



Calcolo integrale — Scheda di esercizi n. 4  
4 Aprile 2023 — Compito n. 00036

**Istruzioni:** le prime due caselle (**V** / **F**) permettono di selezionare la risposta vero/falso. La casella “**C**” serve a correggere eventuali errori invertendo la risposta data. Per selezionare una casella, annerirla completamente: ■ (non ☒ o ☑).

**Nome:** \_\_\_\_\_

**Cognome:** \_\_\_\_\_

**Matricola:**

--	--	--	--	--	--	--

**Punteggi:** 1 punto per ogni risposta esatta, 0 punti per risposte sbagliate o lasciate in bianco.

	1A	1B	1C	1D	2A	2B	2C	2D	3A	3B	3C	3D	4A	4B	4C	4D
V	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
F	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
C	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

1) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

**1A)** La funzione  $f(x) = 2x^2 - 6x + 2$  è integrabile su  $[5, 9]$ .

**1B)** La funzione  $f(x) = x|x|$  non è integrabile su  $[2, 9]$ .

**1C)** La funzione

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 5 & \text{se } x < 0, \\ -3x - 5 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

non è integrabile su  $[-2, 3]$ .

**1D)** La funzione  $f(x) = [x]$ , dove  $[x]$  è la parte intera di  $x$ , non è integrabile su  $[-4, 4]$ .

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

**2A)** Se

$$f(x) = \begin{cases} 4 & \text{se } x \geq 0, \\ 8 & \text{se } x < 0, \end{cases} \quad \int_{-1}^1 f(x) dx = 12.$$

**2B)** Se

$$f(x) = \begin{cases} 7 & \text{se } x \leq 1, \\ 14x - 7 & \text{se } x > 1, \end{cases} \quad \int_0^2 f(x) dx = 14.$$

**2C)** Se

$$f(x) = \begin{cases} 4x & \text{se } x \leq 1, \\ 8 - 4x & \text{se } x > 1, \end{cases} \quad \int_0^2 f(x) dx = 8.$$

**2D)** Se

$$f(x) = \begin{cases} 8x & \text{se } x \leq 1, \\ 32 - 16x & \text{se } x > 1, \end{cases} \quad \int_0^2 f(x) dx = 12.$$

**3)** Siano

$$f(x) = \begin{cases} 4 & \text{se } x \leq 0, \\ 3 & \text{se } x > 0. \end{cases} \quad F(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

**3A)** Si ha  $F(0) = 0$ .

**3B)** Si ha

$$F(3) = 9.$$

**3C)** Si ha

$$F(-6) = -24.$$

**3D)** Si ha  $F(x) = 4x$  per ogni  $x < 0$ .

**4)** Sia

$$F(x) = \int_0^x \cos^{10}(t) dt.$$

**4A)** La funzione  $F(x)$  è definita per ogni  $x$  in  $\mathbb{R}$ .

**4B)** Si ha  $F(0) = 1$ .

**4C)** La funzione  $F(x)$  non è derivabile su tutto  $\mathbb{R}$ .

**4D)** La funzione  $F(x)$  è crescente su  $\mathbb{R}$ .

**Docente:** \_\_\_\_\_

--	--	--	--	--	--	--	--

Cognome

Nome

Matricola

Compito 00036

5) Calcolare i seguenti integrali:

$$\mathbf{a1)} \int_0^{\pi} \sin(5x) \, dx, \quad \mathbf{a2)} \int_0^1 e^{4x} \, dx, \quad \mathbf{b1)} \int_0^1 \frac{12x \, dx}{1+6x^2}, \quad \mathbf{b2)} \int_0^1 \frac{dx}{1+25x^2},$$

$$\mathbf{c1)} \int_0^{\sqrt[3]{\pi}} x^2 \cos(5x^3) \, dx, \quad \mathbf{c2)} \int_0^1 x^5 e^{x^6} \, dx, \quad \mathbf{d1)} \int_0^1 \frac{dx}{12x+6}, \quad \mathbf{d2)} \int_0^1 \frac{dx}{(3-x)^2}.$$

--	--	--	--	--	--	--	--

Cognome

Nome

Matricola

Compito 00036

6) Sia  $f(x) = 3x^2 + e^{7x}$ .

a) Perché la funzione  $f(x)$  è integrabile su  $[0, 1]$ ?

b) Fissato  $n$  in  $\mathbb{N}$ , calcolare le somme integrali per eccesso e per difetto di  $f(x)$  su  $[0, 1]$ .

c) Calcolare la differenza  $\Delta_n$  tra le somme integrali per eccesso e le somme per difetto, e calcolare il limite di  $\Delta_n$  per  $n$  tendente ad infinito.

d) Ricordando che

$$\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

calcolare

$$\int_0^1 f(x) dx.$$

## Soluzioni del compito 00036

1) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

---

**1A)** La funzione  $f(x) = 2x^2 - 6x + 2$  è integrabile su  $[5, 9]$ .

**Vero:** Trattandosi di una funzione continua (è un polinomio) definita su un intervallo chiuso e limitato, la funzione è integrabile (come tutte le funzioni continue su intervalli chiusi e limitati).

---

**1B)** La funzione  $f(x) = x|x|$  non è integrabile su  $[2, 9]$ .

**Falso:** Trattandosi di una funzione continua (è il prodotto di funzioni continue) definita su un intervallo chiuso e limitato, la funzione è integrabile (come tutte le funzioni continue su intervalli chiusi e limitati).

---

**1C)** La funzione

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 5 & \text{se } x < 0, \\ -3x - 5 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

non è integrabile su  $[-2, 3]$ .

**Falso:** La funzione è continua sia per  $x < 0$  che per  $x \geq 0$  (essendo un polinomio su ogni intervallo); essendo continua, è integrabile sia su  $[-2, 0]$  che su  $[0, 3]$ , e quindi è integrabile sull'unione dei due intervalli.

---

**1D)** La funzione  $f(x) = [x]$ , dove  $[x]$  è la parte intera di  $x$ , non è integrabile su  $[-4, 4]$ .

**Falso:** La funzione “parte intera” è una funzione costante a tratti; sull'intervallo  $[-4, 4]$  è discontinua in  $-3, -2, \dots, 3, 4$ . Avendo un numero finito di punti di discontinuità, è integrabile su  $[-4, 4]$ .

---

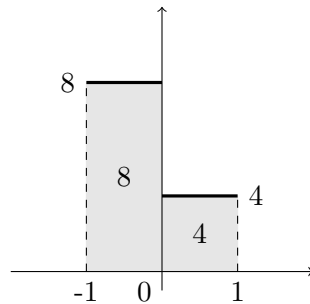
2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

---

2A) Se

$$f(x) = \begin{cases} 4 & \text{se } x \geq 0, \\ 8 & \text{se } x < 0, \end{cases} \quad \int_{-1}^1 f(x) dx = 12.$$

**Vero:** Si ha (ricordando le formule per l'area di un rettangolo)



Disegno non in scala

e quindi

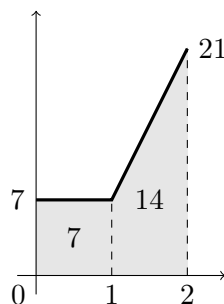
$$\int_{-1}^1 f(x) dx = 8 + 4 = 12.$$

---

2B) Se

$$f(x) = \begin{cases} 7 & \text{se } x \leq 1, \\ 14x - 7 & \text{se } x > 1, \end{cases} \quad \int_0^2 f(x) dx = 14.$$

**Falso:** Si ha (ricordando le formule per l'area di un rettangolo e di un trapezio)



Disegno non in scala

e quindi

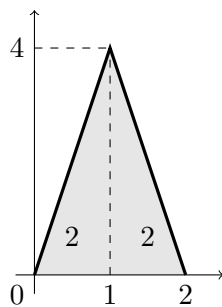
$$\int_0^2 f(x) dx = 7 + 14 = 21 \neq 14.$$

---

2C) Se

$$f(x) = \begin{cases} 4x & \text{se } x \leq 1, \\ 8 - 4x & \text{se } x > 1, \end{cases} \quad \int_0^2 f(x) dx = 8.$$

**Falso:** Si ha (ricordando le formule per l'area di un triangolo)



Disegno non in scala

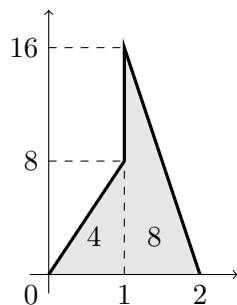
e quindi

$$\int_0^2 f(x) dx = 2 + 2 = 4 \neq 8.$$

**2D)** Se

$$f(x) = \begin{cases} 8x & \text{se } x \leq 1, \\ 32 - 16x & \text{se } x > 1, \end{cases} \quad \int_0^2 f(x) dx = 12.$$

**Vero:** Si ha (ricordando le formule per l'area di un triangolo)



Disegno non in scala

e quindi

$$\int_0^2 f(x) dx = 4 + 8 = 12.$$

**3)** Siano

$$f(x) = \begin{cases} 4 & \text{se } x \leq 0, \\ 3 & \text{se } x > 0. \end{cases} \quad F(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

---

**3A)** Si ha  $F(0) = 0$ .

**Vero:** Infatti

$$F(0) = \int_0^0 f(x) dx = 0,$$

dato che, per ogni  $f(x)$  e per ogni  $a$ ,

$$\int_a^a f(x) dx = 0.$$

---

**3B)** Si ha

$$F(3) = 9.$$

**Vero:** Infatti

$$F(3) = \int_0^3 f(x) dx = \int_0^3 3 dx = 3 \cdot 3 = 9.$$

---

**3C)** Si ha

$$F(-6) = -24.$$

**Vero:** Infatti

$$F(-6) = \int_0^{-6} f(x) dx = - \int_{-6}^0 f(x) dx = - \int_{-6}^0 4 dx = -4 \cdot 6 = -24.$$

---

**3D)** Si ha  $F(x) = 4x$  per ogni  $x < 0$ .

**Vero:** Infatti, dato che  $f(t) \equiv 4$  per ogni  $t < 0$ , si ha

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt = \int_0^x 4 dt = 4x.$$

---

4) Sia

$$F(x) = \int_0^x \cos^{10}(t) dt .$$

---

**4A)** La funzione  $F(x)$  è definita per ogni  $x$  in  $\mathbb{R}$ .

**Vero:** Dato che la funzione  $t \mapsto \cos^{10}(t)$  è continua su ogni intervallo chiuso e limitato di  $\mathbb{R}$ , è integrabile su ogni intervallo chiuso e limitato. In particolare, lo è sugli intervalli della forma  $[0, x]$  (se  $x \geq 0$ ) o  $[x, 0]$  (se  $x < 0$ ), e quindi la funzione  $F(x)$  è definita per ogni  $x$  in  $\mathbb{R}$ .

---

**4B)** Si ha  $F(0) = 1$ .

**Falso:** Dato che, qualsiasi sia  $a$ , e qualsiasi sia  $f(x)$ , si ha

$$\int_a^a f(x) dx = 0 ,$$

allora

$$F(0) = \int_0^0 \cos^{10}(t) dt = 0 \neq 1 .$$

---

**4C)** La funzione  $F(x)$  non è derivabile su tutto  $\mathbb{R}$ .

**Falso:** Dato che la funzione  $t \mapsto \cos^{10}(t)$  è continua, per il Teorema fondamentale del calcolo integrale la funzione  $F(x)$  è derivabile ovunque e si ha

$$F'(x) = \cos^{10}(x) , \quad \forall x \in \mathbb{R} .$$

---

**4D)** La funzione  $F(x)$  è crescente su  $\mathbb{R}$ .

**Vero:** Per quanto detto nell'esercizio **4C)**, si ha

$$F'(x) = \cos^{10}(x) , \quad \forall x \in \mathbb{R} .$$

Dato che  $F'(x) \geq 0$  per ogni  $x$ , la funzione  $F(x)$  è crescente su  $\mathbb{R}$ .

---



5) Calcolare i seguenti integrali:

$$\begin{array}{llll} \mathbf{a1)} & \int_0^\pi \sin(5x) dx, & \mathbf{a2)} & \int_0^1 e^{4x} dx, & \mathbf{b1)} & \int_0^1 \frac{12x dx}{1+6x^2}, & \mathbf{b2)} & \int_0^1 \frac{dx}{1+25x^2}, \\ \mathbf{c1)} & \int_0^{\sqrt[3]{\pi}} x^2 \cos(5x^3) dx, & \mathbf{c2)} & \int_0^1 x^5 e^{x^6} dx, & \mathbf{d1)} & \int_0^1 \frac{dx}{12x+6}, & \mathbf{d2)} & \int_0^1 \frac{dx}{(3-x)^2}. \end{array}$$

---

**Soluzione:**

**a1)** Con la sostituzione  $y = 5x$ , da cui  $dy = 5 dx$ , si ha, dato che  $\cos(5\pi) = -1$ ,

$$\int_0^\pi \sin(5x) dx = \int_0^{5\pi} \sin(y) \frac{dy}{5} = -\frac{\cos(y)}{5} \Big|_0^{5\pi} = -\frac{\cos(5\pi) - 1}{5} = \frac{2}{5}.$$

**a2)** Con la sostituzione  $y = 4x$ , da cui  $dy = 4 dx$ , si ha

$$\int_0^1 e^{4x} dx = \int_0^4 e^y \frac{dy}{4} = \frac{e^y}{4} \Big|_0^4 = \frac{e^4 - 1}{4}.$$

**b1)** Con la sostituzione  $y = 1 + 6x^2$ , da cui  $dy = 12x dx$ , si ha

$$\int_0^1 \frac{12x dx}{1+6x^2} = \int_1^7 \frac{dy}{y} = \ln(|y|) \Big|_1^7 = \ln(7) - \ln(1) = \ln(7).$$

**b2)** Con la sostituzione  $y = 5x$ , da cui  $dy = 5 dx$ , si ha

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+25x^2} = \int_0^5 \frac{1}{5} \frac{dy}{1+y^2} = \frac{\arctan(y)}{5} \Big|_0^5 = \frac{\arctan(5) - \arctan(0)}{5} = \frac{\arctan(5)}{5}.$$

**c1)** Con la sostituzione  $y = 5x^3$ , da cui  $dy = 15x^2 dx$ , si ha

$$\int_0^{\sqrt[3]{\pi}} x^2 \cos(5x^3) dx = \int_0^{5\pi} \cos(y) \frac{dy}{15} = \frac{\sin(y)}{15} \Big|_0^{5\pi} = \frac{\sin(5\pi) - \sin(0)}{15} = 0.$$

**c2)** Con la sostituzione  $y = x^6$ , da cui  $dy = 6x^5 dx$ , si ha

$$\int_0^1 x^5 e^{x^6} dx = \int_0^1 e^y \frac{dy}{6} = \frac{e^y}{6} \Big|_0^1 = \frac{e - 1}{6}.$$

**d1)** Ricordando che

$$\int \frac{dy}{ay+b} = \frac{\ln(|ay+b|)}{a},$$

si ha

$$\int_0^1 \frac{dx}{12x+6} = \frac{\ln(|12x+6|)}{12} \Big|_0^1 = \frac{\ln(18) - \ln(6)}{12} = \frac{\ln(3)}{12}.$$

**d2)** Ricordando che

$$\int \frac{dy}{(a-y)^2} = \int \frac{dy}{(y-a)^2} = -\frac{1}{y-a},$$

si ha

$$\int_0^1 \frac{dx}{(3-x)^2} = -\frac{1}{x-3} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

6) Sia  $f(x) = 3x^2 + e^{7x}$ .

a) Perché la funzione  $f(x)$  è integrabile su  $[0, 1]$ ?

b) Fissato  $n$  in  $\mathbb{N}$ , calcolare le somme integrali per eccesso e per difetto di  $f(x)$  su  $[0, 1]$ .

c) Calcolare la differenza  $\Delta_n$  tra le somme integrali per eccesso e le somme per difetto, e calcolare il limite di  $\Delta_n$  per  $n$  tendente ad infinito.

d) Ricordando che

$$\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

calcolare

$$\int_0^1 f(x) dx.$$

---

**Soluzione:**

a) La funzione  $f(x)$  è integrabile su  $[0, 1]$  (e su ogni altro intervallo chiuso limitato di  $\mathbb{R}$ ) perché è continua come somma di funzioni continue.

b) Fissato  $n$  in  $\mathbb{N}$ , suddividiamo l'intervallo  $[0, 1]$  in  $n$  parti uguali con i punti

$$x_k = \frac{k}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Osserviamo ora che la funzione  $f(x)$  è crescente (basta derivare...), e quindi si ha

$$\alpha_k = \min_{[x_k, x_{k+1}]} f(x) = f(x_k), \quad \beta_k = \max_{[x_k, x_{k+1}]} f(x) = f(x_{k+1}).$$

Ricordando la definizione di  $x_k$ , si ha quindi

$$\alpha_k = 3 \frac{k^2}{n^2} + e^{7\frac{k}{n}}, \quad \beta_k = 3 \frac{(k+1)^2}{n^2} + e^{7\frac{k+1}{n}}.$$

Ricordando la definizione di somme integrali per difetto e per eccesso:

$$\underline{S}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k, \quad \overline{S}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k,$$

si ha (usando i valori di  $\alpha_k$  e  $\beta_k$ )

$$\underline{S}_n = \frac{1}{n} \left[ \sum_{k=0}^{n-1} 3 \frac{k^2}{n^2} + \sum_{k=0}^{n-1} e^{7\frac{k}{n}} \right], \quad \overline{S}_n = \frac{1}{n} \left[ \sum_{k=0}^{n-1} 3 \frac{(k+1)^2}{n^2} + \sum_{k=0}^{n-1} e^{7\frac{k+1}{n}} \right].$$

c) Usando le formule appena trovate, si ha

$$\Delta_n = \overline{S}_n - \underline{S}_n = \frac{3}{n^3} \sum_{k=0}^{n-1} [(k+1)^2 - k^2] + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} [e^{7\frac{k+1}{n}} - e^{7\frac{k}{n}}] = A_n + B_n.$$

Dato che  $(k+1)^2 - k^2 = 2k+1$ , si ha

$$A_n = \frac{3}{n^3} \sum_{k=0}^{n-1} (2k+1) = \frac{3}{n^2} [n(n+1) + n],$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato che

$$\sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2}, \quad \sum_{k=0}^{n-1} 1 = n.$$

Pertanto,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 3 \frac{n^2 + 2n}{n^3} = 0.$$

Per quanto riguarda  $B_n$ , osservando che

$$e^{7 \frac{k+1}{n}} - e^{7 \frac{k}{n}} = e^{7 \frac{k}{n}} [e^{\frac{7}{n}} - 1],$$

si ha

$$B_n = \frac{e^{\frac{7}{n}} - 1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{7 \frac{k}{n}} = \frac{e^{\frac{7}{n}} - 1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} [e^{\frac{7}{n}}]^k = \frac{e^{\frac{7}{n}} - 1}{n} \frac{e^{\frac{7}{n}n} - 1}{e^{\frac{7}{n}} - 1} = \frac{e^7 - 1}{n},$$

dove nel penultimo passaggio abbiamo usato che

$$(1) \quad \sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{q^n - 1}{q - 1}, \quad \text{con } q = e^{\frac{7}{n}}.$$

Si ha quindi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} B_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^7 - 1}{n} = 0.$$

In definitiva,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \Delta_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} [A_n + B_n] = 0 + 0 = 0.$$

**d)** Avendo dimostrato al punto **c)** che  $f(x)$  è integrabile, calcoliamone l'integrale con la formula

$$\int_0^1 f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \underline{S}_n.$$

Ricordiamo che

$$\underline{S}_n = \frac{3}{n^3} \sum_{k=0}^{n-1} k^2 + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{7 \frac{k}{n}} = C_n + D_n.$$

Per la formula presente nel testo, si ha

$$C_n = \frac{3}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

da cui segue che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} C_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{6} \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{n^3} = \frac{3}{6} \cdot 2 = 1.$$

D'altra parte, usando la (1), si ha

$$D_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} [e^{\frac{7}{n}}]^k = \frac{e^{\frac{7}{n}n} - 1}{n(e^{\frac{7}{n}} - 1)} = (e^7 - 1) \frac{\frac{1}{n}}{e^{\frac{7}{n}} - 1}.$$

Pertanto, ricordando che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{7}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 7 \frac{e^{\frac{7}{n}} - 1}{\frac{7}{n}} = 7 \cdot 1 = 7,$$

si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} D_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (e^7 - 1) \frac{\frac{1}{n}}{e^{\frac{7}{n}} - 1} = \frac{e^7 - 1}{7}.$$

In definitiva,

$$\int_0^1 f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \underline{S}_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} [C_n + D_n] = 1 + \frac{e^7 - 1}{7}.$$