Soluzioni del compito 00056

1) Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(t) - 9\,y'(t) + 10\,y(t) = 0\,. \tag{1}$$

1A) L'equazione (1) ha una sola soluzione costante.

Vero: Se $y(t) = Q$, con Q in $\mathbb{R}$, si ha $y'(t) = y''(t) = 0$; si ha pertanto che $y(t) = Q$ è soluzione se e solo se

$$y''(t) - 9\,y'(t) + 10\,y(t) = 10\,Q = 0\,,$$

ovvero se e solo se $Q = 0$. Ne segue che l'unica soluzione costante è la soluzione nulla.

1B) L'equazione (1) ha infinite soluzioni tali che $y(0) = 2$.

Vero: In generale, l'equazione (1) ha infinite soluzioni dipendenti da **due** parametri reali. Assegnando una sola condizione, si "fissa" uno solo dei due parametri (o, meglio, si fissa una relazione lineare tra i due parametri), lasciando libero l'altro; pertanto, esistono infinite soluzioni di (1) tali che $y(0) = 2$.

1C) Esiste un'unica soluzione di (1) tale che $y(0) = 9$, $y'(0) = 10$ e $y''(0) = 0$.

Vero: Assegnando le condizioni $y(0) = 9$ e $y'(0) = 10$ si ottiene un problema di Cauchy, che ha un'unica soluzione. Per tale soluzione si ha, sostituendo $t = 0$ nell'equazione, che

$$y''(0) = 9\,y'(0) - 10\,y(0) = 9 \cdot 10 - 10 \cdot 9 = 0\,.$$

In altre parole, l'unica soluzione di (1) tale che $y(0) = 9$ e $y'(0) = 10$ verifica anche la condizione $y''(0) = 0$. Ne segue quindi che il problema proposto ha un'unica soluzione.

1D) Se $y(0) = 0$ e $y'(0) = 4$, si ha $T_2(y(t); 0) = 4\,t + 18\,t^2$.

Vero: Assegnando le condizioni $y(0) = 0$ e $y'(0) = 4$ si trova un'unica soluzione; sostituendo $t = 0$ nell'equazione, si ha

$$y''(0) = 9\,y'(0) - 10\,y(0) = 9 \cdot 4 - 10 \cdot 0 = 36\,.$$

Pertanto, si ha

$$T_2(y(t); 0) = y(0) + y'(0)\,t + \frac{y''(0)}{2}\,t^2 = 0 + 4\,t + \frac{36}{2}\,t^2 = 4\,t + 18\,t^2\,.$$

---

2) Si consideri l'equazione differenziale

(1) $$y'(t) = \mathrm{e}^{9\,t}\,\cos(y(t))\,.$$

L'equazione (1) è a variabili separabili, essendo della forma

$$y'(t) = f(t)\,g(y(t))\,,$$

con

(2) $$f(t) = \mathrm{e}^{9\,t}\,, \qquad g(s) = \cos(s)\,.$$

2A) L'equazione (1) ha soluzioni costanti.

Vero: Essendo l'equazione a variabili separabili, se y_0 è tale che $\cos(y_0) = 0$, allora $y(t) \equiv y_0$ è una soluzione costante di (1). Dato che

$$\cos(\pi/2 + k\,\pi) = 0\,, \qquad \forall k \in \mathbb{Z}\,,$$

l'equazione (1) ammette infinite soluzioni costanti date da

$$y_k(t) = \frac{\pi}{2} + k\,\pi\,, \qquad k \in \mathbb{Z}\,.$$

2B) Se $y(0) = 4\,\pi$, si ha $y'(0) = 0$.

Falso: Se $y(0) = 4\,\pi$ si ha, sostituendo $t = 0$ nell'equazione,

$$y'(0) = \mathrm{e}^{9\cdot 0}\,\cos(4\,\pi) = 1 \cdot 1 = 1 \neq 0\,.$$

2C) Non esistono soluzioni di (1) tali che $y'(0) = 0$.

Falso: Assegnando la condizione $y_0 = \frac{\pi}{2} + k\,\pi$, con k in $\mathbb{Z}$, si trova una soluzione $y_k(t)$ per la quale si ha

$$y_k'(0) = \mathrm{e}^{9\cdot 0}\,\cos(y_k(0)) = 1 \cdot \cos(\pi/2 + k\,\pi) = 1 \cdot 0 = 0\,.$$

Ne segue che esistono infinite soluzioni (dato che le $y_k(t)$ sono tutte diverse tra loro) tali che $y'(0) = 0$. Si noti che, per quanto detto nell'esercizio **2A**, e per l'unicità della soluzione, si ha

$$y_k(t) = \frac{\pi}{2} + k\,\pi\,, \qquad \forall k \in \mathbb{Z}\,.$$

2D) Se $y(0) = 0$, la soluzione di (1) è concava in un intorno dell'origine.

Falso: Se $y(t)$ è la soluzione di (1) tale che $y(0) = 0$, si ha, derivando l'equazione, che

$$y''(t) = [\mathrm{e}^{9\,t}\,\cos(y(t))]' = 9\,\mathrm{e}^{9\,t}\,\cos(y(t)) - \mathrm{e}^{9\,t}\,\sin(y(t))\,y'(t)\,.$$

Sostituendo $t = 0$ in tale identità, si ha (si noti che dato che $\sin(y(0)) = \sin(0) = 0$, non è necessario il calcolo di $y'(0)$)

$$y''(0) = 9\,\mathrm{e}^{9\cdot 0}\,\cos(y(0)) - \mathrm{e}^{9\cdot 0}\,\sin(y(0))\,y'(0) = 9 > 0\,.$$

Dato che $y''(0) > 0$, per il teorema della permanenza del segno si ha $y''(t) \geq 0$ in un intorno dell'origine, e quindi $y(t)$ è convessa in tale intorno.

---

3) Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(t) = 2\,(1 + y^2(t))\,\mathrm{e}^{-2\,t}\,. \tag{1}$$

L'equazione è a variabili separabili, della forma

$$y'(t) = f(t)\,g(y(t))\,,$$

con

$$f(t) = 2\,\mathrm{e}^{-2\,t}\,, \qquad g(s) = 1 + s^2\,.$$

Dato che $g(s) \neq 0$ per ogni s in $\mathbb{R}$, l'equazione non ha soluzioni costanti. Dividendo per $1 + y^2(t)$ si ha

$$\frac{y'(t)}{1 + y^2(t)} = 2\,\mathrm{e}^{-2\,t}\,.$$

Integrando tra 0 e s si ha

$$\int_0^s \frac{y'(t)}{1 + y^2(t)}\,dt = \int_0^s 2\,\mathrm{e}^{-2\,t}\,dt = -\mathrm{e}^{-2\,t}\Big|_0^s = 1 - \mathrm{e}^{-2\,s}\,.$$

Per il primo integrale si ha, con la sostituzione $z = y(t)$, da cui $y'(t)\,dt = dz$,

$$\int_0^s \frac{y'(t)}{1 + y^2(t)}\,dt = \int_{y(0)}^{y(s)} \frac{dz}{1 + z^2} = \mathrm{arc\,tg}(z)\Big|_{y(0)}^{y(s)} = \mathrm{arc\,tg}(y(s)) - \mathrm{arc\,tg}(y(0))\,.$$

Si ha dunque che la soluzione di (1), con dato iniziale $y(0) = y_0$ è data in forma implicita da

$$\mathrm{arc\,tg}(y(s)) - \mathrm{arc\,tg}(y_0) = 1 - \mathrm{e}^{-2\,s}\,,$$

da cui segue, esplicitando,

$$y(t) = \mathrm{tg}(1 - \mathrm{e}^{-2\,t} + \mathrm{arc\,tg}(y_0))\,. \tag{2}$$

3A) L'equazione (1) non ammette soluzioni costanti.

Vero: La funzione $g(s) = 1 + s^2$ è sempre diversa da zero, e quindi l'equazione non ammette soluzioni costanti.

3B) La soluzione di (1) tale che $y(0) = 0$ è decrescente in un intorno dell'origine.

Falso: Se $y(0) = 0$ si ha, sostituendo $t = 0$ nell'equazione,

$$y'(0) = 2\,(1 + y^2(0))\,\mathrm{e}^{-2\cdot 0} = 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2 > 0\,.$$

Dato che $y'(0) > 0$, per il teorema della permanenza del segno si ha $y'(t) \geq 0$ in un intorno dell'origine, e quindi $y(t)$ è crescente in tale intorno.
Alternativamente, dato che

$$2\,(1 + y^2(t))\,\mathrm{e}^{-2\,t} \geq 0\,,$$

si ha $y'(t) \geq 0$ per ogni t, cosicché *tutte* le soluzioni sono crescenti (a prescindere dalla condizione iniziale).

3C) La soluzione di (1) tale che $y(0) = 0$ è $y(t) = \mathrm{tg}(1 - \mathrm{e}^{-2\,t})$.

Vero: Dalla (2), dato che $\mathrm{arc\,tg}(y_0) = \mathrm{arc\,tg}(0) = 0$, si ha che la soluzione di (1) tale che $y(0) = 0$ è data da

$$y(t) = \mathrm{tg}(1 - \mathrm{e}^{-2\,t})\,.$$

3D) Se $y(t)$ è la soluzione di (1) tale che $y(0) = 0$, si ha

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = 0\,.$$

Falso: Dalla (2), dato che $\operatorname{arc\,tg}(y_0) = \operatorname{arc\,tg}(0) = 0$, si ha che la soluzione di (1) tale che $y(0) = 0$ è data da

$$y(t) = \operatorname{tg}(1 - \mathrm{e}^{-2\,t})\,,$$

e quindi

$$\lim_{t \to +\infty} y(t) = \lim_{t \to +\infty} \operatorname{tg}(1 - \mathrm{e}^{-2\,t}) = \operatorname{tg}(1) \neq 0\,.$$

4) Si consideri l'equazione differenziale

(1) $$y''(t) + A\,y'(t) + B\,y(t) = 6\,.$$

4A) Se $A = B = 0$, i polinomi di primo grado sono soluzioni di (1).

Falso: Se $A = B = 0$, l'equazione (1) diventa $y''(t) = 6$. Se $y(t) = a\,t + b$ è un polinomio di primo grado, si ha $y'(t) = a$, e quindi $y''(t) = 0 \neq 6$. Ne segue che i polinomi di primo grado non sono soluzioni di (1). Si vede facilmente che le soluzioni di (1) sono del tipo

$$y(t) = 3\,t^2 + a\,t + b\,,$$

con a e b in $\mathbb{R}$.

4B) Se $A = 8$ e $B = 42$, esiste almeno una soluzione costante di (1).

Vero: Se $A = 8$ e $B = 42$, l'equazione (1) diventa

$$y''(t) + 8\,y'(t) + 42\,y(t) = 6\,.$$

Se $y(t) = Q$, con Q in $\mathbb{R}$, si ha $y'(t) = y''(t) = 0$, e quindi $y(t)$ è soluzione di (1) se e solo se

$$42\,Q = 6 \qquad \Longleftrightarrow \qquad Q = \frac{1}{7}\,,$$

da cui segue che $y(t) \equiv \frac{1}{7}$ è una soluzione costante di (1).

4C) Se $A = 0$ e $B = -49$, $y(t) = 9\,t\,\mathrm{e}^{7\,t}$ non è soluzione dell'equazione omogenea associata a (1).

Vero: Se $A = 0$ e $B = -49$, l'equazione omogenea associata a (1) è

(2) $$y_0''(t) - 49\,y_0(t) = 0\,,$$

il cui polinomio caratteristico è

$$P(L) = L^2 - 49 = 0\,.$$

Risolvendo l'equazione $P(L) = 0$ si trova $L_{1,2} = \pm 7$, e quindi tutte (e sole) le soluzioni di (2) sono date da

$$y_0(t) = C\,\mathrm{e}^{7\,t} + D\,\mathrm{e}^{-7\,t}\,,$$

con C e D numeri reali. Dato che non esiste alcun valore di C e D tale che $y_0(t) = 9\,t\,\mathrm{e}^{7\,t}$ per ogni t, ne segue che tale funzione non è soluzione dell'equazione omogenea associata a (1).

4D) Se $A = 3$ e $B = 0$, la funzione $y(t) = 2\,t$ è soluzione di (1).

Vero: Se $A = 3$ e $B = 0$, l'equazione (1) diventa

$$y''(t) + 3\,y'(t) = 6\,.$$

Se $y(t) = 2\,t$, si ha $y'(t) = 2$ e $y''(t) = 0$. Pertanto,

$$y''(t) + 3\,y'(t) = 0 + 3 \cdot 2 = 6\,,$$

e quindi $y(t) = 2\,t$ è soluzione di (1).

---

5) Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(t) = 10\,t\,y(t) + \cos(t)\,e^{5\,t^2}\,. \tag{1}$$

a) Quante soluzioni ha (1)? E quante, con la condizione iniziale $y(8) = 4$?
b) Scrivere tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata a (1).
c) Calcolare $y''(0)$, dove $y(t)$ è la soluzione di (1) tale che $y(0) = 6$.
d) Calcolare la soluzione di (1) tale che $y(0) = 0$.

Soluzione:
a) Rispettivamente, infinite (dipendenti da un parametro reale) e una sola (perché, assegnando la condizione iniziale, si ottiene un problema di Cauchy).

b) L'equazione omogenea associata a (1) è

$$y_0'(t) = 10\,t\,y_0(t)\,. \tag{2}$$

In generale, tutte le soluzioni dell'equazione

$$y_0'(t) = a(t)\,y_0(t)\,,$$

sono date da

$$y_0(t) = C\,e^{A(t)}\,, \quad \text{dove} \quad A(t) = \int^t a(s)\,ds\,,$$

e C è un numero reale. Nel nostro caso, $a(t) = 10\,t$, da cui segue $A(t) = 5\,t^2$ e quindi tutte le soluzioni di (2) sono date da

$$y_0(t) = C\,e^{5\,t^2}\,,$$

con C numero reale.

c) Se $y(t)$ è la soluzione di (1) tale che $y(0) = 6$, si ha, dall'equazione,

$$y'(0) = 10 \cdot 0 \cdot y(0) + \cos(0)\,e^{5\cdot 0^2} = 1\,.$$

Derivando l'equazione, si ha poi

$$y''(t) = 10\,y(t) + 10\,t\,y'(t) - \sin(t)\,e^{5\,t^2} + 10\,t\,\cos(t)\,e^{5\,t^2}\,,$$

da cui segue che

$$y''(0) = 10 \cdot y(0) + 0 - 0 + 0 = 10 \cdot 6 = 60\,.$$

d) Ricordiamo che la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = a(t)\,y(t) + b(t)\,, \\ y(0) = y_0\,, \end{cases}$$

è data da

$$y(t) = e^{A(t)}\left[y_0 + \int_0^t b(s)\,e^{-A(s)}\,ds\right], \quad \text{dove} \quad A(t) = \int_0^t a(s)\,ds\,.$$

Nel nostro caso, $a(t) = 10\,t$, da cui segue $A(t) = 5\,t^2$, e $y_0 = 0$. Pertanto, l'unica soluzione di (1) tale che $y(0) = 0$ è data da

$$y(t) = e^{5\,t^2}\left[\int_0^t \cos(s)\,e^{5\,s^2}\,e^{-5\,s^2}\,ds\right] = e^{5\,t^2}\left[\int_0^t \cos(s)\,ds\right] = \sin(t)\,e^{5\,t^2}\,.$$

6) Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(t) - 16\,y'(t) + 48\,y(t) = 16\,\mathrm{e}^{8\,t}\,. \tag{1}$$

a) Quante soluzioni di (1) soddisfano la condizione $y(0) = 9$? E quante anche la condizione $y'(0) = 12$?
b) Scrivere tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata a (1).
c) Scrivere una soluzione particolare di (1) e scrivere tutte le soluzioni di (1).
d) Determinare la soluzione di (1) tale che $y(0) = 0$ e $y'(0) = 4$.

Soluzione:
a) Assegnando la sola condizione iniziale $y(0) = 9$ all'equazione (1), che è del secondo ordine, si ottengono infinite soluzioni, dipendenti da un parametro reale. Assegnando anche la condizione $y'(0) = 12$, si ottiene un problema di Cauchy, che ha una e una sola soluzione.

b) L'equazione omogenea associata a (1) è

$$y_0''(t) - 16\,y_0'(t) + 48\,y_0(t) = 0\,, \tag{2}$$

il cui polinomio caratteristico è

$$P(L) = L^2 - 16L + 48\,.$$

Risolvendo l'equazione $P(L) = 0$ si trova $L_1 = 4$ e $L_2 = 12$. Pertanto, tutte le soluzioni di (2) sono date da

$$y_0(t) = C\,\mathrm{e}^{4\,t} + D\,\mathrm{e}^{12\,t}\,, \tag{3}$$

con C e D numeri reali.

c) Dato che $\mathrm{e}^{8\,t}$ non è soluzione dell'equazione omogenea associata a (1), cerchiamo una soluzione particolare di (1) nella forma

$$\overline{y}(t) = Q\,\mathrm{e}^{8\,t}\,,$$

con Q numero reale. Dato che

$$\overline{y}'(t) = 8\,Q\,\mathrm{e}^{8\,t}\,, \qquad \overline{y}''(t) = 64\,Q\,\mathrm{e}^{8\,t}\,,$$

si ha

$$\overline{y}''(t) - 16\,\overline{y}'(t) + 48\,\overline{y}(t) = [64 - 16 \cdot 8 + 48]\,Q\,\mathrm{e}^{8\,t} = -16\,Q\,\mathrm{e}^{8\,t}\,.$$

Pertanto, $\overline{y}(t)$ è soluzione di (1) se e solo se Q è tale che

$$-16\,Q\,\mathrm{e}^{8\,t} = 16\,\mathrm{e}^{8\,t}\,,$$

ovvero se $Q = -1$. Ne segue che una soluzione particolare di (1) è data da

$$\overline{y}(t) = -\mathrm{e}^{8\,t}\,.$$

Pertanto, ricordando la (3), tutte le soluzioni di (1) sono date da

$$y(t) = y_0(t) + \overline{y}(t) = C\,\mathrm{e}^{4\,t} + D\,\mathrm{e}^{12\,t} - \mathrm{e}^{8\,t}\,, \tag{4}$$

con C e D numeri reali.

d) Dalla (4) si ha, derivando,

$$y'(t) = 4\,C\,\mathrm{e}^{4\,t} + 12\,D\,\mathrm{e}^{12\,t} - 8\,\mathrm{e}^{8\,t}\,.$$

Pertanto,

$$y(0) = C + D - 1\,, \qquad y'(0) = 4\,C + 12\,D - 8\,.$$

Imponendo le condizioni $y(0) = 0$ e $y'(0) = 4$ si ottiene il sistema

$$C + D - 1 = 0\,, \qquad 4\,C + 12\,D - 8 = 4\,,$$

le cui soluzioni sono $C = 0$ e $D = 1$. Ne segue che l'unica soluzione di (1) che soddisfa le condizioni $y(0) = 0$ e $y'(0) = 4$ è

$$y(t) = \mathrm{e}^{12\,t} - \mathrm{e}^{8\,t}\,.$$