Soluzioni del compito 00098

1) Sia
$$F(t) = \int_{-9}^{t} [3\,\mathrm{e}^{9\,|x|} + \sin(7\,x)]\,dx\,.$$

1A) La funzione $F(t)$ non è derivabile per qualche t in $\mathbb{R}$.

Falso: Dato che la funzione $f(x) = 3\,\mathrm{e}^{9\,|x|} - \sin(7\,x)$ è continua su $\mathbb{R}$, per il teorema fondamentale del calcolo integrale la funzione $F(t)$ è derivabile per ogni t in $\mathbb{R}$, e si ha $F'(t) = f(t)$ per ogni t.

1B) Si ha $F(-9) = 0$.

Vero: Si ha
$$F(-9) = \int_{-9}^{-9} [3\,\mathrm{e}^{9\,|x|} + \sin(7\,x)]\,dx = 0\,,$$
dato che gli estremi di integrazione coincidono.

1C) La funzione $F(t)$ è strettamente decrescente su $\mathbb{R}$.

Falso: Si ha
$$F'(t) = 3\,\mathrm{e}^{9\,|t|} + \sin(7\,t) \geq 3 \cdot 1 - 1 = 2 > 0\,,$$
dato che $\mathrm{e}^{9\,|t|} \geq 1$ e che $\sin(7\,t) \geq -1$. Dato che la derivata di $F(t)$ è strettamente positiva per ogni t, $F(t)$ è strettamente crescente su $\mathbb{R}$.

1D) Si ha $F(-16) < 0$.

Vero: Ricordando (si veda l'esercizio **1C**) che la funzione $F(t)$ è strettamente crescente, e che $F(-9) = 0$ (si veda l'esercizio **1B**), si ha
$$F(-16) < F(-9) = 0\,.$$

---

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

2A)

$$\int_0^1 (16x^3 - 15x^2 - 8x + 5)\,dx = 0\,.$$

Vero: Si ha

$$\int_0^1 (16x^3 - 15x^2 - 8x + 5)\,dx = (4x^4 - 5x^3 - 4x^2 + 5x)\Big|_0^1 = 4 - 5 - 4 + 5 = 0\,.$$

2B)

$$\int_0^\pi x\,\cos(10\,x)\,dx = 0\,.$$

Vero: Si ha, integrando per parti (derivando x e integrando $\cos(10\,x)$),

$$\int x\,\cos(10\,x)\,dx = \frac{x\,\sin(10\,x)}{10} - \frac{1}{10}\int \sin(10\,x)\,dx = \frac{x\,\sin(10\,x)}{10} + \frac{\cos(10\,x)}{100} + c\,,$$

dove si è usato che una primitiva di $\cos(10\,x)$ è $\sin(10\,x)/10$, e che una primitiva di $\sin(10\,x)$ è $-\cos(10\,x)/10$. Pertanto,

$$\int_0^\pi x\,\cos(10\,x)\,dx = \frac{x\,\sin(10\,x)}{10} + \frac{\cos(10\,x)}{100}\Big|_0^\pi = \frac{\pi\,\sin(10\,\pi)}{10} + \frac{\cos(10\,\pi)}{100} - \frac{0\cdot\sin(0)}{10} - \frac{\cos(0)}{100} = 0\,,$$

dato che $\sin(10\,\pi) = 0$ e che $\cos(10\,\pi) = 1$.

2C)

$$\int_0^6 \mathrm{e}^{7\,x}\,dx = \frac{\mathrm{e}^{42} - 1}{7}\,.$$

Vero: Dato che

$$\int \mathrm{e}^{7\,x}\,dx = \frac{\mathrm{e}^{7\,x}}{7} + c\,,$$

si ha

$$\int_0^6 \mathrm{e}^{7\,x}\,dx = \frac{\mathrm{e}^{7\,x}}{7}\Big|_0^6 = \frac{\mathrm{e}^{42} - 1}{7}\,.$$

2D)

$$\int_0^1 \frac{21\,x^2 + 14\,x}{5 + x^2 + x^3}\,dx = 7\,\log\left(\frac{5}{7}\right).$$

Falso: Si ha

$$\frac{21\,x^2 + 14\,x}{5 + x^2 + x^3} = 7\,\frac{3x^3 + 2x}{5 + x^2 + x^3} = 7\,\frac{(5 + x^2 + x^3)'}{5 + x^2 + x^3}\,.$$

Pertanto,

$$\int_0^1 \frac{21\,x^2 + 14\,x}{5 + x^2 + x^3}\,dx = 7\,\log(|5 + x^2 + x^3|)\Big|_0^1 = 7\,(\log(7) - \log(5)) = 7\,\log\left(\frac{7}{5}\right) \neq 7\,\log\left(\frac{5}{7}\right).$$

Alternativamente, si poteva osservare che, essendo la funzione integranda positiva su $[0, 1]$, l'integrale non poteva essere negativo.

---

3) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

3A)

$$\int_{-8}^{8} [x\,e^{2\,x^4} + x\,|x|^{11}]\,dx = 0\,.$$

Vero: Dato che la funzione integranda è dispari, e che l'intervallo di integrazione è simmetrico rispetto all'origine, l'integrale vale zero.

3B)

$$\int_{-4}^{4} [6\,\cos^2(x) + 4\,x^4]\,dx > 0\,.$$

Vero: L'integrale è positivo perché la funzione integranda è positiva.

3C)

$$\int_{-4}^{3} [x^7 + \sin(6\,x)]\,dx > 0\,.$$

Falso: Dato che la funzione è dispari, il suo integrale sull'intervallo $[-3,3]$ è nullo. Pertanto,

$$\int_{-4}^{3} [x^7 + \sin(6\,x)]\,dx = \int_{-4}^{-3} [x^7 + \sin(6\,x)]\,dx\,.$$

Quest'ultimo integrale è negativo perché la funzione integranda è negativa. Infatti, su tutto l'intervallo si ha

$$x^7 + \sin(6\,x) \le -3^7 + 1 < -3 + 1 = -2 < 0\,.$$

3D)

$$\int_{-3}^{5} [e^{5\,x^2} - \cos^2(2\,x)]\,dx > 0\,.$$

Vero: Dato che si ha, sull'intervallo $[-3,5]$,

$$e^{5\,x^2} - \cos^2(2\,x) \ge e^0 - 1 = 0\,,$$

la funzione integranda è positiva e quindi l'integrale è positivo.

---

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

4A)

$$\int_4^5 \frac{dx}{x-3} = 2 \int_5^7 \frac{dx}{x-3}\,.$$

Falso: Si ha

$$\int \frac{dx}{x-3} = \log(|x-3|) + c\,.$$

Pertanto,

$$\int_4^5 \frac{dx}{x-3} = \log(|x-3|)\Big|_4^5 = \log(2) - \log(1) = \log(2)\,,$$

e

$$\int_5^7 \frac{dx}{x-3} = \log(|x-3|)\Big|_5^7 = \log(4) - \log(2) = \log(2)\,,$$

e quindi i due integrali sono uguali.

4B)

$$\int_0^5 \frac{dx}{(2\,x-20)^2} = \frac{1}{40}\,.$$

Vero: Si ha

$$\int \frac{dx}{(2\,x-20)^2} = \frac{1}{4} \int \frac{dx}{(x-10)^2} = \frac{1}{4}\,\frac{1}{10-x} + c\,.$$

Pertanto,

$$\int_0^5 \frac{dx}{(2\,x-20)^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{10-5} - \frac{1}{10}\right) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{10} = \frac{1}{40}\,.$$

4C)

$$\int_8^9 \frac{dx}{x^2-5x+6} = \log\left(\frac{35}{36}\right).$$

Falso: Si ha

$$x^2 - 5x + 6 = (x-3)\,(x-2)\,,$$

e quindi

$$\int \frac{dx}{x^2-5x+6} = \frac{1}{3-2}\,\log\left(\left|\frac{x-3}{x-2}\right|\right) + c = \log\left(\left|\frac{x-3}{x-2}\right|\right) + c\,.$$

Pertanto,

$$\int_8^9 \frac{dx}{x^2-5x+6} = \log\left(\left|\frac{x-3}{x-2}\right|\right)\Big|_8^9 = \log\left(\frac{6}{7}\right) - \log\left(\frac{5}{6}\right) = \log\left(\frac{6}{7}\cdot\frac{6}{5}\right) = \log\left(\frac{36}{35}\right) \neq \log\left(\frac{35}{36}\right).$$

4D)

$$\int_5^{10} \frac{dx}{x^2-10x+50} = \frac{\pi}{4}\,.$$

Falso: Si ha

$$x^2 - 10x + 50 = (x^2 - 10\,x + 25) + 25 = (x-5)^2 + 25 = 25\left[\left(\frac{x-5}{5}\right)^2 + 1\right].$$

Pertanto,

$$\int \frac{dx}{x^2-10x+50} = \frac{1}{25}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x-5}{5}\right)^2}\,.$$

Con la sostituzione $y = \frac{x-5}{5}$, da cui $dx = 5\,dy$, si ha

$$\int \frac{dx}{x^2 - 10x + 50} = \frac{1}{5} \int \frac{dy}{1+y^2} = \frac{1}{5}\,\arctan(y) + c = \frac{1}{5}\,\arctan\left(\frac{x-5}{5}\right) + c\,.$$

Pertanto,

$$\int_5^{10} \frac{dx}{x^2 - 10x + 50} = \frac{1}{5}\,\arctan\left(\frac{x-5}{5}\right)\Big|_5^{10} = \frac{1}{5}\,(\arctan(1) - \arctan(0)) = \frac{1}{5} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{20} \neq \frac{\pi}{4}\,.$$

5) Determinare una primitiva delle funzioni $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ e $k(x)$, e calcolare gli integrali.

$$\textbf{a)}\ f(x) = x^2\,\log(x)\,, \quad \int_1^{e^2} f(x)\,dx\,, \qquad \textbf{b)}\ g(x) = x^2\,\cos(7\,x^3)\,, \quad \int_0^{\sqrt[3]{2\,\pi}} g(x)\,dx\,,$$

$$\textbf{c)}\ h(x) = (4x^2 - 54x + 182)\,e^{4\,x}\,, \quad \int_6^8 h(x)\,dx\,, \qquad \textbf{d)}\ k(x) = \frac{12\,x}{1+36\,x^4}\,, \quad \int_0^{1/\sqrt{6}} k(x)\,dx\,.$$

Soluzione:

a) Integriamo per parti, derivando $\log(x)$ e integrando x^2. Si ha

$$\int x^2\,\log(x)\,dx = \frac{x^3\,\log(x)}{3} - \int \frac{x^3}{3}\,\frac{1}{x}\,dx = \frac{x^3\,\log(x)}{3} - \frac{x^3}{9} + c = \frac{x^3}{9}(3\,\log(x) - 1) + c\,.$$

Pertanto,

$$\int_1^{e^2} f(x)\,dx = \frac{x^3}{9}(3\,\log(x) - 1)\Big|_1^{e^2} = \frac{e^6}{9}\,(3\,\log(e^2) - 1) + \frac{1}{9} = \frac{5}{9}\,e^6 + \frac{1}{9}\,.$$

b) Si ha, con la sostituzione $y = 7\,x^3$, da cui $x^2\,dx = dy/21$,

$$\int x^2\,\cos(7\,x^3)\,dx = \frac{1}{21}\int \cos(y)\,dy = \frac{\sin(y)}{21} + c = \frac{\sin(7\,x^3)}{21} + c\,.$$

Pertanto,

$$\int_0^{\sqrt[3]{2\,\pi}} g(x)\,dx = \frac{\sin(7\,x^3)}{21}\Big|_0^{\sqrt[3]{2\,\pi}} = \frac{\sin(14\,\pi) - \sin(0)}{21} = 0\,.$$

c) Ricordiamo che se $P_2(x)$ è un polinomio di grado 2, allora

$$\int P_2(x)\,e^{4\,x}\,dx = Q_2(x)\,e^{4\,x} + c\,,$$

dove $Q_2(x)$ è un polinomio di grado 2 tale che

$$4\,Q_2(x) + Q_2'(x) = P_2(x)\,.$$

Scrivendo il generico polinomio di grado 2 come $Q_2(x) = a\,x^2 + b\,x + c$, si ha

$$4\,Q_2(x) + Q_2'(x) = 4\,a\,x^2 + (4\,b + 2a)\,x + 4\,c + b\,.$$

Imponendo l'uguaglianza

$$4\,a\,x^2 + (4\,b + 2a)\,x + 4\,c + b = 4x^2 - 54x + 182\,,$$

si ha che deve essere $4\,a = 4$, $4\,b + 2a = -54$ e $4\,c + b = 182$. Risolvendo il sistema, si trova $a = 1$, $b = -14$ e $c = 49$. Pertanto,

$$\int (4x^2 - 54x + 182)\,e^{4\,x}\,dx = (x^2 - 14\,x + 49)\,e^{4\,x} = (x-7)^2\,e^{4\,x} + c\,,$$

e quindi

$$\int_6^8 h(x)\,dx = (x-7)^2\,e^{4\,x}\Big|_6^8 = e^{32} - e^{24}\,.$$

d) Si ha, con la sostituzione $y = 6\,x^2$, da cui $36\,x^4 = y^2$ e $dy = 12\,x\,dx$,

$$\int \frac{12\,x}{1+36\,x^4}\,dx = \int \frac{dy}{1+y^2} = \arctan(y) + c = \arctan(6\,x^2) + c\,.$$

Pertanto,

$$\int_0^{1/\sqrt{6}} k(x)\,dx = \arctan(6\,x^2)\Big|_0^{1/\sqrt{6}} = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4}\,.$$

6) Sia

$$F(t) = \int_5^t [2\,\mathrm{e}^{x^2} + \arctan(2\,|x|)]\,dx\,.$$

a) Dimostrare che $F(t)$ è derivabile per ogni t in $\mathbb{R}$.
b) Calcolare $F(5)$ e $F'(0)$.
c) Dimostrare che $F(t)$ è crescente, e non è né pari né dispari.
d) Dimostrare che

$$\lim_{t\to+\infty} F(t) = +\infty\,.$$

Soluzione:
a) Dato che la funzione $f(x) = 2\,\mathrm{e}^{x^2} + \arctan(2\,|x|)$ è una funzione continua, per il teorema fondamentale del calcolo integrale la funzione $F(t)$ è derivabile per ogni t in $\mathbb{R}$, e si ha

$$F'(t) = f(t) = 2\,\mathrm{e}^{t^2} + \arctan(2\,|t|)\,, \qquad \forall t \in \mathbb{R}\,. \tag{1}$$

b) Si ha

$$F(5) = \int_5^5 [2\,\mathrm{e}^{x^2} + \arctan(2\,|x|)]\,dx = 0\,,$$

e, dalla (1),

$$F'(0) = f(0) = 2\,.$$

c) Sempre dalla (1) si ha

$$F'(t) \geq 7 > 0\,,$$

e quindi $F(t)$ è strettamente crescente. Per quanto riguarda la parità e disparità, osserviamo che si ha

$$F(5) = 0\,.$$

Inoltre, dato che $F(t)$ è strettamente crescente, si ha

$$F(-5) < F(5) = 0\,,$$

e quindi $F(-5) \neq F(5)$ (cosicché $F(t)$ non è pari), e $F(-5) \neq -F(5)$ (cosicché $F(t)$ non è dispari).

d) Osserviamo innanzitutto che il limite di $F(t)$ esiste perché $F(t)$ è crescente. Inoltre, dato che

$$2\,\mathrm{e}^{x^2} + \arctan(2\,|x|) \geq 2\,,$$

si ha, se $t \geq 5$,

$$F(t) = \int_5^t [2\,\mathrm{e}^{x^2} + \arctan(2\,|x|)]\,dx \geq \int_5^t 2\,dx = 2\,(t-5)\,,$$

da cui segue che

$$\lim_{t\to+\infty} F(t) \geq \lim_{t\to+\infty} 2\,(t-5) = +\infty\,.$$