Calcolo integrale — Scheda di esercizi n. 5
14 Aprile 2023 — Compito n. 00109

Istruzioni: le prime due caselle (**V** / **F**) permettono di selezionare la risposta vero/falso. La casella "**C**" serve a correggere eventuali errori invertendo la risposta data.
Per selezionare una casella, annerirla completamente: ■ (non ☒ o ☑).

Nome: ____________________

Cognome: ____________________

Matricola: | | | | | | | |

Punteggi: 1 punto per ogni risposta esatta, 0 punti per risposte sbagliate o lasciate in bianco.

	1A	1B	1C	1D	2A	2B	2C	2D	3A	3B	3C	3D	4A	4B	4C	4D
V	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
F	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
C	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

1) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false

1A) La funzione $f(x) = 6x^2 - 3x + 4$ è integrabile su ogni intervallo chiuso e limitato di $\mathbb{R}$.
1B) Esistono intervalli chiusi e limitati di $\mathbb{R}$ su cui la funzione $f(x) = |x - 3|$ non è integrabile.
1C) Esistono intervalli chiusi e limitati di $\mathbb{R}$ su cui la funzione $f(x) = \frac{x+3}{x-2}$ non è integrabile.
1D) La funzione $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ è integrabile su ogni intervallo chiuso e limitato di $\mathbb{R}$.

2) Sia

$$F(t) = \int_0^t x\, e^{-3\,x^4}\, dx\,.$$

2A) La funzione $F(t)$ non è derivabile per ogni t in $\mathbb{R}$.
2B) Si ha $F'(0) = 0$.
2C) La funzione $F(t)$ è una funzione dispari.
2D) La funzione $F(t)$ è decrescente per $t \leq 0$.

3) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false
3A) La funzione $x^5 \sin(x^6)$ si integra per sostituzione.
3B) La funzione $x^3 \sin(x)$ si integra per parti.
3C) La funzione $x^7 \sin(x^2)$ si integra per parti prima, e per sostituzione poi.
3D) La funzione $f(x) = x^4 \arctan(x)$ si integra per parti prima, e per sostituzione poi.

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false
4A) Si ha

$$\int_8^{17} \frac{dx}{x} = \ln\left(\frac{8}{17}\right).$$

4B) Si ha

$$\int_{36}^{42} \frac{dx}{x-6} = \ln\left(\frac{6}{5}\right).$$

4C) Si ha

$$\int_7^{13} \frac{dx}{5-x} = \ln(4)\,.$$

4D) Si ha

$$\int_0^1 \frac{dx}{6\,x-17} = \ln\left(\frac{11}{17}\right).$$

Docente
☐ DelaTorre Pedraza
☐ Orsina

5) Calcolare una primitiva delle seguenti funzioni

$$\textbf{a1})\ x\,\sin(x)\,,\qquad \textbf{a2})\ x^3\,\mathrm{e}^x\,,\qquad \textbf{b1})\ x^2\,\ln(x)\,,\qquad \textbf{b2})\ (x^2-4x+3)\,\mathrm{e}^x\,,$$

$$\textbf{c1})\ x\,\mathrm{e}^{3\,x}\,,\qquad \textbf{c2})\ x\,\cos(4\,x)\,,\qquad \textbf{d1})\ \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\,,\qquad \textbf{d2})\ \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x^3}\,,$$

☐☐☐☐☐☐☐☐	**Cognome**	**Nome**	**Matricola**	**Compito 00109**

6)

a1) - a2) Trovare una primitiva di $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 12x + 36}$ e calcolare $\displaystyle\int_7^8 f(x)\,dx\,.$

b1) - b2) Trovare una primitiva di $g(x) = \dfrac{1}{x^2 - 11x + 18}$ e calcolare $\displaystyle\int_{10}^{11} g(x)\,dx\,.$

c1) - c2) Trovare una primitiva di $h(x) = \dfrac{1}{x^2 - 8x + 25}$ e calcolare $\displaystyle\int_4^7 h(x)\,dx\,.$

d1) - d2) Trovare una primitiva di $k(x) = \dfrac{2x - 11}{x^2 - 12x + 35}$ e di $j(x) = \dfrac{x^3}{10 + x^2}.$

$\square\square\square\square\square\square\square\square$ **Cognome** **Nome** **Matricola** **Compito 00109**

---

7) Trovare una primitiva di

$$\textbf{a1)}\ x\,\mathrm{e}^{4\,x}\,,\qquad \textbf{a2)}\ \mathrm{e}^{x}\,\sin(3\,x)\,,\qquad \textbf{b1)}\ \sin^2(4\,x)\,,\qquad \textbf{b2)}\ \cos^3(4\,x)\,,$$

$$\textbf{c1)}\ (4x+5)\,\mathrm{e}^{x}\,,\qquad \textbf{c2)}\ (5x^2-2x+8)\,\mathrm{e}^{x}\,,\qquad \textbf{d1)}\ x^8\,\ln(5\,x)\,,\qquad \textbf{d2)}\ 12\,x\,\arctan(6\,x)\,.$$

Soluzioni del compito 00109

1) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false

1A) La funzione $f(x) = 6x^2 - 3x + 4$ è integrabile su ogni intervallo chiuso e limitato di $\mathbb{R}$.

Vero: Dal momento che la funzione $f(x) = 6x^2 - 3x + 4$ è una funzione continua, è integrabile su ogni intervallo chiuso e limitato di $\mathbb{R}$.

1B) Esistono intervalli chiusi e limitati di $\mathbb{R}$ su cui la funzione $f(x) = |x - 3|$ non è integrabile.

Falso: Dal momento che la funzione $f(x) = |x - 3|$ è una funzione continua, è integrabile su ogni intervallo chiuso e limitato di $\mathbb{R}$.

1C) Esistono intervalli chiusi e limitati di $\mathbb{R}$ su cui la funzione $f(x) = \frac{x+3}{x-2}$ non è integrabile.

Vero: Dal momento che la funzione è illimitata (sia superiormente che inferiormente) in ogni intervallo chiuso e limitato che contenga $x = 2$ al suo interno (ad esempio: l'intervallo $[1, 3]$), la funzione non è integrabile su tali intervalli.

1D) La funzione $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ è integrabile su ogni intervallo chiuso e limitato di $\mathbb{R}$.

Vero: Dal momento che $x^2 - 4 = (x - 2)\,(x + 2)$, si ha, se $x \neq 2$,

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x - 2)\,(x + 2)}{x - 2} = x + 2\,.$$

Ne consegue che la funzione $f(x)$ coincide, in tutti punti tranne $x = 2$, con la funzione continua $g(x) = x + 2$, che è integrabile su ogni intervallo chiuso e limitato di $\mathbb{R}$; dunque, anche la funzione $f(x)$ è integrabile su tali intervalli.

---

2) Sia
$$F(t) = \int_0^t x\,\mathrm{e}^{-3\,x^4}\,dx\,.$$

2A) La funzione $F(t)$ non è derivabile per ogni t in $\mathbb{R}$.

Falso: Dal momento che la funzione $f(x) = x\,\mathrm{e}^{-3\,x^4}$ è una funzione continua, per il teorema fondamentale del calcolo integrale la funzione $F(t)$ è derivabile, e si ha
$$F'(t) = f(t) = t\,\mathrm{e}^{-3\,t^4} \qquad \forall t \in \mathbb{R}\,.$$

2B) Si ha $F'(0) = 0$.

Vero: Dato che $F'(t) = t\,\mathrm{e}^{-3\,t^4}$ (si veda la domanda 2A), si ha $F'(0) = 0$.

2C) La funzione $F(t)$ è una funzione dispari.

Falso: Dal momento che la funzione $f(x) = x\,\mathrm{e}^{-3\,x^4}$ è una funzione dispari, la funzione $F(t)$ è una funzione pari (e non dispari). Infatti,
$$F(-t) = \int_0^{-t} x\,\mathrm{e}^{-3\,x^4}\,dx = \begin{bmatrix} y = -x \\ dy = -dx \end{bmatrix} = -\int_0^t (-y)\,\mathrm{e}^{-3\,(-y)^4}\,dy = \int_0^t y\,\mathrm{e}^{-3\,y^4}\,dy = F(t)\,.$$

2D) La funzione $F(t)$ è decrescente per $t \leq 0$.

Vero: Dato che $F'(t) = t\,\mathrm{e}^{-3\,t^4}$ (si veda la domanda 2A), si ha $F'(t) \leq 0$ per $t \leq 0$, e quindi la funzione $F(t)$ è decrescente su tale insieme.

---

3) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false

3A) La funzione $x^5 \sin(x^6)$ si integra per sostituzione.

Vero: Infatti, definendo $y = x^6$, da cui $dy = 6x^5\,dx$, si ha

$$\int x^5 \sin(x^6)\,dx = \frac{1}{6}\int \sin(y)\,dy\,,$$

che è un integrale immediato.

3B) La funzione $x^3 \sin(x)$ si integra per parti.

Vero: Infatti, derivando il termine polinomiale x^3 e integrando la funzione trigonometrica, si ha

$$\int x^3 \sin(x)\,dx = -x^3\cos(x) + 3\int x^2\cos(x)\,dx\,.$$

Il procedimento continua 2 volte, finché non si arriva ad un integrale immediato (di $\sin(x)$ o di $\cos(x)$).

3C) La funzione $x^7 \sin(x^2)$ si integra per parti prima, e per sostituzione poi.

Falso: No, è il contrario. Infatti, definendo $y = x^2$, da cui $dy = 2x\,dx$, si ha

$$\int x^7 \sin(x^2)\,dx = \int (x^2)^3 \sin(x^2)\,x\,dx = \frac{1}{2}\int y^3\sin(y)\,dy\,,$$

e l'ultimo integrale si svolge per parti (si veda la domanda 3B).

3D) La funzione $f(x) = x^4 \arctan(x)$ si integra per parti prima, e per sostituzione poi.

Vero: Infatti, integrando il monomio e derivando l'arcotangente, si ha

$$\int x^4\arctan(x)\,dx = \frac{x^5}{5}\arctan(x) - \frac{1}{5}\int\frac{x^5}{1+x^2}\,dx\,.$$

L'ultimo integrale si svolge per sostituzione, ponendo $y = 1 + x^2$, da cui $dy = 2x\,dx$. Si ha

$$\int\frac{x^5}{1+x^2}\,dx = \int\frac{(x^2)^2}{1+x^2}\,x\,dx = \frac{1}{2}\int\frac{(y-1)^2}{y}\,dy\,,$$

e quest'ultimo integrale, dopo aver sviluppato la potenza del binomio, è la somma di 3 integrali immediati.

---

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false

4A) Si ha

$$\int_{8}^{17} \frac{dx}{x} = \ln\left(\frac{8}{17}\right).$$

Falso: Infatti, si ha

$$\int_{8}^{17} \frac{dx}{x} = \ln(|x|)\Big|_{8}^{17} = \ln(17) - \ln(8) = \ln\left(\frac{17}{8}\right) \neq \ln\left(\frac{8}{17}\right).$$

4B) Si ha

$$\int_{36}^{42} \frac{dx}{x-6} = \ln\left(\frac{6}{5}\right).$$

Vero: Infatti,

$$\int_{36}^{42} \frac{dx}{x-6} = \ln(|x-6|)\Big|_{36}^{42} = \ln(36) - \ln(30) = \ln\left(\frac{6}{5}\right).$$

4C) Si ha

$$\int_{7}^{13} \frac{dx}{5-x} = \ln(4).$$

Falso: Infatti,

$$\int_{7}^{13} \frac{dx}{5-x} = -\int_{7}^{13} \frac{dx}{x-5} = -\ln(|x-5|)\Big|_{7}^{13} = -\ln(8) + \ln(2) = -\ln(4) \neq \ln(4).$$

4D) Si ha

$$\int_{0}^{1} \frac{dx}{6\,x-17} = \ln\left(\frac{11}{17}\right).$$

Falso: Infatti, con la sostituzione $y = 6\,x - 17$, da cui $dy = 6\,dx$, si ha

$$\int_{0}^{1} \frac{dx}{6\,x-17} = \frac{1}{6}\int_{-17}^{-11} \frac{dy}{y} = \frac{\ln(|y|)}{6}\Big|_{-17}^{-11} = \frac{\ln(11) - \ln(17)}{6} = \frac{1}{6}\,\ln\left(\frac{11}{17}\right) \neq \ln\left(\frac{11}{17}\right).$$

---

5) Calcolare una primitiva delle seguenti funzioni

$$\textbf{a1)}\ x\,\sin(x)\,,\qquad \textbf{a2)}\ x^3\,\mathrm{e}^x\,,\qquad \textbf{b1)}\ x^2\,\ln(x)\,,\qquad \textbf{b2)}\ (x^2-4x+3)\,\mathrm{e}^x\,,$$

$$\textbf{c1)}\ x\,\mathrm{e}^{3\,x}\,,\qquad \textbf{c2)}\ x\,\cos(4\,x)\,,\qquad \textbf{d1)}\ \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\,,\qquad \textbf{d2)}\ \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x^3}\,,$$

Soluzione:

a1) Integriamo per parti, derivando x e integrando $\sin(x)$:

$$\int x\,\sin(x)\,dx = \left[\begin{array}{ccc} f'(x)=\sin(x) & \to & f(x)=-\cos(x) \\ g(x)=x & \to & g'(x)=1 \end{array}\right] = -x\,\cos(x) - \int(-\cos(x))\,dx\,,$$

da cui

$$\int x\,\sin(x)\,dx = -x\,\cos(x)+\sin(x)\,.$$

a1) Integriamo per parti, derivando x^3 e integrando e^x:

$$\int x^3\,\mathrm{e}^x\,dx = \left[\begin{array}{ccc} f'(x)=\mathrm{e}^x & \to & f(x)=\mathrm{e}^x \\ g(x)=x^3 & \to & g'(x)=3\,x^2 \end{array}\right] = x^3\,\mathrm{e}^x - 3\int x^2\,\mathrm{e}^x\,dx\,.$$

Per l'integrale rimasto, integriamo per parti, derivando x^2 e integrando e^x:

$$\int x^2\,\mathrm{e}^x\,dx = \left[\begin{array}{ccc} f'(x)=\mathrm{e}^x & \to & f(x)=\mathrm{e}^x \\ g(x)=x^2 & \to & g'(x)=2\,x \end{array}\right] = x^2\,\mathrm{e}^x - 2\int x\,\mathrm{e}^x\,dx\,.$$

Per l'ultimo integrale, integriamo per parti, derivando x e integrando e^x:

$$\int x\,\mathrm{e}^x\,dx = \left[\begin{array}{ccc} f'(x)=\mathrm{e}^x & \to & f(x)=\mathrm{e}^x \\ g(x)=x & \to & g'(x)=1 \end{array}\right] = x\,\mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x\,dx = x\,\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x\,.$$

Rimettendo insieme i risultati, si ha

$$\int x^3\,\mathrm{e}^x = x^3\,\mathrm{e}^x - 3\,x^2\,\mathrm{e}^x + 6\,x\,\mathrm{e}^x - 6\,\mathrm{e}^x = (x^3-3x^2+6x-6)\,\mathrm{e}^x\,.$$

b1) Integriamo per parti, derivando $\ln(x)$ e integrando x^2:

$$\int x^2\,\ln(x)\,dx = \left[\begin{array}{ccc} f'(x)=x^2 & \to & f(x)=\frac{x^3}{3} \\ g(x)=\ln(x) & \to & g'(x)=\frac{1}{x} \end{array}\right] = \frac{x^3\,\ln(x)}{3} - \int\frac{x^3}{3}\,\frac{1}{x}\,dx\,,$$

da cui

$$\int x^2\,\ln(x)\,dx = \frac{x^3\,\ln(x)}{3} - \int\frac{x^2}{3}\,dx = \frac{x^3\,\ln(x)}{3} - \frac{x^3}{9} = \frac{x^3}{9}\,(3\,\ln(x)-1)\,.$$

b2) Ricordiamo il seguente risultato: se $P(x)$ è un polinomio, allora

$$\int P(x)\,\mathrm{e}^x\,dx = Q(x)\,\mathrm{e}^x\,,$$

dove $Q(x)$ è un polinomio dello stesso grado di $P(x)$ e tale che

$$Q(x)+Q'(x)=P(x)\,.$$

Pertanto,

$$\int(x^2-4x+3)\,\mathrm{e}^x\,dx = Q(x)\,\mathrm{e}^x\,,$$

dove $Q(x)$ è un polinomio di secondo grado tale che

$$Q(x)+Q'(x)=x^2-4x+3\,.$$

Scrivendo $Q(x)=a\,x^2+b\,x+c$, si ha $Q'(x)=2a\,x+b$, da cui

$$Q'(x)+Q(x)=a\,x^2+(2a+b)\,x+(b+c)=x^2-4x+3\,,$$

e quindi,per il principio di identità dei polinomi, deve essere $a = 1$, $2a + b = -4$ e $b + c = 3$, da cui segue $a = 1$, $b = -6$ e $c = 9$. In definitiva,

$$\int (x^2 - 4x + 3)\,\mathrm{e}^x\,dx = (x^2 - 6x + 9)\,\mathrm{e}^x\,.$$

c1) Sostituiamo $y = 3\,x$, da cui $dy = 3\,dx$; si ha

$$\int x\,\mathrm{e}^{3\,x}\,dx = \frac{1}{9}\int y\,\mathrm{e}^y\,dy\,.$$

L'ultimo integrale si svolge per parti:

$$\int y\,\mathrm{e}^y\,dy = \left[\begin{array}{ccc} f'(x) = \mathrm{e}^y & \to & f(x) = \mathrm{e}^y \\ g(x) = y & \to & g'(x) = 1 \end{array}\right] = y\,\mathrm{e}^y - \int \mathrm{e}^y\,dy = (y-1)\,\mathrm{e}^y\,,$$

e quindi

$$\int x\,\mathrm{e}^{3\,x}\,dx = \frac{(3\,x - 1)\,\mathrm{e}^{3\,x}}{9}\,.$$

c2) Sostituiamo $y = 4\,x$, da cui $dy = 4\,dx$; si ha

$$\int x\,\cos(4\,x)\,dx = \frac{1}{16}\int y\,\cos(y)\,dy\,.$$

L'ultimo integrale si svolge per parti:

$$\int y\,\cos(y)\,dy = \left[\begin{array}{ccc} f'(x) = \cos(y) & \to & f(x) = \sin(y) \\ g(x) = y & \to & g'(x) = 1 \end{array}\right] = y\,\sin(y) - \int \sin(y)\,dy = y\,\sin(y) + \cos(y)\,,$$

e quindi

$$\int x\,\cos(4\,x)\,dx = \frac{4\,x\,\sin(4\,x) + \cos(4\,x)}{16}\,.$$

d1) Sostituiamo $x = y^2$, da cui $dx = 2\,y\,dy$. Pertanto,

$$\int \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\,dx = 2\int \mathrm{e}^y\,y\,dy\,.$$

Svolgendo l'ultimo integrale per parti, si ha

$$\int y\,\mathrm{e}^y\,dy = \left[\begin{array}{ccc} f'(x) = \mathrm{e}^y & \to & f(x) = \mathrm{e}^y \\ g(x) = y & \to & g'(x) = 1 \end{array}\right] = y\,\mathrm{e}^y - \int \mathrm{e}^y\,dy = (y-1)\,\mathrm{e}^y\,,$$

da cui segue che

$$\int \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\,dx = 2\,(\sqrt{x} - 1)\,\mathrm{e}^{\sqrt{x}}\,.$$

d2) Sostituiamo $y = \frac{1}{x}$, da cui $dy = -\frac{dx}{x^2}$. Pertanto,

$$\int \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x^3}\,dx = \int \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{y}}}{x}\,\frac{dx}{x^2} = -\int y\,\mathrm{e}^y\,dy\,.$$

Svolgendo l'ultimo integrale per parti, come nell'esercizio **d1)**, si ha

$$\int y\,\mathrm{e}^y\,dy = (y-1)\,\mathrm{e}^y\,,$$

da cui segue che

$$\int \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x^3}\,dx = \left(1 - \frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\,.$$

6)

a1) - a2) Trovare una primitiva di $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 12x + 36}$ e calcolare $\displaystyle\int_7^8 f(x)\,dx$.

b1) - b2) Trovare una primitiva di $g(x) = \dfrac{1}{x^2 - 11x + 18}$ e calcolare $\displaystyle\int_{10}^{11} g(x)\,dx$.

c1) - c2) Trovare una primitiva di $h(x) = \dfrac{1}{x^2 - 8x + 25}$ e calcolare $\displaystyle\int_4^7 h(x)\,dx$.

d1) - d2) Trovare una primitiva di $k(x) = \dfrac{2x - 11}{x^2 - 12x + 35}$ e di $j(x) = \dfrac{x^3}{10 + x^2}$.

Soluzione:

a1) - a2) Osserviamo che si ha $x^2 - 12x + 36 = (x - 6)^2$. Pertanto,

$$\int \frac{dx}{x^2 - 12x + 36} = \int \frac{dx}{(x-6)^2} = -\frac{1}{x-6}\,,$$

e quindi

$$\int_7^8 \frac{dx}{x^2 - 12x + 36} = -\frac{1}{x-6}\Big|_7^8 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}\,.$$

b1) - b2) Osserviamo che si ha $x^2 - 11x + 18 = (x - 9)\,(x - 2)$. Cerchiamo dunque A e B tali che

$$\frac{1}{(x-9)\,(x-2)} = \frac{A}{x-9} + \frac{B}{x-2}\,.$$

Moltiplicando una volta per $x - 9$ e una volta per $x - 2$ si ottiene

$$\frac{1}{x-2} = A + B\,\frac{x-9}{x-2} \quad \text{e} \quad \frac{1}{x-9} = A\,\frac{x-2}{x-9} + B\,.$$

Scegliendo $x = 9$ nella prima e $x = 2$ nella seconda, si trova $A = \frac{1}{7} = -B$, cosicché

$$\frac{1}{x^2 - 11x + 18} = \frac{1}{(x-9)\,(x-2)} = \frac{1}{7\,(x-9)} - \frac{1}{7\,(x-2)}\,,$$

da cui segue che

$$\int \frac{dx}{x^2 - 11x + 18} = \int \Big[\frac{1}{7\,(x-9)} - \frac{1}{7\,(x-2)}\Big]\,dx = \frac{\ln(|x-9|) - \ln(|x-2|)}{7} = \frac{1}{7}\,\ln\Big(\Big|\frac{x-9}{x-2}\Big|\Big)\,.$$

Pertanto,

$$\int_{10}^{11} \frac{dx}{x^2 - 11x + 18} = \frac{1}{7}\,\ln\Big(\Big|\frac{x-9}{x-2}\Big|\Big)\Big|_{10}^{11} = \frac{1}{7}\Big[\ln\Big(\frac{2}{9}\Big) - \ln\Big(\frac{1}{8}\Big)\Big] = \frac{1}{7}\,\ln\Big(\frac{16}{9}\Big)\,.$$

c1) - c2) Osserviamo che si ha $x^2 - 8x + 25 = (x - 4)^2 + 9$. Possiamo allora scrivere

$$x^2 - 8x + 25 = 9\,\Big[1 + \Big(\frac{x-4}{3}\Big)^2\Big]\,,$$

e quindi si ha

$$\int \frac{dx}{x^2 - 8x + 25} = \frac{1}{9}\int \frac{dx}{1 + \big(\frac{x-4}{3}\big)^2}\,.$$

Con la sostituzione $y = \frac{x-4}{3}$, da cui $dy = \frac{dx}{3}$, si ha

$$\int \frac{dx}{x^2 - 8x + 25} = \frac{1}{3}\int \frac{dy}{1 + y^2} = \frac{1}{3}\,\arctan(y) = \frac{1}{3}\,\arctan\Big(\frac{x-4}{3}\Big)\,.$$

Si ha pertanto

$$\int_4^7 \frac{dx}{x^2 - 8x + 25} = \frac{1}{3}\,\arctan\Big(\frac{x-4}{3}\Big)\Big|_4^7 = \frac{\arctan(1) - \arctan(0)}{3} = \frac{\pi}{12}\,.$$

d1) Osserviamo che si ha
$$\frac{2x-11}{x^2-12x+35}=\frac{2x-12}{x^2-12x+35}+\frac{1}{x^2-12x+35}\,.$$
Dal momento che al numeratore compare la derivata del denominatore, si ha
$$\int\frac{2x-12}{x^2-12x+35}\,dx=\ln(|x^2-12x+35|)\,.$$
Per calcolare il secondo integrale, osserviamo che si ha $x^2-12x+35=(x-7)\,(x-5)$. Con conti analoghi a quelli visti nello svolgimento dell'esercizio **b1) - b2)** si ha che
$$\frac{1}{x^2-12x+35}=\frac{1}{(x-7)\,(x-5)}=\frac{1}{2\,(x-7)}-\frac{1}{2\,(x-5)}\,,$$
cosicché
$$\int\frac{dx}{x^2-12x+35}=\int\left[\frac{1}{2\,(x-7)}-\frac{1}{2\,(x-5)}\right]dx=\frac{1}{2}\,\ln\left(\left|\frac{x-7}{x-5}\right|\right).$$
Mettendo insieme i risultati trovati, si ha
$$\int\frac{2x-11}{x^2-12x+35}=\ln(|x^2-12x+35|)+\frac{1}{2}\,\ln\left(\left|\frac{x-7}{x-5}\right|\right).$$

d2) Scriviamo
$$\frac{x^3}{10+x^2}=\frac{x^3+10\,x-10\,x}{10+x^2}=x-\frac{10\,x}{10+x^2}\,.$$
Abbiamo quindi
$$\int\frac{x^3}{10+x^2}\,dx=\int\left[x-\frac{10\,x}{10+x^2}\right]dx=\frac{x^2}{2}-\int\frac{10\,x}{10+x^2}\,dx\,.$$
Per calcolare l'ultimo integrale, poniamo $y=10+x^2$, da cui $dy=2x\,dx$, e otteniamo
$$\int\frac{10\,x}{10+x^2}\,dx=\int\frac{5\,dy}{y}=5\,\ln(|y|)=5\,\ln(x^2+10)\,,$$
dove si è tolto il modulo dato che la funzione x^2+10 è positiva. In definitiva,
$$\int\frac{x^3}{10+x^2}\,dx=\frac{x^2}{2}-5\,\ln(x^2+10)\,.$$

7) Trovare una primitiva di

$$\textbf{a1)}\ x\,e^{4\,x}\,,\qquad \textbf{a2)}\ e^{x}\,\sin(3\,x)\,,\qquad \textbf{b1)}\ \sin^2(4\,x)\,,\qquad \textbf{b2)}\ \cos^3(4\,x)\,,$$

$$\textbf{c1)}\ (4x+5)\,e^{x}\,,\qquad \textbf{c2)}\ (5x^2-2x+8)\,e^{x}\,,\qquad \textbf{d1)}\ x^8\,\ln(5\,x)\,,\qquad \textbf{d2)}\ 12\,x\,\arctan(6\,x)\,.$$

Soluzione:

a1) Integriamo per parti, derivando x e integrando $e^{4\,x}$. Si ha

$$\int x\,e^{4\,x}\,dx = \frac{x}{4}\,e^{4\,x} - \frac{1}{4}\int e^{4\,x}\,dx = \frac{x}{4}\,e^{4\,x} - \frac{1}{16}\,e^{4\,x} = \frac{4\,x-1}{16}\,e^{4\,x}\,.$$

a2) Integriamo per parti, derivando $\sin(3\,x)$ e integrando l'esponenziale. Si ha

$$\int e^{x}\,\sin(3\,x)\,dx = e^{x}\,\sin(3\,x) - 3\int e^{x}\,\cos(3\,x)\,dx\,.$$

Per calcolare l'ultimo integrale, operiamo per parti, derivando $\cos(3\,x)$ e integrando l'esponenziale. Si ha

$$\int e^{x}\,\cos(3\,x)\,dx = e^{x}\,\cos(3\,x) + 3\int e^{x}\,\sin(3\,x)\,dx\,.$$

Mettendo insieme i risultati, si ha

$$\int e^{x}\,\sin(3\,x)\,dx = e^{x}\,[\sin(3\,x) - 3\,\cos(3\,x)] - 9\int e^{x}\,\sin(3\,x)\,dx\,,$$

da cui si ricava (portando l'integrale a secondo membro a sinistra)

$$\int e^{x}\,\sin(3\,x)\,dx = \frac{e^{x}}{10}[\sin(3\,x) - 3\,\cos(3\,x)]\,.$$

b1) Integriamo per parti, derivando e integrando $\sin(4\,x)$. Si ha

$$\int \sin^2(4\,x)\,dx = \int \sin(4\,x)\,\sin(4\,x)\,dx = -\frac{1}{4}\,\sin(4\,x)\,\cos(4\,x) + \int \cos^2(4\,x)\,dx\,.$$

Ora si ha

$$\int \cos^2(4\,x)\,dx = \int [1-\sin^2(4\,x)]\,dx = x - \int \sin^2(4\,x)\,dx\,.$$

Si ha dunque

$$\int \sin^2(4\,x)\,dx = -\frac{1}{4}\,\sin(4\,x)\,\cos(4\,x) + x - \int \sin^2(4\,x)\,dx\,.$$

Portando a sinistra una parte dell'integrale a destra si ottiene

$$2\int \sin^2(4\,x)\,dx = -\frac{1}{4}\,\sin(4\,x)\,\cos(4\,x) + x\,,$$

da cui segue che

$$\int \sin^2(4\,x)\,dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{8}\,\sin(4\,x)\,\cos(4\,x)\,.$$

b2) Osserviamo che si ha

$$\cos^3(4\,x) = \cos^2(4\,x)\,\cos(4\,x) = [1-\sin^2(4\,x)]\,\cos(4\,x)\,.$$

Pertanto, con la sostituzione $y = \sin(4\,x)$, da cui $dy = 4\,\cos(4\,x)\,dx$, si ha

$$\int \cos^3(4\,x)\,dx = \int [1-\sin^2(4\,x)]\,\cos(4\,x)\,dx = \frac{1}{4}\int (1-y^2)\,dy = \frac{1}{4}\left[y - \frac{y^3}{3}\right],$$

e quindi

$$\int \cos^3(4\,x)\,dx = \frac{\sin(4\,x)}{4} - \frac{\sin^3(4\,x)}{12}\,.$$

c1) Integriamo per parti, derivando il binomio e integrando l'esponenziale. Si ha

$$\int (4x+5)\,\mathrm{e}^x\,dx = (4x+5)\,\mathrm{e}^x - 4\int \mathrm{e}^x\,dx = (4x+1)\,\mathrm{e}^x\,.$$

c2) Sappiamo che si ha

$$\int (5x^2-2x+8)\,\mathrm{e}^x\,dx = Q(x)\,\mathrm{e}^x\,,$$

dove $Q(x)$ è un polinomio di secondo grado tale che $Q(x)+Q'(x) = 5x^2-2x+8$. Se $Q(x) = a\,x^2+b\,x+c$ è un generico polinomio di secondo grado, si ha

$$Q(x)+Q'(x) = a\,x^2+(2a+b)\,x+(b+c)\,,$$

e imponendo che si abbia $Q(x)+Q'(x) = 5x^2-2x+8$ si ha che deve essere

$$a=5\,,\qquad 2a+b=-2\,,\qquad b+c=8\,,$$

da cui si ricava facilmente che

$$a=5\,,\qquad b=-12\,,\qquad c=20\,,$$

e quindi

$$\int (5x^2-2x+8)\,\mathrm{e}^x\,dx = (5x^2-12x+20)\,\mathrm{e}^x\,.$$

d1) Integriamo per parti, derivando il logaritmo e integrando x^8. Si ha

$$\int x^8\,\ln(5\,x)\,dx = \frac{x^9}{9}\,\ln(5\,x) - \frac{1}{9}\int x^9\,\frac{5}{5\,x}\,dx = \frac{x^9}{9}\,\ln(5\,x) - \frac{x^9}{81} = \frac{x^9}{81}[9\,\ln(5\,x)-1]\,.$$

d2) Integriamo per parti, integrando il monomio e derivando l'arcotangente. Si ha

$$\int 12\,x\,\arctan(6\,x)\,dx = 6\,x^2\,\arctan(6\,x) - \int \frac{36\,x^2}{1+36\,x^2}\,dx\,.$$

Per calcolare l'ultimo integrale, aggiungiamo e togliamo 1 al numeratore:

$$\int \frac{36\,x^2}{1+36\,x^2}\,dx = \int \frac{1+36\,x^2-1}{1+36\,x^2}\,dx = \int \left[1-\frac{1}{1+36\,x^2}\right]dx = x - \int \frac{dx}{1+36\,x^2}\,.$$

L'ultimo integrale si calcola ponendo $y = 6\,x$, da cui $dy = 6\,dx$ per ottenere

$$\int \frac{dx}{1+36\,x^2} = \frac{1}{6}\int \frac{dy}{1+y^2} = \frac{\arctan(y)}{6} = \frac{\arctan(6\,x)}{6}\,.$$

In definitiva, si ha

$$\int 12\,x\,\arctan(6\,x)\,dx = 6\,x^2\,\arctan(6\,x) - x + \frac{\arctan(6\,x)}{6}\,.$$