Soluzioni del compito 00016

1) Sia
$$F(t) = \int_{-6}^{t} [6\,\mathrm{e}^{2\,|x|} + \sin(5\,x)]\,dx\,.$$

1A) La funzione $F(t)$ non è derivabile per qualche t in $\mathbb{R}$.

Falso: Dato che la funzione $f(x) = 6\,\mathrm{e}^{2\,|x|} - \sin(5\,x)$ è continua su $\mathbb{R}$, per il teorema fondamentale del calcolo integrale la funzione $F(t)$ è derivabile per ogni t in $\mathbb{R}$, e si ha $F'(t) = f(t)$ per ogni t.

1B) Si ha $F(-6) = 0$.

Vero: Si ha
$$F(-6) = \int_{-6}^{-6} [6\,\mathrm{e}^{2\,|x|} + \sin(5\,x)]\,dx = 0\,,$$
dato che gli estremi di integrazione coincidono.

1C) La funzione $F(t)$ è strettamente crescente su $\mathbb{R}$.

Vero: Si ha
$$F'(t) = 6\,\mathrm{e}^{2\,|t|} + \sin(5\,t) \geq 6 \cdot 1 - 1 = 5 > 0\,,$$
dato che $\mathrm{e}^{2\,|t|} \geq 1$ e che $\sin(5\,t) \geq -1$. Dato che la derivata di $F(t)$ è strettamente positiva per ogni t, $F(t)$ è strettamente crescente su $\mathbb{R}$.

1D) Si ha $F(-12) > 0$.

Falso: Ricordando (si veda l'esercizio **1C**) che la funzione $F(t)$ è strettamente crescente, e che $F(-6) = 0$ (si veda l'esercizio **1B**), si ha
$$F(-12) < F(-6) = 0\,.$$

---

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

2A)

$$\int_0^1 (4x^3 - 18x^2 - 2x + 6)\, dx \neq 0\,.$$

Falso: Si ha

$$\int_0^1 (4x^3 - 18x^2 - 2x + 6)\, dx = (x^4 - 6x^3 - x^2 + 6x)\Big|_0^1 = 1 - 6 - 1 + 6 = 0\,.$$

2B)

$$\int_0^\pi x\, \cos(6\,x)\, dx = 0\,.$$

Vero: Si ha, integrando per parti (derivando x e integrando $\cos(6\,x)$),

$$\int x\, \cos(6\,x)\, dx = \frac{x\, \sin(6\,x)}{6} - \frac{1}{6}\int \sin(6\,x)\, dx = \frac{x\, \sin(6\,x)}{6} + \frac{\cos(6\,x)}{36} + c\,,$$

dove si è usato che una primitiva di $\cos(6\,x)$ è $\sin(6\,x)/6$, e che una primitiva di $\sin(6\,x)$ è $-\cos(6\,x)/6$. Pertanto,

$$\int_0^\pi x\, \cos(6\,x)\, dx = \frac{x\, \sin(6\,x)}{6} + \frac{\cos(6\,x)}{36}\Big|_0^\pi = \frac{\pi\, \sin(6\,\pi)}{6} + \frac{\cos(6\,\pi)}{36} - \frac{0\cdot \sin(0)}{6} - \frac{\cos(0)}{36} = 0\,,$$

dato che $\sin(6\,\pi) = 0$ e che $\cos(6\,\pi) = 1$.

2C)

$$\int_0^2 \mathrm{e}^{5\,x}\, dx = 5\,(\mathrm{e}^{10} - 1)\,.$$

Falso: Dato che

$$\int \mathrm{e}^{5\,x}\, dx = \frac{\mathrm{e}^{5\,x}}{5} + c\,,$$

si ha

$$\int_0^2 \mathrm{e}^{5\,x}\, dx = \frac{\mathrm{e}^{5\,x}}{5}\Big|_0^2 = \frac{\mathrm{e}^{10} - 1}{5} \neq 5\,(\mathrm{e}^{10} - 1)\,.$$

2D)

$$\int_0^1 \frac{24\,x^2 + 16\,x}{5 + x^2 + x^3}\, dx = 8\, \log\left(\frac{5}{7}\right).$$

Falso: Si ha

$$\frac{24\,x^2 + 16\,x}{5 + x^2 + x^3} = 8\,\frac{3x^3 + 2x}{5 + x^2 + x^3} = 8\,\frac{(5 + x^2 + x^3)'}{5 + x^2 + x^3}\,.$$

Pertanto,

$$\int_0^1 \frac{24\,x^2 + 16\,x}{5 + x^2 + x^3}\, dx = 8\, \log(|5 + x^2 + x^3|)\Big|_0^1 = 8\,(\log(7) - \log(5)) = 8\, \log\left(\frac{7}{5}\right) \neq 8\, \log\left(\frac{5}{7}\right).$$

Alternativamente, si poteva osservare che, essendo la funzione integranda positiva su $[0, 1]$, l'integrale non poteva essere negativo.

---

3) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

3A)

$$\int_{-3}^{3} [x\,\mathrm{e}^{5\,x^4} + x\,|x|^9]\,dx = 0\,.$$

Vero: Dato che la funzione integranda è dispari, e che l'intervallo di integrazione è simmetrico rispetto all'origine, l'integrale vale zero.

3B)

$$\int_{-3}^{3} [9\,\cos^2(x) + 2\,x^6]\,dx > 0\,.$$

Vero: L'integrale è positivo perché la funzione integranda è positiva.

3C)

$$\int_{-10}^{9} [x^5 + \sin(5\,x)]\,dx > 0\,.$$

Falso: Dato che la funzione è dispari, il suo integrale sull'intervallo $[-9, 9]$ è nullo. Pertanto,

$$\int_{-10}^{9} [x^5 + \sin(5\,x)]\,dx = \int_{-10}^{-9} [x^5 + \sin(5\,x)]\,dx\,.$$

Quest'ultimo integrale è negativo perché la funzione integranda è negativa. Infatti, su tutto l'intervallo si ha

$$x^5 + \sin(5\,x) \le -9^5 + 1 < -9 + 1 = -8 < 0\,.$$

3D)

$$\int_{-5}^{7} [\mathrm{e}^{8\,x^2} - \cos^2(4\,x)]\,dx < 0\,.$$

Falso: Dato che si ha, sull'intervallo $[-5, 7]$,

$$\mathrm{e}^{8\,x^2} - \cos^2(4\,x) \ge \mathrm{e}^0 - 1 = 0\,,$$

la funzione integranda è positiva e quindi l'integrale è positivo.

---

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

4A)

$$\int_9^{10} \frac{dx}{x-8} = 3 \int_{11}^{14} \frac{dx}{x-8}\,.$$

Falso: Si ha

$$\int \frac{dx}{x-8} = \log(|x-8|) + c\,.$$

Pertanto,

$$\int_9^{10} \frac{dx}{x-8} = \log(|x-8|)\Big|_9^{10} = \log(2) - \log(1) = \log(2)\,,$$

e

$$\int_{11}^{14} \frac{dx}{x-8} = \log(|x-8|)\Big|_{11}^{14} = \log(6) - \log(3) = \log(2)\,,$$

e quindi i due integrali sono uguali.

4B)

$$\int_0^{2} \frac{dx}{(9\,x-36)^2} = \frac{1}{324}\,.$$

Vero: Si ha

$$\int \frac{dx}{(9\,x-36)^2} = \frac{1}{81} \int \frac{dx}{(x-4)^2} = \frac{1}{81}\,\frac{1}{4-x} + c\,.$$

Pertanto,

$$\int_0^{2} \frac{dx}{(9\,x-36)^2} = \frac{1}{81}\left(\frac{1}{4-2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{81}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{324}\,.$$

4C)

$$\int_8^{9} \frac{dx}{x^2-13x+42} = \log\left(\frac{3}{4}\right).$$

Falso: Si ha

$$x^2 - 13x + 42 = (x-7)\,(x-6)\,,$$

e quindi

$$\int \frac{dx}{x^2-13x+42} = \frac{1}{7-6}\,\log\left(\left|\frac{x-7}{x-6}\right|\right) + c = \log\left(\left|\frac{x-7}{x-6}\right|\right) + c\,.$$

Pertanto,

$$\int_8^{9} \frac{dx}{x^2-13x+42} = \log\left(\left|\frac{x-7}{x-6}\right|\right)\Big|_8^9 = \log\left(\frac{2}{3}\right) - \log\left(\frac{1}{2}\right) = \log\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{1}\right) = \log\left(\frac{4}{3}\right) \neq \log\left(\frac{3}{4}\right).$$

4D)

$$\int_6^{8} \frac{dx}{x^2-12x+40} = \frac{\pi}{8}\,.$$

Vero: Si ha

$$x^2 - 12x + 40 = (x^2 - 12\,x + 36) + 4 = (x-6)^2 + 4 = 4\left[\left(\frac{x-6}{2}\right)^2 + 1\right].$$

Pertanto,

$$\int \frac{dx}{x^2-12x+40} = \frac{1}{4} \int \frac{dx}{1 + \left(\frac{x-6}{2}\right)^2}\,.$$

Con la sostituzione $y = \frac{x-6}{2}$, da cui $dx = 2\,dy$, si ha

$$\int \frac{dx}{x^2 - 12x + 40} = \frac{1}{2} \int \frac{dy}{1+y^2} = \frac{1}{2}\,\arctan(y) + c = \frac{1}{2}\,\arctan\left(\frac{x-6}{2}\right) + c\,.$$

Pertanto,

$$\int_6^8 \frac{dx}{x^2 - 12x + 40} = \frac{1}{2}\,\arctan\left(\frac{x-6}{2}\right)\Big|_6^8 = \frac{1}{2}\,(\arctan(1) - \arctan(0)) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}\,.$$

---

5) Determinare una primitiva delle funzioni $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ e $k(x)$, e calcolare gli integrali.

$$\textbf{a)}\ f(x) = x^2\,\log(x)\,, \qquad \int_1^{e^3} f(x)\,dx\,, \qquad \textbf{b)}\ g(x) = x^2\,\cos(7\,x^3)\,, \qquad \int_0^{\sqrt[3]{4\,\pi}} g(x)\,dx\,,$$

$$\textbf{c)}\ h(x) = (5x^2 - 18x + 16)\,e^{5\,x}\,, \qquad \int_1^3 h(x)\,dx\,, \qquad \textbf{d)}\ k(x) = \frac{12\,x}{1 + 36\,x^4}\,, \qquad \int_0^{1/\sqrt{6}} k(x)\,dx\,.$$

Soluzione:

a) Integriamo per parti, derivando $\log(x)$ e integrando x^2. Si ha

$$\int x^2\,\log(x)\,dx = \frac{x^3\,\log(x)}{3} - \int \frac{x^3}{3}\,\frac{1}{x}\,dx = \frac{x^3\,\log(x)}{3} - \frac{x^3}{9} + c = \frac{x^3}{9}(3\,\log(x) - 1) + c\,.$$

Pertanto,

$$\int_1^{e^3} f(x)\,dx = \frac{x^3}{9}(3\,\log(x) - 1)\Big|_1^{e^3} = \frac{e^9}{9}\,(3\,\log(e^3) - 1) + \frac{1}{9} = \frac{8}{9}\,e^9 + \frac{1}{9}\,.$$

b) Si ha, con la sostituzione $y = 7\,x^3$, da cui $x^2\,dx = dy/21$,

$$\int x^2\,\cos(7\,x^3)\,dx = \frac{1}{21}\int \cos(y)\,dy = \frac{\sin(y)}{21} + c = \frac{\sin(7\,x^3)}{21} + c\,.$$

Pertanto,

$$\int_0^{\sqrt[3]{4\,\pi}} g(x)\,dx = \frac{\sin(7\,x^3)}{21}\Big|_0^{\sqrt[3]{4\,\pi}} = \frac{\sin(28\,\pi) - \sin(0)}{21} = 0\,.$$

c) Ricordiamo che se $P_2(x)$ è un polinomio di grado 2, allora

$$\int P_2(x)\,e^{5\,x}\,dx = Q_2(x)\,e^{5\,x} + c\,,$$

dove $Q_2(x)$ è un polinomio di grado 2 tale che

$$5\,Q_2(x) + Q_2'(x) = P_2(x)\,.$$

Scrivendo il generico polinomio di grado 2 come $Q_2(x) = a\,x^2 + b\,x + c$, si ha

$$5\,Q_2(x) + Q_2'(x) = 5\,a\,x^2 + (5\,b + 2a)\,x + 5\,c + b\,.$$

Imponendo l'uguaglianza

$$5\,a\,x^2 + (5\,b + 2a)\,x + 5\,c + b = 5x^2 - 18x + 16\,,$$

si ha che deve essere $5\,a = 5$, $5\,b + 2a = -18$ e $5\,c + b = 16$. Risolvendo il sistema, si trova $a = 1$, $b = -4$ e $c = 4$. Pertanto,

$$\int (5x^2 - 18x + 16)\,e^{5\,x}\,dx = (x^2 - 4\,x + 4)\,e^{5\,x} = (x - 2)^2\,e^{5\,x} + c\,,$$

e quindi

$$\int_1^3 h(x)\,dx = (x - 2)^2\,e^{5\,x}\Big|_1^3 = e^{15} - e^5\,.$$

d) Si ha, con la sostituzione $y = 6\,x^2$, da cui $36\,x^4 = y^2$ e $dy = 12\,x\,dx$,

$$\int \frac{12\,x}{1 + 36\,x^4}\,dx = \int \frac{dy}{1 + y^2} = \arctan(y) + c = \arctan(6\,x^2) + c\,.$$

Pertanto,

$$\int_0^{1/\sqrt{6}} k(x)\,dx = \arctan(6\,x^2)\Big|_0^{1/\sqrt{6}} = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4}\,.$$

6) Sia

$$F(t) = \int_6^t [7\,\mathrm{e}^{x^2} + \arctan(8\,|x|)]\,dx\,.$$

a) Dimostrare che $F(t)$ è derivabile per ogni t in $\mathbb{R}$.
b) Calcolare $F(6)$ e $F'(0)$.
c) Dimostrare che $F(t)$ è crescente, e non è né pari né dispari.
d) Dimostrare che

$$\lim_{t\to+\infty} F(t) = +\infty\,.$$

Soluzione:
a) Dato che la funzione $f(x) = 7\,\mathrm{e}^{x^2} + \arctan(8\,|x|)$ è una funzione continua, per il teorema fondamentale del calcolo integrale la funzione $F(t)$ è derivabile per ogni t in $\mathbb{R}$, e si ha

(1) $$F'(t) = f(t) = 7\,\mathrm{e}^{t^2} + \arctan(8\,|t|)\,, \qquad \forall t \in \mathbb{R}\,.$$

b) Si ha

$$F(6) = \int_6^6 [7\,\mathrm{e}^{x^2} + \arctan(8\,|x|)]\,dx = 0\,,$$

e, dalla (1),

$$F'(0) = f(0) = 7\,.$$

c) Sempre dalla (1) si ha

$$F'(t) \geq 7 > 0\,,$$

e quindi $F(t)$ è strettamente crescente. Per quanto riguarda la parità e disparità, osserviamo che si ha

$$F(6) = 0\,.$$

Inoltre, dato che $F(t)$ è strettamente crescente, si ha

$$F(-6) < F(6) = 0\,,$$

e quindi $F(-6) \neq F(6)$ (cosicché $F(t)$ non è pari), e $F(-6) \neq -F(6)$ (cosicché $F(t)$ non è dispari).

d) Osserviamo innanzitutto che il limite di $F(t)$ esiste perché $F(t)$ è crescente. Inoltre, dato che

$$7\,\mathrm{e}^{x^2} + \arctan(8\,|x|) \geq 7\,,$$

si ha, se $t \geq 6$,

$$F(t) = \int_6^t [7\,\mathrm{e}^{x^2} + \arctan(8\,|x|)]\,dx \geq \int_6^t 7\,dx = 7\,(t-6)\,,$$

da cui segue che

$$\lim_{t\to+\infty} F(t) \geq \lim_{t\to+\infty} 7\,(t-6) = +\infty\,.$$