Soluzioni del compito 00043

1) Sia $a_k > 0$ una successione tale che

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k \quad \text{è convergente.}$$

Osserviamo che dato che la serie è convergente, si ha

$$\lim_{k\to+\infty} a_k = 0\,. \tag{1}$$

1A) La successione $a_k^8 + a_k^7$ tende a zero.

Vero: Per la (1), e per i teoremi sui limiti, si ha

$$\lim_{k\to+\infty} a_k^8 + a_k^7 = 0 + 0 = 0\,.$$

1B) La serie di termine generico $\frac{e^{a_k}}{k^6}$ è convergente.

Vero: Dato che e^{a_k} tende a 1 (per la (1)), si ha

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\frac{e^{a_k}}{k^6}}{\frac{1}{k^6}} = 1\,.$$

Per il criterio del confronto asintotico, la serie data ha lo stesso comportamento della serie di termine generico $\frac{1}{k^6}$, che converge essendo una serie armonica generalizzata di esponente $\alpha = 6 > 1$.

1C) La serie di termine generico $\frac{k\,a_k}{a_k + 5\,k^2}$ è convergente.

Vero: Si ha, dato che $a_k > 0$ e che $k \geq 1$,

$$0 \leq \frac{k\,a_k}{a_k + 5\,k^2} \leq \frac{k\,a_k}{5\,k^2} = \frac{a_k}{5\,k} \leq \frac{a_k}{5}\,.$$

Dato che la serie di termine generico $\frac{a_k}{5}$ è convergente per ipotesi, la serie data è convergente per il criterio del confronto.

1D) La serie di termine generico $\frac{e^{8\,a_k^2} - 1}{a_k}$ è convergente.

Vero: Per la (1), e per uno dei limiti notevoli, si ha

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\frac{e^{8\,a_k^2}-1}{a_k}}{a_k} = \lim_{k\to+\infty} \frac{e^{8\,a_k^2} - 1}{8\,a_k^2}\,8 = 1 \cdot 8 = 8 \in (0, +\infty)\,.$$

Per il criterio del confronto asintotico, la serie data converge, dato che ha lo stesso carattere della serie di termine generico a_k.

---

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false

2A)

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \cos\left(\frac{1}{k^9+7}\right) \sin\left(\frac{1}{\sqrt[4]{k}}\right) \text{ converge.}$$

Falso: Dato che

$$\lim_{k\to+\infty} \cos\left(\frac{1}{k^9+7}\right) = 1 \in (0,+\infty)\,,$$

la serie data si comporta (per il criterio del confronto asintotico) come la serie di termine generico

$$b_k = \sin\left(\frac{1}{\sqrt[4]{k}}\right),$$

la quale (per il limite notevole di $\frac{\sin(x)}{x}$ e nuovamente per il criterio del confronto asintotico) si comporta come la serie di termine generico

$$\frac{1}{\sqrt[4]{k}} = \frac{1}{k^{\frac{1}{4}}}\,,$$

che diverge essendo una serie armonica generalizzata di esponente $\alpha = \frac{1}{4} < 1$.

2B)

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \tan\left(\frac{9^k\,k^4}{k!}\right) \text{ converge.}$$

Vero: Dato che

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{9^k\,k^4}{k!} = \lim_{k\to+\infty} \frac{18^k}{k!}\cdot\frac{k^4}{2^k} = 0\cdot 0 = 0\,,$$

e dato che

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1\,,$$

la serie data si comporta (per il criterio del confronto asintotico) come la serie di termine generico

$$b_k = \frac{9^k\,k^4}{k!}\,.$$

Applichiamo il criterio del rapporto a b_k:

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{b_{k+1}}{b_k} = \lim_{k\to+\infty} \frac{\frac{9^{k+1}\,(k+1)^4}{(k+1)!}}{\frac{9^k\,k^4}{k!}} = \lim_{k\to+\infty} 9\left(\frac{k+1}{k}\right)^4 \frac{1}{k+1} = 9\cdot 1^4\cdot 0 = 0 < 1\,.$$

Pertanto la serie di termine generico b_k converge, e quindi converge anche la serie data.

2C)

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \cos\left(\frac{1}{k^4}\right) \text{ è indeterminata.}$$

Vero: Dato che il termine generico non tende a zero, e che la serie è a segni alterni, la serie è indeterminata.

2D)

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \log\left(1+\frac{1}{\sqrt[8]{k}}\right) \text{ converge assolutamente.}$$

Falso: La serie dei valori assoluti è la serie di termine generico

$$b_k = \log\left(1 + \frac{1}{\sqrt[8]{k}}\right).$$

Dato che $\log(1 + x) \approx x$, si ha

$$b_k \approx \frac{1}{\sqrt[8]{k}} = \frac{1}{k^{\frac{1}{8}}},$$

e quindi la serie di termine generico b_k è divergente avendo lo stesso comportamento di una serie armonica generalizzata di esponente $\alpha = \frac{1}{8} < 1$.

---

3) Sia $f(x) = x^6 \sin(6\,x)$.

Ricordando che

$$\sin(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\, t^{2k+1}\,, \qquad \forall t \in \mathbb{R}\,,$$

si ha, per il principio di sostituzione,

$$f(x) = x^6 \sin(6\,x) = x^6 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\,(6\,x)^{2k+1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k\,6^{2k+1}}{(2k+1)!}\,x^{2k+7}\,, \qquad \forall x \in \mathbb{R}\,. \tag{1}$$

3A) Il raggio di convergenza della serie di Taylor di $f(x)$ è finito.

Falso: Dalla (1) segue che il raggio di convergenza della serie è infinito.

3B) Il coefficiente del termine di grado 7 della serie di Taylor di $f(x)$ è diverso da zero.

Vero: Dalla (1) si ha che

$$f(x) = 6\,x^7 + \text{ termini di grado maggiore di } 7\,,$$

e quindi il coefficiente del termine di grado 7 vale 6, che è diverso da zero.

3C) Se $g(x) = \frac{f(x)}{x^5}$, si ha $g''(0) = 12$.

Vero: Dalla (1) segue che

$$g(x) = \frac{f(x)}{x^5} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k\,6^{2k+1}}{(2k+1)!}\,x^{2k+2} = 6\,x^2 + \text{ termini di grado superiore a } 2\,.$$

Dall'ultima espressione, si vede che $g''(0) = 12$. Alternativamente, dalla formula della serie di Taylor di $g(x)$, si ha $g''(0) = 2!\,a_2 = 12$ dato che $a_2 = 6$.

3D) Si ha $f^{(9)}(0) = -\frac{9!}{3!}$.

Falso: Dalla (1) si ha che

$$f(x) = 6\,x^7 - \frac{6^3}{3!}\,x^9 + \text{ termini di grado superiore a } 9.$$

Dato che il coefficiente del termine di grado 9 nel polinomio di Taylor di $f(x)$ è dato da

$$\frac{f^{(9)}(0)}{9!}\,,$$

si ha

$$f^{(9)}(0) = -\frac{6^3\,9!}{3!} \neq -\frac{9!}{3!}\,.$$

---

4) Si consideri la serie di potenze

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k\,(8\,x-9)^k\,.$$

Si ha

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k\,(8\,x-9)^k = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k\,8^k\left(x-\frac{9}{8}\right)^k. \tag{1}$$

4A) Il centro della serie è $x_0 = \frac{9}{8}$.

Vero: Dalla (1), segue che il centro della serie è $x_0 = \frac{9}{8}$.

4B) Se $a_k = 6$ per ogni k, il raggio di convergenza delle serie è $R = \frac{1}{8}$.

Vero: Se $a_k = 6$ per ogni k, dalla (1) segue che i coefficienti della serie di potenze sono

$$b_k = 6\cdot 8^k\,.$$

Si ha

$$L = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{b_k} = \lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{6\cdot 8^k} = 8\,,$$

da cui segue che il raggio di convergenza della serie è $R = \frac{1}{L} = \frac{1}{8}$.

4C) Se $a_k = \frac{1}{9^k}$, il raggio di convergenza della serie è $R = \frac{9}{8}$.

Vero: Se $a_k = \frac{1}{9^k}$, dalla (1) segue che i coefficienti della serie di potenze sono

$$b_k = \frac{8^k}{9^k} = \left(\frac{8}{9}\right)^k.$$

Dato che

$$L = \lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{b_k} = \frac{8}{9}\,,$$

il raggio di convergenza della serie è $R = \frac{1}{L} = \frac{9}{8}$.

4D) Se $a_k = \frac{1}{\sqrt[4]{k}}$, la serie converge per $x = 1$.

Vero: Se $a_k = \frac{1}{\sqrt[4]{k}}$ e $x = 1$ la serie diventa

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{k}}\,(8\cdot 1-9)^k = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k\,\frac{1}{\sqrt[4]{k}}\,.$$

che converge per il criterio di Leibnitz dato che la successione $b_k = 1/\sqrt[4]{k}$ è positiva, decrescente e infinitesima.

---

5) a) Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} 8^k \sin\Big(\frac{1}{9^k}\Big).$$

b) Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \Big(\frac{1}{\sqrt[29]{k^{10}}} - \sin\Big(\frac{1}{\sqrt[29]{k^{10}}}\Big)\Big).$$

c) Scrivere la serie di Taylor di $f(x) = x^{11} \sin(3\,x^2)$ e calcolare $f^{(12)}(0)$.
d) Data $f(x) = x\,\mathrm{e}^{5\,x^2}$, calcolare $f^{(3)}(0)$ e $f^{(4)}(0)$.

Soluzione:
a) Ricordando che

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1\,, \qquad \lim_{k\to +\infty} \frac{1}{9^k} = 0\,,$$

si ha

$$a_k = 8^k \sin\Big(\frac{1}{9^k}\Big) \approx \frac{8^k}{9^k} = \Big(\frac{8}{9}\Big)^k,$$

che è il termine generico di una serie geometrica di ragione $q = \frac{8}{9}$. Dato che $q = \frac{8}{9} < 1$, la serie data converge per il criterio del confronto asintotico.

b) Ricordando che

$$\sin(t) = t - \frac{t^3}{6} + \mathrm{o}(t^3)\,,$$

da cui segue che

$$t - \sin(t) = \frac{t^3}{6} + \mathrm{o}(t^3)\,,$$

si ha che

$$\frac{1}{\sqrt[29]{k^{10}}} - \sin\Big(\frac{1}{\sqrt[29]{k^{10}}}\Big) = \frac{1}{6}\,\frac{1}{(\sqrt[29]{k^{10}})^3} + \mathrm{o}\Big(\frac{1}{(\sqrt[29]{k^{10}})^3}\Big).$$

Dato che

$$(\sqrt[29]{k^{10}})^3 = k^{\frac{30}{29}}\,,$$

la serie di termine generico

$$\frac{1}{6}\,\frac{1}{(\sqrt[29]{k^{10}})^3}$$

è convergente (come serie armonica generalizzata di esponente $\alpha = \frac{30}{29} > 1$). Ne segue pertanto che la serie data è convergente per il criterio del confronto asintotico.

c) Ricordando che

$$\sin(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\, t^{2k+1}\,, \qquad \forall t \in \mathbb{R}\,,$$

si ha

$$\sin(3\,x^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k 3^{2k+1}}{(2k+1)!}\, x^{4k+2}\,,$$

e quindi

$$f(x) = x^{11} \sin(3\,x^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k 3^{2k+1}}{(2k+1)!}\, x^{4k+13} = 3\,x^{13} + \text{ termini di grado superiore a 13.}$$

Dato che nella serie non compaiono termini di grado 12, si ha $f^{(12)}(0) = 0$.

d) Ricordando che
$$\mathrm{e}^t = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \mathrm{o}(t^2)\,,$$
si ha
$$\mathrm{e}^{5\,x^2} = 1 + 5\,x^2 + \frac{(5\,x^2)^2}{2} + \mathrm{o}((x^2)^2) = 1 + 5\,x^2 + \frac{25}{2}\,x^4 + \mathrm{o}(x^4)\,,$$
e quindi
$$f(x) = x\,\mathrm{e}^{5\,x^2} = x + 5\,x^3 + \frac{25}{2}\,x^5 + \mathrm{o}(x^5)\,.$$
Dall'ultima espressione segue facilmente che $f^{(3)}(0) = 5 \cdot 3! = 30$ e che $f^{(4)}(0) = 0$.

6) Si consideri la serie
$$\sum_{k=3}^{+\infty} \frac{(10\,x-9)^k}{k\,(k-1)\,(k-2)}\,.$$
a) Si scriva la serie come serie di potenze e se ne determinino il centro e i coefficienti.
b) Si determini il raggio di convergenza della serie di potenze.
c) Si determini l'insieme di convergenza della serie di potenze.
d) Si calcoli $f^{(3)}(x)$.

Soluzione:
a) Si ha
$$\sum_{k=3}^{+\infty} \frac{(10\,x-9)^k}{k\,(k-1)\,(k-2)} = \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{10^k}{k\,(k-1)\,(k-2)} \left(x-\frac{9}{10}\right)^k,$$
che è una serie di potenze di centro $x_0 = \frac{9}{10}$ e di coefficienti
$$a_k = \frac{10^k}{k\,(k-1)\,(k-2)}\,.$$

b) Dato che
$$a_k = \frac{10^k}{k\,(k-1)\,(k-2)}\,,$$
si ha
$$L = \lim_{k\to+\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to+\infty} 10\,\frac{k-2}{k+1} = 10\,,$$
da cui segue che il raggio di convergenza della serie è $R = \frac{1}{L} = \frac{1}{10}$.
c) Dato che $R = \frac{1}{10}$, la serie converge se x è tale che $|x-9/10| < 1/10$, e non converge se x è tale che $|x-9/10| > 1/10$. Svolgendo la disuguaglianza, si ha che la serie converge se x appartiene a
$$I = \left(\frac{4}{5}, 1\right)\,.$$
Rimangono da studiare i due casi $x = 4/5$ e $x = 1$, in corrispondenza dei quali si trovano le due serie
$$\sum_{k=3}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k\,(k-1)\,k-2)} \quad \text{e} \quad \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{1}{k\,(k-1)\,k-2)}\,.$$
Dato che entrambe le serie sono convergenti (per Leibnitz la prima, per confronto con la serie $\frac{1}{k^3}$ la seconda), l'insieme di convergenza della serie è l'intervallo
$$J = \left[\frac{4}{5}, 1\right]\,.$$

d) Partendo dalla serie originale, e derivando, si trova
$$f'(x) = \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{10\,k}{k\,(k-1)\,(k-2)}\,(10\,x-9)^{k-1} = \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{10}{(k-1)\,(k-2)}\,(10\,x-9)^{k-1}\,.$$
Derivando ulteriormente, si trova
$$f''(x) = \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{10^2}{k-2}\,(10\,x-9)^{k-2}\,,$$
e
$$f^{(3)}(x) = \sum_{k=3}^{+\infty} 10^3\,(10\,x-9)^{k-3} = 10^3 \sum_{h=0}^{+\infty} (10\,x-9)^h\,.$$

Ricordando la formula per la somma di una serie geometrica si ha pertanto

$$f^{(3)}(x) = \frac{10^3}{1-(10\,x-9)} = \frac{10^3}{10-10\,x}\,.$$