**Calcolo integrale — Scheda di esercizi n. 9**
**19 Maggio 2023 — Compito n. 00058**

**Istruzioni**: le prime due caselle (**V** / **F**) permettono di selezionare la risposta vero/falso. La casella "**C**" serve a correggere eventuali errori invertendo la risposta data.
Per selezionare una casella, annerirla completamente: ■ (non ☒ o ☑).

**Nome:** ____________________

**Cognome:** ____________________

**Matricola:** | | | | | | | |

| | 1A | 1B | 1C | 1D | 2A | 2B | 2C | 2D | 3A | 3B | 3C | 3D | 4A | 4B | 4C | 4D |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **V** | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ |
| **F** | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ |
| **C** | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ |

**1)** Si consideri l'equazione differenziale:

$$y''(t) + 4\,y'(t) + 4\,y(t) = 0\,.$$

**1A)** L'equazione ha un'unica soluzione.
**1B)** Esiste un'unica soluzione dell'equazione tale che $y(2) = 7$.
**1C)** Esistono infinite soluzioni dell'equazione tali che $y(7) = 8$ e $y'(7) = 4$.
**1D)** Non esistono soluzioni dell'equazione tali che

$$y(4) = 6\,,\ y'(4) = 7\,,\ y''(4) = 52\,.$$

**2)** Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(t) - 16\,y'(t) + 60\,y(t) = 420\,. \tag{1}$$

**2A)** Il polinomio caratteristico dell'equazione è $P(L) = L^2 + 16L + 60$.
**2B)** La funzione $y_0(t) = 8\,e^{6\,t}$ è soluzione dell'equazione omogenea associata a (1).
**2C)** La funzione $\overline{y}(t) = 8$ è una soluzione particolare di (1).
**2D)** Se $y(0) = 7$ e $y'(0) = 0$, la soluzione di (1) è costante.

**3)** Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(t) + A\,y(t) + B\,y(t) = 0\,, \quad A\,, B \in \mathbb{R}\,.$$

**3A)** Il polinomio caratteristico dell'equazione è $P(L) = L^2 - A\,L + B$.
**3B)** Se $A = 0$ e $B = -49$, la funzione $y(t) = 10\,e^{7\,t} - 5\,e^{-7\,t}$ non è soluzione dell'equazione.
**3C)** Se $A = -6$ e $B = 0$, la funzione $y(t) = 4$ non è soluzione dell'equazione.
**3D)** Se $A = -8$ e $B = 41$, la funzione $y(t) = 5\,e^{4\,t}\,\sin(5\,t)$ non è soluzione dell'equazione.

**4)** Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(t) - 2\,y'(t) = -14\,.$$

**4A)** Tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata sono date da $y_0(t) = C + D\,e^{2\,t}$.
**4B)** Esistono soluzioni costanti dell'equazione.
**4C)** La funzione $\overline{y}(t) = 7\,t$ non è soluzione dell'equazione.
**4D)** Se $y(0) = 6$ e $y'(0) = 7$, la soluzione dell'equazione è un'esponenziale.

**Docente**
☐ DelaTorre Pedraza
☐ Orsina

☐☐☐☐☐☐☐☐ **Cognome** **Nome** **Matricola** **Compito 00058**

**5)** Si consideri l'equazione differenziale

(1) $$y''(t) - 11\,y'(t) + 18\,y(t) = -7\,\mathrm{e}^{2\,t}\,.$$

**a)** Scrivere il polinomio caratteristico dell'equazione in (1) e trovarne le radici.
**b)** Scrivere tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata a (1).
**c)** Trovare una soluzione particolare di (1).
**d)** Trovare l'unica soluzione di (1) tale che $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$.

☐☐☐☐☐☐☐☐ **Cognome** **Nome** **Matricola** **Compito 00058**

---

**6)** Si consideri l'equazione differenziale

(1) $$y''(t) - 6\,y'(t) + 9\,y(t) = 2\,\mathrm{e}^{3\,t}\,.$$

**a)** Si determini il polinomio caratteristico di (1) e si trovino tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata a (1).
**b)** Si trovi una soluzione particolare di (1).
**c)** Si trovi l'unica soluzione di (1) tale che $y(0) = 0$ e $y'(0) = 4$.
**d)** Si trovi l'unica soluzione di (1) tale che $y(0) = 8$ e $y'(0) = 0$.

---

# Soluzioni del compito 00058

**1)** Si consideri l'equazione differenziale:

$$y''(t) + 4\,y'(t) + 4\,y(t) = 0\,.$$

---

**1A)** L'equazione ha un'unica soluzione.

**Falso:** Trattandosi di un'equazione differenziale ordinaria del secondo ordine, ha infinite soluzioni, dipendenti da due parametri reali.

---

**1B)** Esiste un'unica soluzione dell'equazione tale che $y(2) = 7$.

**Falso:** L'equazione ha infinite soluzioni, dipendenti da due parametri reali. Assegnando una sola condizione, si "fissa" uno solo dei due parametri, e quindi l'equazione ha infinite soluzioni tali che $y(2) = 7$.

---

**1C)** Esistono infinite soluzioni dell'equazione tali che $y(7) = 8$ e $y'(7) = 4$.

**Falso:** Assegnando due condizioni, una sulla funzione e una sulla derivata, si ottiene un problema di Cauchy, che ha un'unica soluzione.

---

**1D)** Non esistono soluzioni dell'equazione tali che

$$y(4) = 6\,,\ y'(4) = 7\,,\ y''(4) = 52\,.$$

**Vero:** Se $y(4) = 6$ e $y'(4) = 7$, dall'equazione segue che deve essere

$$0 = y''(4) + 4\,y'(4) + 4\,y(4) = y''(4) + 4 \cdot 6 + 4 \cdot 7 = y''(4) + 52\,,$$

da cui segue che $y''(4) = -52$. Pertanto, l'unica soluzione dell'equazione che soddisfa le condizioni $y(4) = 6$ e $y'(4) = 7$ è tale che $y''(4) = -52 \neq 52$; in altre parole, non esistono soluzioni dell'equazione che soddisfano le tre condizioni richieste.

---

**2)** Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(t) - 16\,y'(t) + 60\,y(t) = 420\,. \tag{1}$$

---

**2A)** Il polinomio caratteristico dell'equazione è $P(L) = L^2 + 16L + 60$.

**Falso:** Sostituendo $y''$ con $L^2$, $y'$ con $L$ e $y$ con 1, si trova che

$$P(L) = L^2 - 16L + 60 \neq L^2 + 16L + 60\,.$$

---

**2B)** La funzione $y_0(t) = 8\,\mathrm{e}^{6\,t}$ è soluzione dell'equazione omogenea associata a (1).

**Vero:** Il polinomio caratteristico dell'equazione è $P(L) = L^2 - 16L + 60$, che si annulla per $L_1 = 6$ e $L_2 = 10$. Pertanto, tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata sono date da

$$y_0(t) = C\,\mathrm{e}^{6\,t} + D\,\mathrm{e}^{10\,t}\,,$$

con $C$ e $D$ numeri reali. Scegliendo $C = 8$ e $D = 0$, si ha che $y_0(t) = 8\,\mathrm{e}^{6\,t}$ è soluzione dell'equazione omogenea associata a (1).
Alternativamente, se $y_1(t) = \mathrm{e}^{6\,t}$ si ha, derivando,

$$y_1'(t) = 6\,\mathrm{e}^{6\,t}\,, \qquad y_1''(t) = 36\,\mathrm{e}^{6\,t}\,,$$

e, sostituendo nell'equazione,

$$y_1''(t) - 16\,y_1'(t) + 60\,y_1(t) = [36 - 16 \cdot 6 + 60]\,\mathrm{e}^{6\,t} = 0 \cdot \mathrm{e}^{6\,t} = 0\,,$$

e quindi $y_1(t)$ è soluzione dell'equazione omogenea associata a (1). Dato che tale equazione è lineare, anche $y_0(t) = 8\,y_1(t)$ è soluzione dell'omogenea.

---

**2C)** La funzione $\overline{y}(t) = 8$ è una soluzione particolare di (1).

**Falso:** Sostituendo nell'equazione si ha, essendo nulle sia la derivata prima che la derivata seconda di $\overline{y}(t)$,

$$y'' - 16\,y' + 60\,y = 60 \cdot 8 = 480 \neq 420\,,$$

e quindi $\overline{y}(t) = 8$ non è una soluzione particolare di (1). Cercando una soluzione particolare della forma $y(t) \equiv Q$ si vede facilmente che deve essere $Q = 7$.

---

**2D)** Se $y(0) = 7$ e $y'(0) = 0$, la soluzione di (1) è costante.

**Vero:** Come detto nell'esercizio **2C**, la funzione $y(t) \equiv 7$ è soluzione dell'equazione (1). Dato che soddisfa inoltre le condizioni $y(0) = 7$ e $y'(0) = 0$, la funzione $y(t) \equiv 7$ è soluzione di un problema di Cauchy per un'equazione differenziale del secondo ordine, e quindi è l'unica soluzione di (1) che soddisfa tali condizioni.

---

**3)** Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(t) + A\,y(t) + B\,y(t) = 0\,, \quad A\,, B \in \mathbb{R}\,.$$

---

**3A)** Il polinomio caratteristico dell'equazione è $P(L) = L^2 - A\,L + B$.

**Falso:** Sostituendo $y''$ con $L^2$, $y'$ con $L$ e $y$ con 1, si trova che

$$P(L) = L^2 + A\,L + B \neq L^2 - A\,L + B\,.$$

---

**3B)** Se $A = 0$ e $B = -49$, la funzione $y(t) = 10\,\mathrm{e}^{7\,t} - 5\,\mathrm{e}^{-7\,t}$ non è soluzione dell'equazione.

**Falso:** Se $A = 0$ e $B = -49$, il polinomio caratteristico dell'equazione è $P(L) = L^2 - 49$ che si annulla per $L = \pm 7$. Pertanto, tutte le soluzioni dell'equazione sono date da

$$y(t) = C\,\mathrm{e}^{7\,t} + D\,\mathrm{e}^{-7\,t}\,.$$

Scegliendo $C = 10$ e $D = -5$, si ha che $y(t) = 10\,\mathrm{e}^{7\,t} - 5\,\mathrm{e}^{-7\,t}$ è soluzione dell'equazione.

---

**3C)** Se $A = -6$ e $B = 0$, la funzione $y(t) = 4$ non è soluzione dell'equazione.

**Falso:** Se $A = -6$ e $B = 0$, il polinomio caratteristico dell'equazione è $P(L) = L^2 - 6\,L$ che si annulla per $L = 0$ e per $L = 6$. Pertanto, tutte le soluzioni dell'equazione sono date da

$$y(t) = C\,\mathrm{e}^{0\,t} + D\,\mathrm{e}^{6\,t} = C + D\,\mathrm{e}^{6\,t}\,.$$

Scegliendo $C = 4$ e $D = 0$, si ha che $y(t) = 4$ è soluzione dell'equazione.

---

**3D)** Se $A = -8$ e $B = 41$, la funzione $y(t) = 5\,\mathrm{e}^{4\,t}\,\sin(5\,t)$ non è soluzione dell'equazione.

**Falso:** Se $A = -8$ e $B = 41$, il polinomio caratteristico dell'equazione è $P(L) = L^2 - 8\,L + 41$, che si annulla per $L = 4 \pm 5\,i$. Pertanto, tutte le soluzioni dell'equazione sono date da

$$y(t) = \mathrm{e}^{4\,t}[C\,\cos(5\,t) + D\,\sin(5\,t)]\,.$$

Scegliendo $C = 0$ e $D = 5$, si ha che $y(t) = 5\,\mathrm{e}^{4\,t}\,\sin(5\,t)$ è soluzione dell'equazione.

---

**4)** Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(t) - 2\,y'(t) = -14\,.$$

---

**4A)** Tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata sono date da $y_0(t) = C + D\,e^{2\,t}$.

**Vero:** Il polinomio caratteristico dell'equazione è $P(L) = L^2 - 2\,L$, che si annulla per $L = 0$ e $L = 2$. Pertanto, tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata sono date da

$$y_0(t) = C\,e^{0\cdot t} + D\,e^{2\,t} = C + D\,e^{2\,t}\,,$$

con $C$ e $D$ numeri reali.

---

**4B)** Esistono soluzioni costanti dell'equazione.

**Falso:** Se $y(t) \equiv Q$ è una costante, sostituendo nell'equazione si ha

$$y''(t) - 2\,y'(t) = 0 - 2\cdot 0 = 0 \neq -14\,,$$

e quindi l'equazione non ha soluzioni costanti. Alternativamente, sappiamo dalla domanda **4A** che le costanti sono soluzioni dell'equazione omogenea, e quindi non possono essere soluzioni dell'equazione "completa".

---

**4C)** La funzione $\overline{y}(t) = 7\,t$ non è soluzione dell'equazione.

**Falso:** Se $\overline{y}(t) = 7\,t$, si ha $\overline{y}'(t) = 7$ e $\overline{y}''(t) = 0$. Sostituendo nell'equazione si ha

$$\overline{y}''(t) - 2\,\overline{y}'(t) = -2\cdot 7 = -14\,,$$

e quindi $\overline{y}(t) = 7\,t$ è soluzione dell'equazione.

---

**4D)** Se $y(0) = 6$ e $y'(0) = 7$, la soluzione dell'equazione è un'esponenziale.

**Falso:** Sappiamo già, dagli esercizi **4A** e **4C**, che tutte le soluzioni dell'equazione sono date da

$$y(t) = y_0(t) + \overline{y}(t) = C + D\,e^{2\,t} + 7\,t\,,$$

con $C$ e $D$ numeri reali. Pertanto,

$$y'(t) = 2\,D\,e^{4\,t} + 7\,.$$

Pertanto, assegnando le condizioni iniziali, si ha

$$6 = C + D\,, \qquad 7 = 2\,D + 7\,.$$

Dalla seconda si ricava $D = 0$, e sostituendo nella prima si ricava $C = 6$. Ne segue che l'unica soluzione dell'equazione è

$$y(t) = 6 + 7\,t\,,$$

che è un polinomio di primo grado (e quindi non è un'esponenziale).

---

**5)** Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(t) - 11\,y'(t) + 18\,y(t) = -7\,\mathrm{e}^{2\,t}\,. \tag{1}$$

**a)** Scrivere il polinomio caratteristico dell'equazione in (1) e trovarne le radici.
**b)** Scrivere tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata a (1).
**c)** Trovare una soluzione particolare di (1).
**d)** Trovare l'unica soluzione di (1) tale che $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$.

---

**Soluzione:**
**a)** Sostituendo in (1) $L^2$ a $y''$, $L$ a $y'$ e 1 a $y$, si trova

$$P(L) = L^2 - 11\,L + 18\,,$$

che si annulla per $L_1 = 2$ e per $L_2 = 9$.

**b)** Usando le radici del polinomio caratteristico calcolate al punto precedente, abbiamo che tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata a (1) sono date da

$$y_0(t) = C\,\mathrm{e}^{2\,t} + D\,\mathrm{e}^{9\,t}\,,$$

con $C$ e $D$ numeri reali.

**c)** Dato che $g(t) = \mathrm{e}^{2\,t}$ è una soluzione dell'equazione omogenea, cerchiamo una soluzione particolare della forma

$$\overline{y}(t) = Q\,t\,\mathrm{e}^{2\,t}\,.$$

Si ha

$$\overline{y}'(t) = Q\,(1 + 2\,t)\,\mathrm{e}^{2\,t}\,, \qquad \overline{y}''(t) = Q\,(4 + 4\,t)\,\mathrm{e}^{2\,t}\,.$$

Sostituendo in (1) si ha

$$\overline{y}'' - 11\,\overline{y} + 18\,\overline{y} = Q\,\mathrm{e}^{2\,t}\,[4 + 4\,t - 11\,(1 + 2\,t) + 18\,t] = -7\,Q\,\mathrm{e}^{2\,t}\,,$$

e quindi $\overline{y}(t)$ è soluzione di (1) se $Q$ è tale che

$$-7\,Q\,\mathrm{e}^{2\,t} = -7\,\mathrm{e}^{2\,t}\,,$$

da cui segue $Q = 1$ e quindi

$$\overline{y}(t) = t\,\mathrm{e}^{2\,t}\,.$$

**d)** Da **b)** e **c)** abbiamo che tutte le soluzioni di (1) sono date da

$$y(t) = y_0(t) + \overline{y}(t) = C\,\mathrm{e}^{2\,t} + D\,\mathrm{e}^{9\,t} + t\,\mathrm{e}^{2\,t}\,,$$

con $C$ e $D$ numeri reali. Dato che

$$y'(t) = 2\,C\,\mathrm{e}^{2\,t} + 9\,D\,\mathrm{e}^{9\,t} + \mathrm{e}^{2\,t} + 2\,t\,\mathrm{e}^{2\,t}\,,$$

si ha $y(0) = C + D$ e $y'(0) = 2\,C + 9\,D + 1$. Imponendo le condizioni iniziali, si ha che deve essere $C + D = 0$ e $2\,C + 9\,D + 1 = 1$, da cui si ricava facilmente $C = D = 0$. Ne segue che l'unica soluzione di (1) che soddisfa le condizioni $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$ è

$$y(t) = t\,\mathrm{e}^{2\,t}\,.$$

**6)** Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(t) - 6\,y'(t) + 9\,y(t) = 2\,\mathrm{e}^{3\,t}\,. \tag{1}$$

**a)** Si determini il polinomio caratteristico di (1) e si trovino tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata a (1).
**b)** Si trovi una soluzione particolare di (1).
**c)** Si trovi l'unica soluzione di (1) tale che $y(0) = 0$ e $y'(0) = 4$.
**d)** Si trovi l'unica soluzione di (1) tale che $y(0) = 8$ e $y'(0) = 0$.

---

**Soluzione:**
**a)** Il polinomio caratteristico è $P(L) = L^2 - 6\,L + 9$, che si annulla per $L_1 = L_2 = 3$. Conseguentemente, tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata ad (1) sono date da

$$y_0(t) = (C + D\,t)\,\mathrm{e}^{3\,t}\,,$$

con $C$ e $D$ numeri reali.

**b)** Dato che sia $\mathrm{e}^{3\,t}$ che $t\,\mathrm{e}^{3\,t}$ sono soluzioni dell'equazione omogenea, cerchiamo una soluzione particolare di (1) della forma

$$\overline{y}(t) = Q\,t^2\,\mathrm{e}^{3\,t}\,.$$

Derivando, si ha

$$\overline{y}'(t) = Q\,(2t + 3\,t^2)\,\mathrm{e}^{3\,t}\,, \qquad \overline{y}''(t) = Q\,(2 + 12\,t + 9\,t^2)\,\mathrm{e}^{3\,t}\,.$$

Sostituendo nell'equazione si ha

$$\overline{y}'' - 6\,\overline{y}' + 9\,\overline{y}(t) = Q\,\mathrm{e}^{3\,t}\,[2 + 12\,t + 9\,t^2 - 6\,(2t + 3\,t^2) + 9\,t^2] = 2\,Q\,\mathrm{e}^{3\,t}\,,$$

da cui segue che $\overline{y}(t)$ è soluzione di (1) se $Q = 1$. Si ha dunque che tutte le soluzioni di (1) sono date da

$$y(t) = y_0(t) + \overline{y}(t) = (C + D\,t + t^2)\,\mathrm{e}^{3\,t}\,,$$

da cui segue, derivando, che

$$y'(t) = (3\,C + D + (3\,D + 2)\,t + 3\,t^2)\,\mathrm{e}^{3\,t}\,.$$

Pertanto

$$y(0) = C\,, \qquad y'(0) = 3\,C + D\,. \tag{2}$$

**c)** Da (2) e dalle condizioni date segue che deve essere $C = 0$ e $3\,C + D = 4$, da cui $C = 0$ e $D = 4$. L'unica soluzione di (1) è quindi data da

$$y(t) = (4\,t + t^2)\,\mathrm{e}^{3\,t}\,.$$

**d)** Da (2) e dalle condizioni date segue che deve essere $C = 8$ e $3\,C + D = 0$, da cui $D = -24$. L'unica soluzione di (1) è quindi data da

$$y(t) = (8 - 24\,t + t^2)\,\mathrm{e}^{3\,t}\,.$$