Calcolo integrale — Scheda di esercizi n. 5
14 Aprile 2023 — Compito n. 00059

Istruzioni: le prime due caselle (**V** / **F**) permettono di selezionare la risposta vero/falso. La casella "**C**" serve a correggere eventuali errori invertendo la risposta data.
Per selezionare una casella, annerirla completamente: ■ (non ☒ o ☑).

Nome: ______________________

Cognome: ______________________

Matricola: | | | | | | | |

Punteggi: 1 punto per ogni risposta esatta, 0 punti per risposte sbagliate o lasciate in bianco.

	1A	1B	1C	1D	2A	2B	2C	2D	3A	3B	3C	3D	4A	4B	4C	4D
V	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
F	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
C	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

1) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false

1A) Esistono intervalli chiusi e limitati di $\mathbb{R}$ su cui la funzione $f(x) = 5x^2 - 5x + 3$ non è integrabile.
1B) La funzione $f(x) = |x - 3|$ è integrabile su ogni intervallo chiuso e limitato di $\mathbb{R}$.
1C) La funzione $f(x) = \frac{x+2}{x-5}$ è integrabile su ogni intervallo chiuso e limitato di $\mathbb{R}$.
1D) La funzione $f(x) = \frac{x^2-36}{x-6}$ è integrabile su ogni intervallo chiuso e limitato di $\mathbb{R}$.

2) Sia

$$F(t) = \int_0^t x\,\mathrm{e}^{4\,x^4}\,dx\,.$$

2A) La funzione $F(t)$ non è derivabile per ogni t in $\mathbb{R}$.
2B) Si ha $F'(0) = 0$.
2C) La funzione $F(t)$ è una funzione dispari.
2D) La funzione $F(t)$ è decrescente per $t \geq 0$.

3) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false

3A) La funzione $x^5 \sin(x^6)$ si integra per sostituzione.
3B) La funzione $x^6 \sin(x)$ si integra per sostituzione.
3C) La funzione $x^{13} \sin(x^2)$ si integra per sostituzione prima, e per parti poi.
3D) La funzione $f(x) = x^{12} \arctan(x)$ si integra per parti prima, e per sostituzione poi.

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false

4A) Si ha

$$\int_8^{23} \frac{dx}{x} = \ln\left(\frac{23}{8}\right).$$

4B) Si ha

$$\int_{20}^{24} \frac{dx}{x-4} = \ln\left(\frac{5}{4}\right).$$

4C) Si ha

$$\int_9^{14} \frac{dx}{4-x} = -\ln(2)\,.$$

4D) Si ha

$$\int_0^1 \frac{dx}{2\,x-13} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{11}{13}\right).$$

Docente
☐ DelaTorre Pedraza
☐ Orsina

☐☐☐☐☐☐☐☐ **Cognome** **Nome** **Matricola** **Compito 00059**

---

5) Calcolare una primitiva delle seguenti funzioni

$$\textbf{a1})\ x\,\sin(x)\,,\qquad \textbf{a2})\ x^3\,\mathrm{e}^x\,,\qquad \textbf{b1})\ x^2\,\ln(x)\,,\qquad \textbf{b2})\ (x^2-6x+2)\,\mathrm{e}^x\,,$$

$$\textbf{c1})\ x\,\mathrm{e}^{7\,x}\,,\qquad \textbf{c2})\ x\,\cos(4\,x)\,,\qquad \textbf{d1})\ \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\,,\qquad \textbf{d2})\ \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x^3}\,,$$

---

6)

a1) - a2) Trovare una primitiva di $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 8x + 16}$ e calcolare $\displaystyle\int_5^6 f(x)\,dx$.

b1) - b2) Trovare una primitiva di $g(x) = \dfrac{1}{x^2 - 15x + 54}$ e calcolare $\displaystyle\int_{10}^{11} g(x)\,dx$.

c1) - c2) Trovare una primitiva di $h(x) = \dfrac{1}{x^2 - 12x + 61}$ e calcolare $\displaystyle\int_6^{11} h(x)\,dx$.

d1) - d2) Trovare una primitiva di $k(x) = \dfrac{2x - 12}{x^2 - 13x + 36}$ e di $j(x) = \dfrac{x^3}{10 + x^2}$.

☐☐☐☐☐☐☐☐ **Cognome** **Nome** **Matricola** **Compito 00059**

---

7) Trovare una primitiva di

a1) $x\,\mathrm{e}^{6\,x}$, **a2)** $\mathrm{e}^x\,\sin(5\,x)$, **b1)** $\sin^2(4\,x)$, **b2)** $\cos^3(2\,x)$,

c1) $(2x+5)\,\mathrm{e}^x$, **c2)** $(7x^2-2x+4)\,\mathrm{e}^x$, **d1)** $x^6\,\ln(11\,x)$, **d2)** $12\,x\,\arctan(6\,x)$.

Soluzioni del compito 00059

1) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false

1A) Esistono intervalli chiusi e limitati di $\mathbb{R}$ su cui la funzione $f(x) = 5x^2 - 5x + 3$ non è integrabile.

Falso: Dal momento che la funzione $f(x) = 5x^2 - 5x + 3$ è una funzione continua, è integrabile su ogni intervallo chiuso e limitato di $\mathbb{R}$.

1B) La funzione $f(x) = |x - 3|$ è integrabile su ogni intervallo chiuso e limitato di $\mathbb{R}$.

Vero: Dal momento che la funzione $f(x) = |x - 3|$ è una funzione continua, è integrabile su ogni intervallo chiuso e limitato di $\mathbb{R}$.

1C) La funzione $f(x) = \frac{x+2}{x-5}$ è integrabile su ogni intervallo chiuso e limitato di $\mathbb{R}$.

Falso: Dal momento che la funzione è illimitata (sia superiormente che inferiormente) in ogni intervallo chiuso e limitato che contenga $x = 5$ al suo interno (ad esempio: l'intervallo $[4, 6]$), la funzione non è integrabile su tali intervalli.

1D) La funzione $f(x) = \frac{x^2-36}{x-6}$ è integrabile su ogni intervallo chiuso e limitato di $\mathbb{R}$.

Vero: Dal momento che $x^2 - 36 = (x - 6)\,(x + 6)$, si ha, se $x \neq 6$,

$$f(x) = \frac{x^2 - 36}{x - 6} = \frac{(x - 6)\,(x + 6)}{x - 6} = x + 6\,.$$

Ne consegue che la funzione $f(x)$ coincide, in tutti punti tranne $x = 6$, con la funzione continua $g(x) = x + 6$, che è integrabile su ogni intervallo chiuso e limitato di $\mathbb{R}$; dunque, anche la funzione $f(x)$ è integrabile su tali intervalli.

---

2) Sia
$$F(t) = \int_0^t x\,\mathrm{e}^{4\,x^4}\,dx\,.$$

2A) La funzione $F(t)$ non è derivabile per ogni t in $\mathbb{R}$.

Falso: Dal momento che la funzione $f(x) = x\,\mathrm{e}^{4\,x^4}$ è una funzione continua, per il teorema fondamentale del calcolo integrale la funzione $F(t)$ è derivabile, e si ha
$$F'(t) = f(t) = t\,\mathrm{e}^{4\,t^4} \qquad \forall t \in \mathbb{R}\,.$$

2B) Si ha $F'(0) = 0$.

Vero: Dato che $F'(t) = t\,\mathrm{e}^{4\,t^4}$ (si veda la domanda 2A), si ha $F'(0) = 0$.

2C) La funzione $F(t)$ è una funzione dispari.

Falso: Dal momento che la funzione $f(x) = x\,\mathrm{e}^{4\,x^4}$ è una funzione dispari, la funzione $F(t)$ è una funzione pari (e non dispari). Infatti,
$$F(-t) = \int_0^{-t} x\,\mathrm{e}^{4\,x^4}\,dx = \left[\begin{array}{c} y = -x \\ dy = -dx \end{array}\right] = -\int_0^t (-y)\,\mathrm{e}^{4\,(-y)^4}\,dy = \int_0^t y\,\mathrm{e}^{4\,y^4}\,dy = F(t)\,.$$

2D) La funzione $F(t)$ è decrescente per $t \geq 0$.

Falso: Dato che $F'(t) = t\,\mathrm{e}^{4\,t^4}$ (si veda la domanda 2A), si ha $F'(t) \geq 0$ per $t \geq 0$, e quindi la funzione $F(t)$ è crescente su tale insieme (e quindi non è decrescente).

---

3) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false

3A) La funzione $x^5 \sin(x^6)$ si integra per sostituzione.

Vero: Infatti, definendo $y = x^6$, da cui $dy = 6x^5\,dx$, si ha

$$\int x^5 \sin(x^6)\,dx = \frac{1}{6}\int \sin(y)\,dy\,,$$

che è un integrale immediato.

3B) La funzione $x^6 \sin(x)$ si integra per sostituzione.

Falso: No, si integra per parti. Infatti, derivando il termine polinomiale x^6 e integrando la funzione trigonometrica, si ha

$$\int x^6 \sin(x)\,dx = -x^6 \cos(x) + 6\int x^5 \cos(x)\,dx\,.$$

Il procedimento continua 5 volte, finché non si arriva ad un integrale immediato (di $\sin(x)$ o di $\cos(x)$).

3C) La funzione $x^{13} \sin(x^2)$ si integra per sostituzione prima, e per parti poi.

Vero: Infatti, definendo $y = x^2$, da cui $dy = 2x\,dx$, si ha

$$\int x^{13} \sin(x^2)\,dx = \int (x^2)^6 \sin(x^2)\,x\,dx = \frac{1}{2}\int y^6 \sin(y)\,dy\,,$$

e l'ultimo integrale si svolge per parti (si veda la domanda 3B).

3D) La funzione $f(x) = x^{12} \arctan(x)$ si integra per parti prima, e per sostituzione poi.

Vero: Infatti, integrando il monomio e derivando l'arcotangente, si ha

$$\int x^{12} \arctan(x)\,dx = \frac{x^{13}}{13} \arctan(x) - \frac{1}{13}\int \frac{x^{13}}{1+x^2}\,dx\,.$$

L'ultimo integrale si svolge per sostituzione, ponendo $y = 1 + x^2$, da cui $dy = 2x\,dx$. Si ha

$$\int \frac{x^{13}}{1+x^2}\,dx = \int \frac{(x^2)^6}{1+x^2}\,x\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{(y-1)^6}{y}\,dy\,,$$

e quest'ultimo integrale, dopo aver sviluppato la potenza del binomio, è la somma di 7 integrali immediati.

---

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false

4A) Si ha
$$\int_{8}^{23} \frac{dx}{x} = \ln\left(\frac{23}{8}\right).$$

Vero: Infatti, si ha
$$\int_{8}^{23} \frac{dx}{x} = \ln(|x|)\Big|_{8}^{23} = \ln(23) - \ln(8) = \ln\left(\frac{23}{8}\right).$$

4B) Si ha
$$\int_{20}^{24} \frac{dx}{x-4} = \ln\left(\frac{5}{4}\right).$$

Vero: Infatti,
$$\int_{20}^{24} \frac{dx}{x-4} = \ln(|x-4|)\Big|_{20}^{24} = \ln(20) - \ln(16) = \ln\left(\frac{5}{4}\right).$$

4C) Si ha
$$\int_{9}^{14} \frac{dx}{4-x} = -\ln(2).$$

Vero: Infatti,
$$\int_{9}^{14} \frac{dx}{4-x} = -\int_{9}^{14} \frac{dx}{x-4} = -\ln(|x-4|)\Big|_{9}^{14} = -\ln(10) + \ln(5) = -\ln(2).$$

4D) Si ha
$$\int_{0}^{1} \frac{dx}{2\,x-13} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{11}{13}\right).$$

Vero: Infatti, con la sostituzione $y = 2\,x - 13$, da cui $dy = 2\,dx$, si ha
$$\int_{0}^{1} \frac{dx}{2\,x-13} = \frac{1}{2}\int_{-13}^{-11} \frac{dy}{y} = \frac{\ln(|y|)}{2}\Big|_{-13}^{-11} = \frac{\ln(11) - \ln(13)}{2} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{11}{13}\right).$$

---

5) Calcolare una primitiva delle seguenti funzioni

$$\textbf{a1})\ x\,\sin(x)\,,\qquad \textbf{a2})\ x^3\,\mathrm{e}^x\,,\qquad \textbf{b1})\ x^2\,\ln(x)\,,\qquad \textbf{b2})\ (x^2-6x+2)\,\mathrm{e}^x\,,$$

$$\textbf{c1})\ x\,\mathrm{e}^{7\,x}\,,\qquad \textbf{c2})\ x\,\cos(4\,x)\,,\qquad \textbf{d1})\ \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\,,\qquad \textbf{d2})\ \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x^3}\,,$$

Soluzione:

a1) Integriamo per parti, derivando x e integrando $\sin(x)$:

$$\int x\,\sin(x)\,dx = \left[\begin{array}{ccc} f'(x)=\sin(x) & \to & f(x)=-\cos(x) \\ g(x)=x & \to & g'(x)=1 \end{array}\right] = -x\,\cos(x) - \int(-\cos(x))\,dx\,,$$

da cui

$$\int x\,\sin(x)\,dx = -x\,\cos(x)+\sin(x)\,.$$

a1) Integriamo per parti, derivando x^3 e integrando e^x:

$$\int x^3\,\mathrm{e}^x\,dx = \left[\begin{array}{ccc} f'(x)=\mathrm{e}^x & \to & f(x)=\mathrm{e}^x \\ g(x)=x^3 & \to & g'(x)=3\,x^2 \end{array}\right] = x^3\,\mathrm{e}^x - 3\int x^2\,\mathrm{e}^x\,dx\,.$$

Per l'integrale rimasto, integriamo per parti, derivando x^2 e integrando e^x:

$$\int x^2\,\mathrm{e}^x\,dx = \left[\begin{array}{ccc} f'(x)=\mathrm{e}^x & \to & f(x)=\mathrm{e}^x \\ g(x)=x^2 & \to & g'(x)=2\,x \end{array}\right] = x^2\,\mathrm{e}^x - 2\int x\,\mathrm{e}^x\,dx\,.$$

Per l'ultimo integrale, integriamo per parti, derivando x e integrando e^x:

$$\int x\,\mathrm{e}^x\,dx = \left[\begin{array}{ccc} f'(x)=\mathrm{e}^x & \to & f(x)=\mathrm{e}^x \\ g(x)=x & \to & g'(x)=1 \end{array}\right] = x\,\mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x\,dx = x\,\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x\,.$$

Rimettendo insieme i risultati, si ha

$$\int x^3\,\mathrm{e}^x = x^3\,\mathrm{e}^x - 3\,x^2\,\mathrm{e}^x + 6\,x\,\mathrm{e}^x - 6\,\mathrm{e}^x = (x^3-3x^2+6x-6)\,\mathrm{e}^x\,.$$

b1) Integriamo per parti, derivando $\ln(x)$ e integrando x^2:

$$\int x^2\,\ln(x)\,dx = \left[\begin{array}{ccc} f'(x)=x^2 & \to & f(x)=\frac{x^3}{3} \\ g(x)=\ln(x) & \to & g'(x)=\frac{1}{x} \end{array}\right] = \frac{x^3\,\ln(x)}{3} - \int\frac{x^3}{3}\,\frac{1}{x}\,dx\,,$$

da cui

$$\int x^2\,\ln(x)\,dx = \frac{x^3\,\ln(x)}{3} - \int\frac{x^2}{3}\,dx = \frac{x^3\,\ln(x)}{3} - \frac{x^3}{9} = \frac{x^3}{9}\,(3\,\ln(x)-1)\,.$$

b2) Ricordiamo il seguente risultato: se $P(x)$ è un polinomio, allora

$$\int P(x)\,\mathrm{e}^x\,dx = Q(x)\,\mathrm{e}^x\,,$$

dove $Q(x)$ è un polinomio dello stesso grado di $P(x)$ e tale che

$$Q(x)+Q'(x)=P(x)\,.$$

Pertanto,

$$\int (x^2-6x+2)\,\mathrm{e}^x\,dx = Q(x)\,\mathrm{e}^x\,,$$

dove $Q(x)$ è un polinomio di secondo grado tale che

$$Q(x)+Q'(x)=x^2-6x+2\,.$$

Scrivendo $Q(x)=a\,x^2+b\,x+c$, si ha $Q'(x)=2a\,x+b$, da cui

$$Q'(x)+Q(x)=a\,x^2+(2a+b)\,x+(b+c)=x^2-6x+2\,,$$

e quindi,per il principio di identità dei polinomi, deve essere $a = 1$, $2a + b = -6$ e $b + c = 2$, da cui segue $a = 1$, $b = -8$ e $c = 10$. In definitiva,

$$\int (x^2 - 6x + 2)\,\mathrm{e}^x\,dx = (x^2 - 8x + 10)\,\mathrm{e}^x\,.$$

c1) Sostituiamo $y = 7\,x$, da cui $dy = 7\,dx$; si ha

$$\int x\,\mathrm{e}^{7\,x}\,dx = \frac{1}{49}\int y\,\mathrm{e}^y\,dy\,.$$

L'ultimo integrale si svolge per parti:

$$\int y\,\mathrm{e}^y\,dy = \left[\begin{array}{ccc} f'(x) = \mathrm{e}^y & \to & f(x) = \mathrm{e}^y \\ g(x) = y & \to & g'(x) = 1 \end{array}\right] = y\,\mathrm{e}^y - \int \mathrm{e}^y\,dy = (y-1)\,\mathrm{e}^y\,,$$

e quindi

$$\int x\,\mathrm{e}^{7\,x}\,dx = \frac{(7\,x-1)\,\mathrm{e}^{7\,x}}{49}\,.$$

c2) Sostituiamo $y = 4\,x$, da cui $dy = 4\,dx$; si ha

$$\int x\,\cos(4\,x)\,dx = \frac{1}{16}\int y\,\cos(y)\,dy\,.$$

L'ultimo integrale si svolge per parti:

$$\int y\,\cos(y)\,dy = \left[\begin{array}{ccc} f'(x) = \cos(y) & \to & f(x) = \sin(y) \\ g(x) = y & \to & g'(x) = 1 \end{array}\right] = y\,\sin(y) - \int \sin(y)\,dy = y\,\sin(y) + \cos(y)\,,$$

e quindi

$$\int x\,\cos(4\,x)\,dx = \frac{4\,x\,\sin(4\,x) + \cos(4\,x)}{16}\,.$$

d1) Sostituiamo $x = y^2$, da cui $dx = 2\,y\,dy$. Pertanto,

$$\int \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\,dx = 2\int \mathrm{e}^y\,y\,dy\,.$$

Svolgendo l'ultimo integrale per parti, si ha

$$\int y\,\mathrm{e}^y\,dy = \left[\begin{array}{ccc} f'(x) = \mathrm{e}^y & \to & f(x) = \mathrm{e}^y \\ g(x) = y & \to & g'(x) = 1 \end{array}\right] = y\,\mathrm{e}^y - \int \mathrm{e}^y\,dy = (y-1)\,\mathrm{e}^y\,,$$

da cui segue che

$$\int \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\,dx = 2\,(\sqrt{x}-1)\,\mathrm{e}^{\sqrt{x}}\,.$$

d2) Sostituiamo $y = \frac{1}{x}$, da cui $dy = -\frac{dx}{x^2}$. Pertanto,

$$\int \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x^3}\,dx = \int \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{y}}}{x}\,\frac{dx}{x^2} = -\int y\,\mathrm{e}^y\,dy\,.$$

Svolgendo l'ultimo integrale per parti, come nell'esercizio **d1)**, si ha

$$\int y\,\mathrm{e}^y\,dy = (y-1)\,\mathrm{e}^y\,,$$

da cui segue che

$$\int \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x^3}\,dx = \left(1 - \frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\,.$$

6)

a1) - a2) Trovare una primitiva di $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 8x + 16}$ e calcolare $\displaystyle\int_5^6 f(x)\,dx\,.$

b1) - b2) Trovare una primitiva di $g(x) = \dfrac{1}{x^2 - 15x + 54}$ e calcolare $\displaystyle\int_{10}^{11} g(x)\,dx\,.$

c1) - c2) Trovare una primitiva di $h(x) = \dfrac{1}{x^2 - 12x + 61}$ e calcolare $\displaystyle\int_6^{11} h(x)\,dx\,.$

d1) - d2) Trovare una primitiva di $k(x) = \dfrac{2x - 12}{x^2 - 13x + 36}$ e di $j(x) = \dfrac{x^3}{10 + x^2}$.

Soluzione:

a1) - a2) Osserviamo che si ha $x^2 - 8x + 16 = (x - 4)^2$. Pertanto,

$$\int \frac{dx}{x^2 - 8x + 16} = \int \frac{dx}{(x - 4)^2} = -\frac{1}{x - 4}\,,$$

e quindi

$$\int_5^6 \frac{dx}{x^2 - 8x + 16} = -\frac{1}{x - 4}\Big|_5^6 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}\,.$$

b1) - b2) Osserviamo che si ha $x^2 - 15x + 54 = (x - 9)\,(x - 6)$. Cerchiamo dunque A e B tali che

$$\frac{1}{(x - 9)\,(x - 6)} = \frac{A}{x - 9} + \frac{B}{x - 6}\,.$$

Moltiplicando una volta per $x - 9$ e una volta per $x - 6$ si ottiene

$$\frac{1}{x - 6} = A + B\,\frac{x - 9}{x - 6} \quad \text{e} \quad \frac{1}{x - 9} = A\,\frac{x - 6}{x - 9} + B\,.$$

Scegliendo $x = 9$ nella prima e $x = 6$ nella seconda, si trova $A = \frac{1}{3} = -B$, cosicché

$$\frac{1}{x^2 - 15x + 54} = \frac{1}{(x - 9)\,(x - 6)} = \frac{1}{3\,(x - 9)} - \frac{1}{3\,(x - 6)}\,,$$

da cui segue che

$$\int \frac{dx}{x^2 - 15x + 54} = \int \left[\frac{1}{3\,(x - 9)} - \frac{1}{3\,(x - 6)}\right] dx = \frac{\ln(|x - 9|) - \ln(|x - 6|)}{3} = \frac{1}{3}\,\ln\left(\left|\frac{x - 9}{x - 6}\right|\right).$$

Pertanto,

$$\int_{10}^{11} \frac{dx}{x^2 - 15x + 54} = \frac{1}{3}\,\ln\left(\left|\frac{x - 9}{x - 6}\right|\right)\Big|_{10}^{11} = \frac{1}{3}\left[\ln\left(\frac{2}{5}\right) - \ln\left(\frac{1}{4}\right)\right] = \frac{1}{3}\,\ln\left(\frac{8}{5}\right).$$

c1) - c2) Osserviamo che si ha $x^2 - 12x + 61 = (x - 6)^2 + 25$. Possiamo allora scrivere

$$x^2 - 12x + 61 = 25\left[1 + \left(\frac{x - 6}{5}\right)^2\right],$$

e quindi si ha

$$\int \frac{dx}{x^2 - 12x + 61} = \frac{1}{25}\int \frac{dx}{1 + \left(\frac{x-6}{5}\right)^2}\,.$$

Con la sostituzione $y = \frac{x-6}{5}$, da cui $dy = \frac{dx}{5}$, si ha

$$\int \frac{dx}{x^2 - 12x + 61} = \frac{1}{5}\int \frac{dy}{1 + y^2} = \frac{1}{5}\,\arctan(y) = \frac{1}{5}\,\arctan\left(\frac{x - 6}{5}\right).$$

Si ha pertanto

$$\int_6^{11} \frac{dx}{x^2 - 12x + 61} = \frac{1}{5}\,\arctan\left(\frac{x - 6}{5}\right)\Big|_6^{11} = \frac{\arctan(1) - \arctan(0)}{5} = \frac{\pi}{20}\,.$$

d1) Osserviamo che si ha

$$\frac{2x-12}{x^2-13x+36} = \frac{2x-13}{x^2-13x+36} + \frac{1}{x^2-13x+36}\,.$$

Dal momento che al numeratore compare la derivata del denominatore, si ha

$$\int \frac{2x-13}{x^2-13x+36}\,dx = \ln(|x^2-13x+36|)\,.$$

Per calcolare il secondo integrale, osserviamo che si ha $x^2-13x+36 = (x-9)\,(x-4)$. Con conti analoghi a quelli visti nello svolgimento dell'esercizio **b1) - b2)** si ha che

$$\frac{1}{x^2-13x+36} = \frac{1}{(x-9)\,(x-4)} = \frac{1}{5\,(x-9)} - \frac{1}{5\,(x-4)}\,,$$

cosicché

$$\int \frac{dx}{x^2-13x+36} = \int \left[\frac{1}{5\,(x-9)} - \frac{1}{5\,(x-4)}\right] dx = \frac{1}{5}\,\ln\left(\left|\frac{x-9}{x-4}\right|\right).$$

Mettendo insieme i risultati trovati, si ha

$$\int \frac{2x-12}{x^2-13x+36} = \ln(|x^2-13x+36|) + \frac{1}{5}\,\ln\left(\left|\frac{x-9}{x-4}\right|\right).$$

d2) Scriviamo

$$\frac{x^3}{10+x^2} = \frac{x^3+10\,x-10\,x}{10+x^2} = x - \frac{10\,x}{10+x^2}\,.$$

Abbiamo quindi

$$\int \frac{x^3}{10+x^2}\,dx = \int \left[x - \frac{10\,x}{10+x^2}\right] dx = \frac{x^2}{2} - \int \frac{10\,x}{10+x^2}\,dx\,.$$

Per calcolare l'ultimo integrale, poniamo $y = 10+x^2$, da cui $dy = 2x\,dx$, e otteniamo

$$\int \frac{10\,x}{10+x^2}\,dx = \int \frac{5\,dy}{y} = 5\,\ln(|y|) = 5\,\ln(x^2+10)\,,$$

dove si è tolto il modulo dato che la funzione x^2+10 è positiva. In definitiva,

$$\int \frac{x^3}{10+x^2}\,dx = \frac{x^2}{2} - 5\,\ln(x^2+10)\,.$$

7) Trovare una primitiva di

$$\textbf{a1)}\ x\,e^{6\,x}\,,\qquad \textbf{a2)}\ e^{x}\,\sin(5\,x)\,,\qquad \textbf{b1)}\ \sin^2(4\,x)\,,\qquad \textbf{b2)}\ \cos^3(2\,x)\,,$$

$$\textbf{c1)}\ (2x+5)\,e^{x}\,,\qquad \textbf{c2)}\ (7x^2-2x+4)\,e^{x}\,,\qquad \textbf{d1)}\ x^6\,\ln(11\,x)\,,\qquad \textbf{d2)}\ 12\,x\,\arctan(6\,x)\,.$$

Soluzione:

a1) Integriamo per parti, derivando x e integrando $e^{6\,x}$. Si ha

$$\int x\,e^{6\,x}\,dx = \frac{x}{6}\,e^{6\,x} - \frac{1}{6}\int e^{6\,x}\,dx = \frac{x}{6}\,e^{6\,x} - \frac{1}{36}\,e^{6\,x} = \frac{6\,x-1}{36}\,e^{6\,x}\,.$$

a2) Integriamo per parti, derivando $\sin(5\,x)$ e integrando l'esponenziale. Si ha

$$\int e^{x}\,\sin(5\,x)\,dx = e^{x}\,\sin(5\,x) - 5\int e^{x}\,\cos(5\,x)\,dx\,.$$

Per calcolare l'ultimo integrale, operiamo per parti, derivando $\cos(5\,x)$ e integrando l'esponenziale. Si ha

$$\int e^{x}\,\cos(5\,x)\,dx = e^{x}\,\cos(5\,x) + 5\int e^{x}\,\sin(5\,x)\,dx\,.$$

Mettendo insieme i risultati, si ha

$$\int e^{x}\,\sin(5\,x)\,dx = e^{x}\,[\sin(5\,x) - 5\,\cos(5\,x)] - 25\int e^{x}\,\sin(5\,x)\,dx\,,$$

da cui si ricava (portando l'integrale a secondo membro a sinistra)

$$\int e^{x}\,\sin(5\,x)\,dx = \frac{e^{x}}{26}[\sin(5\,x) - 5\,\cos(5\,x)]\,.$$

b1) Integriamo per parti, derivando e integrando $\sin(4\,x)$. Si ha

$$\int \sin^2(4\,x)\,dx = \int \sin(4\,x)\,\sin(4\,x)\,dx = -\frac{1}{4}\,\sin(4\,x)\,\cos(4\,x) + \int \cos^2(4\,x)\,dx\,.$$

Ora si ha

$$\int \cos^2(4\,x)\,dx = \int [1-\sin^2(4\,x)]\,dx = x - \int \sin^2(4\,x)\,dx\,.$$

Si ha dunque

$$\int \sin^2(4\,x)\,dx = -\frac{1}{4}\,\sin(4\,x)\,\cos(4\,x) + x - \int \sin^2(4\,x)\,dx\,.$$

Portando a sinistra una parte dell'integrale a destra si ottiene

$$2\int \sin^2(4\,x)\,dx = -\frac{1}{4}\,\sin(4\,x)\,\cos(4\,x) + x\,,$$

da cui segue che

$$\int \sin^2(4\,x)\,dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{8}\,\sin(4\,x)\,\cos(4\,x)\,.$$

b2) Osserviamo che si ha

$$\cos^3(2\,x) = \cos^2(2\,x)\,\cos(2\,x) = [1-\sin^2(2\,x)]\,\cos(2\,x)\,.$$

Pertanto, con la sostituzione $y = \sin(2\,x)$, da cui $dy = 2\,\cos(2\,x)\,dx$, si ha

$$\int \cos^3(2\,x)\,dx = \int [1-\sin^2(2\,x)]\,\cos(2\,x)\,dx = \frac{1}{2}\int (1-y^2)\,dy = \frac{1}{2}\left[y - \frac{y^3}{3}\right],$$

e quindi

$$\int \cos^3(2\,x)\,dx = \frac{\sin(2\,x)}{2} - \frac{\sin^3(2\,x)}{6}\,.$$

c1) Integriamo per parti, derivando il binomio e integrando l'esponenziale. Si ha

$$\int (2x+5)\,\mathrm{e}^x\,dx = (2x+5)\,\mathrm{e}^x - 2\int \mathrm{e}^x\,dx = (2x+3)\,\mathrm{e}^x\,.$$

c2) Sappiamo che si ha

$$\int (7x^2-2x+4)\,\mathrm{e}^x\,dx = Q(x)\,\mathrm{e}^x\,,$$

dove $Q(x)$ è un polinomio di secondo grado tale che $Q(x)+Q'(x) = 7x^2-2x+4$. Se $Q(x) = a\,x^2+b\,x+c$ è un generico polinomio di secondo grado, si ha

$$Q(x)+Q'(x) = a\,x^2+(2a+b)\,x+(b+c)\,,$$

e imponendo che si abbia $Q(x)+Q'(x) = 7x^2-2x+4$ si ha che deve essere

$$a=7\,,\qquad 2a+b=-2\,,\qquad b+c=4\,,$$

da cui si ricava facilmente che

$$a=7\,,\qquad b=-16\,,\qquad c=20\,,$$

e quindi

$$\int (7x^2-2x+4)\,\mathrm{e}^x\,dx = (7x^2-16x+20)\,\mathrm{e}^x\,.$$

d1) Integriamo per parti, derivando il logaritmo e integrando x^6. Si ha

$$\int x^6\,\ln(11\,x)\,dx = \frac{x^7}{7}\,\ln(11\,x) - \frac{1}{7}\int x^7\,\frac{11}{11\,x}\,dx = \frac{x^7}{7}\,\ln(11\,x) - \frac{x^7}{49} = \frac{x^7}{49}[7\,\ln(11\,x)-1]\,.$$

d2) Integriamo per parti, integrando il monomio e derivando l'arcotangente. Si ha

$$\int 12\,x\,\arctan(6\,x)\,dx = 6\,x^2\,\arctan(6\,x) - \int \frac{36\,x^2}{1+36\,x^2}\,dx\,.$$

Per calcolare l'ultimo integrale, aggiungiamo e togliamo 1 al numeratore:

$$\int \frac{36\,x^2}{1+36\,x^2}\,dx = \int \frac{1+36\,x^2-1}{1+36\,x^2}\,dx = \int \left[1-\frac{1}{1+36\,x^2}\right]dx = x - \int \frac{dx}{1+36\,x^2}\,.$$

L'ultimo integrale si calcola ponendo $y=6\,x$, da cui $dy = 6\,dx$ per ottenere

$$\int \frac{dx}{1+36\,x^2} = \frac{1}{6}\int \frac{dy}{1+y^2} = \frac{\arctan(y)}{6} = \frac{\arctan(6\,x)}{6}\,.$$

In definitiva, si ha

$$\int 12\,x\,\arctan(6\,x)\,dx = 6\,x^2\,\arctan(6\,x) - x + \frac{\arctan(6\,x)}{6}\,.$$