**Calcolo integrale — Scheda di esercizi n. 9**
**19 Maggio 2023 — Compito n. 00095**

**Istruzioni**: le prime due caselle (**V** / **F**) permettono di selezionare la risposta vero/falso. La casella "**C**" serve a correggere eventuali errori invertendo la risposta data.
Per selezionare una casella, annerirla completamente: ■ (non ☒ o ☑).

**Nome:** ____________________

**Cognome:** ____________________

**Matricola:** | | | | | | | |

| | 1A | 1B | 1C | 1D | 2A | 2B | 2C | 2D | 3A | 3B | 3C | 3D | 4A | 4B | 4C | 4D |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **V** | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ |
| **F** | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ |
| **C** | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ |

**1)** Si consideri l'equazione differenziale:
$$y''(t) + 4\,y'(t) + 7\,y(t) = 0\,.$$

**1A)** L'equazione ha un'unica soluzione.
**1B)** Esiste un'unica soluzione dell'equazione tale che $y(5) = 6$.
**1C)** Esiste un'unica soluzione dell'equazione tale che $y(7) = 3$ e $y'(7) = 3$.
**1D)** Esiste un'unica soluzione dell'equazione tale che
$$y(3) = 5\,,\ y'(3) = 7\,,\ y''(3) = 68\,.$$

**2)** Si consideri l'equazione differenziale
$$y''(t) - 18\,y'(t) + 72\,y(t) = 288\,. \tag{1}$$

**2A)** Il polinomio caratteristico dell'equazione è $P(L) = L^2 - 18L + 72$.
**2B)** La funzione $y_0(t) = 2\,e^{8\,t}$ è soluzione dell'equazione omogenea associata a (1).
**2C)** La funzione $\overline{y}(t) = 4$ è una soluzione particolare di (1).
**2D)** Se $y(0) = 4$ e $y'(0) = 0$, la soluzione di (1) è costante.

**3)** Si consideri l'equazione differenziale
$$y''(t) + A\,y(t) + B\,y(t) = 0\,, \quad A\,, B \in \mathbb{R}\,.$$

**3A)** Il polinomio caratteristico dell'equazione è $P(L) = L^2 + A\,L + B$.
**3B)** Se $A = 0$ e $B = -4$, la funzione $y(t) = 4\,e^{2\,t} - 13\,e^{-2\,t}$ è soluzione dell'equazione.
**3C)** Se $A = -6$ e $B = 0$, la funzione $y(t) = 6$ non è soluzione dell'equazione.
**3D)** Se $A = -8$ e $B = 32$, la funzione $y(t) = 4\,e^{4\,t}\,\sin(4\,t)$ non è soluzione dell'equazione.

**4)** Si consideri l'equazione differenziale
$$y''(t) - 2\,y'(t) = -8\,.$$

**4A)** Tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata sono date da $y_0(t) = C\,e^{2\,t}$.
**4B)** Esistono soluzioni costanti dell'equazione.
**4C)** La funzione $\overline{y}(t) = 4\,t$ non è soluzione dell'equazione.
**4D)** Se $y(0) = 7$ e $y'(0) = 4$, la soluzione dell'equazione è un polinomio di primo grado.

**Docente**
☐ DelaTorre Pedraza
☐ Orsina

☐☐☐☐☐☐☐☐ **Cognome** **Nome** **Matricola** **Compito 00095**

---

**5)** Si consideri l'equazione differenziale

(1) $$y''(t) - 12\,y'(t) + 32\,y(t) = -4\,\mathrm{e}^{4\,t}\,.$$

**a)** Scrivere il polinomio caratteristico dell'equazione in (1) e trovarne le radici.
**b)** Scrivere tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata a (1).
**c)** Trovare una soluzione particolare di (1).
**d)** Trovare l'unica soluzione di (1) tale che $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$.

---

☐☐☐☐☐☐☐☐ **Cognome** **Nome** **Matricola** **Compito 00095**

---

**6)** Si consideri l'equazione differenziale

(1) $$y''(t) - 4\,y'(t) + 4\,y(t) = 2\,\mathrm{e}^{2\,t}\,.$$

**a)** Si determini il polinomio caratteristico di (1) e si trovino tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata a (1).
**b)** Si trovi una soluzione particolare di (1).
**c)** Si trovi l'unica soluzione di (1) tale che $y(0) = 0$ e $y'(0) = 5$.
**d)** Si trovi l'unica soluzione di (1) tale che $y(0) = 8$ e $y'(0) = 0$.

---

# Soluzioni del compito 00095

**1)** Si consideri l'equazione differenziale:

$$y''(t) + 4\,y'(t) + 7\,y(t) = 0\,.$$

---

**1A)** L'equazione ha un'unica soluzione.

**Falso:** Trattandosi di un'equazione differenziale ordinaria del secondo ordine, ha infinite soluzioni, dipendenti da due parametri reali.

---

**1B)** Esiste un'unica soluzione dell'equazione tale che $y(5) = 6$.

**Falso:** L'equazione ha infinite soluzioni, dipendenti da due parametri reali. Assegnando una sola condizione, si "fissa" uno solo dei due parametri, e quindi l'equazione ha infinite soluzioni tali che $y(5) = 6$.

---

**1C)** Esiste un'unica soluzione dell'equazione tale che $y(7) = 3$ e $y'(7) = 3$.

**Vero:** Assegnando due condizioni, una sulla funzione e una sulla derivata, si ottiene un problema di Cauchy, che ha un'unica soluzione.

---

**1D)** Esiste un'unica soluzione dell'equazione tale che

$$y(3) = 5\,,\ y'(3) = 7\,,\ y''(3) = 68\,.$$

**Falso:** Se $y(3) = 5$ e $y'(3) = 7$, dall'equazione segue che deve essere

$$0 = y''(3) + 4\,y'(3) + 7\,y(3) = y''(3) + 4 \cdot 5 + 7 \cdot 7 = y''(3) + 69\,,$$

da cui segue che $y''(3) = -69$. Pertanto, l'unica soluzione dell'equazione che soddisfa le condizioni $y(3) = 5$ e $y'(3) = 7$ è tale che $y''(3) = -69 \neq 69$; in altre parole, non esistono soluzioni dell'equazione che soddisfano le tre condizioni richieste.

---

**2)** Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(t) - 18\,y'(t) + 72\,y(t) = 288\,. \tag{1}$$

---

**2A)** Il polinomio caratteristico dell'equazione è $P(L) = L^2 - 18L + 72$.

**Vero:** Sostituendo $y''$ con $L^2$, $y'$ con $L$ e $y$ con 1, si trova che

$$P(L) = L^2 - 18L + 72\,.$$

---

**2B)** La funzione $y_0(t) = 2\,\mathrm{e}^{8\,t}$ è soluzione dell'equazione omogenea associata a (1).

**Falso:** Se definiamo $y_1(t) = \mathrm{e}^{8\,t}$, si ha

$$y_1'(t) = 8\,\mathrm{e}^{8\,t}\,, \qquad y_1''(t) = 64\,\mathrm{e}^{8\,t}\,.$$

Sostituendo nell'equazione si ha

$$y_1''(t) - 18\,y_1'(t) + 72\,y_1(t) = -8\,\mathrm{e}^{8\,t} \neq 0\,,$$

e quindi $y_1(t)$ **non è** soluzione dell'equazione omogenea associata. Non essendolo, non lo è neanche $y_0(t) = 2\,y_1(t)$.
Alternativamente, il polinomio caratteristico dell'equazione è $P(L) = L^2 - 18L + 72$, che si annulla per $L_1 = 6$ e $L_2 = 12$. Pertanto, tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata sono date da

$$y_1(t) = C\,\mathrm{e}^{6\,t} + D\,\mathrm{e}^{12\,t}\,,$$

con $C$ e $D$ numeri reali. Dato che per tutti i valori di $C$ e $D$ si ha $y_1(t) \neq y_0(t)$, la funzione $y_0(t)$ non è soluzione dell'equazione omogenea associata a (1).

---

**2C)** La funzione $\overline{y}(t) = 4$ è una soluzione particolare di (1).

**Vero:** Sostituendo nell'equazione si ha, essendo nulle sia la derivata prima che la derivata seconda di $\overline{y}(t)$,

$$y'' - 18\,y' + 72\,y = 72 \cdot 4 = 288\,,$$

e quindi $\overline{y}(t) = 4$ è una soluzione particolare di (1).

---

**2D)** Se $y(0) = 4$ e $y'(0) = 0$, la soluzione di (1) è costante.

**Vero:** Come detto nell'esercizio **2C**, la funzione $y(t) \equiv 4$ è soluzione dell'equazione (1). Dato che soddisfa inoltre le condizioni $y(0) = 4$ e $y'(0) = 0$, la funzione $y(t) \equiv 4$ è soluzione di un problema di Cauchy per un'equazione differenziale del secondo ordine, e quindi è l'unica soluzione di (1) che soddisfa tali condizioni.

---

**3)** Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(t) + A\, y(t) + B\, y(t) = 0\,, \quad A\,, B \in \mathbb{R}\,.$$

---

**3A)** Il polinomio caratteristico dell'equazione è $P(L) = L^2 + A\,L + B$.

**Vero:** Sostituendo $y''$ con $L^2$, $y'$ con $L$ e $y$ con 1, si trova che

$$P(L) = L^2 + A\,L + B\,.$$

---

**3B)** Se $A = 0$ e $B = -4$, la funzione $y(t) = 4\,\mathrm{e}^{2\,t} - 13\,\mathrm{e}^{-2\,t}$ è soluzione dell'equazione.

**Vero:** Se $A = 0$ e $B = -4$, il polinomio caratteristico dell'equazione è $P(L) = L^2 - 4$ che si annulla per $L = \pm 2$. Pertanto, tutte le soluzioni dell'equazione sono date da

$$y(t) = C\,\mathrm{e}^{2\,t} + D\,\mathrm{e}^{-2\,t}\,.$$

Scegliendo $C = 4$ e $D = -13$, si ha che $y(t) = 4\,\mathrm{e}^{2\,t} - 13\,\mathrm{e}^{-2\,t}$ è soluzione dell'equazione.

---

**3C)** Se $A = -6$ e $B = 0$, la funzione $y(t) = 6$ non è soluzione dell'equazione.

**Falso:** Se $A = -6$ e $B = 0$, il polinomio caratteristico dell'equazione è $P(L) = L^2 - 6\,L$ che si annulla per $L = 0$ e per $L = 6$. Pertanto, tutte le soluzioni dell'equazione sono date da

$$y(t) = C\,\mathrm{e}^{0\,t} + D\,\mathrm{e}^{6\,t} = C + D\,\mathrm{e}^{6\,t}\,.$$

Scegliendo $C = 6$ e $D = 0$, si ha che $y(t) = 6$ è soluzione dell'equazione.

---

**3D)** Se $A = -8$ e $B = 32$, la funzione $y(t) = 4\,\mathrm{e}^{4\,t}\,\sin(4\,t)$ non è soluzione dell'equazione.

**Falso:** Se $A = -8$ e $B = 32$, il polinomio caratteristico dell'equazione è $P(L) = L^2 - 8\,L + 32$, che si annulla per $L = 4 \pm 4\,i$. Pertanto, tutte le soluzioni dell'equazione sono date da

$$y(t) = \mathrm{e}^{4\,t}[C\,\cos(4\,t) + D\,\sin(4\,t)]\,.$$

Scegliendo $C = 0$ e $D = 4$, si ha che $y(t) = 4\,\mathrm{e}^{4\,t}\,\sin(4\,t)$ è soluzione dell'equazione.

---

**4)** Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(t) - 2\,y'(t) = -8\,.$$

---

**4A)** Tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata sono date da $y_0(t) = C\,\mathrm{e}^{2\,t}$.

**Falso:** Il polinomio caratteristico dell'equazione è $P(L) = L^2 - 2\,L$, che si annulla per $L = 0$ e $L = 2$. Pertanto, tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata sono date da

$$y_0(t) = C\,\mathrm{e}^{0\cdot t} + D\,\mathrm{e}^{2\,t} = C + D\,\mathrm{e}^{2\,t}\,,$$

con $C$ e $D$ numeri reali. Pertanto, non tutte le soluzioni dell'omogenea associata sono date da $y_0(t) = C\,\mathrm{e}^{2\,t}$: mancano le soluzioni costanti.

---

**4B)** Esistono soluzioni costanti dell'equazione.

**Falso:** Se $y(t) \equiv Q$ è una costante, sostituendo nell'equazione si ha

$$y''(t) - 2\,y'(t) = 0 - 2\cdot 0 = 0 \neq -8\,,$$

e quindi l'equazione non ha soluzioni costanti. Alternativamente, sappiamo dalla domanda **4A** che le costanti sono soluzioni dell'equazione omogenea, e quindi non possono essere soluzioni dell'equazione "completa".

---

**4C)** La funzione $\overline{y}(t) = 4\,t$ non è soluzione dell'equazione.

**Falso:** Se $\overline{y}(t) = 4\,t$, si ha $\overline{y}'(t) = 4$ e $\overline{y}''(t) = 0$. Sostituendo nell'equazione si ha

$$\overline{y}''(t) - 2\,\overline{y}'(t) = -2\cdot 4 = -8\,,$$

e quindi $\overline{y}(t) = 4\,t$ è soluzione dell'equazione.

---

**4D)** Se $y(0) = 7$ e $y'(0) = 4$, la soluzione dell'equazione è un polinomio di primo grado.

**Vero:** Sappiamo già, dagli esercizi **4A** e **4C**, che tutte le soluzioni dell'equazione sono date da

$$y(t) = y_0(t) + \overline{y}(t) = C + D\,\mathrm{e}^{2\,t} + 4\,t\,,$$

con $C$ e $D$ numeri reali. Pertanto,

$$y'(t) = 2\,D\,\mathrm{e}^{4\,t} + 4\,.$$

Pertanto, assegnando le condizioni iniziali, si ha

$$7 = C + D\,, \qquad 4 = 2\,D + 4\,.$$

Dalla seconda si ricava $D = 0$, e sostituendo nella prima si ricava $C = 7$. Ne segue che l'unica soluzione dell'equazione è

$$y(t) = 7 + 4\,t\,,$$

che è un polinomio di primo grado.

---

**5)** Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(t) - 12\,y'(t) + 32\,y(t) = -4\,\mathrm{e}^{4\,t}\,. \tag{1}$$

**a)** Scrivere il polinomio caratteristico dell'equazione in (1) e trovarne le radici.
**b)** Scrivere tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata a (1).
**c)** Trovare una soluzione particolare di (1).
**d)** Trovare l'unica soluzione di (1) tale che $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$.

---

**Soluzione:**
**a)** Sostituendo in (1) $L^2$ a $y''$, $L$ a $y'$ e 1 a $y$, si trova

$$P(L) = L^2 - 12\,L + 32\,,$$

che si annulla per $L_1 = 4$ e per $L_2 = 8$.

**b)** Usando le radici del polinomio caratteristico calcolate al punto precedente, abbiamo che tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata a (1) sono date da

$$y_0(t) = C\,\mathrm{e}^{4\,t} + D\,\mathrm{e}^{8\,t}\,,$$

con $C$ e $D$ numeri reali.

**c)** Dato che $g(t) = \mathrm{e}^{4\,t}$ è una soluzione dell'equazione omogenea, cerchiamo una soluzione particolare della forma

$$\overline{y}(t) = Q\,t\,\mathrm{e}^{4\,t}\,.$$

Si ha

$$\overline{y}'(t) = Q\,(1 + 4\,t)\,\mathrm{e}^{4\,t}\,, \qquad \overline{y}''(t) = Q\,(8 + 16\,t)\,\mathrm{e}^{4\,t}\,.$$

Sostituendo in (1) si ha

$$\overline{y}'' - 12\,\overline{y} + 32\,\overline{y} = Q\,\mathrm{e}^{4\,t}\,[8 + 16\,t - 12\,(1 + 4\,t) + 32\,t] = -4\,Q\,\mathrm{e}^{4\,t}\,,$$

e quindi $\overline{y}(t)$ è soluzione di (1) se $Q$ è tale che

$$-4\,Q\,\mathrm{e}^{4\,t} = -4\,\mathrm{e}^{4\,t}\,,$$

da cui segue $Q = 1$ e quindi

$$\overline{y}(t) = t\,\mathrm{e}^{4\,t}\,.$$

**d)** Da **b)** e **c)** abbiamo che tutte le soluzioni di (1) sono date da

$$y(t) = y_0(t) + \overline{y}(t) = C\,\mathrm{e}^{4\,t} + D\,\mathrm{e}^{8\,t} + t\,\mathrm{e}^{4\,t}\,,$$

con $C$ e $D$ numeri reali. Dato che

$$y'(t) = 4\,C\,\mathrm{e}^{4\,t} + 8\,D\,\mathrm{e}^{8\,t} + \mathrm{e}^{4\,t} + 4\,t\,\mathrm{e}^{4\,t}\,,$$

si ha $y(0) = C + D$ e $y'(0) = 4\,C + 8\,D + 1$. Imponendo le condizioni iniziali, si ha che deve essere $C + D = 0$ e $4\,C + 8\,D + 1 = 1$, da cui si ricava facilmente $C = D = 0$. Ne segue che l'unica soluzione di (1) che soddisfa le condizioni $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$ è

$$y(t) = t\,\mathrm{e}^{4\,t}\,.$$

**6)** Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(t) - 4\,y'(t) + 4\,y(t) = 2\,e^{2\,t}\,. \tag{1}$$

**a)** Si determini il polinomio caratteristico di (1) e si trovino tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata a (1).
**b)** Si trovi una soluzione particolare di (1).
**c)** Si trovi l'unica soluzione di (1) tale che $y(0) = 0$ e $y'(0) = 5$.
**d)** Si trovi l'unica soluzione di (1) tale che $y(0) = 8$ e $y'(0) = 0$.

---

**Soluzione:**
**a)** Il polinomio caratteristico è $P(L) = L^2 - 4\,L + 4$, che si annulla per $L_1 = L_2 = 2$. Conseguentemente, tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata ad (1) sono date da

$$y_0(t) = (C + D\,t)\,e^{2\,t}\,,$$

con $C$ e $D$ numeri reali.

**b)** Dato che sia $e^{2\,t}$ che $t\,e^{2\,t}$ sono soluzioni dell'equazione omogenea, cerchiamo una soluzione particolare di (1) della forma

$$\overline{y}(t) = Q\,t^2\,e^{2\,t}\,.$$

Derivando, si ha

$$\overline{y}'(t) = Q\,(2t + 2\,t^2)\,e^{2\,t}\,, \qquad \overline{y}''(t) = Q\,(2 + 8\,t + 4\,t^2)\,e^{2\,t}\,.$$

Sostituendo nell'equazione si ha

$$\overline{y}'' - 4\,\overline{y}' + 4\,\overline{y}(t) = Q\,e^{2\,t}\,[2 + 8\,t + 4\,t^2 - 4\,(2t + 2\,t^2) + 4\,t^2] = 2\,Q\,e^{2\,t}\,,$$

da cui segue che $\overline{y}(t)$ è soluzione di (1) se $Q = 1$. Si ha dunque che tutte le soluzioni di (1) sono date da

$$y(t) = y_0(t) + \overline{y}(t) = (C + D\,t + t^2)\,e^{2\,t}\,,$$

da cui segue, derivando, che

$$y'(t) = (2\,C + D + (2\,D + 2)\,t + 2\,t^2)\,e^{2\,t}\,.$$

Pertanto

$$y(0) = C\,, \qquad y'(0) = 2\,C + D\,. \tag{2}$$

**c)** Da (2) e dalle condizioni date segue che deve essere $C = 0$ e $2\,C + D = 5$, da cui $C = 0$ e $D = 5$. L'unica soluzione di (1) è quindi data da

$$y(t) = (5\,t + t^2)\,e^{2\,t}\,.$$

**d)** Da (2) e dalle condizioni date segue che deve essere $C = 8$ e $2\,C + D = 0$, da cui $D = -16$. L'unica soluzione di (1) è quindi data da

$$y(t) = (8 - 16\,t + t^2)\,e^{2\,t}\,.$$