



Calcolo integrale — Scheda di esercizi n. 5
14 Aprile 2023 — Compito n. 00058

Istruzioni: le prime due caselle (**V** / **F**) permettono di selezionare la risposta vero/falso. La casella “**C**” serve a correggere eventuali errori invertendo la risposta data. Per selezionare una casella, annerirla completamente: ■ (non ☐ o ☑).

Nome: _____

Cognome: _____

Matricola:

--	--	--	--	--	--	--

Punteggi: 1 punto per ogni risposta esatta, 0 punti per risposte sbagliate o lasciate in bianco.

	1A	1B	1C	1D	2A	2B	2C	2D	3A	3B	3C	3D	4A	4B	4C	4D
V	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
F	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
C	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

1) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false

1A) La funzione $f(x) = 3x^2 - 5x + 6$ è integrabile su ogni intervallo chiuso e limitato di \mathbb{R} .

1B) Esistono intervalli chiusi e limitati di \mathbb{R} su cui la funzione $f(x) = |x - 2|$ non è integrabile.

1C) Esistono intervalli chiusi e limitati di \mathbb{R} su cui la funzione $f(x) = \frac{x+5}{x-4}$ non è integrabile.

1D) Esistono intervalli chiusi e limitati di \mathbb{R} su cui la funzione $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ non è integrabile.

2) Sia

$$F(t) = \int_0^t x e^{2x^4} dx.$$

2A) La funzione $F(t)$ è derivabile per ogni t in \mathbb{R} .

2B) Si ha $F'(0) = 0$.

2C) La funzione $F(t)$ è una funzione pari.

2D) La funzione $F(t)$ è decrescente per $t \geq 0$.

3) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false

3A) La funzione $x^2 \sin(x^3)$ si integra per sostituzione.

3B) La funzione $x^5 \sin(x)$ si integra per parti.

3C) La funzione $x^{11} \sin(x^2)$ si integra per sostituzione prima, e per parti poi.

3D) La funzione $f(x) = x^{12} \arctan(x)$ si integra per parti prima, e per sostituzione poi.

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false

4A) Si ha

$$\int_2^{13} \frac{dx}{x} = \ln\left(\frac{13}{2}\right).$$

4B) Si ha

$$\int_{15}^{20} \frac{dx}{x-5} = \ln\left(\frac{3}{2}\right).$$

4C) Si ha

$$\int_{10}^{40} \frac{dx}{4-x} = -\ln(6).$$

4D) Si ha

$$\int_0^1 \frac{dx}{4x-11} = \ln\left(\frac{7}{11}\right).$$

Docente

- ☐ DelaTorre Pedraza
☐ Orsina

--	--	--	--	--	--	--	--

Cognome

Nome

Matricola

Compito 00058

5) Calcolare una primitiva delle seguenti funzioni

a1) $x \sin(x)$, **a2)** $x^3 e^x$, **b1)** $x^2 \ln(x)$, **b2)** $(x^2 - 3x + 3) e^x$,

c1) $x e^{2x}$, **c2)** $x \cos(4x)$, **d1)** $e^{\sqrt{x}}$, **d2)** $\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}$,

--	--	--	--	--	--	--	--

Cognome

Nome

Matricola

Compito 00058

6)

a1) - a2) Trovare una primitiva di $f(x) = \frac{1}{x^2 - 10x + 25}$ e calcolare $\int_6^7 f(x) dx$.

b1) - b2) Trovare una primitiva di $g(x) = \frac{1}{x^2 - 7x + 12}$ e calcolare $\int_5^6 g(x) dx$.

c1) - c2) Trovare una primitiva di $h(x) = \frac{1}{x^2 - 8x + 25}$ e calcolare $\int_4^7 h(x) dx$.

d1) - d2) Trovare una primitiva di $k(x) = \frac{2x - 10}{x^2 - 11x + 28}$ e di $j(x) = \frac{x^3}{4 + x^2}$.

--	--	--	--	--	--	--	--

Cognome

Nome

Matricola

Compito 00058

7) Trovare una primitiva di

a1) $x e^{5x}$, **a2)** $e^x \sin(2x)$, **b1)** $\sin^2(5x)$, **b2)** $\cos^3(5x)$,

c1) $(8x + 5)e^x$, **c2)** $(7x^2 - 4x + 2)e^x$, **d1)** $x^2 \ln(5x)$, **d2)** $12x \arctan(6x)$.

Soluzioni del compito 00058

1) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false

1A) La funzione $f(x) = 3x^2 - 5x + 6$ è integrabile su ogni intervallo chiuso e limitato di \mathbb{R} .

Vero: Dal momento che la funzione $f(x) = 3x^2 - 5x + 6$ è una funzione continua, è integrabile su ogni intervallo chiuso e limitato di \mathbb{R} .

1B) Esistono intervalli chiusi e limitati di \mathbb{R} su cui la funzione $f(x) = |x - 2|$ non è integrabile.

Falso: Dal momento che la funzione $f(x) = |x - 2|$ è una funzione continua, è integrabile su ogni intervallo chiuso e limitato di \mathbb{R} .

1C) Esistono intervalli chiusi e limitati di \mathbb{R} su cui la funzione $f(x) = \frac{x+5}{x-4}$ non è integrabile.

Vero: Dal momento che la funzione è illimitata (sia superiormente che inferiormente) in ogni intervallo chiuso e limitato che contenga $x = 4$ al suo interno (ad esempio: l'intervallo $[3, 5]$), la funzione non è integrabile su tali intervalli.

1D) Esistono intervalli chiusi e limitati di \mathbb{R} su cui la funzione $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ non è integrabile.

Falso: Dal momento che $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$, si ha, se $x \neq 2$,

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = x + 2.$$

Ne consegue che la funzione $f(x)$ coincide, in tutti i punti tranne $x = 2$, con la funzione continua $g(x) = x + 2$, che è integrabile su ogni intervallo chiuso e limitato di \mathbb{R} ; dunque, anche la funzione $f(x)$ è integrabile su tali intervalli.

2) Sia

$$F(t) = \int_0^t x e^{2x^4} dx.$$

2A) La funzione $F(t)$ è derivabile per ogni t in \mathbb{R} .

Vero: Dal momento che la funzione $f(x) = x e^{2x^4}$ è una funzione continua, per il teorema fondamentale del calcolo integrale la funzione $F(t)$ è derivabile, e si ha

$$F'(t) = f(t) = t e^{2t^4} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

2B) Si ha $F'(0) = 0$.

Vero: Dato che $F'(t) = t e^{2t^4}$ (si veda la domanda 2A), si ha $F'(0) = 0$.

2C) La funzione $F(t)$ è una funzione pari.

Vero: Dal momento che la funzione $f(x) = x e^{2x^4}$ è una funzione dispari, la funzione $F(t)$ è una funzione pari. Infatti,

$$F(-t) = \int_0^{-t} x e^{2x^4} dx = \left[\begin{array}{l} y = -x \\ dy = -dx \end{array} \right] = - \int_0^t (-y) e^{2(-y)^4} dy = \int_0^t y e^{2y^4} dy = F(t).$$

2D) La funzione $F(t)$ è decrescente per $t \geq 0$.

Falso: Dato che $F'(t) = t e^{2t^4}$ (si veda la domanda 2A), si ha $F'(t) \geq 0$ per $t \geq 0$, e quindi la funzione $F(t)$ è crescente su tale insieme (e quindi non è decrescente).

3) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false

3A) La funzione $x^2 \sin(x^3)$ si integra per sostituzione.

Vero: Infatti, definendo $y = x^3$, da cui $dy = 3x^2 dx$, si ha

$$\int x^2 \sin(x^3) dx = \frac{1}{3} \int \sin(y) dy,$$

che è un integrale immediato.

3B) La funzione $x^5 \sin(x)$ si integra per parti.

Vero: Infatti, derivando il termine polinomiale x^5 e integrando la funzione trigonometrica, si ha

$$\int x^5 \sin(x) dx = -x^5 \cos(x) + 5 \int x^4 \cos(x) dx.$$

Il procedimento continua 4 volte, finché non si arriva ad un integrale immediato (di $\sin(x)$ o di $\cos(x)$).

3C) La funzione $x^{11} \sin(x^2)$ si integra per sostituzione prima, e per parti poi.

Vero: Infatti, definendo $y = x^2$, da cui $dy = 2x dx$, si ha

$$\int x^{11} \sin(x^2) dx = \int (x^2)^5 \sin(x^2) x dx = \frac{1}{2} \int y^5 \sin(y) dy,$$

e l'ultimo integrale si svolge per parti (si veda la domanda 3B).

3D) La funzione $f(x) = x^{12} \arctan(x)$ si integra per parti prima, e per sostituzione poi.

Vero: Infatti, integrando il monomio e derivando l'arcotangente, si ha

$$\int x^{12} \arctan(x) dx = \frac{x^{13}}{13} \arctan(x) - \frac{1}{13} \int \frac{x^{13}}{1+x^2} dx.$$

L'ultimo integrale si svolge per sostituzione, ponendo $y = 1 + x^2$, da cui $dy = 2x dx$. Si ha

$$\int \frac{x^{13}}{1+x^2} dx = \int \frac{(x^2)^6}{1+x^2} x dx = \frac{1}{2} \int \frac{(y-1)^6}{y} dy,$$

e quest'ultimo integrale, dopo aver sviluppato la potenza del binomio, è la somma di 7 integrali immediati.

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false

4A) Si ha

$$\int_2^{13} \frac{dx}{x} = \ln\left(\frac{13}{2}\right).$$

Vero: Infatti, si ha

$$\int_2^{13} \frac{dx}{x} = \ln(|x|) \Big|_2^{13} = \ln(13) - \ln(2) = \ln\left(\frac{13}{2}\right).$$

4B) Si ha

$$\int_{15}^{20} \frac{dx}{x-5} = \ln\left(\frac{3}{2}\right).$$

Vero: Infatti,

$$\int_{15}^{20} \frac{dx}{x-5} = \ln(|x-5|) \Big|_{15}^{20} = \ln(15) - \ln(10) = \ln\left(\frac{3}{2}\right).$$

4C) Si ha

$$\int_{10}^{40} \frac{dx}{4-x} = -\ln(6).$$

Vero: Infatti,

$$\int_{10}^{40} \frac{dx}{4-x} = -\int_{10}^{40} \frac{dx}{x-4} = -\ln(|x-4|) \Big|_{10}^{40} = -\ln(36) + \ln(6) = -\ln(6).$$

4D) Si ha

$$\int_0^1 \frac{dx}{4x-11} = \ln\left(\frac{7}{11}\right).$$

Falso: Infatti, con la sostituzione $y = 4x - 11$, da cui $dy = 4dx$, si ha

$$\int_0^1 \frac{dx}{4x-11} = \frac{1}{4} \int_{-11}^{-7} \frac{dy}{y} = \frac{\ln(|y|)}{4} \Big|_{-11}^{-7} = \frac{\ln(7) - \ln(11)}{4} = \frac{1}{4} \ln\left(\frac{7}{11}\right) \neq \ln\left(\frac{7}{11}\right).$$

5) Calcolare una primitiva delle seguenti funzioni

$$\begin{array}{llll} \mathbf{a1)} & x \sin(x), & \mathbf{a2)} & x^3 e^x, & \mathbf{b1)} & x^2 \ln(x), & \mathbf{b2)} & (x^2 - 3x + 3) e^x, \\ & & \mathbf{c1)} & x e^{2x}, & \mathbf{c2)} & x \cos(4x), & \mathbf{d1)} & e^{\sqrt{x}}, & \mathbf{d2)} & \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}, \end{array}$$

Soluzione:

a1) Integriamo per parti, derivando x e integrando $\sin(x)$:

$$\int x \sin(x) dx = \left[\begin{array}{ll} f'(x) = \sin(x) & \rightarrow f(x) = -\cos(x) \\ g(x) = x & \rightarrow g'(x) = 1 \end{array} \right] = -x \cos(x) - \int (-\cos(x)) dx,$$

da cui

$$\int x \sin(x) dx = -x \cos(x) + \sin(x).$$

a1) Integriamo per parti, derivando x^3 e integrando e^x :

$$\int x^3 e^x dx = \left[\begin{array}{ll} f'(x) = e^x & \rightarrow f(x) = e^x \\ g(x) = x^3 & \rightarrow g'(x) = 3x^2 \end{array} \right] = x^3 e^x - 3 \int x^2 e^x dx.$$

Per l'integrale rimasto, integriamo per parti, derivando x^2 e integrando e^x :

$$\int x^2 e^x dx = \left[\begin{array}{ll} f'(x) = e^x & \rightarrow f(x) = e^x \\ g(x) = x^2 & \rightarrow g'(x) = 2x \end{array} \right] = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx.$$

Per l'ultimo integrale, integriamo per parti, derivando x e integrando e^x :

$$\int x e^x dx = \left[\begin{array}{ll} f'(x) = e^x & \rightarrow f(x) = e^x \\ g(x) = x & \rightarrow g'(x) = 1 \end{array} \right] = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x.$$

Rimettendo insieme i risultati, si ha

$$\int x^3 e^x = x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6x e^x - 6e^x = (x^3 - 3x^2 + 6x - 6) e^x.$$

b1) Integriamo per parti, derivando $\ln(x)$ e integrando x^2 :

$$\int x^2 \ln(x) dx = \left[\begin{array}{ll} f'(x) = x^2 & \rightarrow f(x) = \frac{x^3}{3} \\ g(x) = \ln(x) & \rightarrow g'(x) = \frac{1}{x} \end{array} \right] = \frac{x^3 \ln(x)}{3} - \int \frac{x^3}{3} \frac{1}{x} dx,$$

da cui

$$\int x^2 \ln(x) dx = \frac{x^3 \ln(x)}{3} - \int \frac{x^2}{3} dx = \frac{x^3 \ln(x)}{3} - \frac{x^3}{9} = \frac{x^3}{9} (3 \ln(x) - 1).$$

b2) Ricordiamo il seguente risultato: se $P(x)$ è un polinomio, allora

$$\int P(x) e^x dx = Q(x) e^x,$$

dove $Q(x)$ è un polinomio dello stesso grado di $P(x)$ e tale che

$$Q(x) + Q'(x) = P(x).$$

Pertanto,

$$\int (x^2 - 3x + 3) e^x dx = Q(x) e^x,$$

dove $Q(x)$ è un polinomio di secondo grado tale che

$$Q(x) + Q'(x) = x^2 - 3x + 3.$$

Scrivendo $Q(x) = ax^2 + bx + c$, si ha $Q'(x) = 2ax + b$, da cui

$$Q'(x) + Q(x) = ax^2 + (2a + b)x + (b + c) = x^2 - 3x + 3,$$

e quindi, per il principio di identità dei polinomi, deve essere $a = 1$, $2a + b = -3$ e $b + c = 3$, da cui segue $a = 1$, $b = -5$ e $c = 8$. In definitiva,

$$\int (x^2 - 3x + 3) e^x dx = (x^2 - 5x + 8) e^x.$$

c1) Sostituiamo $y = 2x$, da cui $dy = 2 dx$; si ha

$$\int x e^{2x} dx = \frac{1}{4} \int y e^y dy.$$

L'ultimo integrale si svolge per parti:

$$\int y e^y dy = \left[\begin{array}{ll} f'(x) = e^y & \rightarrow f(x) = e^y \\ g(x) = y & \rightarrow g'(x) = 1 \end{array} \right] = y e^y - \int e^y dy = (y - 1) e^y,$$

e quindi

$$\int x e^{2x} dx = \frac{(2x - 1) e^{2x}}{4}.$$

c2) Sostituiamo $y = 4x$, da cui $dy = 4 dx$; si ha

$$\int x \cos(4x) dx = \frac{1}{16} \int y \cos(y) dy.$$

L'ultimo integrale si svolge per parti:

$$\int y \cos(y) dy = \left[\begin{array}{ll} f'(x) = \cos(y) & \rightarrow f(x) = \sin(y) \\ g(x) = y & \rightarrow g'(x) = 1 \end{array} \right] = y \sin(y) - \int \sin(y) dy = y \sin(y) + \cos(y),$$

e quindi

$$\int x \cos(4x) dx = \frac{4x \sin(4x) + \cos(4x)}{16}.$$

d1) Sostituiamo $x = y^2$, da cui $dx = 2y dy$. Pertanto,

$$\int e^{\sqrt{x}} dx = 2 \int e^y y dy.$$

Svolgendo l'ultimo integrale per parti, si ha

$$\int y e^y dy = \left[\begin{array}{ll} f'(x) = e^y & \rightarrow f(x) = e^y \\ g(x) = y & \rightarrow g'(x) = 1 \end{array} \right] = y e^y - \int e^y dy = (y - 1) e^y,$$

da cui segue che

$$\int e^{\sqrt{x}} dx = 2(\sqrt{x} - 1) e^{\sqrt{x}}.$$

d2) Sostituiamo $y = \frac{1}{x}$, da cui $dy = -\frac{dx}{x^2}$. Pertanto,

$$\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3} dx = \int \frac{e^y}{x} \frac{dx}{x^2} = - \int y e^y dy.$$

Svolgendo l'ultimo integrale per parti, come nell'esercizio **d1)**, si ha

$$\int y e^y dy = (y - 1) e^y,$$

da cui segue che

$$\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3} dx = \left(1 - \frac{1}{x}\right) e^{\frac{1}{x}}.$$

6)

a1) - a2) Trovare una primitiva di $f(x) = \frac{1}{x^2 - 10x + 25}$ e calcolare $\int_6^7 f(x) dx$.

b1) - b2) Trovare una primitiva di $g(x) = \frac{1}{x^2 - 7x + 12}$ e calcolare $\int_5^6 g(x) dx$.

c1) - c2) Trovare una primitiva di $h(x) = \frac{1}{x^2 - 8x + 25}$ e calcolare $\int_4^7 h(x) dx$.

d1) - d2) Trovare una primitiva di $k(x) = \frac{2x - 10}{x^2 - 11x + 28}$ e di $j(x) = \frac{x^3}{4 + x^2}$.

Soluzione:

a1) - a2) Osserviamo che si ha $x^2 - 10x + 25 = (x - 5)^2$. Pertanto,

$$\int \frac{dx}{x^2 - 10x + 25} = \int \frac{dx}{(x - 5)^2} = -\frac{1}{x - 5},$$

e quindi

$$\int_6^7 \frac{dx}{x^2 - 10x + 25} = -\frac{1}{x - 5} \Big|_6^7 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}.$$

b1) - b2) Osserviamo che si ha $x^2 - 7x + 12 = (x - 4)(x - 3)$. Cerchiamo dunque A e B tali che

$$\frac{1}{(x - 4)(x - 3)} = \frac{A}{x - 4} + \frac{B}{x - 3}.$$

Moltiplicando una volta per $x - 4$ e una volta per $x - 3$ si ottiene

$$\frac{1}{x - 3} = A + B \frac{x - 4}{x - 3} \quad \text{e} \quad \frac{1}{x - 4} = A \frac{x - 3}{x - 4} + B.$$

Scegliendo $x = 4$ nella prima e $x = 3$ nella seconda, si trova $A = \frac{1}{1} = -B$, cosicch 

$$\frac{1}{x^2 - 7x + 12} = \frac{1}{(x - 4)(x - 3)} = \frac{1}{1(x - 4)} - \frac{1}{1(x - 3)},$$

da cui segue che

$$\int \frac{dx}{x^2 - 7x + 12} = \int \left[\frac{1}{1(x - 4)} - \frac{1}{1(x - 3)} \right] dx = \frac{\ln(|x - 4|) - \ln(|x - 3|)}{1} = \frac{1}{1} \ln \left(\left| \frac{x - 4}{x - 3} \right| \right).$$

Pertanto,

$$\int_5^6 \frac{dx}{x^2 - 7x + 12} = \frac{1}{1} \ln \left(\left| \frac{x - 4}{x - 3} \right| \right) \Big|_5^6 = \frac{1}{1} \left[\ln \left(\frac{2}{3} \right) - \ln \left(\frac{1}{2} \right) \right] = \frac{1}{1} \ln \left(\frac{4}{3} \right).$$

c1) - c2) Osserviamo che si ha $x^2 - 8x + 25 = (x - 4)^2 + 9$. Possiamo allora scrivere

$$x^2 - 8x + 25 = 9 \left[1 + \left(\frac{x - 4}{3} \right)^2 \right],$$

e quindi si ha

$$\int \frac{dx}{x^2 - 8x + 25} = \frac{1}{9} \int \frac{dx}{1 + \left(\frac{x - 4}{3} \right)^2}.$$

Con la sostituzione $y = \frac{x - 4}{3}$, da cui $dy = \frac{dx}{3}$, si ha

$$\int \frac{dx}{x^2 - 8x + 25} = \frac{1}{3} \int \frac{dy}{1 + y^2} = \frac{1}{3} \arctan(y) = \frac{1}{3} \arctan \left(\frac{x - 4}{3} \right).$$

Si ha pertanto

$$\int_4^7 \frac{dx}{x^2 - 8x + 25} = \frac{1}{3} \arctan \left(\frac{x - 4}{3} \right) \Big|_4^7 = \frac{\arctan(1) - \arctan(0)}{3} = \frac{\pi}{12}.$$

d1) Osserviamo che si ha

$$\frac{2x-10}{x^2-11x+28} = \frac{2x-11}{x^2-11x+28} + \frac{1}{x^2-11x+28}.$$

Dal momento che al numeratore compare la derivata del denominatore, si ha

$$\int \frac{2x-11}{x^2-11x+28} dx = \ln(|x^2-11x+28|).$$

Per calcolare il secondo integrale, osserviamo che si ha $x^2-11x+28 = (x-7)(x-4)$. Con conti analoghi a quelli visti nello svolgimento dell'esercizio **b1)** - **b2)** si ha che

$$\frac{1}{x^2-11x+28} = \frac{1}{(x-7)(x-4)} = \frac{1}{3(x-7)} - \frac{1}{3(x-4)},$$

cosicché

$$\int \frac{dx}{x^2-11x+28} = \int \left[\frac{1}{3(x-7)} - \frac{1}{3(x-4)} \right] dx = \frac{1}{3} \ln \left(\left| \frac{x-7}{x-4} \right| \right).$$

Mettendo insieme i risultati trovati, si ha

$$\int \frac{2x-10}{x^2-11x+28} = \ln(|x^2-11x+28|) + \frac{1}{3} \ln \left(\left| \frac{x-7}{x-4} \right| \right).$$

d2) Scriviamo

$$\frac{x^3}{4+x^2} = \frac{x^3+4x-4x}{4+x^2} = x - \frac{4x}{4+x^2}.$$

Abbiamo quindi

$$\int \frac{x^3}{4+x^2} dx = \int \left[x - \frac{4x}{4+x^2} \right] dx = \frac{x^2}{2} - \int \frac{4x}{4+x^2} dx.$$

Per calcolare l'ultimo integrale, poniamo $y = 4+x^2$, da cui $dy = 2x dx$, e otteniamo

$$\int \frac{4x}{4+x^2} dx = \int \frac{2 dy}{y} = 2 \ln(|y|) = 2 \ln(x^2+4),$$

dove si è tolto il modulo dato che la funzione x^2+4 è positiva. In definitiva,

$$\int \frac{x^3}{4+x^2} dx = \frac{x^2}{2} - 2 \ln(x^2+4).$$

7) Trovare una primitiva di

$$\begin{array}{llll} \mathbf{a1)} & x e^{5x}, & \mathbf{a2)} & e^x \sin(2x), & \mathbf{b1)} & \sin^2(5x), & \mathbf{b2)} & \cos^3(5x), \\ \mathbf{c1)} & (8x+5)e^x, & \mathbf{c2)} & (7x^2-4x+2)e^x, & \mathbf{d1)} & x^2 \ln(5x), & \mathbf{d2)} & 12x \arctan(6x). \end{array}$$

Soluzione:

a1) Integriamo per parti, derivando x e integrando e^{5x} . Si ha

$$\int x e^{5x} dx = \frac{x}{5} e^{5x} - \frac{1}{5} \int e^{5x} dx = \frac{x}{5} e^{5x} - \frac{1}{25} e^{5x} = \frac{5x-1}{25} e^{5x}.$$

a2) Integriamo per parti, derivando $\sin(2x)$ e integrando l'esponenziale. Si ha

$$\int e^x \sin(2x) dx = e^x \sin(2x) - 2 \int e^x \cos(2x) dx.$$

Per calcolare l'ultimo integrale, operiamo per parti, derivando $\cos(2x)$ e integrando l'esponenziale. Si ha

$$\int e^x \cos(2x) dx = e^x \cos(2x) + 2 \int e^x \sin(2x) dx.$$

Mettendo insieme i risultati, si ha

$$\int e^x \sin(2x) dx = e^x [\sin(2x) - 2 \cos(2x)] - 4 \int e^x \sin(2x) dx,$$

da cui si ricava (portando l'integrale a secondo membro a sinistra)

$$\int e^x \sin(2x) dx = \frac{e^x}{5} [\sin(2x) - 2 \cos(2x)].$$

b1) Integriamo per parti, derivando e integrando $\sin(5x)$. Si ha

$$\int \sin^2(5x) dx = \int \sin(5x) \sin(5x) dx = -\frac{1}{5} \sin(5x) \cos(5x) + \int \cos^2(5x) dx.$$

Ora si ha

$$\int \cos^2(5x) dx = \int [1 - \sin^2(5x)] dx = x - \int \sin^2(5x) dx.$$

Si ha dunque

$$\int \sin^2(5x) dx = -\frac{1}{5} \sin(5x) \cos(5x) + x - \int \sin^2(5x) dx.$$

Portando a sinistra una parte dell'integrale a destra si ottiene

$$2 \int \sin^2(5x) dx = -\frac{1}{5} \sin(5x) \cos(5x) + x,$$

da cui segue che

$$\int \sin^2(5x) dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{10} \sin(5x) \cos(5x).$$

b2) Osserviamo che si ha

$$\cos^3(5x) = \cos^2(5x) \cos(5x) = [1 - \sin^2(5x)] \cos(5x).$$

Pertanto, con la sostituzione $y = \sin(5x)$, da cui $dy = 5 \cos(5x) dx$, si ha

$$\int \cos^3(5x) dx = \int [1 - \sin^2(5x)] \cos(5x) dx = \frac{1}{5} \int (1 - y^2) dy = \frac{1}{5} \left[y - \frac{y^3}{3} \right],$$

e quindi

$$\int \cos^3(5x) dx = \frac{\sin(5x)}{5} - \frac{\sin^3(5x)}{15}.$$

c1) Integriamo per parti, derivando il binomio e integrando l'esponenziale. Si ha

$$\int (8x + 5) e^x dx = (8x + 5) e^x - 8 \int e^x dx = (8x - 3) e^x.$$

c2) Sappiamo che si ha

$$\int (7x^2 - 4x + 2) e^x dx = Q(x) e^x,$$

dove $Q(x)$ è un polinomio di secondo grado tale che $Q(x) + Q'(x) = 7x^2 - 4x + 2$. Se $Q(x) = ax^2 + bx + c$ è un generico polinomio di secondo grado, si ha

$$Q(x) + Q'(x) = ax^2 + (2a + b)x + (b + c),$$

e imponendo che si abbia $Q(x) + Q'(x) = 7x^2 - 4x + 2$ si ha che deve essere

$$a = 7, \quad 2a + b = -4, \quad b + c = 2,$$

da cui si ricava facilmente che

$$a = 7, \quad b = -18, \quad c = 20,$$

e quindi

$$\int (7x^2 - 4x + 2) e^x dx = (7x^2 - 18x + 20) e^x.$$

d1) Integriamo per parti, derivando il logaritmo e integrando x^2 . Si ha

$$\int x^2 \ln(5x) dx = \frac{x^3}{3} \ln(5x) - \frac{1}{3} \int x^3 \frac{5}{5x} dx = \frac{x^3}{3} \ln(5x) - \frac{x^3}{9} = \frac{x^3}{9} [3 \ln(5x) - 1].$$

d2) Integriamo per parti, integrando il monomio e derivando l'arcotangente. Si ha

$$\int 12x \arctan(6x) dx = 6x^2 \arctan(6x) - \int \frac{36x^2}{1 + 36x^2} dx.$$

Per calcolare l'ultimo integrale, aggiungiamo e togliamo 1 al numeratore:

$$\int \frac{36x^2}{1 + 36x^2} dx = \int \frac{1 + 36x^2 - 1}{1 + 36x^2} dx = \int \left[1 - \frac{1}{1 + 36x^2} \right] dx = x - \int \frac{dx}{1 + 36x^2}.$$

L'ultimo integrale si calcola ponendo $y = 6x$, da cui $dy = 6dx$ per ottenere

$$\int \frac{dx}{1 + 36x^2} = \frac{1}{6} \int \frac{dy}{1 + y^2} = \frac{\arctan(y)}{6} = \frac{\arctan(6x)}{6}.$$

In definitiva, si ha

$$\int 12x \arctan(6x) dx = 6x^2 \arctan(6x) - x + \frac{\arctan(6x)}{6}.$$