



Calcolo integrale — Scheda di esercizi n. 7  
12 Maggio 2023 — Compito n. 00058

**Istruzioni:** le prime due caselle (**V** / **F**) permettono di selezionare la risposta vero/falso. La casella "**C**" serve a correggere eventuali errori invertendo la risposta data. Per selezionare una casella, annerirla completamente: ☐ (non ☐ o ☐).

Nome: \_\_\_\_\_

Cognome: \_\_\_\_\_

Matricola:

--	--	--	--	--	--	--

	1A	1B	1C	1D	2A	2B	2C	2D	3A	3B	3C	3D	4A	4B	4C	4D
V	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
F	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
C	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

1) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

1A) L'equazione differenziale

$$y'(t) = 10t + 9t^2$$

è del primo ordine.

1B) L'equazione differenziale

$$5y'(t)y''(t) + 8[y(t)]^3 = 0$$

è del terzo ordine.

1C) L'equazione differenziale

$$[\sin(2y'(t))]' = 0$$

è del primo ordine.

1D) L'equazione differenziale

$$8ty^{(1)}(t) + 7t^2y^{(2)}(t) + 6t^3y^{(3)}(t) = 0$$

è del terzo ordine.

2) Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(t) = 4y(t) + 5.$$

2A) L'equazione ha infinite soluzioni.

2B) Esiste un'unica soluzione dell'equazione tale che  $y(0) = 3$ .

2C) Non esistono soluzioni dell'equazione tali che  $y(0) = 3$  e  $y'(0) = 12$ .

2D) Esiste un'unica soluzione dell'equazione tale che  $y(0) = 3$  e  $y'(0) = 17$ .

3) Si consideri il problema di Cauchy

$$(1) \quad \begin{cases} y'(t) = e^{4t^2}, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

3A) Esiste un'unica soluzione di (1).

3B) La soluzione si può scrivere esplicitamente in termini di funzioni elementari.

3C) Si ha  $y'(0) = 4$ .

3D) Si ha  $y''(0) = 8$ .

4) Si consideri il problema di Cauchy

$$(1) \quad \begin{cases} y'(t) = -5y(t) + 10, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

4A) La funzione  $Qe^{-5t}$  è soluzione dell'equazione omogenea associata all'equazione di (1) per ogni  $Q$  in  $\mathbb{R}$ .

4B) L'equazione di (1) ha come soluzione

$$y(t) = 2.$$

4C) Si ha  $y''(0) = -50$ .

4D) Si ha

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 2.$$

Docente

- ☐ DelaTorre Pedraza  
☐ Orsina

--	--	--	--	--	--	--	--

Cognome

Nome

Matricola

Compito 00058

---

5) Si consideri l'equazione differenziale del primo ordine

(1)  $y'(t) = f(t).$

Scrivere tutte le soluzioni di (1) se

a)  $f(t) = 4t + 2$ ,   b)  $f(t) = \cos(2t)$ ,   c)  $f(t) = (2t + 3)e^t$ ,   d)  $f(t) = \frac{7t}{1 + 7t^2}.$

---

--	--	--	--	--	--	--	--

Cognome

Nome

Matricola

Compito 00058

---

6) Si consideri il problema di Cauchy

(1) 
$$\begin{cases} y'(t) = 4y(t) - 3, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

- a) Quante soluzioni ha l'equazione di (1)? E quante soluzioni ha (1)?  
b) Scrivere l'equazione omogenea associata all'equazione di (1), e scriverne tutte le soluzioni.  
c) Trovare una soluzione particolare dell'equazione di (1).  
d) Scrivere tutte le soluzioni dell'equazione di (1) e la soluzione di (1).
-

## Soluzioni del compito 00058

1) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

---

Ricordiamo che un'equazione differenziale si dice di ordine  $n \geq 1$  se la derivata di ordine massimo della funzione incognita  $y(t)$  è la derivata  $y^{(n)}(t)$ .

---

1A) L'equazione differenziale

$$y'(t) = 10t + 9t^2$$

è del primo ordine.

**Vero:** Infatti vi compare la derivata prima di  $y(t)$ , e non derivate di ordine superiore.

---

1B) L'equazione differenziale

$$5y'(t)y''(t) + 8[y(t)]^3 = 0$$

è del terzo ordine.

**Falso:** Infatti vi compare la derivata seconda di  $y(t)$ , e non derivate di ordine superiore.

---

1C) L'equazione differenziale

$$[\sin(2y'(t))]' = 0$$

è del primo ordine.

**Falso:** Infatti, derivando si ha

$$2 \cos(2y'(t))y''(t) = 0,$$

e quindi l'equazione è del secondo ordine.

---

1D) L'equazione differenziale

$$8ty^{(1)}(t) + 7t^2y^{(2)}(t) + 6t^3y^{(3)}(t) = 0$$

è del terzo ordine.

**Vero:** Infatti vi compare la derivata terza di  $y(t)$ , e non derivate di ordine superiore.

---

2) Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(t) = 4y(t) + 5.$$

---

**2A)** L'equazione ha infinite soluzioni.

**Vero:** Essendo un'equazione del primo ordine, ha infinite soluzioni, dipendenti da un'unica costante reale.

---

**2B)** Esiste un'unica soluzione dell'equazione tale che  $y(0) = 3$ .

**Vero:** Assegnando la condizione iniziale  $y(0) = 3$  si ottiene un problema di Cauchy, che ha un'unica soluzione.

---

**2C)** Non esistono soluzioni dell'equazione tali che  $y(0) = 3$  e  $y'(0) = 12$ .

**Vero:** Se  $y'(0) = 3$ , sostituendo nell'equazione si ha

$$y'(0) = 4y(0) + 5 = 4 \cdot 3 + 5 = 17 \neq 12,$$

e quindi non esiste alcuna soluzione dell'equazione che verifica le due condizioni assegnate.

---

**2D)** Esiste un'unica soluzione dell'equazione tale che  $y(0) = 3$  e  $y'(0) = 17$ .

**Vero:** Sappiamo già che esiste un'unica soluzione dell'equazione tale che  $y(0) = 3$  (si veda la domanda **2B**). Dall'equazione, scritta per  $t = 0$ , si ricava

$$y'(0) = 4y(0) + 5 = 4 \cdot 3 + 5 = 17,$$

e quindi la seconda condizione è automaticamente verificata.

---

**3)** Si consideri il problema di Cauchy

$$(1) \quad \begin{cases} y'(t) = e^{4t^2}, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

---

Integrando tra 0 e  $s$  si ha, per il Teorema fondamentale del calcolo integrale:

$$y(s) - y(0) = \int_0^s y'(t) dt = \int_0^s e^{4t^2} dt,$$

da cui, ricordando che  $y(0) = 0$ , segue che l'unica soluzione del problema di Cauchy è data da:

$$(2) \quad y(s) = \int_0^s e^{4t^2} dt.$$

---

**3A)** Esiste un'unica soluzione di (1).

**Vero:** Trattandosi di un problema di Cauchy, esiste un'unica soluzione (si veda anche (2)).

---

**3B)** La soluzione si può scrivere esplicitamente in termini di funzioni elementari.

**Falso:** La soluzione è data da (2), e l'integrale non si sa calcolare esplicitamente.

---

**3C)** Si ha  $y'(0) = 4$ .

**Falso:** Sostituendo  $t = 0$  nell'equazione si trova

$$y'(0) = e^{4 \cdot 0^2} = 1 \neq 4.$$

---

**3D)** Si ha  $y''(0) = 8$ .

**Falso:** Derivando l'equazione si ha

$$y''(t) = [y'(t)]' = [e^{4t^2}]' = 8t e^{4t^2},$$

da cui segue che

$$y''(0) = 8 \cdot 0 \cdot e^{4 \cdot 0^2} = 0 \neq 8.$$

---

4) Si consideri il problema di Cauchy

$$(1) \quad \begin{cases} y'(t) = -5y(t) + 10, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

---

L'equazione omogenea associata all'equazione di (1) è

$$(2) \quad y'(t) = -5y(t).$$

---

**4A)** La funzione  $Qe^{-5t}$  è soluzione dell'equazione omogenea associata all'equazione di (1) per ogni  $Q$  in  $\mathbb{R}$ .

**Vero:** Se  $y(t) = Qe^{-5t}$ , allora

$$y'(t) = -Q \cdot 5e^{-5t} = -5 \cdot [Qe^{-5t}] = -5y(t),$$

e quindi la funzione proposta risolve la (2), ovvero l'equazione omogenea associata all'equazione di (1).

---

**4B)** L'equazione di (1) ha come soluzione

$$y(t) = 2.$$

**Vero:** Basta sostituire...

---

**4C)** Si ha  $y''(0) = -50$ .

**Vero:** Iniziamo con l'osservare che dall'equazione, e dalla condizione iniziale, segue che

$$y'(0) = -5y(0) + 10 = -5 \cdot 0 + 10 = 10.$$

Inoltre, derivando l'equazione si ha

$$y''(t) = -5y'(t),$$

e quindi

$$y''(0) = -5y'(0) = -5 \cdot 10 = -50.$$

---

**4D)** Si ha

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 2.$$

**Vero:** Sappiamo, dalle domande **4A** e **4B** che  $y_0(t) = Qe^{-5t}$  è soluzione dell'equazione omogenea associata (qualsiasi sia  $Q$  numero reale) e che  $\bar{y}(t) = 2$  è soluzione (particolare) dell'equazione. Per la teoria generale delle equazioni lineari, le funzioni della forma

$$y(t) = y_0(t) + \bar{y}(t) = Qe^{-5t} + 2$$

sono tutte e sole le soluzioni dell'equazione di (1). Assegnando la condizione iniziale, si trova

$$0 = y(0) = Q + 2,$$

da cui  $Q = -2$ . Ne segue che

$$y(t) = -2e^{-5t} + 2 = 2(1 - e^{-5t})$$

è l'unica soluzione del problema di Cauchy (1), ed è tale che

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} 2(1 - e^{-5t}) = 2.$$

---

5) Si consideri l'equazione differenziale del primo ordine

$$(1) \quad y'(t) = f(t).$$

Scrivere tutte le soluzioni di (1) se

$$\mathbf{a)} \ f(t) = 4t + 2, \quad \mathbf{b)} \ f(t) = \cos(2t), \quad \mathbf{c)} \ f(t) = (2t + 3)e^t, \quad \mathbf{d)} \ f(t) = \frac{7t}{1 + 7t^2}.$$

---

**Soluzione:**

L'equazione differenziale  $y'(t) = f(t)$  si può riformulare così: “la funzione  $y(t)$  è una primitiva di  $f(t)$ .” Pertanto, trovare tutte le soluzioni di (1) è equivalente a trovare tutte le primitive di  $f(t)$ , ovvero — come è noto... — è equivalente ad integrare  $f(t)$ .

**a)** Dato che

$$\int [4t + 2] dt = 2t^2 + 2t,$$

si ha che tutte le soluzioni di (1) sono date da

$$y(t) = 2t^2 + 2t + c,$$

con  $c$  costante arbitraria.

**b)** Dato che

$$\int \cos(2t) dt = \frac{\sin(2t)}{2},$$

si ha che tutte le soluzioni di (1) sono date da

$$y(t) = \frac{\sin(2t)}{2} + c,$$

con  $c$  costante arbitraria.

**c)** Dato che, integrando per parti,

$$\int (2t + 3)e^t dt = (2t + 3)e^t - \int 2e^t dt = (2t + 1)e^t,$$

si ha che tutte le soluzioni di (1) sono date da

$$y(t) = (2t + 1)e^t + c,$$

con  $c$  costante arbitraria.

**d)** Dato che

$$\int \frac{7t}{1 + 7t^2} dt = \frac{1}{2} \int \frac{14t dt}{1 + 7t^2} = \frac{1}{2} \ln(1 + 7t^2),$$

si ha che tutte le soluzioni di (1) sono date da

$$y(t) = \frac{1}{2} \ln(1 + 7t^2) + c,$$

con  $c$  costante arbitraria.



6) Si consideri il problema di Cauchy

$$(1) \quad \begin{cases} y'(t) = 4y(t) - 3, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

a) Quante soluzioni ha l'equazione di (1)? E quante soluzioni ha (1)?

b) Scrivere l'equazione omogenea associata all'equazione di (1), e scriverne tutte le soluzioni.

c) Trovare una soluzione particolare dell'equazione di (1).

d) Scrivere tutte le soluzioni dell'equazione di (1) e la soluzione di (1).

---

**Soluzione:**

a) L'equazione di (1) ha infinite soluzioni (dipendenti da un parametro reale), mentre il problema di Cauchy (1) ha un'unica soluzione.

b) L'equazione omogenea associata all'equazione di (1) è

$$y_0'(t) = 4y_0(t),$$

le cui soluzioni sono date (per quanto visto a lezione) da

$$y_0(t) = A e^{4t},$$

con  $A$  costante reale arbitraria.

c) Per trovare una soluzione particolare dell'equazione di (1), cerchiamo

$$\bar{y}(t) = C,$$

con  $C$  costante reale. Sostituendo, si ha che deve essere

$$0 = 4C - 3,$$

da cui segue  $C = \frac{3}{4}$ .

d) Per quanto visto a lezione, tutte le soluzioni dell'equazione di (1) sono date da

$$y(t) = y_0(t) + \bar{y}(t) = A e^{4t} + \frac{3}{4},$$

con  $A$  costante reale arbitraria. Assegnando la condizione iniziale, si ha che deve essere

$$0 = A e^{4 \cdot 0} + \frac{3}{4} = A + \frac{3}{4},$$

da cui segue che  $A = -\frac{3}{4}$  e quindi l'unica soluzione di (1) è data da

$$y(t) = -\frac{3}{4} e^{4t} + \frac{3}{4} = \frac{3}{4} [1 - e^{4t}].$$