Calcolo integrale — Scheda di esercizi n. 6
21 Aprile 2023 — Compito n. 00069

Istruzioni: le prime due caselle (**V** / **F**) permettono di selezionare la risposta vero/falso. La casella "**C**" serve a correggere eventuali errori invertendo la risposta data.
Per selezionare una casella, annerirla completamente: ■ (non ☒ o ☑).

Nome: ______________________

Cognome: ______________________

Matricola: | | | | | | | |

Punteggi: 1 punto per ogni risposta esatta, 0 punti per risposte sbagliate o lasciate in bianco.

	1A	1B	1C	1D	2A	2B	2C	2D	3A	3B	3C	3D	4A	4B	4C	4D
V	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
F	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
C	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

1) Sia

$$F(t) = \int_{-2}^{t} [\cos^2(4\,x^2) + 3\,x^2]\,dx\,.$$

1A) Si ha $F(0) < 0$.
1B) La funzione $F(t)$ è crescente su $\mathbb{R}$.
1C) La funzione $F(t)$ è una funzione pari.
1D) Si ha

$$\lim_{t\to+\infty} F(t) < +\infty\,.$$

---

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false

2A)

$$\int_{-4}^{4} [x^{11} + \sin(6\,x)]\,dx \neq 0\,.$$

2B)

$$\int_{-6}^{6} [x^{10} + x^5]\,dx > 0\,.$$

2C)

$$\int_{8}^{14} \frac{dx}{x-2} = \int_{20}^{38} \frac{dx}{x-2}\,.$$

2D)

$$\int_{0}^{\pi/3} \sin(3\,x)\,dx = \frac{1}{3}\int_{0}^{\pi} \sin(x)\,dx\,.$$

3) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false

3A)

$$\int_{0}^{\pi} \sin(11\,x)\,dx = \frac{2}{11}$$

3B)

$$\int_{0}^{1/\sqrt{2}} x\,\mathrm{e}^{2\,x^2}\,dx = 4\,(\mathrm{e}-1)\,.$$

3C)

$$\int_{0}^{1} 4\,x\,\mathrm{e}^{x}\,dx = 1\,.$$

3D)

$$\int_{0}^{3\,\pi} \sin^2(x)\,dx = \frac{\pi}{2}\,.$$

---

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false

4A)

$$\int_{5}^{6} \frac{dx}{|x-4|} = \ln(2)\,.$$

4B)

$$\int_{3}^{4} \frac{dx}{(x-2)^2} = -\frac{1}{2}\,.$$

4C)

$$\int_{4}^{8} \frac{dx}{x^2+4x} = \frac{1}{4}\,\ln(4/3)\,.$$

4D)

$$\int_{0}^{4} \frac{x}{x^2+9}\,dx = \ln\left(\frac{5}{3}\right).$$

Docente
☐ DelaTorre Pedraza
☐ Orsina

☐☐☐☐☐☐☐☐ **Cognome** **Nome** **Matricola** **Compito 00069**

5) Calcolare una primitiva delle funzioni $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ e $k(x)$ e calcolare gli integrali.

$$\textbf{a12)}\ f(x) = \frac{1}{x+3}\,, \quad \int_0^1 f(x)\,dx\,, \qquad \textbf{b12)}\ g(x) = \frac{1}{x^2 - 5\,x}\,, \quad \int_{11}^{17} g(x)\,dx\,,$$

$$\textbf{c12)}\ h(x) = \frac{10\,x + 15}{x^2 + 3\,x + 1}\,, \quad \int_0^1 h(x)\,dx\,, \qquad \textbf{d12)}\ k(x) = \frac{x^3}{x^2 - 36}\,, \quad \int_{-1}^1 k(x)\,dx\,,$$

☐☐☐☐☐☐☐☐ **Cognome** **Nome** **Matricola** **Compito 00069**

6) Calcolare una primitiva delle funzioni $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ e $k(x)$ e calcolare gli integrali.

a12) $f(x) = x^3\ \cos(x^2)\,,\quad \displaystyle\int_0^{\sqrt{9\,\pi}} f(x)\,dx\,,$ **b12)** $g(x) = (x^2 + 2x - 9)\,\mathrm{e}^x\,,\quad \displaystyle\int_0^3 g(x)\,dx\,,$

c12) $h(x) = \cos^3(x)\,,\quad \displaystyle\int_0^{\frac{13}{2}\,\pi} h(x)\,dx\,,$ **d12)** $k(x) = \dfrac{4x-6}{6}\ \ln(x)\,,\quad \displaystyle\int_1^6 k(x)\,dx\,,$

Soluzioni del compito 00069

1) Sia
$$F(t) = \int_{-2}^{t} [\cos^2(4\,x^2) + 3\,x^2]\,dx\,.$$

1A) Si ha $F(0) < 0$.

Falso: Si ha
$$F(0) = \int_{-6}^{0} [\cos^2(4\,x^2) + 3\,x^2]\,dx > 0\,,$$
dato che la funzione integranda è positiva.

1B) La funzione $F(t)$ è crescente su $\mathbb{R}$.

Vero: Per il teorema fondamentale del calcolo integrale si ha
$$F'(t) = \cos^2(4\,t^2) + 3\,t^2 \geq 0\,,$$
e quindi la funzione $F(t)$ è crescente.

1C) La funzione $F(t)$ è una funzione pari.

Falso: Se la funzione $F(t)$ fosse pari, si avrebbe
$$F(-2) = F(2)\,.$$
Tuttavia,
$$F(-2) = \int_{-2}^{-2} [\cos^2(4\,x^2) + 3\,x^2]\,dx = 0\,,$$
e quindi (se la funzione $F(t)$ fosse pari), dovrebbe essere $F(2) = 0$. Dato però che la funzione $F(t)$ è strettamente crescente, si ha $F(2) > F(-2) = 0$, e quindi $F(t)$ non è pari.

1D) Si ha
$$\lim_{t\to+\infty} F(t) < +\infty\,.$$

Falso: Si ha, per $t \geq -2$,
$$F(t) = \int_{-2}^{t} [\cos^2(4\,x^2) + 3\,x^2]\,dx \geq \int_{-2}^{t} 3\,x^2\,dx = 1\,t^3 - 1\,2^3\,.$$
Pertanto,
$$\lim_{t\to+\infty} F(t) \geq \lim_{t\to+\infty} 1\,t^3 - 8 = +\infty\,.$$

---

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false

2A)

$$\int_{-4}^{4} [x^{11} + \sin(6\,x)]\,dx \neq 0\,.$$

Falso: Dal momento che le funzioni $x \mapsto x^{11}$ e $x \mapsto \sin(6\,x)$ sono funzioni dispari, e che l'intervallo di integrazione è simmetrico rispetto all'origine, l'integrale vale zero.

2B)

$$\int_{-6}^{6} [x^{10} + x^5]\,dx > 0\,.$$

Vero: Dal momento che la funzione $x \mapsto x^5$ è una funzione dispari, e che l'intervallo di integrazione è simmetrico rispetto all'origine, l'integrale di x^5 vale zero; d'altra parte, dato che la funzione $x \mapsto x^{10}$ è una funzione pari, e che l'intervallo è simmetrico rispetto all'origine, si ha

$$\int_{-6}^{6} x^{10}\,dx = 2\int_{0}^{6} x^{10} = \frac{2}{11}\,6^{11} > 0\,.$$

2C)

$$\int_{8}^{14} \frac{dx}{x-2} = \int_{20}^{38} \frac{dx}{x-2}\,.$$

Vero: Infatti si ha

$$\int_{8}^{14} \frac{dx}{x-2} = \ln(|x-2|)\Big|_{8}^{14} = \ln(12) - \ln(6) = \ln(2)\,,$$

e

$$\int_{20}^{38} \frac{dx}{x-2} = \ln(|x-2|)\Big|_{20}^{38} = \ln(36) - \ln(18) = \ln(2)\,,$$

e quindi i due integrali sono uguali.

2D)

$$\int_{0}^{\pi/3} \sin(3\,x)\,dx = \frac{1}{3}\int_{0}^{\pi} \sin(x)\,dx\,.$$

Vero: Si ha

$$\int_{0}^{\pi/3} \sin(3\,x)\,dx = -\frac{1}{3}\cos(3\,x)\Big|_{0}^{\pi/3} = -\frac{\cos(3\cdot\pi/3) - \cos(0)}{3} = \frac{2}{3}\,,$$

e

$$\int_{0}^{\pi} \sin(x)\,dx = -\cos(x)\Big|_{0}^{\pi} = -\cos(\pi) + \cos(0) = 2\,,$$

e quindi

$$\int_{0}^{\pi/3} \sin(3\,x)\,dx = \frac{2}{3} = \frac{1}{3}\cdot 2 = \frac{1}{3}\int_{0}^{\pi} \sin(x)\,dx$$

---

3) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false

3A)

$$\int_0^{\pi} \sin(11\,x)\,dx = \frac{2}{11}$$

Vero: Si ha infatti

$$\int_0^{\pi} \sin(11\,x)\,dx = -\frac{\cos(11\,x)}{11}\Big|_0^{\pi} = -\frac{\cos(11\,\pi) - \cos(0)}{11} = \frac{2}{11}\,.$$

3B)

$$\int_0^{1/\sqrt{2}} x\,\mathrm{e}^{2\,x^2}\,dx = 4\,(\mathrm{e}-1)\,.$$

Falso: Si ha, con la sostituzione $y = 2\,x^2$, da cui $dy = 4\,x\,dx$ e quindi $x\,dx = \frac{dy}{4}$,

$$\int_0^{1/\sqrt{2}} x\,\mathrm{e}^{2\,x^2}\,dx = \frac{1}{4}\int_0^1 \mathrm{e}^y\,dy = \frac{\mathrm{e}-1}{4} \neq 4\,(\mathrm{e}-1)\,.$$

3C)

$$\int_0^1 4\,x\,\mathrm{e}^x\,dx = 1\,.$$

Falso: Si ha, integrando per parti (derivando $4\,x$ e integrando l'esponenziale),

$$\int_0^1 4\,x\,\mathrm{e}^x\,dx = 4\,x\,\mathrm{e}^x\Big|_0^1 - 4\int_0^1 \mathrm{e}^x\,dx = 4\,\mathrm{e} - 4\,\mathrm{e}^x\Big|_0^1 = 4\,\mathrm{e} - 4\,\mathrm{e} + 4 = 4 \neq 1\,.$$

3D)

$$\int_0^{3\,\pi} \sin^2(x)\,dx = \frac{\pi}{2}\,.$$

Falso: Iniziamo con il calcolare una primitiva di $\sin^2(x)$; ricordando la formula

$$\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}\,,$$

si ha

$$\int \sin^2(x)\,dx = \frac{1}{2}\int [1-\cos(2x)]\,dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4}\,.$$

Si ha pertanto

$$\int_0^{3\,\pi} \sin^2(x)\,dx = \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4}\right]\Big|_0^{3\,\pi} = \frac{3}{2}\,\pi \neq \frac{\pi}{2}\,,$$

dato che $\sin(6\,\pi) = 0 = \sin(0)$.

---

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false

4A)

$$\int_5^6 \frac{dx}{|x-4|} = \ln(2)\,.$$

Vero: Iniziamo con l'osservare che si ha $x-4 \geq 0$ sull'intervallo $[5,6]$; su tale intervallo si ha pertanto $|x-4| = x-4$. Si ha allora

$$\int_5^6 \frac{dx}{|x-4|} = \int_5^6 \frac{dx}{x-4} = \ln(|x-4|)\Big|_5^6 = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2)\,.$$

4B)

$$\int_3^4 \frac{dx}{(x-2)^2} = -\frac{1}{2}\,.$$

Falso: Infatti si ha

$$\int_3^4 \frac{dx}{(x-2)^2} = -\frac{1}{x-2}\Big|_3^4 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2} \neq -\frac{1}{2}\,.$$

Alternativamente, si poteva osservare che, essendo la funzione integranda positiva, l'integrale non poteva venire un numero negativo.

4C)

$$\int_4^8 \frac{dx}{x^2+4x} = \frac{1}{4}\,\ln(4/3)\,.$$

Vero: Il polinomio al denominatore si scompone come

$$x^2 + 4x = x\,(x+4)\,,$$

che ha come radici $x_1 = -4$ e $x_2 = 0$. Ricordando che

$$\int \frac{dx}{(x-x_1)\,(x-x_2)} = \frac{1}{x_2 - x_1}\,\ln\left(\left|\frac{x-x_2}{x-x_1}\right|\right),$$

si ha quindi

$$\int_4^8 \frac{dx}{x^2+4x} = \int_4^8 \frac{dx}{x\,(x+4)} = \frac{1}{4}\,\ln\left(\left|\frac{x}{x+4}\right|\right)\Big|_4^8 = \frac{1}{4}\left[\ln\left(\frac{8}{12}\right) - \ln\left(\frac{4}{8}\right)\right] = \frac{1}{4}\,\ln(4/3)\,.$$

4D)

$$\int_0^4 \frac{x}{x^2+9}\,dx = \ln\left(\frac{5}{3}\right).$$

Vero: Si ha, facendo comparire al numeratore la derivata del denominatore,

$$\int_0^4 \frac{x}{x^2+9}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^4 \frac{2x}{x^2+9}\,dx = \frac{1}{2}\,\ln(|x^2+9|)\Big|_0^4.$$

Svolgendo i calcoli, si ha allora

$$\int_0^4 \frac{x}{x^2+9}\,dx = \frac{\ln(25)-\ln(9)}{2} = \frac{1}{2}\,\ln\left(\frac{5^2}{3^2}\right) = \ln\left(\frac{5}{3}\right).$$

---

5) Calcolare una primitiva delle funzioni $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ e $k(x)$ e calcolare gli integrali.

$$\textbf{a12)}\ f(x) = \frac{1}{x+3}\,, \quad \int_0^1 f(x)\,dx\,, \qquad \textbf{b12)}\ g(x) = \frac{1}{x^2 - 5\,x}\,, \quad \int_{11}^{17} g(x)\,dx\,,$$

$$\textbf{c12)}\ h(x) = \frac{10\,x + 15}{x^2 + 3\,x + 1}\,, \quad \int_0^1 h(x)\,dx\,, \qquad \textbf{d12)}\ k(x) = \frac{x^3}{x^2 - 36}\,, \quad \int_{-1}^1 k(x)\,dx\,,$$

Soluzione:

a12) Ricordando che si ha

$$\int \frac{dx}{x+a} = \ln(|x+a|)\,,$$

si ha

$$\int \frac{dx}{x+3} = \ln(|x+3|)\,,$$

e quindi

$$\int_0^1 \frac{dx}{x+3} = \ln(|x+3|)\Big|_0^1 = \ln(4) - \ln(3) = \ln\left(\frac{4}{3}\right).$$

b12) Ricordando che si ha

$$\int \frac{dx}{(x-x_2)\,(x-x_1)} = \frac{1}{x_2 - x_1}\,\ln\left(\left|\frac{x-x_2}{x-x_1}\right|\right),$$

ed essendo $x^2 - 5\,x = x\,(x-5) = (x-0)(x-5)$, si ha

$$\int \frac{dx}{x^2 - 5\,x} = \frac{1}{5}\,\ln\left(\left|\frac{x-5}{x}\right|\right).$$

Pertanto,

$$\int_{11}^{17} \frac{dx}{x^2 - 5\,x} = \frac{1}{5}\,\ln\left(\left|\frac{x-5}{x}\right|\right)\Big|_{11}^{17} = \frac{1}{5}\left[\ln\left(\frac{12}{17}\right) - \ln\left(\frac{6}{11}\right)\right] = \frac{1}{5}\,\ln\left(\frac{22}{17}\right).$$

c12) La derivata del denominatore è:

$$[x^2 + 3\,x + 1]' = 2x + 3\,,$$

mentre il numeratore si può scrivere come:

$$10\,x + 15 = 5\,(2x+3)\,.$$

Si ha allora

$$\int \frac{10\,x + 15}{x^2 + 3\,x + 1}\,dx = 5\int \frac{2x+3}{x^2 + 3\,x + 1}\,dx = 5\,\ln(|x^2 + 3\,x + 1|)\,,$$

da cui segue che

$$\int_0^1 \frac{10\,x + 15}{x^2 + 3\,x + 1}\,dx = 5\,\ln(|x^2 + 3\,x + 1|)\Big|_0^1 = 5\,[\ln(5) - \ln(1)] = 5\,\ln(5)\,.$$

d12) Si ha

$$x^3 = x^3 - 36\,x + 36\,x = x\,(x^2 - 36) + 36\,x\,,$$

e quindi

$$\frac{x^3}{x^2 - 36} = \frac{x\,(x^2 - 36) + 36\,x}{x^2 - 36} = x + \frac{36\,x}{x^2 - 36} = x + 18\,\frac{2x}{x^2 - 36}\,.$$

Ne segue che

$$\int \frac{x^3}{x^2 - 36}\,dx = \int \left[x + 18\,\frac{2x}{x^2 - 36}\right] dx = \frac{x^2}{2} + 18\,\ln(|x^2 - 36|)\,,$$

e quindi che

$$\int_{-1}^1 \frac{x^3}{x^2 - 36}\,dx = \left[\frac{x^2}{2} + 18\,\ln(|x^2 - 36|)\right]\Big|_{-1}^1 = \frac{1}{2} + 18\,\ln(35) - \frac{1}{2} - 18\,\ln(35) = 0\,.$$

Si noti che, essendo la funzione integranda dispari e l'intervallo simmetrico rispetto all'origine, si poteva concludere che l'integrale valeva zero **senza** calcolare la primitiva.

6) Calcolare una primitiva delle funzioni $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ e $k(x)$ e calcolare gli integrali.

$$\textbf{a12)}\ f(x) = x^3\,\cos(x^2)\,, \quad \int_0^{\sqrt{9\,\pi}} f(x)\,dx\,, \qquad \textbf{b12)}\ g(x) = (x^2+2x-9)\,\mathrm{e}^x\,, \quad \int_0^3 g(x)\,dx\,,$$

$$\textbf{c12)}\ h(x) = \cos^3(x)\,, \quad \int_0^{\frac{13}{2}\,\pi} h(x)\,dx\,, \qquad \textbf{d12)}\ k(x) = \frac{4x-6}{6}\,\ln(x)\,, \quad \int_1^6 k(x)\,dx\,,$$

Soluzione:

a12) Con la sostituzione $y = x^2$, da cui $dy = 2x\,dx$, e quindi $x\,dx = \frac{dy}{2}$, si ha

$$\int x^3\,\cos(x^2)\,dx = \int x^2\,\cos(x^2)\,x\,dx = \frac{1}{2}\int y\,\cos(y)\,dy\,.$$

Integrando per parti (al solito, derivando y ed integrando il coseno), si ha

$$\int y\,\cos(y)\,dy = y\,\sin(y) - \int \sin(y)\,dy = y\,\sin(y) + \cos(y)\,,$$

da cui segue (ricordando la sostituzione) che

$$\int x^3\,\cos(x^2)\,dx = \frac{x^2\,\sin(x^2)+\cos(x^2)}{2}\,.$$

Si ha dunque

$$\int_0^{\sqrt{9\,\pi}} x^3\,\cos(x^2) = \frac{x^2\,\sin(x^2)+\cos(x^2)}{2}\Big|_0^{\sqrt{9\,\pi}} = \frac{\cos(9\,\pi)-\cos(0)}{2} = -1\,.$$

b12) Ricordiamo che se $P(x)$ è un polinomio, si ha

$$\int P(x)\,\mathrm{e}^x\,dx = Q(x)\,\mathrm{e}^x\,,$$

dove $Q(x)$ è un polinomio dello stesso grado di $P(x)$ e tale che

$$P(x) = Q(x) + Q'(x)\,.$$

Considerando un generico polinomio di secondo grado $Q(x) = a\,x^2 + b\,x + c$, si ha dunque

$$Q(x) + Q'(x) = x^2 + (2a+b)\,x + (b+c) = x^2 + 2x - 9\,,$$

da cui si deduce che deve essere $a = 1$, $2a + b = 2$ e $b + c = -9$; da queste tre equazioni si ricava facilmente che $a = 1$, $b = 0$ e $c = -9$, cosicché si ha

$$\int (x^2+2x-9)\,\mathrm{e}^x\,dx = (x^2-9)\,\mathrm{e}^x\,.$$

Se ne deduce che

$$\int_0^3 (x^2+2x-9)\,\mathrm{e}^x\,dx = (x^2-9)\,\mathrm{e}^x\Big|_0^3 = 9\,.$$

c12) Iniziamo a scrivere

$$\cos^3(x) = \cos^2(x)\,\cos(x) = (1-\sin^2(x))\,\cos(x)\,,$$

cosicché si tratta di calcolare

$$\int (1-\sin^2(x))\,\cos(x)\,dx\,.$$

Con la sostituzione $y = \sin(x)$, da cui $dy = \cos(x)\,dx$, si ha

$$\int (1-\sin^2(x))\,\cos(x)\,dx = \int (1-y^2)\,dy = y - \frac{y^3}{3} = \sin(x) - \frac{\sin^3(x)}{3}\,.$$

Se ne deduce che

$$\int_0^{\frac{13}{2}\,\pi} \cos^3(x)\,dx = \Big[\sin(x) - \frac{\sin^3(x)}{3}\Big]\Big|_0^{\frac{13}{2}\,\pi} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}\,.$$

d12) Integrando per parti (derivando il logaritmo e integrando il polinomio) si ha

$$\begin{aligned}\int \frac{4x-6}{6}\ln(x)\,dx &= \frac{2x^2-6\,x}{6}\ln(x)-\int \frac{2x^2-6\,x}{6}\,\frac{1}{x}\,dx = \frac{2x^2-6\,x}{6}\ln(x)-\int \frac{2x-6}{6}\,dx \\ &= \frac{2x^2-6\,x}{6}\ln(x)-\frac{x^2-6\,x}{6}\,.\end{aligned}$$

Ne segue che

$$\int_1^6 \frac{4x-6}{6}\ln(x)\,dx = \Big[\frac{2x^2-6\,x}{6}\ln(x)-\frac{x^2-6\,x}{6}\Big]\Big|_1^6 = 6\,\ln(6)-0-0+\frac{1-6}{6} = 6\,\ln(6)-\frac{5}{6}\,.$$