Calcolo integrale — Compito di pre-esonero
28 Aprile 2023 — Compito n. 00028

Istruzioni: le prime due caselle (**V** / **F**) permettono di selezionare la risposta vero/falso. La casella "**C**" serve a correggere eventuali errori invertendo la risposta data.
Per selezionare una casella, annerirla completamente: ■ (non ☒ o ☑).

Nome: ____________________

Cognome: ____________________

Matricola: | | | | | | | |

Punteggi: 1 punto per ogni risposta esatta, 0 punti per risposte sbagliate o lasciate in bianco.

	1A	1B	1C	1D	2A	2B	2C	2D	3A	3B	3C	3D	4A	4B	4C	4D
V	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
F	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
C	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

---

1) Sia

$$F(t) = \int_0^t [5\,x^2 + \cos^2(7\,x)]\,dx$$

1A) La funzione $F(t)$ non è derivabile per qualche t in $\mathbb{R}$.
1B) Si ha $F'(0) = 0$.
1C) La funzione $F(t)$ è decrescente su $\mathbb{R}$.
1D) Si ha $F(9) < 0$.

---

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

2A)
$$\int_0^1 (6x^2 + 4x + 3)\,dx = 0\,.$$

2B)
$$\int_0^{\frac{1}{3}} 18\,x\,e^{3\,x}\,dx = 2\,e\,.$$

2C)
$$\int_0^{10\,\pi} \cos(7\,x)\,dx = 5\,.$$

2D)
$$\int_0^{\sqrt{5}} \frac{10\,x}{5 + x^2}\,dx = 5\,\log(2)\,.$$

---

3) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

3A)
$$\int_{-8}^{8} [9\,x^3 + \sin(3\,x)]\,dx = 0\,.$$

3B)
$$\int_{-7}^{7} [3\,x^2 + 6\,x\,|x|]\,dx > 0\,.$$

3C)
$$\int_{-6}^{7} [9\,x^3 + 6\,x]\,dx = 0\,.$$

3D)
$$\int_{-4}^{3} \frac{x^7}{4 + x^6}\,dx > 0\,.$$

---

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

4A)
$$\int_{18}^{66} \frac{dx}{x - 6} = \log(5)\,.$$

4B)
$$\int_{11}^{26} \frac{dx}{(x - 8)^2} = -\frac{5}{18}\,.$$

4C)
$$\int_8^9 \frac{dx}{(x - 5)\,(x - 7)} = \frac{1}{2}\,\log(3/2)\,.$$

4D)
$$\int_{-8}^{-7} \frac{dx}{x^2 + 16\,x + 65} = \frac{\pi}{4}\,.$$

☐☐☐☐☐☐☐☐ **Cognome** **Nome** **Matricola** **Compito 00028**

5) Determinare una primitiva delle funzioni $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ e $k(x)$, e calcolare gli integrali.

$$\mathbf{a})\ f(x) = x\,\sin(11\,x)\,, \quad \int_0^{5\,\pi} f(x)\,dx\,, \qquad \mathbf{b})\ g(x) = x^2\,\mathrm{e}^{7\,x^3}\,, \quad \int_0^{\sqrt[3]{2}} g(x)\,dx\,,$$

$$\mathbf{c})\ h(x) = (4x^2 + 17x + 9)\,\mathrm{e}^x\,, \quad \int_{-\frac{9}{4}}^{0} h(x)\,dx\,, \qquad \mathbf{d})\ k(x) = \frac{1}{1 + 49\,x^2}\,, \quad \int_0^1 k(x)\,dx\,.$$

☐☐☐☐☐☐☐☐ **Cognome** **Nome** **Matricola** **Compito 00028**

6) Sia

$$F(t) = \int_0^t [3\,\mathrm{e}^{x^2} + 6]\,dx\,.$$

a) Dimostrare che $F(t)$ è derivabile per ogni t in $\mathbb{R}$.
b) Calcolare $F(0)$ e $F'(\sqrt{5})$.
c) Dimostrare che $F(t)$ è una funzione crescente e dispari.
d) Dimostrare che

$$\lim_{t \to +\infty} F(t) = +\infty\,.$$

Soluzioni del compito 00028

1) Sia
$$F(t) = \int_0^t [5\,x^2 + \cos^2(7\,x)]\,dx$$

1A) La funzione $F(t)$ non è derivabile per qualche t in $\mathbb{R}$.

Vero: Dato che la funzione $x \mapsto 5\,x^2 + \cos^2(7\,x)$ è continua su $\mathbb{R}$, la funzione $F(t)$ è derivabile su $\mathbb{R}$ per il teorema fondamentale del calcolo integrale, e si ha $F'(t) = 5\,x^2 + \cos^2(7\,t)$.

1B) Si ha $F'(0) = 0$.

Falso: Dato che per il teorema fondamentale del calcolo integrale si ha $F'(t) = 5\,t^2 + \cos^2(7\,t)$, si ha $F'(0) = 1 \neq 0$.

1C) La funzione $F(t)$ è decrescente su $\mathbb{R}$.

Falso: Dato che per il teorema fondamentale del calcolo integrale si ha $F'(t) = 5\,t^2 + \cos^2(7\,t)$, si ha $F'(t) \geq 0$ per ogni t in $\mathbb{R}$, e quindi la funzione $F(t)$ è crescente su $\mathbb{R}$.

1D) Si ha $F(9) < 0$.

Falso: Dato che la funzione $F(t)$ è crescente (si veda l'esercizio **1C**), si ha
$$F(9) > F(0) = 0\,.$$

---

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

2A)

$$\int_0^1 (6x^2 + 4x + 3)\,dx = 0\,.$$

Falso: Dato che

$$\int (6x^2 + 4x + 3)\,dx = \frac{6}{3}\,x^3 + \frac{4}{2}\,x^2 + 3\,x = 2\,x^3 + 2\,x^2 + 3\,x + c\,,$$

si ha

$$\int_0^1 (6x^2 + 4x + 3)\,dx = 2\,x^3 + 2\,x^2 + 3\,x\Big|_0^1 = 2 + 2 + 3 = 7 \neq 0\,.$$

Alternativamente, si poteva osservare che l'integrale non poteva essere uguale a zero perché la funzione integranda è strettamente positiva sull'intervallo di integrazione.

2B)

$$\int_0^{\frac{1}{3}} 18\,x\,\mathrm{e}^{3\,x}\,dx = 2\,\mathrm{e}\,.$$

Falso: Si ha, con la sostituzione $y = 3\,x$, da cui $dy = 3\,x$,

$$\int_0^{\frac{1}{3}} 18\,x\,\mathrm{e}^{3\,x}\,dx = 2\int_0^{\frac{1}{3}} (3\,x)\,\mathrm{e}^{3\,x}\,(3\,dx) = 2\int_0^1 y\,\mathrm{e}^y\,dy\,.$$

Dato che una primitiva di $y\,\mathrm{e}^y$ è $(y-1)\,\mathrm{e}^y$, si ha

$$\int_0^{\frac{1}{3}} 18\,x\,\mathrm{e}^{3\,x}\,dx = 2\,(y-1)\,\mathrm{e}^y\Big|_0^1 = 2 \neq 2\,\mathrm{e}\,.$$

2C)

$$\int_0^{10\,\pi} \cos(7\,x)\,dx = 5\,.$$

Falso: Si ha

$$\int_0^{10\,\pi} \cos(7\,x)\,dx = \frac{\sin(7\,x)}{7}\Big|_0^{10\,\pi} = \frac{\sin(70\,\pi) - \sin(0)}{7} = 0 \neq 5\,.$$

2D)

$$\int_0^{\sqrt{5}} \frac{10\,x}{5 + x^2}\,dx = 5\,\log(2)\,.$$

Vero: Dato che

$$\frac{10\,x}{5 + x^2} = 5\,\frac{2x}{5 + x^2} = 5\,\frac{(5 + x^2)'}{5 + x^2}\,,$$

si ha

$$\int_0^{\sqrt{5}} \frac{10\,x}{5 + x^2}\,dx = 5\,\log(5 + x^2)\Big|_0^{\sqrt{5}} = 5\,[\log(10) - \log(5)] = 5\,\log(10/5) = 5\,\log(2)\,.$$

---

3) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

3A)

$$\int_{-8}^{8} [9\,x^3 + \sin(3\,x)]\,dx = 0\,.$$

Vero: La funzione integranda è dispari, e l'intervallo di integrazione è simmetrico rispetto all'origine. Pertanto, l'integrale vale zero.

3B)

$$\int_{-7}^{7} [3\,x^2 + 6\,x\,|x|]\,dx > 0\,.$$

Vero: La funzione $x \mapsto 3\,x^2$ è pari, mentre la funzione $x \mapsto 6\,x\,|x|$ è dispari. Dato che l'intervallo è simmetrico rispetto all'origine, si ha

$$\int_{-7}^{7} [3\,x^2 + 6\,x\,|x|]\,dx = \int_{-7}^{7} 3\,x^2\,dx = 2\int_{0}^{7} 3\,x^2\,dx > 0\,,$$

dato che la funzione integranda è positiva.

3C)

$$\int_{-6}^{7} [9\,x^3 + 6\,x]\,dx = 0\,.$$

Falso: La funzione integranda è dispari; pertanto, si ha

$$\int_{-6}^{7} [9\,x^3 + 6\,x]\,dx = \int_{-6}^{6} [9\,x^3 + 6\,x]\,dx + \int_{6}^{7} [9\,x^3 + 6\,x]\,dx = \int_{6}^{7} [9\,x^3 + 6\,x]\,dx\,,$$

e l'ultimo integrale è positivo essendo l'integrale di una funzione positiva.

3D)

$$\int_{-4}^{3} \frac{x^7}{4 + x^6}\,dx > 0\,.$$

Falso: Dato che la funzione integranda è dispari, si ha

$$\int_{-4}^{3} \frac{x^7}{4 + x^6}\,dx = \int_{-4}^{-3} \frac{x^7}{4 + x^6}\,dx + \int_{-3}^{3} \frac{x^7}{4 + x^6}\,dx = \int_{-4}^{-3} \frac{x^7}{4 + x^6}\,dx < 0\,,$$

dato che la funzione integranda è negativa.

---

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

4A)

$$\int_{18}^{66} \frac{dx}{x-6} = \log(5)\,.$$

Vero: Si ha

$$\int_{18}^{66} \frac{dx}{x-6} = \log(|x-6|)\Big|_{18}^{66} = \log(60) - \log(12) = \log(60/12) = \log(5)\,.$$

4B)

$$\int_{11}^{26} \frac{dx}{(x-8)^2} = -\frac{5}{18}\,.$$

Falso: Ricordando che

$$\int \frac{dx}{(x-a)^2} = \frac{1}{a-x} + c\,,$$

si ha

$$\int_{11}^{26} \frac{dx}{(x-8)^2} = \frac{1}{8-x}\Big|_{11}^{26} = -\frac{1}{18} + \frac{1}{3} = \frac{5}{18} \neq -\frac{5}{18}\,.$$

Alternativamente, si poteva osservare che, essendo la funzione integranda positiva, il risultato non poteva essere negativo.

4C)

$$\int_{8}^{9} \frac{dx}{(x-5)\,(x-7)} = \frac{1}{2}\,\log(3/2)\,.$$

Vero: Dall'identità

$$\frac{1}{(x-5)\,(x-7)} = \frac{A}{x-7} + \frac{B}{x-5}$$

si ricava (moltiplicando per $(x-5)\,(x-7)$) che deve essere

$$1 = A\,(x-5) + B\,(x-7)\,.$$

Scegliendo $x=5$ si ricava $B = -\frac{1}{2}$, e scegliendo $x=7$ si ricava $A = \frac{1}{2}$. Pertanto,

$$\frac{1}{(x-5)\,(x-7)} = \frac{1}{2}\Big[\frac{1}{x-7} - \frac{1}{x-5}\Big]\,.$$

Ne segue che

$$\int \frac{dx}{(x-5)\,(x-7)} = \frac{1}{2}\,\log\Big(\Big|\frac{x-7}{x-5}\Big|\Big) + c\,,$$

cosicché

$$\int_{8}^{9} \frac{dx}{(x-5)\,(x-7)} = \frac{1}{2}\,[\log(1/2) - \log(1/3)] = \frac{1}{2}\,\log(3/2)\,.$$

4D)

$$\int_{-8}^{-7} \frac{dx}{x^2+16\,x+65} = \frac{\pi}{4}\,.$$

Vero: Si ha

$$x^2 + 16\,x + 65 = (x+8)^2 + 1\,,$$

e quindi

$$\int \frac{dx}{x^2+16\,x+65} = \int \frac{dx}{1+(x+8)^2}\,.$$

Con la sostituzione $y = x + 8$, da cui $dx = dy$, si ha

$$\int \frac{dx}{x^2 + 16\,x + 65} = \int \frac{dy}{1 + y^2} = \arctan(y) + c = \arctan(x + 8) + c\,.$$

Pertanto,

$$\int_{-8}^{-7} \frac{dx}{x^2 + 16\,x + 65} = \arctan(x + 8)\Big|_{-8}^{-7} = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4}\,.$$

---

5) Determinare una primitiva delle funzioni $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ e $k(x)$, e calcolare gli integrali.

$$\textbf{a)}\ f(x) = x\,\sin(11\,x)\,, \quad \int_0^{5\pi} f(x)\,dx\,, \qquad \textbf{b)}\ g(x) = x^2\,e^{7\,x^3}\,, \quad \int_0^{\sqrt[3]{2}} g(x)\,dx\,,$$

$$\textbf{c)}\ h(x) = (4x^2+17x+9)\,e^x\,, \quad \int_{-\frac{9}{4}}^{0} h(x)\,dx\,, \qquad \textbf{d)}\ k(x) = \frac{1}{1+49\,x^2}\,, \quad \int_0^1 k(x)\,dx\,.$$

Soluzione:

a) Si ha, integrando per parti, e ponendo $f'(x) = \sin(11\,x)$, da cui $f(x) = -\frac{\cos(11\,x)}{11}$ e $g(x) = x$, da cui $g'(x) = 1$,

$$\int x\,\sin(11\,x) = -\frac{x\,\cos(11\,x)}{11} + \int 1\cdot\frac{\cos(11\,x)}{11}\,dx = -\frac{x\,\cos(11\,x)}{11} + \frac{\sin(11\,x)}{121} + c\,.$$

Pertanto,

$$\int_0^{5\pi} x\,\sin(11\,x)\,dx = -\frac{x\,\cos(11\,x)}{11} + \frac{\sin(11\,x)}{121}\Big|_0^{5\pi} = -\frac{5\,\pi\,\cos(55\,\pi)}{11} = \frac{5}{11}\,\pi\,.$$

b) Si ha, con la sostituzione $y = 7\,x^3$, da cui $dy = 21\,x^2\,dx$ (e quindi $x^2\,dx = \frac{dy}{21}$),

$$\int x^2\,e^{7\,x^3}\,dx = \frac{1}{21}\int e^y\,dy = \frac{e^y}{21} + c = \frac{e^{7\,x^3}}{21} + c\,,$$

da cui segue che

$$\int_0^{\sqrt[3]{2}} x^2\,e^{7\,x^3}\,dx = \frac{e^{7\,x^3}}{21}\Big|_0^{\sqrt[3]{2}} = \frac{e^{14}-1}{21}\,.$$

c) Ricordiamo che se $P_2(x)$ è un polinomio di grado 2, allora

$$\int P_2(x)\,e^x\,dx = Q_2(x)\,e^x\,,$$

con $Q_2(x)$ un polinomio di grado 2 tale che $Q_2(x)+Q_2'(x) = P_2(x)$. Pertanto, se $Q_2(x) = a\,x^2+b\,x+c$, deve essere

$$Q_2(x) + Q_2'(x) = a\,x^2 + (2a+b)\,x + b + c = 4x^2 + 17x + 9\,.$$

Da questa relazione si ricava $a = 4$, $2a+b = 17$ e $b+c = 9$; risolvendo, si trova $a = 4$, $b = 9$ e $c = 0$. Pertanto,

$$\int (4x^2+17x+9)\,e^x\,dx = (4x^2+9x)\,e^x + c\,,$$

da cui segue che

$$\int_{-\frac{9}{4}}^{0} (4x^2+17x+9)\,e^x\,dx = (4x^2+9x)\,e^x\Big|_{-\frac{9}{4}}^{0} = 0\,.$$

d) Si ha, con la sostituzione $y = 7\,x$, da cui $dx = \frac{dy}{7}$,

$$\int \frac{dx}{1+49\,x^2} = \frac{1}{7}\int \frac{dy}{1+y^2} = \frac{\arctan(y)}{7} + c = \frac{\arctan(7\,x)}{7} + c\,.$$

Pertanto,

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+49\,x^2} = \frac{\arctan(7\,x)}{7}\Big|_0^1 = \frac{\arctan(7)}{7}\,.$$

6) Sia

$$F(t) = \int_0^t [3\,\mathrm{e}^{x^2} + 6]\,dx\,.$$

a) Dimostrare che $F(t)$ è derivabile per ogni t in $\mathbb{R}$.
b) Calcolare $F(0)$ e $F'(\sqrt{5})$.
c) Dimostrare che $F(t)$ è una funzione crescente e dispari.
d) Dimostrare che

$$\lim_{t\to+\infty} F(t) = +\infty\,.$$

Soluzione:
a) La funzione $f(x) = 3\,\mathrm{e}^{x^2} + 6$ è continua su $\mathbb{R}$. Pertanto, per il teorema fondamentale del calcolo integrale, la funzione $F(t)$ è derivabile per ogni t in $\mathbb{R}$ e si ha

$$F'(t) = f(t) = 3\,\mathrm{e}^{t^2} + 6\,, \qquad \forall t \in \mathbb{R}\,. \tag{1}$$

b) Si ha

$$F(0) = \int_0^0 [3\,\mathrm{e}^{x^2} + 6]\,dx = 0\,,$$

e, per la (1),

$$F'(\sqrt{5}) = f(\sqrt{5}) = 3\,\mathrm{e}^5 + 6\,.$$

c) Dato che per la (1) la derivata di $F(t)$ è positiva, la funzione $F(t)$ è crescente. Inoltre, dato che la funzione $f(x)$ è pari, la funzione $F(t)$ è dispari. Infatti, con la sostituzione $x = -y$, da cui $dx = -dy$,

$$F(-t) = \int_0^{-t} [3\,\mathrm{e}^{x^2} + 6]\,dx = -\int_0^t [3\,\mathrm{e}^{(-y)^2} + 6]\,dy = -\int_0^t [3\,\mathrm{e}^{y^2} + 6]\,dy = -F(t)\,.$$

d) Si ha, se $t \geq 0$, e dato che $f(x) \geq 6$,

$$F(t) = \int_0^t [3\,\mathrm{e}^{x^2} + 6]\,dx \geq \int_0^t 6\,dx = 6\,t\,,$$

da cui segue che (si noti che il limite di $F(t)$ esiste perché $F(t)$ è crescente)

$$\lim_{t\to+\infty} F(t) \geq \lim_{t\to+\infty} 6\,t = +\infty\,.$$