



Calcolo integrale — Compito di pre-esonero
17 Marzo 2023 — Compito n. 00104

Istruzioni: le prime due caselle (**V** / **F**) permettono di selezionare la risposta vero/falso. La casella “**C**” serve a correggere eventuali errori invertendo la risposta data. Per selezionare una casella, annerirla completamente: ☐ (non ☐ o ☐).

Nome: _____

Cognome: _____

Matricola:

--	--	--	--	--	--	--

Punteggi: 1 punto per ogni risposta esatta, 0 punti per risposte sbagliate o lasciate in bianco.

	1A	1B	1C	1D	2A	2B	2C	2D	3A	3B	3C	3D	4A	4B	4C	4D
V	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
F	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
C	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

1) Sia $a_k \geq 0$ una successione tale che

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k \quad \text{è convergente.}$$

1A) La successione $\frac{a_k}{a_k+5}$ tende a zero.

1B) La serie di termine generico $\sin(7a_k)$ è convergente.

1C) La serie di termine generico $\frac{\cos(a_k)}{k^2}$ è convergente.

1D) La serie di termine generico $k^5 a_k$ può divergere.

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false

2A)

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (e^{\frac{8}{k}} - 1)^3 \quad \text{converge.}$$

2B)

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4^k k^4}{k!} \quad \text{converge.}$$

2C)

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt[10]{k}} \quad \text{converge.}$$

2D)

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{15k}}{k^4} \quad \text{converge assolutamente.}$$

3) Sia $f(x) = \cos(6x)$.

3A) Il raggio di convergenza della serie di Taylor di $f(x)$ è finito.

3B) Il coefficiente del termine di grado 2 della serie di Taylor di $f(x)$ è uguale a zero.

3C) Se $g(x) = x^8 f(x)$, si ha $g^{(9)}(0) = 8!$.

3D) Si ha $f^{(8)}(0) = 8! \cdot 6^8$.

4) Si consideri la serie di potenze

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{9^k} (x-4)^k.$$

4A) Il centro della serie è $x_0 = 4$.

4B) Se $a_k = 4$ per ogni k , il raggio di convergenza delle serie è $R = 9$.

4C) Se $a_k = 8^k$, il raggio di convergenza della serie è $R = \frac{8}{9}$.

4D) Se $a_k = \frac{1}{k^4}$, la serie converge per $x = 13$.

Docente: _____

--	--	--	--	--	--	--	--

Cognome

Nome

Matricola

Compito 00104

5) a) Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^{11} \tan\left(\frac{12 k^6}{8^k}\right).$$

b) Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \sqrt[4]{k} \left(e^{\frac{1}{k}} - 1 - \frac{1}{k} \right).$$

c) Scrivere la serie di Taylor di $f(x) = x^9 e^{5x}$ e calcolare $f^{(8)}(0)$.

d) Data $f(x) = \cos(8x^2)$, si calcolino $f^{(4)}(0)$ e $f^{(5)}(0)$.

--	--	--	--	--	--	--	--

Cognome

Nome

Matricola

Compito 00104

6) Si consideri la serie di potenze

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(x-11)^k}{k}.$$

- a)** Si determini il centro della serie.
b) Si determini il raggio di convergenza della serie.
c) Si determini l'insieme di convergenza della serie.
d) Si calcoli $f'(x)$.
-

Soluzioni del compito 00104

1) Sia $a_k \geq 0$ una successione tale che

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k \quad \text{è convergente.}$$

1A) La successione $\frac{a_k}{a_k+5}$ tende a zero.

Vero: Dato che la serie di termine generico a_k è convergente, la successione a_k è infinitesima. Pertanto,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{a_k}{a_k + 5} = \frac{0}{0 + 5} = 0.$$

1B) La serie di termine generico $\sin(7 a_k)$ è convergente.

Vero: Dato che la successione a_k tende a zero (essendo la serie di termine generico a_k convergente), si ha

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\sin(7 a_k)}{a_k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\sin(7 a_k)}{7 a_k} 7 = 1 \cdot 7 = 7 \in (0, +\infty).$$

Per il criterio del confronto asintotico, la serie data converge.

1C) La serie di termine generico $\frac{\cos(a_k)}{k^2}$ è convergente.

Vero: Dato che $\cos(a_k)$ tende a 1 (si ricordi che la successione a_k tende a zero perché la serie è convergente), si ha

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\cos(a_k)}{k^2}}{\frac{1}{k^2}} = 1.$$

Per il criterio del confronto asintotico, la serie data ha lo stesso comportmento della serie di termine generico $\frac{1}{k^2}$, che converge essendo una serie armonica generalizzata di esponente $\alpha = 2 > 1$.

1D) La serie di termine generico $k^5 a_k$ può divergere.

Vero: Ad esempio, se $a_k = \frac{1}{k^2}$, la serie di termine generico $k^5 a_k = k^3$ è divergente.

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false

2A)

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(e^{\frac{8}{k}} - 1\right)^3 \text{ converge.}$$

Vero: Ricordando che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1,$$

si ha

$$e^{\frac{8}{k}} - 1 \approx \frac{8}{k},$$

e quindi

$$\left(e^{\frac{8}{k}} - 1\right)^3 \approx \left(\frac{8}{k}\right)^3 = \frac{8^3}{k^3}.$$

Dato che la serie di termine generico $\frac{8^3}{k^3}$ è convergente (essendo una serie armonica generalizzata di esponente $\alpha = 3 > 1$), la serie data converge per il criterio del confronto asintotico.

2B)

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4^k k^4}{k!} \text{ converge.}$$

Vero: Appliciamo il criterio del rapporto: si ha

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\frac{4^{k+1} (k+1)^4}{(k+1)!}}{\frac{4^k k^4}{k!}} = \lim_{k \rightarrow +\infty} 4 \left(\frac{k+1}{k}\right)^4 \frac{1}{k+1} = 4 \cdot 1^4 \cdot 0 = 0 < 1,$$

e quindi la serie converge.

2C)

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt[10]{k}} \text{ converge.}$$

Vero: Dato che la successione $a_k = \frac{1}{\sqrt[10]{k}}$ è positiva, decrescente e infinitesima, la serie converge per il criterio di Leibnitz.

2D)

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{15k}}{k^4} \text{ converge assolutamente.}$$

Vero: Si ha

$$\left| \frac{(-1)^{15k}}{k^4} \right| = \frac{1}{k^4}.$$

Dato che la serie di termine generico $\frac{1}{k^4}$ converge (essendo una serie armonica generalizzata di esponente $\alpha = 4 > 1$), la serie data converge assolutamente.

3) Sia $f(x) = \cos(6x)$.

Ricordando che

$$\cos(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} t^{2k}, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

si ha, per il principio di sostituzione,

$$(1) \quad f(x) = \cos(6x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} (6x)^{2k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k 6^{2k}}{(2k)!} x^{2k}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

3A) Il raggio di convergenza della serie di Taylor di $f(x)$ è finito.

Falso: Dalla (1) segue che il raggio di convergenza della serie è infinito.

3B) Il coefficiente del termine di grado 2 della serie di Taylor di $f(x)$ è uguale a zero.

Falso: Dalla (1) si ha che

$$f(x) = 1 - \frac{6^2}{2} x^2 + \text{termini di grado superiore a } 2,$$

e quindi il coefficiente del termine di grado 2 vale -18 , che è diverso da zero.

3C) Se $g(x) = x^8 f(x)$, si ha $g^{(9)}(0) = 8!$.

Falso: Dalla (1) segue che

$$g(x) = x^8 f(x) = x^8 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k 6^{2k}}{(2k)!} x^{2k} = x^8 - \frac{6^2}{2} x^{10} + o(x^{10}).$$

Dall'ultima espressione, si vede che $g^{(9)}(0) = 0$.

3D) Si ha $f^{(8)}(0) = 8! \cdot 6^8$.

Falso: Dalla (1), si vede facilmente che il termine di grado 8 nella serie di Taylor di $f(x)$ è

$$a_8 = \frac{(-1)^4 6^8}{8!} = \frac{6^8}{8!},$$

da cui segue che $f^{(8)}(0) = a_8 \cdot 8! = 6^8 \neq 8! \cdot 6^8$.

4) Si consideri la serie di potenze

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{9^k} (x-4)^k.$$

Ricordiamo che una serie di potenze è una serie della forma

$$(1) \quad f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k (x-x_0)^k,$$

e che x_0 si dice il centro della serie.

4A) Il centro della serie è $x_0 = 4$.

Vero: Dalla (1), segue che il centro della serie è $x_0 = 4$.

4B) Se $a_k = 4$ per ogni k , il raggio di convergenza della serie è $R = 9$.

Vero: Se $a_k = 4$ per ogni k , i coefficienti della serie di potenze sono

$$b_k = \frac{4}{9^k}.$$

Si ha

$$L = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{b_k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[k]{4}}{9} = \frac{1}{9},$$

da cui segue che il raggio di convergenza della serie è $R = \frac{1}{L} = 9$.

4C) Se $a_k = 8^k$, il raggio di convergenza della serie è $R = \frac{8}{9}$.

Falso: Se $a_k = 8^k$, i coefficienti della serie di potenze sono

$$b_k = \frac{8^k}{9^k} = \left(\frac{8}{9}\right)^k.$$

Dato che

$$L = \lim_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{b_k} = \frac{8}{9},$$

il raggio di convergenza della serie è $R = \frac{1}{L} = \frac{9}{8} \neq \frac{8}{9}$.

4D) Se $a_k = \frac{1}{k^4}$, la serie converge per $x = 13$.

Vero: Se $a_k = \frac{1}{k^4}$ e $x = 13$ la serie diventa

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4} \frac{(13-4)^k}{9^k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4} \frac{9^k}{9^k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4},$$

e l'ultima serie è convergente essendo una serie armonica generalizzata di esponente $\alpha = 4 > 1$.

5) a) Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^{11} \tan\left(\frac{12 k^6}{8^k}\right).$$

b) Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \sqrt[4]{k} \left(e^{\frac{1}{k}} - 1 - \frac{1}{k} \right).$$

c) Scrivere la serie di Taylor di $f(x) = x^9 e^{5x}$ e calcolare $f^{(8)}(0)$.

d) Data $f(x) = \cos(8x^2)$, si calcolino $f^{(4)}(0)$ e $f^{(5)}(0)$.

Soluzione:

a) Ricordando che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1, \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{12 k^6}{8^k} = 0,$$

si ha

$$a_k = k^{11} \tan\left(\frac{12 k^6}{8^k}\right) \approx \frac{12 k^{17}}{8^k} = b_k.$$

Applicando il criterio del rapporto alla serie di termine generico b_k si ha

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{b_{k+1}}{b_k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{12 (k+1)^{17}}{8^{k+1}} \frac{8^k}{12 k^{17}} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{8} \left(\frac{k+1}{k} \right)^{17} = \frac{1}{8} \cdot 1 = \frac{1}{8} < 1,$$

e quindi la serie di termine generico b_k è convergente. Per il criterio del confronto asintotico, anche la serie di termine generico a_k è convergente.

b) Ricordando che

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2),$$

si ha che

$$e^{\frac{1}{k}} - 1 - \frac{1}{k} = \frac{1}{2k^2} + o(k^{-2}).$$

Pertanto,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{k}} - 1 - \frac{1}{k}}{\frac{1}{k^2}} = \frac{1}{2},$$

da cui segue che

$$\sqrt[4]{k} \left(e^{\frac{1}{k}} - 1 - \frac{1}{k} \right) \approx k^{\frac{1}{4}} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{k^{\frac{7}{4}}}.$$

Dato che la serie di termine generico $\frac{1}{k^{\frac{7}{4}}}$ è convergente (come serie armonica generalizzata di esponente $\alpha = \frac{7}{4} > 1$), la serie data è convergente per il criterio del confronto asintotico.

c) Ricordando che

$$e^t = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!}, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

si ha

$$e^{5x} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{5^k}{k!} x^k,$$

e quindi

$$f(x) = x^9 e^{5x} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{5^k}{k!} x^{k+9}.$$

Dato che nella serie non compaiono termini di grado 8 (il grado minimo è 9, corrispondente a $k = 0$), si ha $f^{(8)}(0) = 0$.

d) Ricordando che

$$\cos(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} t^{2k} = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} + o(t^4),$$

si ha

$$f(x) = \cos(8x^2) = 1 - \frac{(8x^2)^2}{2} + \frac{(8x^2)^4}{24} + o(x^8) = 1 - 32x^4 + 0 \cdot x^5 + o(x^5),$$

da cui segue che $f^{(4)}(0) = -32 \cdot 4!$ e che $f^{(5)}(0) = 0$.

6) Si consideri la serie di potenze

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(x-11)^k}{k}.$$

- a) Si determini il centro della serie.
 - b) Si determini il raggio di convergenza della serie.
 - c) Si determini l'insieme di convergenza della serie.
 - d) Si calcoli $f'(x)$.
-

Soluzione:

a) Ricordando che la forma generale di una serie di potenze è

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (x - x_0)^k,$$

dove x_0 è il centro della serie, il centro della serie proposta è $x_0 = 11$.

b) Dato che $a_k = \frac{1}{k}$, si ha

$$L = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{k+1}}{\frac{1}{k}} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{k}{k+1} = 1,$$

da cui segue che il raggio di convergenza della serie è $R = \frac{1}{L} = 1$.

c) Dato che $R = 1$, la serie converge se x è tale che $|x - 11| < 1$, ovvero se x appartiene a $(10, 12)$ e non converge se $|x - 11| > 1$. Rimangono da studiare i due casi $x = 12$ e $x = 10$. Sostituendo si ottengono le due serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}, \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}.$$

La prima diverge, mentre la seconda converge per il criterio di Leibnitz. Ne segue che l'insieme di convergenza della serie è l'intervallo $I = [10, 12)$.

d) Si ha, per x in I ,

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k(x-11)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{+\infty} (x-11)^{k-1} = \sum_{h=0}^{+\infty} (x-11)^h = \frac{1}{1 - (x-11)} = \frac{1}{12-x}.$$