## Calcolo integrale — Compito di pre-esonero
## 23 Maggio 2023 — Compito n. 00098

**Istruzioni**: le prime due caselle (**V** / **F**) permettono di selezionare la risposta vero/falso. La casella "**C**" serve a correggere eventuali errori invertendo la risposta data.
Per selezionare una casella, annerirla completamente: ■ (non ☒ o ☑).

**Nome:** ______________________

**Cognome:** ______________________

**Matricola:** | | | | | | | |

| | 1A | 1B | 1C | 1D | 2A | 2B | 2C | 2D | 3A | 3B | 3C | 3D | 4A | 4B | 4C | 4D |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **V** | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ |
| **F** | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ |
| **C** | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ |

**1)** Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(t) = e^{5\,t}\,(6 + y^2(t))\,.$$

**1A)** L'equazione ha un'unica soluzione.
**1B)** Esistono infinite soluzioni dell'equazione tali che $y(0) = 4$.
**1C)** Esiste un'unica soluzione dell'equazione tale che $y(0) = 0$ e $y'(0) = 6$.
**1D)** Se $y(0) = 6$, la soluzione è decrescente in un intorno dell'origine.

**2)** Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(t) - 7\,y'(t) + 7\,y(t) = 14\,.$$

**2A)** Non esistono soluzioni dell'equazione tali che $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$ e $y''(0) = 0$.
**2B)** Se $y(0) = 0$ e $y'(0) = 7$, si ha $y''(0) = -35$.
**2C)** Esiste un'unica soluzione dell'equazione tale che $y'(0) = 1$ e $y''(0) = 7$.
**2D)** Se $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$, la soluzione dell'equazione è convessa in un intorno dell'origine.

**3)** Si consideri il problema di Cauchy

$$(1) \qquad \begin{cases} y'(t) = 9\,y(t) + e^{9\,t} + 27\,, \\ y(0) = 0\,. \end{cases}$$

**3A)** Si ha $y'(0) > 0$.
**3B)** La funzione $y_0(t) = 6\,e^{9\,t}$ è soluzione dell'equazione omogenea associata all'equazione di (1).
**3C)** La soluzione di (1) è $y(t) = (t - 3)\,e^{9\,t} + 3$.
**3D)** Si ha

$$\lim_{t \to +\infty} y(t) = +\infty\,.$$

**4)** Si consideri l'equazione differenziale

$$(1) \qquad y''(t) + A\,y'(t) + B\,y(t) = 0\,.$$

**4A)** Se $A = B = 0$, i polinomi di primo grado sono soluzioni di (1).
**4B)** Se $A = -11$ e $B = 24$, la funzione $y(t) = 9\,e^{3\,t}$ non è soluzione di (1).
**4C)** Se $A = -6$ e $B = 9$, la funzione $y(t) = 2\,t\,e^{3\,t}$ è soluzione di (1).
**4D)** Se $A = 0$ e $B = 49$, esistono soluzioni non nulle di (1) che non sono periodiche.

**Docente**
☐ DelaTorre Pedraza
☐ Orsina

| $\square\square\square\square\square\square\square\square$ | **Cognome** | **Nome** | **Matricola** | **Compito 00098** |
|---|---|---|---|---|

**5)** Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(t) = 4\,(y(t) + 8)\,\cos(4\,t)\,. \tag{1}$$

**a)** Quante soluzioni di (1) verificano la condizione $y(0) = 6$? E quante le condizioni $y(0) = 0$ e $y'(0) = 32$?
**b)** Determinare la soluzione di (1) tale che $y(4) = -8$.
**c)** Calcolare $T_2(y(t); 0)$, dove $y(t)$ è la soluzione di (1) tale che $y(0) = 0$.
**d)** Determinare la soluzione di (1) tale che $y(0) = 0$.

☐☐☐☐☐☐☐☐ **Cognome** **Nome** **Matricola** **Compito 00098**

---

**6)** Si consideri il problema di Cauchy

(1)
$$\begin{cases} y''(t) - 4\,y'(t) + 4\,y(t) = 20\,, \\ y(0) = 6\,, \quad y'(0) = 0\,. \end{cases}$$

**a)** Quante soluzioni ha (1)? E quante tali che $y''(0) = 19$?
**b)** Scrivere tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata all'equazione di (1).
**c)** Determinare una soluzione particolare dell'equazione di (1), e scrivere tutte le soluzioni dell'equazione di (1).
**d)** Determinare la soluzione di (1).

---

# Soluzioni del compito 00098

**1)** Si consideri l'equazione differenziale
$$y'(t) = \mathrm{e}^{5\,t}\,(6 + y^2(t))\,.$$

---

**1A)** L'equazione ha un'unica soluzione.

**Falso:** Essendo un'equazione differenziale ordinaria del primo ordine, l'equazione ha infinite soluzioni dipendenti da un parametro reale.

---

**1B)** Esistono infinite soluzioni dell'equazione tali che $y(0) = 4$.

**Falso:** Assegnando la condizione iniziale $y(0) = 4$, si ottiene un problema di Cacuhy per un'equazione differenziale ordinaria del primo ordine, che ha un'unica soluzione.

---

**1C)** Esiste un'unica soluzione dell'equazione tale che $y(0) = 0$ e $y'(0) = 6$.

**Vero:** Se si assegna la condizione $y(0) = 0$, si ottiene un problema di Cauchy per un'equazione differenziale ordinaria del primo ordine, che ha un'unica soluzione. Per tale soluzione si ha
$$y'(0) = \mathrm{e}^{5\cdot 0}\,(6 + y^2(0)) = 1 \cdot (6 + 0) = 6\,.$$
Si ha quindi che la condizione $y'(0) = 6$ è automaticamente soddisfatta, e quindi la soluzione esiste ed è unica.

---

**1D)** Se $y(0) = 6$, la soluzione è decrescente in un intorno dell'origine.

**Falso:** Se $y(0) = 6$, si ha
$$y'(0) = \mathrm{e}^{5\cdot 0}\,(6 + y^2(0)) = 1 \cdot (6 + 36) = 42 > 0\,.$$
Per il teorema della permanenza del segno, $y'(t) \geq 0$ in un intorno dell'origine, e quindi la soluzione è crescente in tale intorno.
Alternativamente, e prescindendo dalla condizione iniziale, era sufficiente osservare che
$$y'(t) = \mathrm{e}^{5\,t}\,(1 + y^2(t)) \geq \mathrm{e}^{5\,t} \geq 0\,,$$
e quindi *ogni* soluzione dell'equazione è crescente.

---

**2)** Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(t) - 7\,y'(t) + 7\,y(t) = 14\,.$$

---

**2A)** Non esistono soluzioni dell'equazione tali che $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$ e $y''(0) = 0$.

**Falso:** Se si assegnano le condizioni iniziali $y(0) = 2$ e $y'(0) = 0$, si ottiene un problema di Cauchy per un'equazione differenziale ordinaria del secondo ordine, che ha un'unica soluzione. Per tale soluzione, si ha

$$y''(0) = 14 + 7\,y'(0) - 7\,y(0) = 14 + 7 \cdot 0 - 7 \cdot 2 = 14 - 14 = 0\,,$$

cosicché la condizione $y''(0) = 0$ è automaticamente soddisfatta, e quindi la soluzione esiste ed è unica.

---

**2B)** Se $y(0) = 0$ e $y'(0) = 7$, si ha $y''(0) = -35$.

**Falso:** Con le condizioni iniziali $y(0) = 0$ e $y'(0) = 7$ si ha, per l'unica soluzione del problema,

$$y''(0) = 14 + 7\,y'(0) - 7\,y(0) = 14 + 7 \cdot 7 - 7 \cdot 0 = 63 \neq -35\,.$$

---

**2C)** Esiste un'unica soluzione dell'equazione tale che $y'(0) = 1$ e $y''(0) = 7$.

**Vero:** Se $y(t)$ è soluzione di (1), sostituendo $t = 0$ nell'equazione si trova

$$y''(0) - 7\,y'(0) + 7\,y(0) = 14\,.$$

Se $y'(0) = 1$ e $y''(0) = 7$, si ha

$$7 - 7 \cdot 1 + 7\,y(0) = 14\,,$$

da cui segue $y(0) = 2$. Consideriamo ora l'unica soluzione di (1) tale che $y(0) = 2$ e $y'(0) = 1$. Per tale soluzione si ha, ovviamente, $y''(0) = 7$, e quindi esiste un'unica soluzione dell'equazione tale che $y'(0) = 1$ e $y''(0) = 7$.

---

**2D)** Se $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$, la soluzione dell'equazione è convessa in un intorno dell'origine.

**Vero:** Se $y(0) = y'(0) = 0$ si ha, per l'unica soluzione dell'equazione, che

$$y''(0) = 14 + 7\,y'(0) - 7\,y(0) = 14 + 7 \cdot 0 - 7 \cdot 0 = 14 > 0\,.$$

Per il teorema della permanenza del segno, si ha $y''(t) \geq 0$ in un intorno dell'origine, e quindi $y(t)$ è convessa in tale intorno.

---

**3)** Si consideri il problema di Cauchy

$$(1) \qquad \begin{cases} y'(t) = 9\,y(t) + \mathrm{e}^{9\,t} + 27\,, \\ y(0) = 0\,. \end{cases}$$

---

Ricordiamo che la soluzione del problema di Cauchy per l'equazione $y'(t) = a(t)\,y(t) + b(t)$, con la condizione $y(0) = y_0$ è data da

$$(2) \qquad y(t) = \mathrm{e}^{A(t)} \left[ y_0 + \int_0^t b(s)\,\mathrm{e}^{-A(s)}\,ds \right],$$

dove

$$A(t) = \int_0^t a(s)\,ds\,.$$

Nel nostro caso, $a(t) = 9$ e $b(t) = \mathrm{e}^{9\,t} + 27$ e quindi

$$A(t) = \int_0^t 9\,ds = 9\,t\,.$$

Applicando la (2) con $y_0 = 0$ si ha

$$y(t) = \mathrm{e}^{9\,t} \int_0^t [\mathrm{e}^{9\,s} + 27]\,\mathrm{e}^{-9\,s}\,ds = \mathrm{e}^{9\,t}\,[s - 3\,\mathrm{e}^{-9\,s}]\Big|_0^t = \mathrm{e}^{9\,t}\,[t - 3\,\mathrm{e}^{-9\,t} + 3]\,,$$

e quindi, semplificando,

$$(3) \qquad y(t) = (t+3)\,\mathrm{e}^{9\,t} - 3\,.$$

---

**3A)** Si ha $y'(0) > 0$.

**Vero:** Sostituendo la condizione iniziale $y(0) = 0$ nell'equazione, si ha

$$y'(0) = 9\,y(0) + \mathrm{e}^{9\cdot 0} + 14 = 9 \cdot 0 + 1 + 14 = 15 > 0\,.$$

---

**3B)** La funzione $y_0(t) = 6\,\mathrm{e}^{9\,t}$ è soluzione dell'equazione omogenea associata all'equazione di (1).

**Vero:** L'equazione omogenea associata all'equazione di (1) è

$$y_0'(t) = 9\,y_0(t)\,,$$

Se $y_0(t) = 6\,\mathrm{e}^{9\,t}$, si ha

$$y_0'(t) = 54\,\mathrm{e}^{9\,t} = 9 \cdot (6\,\mathrm{e}^{9\,t}) = 9\,y_0(t)\,,$$

e quindi $y_0(t)$ è soluzione dell'equazione omogenea associata.

---

**3C)** La soluzione di (1) è $y(t) = (t-3)\,\mathrm{e}^{9\,t} + 3$.

**Falso:** La soluzione di (1) è data da (3). Alternativamente, se $y(t) = (t-3)\,\mathrm{e}^{9\,t} + 3$, si ha

$$y'(t) = 9\,(t-3)\,\mathrm{e}^{9\,t} + \mathrm{e}^{9\,t}\,,$$

e

$$9\,y(t) + \mathrm{e}^{9\,t} + 27 = 9\,(t-3)\,\mathrm{e}^{9\,t} + 27 + \mathrm{e}^{9\,t} + 27 = 9\,(t-3)\,\mathrm{e}^{9\,t} + \mathrm{e}^{9\,t} + 54\,.$$

Pertanto,

$$y'(t) - (9\,y(t) + \mathrm{e}^{9\,t} + 27) = \mathrm{e}^{9\,t} + 9\,(t-3)\,\mathrm{e}^{9\,t} - [9\,(t-3)\,\mathrm{e}^{9\,t} + \mathrm{e}^{9\,t} + 54] = -54 \neq 0\,,$$

e quindi $y(t)$ non è soluzione di (1).

---

**3D)** Si ha

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = +\infty\,.$$

**Vero:** Dalla (3) segue che

$$\lim_{t \to +\infty} y(t) = \lim_{t \to +\infty} [(t-3)\, \mathrm{e}^{9\,t} + 3] = +\infty\,.$$

---

**4)** Si consideri l'equazione differenziale

$$(1) \qquad y''(t) + A\,y'(t) + B\,y(t) = 0\,.$$

---

**4A)** Se $A = B = 0$, i polinomi di primo grado sono soluzioni di (1).

**Vero:** Se $A = B = 0$, (1) diventa

$$y''(t) = 0\,.$$

Se $y(t)$ è un polinomio di primo grado, si ha $y(t) = a\,t + b$ per qualche $a$ e $b$ reali. Pertanto, $y'(t) = a$ e quindi $y''(t) = 0$. Ne segue che i polinomi di grado 1 sono soluzioni di (1).

---

**4B)** Se $A = -11$ e $B = 24$, la funzione $y(t) = 9\,e^{3\,t}$ non è soluzione di (1).

**Falso:** Se $A = -11$ e $B = 24$, il polinomio caratteristico associato all'equazione (1) è

$$P(L) = L^2 - 11\,L + 24\,,$$

che ha come soluzioni $L_1 = 8$ e $L_2 = 3$. Pertanto, tutte le soluzioni di (1) sono date da

$$y(t) = C\,e^{8\,t} + D\,e^{3\,t}\,,$$

con $C$ e $D$ numeri reali. Scegliendo $C = 0$ e $D = 9$, si vede che $y(t) = 9\,e^{3\,t}$ è soluzione di (1).

---

**4C)** Se $A = -6$ e $B = 9$, la funzione $y(t) = 2\,t\,e^{3\,t}$ è soluzione di (1).

**Vero:** Se $A = -6$ e $B = 9$, il polinomio caratteristico associato all'equazione (1) è

$$P(L) = L^2 - 6\,L + 9\,,$$

che ha come soluzioni $L_1 = L_2 = 3$. Pertanto, tutte le soluzioni di (1) sono date da

$$y(t) = (C + D\,t)\,e^{3\,t}\,,$$

con $C$ e $D$ numeri reali. Scegliendo $C = 0$ e $D = 2$, si vede che $y(t) = 2\,t\,e^{3\,t}$ è soluzione di (1).

---

**4D)** Se $A = 0$ e $B = 49$, esistono soluzioni non nulle di (1) che non sono periodiche.

**Falso:** Se $A = 0$ e $B = 49$, il polinomio caratteristico associato all'equazione (1) è

$$P(L) = L^2 + 49\,,$$

che ha come soluzioni $L_{1,2} = \pm\,7\,i$. Pertanto, tutte le soluzioni di (1) sono date da

$$y(t) = C\,\cos(7\,t) + D\,\sin(7\,t)\,,$$

con $C$ e $D$ numeri reali, e sono quindi periodiche (di periodo $T = \frac{2\pi}{7}$).

---

**5)** Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(t) = 4\,(y(t) + 8)\,\cos(4\,t)\,. \tag{1}$$

**a)** Quante soluzioni di (1) verificano la condizione $y(0) = 6$? E quante le condizioni $y(0) = 0$ e $y'(0) = 32$?
**b)** Determinare la soluzione di (1) tale che $y(4) = -8$.
**c)** Calcolare $T_2(y(t); 0)$, dove $y(t)$ è la soluzione di (1) tale che $y(0) = 0$.
**d)** Determinare la soluzione di (1) tale che $y(0) = 0$.

---

**Soluzione:**
Osserviamo preliminarmente che l'equazione (1) è a variabili separabili, essendo della forma

$$y'(t) = f(t)\,g(y(t))\,,$$

con

$$f(t) = 4\,\cos(4\,t)\,, \qquad g(s) = s + 8\,. \tag{2}$$

**a)** Assegnando ad (1) la condizione iniziale $y(0) = 6$ si ottiene un problema di Cauchy per un'equazione differenziale del primo ordine, che ha un'unica soluzione. Analogamente, esiste un'unica soluzione di (1) tale che $y(0) = 0$; per tale soluzione si ha, sostituendo $t = 0$,

$$y'(0) = 4\,(y(0) + 8)\,\cos(4 \cdot 0) = 4 \cdot 8 \cdot 1 = 32\,,$$

cosicché la condizione $y'(0) = 32$ è automaticamente soddisfatta dall'unica soluzione di (1) tale che $y(0) = 0$. Ne segue pertanto che esiste un'unica soluzione di (1) tale che $y(0) = 0$ e $y'(0) = 32$.

**b)** Dato che la funzione $g(s)$ in (2) è tale che $g(-8) = -8+8 = 0$, la funzione $y(t) = -8$ è una soluzione costante di (1). Dato che soddisfa la condizione $y(4) = -8$, è la soluzione di (1) tale che $y(4) = -8$ (essendo tale soluzione unica).

**c)** Se $y(0) = 0$ abbiamo, sostituendo nell'equazione $t = 0$,

$$y'(0) = 4\,(y(0) + 8)\,\cos(4 \cdot 0) = 4 \cdot 8 \cdot 1 = 32\,.$$

Derivando l'equazione, si ha poi

$$y''(t) = 4\,y'(t)\,\cos(4\,t) - 16\,(y(t) + 8)\,\sin(4\,t)\,.$$

Calcolando questa espressione in $t = 0$, si ha

$$y''(0) = 4\,y'(0)\,\cos(4 \cdot 0) - 16\,(y(0) + 8)\,\sin(4 \cdot 0) = 4 \cdot 32 \cdot 1 - 16 \cdot 8 \cdot 0 = 128\,.$$

Si ha quindi

$$T_2(y(t); 0) = y(0) + y'(0)\,t + \frac{y''(0)}{2}\,t^2 = 0 + 32\,t + \frac{128}{2}\,t^2 = 32\,t + 64\,t^2\,.$$

**d)** Dato che l'equazione è a variabili separabili, e che $y(t) \equiv y(0) = 0$ non è soluzione dell'equazione (come si verifica facilmente), dividiamo per $y(t) + 8$, ottenendo l'equazione equivalente

$$\frac{y'(t)}{y(t) + 8} = 4\,\cos(4\,t)\,.$$

Integrando tra 0 e $s$, si ha

$$\int_0^s \frac{y'(t)}{y(t) + 8}\,dt = \int_0^s 4\,\cos(4\,t)\,dt = \sin(4\,t)\Big|_0^s = \sin(4\,s)\,.$$

Per quanto riguarda il primo integrale, con la sostituzione $z = y(t)$, da cui $y'(t)\,dt = dz$, si ha (ricordando che $y(0) = 0$)

$$\int_0^s \frac{y'(t)}{y(t) + 8}\,dt = \int_{y(0)}^{y(s)} \frac{dz}{z + 8} = \log(|z + 8|)\Big|_0^{y(s)} = \log(|y(s) + 8|) - \log(8) = \log\Big(\frac{y(s) + 8}{8}\Big)\,,$$

dove nell'ultimo passaggio si è usato il fatto che $y(s)+8 \geq 0$ in un intorno di $t=0$ dato che $y(0)+8 = 0+8 = 8 > 0$. Si ha quindi che la soluzione di (1) tale che $y(0)=0$ verifica l'identità

$$\log\Big(\frac{y(s)+8}{8}\Big) = \sin(4\,s)\,,$$

da cui segue che

$$\frac{y(s)+8}{8} = e^{4\,s}\,,$$

e quindi che

$$y(s) = 8\,e^{\sin(4\,s)} - 8\,.$$

Si noti che l'equazione (1) può essere riscritta nella forma

$$y'(t) = 4\,\cos(4\,t)\,y(t) + 32\,\cos(4\,t)\,,$$

e quindi è anche della forma

$$y'(t) = a(t)\,y(t) + b(t)\,,$$

con

$$a(t) = 4\,\cos(4\,t)\,, \qquad b(t) = 32\,\cos(4\,t)\,.$$

Per tale equazione, assegnando la condizione $y(0)=0$, si ha la formula risolutiva

$$y(t) = e^{A(t)}\Big(\int_0^t b(s)\,e^{-A(s)}\,ds\Big)\,, \tag{3}$$

dove

$$A(t) = \int_0^t a(s)\,ds = \int_0^t 4\,\cos(4\,s)\,ds = \sin(4\,s)\Big|_0^t = \sin(4\,t)\,.$$

Pertanto, dalla (3) si ha che

$$y(t) = e^{\sin(4\,t)}\Big(32\int_0^t \cos(4\,s)\,e^{-\sin(4\,s)}\,ds\Big)\,.$$

Per calcolare l'ulitmo integrale, poniamo $z = \sin(4\,s)$, da cui $dz = 4\,\cos(4\,s)\,ds$. Si ha quindi

$$32\int_0^t \cos(4\,s)\,e^{-\sin(4\,s)}\,ds = 8\int_0^{\sin(4\,t)} e^{-z}\,dz = 8\,(1 - e^{-\sin(4\,t)})\,,$$

cosicché la soluzione di (1) tale che $y(0)=0$ è data da

$$y(t) = 8\,e^{\sin(4\,t)}\,(1 - e^{-\sin(4\,t)}) = 8\,e^{\sin(4\,t)} - 8\,,$$

come trovato in precedenza.

**6)** Si consideri il problema di Cauchy

$$(1) \qquad \begin{cases} y''(t) - 4\,y'(t) + 4\,y(t) = 20\,, \\ y(0) = 6\,, \quad y'(0) = 0\,. \end{cases}$$

**a)** Quante soluzioni ha (1)? E quante tali che $y''(0) = 19$?
**b)** Scrivere tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata all'equazione di (1).
**c)** Determinare una soluzione particolare dell'equazione di (1), e scrivere tutte le soluzioni dell'equazione di (1).
**d)** Determinare la soluzione di (1).

---

**Soluzione:**
**a)** Il problema di Cauchy (1) ha un'unica soluzione. Se $y(t)$ è tale soluzione, si ha, sostituendo $t = 0$ nell'equazione, che

$$y''(0) = y''(0) - 4 \cdot 0 + 4 \cdot 0 = y''(0) - 4\,y'(0) + 4\,y(0) = 20\,.$$

Pertanto, per tale soluzione si ha $y''(0) = 20 \neq 19$, e quindi non esistono soluzioni di (1) tali che $y''(0) = 19$.

**b)** L'equazione omogenea associata all'equazione di (1) è

$$y_0''(t) - 4\,y_0'(t) + 4\,y_0(t) = 0\,,$$

il cui polinomio caratteristico è

$$P(L) = L^2 - 4\,L + 4\,,$$

che ha come soluzioni $L_{1,2} = 2$. Ne segue pertanto che tutte le soluzioni di (2) sono date da

$$y_0(t) = (C + D\,t)\,\mathrm{e}^{2\,t}\,,$$

con $C$ e $D$ numeri reali.

**c)** Dato che le funzioni costanti non sono soluzioni dell'equazione omogenea, cerchiamo una soluzione particolare dell'equazione di (1) nella forma $\overline{y}(t) = Q$, con $Q$ numero reale. Sostituendo, e dato che $\overline{y}'(t) = \overline{y}''(t) = 0$, si ha che deve essere

$$\overline{y}''(t) - 4\,\overline{y}'(t) + 4\,\overline{y}(t) = 4\,Q = 20\,,$$

da cui segue $Q = 5$. Ne segue che tutte le soluzioni dell'equazione di (1) sono date da

$$(2) \qquad y(t) = y_0(t) + \overline{y}(t) = (C + D\,t)\,\mathrm{e}^{2\,t} + 5\,.$$

**d)** Se $y(t)$ è data da (2), si ha, derivando,

$$y'(t) = D\,\mathrm{e}^{2\,t} + 2\,(C + D\,t)\,\mathrm{e}^{2\,t}\,.$$

Pertanto,

$$y(0) = C + 5\,, \qquad y'(0) = D + 2\,C\,.$$

Imponendo le condizioni $y(0) = 6$ e $y'(0) = 0$, si ha

$$C = 1\,, \qquad D = -2\,C = -2\,,$$

e quindi l'unica soluzione di (1) è data da

$$y(t) = (1 - 2\,t)\,\mathrm{e}^{2\,t} + 5\,.$$