



**Calcolo integrale — Compito di pre-esonero**  
**17 Marzo 2023 — Compito n. 00046**

**Istruzioni:** le prime due caselle (**V** / **F**) permettono di selezionare la risposta vero/falso. La casella “**C**” serve a correggere eventuali errori invertendo la risposta data. Per selezionare una casella, annerirla completamente: ☐ (non ☐ o ☐).

**Nome:** \_\_\_\_\_

**Cognome:** \_\_\_\_\_

**Matricola:**

--	--	--	--	--	--	--

**Punteggi:** 1 punto per ogni risposta esatta, 0 punti per risposte sbagliate o lasciate in bianco.

	1A	1B	1C	1D	2A	2B	2C	2D	3A	3B	3C	3D	4A	4B	4C	4D
V	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
F	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
C	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

1) Sia  $a_k \geq 0$  una successione tale che

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k \text{ è convergente.}$$

**1A)** La successione  $\frac{a_k}{a_k+7}$  tende a zero.

**1B)** La serie di termine generico  $\sin(4a_k)$  è convergente.

**1C)** La serie di termine generico  $\frac{\cos(a_k)}{k^3}$  è convergente.

**1D)** La serie di termine generico  $k^6 a_k$  può divergere.

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false

**2A)**

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (e^{\frac{3}{k}} - 1)^8 \text{ converge.}$$

**2B)**

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^k k^3}{k!} \text{ converge.}$$

**2C)**

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt[5]{k}} \text{ converge.}$$

**2D)**

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{7k}}{k^6} \text{ diverge assolutamente.}$$

**3)** Sia  $f(x) = \cos(6x)$ .

**3A)** Il raggio di convergenza della serie di Taylor di  $f(x)$  è finito.

**3B)** Il coefficiente del termine di grado 2 della serie di Taylor di  $f(x)$  è diverso da zero.

**3C)** Se  $g(x) = x^3 f(x)$ , si ha  $g^{(4)}(0) = 0$ .

**3D)** Si ha  $f^{(8)}(0) = 8! \cdot 6^8$ .

4) Si consideri la serie di potenze

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{3^k} (x-3)^k.$$

**4A)** Il centro della serie è  $x_0 = 0$ .

**4B)** Se  $a_k = 6$  per ogni  $k$ , il raggio di convergenza delle serie è  $R = 3$ .

**4C)** Se  $a_k = 2^k$ , il raggio di convergenza della serie è  $R = \frac{3}{2}$ .

**4D)** Se  $a_k = \frac{1}{k^8}$ , la serie diverge per  $x = 6$ .

**Docente:** \_\_\_\_\_

--	--	--	--	--	--	--	--

Cognome

Nome

Matricola

Compito 00046

---

5) a) Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^9 \tan\left(\frac{4k^6}{2^k}\right).$$

b) Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \sqrt[9]{k} \left( e^{\frac{1}{k}} - 1 - \frac{1}{k} \right).$$

c) Scrivere la serie di Taylor di  $f(x) = x^6 e^{8x}$  e calcolare  $f^{(5)}(0)$ .

d) Data  $f(x) = \cos(2x^2)$ , si calcolino  $f^{(4)}(0)$  e  $f^{(5)}(0)$ .

---

--	--	--	--	--	--	--	--

Cognome

Nome

Matricola

Compito 00046

---

6) Si consideri la serie di potenze

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(x-7)^k}{k}.$$

- a) Si determini il centro della serie.
  - b) Si determini il raggio di convergenza della serie.
  - c) Si determini l'insieme di convergenza della serie.
  - d) Si calcoli  $f'(x)$ .
-

## Soluzioni del compito 00046

1) Sia  $a_k \geq 0$  una successione tale che

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k \quad \text{è convergente.}$$

---

**1A)** La successione  $\frac{a_k}{a_k+7}$  tende a zero.

**Vero:** Dato che la serie di termine generico  $a_k$  è convergente, la successione  $a_k$  è infinitesima. Pertanto,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{a_k}{a_k+7} = \frac{0}{0+7} = 0.$$

---

**1B)** La serie di termine generico  $\sin(4 a_k)$  è convergente.

**Vero:** Dato che la successione  $a_k$  tende a zero (essendo la serie di termine generico  $a_k$  convergente), si ha

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\sin(4 a_k)}{a_k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\sin(4 a_k)}{4 a_k} 4 = 1 \cdot 4 = 4 \in (0, +\infty).$$

Per il criterio del confronto asintotico, la serie data converge.

---

**1C)** La serie di termine generico  $\frac{\cos(a_k)}{k^3}$  è convergente.

**Vero:** Dato che  $\cos(a_k)$  tende a 1 (si ricordi che la successione  $a_k$  tende a zero perché la serie è convergente), si ha

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\cos(a_k)}{\frac{1}{k^3}} = 1.$$

Per il criterio del confronto asintotico, la serie data ha lo stesso comportmento della serie di termine generico  $\frac{1}{k^3}$ , che converge essendo una serie armonica generalizzata di esponente  $\alpha = 3 > 1$ .

---

**1D)** La serie di termine generico  $k^6 a_k$  può divergere.

**Vero:** Ad esempio, se  $a_k = \frac{1}{k^2}$ , la serie di termine generico  $k^6 a_k = k^4$  è divergente.

---

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false

---

2A)

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (e^{\frac{3}{k}} - 1)^8 \text{ converge.}$$

**Vero:** Ricordando che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1,$$

si ha

$$e^{\frac{3}{k}} - 1 \approx \frac{3}{k},$$

e quindi

$$(e^{\frac{3}{k}} - 1)^8 \approx \left(\frac{3}{k}\right)^8 = \frac{3^8}{k^8}.$$

Dato che la serie di termine generico  $\frac{3^8}{k^8}$  è convergente (essendo una serie armonica generalizzata di esponente  $\alpha = 8 > 1$ ), la serie data converge per il criterio del confronto asintotico.

---

2B)

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^k k^3}{k!} \text{ converge.}$$

**Vero:** Appliciamo il criterio del rapporto: si ha

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2^{k+1} (k+1)^3}{(k+1)!}}{\frac{2^k k^3}{k!}} = \lim_{k \rightarrow +\infty} 2 \left(\frac{k+1}{k}\right)^3 \frac{1}{k+1} = 2 \cdot 1^3 \cdot 0 = 0 < 1,$$

e quindi la serie converge.

---

2C)

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt[5]{k}} \text{ converge.}$$

**Vero:** Dato che la successione  $a_k = \frac{1}{\sqrt[5]{k}}$  è positiva, decrescente e infinitesima, la serie converge per il criterio di Leibnitz.

---

2D)

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{7k}}{k^6} \text{ diverge assolutamente.}$$

**Falso:** Si ha

$$\left| \frac{(-1)^{7k}}{k^6} \right| = \frac{1}{k^6}.$$

Dato che la serie di termine generico  $\frac{1}{k^6}$  converge (essendo una serie armonica generalizzata di esponente  $\alpha = 6 > 1$ ), la serie data converge assolutamente.

---

**3)** Sia  $f(x) = \cos(6x)$ .

---

Ricordando che

$$\cos(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} t^{2k}, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

si ha, per il principio di sostituzione,

$$(1) \quad f(x) = \cos(6x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} (6x)^{2k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k 6^{2k}}{(2k)!} x^{2k}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

---

**3A)** Il raggio di convergenza della serie di Taylor di  $f(x)$  è finito.

**Falso:** Dalla (1) segue che il raggio di convergenza della serie è infinito.

---

**3B)** Il coefficiente del termine di grado 2 della serie di Taylor di  $f(x)$  è diverso da zero.

**Vero:** Dalla (1) si ha che

$$f(x) = 1 - \frac{6^2}{2} x^2 + \text{termini di grado superiore a } 2,$$

e quindi il coefficiente del termine di grado 2 vale  $-18$ , che è diverso da zero.

---

**3C)** Se  $g(x) = x^3 f(x)$ , si ha  $g^{(4)}(0) = 0$ .

**Vero:** Dalla (1) segue che

$$g(x) = x^3 f(x) = x^3 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k 6^{2k}}{(2k)!} x^{2k} = x^3 - \frac{6^2}{2} x^5 + o(x^5).$$

Dall'ultima espressione, si vede che  $g^{(4)}(0) = 0$ .

---

**3D)** Si ha  $f^{(8)}(0) = 8! \cdot 6^8$ .

**Falso:** Dalla (1), si vede facilmente che il termine di grado 8 nella serie di Taylor di  $f(x)$  è

$$a_8 = \frac{(-1)^4 6^8}{8!} = \frac{6^8}{8!},$$

da cui segue che  $f^{(8)}(0) = a_8 \cdot 8! = 6^8 \neq 8! \cdot 6^8$ .

---

4) Si consideri la serie di potenze

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{3^k} (x-3)^k.$$

---

Ricordiamo che una serie di potenze è una serie della forma

$$(1) \quad f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k (x-x_0)^k,$$

e che  $x_0$  si dice il centro della serie.

---

**4A)** Il centro della serie è  $x_0 = 0$ .

**Falso:** Dalla (1), segue che il centro della serie è  $x_0 = 3 \neq 0$ .

---

**4B)** Se  $a_k = 6$  per ogni  $k$ , il raggio di convergenza della serie è  $R = 3$ .

**Vero:** Se  $a_k = 6$  per ogni  $k$ , i coefficienti della serie di potenze sono

$$b_k = \frac{6}{3^k}.$$

Si ha

$$L = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{b_k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[k]{6}}{3} = \frac{1}{3},$$

da cui segue che il raggio di convergenza della serie è  $R = \frac{1}{L} = 3$ .

---

**4C)** Se  $a_k = 2^k$ , il raggio di convergenza della serie è  $R = \frac{3}{2}$ .

**Vero:** Se  $a_k = 2^k$ , i coefficienti della serie di potenze sono

$$b_k = \frac{2^k}{3^k} = \left(\frac{2}{3}\right)^k.$$

Dato che

$$L = \lim_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{b_k} = \frac{2}{3},$$

il raggio di convergenza della serie è  $R = \frac{1}{L} = \frac{3}{2}$ .

---

**4D)** Se  $a_k = \frac{1}{k^8}$ , la serie diverge per  $x = 6$ .

**Falso:** Se  $a_k = \frac{1}{k^8}$  e  $x = 6$  la serie diventa

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^8} \frac{(6-3)^k}{3^k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^8} \frac{3^k}{3^k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^8},$$

e l'ultima serie è convergente essendo una serie armonica generalizzata di esponente  $\alpha = 8 > 1$ .

---

5) a) Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^9 \tan\left(\frac{4k^6}{2^k}\right).$$

b) Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \sqrt[9]{k} \left( e^{\frac{1}{k}} - 1 - \frac{1}{k} \right).$$

c) Scrivere la serie di Taylor di  $f(x) = x^6 e^{8x}$  e calcolare  $f^{(5)}(0)$ .

d) Data  $f(x) = \cos(2x^2)$ , si calcolino  $f^{(4)}(0)$  e  $f^{(5)}(0)$ .

---

**Soluzione:**

a) Ricordando che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1, \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{4k^6}{2^k} = 0,$$

si ha

$$a_k = k^9 \tan\left(\frac{4k^6}{2^k}\right) \approx \frac{4k^{15}}{2^k} = b_k.$$

Applicando il criterio del rapporto alla serie di termine generico  $b_k$  si ha

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{b_{k+1}}{b_k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{4(k+1)^{15}}{2^{k+1}} \frac{2^k}{4k^{15}} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \left( \frac{k+1}{k} \right)^{15} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} < 1,$$

e quindi la serie di termine generico  $b_k$  è convergente. Per il criterio del confronto asintotico, anche la serie di termine generico  $a_k$  è convergente.

b) Ricordando che

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2),$$

si ha che

$$e^{\frac{1}{k}} - 1 - \frac{1}{k} = \frac{1}{2k^2} + o(k^{-2}).$$

Pertanto,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{k}} - 1 - \frac{1}{k}}{\frac{1}{k^2}} = \frac{1}{2},$$

da cui segue che

$$\sqrt[9]{k} \left( e^{\frac{1}{k}} - 1 - \frac{1}{k} \right) \approx k^{\frac{1}{9}} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{k^{\frac{17}{9}}}.$$

Dato che la serie di termine generico  $\frac{1}{k^{\frac{17}{9}}}$  è convergente (come serie armonica generalizzata di esponente  $\alpha = \frac{17}{9} > 1$ ), la serie data è convergente per il criterio del confronto asintotico.

c) Ricordando che

$$e^t = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!}, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

si ha

$$e^{8x} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{8^k}{k!} x^k,$$

e quindi

$$f(x) = x^6 e^{8x} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{8^k}{k!} x^{k+6}.$$

Dato che nella serie non compaiono termini di grado 5 (il grado minimo è 6, corrispondente a  $k = 0$ ), si ha  $f^{(5)}(0) = 0$ .



**d)** Ricordando che

$$\cos(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} t^{2k} = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} + o(t^4),$$

si ha

$$f(x) = \cos(2x^2) = 1 - \frac{(2x^2)^2}{2} + \frac{(2x^2)^4}{24} + o(x^8) = 1 - 2x^4 + 0 \cdot x^5 + o(x^5),$$

da cui segue che  $f^{(4)}(0) = -2 \cdot 4!$  e che  $f^{(5)}(0) = 0$ .

6) Si consideri la serie di potenze

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(x-7)^k}{k}.$$

- a) Si determini il centro della serie.
  - b) Si determini il raggio di convergenza della serie.
  - c) Si determini l'insieme di convergenza della serie.
  - d) Si calcoli  $f'(x)$ .
- 

**Soluzione:**

a) Ricordando che la forma generale di una serie di potenze è

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (x - x_0)^k,$$

dove  $x_0$  è il centro della serie, il centro della serie proposta è  $x_0 = 7$ .

b) Dato che  $a_k = \frac{1}{k}$ , si ha

$$L = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{k+1}}{\frac{1}{k}} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{k}{k+1} = 1,$$

da cui segue che il raggio di convergenza della serie è  $R = \frac{1}{L} = 1$ .

c) Dato che  $R = 1$ , la serie converge se  $x$  è tale che  $|x - 7| < 1$ , ovvero se  $x$  appartiene a  $(6, 8)$  e non converge se  $|x - 7| > 1$ . Rimangono da studiare i due casi  $x = 8$  e  $x = 6$ . Sostituendo si ottengono le due serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}, \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}.$$

La prima diverge, mentre la seconda converge per il criterio di Leibnitz. Ne segue che l'insieme di convergenza della serie è l'intervallo  $I = [6, 8)$ .

d) Si ha, per  $x$  in  $I$ ,

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k(x-7)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{+\infty} (x-7)^{k-1} = \sum_{h=0}^{+\infty} (x-7)^h = \frac{1}{1 - (x-7)} = \frac{1}{8-x}.$$