Calcolo integrale — Scheda di esercizi n. 9
19 Maggio 2023 — Compito n. 00038

Istruzioni: le prime due caselle (**V** / **F**) permettono di selezionare la risposta vero/falso. La casella "**C**" serve a correggere eventuali errori invertendo la risposta data.
Per selezionare una casella, annerirla completamente: ■ (non ☒ o ☑).

Nome: ____________________

Cognome: ____________________

Matricola: | | | | | | | |

	1A	1B	1C	1D	2A	2B	2C	2D	3A	3B	3C	3D	4A	4B	4C	4D
V	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
F	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
C	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

1) Si consideri l'equazione differenziale:

$$y''(t) + 3\,y'(t) + 5\,y(t) = 0\,.$$

1A) L'equazione ha infinite soluzioni.
1B) Esistono infinite soluzioni dell'equazione tali che $y(7) = 5$.
1C) Esiste un'unica soluzione dell'equazione tale che $y(2) = 5$ e $y'(2) = 4$.
1D) Non esistono soluzioni dell'equazione tali che

$$y(2) = 7\,,\ y'(2) = 6\,,\ y''(2) = 51\,.$$

2) Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(t) - 13\,y'(t) + 36\,y(t) = 144\,. \tag{1}$$

2A) Il polinomio caratteristico dell'equazione è $P(L) = L^2 - 13L + 36$.
2B) La funzione $y_0(t) = 5\,e^{6\,t}$ è soluzione dell'equazione omogenea associata a (1).
2C) La funzione $\overline{y}(t) = 5$ è una soluzione particolare di (1).
2D) Se $y(0) = 5$ e $y'(0) = 0$, la soluzione di (1) è costante.

3) Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(t) + A\,y(t) + B\,y(t) = 0\,, \quad A\,,B \in \mathbb{R}\,.$$

3A) Il polinomio caratteristico dell'equazione è $P(L) = L^2 - A\,L + B$.
3B) Se $A = 0$ e $B = -9$, la funzione $y(t) = 4\,e^{3\,t} - 13\,e^{-3\,t}$ non è soluzione dell'equazione.
3C) Se $A = -5$ e $B = 0$, la funzione $y(t) = 4$ è soluzione dell'equazione.
3D) Se $A = -6$ e $B = 25$, la funzione $y(t) = 5\,e^{3\,t}\,\sin(4\,t)$ non è soluzione dell'equazione.

4) Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(t) - 4\,y'(t) = -20\,.$$

4A) Tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata sono date da $y_0(t) = C\,e^{4\,t}$.
4B) Non esistono soluzioni costanti dell'equazione.
4C) La funzione $\overline{y}(t) = 5\,t$ è soluzione dell'equazione.
4D) Se $y(0) = 2$ e $y'(0) = 5$, la soluzione dell'equazione è un'esponenziale.

Docente
☐ DelaTorre Pedraza
☐ Orsina

5) Si consideri l'equazione differenziale

(1) $$y''(t) - 15\,y'(t) + 50\,y(t) = -5\,\mathrm{e}^{5\,t}\,.$$

a) Scrivere il polinomio caratteristico dell'equazione in (1) e trovarne le radici.
b) Scrivere tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata a (1).
c) Trovare una soluzione particolare di (1).
d) Trovare l'unica soluzione di (1) tale che $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$.

☐☐☐☐☐☐☐☐ **Cognome** **Nome** **Matricola** **Compito 00038**

---

6) Si consideri l'equazione differenziale

(1) $$y''(t) - 16\,y'(t) + 64\,y(t) = 2\,\mathrm{e}^{8\,t}\,.$$

a) Si determini il polinomio caratteristico di (1) e si trovino tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata a (1).
b) Si trovi una soluzione particolare di (1).
c) Si trovi l'unica soluzione di (1) tale che $y(0) = 0$ e $y'(0) = 2$.
d) Si trovi l'unica soluzione di (1) tale che $y(0) = 2$ e $y'(0) = 0$.

Soluzioni del compito 00038

1) Si consideri l'equazione differenziale:

$$y''(t) + 3\,y'(t) + 5\,y(t) = 0\,.$$

1A) L'equazione ha infinite soluzioni.

Vero: Trattandosi di un'equazione differenziale ordinaria del secondo ordine, ha infinite soluzioni, dipendenti da due parametri reali.

1B) Esistono infinite soluzioni dell'equazione tali che $y(7) = 5$.

Vero: L'equazione ha infinite soluzioni, dipendenti da due parametri reali. Assegnando una sola condizione, si "fissa" uno solo dei due parametri, e quindi l'equazione ha infinite soluzioni tali che $y(7) = 5$.

1C) Esiste un'unica soluzione dell'equazione tale che $y(2) = 5$ e $y'(2) = 4$.

Vero: Assegnando due condizioni, una sulla funzione e una sulla derivata, si ottiene un problema di Cauchy, che ha un'unica soluzione.

1D) Non esistono soluzioni dell'equazione tali che

$$y(2) = 7\,,\ y'(2) = 6\,,\ y''(2) = 51\,.$$

Vero: Se $y(2) = 7$ e $y'(2) = 6$, dall'equazione segue che deve essere

$$0 = y''(2) + 3\,y'(2) + 5\,y(2) = y''(2) + 3 \cdot 7 + 5 \cdot 6 = y''(2) + 51\,,$$

da cui segue che $y''(2) = -51$. Pertanto, l'unica soluzione dell'equazione che soddisfa le condizioni $y(2) = 7$ e $y'(2) = 6$ è tale che $y''(2) = -51 \neq 51$; in altre parole, non esistono soluzioni dell'equazione che soddisfano le tre condizioni richieste.

---

2) Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(t) - 13\,y'(t) + 36\,y(t) = 144\,. \tag{1}$$

2A) Il polinomio caratteristico dell'equazione è $P(L) = L^2 - 13L + 36$.

Vero: Sostituendo y'' con L^2, y' con L e y con 1, si trova che

$$P(L) = L^2 - 13L + 36\,.$$

2B) La funzione $y_0(t) = 5\,\mathrm{e}^{6\,t}$ è soluzione dell'equazione omogenea associata a (1).

Falso: Se definiamo $y_1(t) = \mathrm{e}^{6\,t}$, si ha

$$y_1'(t) = 6\,\mathrm{e}^{6\,t}\,, \qquad y_1''(t) = 36\,\mathrm{e}^{6\,t}\,.$$

Sostituendo nell'equazione si ha

$$y_1''(t) - 13\,y_1'(t) + 36\,y_1(t) = -6\,\mathrm{e}^{6\,t} \neq 0\,,$$

e quindi $y_1(t)$ **non è** soluzione dell'equazione omogenea associata. Non essendolo, non lo è neanche $y_0(t) = 5\,y_1(t)$.
Alternativamente, il polinomio caratteristico dell'equazione è $P(L) = L^2 - 13L + 36$, che si annulla per $L_1 = 4$ e $L_2 = 9$. Pertanto, tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata sono date da

$$y_1(t) = C\,\mathrm{e}^{4\,t} + D\,\mathrm{e}^{9\,t}\,,$$

con C e D numeri reali. Dato che per tutti i valori di C e D si ha $y_1(t) \neq y_0(t)$, la funzione $y_0(t)$ non è soluzione dell'equazione omogenea associata a (1).

2C) La funzione $\overline{y}(t) = 5$ è una soluzione particolare di (1).

Falso: Sostituendo nell'equazione si ha, essendo nulle sia la derivata prima che la derivata seconda di $\overline{y}(t)$,

$$y'' - 13\,y' + 36\,y = 36 \cdot 5 = 180 \neq 144\,,$$

e quindi $\overline{y}(t) = 5$ non è una soluzione particolare di (1). Cercando una soluzione particolare della forma $y(t) \equiv Q$ si vede facilmente che deve essere $Q = 4$.

2D) Se $y(0) = 5$ e $y'(0) = 0$, la soluzione di (1) è costante.

Falso: Se (1) avesse una soluzione costante tale che $y(0) = 5$, chiaramente tale soluzione non può che essere $y(t) \equiv y(0) = 5$ (si noti che la condizione $y'(0) = 0$ è verificata). Sostituendo però nell'equazione $y(t) = 5$ si trova

$$y'' - 13\,y' + 36\,y = 36 \cdot 5 = 180 \neq 144\,,$$

e quindi $y(t) \equiv 5$ non è soluzione dell'equazione; questo vuol dire che l'unica soluzione del problema di Cauchy per (1) con le condizioni iniziali $y(0) = 5$ e $y'(0) = 0$ non è costante.

---

3) Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(t) + A\,y(t) + B\,y(t) = 0\,, \quad A\,,B \in \mathbb{R}\,.$$

3A) Il polinomio caratteristico dell'equazione è $P(L) = L^2 - A\,L + B$.

Falso: Sostituendo y'' con L^2, y' con L e y con 1, si trova che

$$P(L) = L^2 + A\,L + B \neq L^2 - A\,L + B\,.$$

3B) Se $A = 0$ e $B = -9$, la funzione $y(t) = 4\,\mathrm{e}^{3\,t} - 13\,\mathrm{e}^{-3\,t}$ non è soluzione dell'equazione.

Falso: Se $A = 0$ e $B = -9$, il polinomio caratteristico dell'equazione è $P(L) = L^2 - 9$ che si annulla per $L = \pm 3$. Pertanto, tutte le soluzioni dell'equazione sono date da

$$y(t) = C\,\mathrm{e}^{3\,t} + D\,\mathrm{e}^{-3\,t}\,.$$

Scegliendo $C = 4$ e $D = -13$, si ha che $y(t) = 4\,\mathrm{e}^{3\,t} - 13\,\mathrm{e}^{-3\,t}$ è soluzione dell'equazione.

3C) Se $A = -5$ e $B = 0$, la funzione $y(t) = 4$ è soluzione dell'equazione.

Vero: Se $A = -5$ e $B = 0$, il polinomio caratteristico dell'equazione è $P(L) = L^2 - 5\,L$ che si annulla per $L = 0$ e per $L = 5$. Pertanto, tutte le soluzioni dell'equazione sono date da

$$y(t) = C\,\mathrm{e}^{0\,t} + D\,\mathrm{e}^{5\,t} = C + D\,\mathrm{e}^{5\,t}\,.$$

Scegliendo $C = 4$ e $D = 0$, si ha che $y(t) = 4$ è soluzione dell'equazione.

3D) Se $A = -6$ e $B = 25$, la funzione $y(t) = 5\,\mathrm{e}^{3\,t}\,\sin(4\,t)$ non è soluzione dell'equazione.

Falso: Se $A = -6$ e $B = 25$, il polinomio caratteristico dell'equazione è $P(L) = L^2 - 6\,L + 25$, che si annulla per $L = 3 \pm 4\,i$. Pertanto, tutte le soluzioni dell'equazione sono date da

$$y(t) = \mathrm{e}^{3\,t}[C\,\cos(4\,t) + D\,\sin(4\,t)]\,.$$

Scegliendo $C = 0$ e $D = 5$, si ha che $y(t) = 5\,\mathrm{e}^{3\,t}\,\sin(4\,t)$ è soluzione dell'equazione.

---

4) Si consideri l'equazione differenziale
$$y''(t) - 4\,y'(t) = -20\,.$$

4A) Tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata sono date da $y_0(t) = C\,\mathrm{e}^{4\,t}$.

Falso: Il polinomio caratteristico dell'equazione è $P(L) = L^2 - 4\,L$, che si annulla per $L = 0$ e $L = 4$. Pertanto, tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata sono date da
$$y_0(t) = C\,\mathrm{e}^{0\cdot t} + D\,\mathrm{e}^{4\,t} = C + D\,\mathrm{e}^{4\,t}\,,$$
con C e D numeri reali. Pertanto, non tutte le soluzioni dell'omogenea associata sono date da $y_0(t) = C\,\mathrm{e}^{4\,t}$: mancano le soluzioni costanti.

4B) Non esistono soluzioni costanti dell'equazione.

Vero: Se $y(t) \equiv Q$ è una costante, sostituendo nell'equazione si ha
$$y''(t) - 4\,y'(t) = 0 - 4\cdot 0 = 0 \neq -20\,,$$
e quindi l'equazione non ha soluzioni costanti. Alternativamente, sappiamo dalla domanda **4A** che le costanti sono soluzioni dell'equazione omogenea, e quindi non possono essere soluzioni dell'equazione "completa".

4C) La funzione $\overline{y}(t) = 5\,t$ è soluzione dell'equazione.

Vero: Se $\overline{y}(t) = 5\,t$, si ha $\overline{y}'(t) = 5$ e $\overline{y}''(t) = 0$. Sostituendo nell'equazione si ha
$$\overline{y}''(t) - 4\,\overline{y}'(t) = -4\cdot 5 = -20\,,$$
e quindi $\overline{y}(t) = 5\,t$ è soluzione dell'equazione.

4D) Se $y(0) = 2$ e $y'(0) = 5$, la soluzione dell'equazione è un'esponenziale.

Falso: Sappiamo già, dagli esercizi **4A** e **4C**, che tutte le soluzioni dell'equazione sono date da
$$y(t) = y_0(t) + \overline{y}(t) = C + D\,\mathrm{e}^{4\,t} + 5\,t\,,$$
con C e D numeri reali. Pertanto,
$$y'(t) = 4\,D\,\mathrm{e}^{3\,t} + 5\,.$$
Pertanto, assegnando le condizioni iniziali, si ha
$$2 = C + D\,, \qquad 5 = 4\,D + 5\,.$$
Dalla seconda si ricava $D = 0$, e sostituendo nella prima si ricava $C = 2$. Ne segue che l'unica soluzione dell'equazione è
$$y(t) = 2 + 5\,t\,,$$
che è un polinomio di primo grado (e quindi non è un'esponenziale).

---

5) Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(t) - 15\,y'(t) + 50\,y(t) = -5\,\mathrm{e}^{5\,t}\,. \tag{1}$$

a) Scrivere il polinomio caratteristico dell'equazione in (1) e trovarne le radici.
b) Scrivere tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata a (1).
c) Trovare una soluzione particolare di (1).
d) Trovare l'unica soluzione di (1) tale che $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$.

Soluzione:
a) Sostituendo in (1) L^2 a y'', L a y' e 1 a y, si trova

$$P(L) = L^2 - 15\,L + 50\,,$$

che si annulla per $L_1 = 5$ e per $L_2 = 10$.

b) Usando le radici del polinomio caratteristico calcolate al punto precedente, abbiamo che tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata a (1) sono date da

$$y_0(t) = C\,\mathrm{e}^{5\,t} + D\,\mathrm{e}^{10\,t}\,,$$

con C e D numeri reali.

c) Dato che $g(t) = \mathrm{e}^{5\,t}$ è una soluzione dell'equazione omogenea, cerchiamo una soluzione particolare della forma

$$\overline{y}(t) = Q\,t\,\mathrm{e}^{5\,t}\,.$$

Si ha

$$\overline{y}'(t) = Q\,(1 + 5\,t)\,\mathrm{e}^{5\,t}\,, \qquad \overline{y}''(t) = Q\,(10 + 25\,t)\,\mathrm{e}^{5\,t}\,.$$

Sostituendo in (1) si ha

$$\overline{y}'' - 15\,\overline{y} + 50\,\overline{y} = Q\,\mathrm{e}^{5\,t}\,[10 + 25\,t - 15\,(1 + 5\,t) + 50\,t] = -5\,Q\,\mathrm{e}^{5\,t}\,,$$

e quindi $\overline{y}(t)$ è soluzione di (1) se Q è tale che

$$-5\,Q\,\mathrm{e}^{5\,t} = -5\,\mathrm{e}^{5\,t}\,,$$

da cui segue $Q = 1$ e quindi

$$\overline{y}(t) = t\,\mathrm{e}^{5\,t}\,.$$

d) Da **b)** e **c)** abbiamo che tutte le soluzioni di (1) sono date da

$$y(t) = y_0(t) + \overline{y}(t) = C\,\mathrm{e}^{5\,t} + D\,\mathrm{e}^{10\,t} + t\,\mathrm{e}^{5\,t}\,,$$

con C e D numeri reali. Dato che

$$y'(t) = 5\,C\,\mathrm{e}^{5\,t} + 10\,D\,\mathrm{e}^{10\,t} + \mathrm{e}^{5\,t} + 5\,t\,\mathrm{e}^{5\,t}\,,$$

si ha $y(0) = C + D$ e $y'(0) = 5\,C + 10\,D + 1$. Imponendo le condizioni iniziali, si ha che deve essere $C + D = 0$ e $5\,C + 10\,D + 1 = 1$, da cui si ricava facilmente $C = D = 0$. Ne segue che l'unica soluzione di (1) che soddisfa le condizioni $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$ è

$$y(t) = t\,\mathrm{e}^{5\,t}\,.$$

6) Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(t) - 16\,y'(t) + 64\,y(t) = 2\,\mathrm{e}^{8\,t}\,. \tag{1}$$

a) Si determini il polinomio caratteristico di (1) e si trovino tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata a (1).
b) Si trovi una soluzione particolare di (1).
c) Si trovi l'unica soluzione di (1) tale che $y(0) = 0$ e $y'(0) = 2$.
d) Si trovi l'unica soluzione di (1) tale che $y(0) = 2$ e $y'(0) = 0$.

Soluzione:
a) Il polinomio caratteristico è $P(L) = L^2 - 16\,L + 64$, che si annulla per $L_1 = L_2 = 8$. Conseguentemente, tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata ad (1) sono date da

$$y_0(t) = (C + D\,t)\,\mathrm{e}^{8\,t}\,,$$

con C e D numeri reali.

b) Dato che sia $\mathrm{e}^{8\,t}$ che $t\,\mathrm{e}^{8\,t}$ sono soluzioni dell'equazione omogenea, cerchiamo una soluzione particolare di (1) della forma

$$\overline{y}(t) = Q\,t^2\,\mathrm{e}^{8\,t}\,.$$

Derivando, si ha

$$\overline{y}'(t) = Q\,(2t + 8\,t^2)\,\mathrm{e}^{8\,t}\,, \qquad \overline{y}''(t) = Q\,(2 + 32\,t + 64\,t^2)\,\mathrm{e}^{8\,t}\,.$$

Sostituendo nell'equazione si ha

$$\overline{y}'' - 16\,\overline{y}' + 64\,\overline{y}(t) = Q\,\mathrm{e}^{8\,t}\,[2 + 32\,t + 64\,t^2 - 16\,(2t + 8\,t^2) + 64\,t^2] = 2\,Q\,\mathrm{e}^{8\,t}\,,$$

da cui segue che $\overline{y}(t)$ è soluzione di (1) se $Q = 1$. Si ha dunque che tutte le soluzioni di (1) sono date da

$$y(t) = y_0(t) + \overline{y}(t) = (C + D\,t + t^2)\,\mathrm{e}^{8\,t}\,,$$

da cui segue, derivando, che

$$y'(t) = (8\,C + D + (8\,D + 2)\,t + 8\,t^2)\,\mathrm{e}^{8\,t}\,.$$

Pertanto

$$y(0) = C\,, \qquad y'(0) = 8\,C + D\,. \tag{2}$$

c) Da (2) e dalle condizioni date segue che deve essere $C = 0$ e $8\,C + D = 2$, da cui $C = 0$ e $D = 2$. L'unica soluzione di (1) è quindi data da

$$y(t) = (2\,t + t^2)\,\mathrm{e}^{8\,t}\,.$$

d) Da (2) e dalle condizioni date segue che deve essere $C = 2$ e $8\,C + D = 0$, da cui $D = -16$. L'unica soluzione di (1) è quindi data da

$$y(t) = (2 - 16\,t + t^2)\,\mathrm{e}^{8\,t}\,.$$