

Soluzioni del compito 00057

1) Si consideri l'equazione differenziale

$$(1) \quad y''(t) - 11 y'(t) + 6 y(t) = 0.$$

1A) L'equazione (1) ha una sola soluzione costante.

Vero: Se $y(t) = Q$, con Q in \mathbb{R} , si ha $y'(t) = y''(t) = 0$; si ha pertanto che $y(t) = Q$ è soluzione se e solo se

$$y''(t) - 11 y'(t) + 6 y(t) = 6 Q = 0,$$

ovvero se e solo se $Q = 0$. Ne segue che l'unica soluzione costante è la soluzione nulla.

1B) L'equazione (1) ha infinite soluzioni tali che $y(0) = 6$.

Vero: In generale, l'equazione (1) ha infinite soluzioni dipendenti da **due** parametri reali. Assegnando una sola condizione, si “fissa” uno solo dei due parametri (o, meglio, si fissa una relazione lineare tra i due parametri), lasciando libero l'altro; pertanto, esistono infinite soluzioni di (1) tali che $y(0) = 6$.

1C) Non esistono soluzioni di (1) tali che $y(0) = 11$, $y'(0) = 6$ e $y''(0) = 0$.

Falso: Assegnando le condizioni $y(0) = 11$ e $y'(0) = 6$ si ottiene un problema di Cauchy, che ha un'unica soluzione. Per tale soluzione si ha, sostituendo $t = 0$ nell'equazione, che

$$y''(0) = 11 y'(0) - 6 y(0) = 11 \cdot 6 - 6 \cdot 11 = 0.$$

In altre parole, l'unica soluzione di (1) tale che $y(0) = 11$ e $y'(0) = 6$ verifica anche la condizione $y''(0) = 0$. Ne segue quindi che il problema proposto ha un'unica soluzione.

1D) Se $y(0) = 0$ e $y'(0) = 10$, si ha $T_2(y(t); 0) = 55 t^2$.

Falso: Assegnando le condizioni $y(0) = 0$ e $y'(0) = 10$ si trova un'unica soluzione; sostituendo $t = 0$ nell'equazione, si ha

$$y''(0) = 11 y'(0) - 6 y(0) = 11 \cdot 10 - 6 \cdot 0 = 110.$$

Pertanto, si ha

$$T_2(y(t); 0) = y(0) + y'(0) t + \frac{y''(0)}{2} t^2 = 0 + 10 t + \frac{110}{2} t^2 = 10 t + 55 t^2 \neq 55 t^2.$$

2) Si consideri l'equazione differenziale

$$(1) \quad y'(t) = e^{3t} \cos(y(t)).$$

L'equazione (1) è a variabili separabili, essendo della forma

$$y'(t) = f(t) g(y(t)),$$

con

$$(2) \quad f(t) = e^{3t}, \quad g(s) = \cos(s).$$

2A) L'equazione (1) ha soluzioni costanti.

Vero: Essendo l'equazione a variabili separabili, se y_0 è tale che $\cos(y_0) = 0$, allora $y(t) \equiv y_0$ è una soluzione costante di (1). Dato che

$$\cos(\pi/2 + k\pi) = 0, \quad \forall k \in \mathbb{Z},$$

l'equazione (1) ammette infinite soluzioni costanti date da

$$y_k(t) = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

2B) Se $y(0) = 4\pi$, si ha $y'(0) = 0$.

Falso: Se $y(0) = 4\pi$ si ha, sostituendo $t = 0$ nell'equazione,

$$y'(0) = e^{3 \cdot 0} \cos(4\pi) = 1 \cdot 1 = 1 \neq 0.$$

2C) Esistono infinite soluzioni di (1) tali che $y'(0) = 0$.

Vero: Assegnando la condizione $y_0 = \frac{\pi}{2} + k\pi$, con k in \mathbb{Z} , si trova una soluzione $y_k(t)$ per la quale si ha

$$y'_k(0) = e^{3 \cdot 0} \cos(y_k(0)) = 1 \cdot \cos(\pi/2 + k\pi) = 1 \cdot 0 = 0.$$

Ne segue che esistono infinite soluzioni (dato che le $y_k(t)$ sono tutte diverse tra loro) tali che $y'(0) = 0$. Si noti che, per quanto detto nell'esercizio **2A**, e per l'unicità della soluzione, si ha

$$y_k(t) = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

2D) Se $y(0) = 0$, la soluzione di (1) è convessa in un intorno dell'origine.

Vero: Se $y(t)$ è la soluzione di (1) tale che $y(0) = 0$, si ha, derivando l'equazione, che

$$y''(t) = [e^{3t} \cos(y(t))]' = 3e^{3t} \cos(y(t)) - e^{3t} \sin(y(t)) y'(t).$$

Sostituendo $t = 0$ in tale identità, si ha (si noti che dato che $\sin(y(0)) = \sin(0) = 0$, non è necessario il calcolo di $y'(0)$)

$$y''(0) = 3e^{3 \cdot 0} \cos(y(0)) - e^{3 \cdot 0} \sin(y(0)) y'(0) = 3 > 0.$$

Dato che $y''(0) > 0$, per il teorema della permanenza del segno si ha $y''(t) \geq 0$ in un intorno dell'origine, e quindi $y(t)$ è convessa in tale intorno.

3) Si consideri l'equazione differenziale

$$(1) \quad y'(t) = 7(1 + y^2(t)) e^{-7t}.$$

L'equazione è a variabili separabili, della forma

$$y'(t) = f(t) g(y(t)),$$

con

$$f(t) = 7e^{-7t}, \quad g(s) = 1 + s^2.$$

Dato che $g(s) \neq 0$ per ogni s in \mathbb{R} , l'equazione non ha soluzioni costanti. Dividendo per $1 + y^2(t)$ si ha

$$\frac{y'(t)}{1 + y^2(t)} = 7e^{-7t}.$$

Integrando tra 0 e s si ha

$$\int_0^s \frac{y'(t)}{1 + y^2(t)} dt = \int_0^s 7e^{-7t} dt = -e^{-7t} \Big|_0^s = 1 - e^{-7s}.$$

Per il primo integrale si ha, con la sostituzione $z = y(t)$, da cui $y'(t) dt = dz$,

$$\int_0^s \frac{y'(t)}{1 + y^2(t)} dt = \int_{y(0)}^{y(s)} \frac{dz}{1 + z^2} = \arctan(z) \Big|_{y(0)}^{y(s)} = \arctan(y(s)) - \arctan(y(0)).$$

Si ha dunque che la soluzione di (1), con dato iniziale $y(0) = y_0$ è data in forma implicita da

$$\arctan(y(s)) - \arctan(y_0) = 1 - e^{-7s},$$

da cui segue, esplicitando,

$$(2) \quad y(t) = \tan(1 - e^{-7t} + \arctan(y_0)).$$

3A) L'equazione (1) non ammette soluzioni costanti.

Vero: La funzione $g(s) = 1 + s^2$ è sempre diversa da zero, e quindi l'equazione non ammette soluzioni costanti.

3B) La soluzione di (1) tale che $y(0) = 0$ è decrescente in un intorno dell'origine.

Falso: Se $y(0) = 0$ si ha, sostituendo $t = 0$ nell'equazione,

$$y'(0) = 7(1 + y^2(0)) e^{-7 \cdot 0} = 7 \cdot 1 \cdot 1 = 7 > 0.$$

Dato che $y'(0) > 0$, per il teorema della permanenza del segno si ha $y'(t) \geq 0$ in un intorno dell'origine, e quindi $y(t)$ è crescente in tale intorno.

Alternativamente, dato che

$$7(1 + y^2(t)) e^{-7t} \geq 0,$$

si ha $y'(t) \geq 0$ per ogni t , cosicché *tutte* le soluzioni sono crescenti (a prescindere dalla condizione iniziale).

3C) La soluzione di (1) tale che $y(0) = 0$ è $y(t) = \tan(e^{-7t})$.

Falso: Dalla (2), dato che $\arctan(y_0) = \arctan(0) = 0$, si ha che la soluzione di (1) tale che $y(0) = 0$ è data da

$$y(t) = \tan(1 - e^{-7t}) \neq \tan(e^{-7t}).$$

3D) Se $y(t)$ è la soluzione di (1) tale che $y(0) = 0$, si ha

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0.$$

Falso: Dalla (2), dato che $\arctg(y_0) = \arctg(0) = 0$, si ha che la soluzione di (1) tale che $y(0) = 0$ è data da

$$y(t) = \operatorname{tg}(1 - e^{-7t}),$$

e quindi

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \operatorname{tg}(1 - e^{-7t}) = \operatorname{tg}(1) \neq 0.$$

4) Si consideri l'equazione differenziale

$$(1) \quad y''(t) + A y'(t) + B y(t) = 12.$$

4A) Se $A = B = 0$, i polinomi di primo grado non sono soluzioni di (1).

Vero: Se $A = B = 0$, l'equazione (1) diventa $y''(t) = 12$. Se $y(t) = at + b$ è un polinomio di primo grado, si ha $y'(t) = a$, e quindi $y''(t) = 0 \neq 12$. Ne segue che i polinomi di primo grado non sono soluzioni di (1). Si vede facilmente che le soluzioni di (1) sono del tipo

$$y(t) = 6t^2 + at + b,$$

con a e b in \mathbb{R} .

4B) Se $A = 4$ e $B = 48$, esiste almeno una soluzione costante di (1).

Vero: Se $A = 4$ e $B = 48$, l'equazione (1) diventa

$$y''(t) + 4y'(t) + 48y(t) = 12.$$

Se $y(t) = Q$, con Q in \mathbb{R} , si ha $y'(t) = y''(t) = 0$, e quindi $y(t)$ è soluzione di (1) se e solo se

$$48Q = 12 \quad \Longleftrightarrow \quad Q = \frac{1}{4},$$

da cui segue che $y(t) \equiv \frac{1}{4}$ è una soluzione costante di (1).

4C) Se $A = 0$ e $B = -9$, $y(t) = 8te^{3t}$ non è soluzione dell'equazione omogenea associata a (1).

Vero: Se $A = 0$ e $B = -9$, l'equazione omogenea associata a (1) è

$$(2) \quad y_0''(t) - 9y_0(t) = 0,$$

il cui polinomio caratteristico è

$$P(L) = L^2 - 9 = 0.$$

Risolvendo l'equazione $P(L) = 0$ si trova $L_{1,2} = \pm 3$, e quindi tutte (e sole) le soluzioni di (2) sono date da

$$y_0(t) = Ce^{3t} + De^{-3t},$$

con C e D numeri reali. Dato che non esiste alcun valore di C e D tale che $y_0(t) = 8te^{3t}$ per ogni t , ne segue che tale funzione non è soluzione dell'equazione omogenea associata a (1).

4D) Se $A = 7$ e $B = 0$, la funzione $y(t) = \frac{12}{7}t$ non è soluzione di (1).

Falso: Se $A = 7$ e $B = 0$, l'equazione (1) diventa

$$y''(t) + 7y'(t) = 12.$$

Se $y(t) = \frac{12}{7}t$, si ha $y'(t) = \frac{12}{7}$ e $y''(t) = 0$. Pertanto,

$$y''(t) + 7y'(t) = 0 + 7 \cdot \frac{12}{7} = 12,$$

e quindi $y(t) = \frac{12}{7}t$ è soluzione di (1).

5) Si consideri l'equazione differenziale

$$(1) \quad y'(t) = 4t y(t) + \cos(t) e^{2t^2}.$$

a) Quante soluzioni ha (1)? E quante, con la condizione iniziale $y(8) = 8$?

b) Scrivere tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata a (1).

c) Calcolare $y''(0)$, dove $y(t)$ è la soluzione di (1) tale che $y(0) = 6$.

d) Calcolare la soluzione di (1) tale che $y(0) = 0$.

Soluzione:

a) Rispettivamente, infinite (dipendenti da un parametro reale) e una sola (perché, assegnando la condizione iniziale, si ottiene un problema di Cauchy).

b) L'equazione omogenea associata a (1) è

$$(2) \quad y_0'(t) = 4t y_0(t).$$

In generale, tutte le soluzioni dell'equazione

$$y_0'(t) = a(t) y_0(t),$$

sono date da

$$y_0(t) = C e^{A(t)}, \quad \text{dove} \quad A(t) = \int^t a(s) ds,$$

e C è un numero reale. Nel nostro caso, $a(t) = 4t$, da cui segue $A(t) = 2t^2$ e quindi tutte le soluzioni di (2) sono date da

$$y_0(t) = C e^{2t^2},$$

con C numero reale.

c) Se $y(t)$ è la soluzione di (1) tale che $y(0) = 6$, si ha, dall'equazione,

$$y'(0) = 4 \cdot 0 \cdot y(0) + \cos(0) e^{2 \cdot 0^2} = 1.$$

Derivando l'equazione, si ha poi

$$y''(t) = 4y(t) + 4t y'(t) - \sin(t) e^{2t^2} + 4t \cos(t) e^{2t^2},$$

da cui segue che

$$y''(0) = 4 \cdot y(0) + 0 - 0 + 0 = 4 \cdot 6 = 24.$$

d) Ricordiamo che la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = a(t) y(t) + b(t), \\ y(0) = y_0, \end{cases}$$

è data da

$$y(t) = e^{A(t)} \left[y_0 + \int_0^t b(s) e^{-A(s)} ds \right], \quad \text{dove} \quad A(t) = \int_0^t a(s) ds.$$

Nel nostro caso, $a(t) = 4t$, da cui segue $A(t) = 2t^2$, e $y_0 = 0$. Pertanto, l'unica soluzione di (1) tale che $y(0) = 0$ è data da

$$y(t) = e^{2t^2} \left[\int_0^t \cos(s) e^{2s^2} e^{-2s^2} ds \right] = e^{2t^2} \left[\int_0^t \cos(s) ds \right] = \sin(t) e^{2t^2}.$$

6) Si consideri l'equazione differenziale

$$(1) \quad y''(t) - 22y'(t) + 112y(t) = 9e^{11t}.$$

a) Quante soluzioni di (1) soddisfano la condizione $y(0) = 11$? E quante anche la condizione $y'(0) = 12$?

b) Scrivere tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata a (1).

c) Scrivere una soluzione particolare di (1) e scrivere tutte le soluzioni di (1).

d) Determinare la soluzione di (1) tale che $y(0) = 0$ e $y'(0) = 3$.

Soluzione:

a) Assegnando la sola condizione iniziale $y(0) = 11$ all'equazione (1), che è del secondo ordine, si ottengono infinite soluzioni, dipendenti da un parametro reale. Assegnando anche la condizione $y'(0) = 12$, si ottiene un problema di Cauchy, che ha una e una sola soluzione.

b) L'equazione omogenea associata a (1) è

$$(2) \quad y_0''(t) - 22y_0'(t) + 112y_0(t) = 0,$$

il cui polinomio caratteristico è

$$P(L) = L^2 - 22L + 112.$$

Risolvendo l'equazione $P(L) = 0$ si trova $L_1 = 8$ e $L_2 = 14$. Pertanto, tutte le soluzioni di (2) sono date da

$$(3) \quad y_0(t) = Ce^{8t} + De^{14t},$$

con C e D numeri reali.

c) Dato che e^{11t} non è soluzione dell'equazione omogenea associata a (1), cerchiamo una soluzione particolare di (1) nella forma

$$\bar{y}(t) = Qe^{11t},$$

con Q numero reale. Dato che

$$\bar{y}'(t) = 11Qe^{11t}, \quad \bar{y}''(t) = 121Qe^{11t},$$

si ha

$$\bar{y}''(t) - 22\bar{y}'(t) + 112\bar{y}(t) = [121 - 22 \cdot 11 + 112]Qe^{11t} = -9Qe^{11t}.$$

Pertanto, $\bar{y}(t)$ è soluzione di (1) se e solo se Q è tale che

$$-9Qe^{11t} = 9e^{11t},$$

ovvero se $Q = -1$. Ne segue che una soluzione particolare di (1) è data da

$$\bar{y}(t) = -e^{11t}.$$

Pertanto, ricordando la (3), tutte le soluzioni di (1) sono date da

$$(4) \quad y(t) = y_0(t) + \bar{y}(t) = Ce^{8t} + De^{14t} - e^{11t},$$

con C e D numeri reali.

d) Dalla (4) si ha, derivando,

$$y'(t) = 8Ce^{8t} + 14De^{14t} - 11e^{11t}.$$

Pertanto,

$$y(0) = C + D - 1, \quad y'(0) = 8C + 14D - 11.$$

Imponendo le condizioni $y(0) = 0$ e $y'(0) = 3$ si ottiene il sistema

$$C + D - 1 = 0, \quad 8C + 14D - 11 = 3,$$

le cui soluzioni sono $C = 0$ e $D = 1$. Ne segue che l'unica soluzione di (1) che soddisfa le condizioni $y(0) = 0$ e $y'(0) = 3$ è

$$y(t) = e^{14t} - e^{11t}.$$