



Calcolo integrale — Scheda di esercizi n. 7
12 Maggio 2023 — Compito n. 00120

Istruzioni: le prime due caselle (**V** / **F**) permettono di selezionare la risposta vero/falso. La casella "**C**" serve a correggere eventuali errori invertendo la risposta data. Per selezionare una casella, annerirla completamente: ☐ (non ☐ o ☐).

Nome: _____

Cognome: _____

Matricola:

--	--	--	--	--	--	--

	1A	1B	1C	1D	2A	2B	2C	2D	3A	3B	3C	3D	4A	4B	4C	4D
V	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
F	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
C	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

1) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

1A) L'equazione differenziale

$$y'(t) = 2t + 3t^2$$

è del primo ordine.

1B) L'equazione differenziale

$$9y'(t)y''(t) + 10[y(t)]^3 = 0$$

è del secondo ordine.

1C) L'equazione differenziale

$$[\sin(6y'(t))]' = 0$$

è del secondo ordine.

1D) L'equazione differenziale

$$4ty^{(1)}(t) + 11t^2y^{(2)}(t) + 4t^3y^{(3)}(t) = 0$$

è del terzo ordine.

2) Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(t) = 10y(t) + 5.$$

2A) L'equazione ha infinite soluzioni.

2B) Esiste un'unica soluzione dell'equazione tale che $y(0) = 3$.

2C) Esiste un'unica soluzione dell'equazione tale che $y(0) = 3$ e $y'(0) = 30$.

2D) Esiste un'unica soluzione dell'equazione tale che $y(0) = 3$ e $y'(0) = 35$.

3) Si consideri il problema di Cauchy

$$(1) \quad \begin{cases} y'(t) = e^{5t^2}, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

3A) Esistono infinite soluzioni di (1).

3B) La soluzione non si può scrivere esplicitamente in termini di funzioni elementari.

3C) Si ha $y'(0) = 5$.

3D) Si ha $y''(0) = 0$.

4) Si consideri il problema di Cauchy

$$(1) \quad \begin{cases} y'(t) = -4y(t) + 20, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

4A) La funzione Qe^{4t} è soluzione dell'equazione omogenea associata all'equazione di (1) per ogni Q in \mathbb{R} .

4B) L'equazione di (1) ha come soluzione

$$y(t) = 5.$$

4C) Si ha $y''(0) = -80$.

4D) Si ha

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = -5.$$

Docente

- ☐ DelaTorre Pedraza
☐ Orsina

--	--	--	--	--	--	--	--

Cognome

Nome

Matricola

Compito 00120

5) Si consideri l'equazione differenziale del primo ordine

(1) $y'(t) = f(t)$.

Scrivere tutte le soluzioni di (1) se

a) $f(t) = 14t + 4$, b) $f(t) = \cos(4t)$, c) $f(t) = (6t + 7)e^t$, d) $f(t) = \frac{11t}{1 + 7t^2}$.

--	--	--	--	--	--	--	--

Cognome

Nome

Matricola

Compito 00120

6) Si consideri il problema di Cauchy

(1)
$$\begin{cases} y'(t) = 6y(t) - 13, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

- a) Quante soluzioni ha l'equazione di (1)? E quante soluzioni ha (1)?
b) Scrivere l'equazione omogenea associata all'equazione di (1), e scriverne tutte le soluzioni.
c) Trovare una soluzione particolare dell'equazione di (1).
d) Scrivere tutte le soluzioni dell'equazione di (1) e la soluzione di (1).
-

Soluzioni del compito 00120

1) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

Ricordiamo che un'equazione differenziale si dice di ordine $n \geq 1$ se la derivata di ordine massimo della funzione incognita $y(t)$ è la derivata $y^{(n)}(t)$.

1A) L'equazione differenziale

$$y'(t) = 2t + 3t^2$$

è del primo ordine.

Vero: Infatti vi compare la derivata prima di $y(t)$, e non derivate di ordine superiore.

1B) L'equazione differenziale

$$9y'(t)y''(t) + 10[y(t)]^3 = 0$$

è del secondo ordine.

Vero: Infatti vi compare la derivata seconda di $y(t)$, e non derivate di ordine superiore.

1C) L'equazione differenziale

$$[\sin(6y'(t))]' = 0$$

è del secondo ordine.

Vero: Infatti, derivando si ha

$$6 \cos(6y'(t))y''(t) = 0,$$

e quindi l'equazione è del secondo ordine.

1D) L'equazione differenziale

$$4ty^{(1)}(t) + 11t^2y^{(2)}(t) + 4t^3y^{(3)}(t) = 0$$

è del terzo ordine.

Vero: Infatti vi compare la derivata terza di $y(t)$, e non derivate di ordine superiore.

2) Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(t) = 10 y(t) + 5.$$

2A) L'equazione ha infinite soluzioni.

Vero: Essendo un'equazione del primo ordine, ha infinite soluzioni, dipendenti da un'unica costante reale.

2B) Esiste un'unica soluzione dell'equazione tale che $y(0) = 3$.

Vero: Assegnando la condizione iniziale $y(0) = 3$ si ottiene un problema di Cauchy, che ha un'unica soluzione.

2C) Esiste un'unica soluzione dell'equazione tale che $y(0) = 3$ e $y'(0) = 30$.

Falso: Se $y'(0) = 3$, sostituendo nell'equazione si ha

$$y'(0) = 10 y(0) + 5 = 10 \cdot 3 + 5 = 35 \neq 30,$$

e quindi non esiste alcuna soluzione dell'equazione che verifica le due condizioni assegnate.

2D) Esiste un'unica soluzione dell'equazione tale che $y(0) = 3$ e $y'(0) = 35$.

Vero: Sappiamo già che esiste un'unica soluzione dell'equazione tale che $y(0) = 3$ (si veda la domanda **2B**). Dall'equazione, scritta per $t = 0$, si ricava

$$y'(0) = 10 y(0) + 5 = 10 \cdot 3 + 5 = 35,$$

e quindi la seconda condizione è automaticamente verificata.

3) Si consideri il problema di Cauchy

$$(1) \quad \begin{cases} y'(t) = e^{5t^2}, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Integrando tra 0 e s si ha, per il Teorema fondamentale del calcolo integrale:

$$y(s) - y(0) = \int_0^s y'(t) dt = \int_0^s e^{5t^2} dt,$$

da cui, ricordando che $y(0) = 0$, segue che l'unica soluzione del problema di Cauchy è data da:

$$(2) \quad y(s) = \int_0^s e^{5t^2} dt.$$

3A) Esistono infinite soluzioni di (1).

Falso: Trattandosi di un problema di Cauchy, esiste un'unica soluzione (si veda anche (2)).

3B) La soluzione non si può scrivere esplicitamente in termini di funzioni elementari.

Vero: La soluzione è data da (2), e l'integrale non si sa calcolare esplicitamente.

3C) Si ha $y'(0) = 5$.

Falso: Sostituendo $t = 0$ nell'equazione si trova

$$y'(0) = e^{5 \cdot 0^2} = 1 \neq 5.$$

3D) Si ha $y''(0) = 0$.

Vero: Derivando l'equazione si ha

$$y''(t) = [y'(t)]' = [e^{5t^2}]' = 10t e^{5t^2},$$

da cui segue che

$$y''(0) = 10 \cdot 0 \cdot e^{5 \cdot 0^2} = 0.$$

4) Si consideri il problema di Cauchy

$$(1) \quad \begin{cases} y'(t) = -4y(t) + 20, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

L'equazione omogenea associata all'equazione di (1) è

$$(2) \quad y'(t) = -4y(t).$$

4A) La funzione Qe^{4t} è soluzione dell'equazione omogenea associata all'equazione di (1) per ogni Q in \mathbb{R} .

Falso: Se $y(t) = Qe^{4t}$, allora

$$y'(t) = Q \cdot 4e^{4t} = 4 \cdot [Qe^{4t}] = 4y(t) \neq -4y(t),$$

e quindi la funzione proposta non risolve la (2), ovvero l'equazione omogenea associata all'equazione di (1).

4B) L'equazione di (1) ha come soluzione

$$y(t) = 5.$$

Vero: Basta sostituire...

4C) Si ha $y''(0) = -80$.

Vero: Iniziamo con l'osservare che dall'equazione, e dalla condizione iniziale, segue che

$$y'(0) = -4y(0) + 20 = -4 \cdot 0 + 20 = 20.$$

Inoltre, derivando l'equazione si ha

$$y''(t) = -4y'(t),$$

e quindi

$$y''(0) = -4y'(0) = -4 \cdot 20 = -80.$$

4D) Si ha

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = -5.$$

Falso: Sappiamo, dalle domande **4A** e **4B** che $y_0(t) = Qe^{-4t}$ è soluzione dell'equazione omogenea associata (qualsiasi sia Q numero reale) e che $\bar{y}(t) = 5$ è soluzione (particolare) dell'equazione. Per la teoria generale delle equazioni lineari, le funzioni della forma

$$y(t) = y_0(t) + \bar{y}(t) = Qe^{-4t} + 5$$

sono tutte e sole le soluzioni dell'equazione di (1). Assegnando la condizione iniziale, si trova

$$0 = y(0) = Q + 5,$$

da cui $Q = -5$. Ne segue che

$$y(t) = -5e^{-4t} + 5 = 5(1 - e^{-4t})$$

è l'unica soluzione del problema di Cauchy (1), ed è tale che

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} 5(1 - e^{-4t}) = 5 \neq -5.$$

5) Si consideri l'equazione differenziale del primo ordine

$$(1) \quad y'(t) = f(t).$$

Scrivere tutte le soluzioni di (1) se

$$\mathbf{a)} \ f(t) = 14t + 4, \quad \mathbf{b)} \ f(t) = \cos(4t), \quad \mathbf{c)} \ f(t) = (6t + 7)e^t, \quad \mathbf{d)} \ f(t) = \frac{11t}{1 + 7t^2}.$$

Soluzione:

L'equazione differenziale $y'(t) = f(t)$ si può riformulare così: “la funzione $y(t)$ è una primitiva di $f(t)$.” Pertanto, trovare tutte le soluzioni di (1) è equivalente a trovare tutte le primitive di $f(t)$, ovvero — come è noto... — è equivalente ad integrare $f(t)$.

a) Dato che

$$\int [14t + 4] dt = 7t^2 + 4t,$$

si ha che tutte le soluzioni di (1) sono date da

$$y(t) = 7t^2 + 4t + c,$$

con c costante arbitraria.

b) Dato che

$$\int \cos(4t) dt = \frac{\sin(4t)}{4},$$

si ha che tutte le soluzioni di (1) sono date da

$$y(t) = \frac{\sin(4t)}{4} + c,$$

con c costante arbitraria.

c) Dato che, integrando per parti,

$$\int (6t + 7)e^t dt = (6t + 7)e^t - \int 6e^t dt = (6t + 1)e^t,$$

si ha che tutte le soluzioni di (1) sono date da

$$y(t) = (6t + 1)e^t + c,$$

con c costante arbitraria.

d) Dato che

$$\int \frac{11t}{1 + 7t^2} dt = \frac{11}{14} \int \frac{14t dt}{1 + 7t^2} = \frac{11}{14} \ln(1 + 7t^2),$$

si ha che tutte le soluzioni di (1) sono date da

$$y(t) = \frac{11}{14} \ln(1 + 7t^2) + c,$$

con c costante arbitraria.

6) Si consideri il problema di Cauchy

$$(1) \quad \begin{cases} y'(t) = 6y(t) - 13, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

a) Quante soluzioni ha l'equazione di (1)? E quante soluzioni ha (1)?

b) Scrivere l'equazione omogenea associata all'equazione di (1), e scriverne tutte le soluzioni.

c) Trovare una soluzione particolare dell'equazione di (1).

d) Scrivere tutte le soluzioni dell'equazione di (1) e la soluzione di (1).

Soluzione:

a) L'equazione di (1) ha infinite soluzioni (dipendenti da un parametro reale), mentre il problema di Cauchy (1) ha un'unica soluzione.

b) L'equazione omogenea associata all'equazione di (1) è

$$y_0'(t) = 6y_0(t),$$

le cui soluzioni sono date (per quanto visto a lezione) da

$$y_0(t) = A e^{6t},$$

con A costante reale arbitraria.

c) Per trovare una soluzione particolare dell'equazione di (1), cerchiamo

$$\bar{y}(t) = C,$$

con C costante reale. Sostituendo, si ha che deve essere

$$0 = 6C - 13,$$

da cui segue $C = \frac{13}{6}$.

d) Per quanto visto a lezione, tutte le soluzioni dell'equazione di (1) sono date da

$$y(t) = y_0(t) + \bar{y}(t) = A e^{6t} + \frac{13}{6},$$

con A costante reale arbitraria. Assegnando la condizione iniziale, si ha che deve essere

$$0 = A e^{6 \cdot 0} + \frac{13}{6} = A + \frac{13}{6},$$

da cui segue che $A = -\frac{13}{6}$ e quindi l'unica soluzione di (1) è data da

$$y(t) = -\frac{13}{6} e^{6t} + \frac{13}{6} = \frac{13}{6} [1 - e^{6t}].$$