Soluzioni del compito 00092

1) Sia $a_k > 0$ una successione tale che

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k \quad \text{è convergente.}$$

Osserviamo che dato che la serie è convergente, si ha

$$\lim_{k \to +\infty} a_k = 0\,. \tag{1}$$

1A) La successione $a_k^4 + a_k^7$ non tende a zero.

Falso: Per la (1), e per i teoremi sui limiti, si ha

$$\lim_{k \to +\infty} a_k^4 + a_k^7 = 0 + 0 = 0\,.$$

1B) La serie di termine generico $\frac{e^{a_k}}{k^3}$ è convergente.

Vero: Dato che e^{a_k} tende a 1 (per la (1)), si ha

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{\frac{e^{a_k}}{k^3}}{\frac{1}{k^3}} = 1\,.$$

Per il criterio del confronto asintotico, la serie data ha lo stesso comportamento della serie di termine generico $\frac{1}{k^3}$, che converge essendo una serie armonica generalizzata di esponente $\alpha = 3 > 1$.

1C) La serie di termine generico $\frac{k\,a_k}{a_k + 3\,k^2}$ è convergente.

Vero: Si ha, dato che $a_k > 0$ e che $k \geq 1$,

$$0 \leq \frac{k\,a_k}{a_k + 3\,k^2} \leq \frac{k\,a_k}{3\,k^2} = \frac{a_k}{3\,k} \leq \frac{a_k}{3}\,.$$

Dato che la serie di termine generico $\frac{a_k}{3}$ è convergente per ipotesi, la serie data è convergente per il criterio del confronto.

1D) La serie di termine generico $\frac{e^{8\,a_k^2} - 1}{a_k}$ è divergente.

Falso: Per la (1), e per uno dei limiti notevoli, si ha

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{\frac{e^{8\,a_k^2} - 1}{a_k}}{a_k} = \lim_{k \to +\infty} \frac{e^{8\,a_k^2} - 1}{8\,a_k^2}\, 8 = 1 \cdot 8 = 8 \in (0, +\infty)\,.$$

Per il criterio del confronto asintotico, la serie data converge, dato che ha lo stesso carattere della serie di termine generico a_k.

---

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false

2A)

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \cos\left(\frac{1}{k^8+8}\right) \sin\left(\frac{1}{\sqrt[9]{k}}\right) \text{ converge.}$$

Falso: Dato che

$$\lim_{k\to+\infty} \cos\left(\frac{1}{k^8+8}\right) = 1 \in (0, +\infty)\,,$$

la serie data si comporta (per il criterio del confronto asintotico) come la serie di termine generico

$$b_k = \sin\left(\frac{1}{\sqrt[9]{k}}\right),$$

la quale (per il limite notevole di $\frac{\sin(x)}{x}$ e nuovamente per il criterio del confronto asintotico) si comporta come la serie di termine generico

$$\frac{1}{\sqrt[9]{k}} = \frac{1}{k^{\frac{1}{9}}}\,,$$

che diverge essendo una serie armonica generalizzata di esponente $\alpha = \frac{1}{9} < 1$.

2B)

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \tan\left(\frac{3^k\,k^3}{k!}\right) \text{ diverge.}$$

Falso: Dato che

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{3^k\,k^3}{k!} = \lim_{k\to+\infty} \frac{6^k}{k!}\cdot\frac{k^3}{2^k} = 0\cdot 0 = 0\,,$$

e dato che

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1\,,$$

la serie data si comporta (per il criterio del confronto asintotico) come la serie di termine generico

$$b_k = \frac{3^k\,k^3}{k!}\,.$$

Applichiamo il criterio del rapporto a b_k:

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{b_{k+1}}{b_k} = \lim_{k\to+\infty} \frac{\frac{3^{k+1}\,(k+1)^3}{(k+1)!}}{\frac{3^k\,k^3}{k!}} = \lim_{k\to+\infty} 3\left(\frac{k+1}{k}\right)^3 \frac{1}{k+1} = 3\cdot 1^3\cdot 0 = 0 < 1\,.$$

Pertanto la serie di termine generico b_k converge, e quindi converge anche la serie data.

2C)

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \cos\left(\frac{1}{k^8}\right) \text{ è indeterminata.}$$

Vero: Dato che il termine generico non tende a zero, e che la serie è a segni alterni, la serie è indeterminata.

2D)

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \log\left(1+\frac{1}{\sqrt[12]{k}}\right) \text{ converge assolutamente.}$$

Falso: La serie dei valori assoluti è la serie di termine generico

$$b_k = \log\left(1 + \frac{1}{\sqrt[12]{k}}\right).$$

Dato che $\log(1 + x) \approx x$, si ha

$$b_k \approx \frac{1}{\sqrt[12]{k}} = \frac{1}{k^{\frac{1}{12}}},$$

e quindi la serie di termine generico b_k è divergente avendo lo stesso comportamento di una serie armonica generalizzata di esponente $\alpha = \frac{1}{12} < 1$.

---

3) Sia $f(x) = x^9 \sin(6\,x)$.

Ricordando che

$$\sin(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\, t^{2k+1}\,, \qquad \forall t \in \mathbb{R}\,,$$

si ha, per il principio di sostituzione,

$$f(x) = x^9 \sin(6\,x) = x^9 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\,(6\,x)^{2k+1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k\, 6^{2k+1}}{(2k+1)!}\, x^{2k+10}\,, \qquad \forall x \in \mathbb{R}\,. \tag{1}$$

3A) Il raggio di convergenza della serie di Taylor di $f(x)$ è infinito.

Vero: Dalla (1) segue che il raggio di convergenza della serie è infinito.

3B) Il coefficiente del termine di grado 10 della serie di Taylor di $f(x)$ è zero.

Falso: Dalla (1) si ha che

$$f(x) = 6\,x^{10} + \text{ termini di grado maggiore di } 10\,,$$

e quindi il coefficiente del termine di grado 10 vale 6, che è diverso da zero.

3C) Se $g(x) = \frac{f(x)}{x^8}$, si ha $g''(0) = 6$.

Falso: Dalla (1) segue che

$$g(x) = \frac{f(x)}{x^8} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k\, 6^{2k+1}}{(2k+1)!}\, x^{2k+2} = 6\,x^2 + \text{ termini di grado superiore a } 2\,.$$

Dall'ultima espressione, si vede che $g''(0) = 12 \neq 6$. Alternativamente, dalla formula della serie di Taylor di $g(x)$, si ha $g''(0) = 2!\,a_2 = 12$ dato che $a_2 = 6$.

3D) Si ha $f^{(12)}(0) = -\frac{12!}{3!}$.

Falso: Dalla (1) si ha che

$$f(x) = 6\,x^{10} - \frac{6^3}{3!}\,x^{12} + \text{ termini di grado superiore a } 12.$$

Dato che il coefficiente del termine di grado 12 nel polinomio di Taylor di $f(x)$ è dato da

$$\frac{f^{(12)}(0)}{12!}\,,$$

si ha

$$f^{(12)}(0) = -\frac{6^3\,12!}{3!} \neq -\frac{12!}{3!}\,.$$

---

4) Si consideri la serie di potenze

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k \, (10\,x - 11)^k \,.$$

Si ha

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k \, (10\,x - 11)^k = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \, 10^k \left(x - \frac{11}{10}\right)^k . \tag{1}$$

4A) Il centro della serie è $x_0 = 11$.

Falso: Dalla (1), segue che il centro della serie è $x_0 = \frac{11}{10} \neq 11$.

4B) Se $a_k = 8$ per ogni k, il raggio di convergenza delle serie è $R = 1$.

Falso: Se $a_k = 8$ per ogni k, dalla (1) segue che i coefficienti della serie di potenze sono

$$b_k = 8 \cdot 10^k \,.$$

Si ha

$$L = \lim_{k \to \infty} \sqrt[k]{b_k} = \lim_{k \to +\infty} \sqrt[k]{8 \cdot 10^k} = 10 \,,$$

da cui segue che il raggio di convergenza della serie è $R = \frac{1}{L} = \frac{1}{10} \neq 1$.

4C) Se $a_k = \frac{1}{9^k}$, il raggio di convergenza della serie è $R = \frac{10}{9}$.

Falso: Se $a_k = \frac{1}{9^k}$, dalla (1) segue che i coefficienti della serie di potenze sono

$$b_k = \frac{10^k}{9^k} = \left(\frac{10}{9}\right)^k .$$

Dato che

$$L = \lim_{k \to +\infty} \sqrt[k]{b_k} = \frac{10}{9} \,,$$

il raggio di convergenza della serie è $R = \frac{1}{L} = \frac{9}{10} \neq \frac{10}{9}$.

4D) Se $a_k = \frac{1}{\sqrt[6]{k}}$, la serie converge per $x = 1$.

Vero: Se $a_k = \frac{1}{\sqrt[6]{k}}$ e $x = 1$ la serie diventa

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[6]{k}} \, (10 \cdot 1 - 11)^k = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \, \frac{1}{\sqrt[6]{k}} \,.$$

che converge per il criterio di Leibnitz dato che la successione $b_k = 1/\sqrt[6]{k}$ è positiva, decrescente e infinitesima.

---

5) a) Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} 8^k \sin\left(\frac{1}{9^k}\right).$$

b) Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt[23]{k^8}} - \sin\left(\frac{1}{\sqrt[23]{k^8}}\right)\right).$$

c) Scrivere la serie di Taylor di $f(x) = x^{11}\,\sin(5\,x^2)$ e calcolare $f^{(12)}(0)$.
d) Data $f(x) = x\,\mathrm{e}^{2\,x^2}$, calcolare $f^{(3)}(0)$ e $f^{(4)}(0)$.

Soluzione:
a) Ricordando che

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1\,, \qquad \lim_{k\to+\infty}\frac{1}{9^k} = 0\,,$$

si ha

$$a_k = 8^k \sin\left(\frac{1}{9^k}\right) \approx \frac{8^k}{9^k} = \left(\frac{8}{9}\right)^k,$$

che è il termine generico di una serie geometrica di ragione $q = \frac{8}{9}$. Dato che $q = \frac{8}{9} < 1$, la serie data converge per il criterio del confronto asintotico.

b) Ricordando che

$$\sin(t) = t - \frac{t^3}{6} + \mathrm{o}(t^3)\,,$$

da cui segue che

$$t - \sin(t) = \frac{t^3}{6} + \mathrm{o}(t^3)\,,$$

si ha che

$$\frac{1}{\sqrt[23]{k^8}} - \sin\left(\frac{1}{\sqrt[23]{k^8}}\right) = \frac{1}{6}\,\frac{1}{(\sqrt[23]{k^8})^3} + \mathrm{o}\Big(\frac{1}{(\sqrt[23]{k^8})^3}\Big)\,.$$

Dato che

$$(\sqrt[23]{k^8})^3 = k^{\frac{24}{23}}\,,$$

la serie di termine generico

$$\frac{1}{6}\,\frac{1}{(\sqrt[23]{k^8})^3}$$

è convergente (come serie armonica generalizzata di esponente $\alpha = \frac{24}{23} > 1$). Ne segue pertanto che la serie data è convergente per il criterio del confronto asintotico.

c) Ricordando che

$$\sin(t) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\,t^{2k+1}\,, \qquad \forall t \in \mathbb{R}\,,$$

si ha

$$\sin(5\,x^2) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k 5^{2k+1}}{(2k+1)!}\,x^{4k+2}\,,$$

e quindi

$$f(x) = x^{11}\,\sin(5\,x^2) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k 5^{2k+1}}{(2k+1)!}\,x^{4k+13} = 5\,x^{13} + \text{ termini di grado superiore a 13.}$$

Dato che nella serie non compaiono termini di grado 12, si ha $f^{(12)}(0) = 0$.

d) Ricordando che
$$\mathrm{e}^t = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \mathrm{o}(t^2)\,,$$
si ha
$$\mathrm{e}^{2\,x^2} = 1 + 2\,x^2 + \frac{(2\,x^2)^2}{2} + \mathrm{o}((x^2)^2) = 1 + 2\,x^2 + 2\,x^4 + \mathrm{o}(x^4)\,,$$
e quindi
$$f(x) = x\,\mathrm{e}^{2\,x^2} = x + 2\,x^3 + 2\,x^5 + \mathrm{o}(x^5)\,.$$
Dall'ultima espressione segue facilmente che $f^{(3)}(0) = 2 \cdot 3! = 12$ e che $f^{(4)}(0) = 0$.

6) Si consideri la serie

$$\sum_{k=3}^{+\infty} \frac{(2\,x-3)^k}{k\,(k-1)\,(k-2)}\,.$$

a) Si scriva la serie come serie di potenze e se ne determinino il centro e i coefficienti.
b) Si determini il raggio di convergenza della serie di potenze.
c) Si determini l'insieme di convergenza della serie di potenze.
d) Si calcoli $f^{(3)}(x)$.

Soluzione:
a) Si ha

$$\sum_{k=3}^{+\infty} \frac{(2\,x-3)^k}{k\,(k-1)\,(k-2)} = \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{2^k}{k\,(k-1)\,(k-2)} \left(x-\frac{3}{2}\right)^k,$$

che è una serie di potenze di centro $x_0 = \frac{3}{2}$ e di coefficienti

$$a_k = \frac{2^k}{k\,(k-1)\,(k-2)}\,.$$

b) Dato che

$$a_k = \frac{2^k}{k\,(k-1)\,(k-2)}\,,$$

si ha

$$L = \lim_{k\to+\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to+\infty} 2\,\frac{k-2}{k+1} = 2\,,$$

da cui segue che il raggio di convergenza della serie è $R = \frac{1}{L} = \frac{1}{2}$.

c) Dato che $R = \frac{1}{2}$, la serie converge se x è tale che $|x-3/2| < 1/2$, e non converge se x è tale che $|x-3/2| > 1/2$. Svolgendo la disuguaglianza, si ha che la serie converge se x appartiene a

$$I = (1,2)\ .$$

Rimangono da studiare i due casi $x = 1$ e $x = 2$, in corrispondenza dei quali si trovano le due serie

$$\sum_{k=3}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k\,(k-1)\,k-2)} \quad \text{e} \quad \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{1}{k\,(k-1)\,k-2)}\,.$$

Dato che entrambe le serie sono convergenti (per Leibnitz la prima, per confronto con la serie $\frac{1}{k^3}$ la seconda), l'insieme di convergenza della serie è l'intervallo

$$J = [1,2]\ .$$

d) Partendo dalla serie originale, e derivando, si trova

$$f'(x) = \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{2\,k}{k\,(k-1)\,(k-2)}\,(2\,x-3)^{k-1} = \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{2}{(k-1)\,(k-2)}\,(2\,x-3)^{k-1}\,.$$

Derivando ulteriormente, si trova

$$f''(x) = \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{2^2}{k-2}\,(2\,x-3)^{k-2}\,,$$

e

$$f^{(3)}(x) = \sum_{k=3}^{+\infty} 2^3\,(2\,x-3)^{k-3} = 2^3 \sum_{h=0}^{+\infty} (2\,x-3)^h\,.$$

Ricordando la formula per la somma di una serie geometrica si ha pertanto

$$f^{(3)}(x) = \frac{2^3}{1-(2\,x-3)} = \frac{2^3}{4-2\,x}\,.$$