



Calcolo integrale — Scheda di esercizi n. 8
18 Maggio 2023 — Compito n. 00120

Istruzioni: le prime due caselle (**V** / **F**) permettono di selezionare la risposta vero/falso. La casella “**C**” serve a correggere eventuali errori invertendo la risposta data. Per selezionare una casella, annerirla completamente: ☐ (non ☐ o ☐).

Nome: _____

Cognome: _____

Matricola:

--	--	--	--	--	--	--	--

	1A	1B	1C	1D	2A	2B	2C	2D	3A	3B	3C	3D	4A	4B	4C	4D
V	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
F	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
C	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

1) Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(t) = (4t + 2)y(t) + Ae^{2t^2+2t}.$$

1A) Esistono infinite soluzioni dell'equazione tali che $y(6) = 5$.

1B) Se $A = 0$, la funzione $y(t) = 5e^{2t^2+2t}$ è soluzione dell'equazione.

1C) La funzione $y(t) = (2 + At)e^{2t^2+2t}$ non è soluzione dell'equazione.

1D) Se $y(0) = 0$ e $A = 2$, si ha

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = +\infty.$$

2) Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(t) = 8 \cos(t) y(t) + 9 \sin(t) \cos(t).$$

2A) Se $y(0) = 0$, si ha $y'(0) = 0$.

2B) Se $y(0) = 0$, si ha $y''(0) = 9$.

2C) Se $y(0) = 6$, la soluzione $y(t)$ è decrescente in un intorno di $t = 0$.

2D) Se $y(\frac{\pi}{2}) = 2$, si ha $T_1(y(t); \frac{\pi}{2}) = 2 + (t - \frac{\pi}{2})$.

3) Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(t) = \frac{e^{y(t)} - 1}{e^{y(t)}} \cos(t).$$

3A) L'equazione è a variabili separabili.

3B) Se $y(0) = 0$, la soluzione $y(t)$ è costante.

3C) Se $y(0) = 6$, non esiste $t_0 > 0$ tale che $y(t_0) = 0$.

3D) Se $y(0) = \ln(4)$, si ha

$$y(s) = \ln(3e^{\sin(s)} + 1).$$

4) Si consideri l'equazione differenziale $y'(t) = t(y(t)^3 - 9y(t))$.

4A) Se $y(0) = 3$, la soluzione non è costante.

4B) Se $y(0) = 1$, si ha $y'(0) \neq 0$.

4C) Se $y(0) = -1$, si ha $T_2(y(t); 0) = -1 + 4t^2$.

4D) Se $y(0) = 1$, la soluzione ha un minimo relativo per $t = 0$.

Docente

- ☐ DelaTorre Pedraza
☐ Orsina

--	--	--	--	--	--	--	--

Cognome

Nome

Matricola

Compito 00120

5) Si consideri il problema di Cauchy

$$(1) \quad \begin{cases} y'(t) = a(t) y(t) + b(t), \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

a) Si risolva (1) se $a(t) = -10$, $b(t) = 3$ e $y_0 = 0$.

b) Si risolva (1) se $a(t) = \sin(t)$, $b(t) = 6 \sin(t)$ e $y(0) = \pi$.

c) Si scriva il polinomio di Taylor di ordine 1 di $y(t)$ nell'origine se $a(t) = e^{4t}$, $b(t) = 13 \cos(t)$ e $y_0 = 3$.

d) Si scriva il polinomio di Taylor di ordine 2 di $y(t)$ nell'origine se $a(t) = 10t$, $b(t) = 13t^2$ e $y_0 = 7$.

--	--	--	--	--	--	--	--

Cognome

Nome

Matricola

Compito 00120

6) Si risolvano le seguenti equazioni differenziali a variabili separabili.

a) $y'(t) = 8y(t) + 13$, se $y(0) = 0$.

b) $y'(t) = 4t(36 + y^2(t))$, se $y(0) = 0$.

c) $y'(t) = e^{-y(t)} e^{5t}$, se $y(0) = 0$.

d) $y'(t) = \frac{7(1+y^2(t))}{y(t)}$, se $y(0) = 1$.

Soluzioni del compito 00120

1) Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(t) = (4t + 2)y(t) + A e^{2t^2+2t}.$$

Ricordiamo la formula risolutiva per il problema di Cauchy

$$(1) \quad \begin{cases} y'(t) = a(t)y(t) + b(t), \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

Posto

$$A(t) = \int_{t_0}^t a(s) ds,$$

si ha

$$(2) \quad y(t) = e^{A(t)} \left[y_0 + \int_{t_0}^t b(s) e^{-A(s)} ds \right].$$

1A) Esistono infinite soluzioni dell'equazione tali che $y(6) = 5$.

Falso: Trattandosi di un'equazione differenziale ordinaria del primo ordine, è sufficiente una sola condizione iniziale affinché esista un'unica soluzione.

1B) Se $A = 0$, la funzione $y(t) = 5 e^{2t^2+2t}$ è soluzione dell'equazione.

Vero: Se $y(t) = 5 e^{2t^2+2t}$, si ha

$$y'(t) = 5(4t + 2)e^{2t^2+2t} = (4t + 2)y(t) = (4t + 2)y(t) + A e^{2t^2+2t},$$

e quindi $y(t)$ è soluzione dell'equazione.

1C) La funzione $y(t) = (2 + At)e^{2t^2+2t}$ non è soluzione dell'equazione.

Falso: Se $y(t) = (2 + At)e^{2t^2+2t}$, derivando si ha

$$y'(t) = A e^{2t^2+2t} + (2 + At)(4t + 2)e^{2t^2+2t} = (4t + 2)y(t) + A e^{2t^2+2t},$$

e quindi $y(t)$ è soluzione dell'equazione.

1D) Se $y(0) = 0$ e $A = 2$, si ha

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = +\infty.$$

Vero: Il problema rientra nel caso (1) con

$$a(t) = 4t + 2, \quad b(t) = 2 e^{2t^2+2t}, \quad t_0 = 0, \quad y_0 = 0.$$

Dato che

$$A(t) = \int_0^t a(s) ds = \int_0^t (4s + 2) ds = (2s^2 + 2s) \Big|_0^t = 2t^2 + 2t,$$

e dato che

$$\int_0^t b(s) e^{-A(s)} ds = \int_0^t 2 e^{2s^2+2s} e^{-(2s^2+2s)} ds = \int_0^t 2 ds = 2t,$$

dalla (2) si ha

$$y(t) = 2t e^{2t^2+2t},$$

da cui segue che

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = +\infty.$$

2) Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(t) = 8 \cos(t) y(t) + 9 \sin(t) \cos(t).$$

Derivando l'equazione si ha

$$(1) \quad y''(t) = -8 \sin(t) y(t) + 8 \cos(t) y'(t) + 9 \cos^2(t) - 9 \sin^2(t).$$

2A) Se $y(0) = 0$, si ha $y'(0) = 0$.

Vero: Dall'equazione, sostituendo $t = 0$, si ha

$$y'(0) = 8 \cos(0) y(0) + 9 \sin(0) \cos(0) = 8 \cdot 1 \cdot 0 + 9 \cdot 0 \cdot 1 = 0.$$

2B) Se $y(0) = 0$, si ha $y''(0) = 9$.

Vero: Dall'equazione con $t = 0$ si ha (si veda l'esercizio **2A**)

$$y'(0) = 0.$$

Dalla (1) con $t = 0$ si ha

$$y''(0) = 9,$$

dato che il primo, secondo e quarto termine si annullano.

2C) Se $y(0) = 6$, la soluzione $y(t)$ è decrescente in un intorno di $t = 0$.

Falso: Dall'equazione si ha

$$y'(0) = 8 \cdot \cos(0) \cdot y(0) = 8 \cdot 6 = 48 > 0,$$

per ipotesi. Essendo $y'(0) > 0$, si ha $y'(t) > 0$ in un intorno dell'origine (per il teorema di permanenza del segno per funzioni continue) e quindi $y(t)$ è crescente in un intorno dell'origine.

2D) Se $y(\frac{\pi}{2}) = 2$, si ha $T_1(y(t); \frac{\pi}{2}) = 2 + (t - \frac{\pi}{2})$.

Falso: Dall'equazione si ha

$$y'(\frac{\pi}{2}) = 8 \cos(\frac{\pi}{2}) y(\frac{\pi}{2}) + 9 \sin(\frac{\pi}{2}) \cos(\frac{\pi}{2}) = 8 \cdot 0 \cdot 2 + 9 \cdot 1 \cdot 0 = 0.$$

Ricordando che

$$T_1(y(t); \frac{\pi}{2}) = y(\frac{\pi}{2}) + y'(\frac{\pi}{2}) (t - \frac{\pi}{2}),$$

si ha

$$T_1(y(t); \frac{\pi}{2}) = 2 \neq 2 + (t - \frac{\pi}{2}).$$

3) Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(t) = \frac{e^{y(t)} - 1}{e^{y(t)}} \cos(t).$$

Osserviamo che l'equazione è a variabili separabili, essendo della forma

$$y'(t) = f(y(t)) g(t),$$

con

$$f(s) = \frac{e^s - 1}{e^s}, \quad g(t) = \cos(t).$$

Dato che $f(0) = 0$, se all'equazione abbiniamo la condizione iniziale $y(0) = 0$ abbiamo la soluzione costante $y(t) \equiv 0$. Se, invece $y(0) = y_0 > 0$ allora $y(t) \neq 0$ per ogni t e possiamo separare le variabili, riscrivendo l'equazione come

$$\frac{e^{y(t)} y'(t)}{e^{y(t)} - 1} = \cos(t).$$

Integrando tra zero e s si ha

$$\int_0^s \frac{e^{y(t)} y'(t)}{e^{y(t)} - 1} dt = \int_0^s \cos(t) dt = \sin(s).$$

Per il primo integrale, con la sostituzione $z = y(t)$, da cui $dz = y'(t) dt$, si ha

$$\int_0^s \frac{e^{y(t)} y'(t)}{e^{y(t)} - 1} dt = \int_{y_0}^{y(s)} \frac{e^z}{e^z - 1} dz.$$

Con la sostituzione $w = e^z - 1$, da cui $dw = e^z dz$, si ha

$$\int_{y_0}^{y(s)} \frac{e^z}{e^z - 1} dz = \int_{e^{y_0}-1}^{e^{y(s)}-1} \frac{dw}{w} = \ln(|w|) \Big|_{e^{y_0}-1}^{e^{y(s)}-1} = \ln \left(\left| \frac{e^{y(s)} - 1}{e^{y_0} - 1} \right| \right).$$

Essendo $y_0 > 0$ possiamo levare i moduli (perché?) e scrivere che

$$\ln \left(\frac{e^{y(s)} - 1}{e^{y_0} - 1} \right) = \sin(s),$$

da cui segue, dopo alcuni calcoli, che

$$(1) \quad y(s) = \ln[(e^{y_0} - 1)e^{\sin(s)} + 1].$$

Osserviamo di passaggio che la (1) è valida anche nel caso in cui $y_0 = 0$.

3A) L'equazione è a variabili separabili.

Vero: Per quanto detto sopra, l'equazione è a variabili separabili.

3B) Se $y(0) = 0$, la soluzione $y(t)$ è costante.

Vero: Dato che $f(y_0) = f(0) = 0$, la funzione costante $y(t) \equiv y_0 = 0$ è soluzione dell'equazione.

3C) Se $y(0) = 6$, non esiste $t_0 > 0$ tale che $y(t_0) = 0$.

Vero: Se esistesse $t_0 > 0$ tale che $y(t_0) = 0$, il problema di Cauchy con dato iniziale $y(t_0) = 0$ avrebbe due soluzioni: la funzione $y(t)$ che stiamo considerando (e che non è la funzione nulla dato che in $t = 0$ vale 6), e la funzione $w(t) \equiv 0$. Dato che il problema di Cauchy ha un'unica soluzione, si ha $y(t) \neq 0$ per ogni $t > 0$.

3D) Se $y(0) = \ln(4)$, si ha

$$y(s) = \ln(3e^{\sin(s)} + 1).$$

Vero: Dalla (1), con $y_0 = \ln(4)$, da cui segue che $e^{y_0} - 1 = 4 - 1 = 3$, si ha

$$y(s) = \ln(3 e^{\sin(s)} + 1).$$

4) Si consideri l'equazione differenziale $y'(t) = t(y(t)^3 - 9y(t))$.

Osserviamo che l'equazione è a variabili separabili, essendo della forma

$$y'(t) = f(y(t)) g(t),$$

con

$$(1) \quad f(s) = s^3 - 9s, \quad g(t) = t.$$

4A) Se $y(0) = 3$, la soluzione non è costante.

Falso: Se $f(s)$ è come in (1), dato che si ha $f(3) = 0$, la funzione costante $y(t) \equiv 3$ è soluzione dell'equazione.

4B) Se $y(0) = 1$, si ha $y'(0) \neq 0$.

Falso: Dall'equazione, scritta per $t = 0$, si ha

$$y'(0) = 0 \cdot (y(0)^3 - 9y(0)) = 0 \cdot (1 - 9) = 0.$$

4C) Se $y(0) = -1$, si ha $T_2(y(t); 0) = -1 + 4t^2$.

Vero: Derivando l'equazione si ha

$$y''(t) = y(t)^3 - 9y(t) + t(3y(t)^2 - 9)y'(t),$$

da cui segue che $y''(0) = 8$. Dato che dall'equazione segue che $y'(0) = 0$ (si veda l'esercizio **4B**), si ha

$$T_2(y(t); 0) = y(0) + y'(0)t + \frac{y''(0)}{2}t^2 = -1 + 4t^2.$$

4D) Se $y(0) = 1$, la soluzione ha un minimo relativo per $t = 0$.

Falso: Derivando l'equazione si ha

$$y''(t) = y(t)^3 - 9y(t) + t(3y(t)^2 - 9)y'(t),$$

da cui segue che $y''(0) = -8 < 0$. Dato che dall'equazione segue che $y'(0) = 0$ (si veda l'esercizio **4B**), si ha che $t = 0$ è un punto di massimo relativo per $y(t)$.

5) Si consideri il problema di Cauchy

$$(1) \quad \begin{cases} y'(t) = a(t) y(t) + b(t), \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

a) Si risolva (1) se $a(t) = -10$, $b(t) = 3$ e $y_0 = 0$.

b) Si risolva (1) se $a(t) = \sin(t)$, $b(t) = 6 \sin(t)$ e $y(0) = \pi$.

c) Si scriva il polinomio di Taylor di ordine 1 di $y(t)$ nell'origine se $a(t) = e^{4t}$, $b(t) = 13 \cos(t)$ e $y_0 = 3$.

d) Si scriva il polinomio di Taylor di ordine 2 di $y(t)$ nell'origine se $a(t) = 10t$, $b(t) = 13t^2$ e $y_0 = 7$.

Soluzione:

Ricordiamo che la soluzione del problema di Cauchy (1) è data da

$$(2) \quad y(t) = e^{A(t)} \left[y_0 + \int_0^t b(s) e^{-A(s)} ds \right], \quad \text{dove} \quad A(t) = \int_0^t a(s) ds.$$

a) Dato che $a(t) = -10$, si ha

$$A(t) = - \int_0^t 10 ds = -10t.$$

Pertanto, per la (2) si ha

$$y(t) = e^{-10t} \left[0 + \int_0^t 3 e^{10s} ds \right] = e^{-10t} \left[\frac{3}{10} e^{10s} \Big|_0^t \right] = \frac{3}{10} e^{-10t} [e^{10t} - 1] = \frac{3}{10} [1 - e^{-10t}].$$

b) Dato che $a(t) = \sin(t)$, si ha

$$A(t) = \int_0^t \sin(s) ds = -\cos(s) \Big|_0^t = 1 - \cos(t),$$

e quindi, per la (2),

$$y(t) = e^{1-\cos(t)} \left[\pi + \int_0^t 6 \sin(s) e^{\cos(s)-1} ds \right].$$

Con il cambio di variabile $z = \cos(s) - 1$, da cui $dz = -\sin(s) ds$, si ha

$$\int_0^t 6 \sin(s) e^{\cos(s)-1} ds = -6 \int_0^{\cos(t)-1} e^z dz = -6 e^z \Big|_0^{\cos(t)-1} = 6(1 - e^{\cos(t)-1}).$$

Pertanto

$$y(t) = e^{1-\cos(t)} [\pi + 6(1 - e^{\cos(t)-1})] = (\pi + 6) e^{1-\cos(t)} - 6.$$

c) Dall'equazione si ha

$$y'(0) = e^{4 \cdot 0} y(0) + 13 \cos(0) = 1 \cdot 3 + 13 = 16,$$

da cui segue che

$$T_1(y(t); 0) = y(0) + y'(0)t = 3 + 16t.$$

d) Dall'equazione si ha

$$y'(0) = 10 \cdot 0 \cdot y(0) + 13 \cdot 0^2 = 0.$$

Derivando l'equazione si ha poi

$$y''(t) = 10 y(t) + 10 t y'(t) + 26 t,$$

da cui segue che

$$y''(0) = 10 y(0) + 10 \cdot 0 \cdot y'(0) + 26 \cdot 0 = 70.$$

Si ha quindi

$$T_2(y(t); 0) = y(0) + y'(0)t + \frac{y''(0)}{2} t^2 = 7 + 35t^2.$$

6) Si risolvano le seguenti equazioni differenziali a variabili separabili.

a) $y'(t) = 8y(t) + 13$, se $y(0) = 0$.

b) $y'(t) = 4t(36 + y^2(t))$, se $y(0) = 0$.

c) $y'(t) = e^{-y(t)} e^{5t}$, se $y(0) = 0$.

d) $y'(t) = \frac{7(1+y^2(t))}{y(t)}$, se $y(0) = 1$.

Soluzione:

a) Dividendo per $8y(t) + 13$, l'equazione è equivalente a

$$\frac{y'(t)}{8y(t) + 13} = 1.$$

Integrando tra 0 e s si ha

$$\int_0^s \frac{y'(t)}{8y(t) + 13} dt = \int_0^s 1 dt = s.$$

Con la sostituzione $z = y(t)$ si ha, ricordando che $y(0) = 0$, ed osservando che $8y(s) + 13 > 0$ per s vicino a zero,

$$\int_0^s \frac{y'(t)}{8y(t) + 13} dt = \int_0^{y(s)} \frac{dz}{8z + 13} = \frac{1}{8} \ln(|8z + 13|) \Big|_0^{y(s)} = \frac{1}{8} [\ln(8y(s) + 13) - \ln(13)].$$

Pertanto,

$$\frac{1}{8} [\ln(8y(s) + 13) - \ln(13)] = s,$$

da cui segue (dopo facili calcoli...) che

$$\frac{8y(s) + 13}{13} = e^{8s},$$

e quindi che

$$y(s) = \frac{13e^{8s} - 13}{8}.$$

b) Separando le variabili, si ha che deve essere

$$\frac{y'(t)}{36 + y^2(t)} = 4t.$$

Integrando (con la consueta sostituzione $z = y(t)$) si ha

$$\int_0^{y(s)} \frac{dz}{36 + z^2} = \int_0^s 4t dt = 2s^2.$$

Dato che

$$\int \frac{dz}{36 + z^2} = \frac{1}{6} \arctan\left(\frac{z}{6}\right),$$

si ha

$$\frac{1}{6} \arctan\left(\frac{y(s)}{6}\right) = 2s^2,$$

da cui segue che

$$y(s) = 6 \tan(12s^2).$$

c) Separando le variabili si arriva a

$$\int_0^{y(s)} e^z dz = \int_0^s e^{5t} dt = \frac{e^{5s} - 1}{5}.$$

Il primo integrale è immediato, e porta a

$$e^{y(s)} - 1 = \frac{e^{5s} - 1}{5},$$

da cui

$$y(s) = \ln \left(\frac{e^{5s} + 4}{5} \right).$$

d) Separando le variabili si arriva a

$$\int_1^{y(s)} \frac{z}{1+z^2} dz = \int_0^s 7 dt = 7s.$$

Dato che

$$\int \frac{z}{1+z^2} dz = \frac{1}{2} \frac{2z}{1+z^2} dz = \frac{1}{2} \ln(1+z^2),$$

si ha

$$\frac{1}{2} \ln(1+y^2(s)) - \frac{1}{2} \ln(2) = 7s,$$

da cui

$$y^2(s) = 2e^{14s} - 1,$$

e quindi

$$y(s) = \sqrt{2e^{14s} - 1}.$$

Perché, tra le due radici, si è scelta quella positiva?