



Calcolo integrale — Compito di pre-esonero
28 Aprile 2023 — Compito n. 00110

Istruzioni: le prime due caselle (**V** / **F**) permettono di selezionare la risposta vero/falso. La casella “**C**” serve a correggere eventuali errori invertendo la risposta data. Per selezionare una casella, annerirla completamente: ■ (non ☐ o ☑).

Nome: _____

Cognome: _____

Matricola:

--	--	--	--	--	--	--

Punteggi: 1 punto per ogni risposta esatta, 0 punti per risposte sbagliate o lasciate in bianco.

	1A	1B	1C	1D	2A	2B	2C	2D	3A	3B	3C	3D	4A	4B	4C	4D
V	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
F	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
C	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

1) Sia

$$F(t) = \int_0^t [6x^2 + \cos^2(7x)] dx$$

1A) La funzione $F(t)$ è derivabile su tutto \mathbb{R} .

1B) Si ha $F'(0) = 1$.

1C) La funzione $F(t)$ è decrescente su \mathbb{R} .

1D) Si ha $F(6) > 0$.

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

2A)

$$\int_0^1 (15x^2 + 6x + 5) dx = 0.$$

2B)

$$\int_0^{\frac{1}{3}} 36x e^{3x} dx = 4.$$

2C)

$$\int_0^{8\pi} \cos(2x) dx = 4.$$

2D)

$$\int_0^{\sqrt{10}} \frac{4x}{10+x^2} dx = 2 \log(2).$$

3) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

3A)

$$\int_{-6}^6 [7x^3 + \sin(2x)] dx = 0.$$

3B)

$$\int_{-6}^6 [7x^2 + 5x|x|] dx < 0.$$

3C)

$$\int_{-5}^6 [9x^3 + 9x] dx = 0.$$

3D)

$$\int_{-3}^2 \frac{x^5}{9+x^4} dx > 0.$$

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

4A)

$$\int_4^8 \frac{dx}{x-2} = \log(2).$$

4B)

$$\int_6^{12} \frac{dx}{(x-3)^2} = \frac{2}{9}.$$

4C)

$$\int_8^9 \frac{dx}{(x-5)(x-7)} = \frac{1}{2} \log(2/3).$$

4D)

$$\int_{-9}^{-8} \frac{dx}{x^2 + 18x + 82} = \frac{\pi}{4}.$$

--	--	--	--	--	--	--	--

Cognome

Nome

Matricola

Compito 00110

5) Determinare una primitiva delle funzioni $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ e $k(x)$, e calcolare gli integrali.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } f(x) = x \sin(3x), & \int_0^{13\pi} f(x) dx, \quad \text{b) } g(x) = x^2 e^{5x^3}, \quad \int_0^{\sqrt[3]{5}} g(x) dx, \\ \text{c) } h(x) = (4x^2 + 15x + 7) e^x, & \int_{-\frac{7}{4}}^0 h(x) dx, \quad \text{d) } k(x) = \frac{1}{1+9x^2}, \quad \int_0^1 k(x) dx. \end{array}$$

--	--	--	--	--	--	--	--

Cognome**Nome****Matricola****Compito 00110**

6) Sia

$$F(t) = \int_0^t [5e^{x^2} + 8] dx.$$

- a)** Dimostrare che $F(t)$ è derivabile per ogni t in \mathbb{R} .
b) Calcolare $F(0)$ e $F'(\sqrt{7})$.
c) Dimostrare che $F(t)$ è una funzione crescente e dispari.
d) Dimostrare che

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} F(t) = +\infty.$$

Soluzioni del compito 00110

1) Sia

$$F(t) = \int_0^t [6x^2 + \cos^2(7x)] dx$$

1A) La funzione $F(t)$ è derivabile su tutto \mathbb{R} .

Vero: Dato che la funzione $x \mapsto 6x^2 + \cos^2(7x)$ è continua su \mathbb{R} , la funzione $F(t)$ è derivabile su \mathbb{R} per il teorema fondamentale del calcolo integrale, e si ha $F'(t) = 6x^2 + \cos^2(7t)$.

1B) Si ha $F'(0) = 1$.

Vero: Dato che per il teorema fondamentale del calcolo integrale si ha $F'(t) = 6t^2 + \cos^2(7t)$, si ha $F'(0) = 1$.

1C) La funzione $F(t)$ è decrescente su \mathbb{R} .

Falso: Dato che per il teorema fondamentale del calcolo integrale si ha $F'(t) = 6t^2 + \cos^2(7t)$, si ha $F'(t) \geq 0$ per ogni t in \mathbb{R} , e quindi la funzione $F(t)$ è crescente su \mathbb{R} .

1D) Si ha $F(6) > 0$.

Vero: Dato che la funzione $F(t)$ è crescente (si veda l'esercizio **1C**), si ha

$$F(6) > F(0) = 0.$$

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

2A)

$$\int_0^1 (15x^2 + 6x + 5) dx = 0.$$

Falso: Dato che

$$\int (15x^2 + 6x + 5) dx = \frac{15}{3} x^3 + \frac{6}{2} x^2 + 5x = 5x^3 + 3x^2 + 5x + c,$$

si ha

$$\int_0^1 (15x^2 + 6x + 5) dx = 5x^3 + 3x^2 + 5x \Big|_0^1 = 5 + 3 + 5 = 13 \neq 0.$$

Alternativamente, si poteva osservare che l'integrale non poteva essere uguale a zero perché la funzione integranda è strettamente positiva sull'intervallo di integrazione.

2B)

$$\int_0^{\frac{1}{3}} 36x e^{3x} dx = 4.$$

Vero: Si ha, con la sostituzione $y = 3x$, da cui $dy = 3x$,

$$\int_0^{\frac{1}{3}} 36x e^{3x} dx = 4 \int_0^{\frac{1}{3}} (3x) e^{3x} (3dx) = 4 \int_0^1 y e^y dy.$$

Dato che una primitiva di $y e^y$ è $(y - 1) e^y$, si ha

$$\int_0^{\frac{1}{3}} 36x e^{3x} dx = 4 (y - 1) e^y \Big|_0^1 = 4.$$

2C)

$$\int_0^{8\pi} \cos(2x) dx = 4.$$

Falso: Si ha

$$\int_0^{8\pi} \cos(2x) dx = \frac{\sin(2x)}{2} \Big|_0^{8\pi} = \frac{\sin(16\pi) - \sin(0)}{2} = 0 \neq 4.$$

2D)

$$\int_0^{\sqrt{10}} \frac{4x}{10 + x^2} dx = 2 \log(2).$$

Vero: Dato che

$$\frac{4x}{10 + x^2} = 2 \frac{2x}{10 + x^2} = 2 \frac{(10 + x^2)'}{10 + x^2},$$

si ha

$$\int_0^{\sqrt{10}} \frac{4x}{10 + x^2} dx = 2 \log(10 + x^2) \Big|_0^{\sqrt{10}} = 2 [\log(20) - \log(10)] = 2 \log(20/10) = 2 \log(2).$$

3) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

3A)

$$\int_{-6}^6 [7x^3 + \sin(2x)] dx = 0.$$

Vero: La funzione integranda è dispari, e l'intervallo di integrazione è simmetrico rispetto all'origine. Pertanto, l'integrale vale zero.

3B)

$$\int_{-6}^6 [7x^2 + 5x|x|] dx < 0.$$

Falso: La funzione $x \mapsto 7x^2$ è pari, mentre la funzione $x \mapsto 5x|x|$ è dispari. Dato che l'intervallo è simmetrico rispetto all'origine, si ha

$$\int_{-6}^6 [7x^2 + 5x|x|] dx = \int_{-6}^6 7x^2 dx = 2 \int_0^6 7x^2 dx > 0,$$

dato che la funzione integranda è positiva.

3C)

$$\int_{-5}^6 [9x^3 + 9x] dx = 0.$$

Falso: La funzione integranda è dispari; pertanto, si ha

$$\int_{-5}^6 [9x^3 + 9x] dx = \int_{-5}^5 [9x^3 + 9x] dx + \int_5^6 [9x^3 + 9x] dx = \int_5^6 [9x^3 + 9x] dx,$$

e l'ultimo integrale è positivo essendo l'integrale di una funzione positiva.

3D)

$$\int_{-3}^2 \frac{x^5}{9+x^4} dx > 0.$$

Falso: Dato che la funzione integranda è dispari, si ha

$$\int_{-3}^2 \frac{x^5}{9+x^4} dx = \int_{-3}^{-2} \frac{x^5}{9+x^4} dx + \int_{-2}^2 \frac{x^5}{9+x^4} dx = \int_{-3}^{-2} \frac{x^5}{9+x^4} dx < 0,$$

dato che la funzione integranda è negativa.

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

4A)

$$\int_4^8 \frac{dx}{x-2} = \log(2).$$

Falso: Si ha

$$\int_4^8 \frac{dx}{x-2} = \log(|x-2|) \Big|_4^8 = \log(6) - \log(2) = \log(6/2) = \log(3) \neq \log(2).$$

4B)

$$\int_6^{12} \frac{dx}{(x-3)^2} = \frac{2}{9}.$$

Vero: Ricordando che

$$\int \frac{dx}{(x-a)^2} = \frac{1}{a-x} + c,$$

si ha

$$\int_6^{12} \frac{dx}{(x-3)^2} = \frac{1}{3-x} \Big|_6^{12} = -\frac{1}{9} + \frac{1}{3} = \frac{2}{9}.$$

4C)

$$\int_8^9 \frac{dx}{(x-5)(x-7)} = \frac{1}{2} \log(2/3).$$

Falso: Dall'identità

$$\frac{1}{(x-5)(x-7)} = \frac{A}{x-7} + \frac{B}{x-5}$$

si ricava (moltiplicando per $(x-5)(x-7)$) che deve essere

$$1 = A(x-5) + B(x-7).$$

Scegliendo $x=5$ si ricava $B = -\frac{1}{2}$, e scegliendo $x=7$ si ricava $A = \frac{1}{2}$. Pertanto,

$$\frac{1}{(x-5)(x-7)} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{x-7} - \frac{1}{x-5} \right].$$

Ne segue che

$$\int \frac{dx}{(x-5)(x-7)} = \frac{1}{2} \log \left(\left| \frac{x-7}{x-5} \right| \right) + c,$$

cosicché

$$\int_8^9 \frac{dx}{(x-5)(x-7)} = \frac{1}{2} [\log(1/2) - \log(1/3)] = \frac{1}{2} \log(3/2) \neq \frac{1}{2} \log(2/3).$$

Alternativamente, si poteva osservare che, essendo la funzione integranda positiva sull'intervallo di integrazione, l'integrale non poteva essere negativo.

4D)

$$\int_{-9}^{-8} \frac{dx}{x^2 + 18x + 82} = \frac{\pi}{4}.$$

Vero: Si ha

$$x^2 + 18x + 82 = (x+9)^2 + 1,$$

e quindi

$$\int \frac{dx}{x^2 + 18x + 82} = \int \frac{dx}{1 + (x+9)^2}.$$

Con la sostituzione $y = x + 9$, da cui $dx = dy$, si ha

$$\int \frac{dx}{x^2 + 18x + 82} = \int \frac{dy}{1 + y^2} = \arctan(y) + c = \arctan(x + 9) + c.$$

Pertanto,

$$\int_{-9}^{-8} \frac{dx}{x^2 + 18x + 82} = \arctan(x + 9) \Big|_{-9}^{-8} = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4}.$$

5) Determinare una primitiva delle funzioni $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ e $k(x)$, e calcolare gli integrali.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad f(x) &= x \sin(3x), \quad \int_0^{13\pi} f(x) dx, & \text{b)} \quad g(x) &= x^2 e^{5x^3}, \quad \int_0^{\sqrt[3]{5}} g(x) dx, \\ \text{c)} \quad h(x) &= (4x^2 + 15x + 7) e^x, \quad \int_{-\frac{7}{4}}^0 h(x) dx, & \text{d)} \quad k(x) &= \frac{1}{1+9x^2}, \quad \int_0^1 k(x) dx. \end{aligned}$$

Soluzione:

a) Si ha, integrando per parti, e ponendo $f'(x) = \sin(3x)$, da cui $f(x) = -\frac{\cos(3x)}{3}$ e $g(x) = x$, da cui $g'(x) = 1$,

$$\int x \sin(3x) = -\frac{x \cos(3x)}{3} + \int 1 \cdot \frac{\cos(3x)}{3} dx = -\frac{x \cos(3x)}{3} + \frac{\sin(3x)}{9} + c.$$

Pertanto,

$$\int_0^{13\pi} x \sin(3x) dx = -\frac{x \cos(3x)}{3} + \frac{\sin(3x)}{9} \Big|_0^{13\pi} = -\frac{13\pi \cos(39\pi)}{3} = \frac{13}{3} \pi.$$

b) Si ha, con la sostituzione $y = 5x^3$, da cui $dy = 15x^2 dx$ (e quindi $x^2 dx = \frac{dy}{15}$),

$$\int x^2 e^{5x^3} dx = \frac{1}{15} \int e^y dy = \frac{e^y}{15} + c = \frac{e^{5x^3}}{15} + c,$$

da cui segue che

$$\int_0^{\sqrt[3]{5}} x^2 e^{5x^3} dx = \frac{e^{5x^3}}{15} \Big|_0^{\sqrt[3]{5}} = \frac{e^{25} - 1}{15}.$$

c) Ricordiamo che se $P_2(x)$ è un polinomio di grado 2, allora

$$\int P_2(x) e^x dx = Q_2(x) e^x,$$

con $Q_2(x)$ un polinomio di grado 2 tale che $Q_2(x) + Q_2'(x) = P_2(x)$. Pertanto, se $Q_2(x) = ax^2 + bx + c$, deve essere

$$Q_2(x) + Q_2'(x) = ax^2 + (2a + b)x + b + c = 4x^2 + 15x + 7.$$

Da questa relazione si ricava $a = 4$, $2a + b = 15$ e $b + c = 7$; risolvendo, si trova $a = 4$, $b = 7$ e $c = 0$. Pertanto,

$$\int (4x^2 + 15x + 7) e^x dx = (4x^2 + 7x) e^x + c,$$

da cui segue che

$$\int_{-\frac{7}{4}}^0 (4x^2 + 15x + 7) e^x dx = (4x^2 + 7x) e^x \Big|_{-\frac{7}{4}}^0 = 0.$$

d) Si ha, con la sostituzione $y = 3x$, da cui $dx = \frac{dy}{3}$,

$$\int \frac{dx}{1+9x^2} = \frac{1}{3} \int \frac{dy}{1+y^2} = \frac{\arctan(y)}{3} + c = \frac{\arctan(3x)}{3} + c.$$

Pertanto,

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+9x^2} = \frac{\arctan(3x)}{3} \Big|_0^1 = \frac{\arctan(3)}{3}.$$

6) Sia

$$F(t) = \int_0^t [5e^{x^2} + 8] dx.$$

a) Dimostrare che $F(t)$ è derivabile per ogni t in \mathbb{R} .

b) Calcolare $F(0)$ e $F'(\sqrt{7})$.

c) Dimostrare che $F(t)$ è una funzione crescente e dispari.

d) Dimostrare che

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} F(t) = +\infty.$$

Soluzione:

a) La funzione $f(x) = 5e^{x^2} + 8$ è continua su \mathbb{R} . Pertanto, per il teorema fondamentale del calcolo integrale, la funzione $F(t)$ è derivabile per ogni t in \mathbb{R} e si ha

$$(1) \quad F'(t) = f(t) = 5e^{t^2} + 8, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

b) Si ha

$$F(0) = \int_0^0 [5e^{x^2} + 8] dx = 0,$$

e, per la (1),

$$F'(\sqrt{7}) = f(\sqrt{7}) = 5e^7 + 8.$$

c) Dato che per la (1) la derivata di $F(t)$ è positiva, la funzione $F(t)$ è crescente. Inoltre, dato che la funzione $f(x)$ è pari, la funzione $F(t)$ è dispari. Infatti, con la sostituzione $x = -y$, da cui $dx = -dy$,

$$F(-t) = \int_0^{-t} [5e^{x^2} + 8] dx = - \int_0^t [5e^{(-y)^2} + 8] dy = - \int_0^t [5e^{y^2} + 8] dy = -F(t).$$

d) Si ha, se $t \geq 0$, e dato che $f(x) \geq 8$,

$$F(t) = \int_0^t [5e^{x^2} + 8] dx \geq \int_0^t 8 dx = 8t,$$

da cui segue che (si noti che il limite di $F(t)$ esiste perché $F(t)$ è crescente)

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} F(t) \geq \lim_{t \rightarrow +\infty} 8t = +\infty.$$