$, si ottiene un problema di Cauchy per un'equazione differenziale ordinaria del primo ordine, che ha un'unica soluzione.

1C) Esiste un'unica soluzione dell'equazione tale che $y(0) = 0$ e $y'(0) = 4$.

Vero: Se si assegna la condizione $y(0) = 0$, si ottiene un problema di Cauchy per un'equazione differenziale ordinaria del primo ordine, che ha un'unica soluzione. Per tale soluzione si ha

$$y'(0) = e^{9 \cdot 0} (4 + y^2(0)) = 1 \cdot (4 + 0) = 4.$$

Si ha quindi che la condizione $y'(0) = 4$ è automaticamente soddisfatta, e quindi la soluzione esiste ed è unica.

1D) Se $y(0) = 5$, la soluzione è decrescente in un intorno dell'origine.

Falso: Se $y(0) = 5$, si ha

$$y'(0) = e^{9 \cdot 0} (4 + y^2(0)) = 1 \cdot (4 + 25) = 29 > 0.$$

Per il teorema della permanenza del segno, $y'(t) \geq 0$ in un intorno dell'origine, e quindi la soluzione è crescente in tale intorno.

Alternativamente, e prescindendo dalla condizione iniziale, era sufficiente osservare che

$$y'(t) = e^{9t} (4 + y^2(t)) \geq e^{9t} \geq 0,$$

e quindi ogni soluzione dell'equazione è crescente.

2) Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(t) - 5y'(t) + 3y(t) = 15.$$

2A) Non esistono soluzioni dell'equazione tali che $y(0) = 5$, $y'(0) = 0$ e $y''(0) = 0$.

Falso: Se si assegnano le condizioni iniziali $y(0) = 5$ e $y'(0) = 0$, si ottiene un problema di Cauchy per un'equazione differenziale ordinaria del secondo ordine, che ha un'unica soluzione. Per tale soluzione, si ha

$$y''(0) = 15 + 5y'(0) - 3y(0) = 15 + 5 \cdot 0 - 3 \cdot 5 = 15 - 15 = 0,$$

cosicché la condizione $y''(0) = 0$ è automaticamente soddisfatta, e quindi la soluzione esiste ed è unica.

2B) Se $y(0) = 0$ e $y'(0) = 3$, si ha $y''(0) = 0$.

Falso: Con le condizioni iniziali $y(0) = 0$ e $y'(0) = 3$ si ha, per l'unica soluzione del problema,

$$y''(0) = 15 + 5y'(0) - 3y(0) = 15 + 5 \cdot 3 - 3 \cdot 0 = 30 \neq 0.$$

2C) Non esistono soluzioni dell'equazione tali che $y'(0) = 1$ e $y''(0) = 5$.

Falso: Se $y(t)$ è soluzione di (1), sostituendo $t = 0$ nell'equazione si trova

$$y''(0) - 5y'(0) + 3y(0) = 15.$$

Se $y'(0) = 1$ e $y''(0) = 5$, si ha

$$5 - 5 \cdot 1 + 3y(0) = 15,$$

da cui segue $y(0) = 5$. Consideriamo ora l'unica soluzione di (1) tale che $y(0) = 5$ e $y'(0) = 1$. Per tale soluzione si ha, ovviamente, $y''(0) = 5$, e quindi esiste un'unica soluzione dell'equazione tale che $y'(0) = 1$ e $y''(0) = 5$.

2D) Se $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$, la soluzione dell'equazione è convessa in un intorno dell'origine.

Vero: Se $y(0) = y'(0) = 0$ si ha, per l'unica soluzione dell'equazione, che

$$y''(0) = 15 + 5y'(0) - 3y(0) = 15 + 5 \cdot 0 - 3 \cdot 0 = 15 > 0.$$

Per il teorema della permanenza del segno, si ha $y''(t) \geq 0$ in un intorno dell'origine, e quindi $y(t)$ è convessa in tale intorno.

3) Si consideri il problema di Cauchy

$$(1) \quad \begin{cases} y'(t) = 4y(t) + e^{4t} + 20, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Ricordiamo che la soluzione del problema di Cauchy per l'equazione $y'(t) = a(t)y(t) + b(t)$, con la condizione $y(0) = y_0$ è data da

$$(2) \quad y(t) = e^{A(t)} \left[y_0 + \int_0^t b(s) e^{-A(s)} ds \right],$$

dove

$$A(t) = \int_0^t a(s) ds.$$

Nel nostro caso, $a(t) = 4$ e $b(t) = e^{4t} + 20$ e quindi

$$A(t) = \int_0^t 4 ds = 4t.$$

Applicando la (2) con $y_0 = 0$ si ha

$$y(t) = e^{4t} \int_0^t [e^{4s} + 20] e^{-4s} ds = e^{4t} [s - 5e^{-4s}] \Big|_0^t = e^{4t} [t - 5e^{-4t} + 5],$$

e quindi, semplificando,

$$(3) \quad y(t) = (t + 5)e^{4t} - 5.$$

3A) Si ha $y'(0) > 0$.

Vero: Sostituendo la condizione iniziale $y(0) = 0$ nell'equazione, si ha

$$y'(0) = 4y(0) + e^{4 \cdot 0} + 15 = 4 \cdot 0 + 1 + 15 = 16 > 0.$$

3B) La funzione $y_0(t) = 3e^{4t}$ non è soluzione dell'equazione omogenea associata all'equazione di (1).

Falso: L'equazione omogenea associata all'equazione di (1) è

$$y'_0(t) = 4y_0(t),$$

Se $y_0(t) = 3e^{4t}$, si ha

$$y'_0(t) = 12e^{4t} = 4 \cdot (3e^{4t}) = 4y_0(t),$$

e quindi $y_0(t)$ è soluzione dell'equazione omogenea associata.

3C) La soluzione di (1) è $y(t) = (t + 5)e^{4t} - 5$.

Vero: Per la (3), la funzione proposta è l'unica soluzione di (1).

3D) Si ha

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = +\infty.$$

Vero: Dalla (3) segue che

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} [(t + 5)e^{4t} - 5] = +\infty.$$

4) Si consideri l'equazione differenziale

$$(1) \quad y''(t) + A y'(t) + B y(t) = 0.$$

4A) Se $A = B = 0$, i polinomi di primo grado non sono soluzioni di (1).

Falso: Se $A = B = 0$, (1) diventa

$$y''(t) = 0.$$

Se $y(t)$ è un polinomio di primo grado, si ha $y(t) = at + b$ per qualche a e b reali. Pertanto, $y'(t) = a$ e quindi $y''(t) = 0$. Ne segue che i polinomi di grado 1 sono soluzioni di (1).

4B) Se $A = -13$ e $B = 40$, la funzione $y(t) = 9e^{5t}$ non è soluzione di (1).

Falso: Se $A = -13$ e $B = 40$, il polinomio caratteristico associato all'equazione (1) è

$$P(L) = L^2 - 13L + 40,$$

che ha come soluzioni $L_1 = 8$ e $L_2 = 5$. Pertanto, tutte le soluzioni di (1) sono date da

$$y(t) = Ce^{8t} + De^{5t},$$

con C e D numeri reali. Scegliendo $C = 0$ e $D = 9$, si vede che $y(t) = 9e^{5t}$ è soluzione di (1).

4C) Se $A = -12$ e $B = 36$, la funzione $y(t) = 9te^{6t}$ non è soluzione di (1).

Falso: Se $A = -12$ e $B = 36$, il polinomio caratteristico associato all'equazione (1) è

$$P(L) = L^2 - 12L + 36,$$

che ha come soluzioni $L_1 = L_2 = 6$. Pertanto, tutte le soluzioni di (1) sono date da

$$y(t) = (C + Dt)e^{6t},$$

con C e D numeri reali. Scegliendo $C = 0$ e $D = 9$, si vede che $y(t) = 9te^{6t}$ è soluzione di (1).

4D) Se $A = 0$ e $B = 9$, esistono soluzioni non nulle di (1) che non sono periodiche.

Falso: Se $A = 0$ e $B = 9$, il polinomio caratteristico associato all'equazione (1) è

$$P(L) = L^2 + 9,$$

che ha come soluzioni $L_{1,2} = \pm 3i$. Pertanto, tutte le soluzioni di (1) sono date da

$$y(t) = C \cos(3t) + D \sin(3t),$$

con C e D numeri reali, e sono quindi periodiche (di periodo $T = \frac{2\pi}{3}$).

5) Si consideri l'equazione differenziale

$$(1) \quad y'(t) = 4(y(t) + 6) \cos(4t).$$

a) Quante soluzioni di (1) verificano la condizione $y(0) = 10$? E quante le condizioni $y(0) = 0$ e $y'(0) = 24$?

b) Determinare la soluzione di (1) tale che $y(6) = -6$.

c) Calcolare $T_2(y(t); 0)$, dove $y(t)$ è la soluzione di (1) tale che $y(0) = 0$.

d) Determinare la soluzione di (1) tale che $y(0) = 0$.

Soluzione:

Osserviamo preliminarmente che l'equazione (1) è a variabili separabili, essendo della forma

$$y'(t) = f(t) g(y(t)),$$

con

$$(2) \quad f(t) = 4 \cos(4t), \quad g(s) = s + 6.$$

a) Assegnando ad (1) la condizione iniziale $y(0) = 10$ si ottiene un problema di Cauchy per un'equazione differenziale del primo ordine, che ha un'unica soluzione. Analogamente, esiste un'unica soluzione di (1) tale che $y(0) = 0$; per tale soluzione si ha, sostituendo $t = 0$,

$$y'(0) = 4(y(0) + 6) \cos(4 \cdot 0) = 4 \cdot 6 \cdot 1 = 24,$$

cosicché la condizione $y'(0) = 24$ è automaticamente soddisfatta dall'unica soluzione di (1) tale che $y(0) = 0$. Ne segue pertanto che esiste un'unica soluzione di (1) tale che $y(0) = 0$ e $y'(0) = 24$.

b) Dato che la funzione $g(s)$ in (2) è tale che $g(-6) = -6 + 6 = 0$, la funzione $y(t) = -6$ è una soluzione costante di (1). Dato che soddisfa la condizione $y(6) = -6$, è la soluzione di (1) tale che $y(6) = -6$ (essendo tale soluzione unica).

c) Se $y(0) = 0$ abbiamo, sostituendo nell'equazione $t = 0$,

$$y'(0) = 4(y(0) + 6) \cos(4 \cdot 0) = 4 \cdot 6 \cdot 1 = 24.$$

Derivando l'equazione, si ha poi

$$y''(t) = 4 y'(t) \cos(4t) - 16(y(t) + 6) \sin(4t).$$

Calcolando questa espressione in $t = 0$, si ha

$$y''(0) = 4 y'(0) \cos(4 \cdot 0) - 16(y(0) + 6) \sin(4 \cdot 0) = 4 \cdot 24 \cdot 1 - 16 \cdot 6 \cdot 0 = 96.$$

Si ha quindi

$$T_2(y(t); 0) = y(0) + y'(0)t + \frac{y''(0)}{2}t^2 = 0 + 24t + \frac{96}{2}t^2 = 24t + 48t^2.$$

d) Dato che l'equazione è a variabili separabili, e che $y(t) \equiv y(0) = 0$ non è soluzione dell'equazione (come si verifica facilmente), dividiamo per $y(t) + 6$, ottenendo l'equazione equivalente

$$\frac{y'(t)}{y(t) + 6} = 4 \cos(4t).$$

Integrando tra 0 e s , si ha

$$\int_0^s \frac{y'(t)}{y(t) + 6} dt = \int_0^s 4 \cos(4t) dt = \sin(4t) \Big|_0^s = \sin(4s).$$

Per quanto riguarda il primo integrale, con la sostituzione $z = y(t)$, da cui $y'(t) dt = dz$, si ha (ricordando che $y(0) = 0$)

$$\int_0^s \frac{y'(t)}{y(t) + 6} dt = \int_{y(0)}^{y(s)} \frac{dz}{z + 6} = \log(|z + 6|) \Big|_0^{y(s)} = \log(|y(s) + 6|) - \log(6) = \log\left(\frac{y(s) + 6}{6}\right),$$

dove nell'ultimo passaggio si è usato il fatto che $y(s) + 6 \geq 0$ in un intorno di $t = 0$ dato che $y(0) + 6 = 0 + 6 = 6 > 0$. Si ha quindi che la soluzione di (1) tale che $y(0) = 0$ verifica l'identità

$$\log \left(\frac{y(s) + 6}{6} \right) = \sin(4s),$$

da cui segue che

$$\frac{y(s) + 6}{6} = e^{4s},$$

e quindi che

$$y(s) = 6e^{\sin(4s)} - 6.$$

Si noti che l'equazione (1) può essere riscritta nella forma

$$y'(t) = 4 \cos(4t) y(t) + 24 \cos(4t),$$

e quindi è anche della forma

$$y'(t) = a(t) y(t) + b(t),$$

con

$$a(t) = 4 \cos(4t), \quad b(t) = 24 \cos(4t).$$

Per tale equazione, assegnando la condizione $y(0) = 0$, si ha la formula risolutiva

$$(3) \quad y(t) = e^{A(t)} \left(\int_0^t b(s) e^{-A(s)} ds \right),$$

dove

$$A(t) = \int_0^t a(s) ds = \int_0^t 4 \cos(4s) ds = \sin(4s) \Big|_0^t = \sin(4t).$$

Pertanto, dalla (3) si ha che

$$y(t) = e^{\sin(4t)} \left(24 \int_0^t \cos(4s) e^{-\sin(4s)} ds \right).$$

Per calcolare l'ultimo integrale, poniamo $z = \sin(4s)$, da cui $dz = 4 \cos(4s) ds$. Si ha quindi

$$24 \int_0^t \cos(4s) e^{-\sin(4s)} ds = 6 \int_0^{\sin(4t)} e^{-z} dz = 6 (1 - e^{-\sin(4t)}),$$

cosicché la soluzione di (1) tale che $y(0) = 0$ è data da

$$y(t) = 6e^{\sin(4t)} (1 - e^{-\sin(4t)}) = 6e^{\sin(4t)} - 6,$$

come trovato in precedenza.

6) Si consideri il problema di Cauchy

$$(1) \quad \begin{cases} y''(t) - 14y'(t) + 49y(t) = 196, \\ y(0) = 5, \quad y'(0) = 0. \end{cases}$$

a) Quante soluzioni ha (1)? E quante tali che $y''(0) = 195$?

b) Scrivere tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata all'equazione di (1).

c) Determinare una soluzione particolare dell'equazione di (1), e scrivere tutte le soluzioni dell'equazione di (1).

d) Determinare la soluzione di (1).

Soluzione:

a) Il problema di Cauchy (1) ha un'unica soluzione. Se $y(t)$ è tale soluzione, si ha, sostituendo $t = 0$ nell'equazione, che

$$y''(0) = y''(0) - 14 \cdot 0 + 49 \cdot 0 = y''(0) - 14y'(0) + 49y(0) = 196.$$

Pertanto, per tale soluzione si ha $y''(0) = 196 \neq 195$, e quindi non esistono soluzioni di (1) tali che $y''(0) = 195$.

b) L'equazione omogenea associata all'equazione di (1) è

$$y_0''(t) - 14y_0'(t) + 49y_0(t) = 0,$$

il cui polinomio caratteristico è

$$P(L) = L^2 - 14L + 49,$$

che ha come soluzioni $L_{1,2} = 7$. Ne segue pertanto che tutte le soluzioni di (2) sono date da

$$y_0(t) = (C + Dt)e^{7t},$$

con C e D numeri reali.

c) Dato che le funzioni costanti non sono soluzioni dell'equazione omogenea, cerchiamo una soluzione particolare dell'equazione di (1) nella forma $\bar{y}(t) = Q$, con Q numero reale. Sostituendo, e dato che $\bar{y}'(t) = \bar{y}''(t) = 0$, si ha che deve essere

$$\bar{y}''(t) - 14\bar{y}'(t) + 49\bar{y}(t) = 49Q = 196,$$

da cui segue $Q = 4$. Ne segue che tutte le soluzioni dell'equazione di (1) sono date da

$$(2) \quad y(t) = y_0(t) + \bar{y}(t) = (C + Dt)e^{7t} + 4.$$

d) Se $y(t)$ è data da (2), si ha, derivando,

$$y'(t) = D e^{7t} + 7(C + Dt)e^{7t}.$$

Pertanto,

$$y(0) = C + 4, \quad y'(0) = D + 7C.$$

Imponendo le condizioni $y(0) = 5$ e $y'(0) = 0$, si ha

$$C = 1, \quad D = -7C = -7,$$

e quindi l'unica soluzione di (1) è data da

$$y(t) = (1 - 7t)e^{7t} + 4.$$