Calcolo integrale — Scheda di esercizi n. 6
21 Aprile 2023 — Compito n. 00153

Istruzioni: le prime due caselle (**V** / **F**) permettono di selezionare la risposta vero/falso. La casella "**C**" serve a correggere eventuali errori invertendo la risposta data.
Per selezionare una casella, annerirla completamente: ■ (non ☒ o ☑).

Nome: ____________________

Cognome: ____________________

Matricola: | | | | | | | |

Punteggi: 1 punto per ogni risposta esatta, 0 punti per risposte sbagliate o lasciate in bianco.

	1A	1B	1C	1D	2A	2B	2C	2D	3A	3B	3C	3D	4A	4B	4C	4D
V	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
F	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
C	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

1) Sia

$$F(t) = \int_{-3}^{t} [\cos^2(6\,x^2) + 3\,x^2]\,dx\,.$$

1A) Si ha $F(0) > 0$.
1B) La funzione $F(t)$ è crescente su $\mathbb{R}$.
1C) La funzione $F(t)$ è una funzione pari.
1D) Si ha

$$\lim_{t\to+\infty} F(t) = +\infty\,.$$

---

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false

2A)

$$\int_{-5}^{5} [x^7 + \sin(5\,x)]\,dx \neq 0\,.$$

2B)

$$\int_{-4}^{4} [x^6 + x^5]\,dx = 0\,.$$

2C)

$$\int_{5}^{7} \frac{dx}{x-3} \neq \int_{7}^{11} \frac{dx}{x-3}\,.$$

2D)

$$\int_{0}^{\pi/11} \sin(11\,x)\,dx = 11 \int_{0}^{\pi} \sin(x)\,dx\,.$$

3) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false

3A)

$$\int_{0}^{\pi} \sin(5\,x)\,dx = 10$$

3B)

$$\int_{0}^{1/\sqrt{7}} x\,\mathrm{e}^{7\,x^2}\,dx = \frac{\mathrm{e}-1}{14}\,.$$

3C)

$$\int_{0}^{1} 2\,x\,\mathrm{e}^{x}\,dx = 1\,.$$

3D)

$$\int_{0}^{5\,\pi} \sin^2(x)\,dx = \frac{5}{2}\,\pi\,.$$

---

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false

4A)

$$\int_{4}^{5} \frac{dx}{|x-3|} = -\ln(2)\,.$$

4B)

$$\int_{3}^{4} \frac{dx}{(x-2)^2} = \frac{1}{2}\,.$$

4C)

$$\int_{6}^{12} \frac{dx}{x^2+6x} = \frac{1}{6}\,\ln(4/3)\,.$$

4D)

$$\int_{0}^{6} \frac{x}{x^2+64}\,dx = \ln\left(\frac{10}{8}\right).$$

Docente
☐ DelaTorre Pedraza
☐ Orsina

$\square\square\square\square\square\square\square\square$ **Cognome** **Nome** **Matricola** **Compito 00153**

5) Calcolare una primitiva delle funzioni $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ e $k(x)$ e calcolare gli integrali.

$$\textbf{a12)}\ f(x) = \frac{1}{x+2}\,, \quad \int_0^1 f(x)\,dx\,, \qquad \textbf{b12)}\ g(x) = \frac{1}{x^2 - 3\,x}\,, \quad \int_5^7 g(x)\,dx\,,$$

$$\textbf{c12)}\ h(x) = \frac{6\,x + 12}{x^2 + 4\,x + 1}\,, \quad \int_0^1 h(x)\,dx\,, \qquad \textbf{d12)}\ k(x) = \frac{x^3}{x^2 - 100}\,, \quad \int_{-1}^1 k(x)\,dx\,,$$

☐☐☐☐☐☐☐☐ **Cognome** **Nome** **Matricola** **Compito 00153**

---

6) Calcolare una primitiva delle funzioni $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ e $k(x)$ e calcolare gli integrali.

$$\textbf{a12)}\ f(x) = x^3\ \cos(x^2)\,, \quad \int_0^{\sqrt{3\,\pi}} f(x)\,dx\,, \qquad \textbf{b12)}\ g(x) = (x^2 + 2x - 25)\,\mathrm{e}^x\,, \quad \int_0^5 g(x)\,dx\,,$$

$$\textbf{c12)}\ h(x) = \cos^3(x)\,, \quad \int_0^{\frac{17}{2}\,\pi} h(x)\,dx\,, \qquad \textbf{d12)}\ k(x) = \frac{4x-4}{4}\ \ln(x)\,, \quad \int_1^4 k(x)\,dx\,,$$

Soluzioni del compito 00153

1) Sia

$$F(t) = \int_{-3}^{t} [\cos^2(6\,x^2) + 3\,x^2]\,dx\,.$$

1A) Si ha $F(0) > 0$.

Vero: Si ha

$$F(0) = \int_{-6}^{0} [\cos^2(6\,x^2) + 3\,x^2]\,dx > 0\,,$$

dato che la funzione integranda è positiva.

1B) La funzione $F(t)$ è crescente su $\mathbb{R}$.

Vero: Per il teorema fondamentale del calcolo integrale si ha

$$F'(t) = \cos^2(6\,t^2) + 3\,t^2 \geq 0\,,$$

e quindi la funzione $F(t)$ è crescente.

1C) La funzione $F(t)$ è una funzione pari.

Falso: Se la funzione $F(t)$ fosse pari, si avrebbe

$$F(-3) = F(3)\,.$$

Tuttavia,

$$F(-3) = \int_{-3}^{-3} [\cos^2(6\,x^2) + 3\,x^2]\,dx = 0\,,$$

e quindi (se la funzione $F(t)$ fosse pari), dovrebbe essere $F(3) = 0$. Dato però che la funzione $F(t)$ è strettamente crescente, si ha $F(3) > F(-3) = 0$, e quindi $F(t)$ non è pari.

1D) Si ha

$$\lim_{t \to +\infty} F(t) = +\infty\,.$$

Vero: Si ha, per $t \geq -3$,

$$F(t) = \int_{-3}^{t} [\cos^2(6\,x^2) + 3\,x^2]\,dx \geq \int_{-3}^{t} 3\,x^2\,dx = 1\,t^3 - 27\,.$$

Pertanto,

$$\lim_{t \to +\infty} F(t) \geq \lim_{t \to +\infty} 1\,t^3 - 27 = +\infty\,.$$

---

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false

2A)

$$\int_{-5}^{5} [x^7 + \sin(5\,x)]\,dx \neq 0\,.$$

Falso: Dal momento che le funzioni $x \mapsto x^7$ e $x \mapsto \sin(5\,x)$ sono funzioni dispari, e che l'intervallo di integrazione è simmetrico rispetto all'origine, l'integrale vale zero.

2B)

$$\int_{-4}^{4} [x^6 + x^5]\,dx = 0\,.$$

Falso: Dal momento che la funzione $x \mapsto x^5$ è una funzione dispari, e che l'intervallo di integrazione è simmetrico rispetto all'origine, l'integrale di x^5 vale zero; d'altra parte, dato che la funzione $x \mapsto x^6$ è una funzione pari, e che l'intervallo è simmetrico rispetto all'origine, si ha

$$\int_{-4}^{4} x^6\,dx = 2\int_0^4 x^6 = \frac{2}{7}\,4^7 > 0\,.$$

2C)

$$\int_5^7 \frac{dx}{x-3} \neq \int_7^{11} \frac{dx}{x-3}\,.$$

Falso: Infatti si ha

$$\int_5^7 \frac{dx}{x-3} = \ln(|x-3|)\Big|_5^7 = \ln(4) - \ln(2) = \ln(2)\,,$$

e

$$\int_7^{11} \frac{dx}{x-3} = \ln(|x-3|)\Big|_7^{11} = \ln(8) - \ln(4) = \ln(2)\,,$$

e quindi i due integrali sono uguali (e non diversi).

2D)

$$\int_0^{\pi/11} \sin(11\,x)\,dx = 11\int_0^{\pi} \sin(x)\,dx\,.$$

Falso: Si ha

$$\int_0^{\pi/11} \sin(11\,x)\,dx = -\frac{1}{11}\cos(11\,x)\Big|_0^{\pi/11} = -\frac{\cos(11\cdot\pi/11) - \cos(0)}{11} = \frac{2}{11}\,,$$

e

$$\int_0^{\pi} \sin(x)\,dx = -\cos(x)\Big|_0^{\pi} = -\cos(\pi) + \cos(0) = 2\,,$$

e quindi

$$\int_0^{\pi/11} \sin(11\,x)\,dx = \frac{2}{11} = \frac{1}{11}\cdot 2 = \frac{1}{11}\int_0^{\pi} \sin(x)\,dx \neq 11\int_0^{\pi} \sin(x)\,dx\,.$$

---

3) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false

3A)

$$\int_0^{\pi} \sin(5\,x)\,dx = 10$$

Falso: Si ha infatti

$$\int_0^{\pi} \sin(5\,x)\,dx = -\frac{\cos(5\,x)}{5}\Big|_0^{\pi} = -\frac{\cos(5\,\pi) - \cos(0)}{5} = \frac{2}{5} \neq 10\,.$$

3B)

$$\int_0^{1/\sqrt{7}} x\,e^{7\,x^2}\,dx = \frac{e - 1}{14}\,.$$

Vero: Si ha, con la sostituzione $y = 7\,x^2$, da cui $dy = 14\,x\,dx$ e quindi $x\,dx = \frac{dy}{14}$,

$$\int_0^{1/\sqrt{7}} x\,e^{7\,x^2}\,dx = \frac{1}{14}\int_0^{1} e^y\,dy = \frac{e - 1}{14}\,.$$

3C)

$$\int_0^{1} 2\,x\,e^x\,dx = 1\,.$$

Falso: Si ha, integrando per parti (derivando $2\,x$ e integrando l'esponenziale),

$$\int_0^{1} 2\,x\,e^x\,dx = 2\,x\,e^x\Big|_0^1 - 2\int_0^1 e^x\,dx = 2\,e - 2\,e^x\Big|_0^1 = 2\,e - 2\,e + 2 = 2 \neq 1\,.$$

3D)

$$\int_0^{5\,\pi} \sin^2(x)\,dx = \frac{5}{2}\,\pi\,.$$

Vero: Iniziamo con il calcolare una primitiva di $\sin^2(x)$; ricordando la formula

$$\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}\,,$$

si ha

$$\int \sin^2(x)\,dx = \frac{1}{2}\int [1 - \cos(2x)]\,dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4}\,.$$

Si ha pertanto

$$\int_0^{5\,\pi} \sin^2(x)\,dx = \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4}\right]\Big|_0^{5\,\pi} = \frac{5}{2}\,\pi\,.$$

dato che $\sin(10\,\pi) = 0 = \sin(0)$.

---

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false

4A)

$$\int_4^5 \frac{dx}{|x-3|} = -\ln(2)\,.$$

Falso: Iniziamo con l'osservare che si ha $x-3 \geq 0$ sull'intervallo $[4,5]$; su tale intervallo si ha pertanto $|x-3| = x-3$. Si ha allora

$$\int_4^5 \frac{dx}{|x-3|} = \int_4^5 \frac{dx}{x-3} = \ln(|x-3|)\Big|_4^5 = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2) \neq -\ln(2)\,.$$

Alternativamente, si poteva osservare che, essendo la funzione integranda positiva, l'integrale non poteva venire un numero negativo.

4B)

$$\int_3^4 \frac{dx}{(x-2)^2} = \frac{1}{2}\,.$$

Vero: Infatti si ha

$$\int_3^4 \frac{dx}{(x-2)^2} = -\frac{1}{x-2}\Big|_3^4 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}\,.$$

4C)

$$\int_6^{12} \frac{dx}{x^2+6x} = \frac{1}{6}\,\ln(4/3)\,.$$

Vero: Il polinomio al denominatore si scompone come

$$x^2 + 6x = x\,(x+6)\,,$$

che ha come radici $x_1 = -6$ e $x_2 = 0$. Ricordando che

$$\int \frac{dx}{(x-x_1)\,(x-x_2)} = \frac{1}{x_2-x_1}\,\ln\left(\left|\frac{x-x_2}{x-x_1}\right|\right),$$

si ha quindi

$$\int_6^{12} \frac{dx}{x^2+6x} = \int_6^{12} \frac{dx}{x\,(x+6)} = \frac{1}{6}\,\ln\left(\left|\frac{x}{x+6}\right|\right)\Big|_6^{12} = \frac{1}{6}\left[\ln\left(\frac{12}{18}\right) - \ln\left(\frac{6}{12}\right)\right] = \frac{1}{6}\,\ln(4/3)\,.$$

4D)

$$\int_0^6 \frac{x}{x^2+64}\,dx = \ln\left(\frac{10}{8}\right).$$

Vero: Si ha, facendo comparire al numeratore la derivata del denominatore,

$$\int_0^6 \frac{x}{x^2+64}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^6 \frac{2x}{x^2+64}\,dx = \frac{1}{2}\,\ln(|x^2+64|)\Big|_0^6.$$

Svolgendo i calcoli, si ha allora

$$\int_0^6 \frac{x}{x^2+64}\,dx = \frac{\ln(100) - \ln(64)}{2} = \frac{1}{2}\,\ln\left(\frac{10^2}{8^2}\right) = \ln\left(\frac{10}{8}\right).$$

---

5) Calcolare una primitiva delle funzioni $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ e $k(x)$ e calcolare gli integrali.

$$\textbf{a12)}\ f(x) = \frac{1}{x+2}\,, \quad \int_0^1 f(x)\,dx\,, \qquad \textbf{b12)}\ g(x) = \frac{1}{x^2-3\,x}\,, \quad \int_5^7 g(x)\,dx\,,$$

$$\textbf{c12)}\ h(x) = \frac{6\,x+12}{x^2+4\,x+1}\,, \quad \int_0^1 h(x)\,dx\,, \qquad \textbf{d12)}\ k(x) = \frac{x^3}{x^2-100}\,, \quad \int_{-1}^1 k(x)\,dx\,,$$

Soluzione:

a12) Ricordando che si ha

$$\int \frac{dx}{x+a} = \ln(|x+a|)\,,$$

si ha

$$\int \frac{dx}{x+2} = \ln(|x+2|)\,,$$

e quindi

$$\int_0^1 \frac{dx}{x+2} = \ln(|x+2|)\Big|_0^1 = \ln(3) - \ln(2) = \ln\left(\frac{3}{2}\right).$$

b12) Ricordando che si ha

$$\int \frac{dx}{(x-x_2)\,(x-x_1)} = \frac{1}{x_2-x_1}\,\ln\left(\left|\frac{x-x_2}{x-x_1}\right|\right),$$

ed essendo $x^2 - 3\,x = x\,(x-3) = (x-0)(x-3)$, si ha

$$\int \frac{dx}{x^2-3\,x} = \frac{1}{3}\,\ln\left(\left|\frac{x-3}{x}\right|\right).$$

Pertanto,

$$\int_5^7 \frac{dx}{x^2-3\,x} = \frac{1}{3}\,\ln\left(\left|\frac{x-3}{x}\right|\right)\Big|_5^7 = \frac{1}{3}\left[\ln\left(\frac{4}{7}\right) - \ln\left(\frac{2}{5}\right)\right] = \frac{1}{3}\,\ln\left(\frac{10}{7}\right).$$

c12) La derivata del denominatore è:

$$[x^2+4\,x+1]' = 2x+4\,,$$

mentre il numeratore si può scrivere come:

$$6\,x+12 = 3\,(2x+4)\,.$$

Si ha allora

$$\int \frac{6\,x+12}{x^2+4\,x+1}\,dx = 3\int \frac{2x+4}{x^2+4\,x+1}\,dx = 3\,\ln(|x^2+4\,x+1|)\,,$$

da cui segue che

$$\int_0^1 \frac{6\,x+12}{x^2+4\,x+1}\,dx = 3\,\ln(|x^2+4\,x+1|)\Big|_0^1 = 3\,[\ln(6)-\ln(1)] = 3\,\ln(6)\,.$$

d12) Si ha

$$x^3 = x^3 - 100\,x + 100\,x = x\,(x^2-100) + 100\,x\,,$$

e quindi

$$\frac{x^3}{x^2-100} = \frac{x\,(x^2-100)+100\,x}{x^2-100} = x + \frac{100\,x}{x^2-100} = x + 50\,\frac{2x}{x^2-100}\,.$$

Ne segue che

$$\int \frac{x^3}{x^2-100}\,dx = \int \left[x + 50\,\frac{2x}{x^2-100}\right]dx = \frac{x^2}{2} + 50\,\ln(|x^2-100|)\,,$$

e quindi che

$$\int_{-1}^1 \frac{x^3}{x^2-100}\,dx = \left[\frac{x^2}{2} + 50\,\ln(|x^2-100|)\right]\Big|_{-1}^1 = \frac{1}{2} + 50\,\ln(99) - \frac{1}{2} - 50\,\ln(99) = 0\,.$$

Si noti che, essendo la funzione integranda dispari e l'intervallo simmetrico rispetto all'origine, si poteva concludere che l'integrale valeva zero **senza** calcolare la primitiva.

6) Calcolare una primitiva delle funzioni $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ e $k(x)$ e calcolare gli integrali.

a12) $f(x) = x^3 \cos(x^2)$, $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3\pi}} f(x)\,dx$, **b12)** $g(x) = (x^2 + 2x - 25)\,e^x$, $\displaystyle\int_0^5 g(x)\,dx$,

c12) $h(x) = \cos^3(x)$, $\displaystyle\int_0^{\frac{17}{2}\pi} h(x)\,dx$, **d12)** $k(x) = \dfrac{4x-4}{4}\ln(x)$, $\displaystyle\int_1^4 k(x)\,dx$,

---

Soluzione:

a12) Con la sostituzione $y = x^2$, da cui $dy = 2x\,dx$, e quindi $x\,dx = \frac{dy}{2}$, si ha

$$\int x^3 \cos(x^2)\,dx = \int x^2 \cos(x^2)\,x\,dx = \frac{1}{2}\int y\cos(y)\,dy\,.$$

Integrando per parti (al solito, derivando y ed integrando il coseno), si ha

$$\int y\cos(y)\,dy = y\sin(y) - \int \sin(y)\,dy = y\sin(y) + \cos(y)\,,$$

da cui segue (ricordando la sostituzione) che

$$\int x^3\cos(x^2)\,dx = \frac{x^2\sin(x^2) + \cos(x^2)}{2}\,.$$

Si ha dunque

$$\int_0^{\sqrt{3\pi}} x^3\cos(x^2) = \frac{x^2\sin(x^2)+\cos(x^2)}{2}\Big|_0^{\sqrt{3\pi}} = \frac{\cos(3\pi) - \cos(0)}{2} = -1\,.$$

b12) Ricordiamo che se $P(x)$ è un polinomio, si ha

$$\int P(x)\,e^x\,dx = Q(x)\,e^x\,,$$

dove $Q(x)$ è un polinomio dello stesso grado di $P(x)$ e tale che

$$P(x) = Q(x) + Q'(x)\,.$$

Considerando un generico polinomio di secondo grado $Q(x) = a\,x^2 + b\,x + c$, si ha dunque

$$Q(x) + Q'(x) = x^2 + (2a+b)\,x + (b+c) = x^2 + 2x - 25\,,$$

da cui si deduce che deve essere $a = 1$, $2a + b = 2$ e $b + c = -25$; da queste tre equazioni si ricava facilmente che $a = 1$, $b = 0$ e $c = -25$, cosicché si ha

$$\int (x^2 + 2x - 25)\,e^x\,dx = (x^2 - 25)\,e^x\,.$$

Se ne deduce che

$$\int_0^5 (x^2 + 2x - 25)\,e^x\,dx = (x^2 - 25)\,e^x\Big|_0^5 = 25\,.$$

c12) Iniziamo a scrivere

$$\cos^3(x) = \cos^2(x)\cos(x) = (1 - \sin^2(x))\cos(x)\,,$$

cosicché si tratta di calcolare

$$\int (1 - \sin^2(x))\cos(x)\,dx\,.$$

Con la sostituzione $y = \sin(x)$, da cui $dy = \cos(x)\,dx$, si ha

$$\int (1-\sin^2(x))\cos(x)\,dx = \int (1-y^2)\,dy = y - \frac{y^3}{3} = \sin(x) - \frac{\sin^3(x)}{3}\,.$$

Se ne deduce che

$$\int_0^{\frac{17}{2}\pi} \cos^3(x)\,dx = \Big[\sin(x) - \frac{\sin^3(x)}{3}\Big]\Big|_0^{\frac{17}{2}\pi} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}\,.$$

d12) Integrando per parti (derivando il logaritmo e integrando il polinomio) si ha

$$\begin{aligned}\int \frac{4x-4}{4}\,\ln(x)\,dx &= \frac{2x^2-4\,x}{4}\,\ln(x) - \int \frac{2x^2-4\,x}{4}\,\frac{1}{x}\,dx = \frac{2x^2-4\,x}{4}\,\ln(x) - \int \frac{2x-4}{4}\,dx \\ &= \frac{2x^2-4\,x}{4}\,\ln(x) - \frac{x^2-4\,x}{4}\,.\end{aligned}$$

Ne segue che

$$\int_1^4 \frac{4x-4}{4}\,\ln(x)\,dx = \Big[\frac{2x^2-4\,x}{4}\,\ln(x) - \frac{x^2-4\,x}{4}\Big]\Big|_1^4 = 4\,\ln(4) - 0 - 0 + \frac{1-4}{4} = 4\,\ln(4) - \frac{3}{4}\,.$$