**Calcolo integrale — Scheda di esercizi n. 6**
**21 Aprile 2023 — Compito n. 00129**

---

**Istruzioni**: le prime due caselle (**V** / **F**) permettono di selezionare la risposta vero/falso. La casella "**C**" serve a correggere eventuali errori invertendo la risposta data.
Per selezionare una casella, annerirla completamente: ■ (non ☒ o ☑).

**Nome:** ____________________

**Cognome:** ____________________

**Matricola:** | | | | | | | |

**Punteggi**: 1 punto per ogni risposta esatta, 0 punti per risposte sbagliate o lasciate in bianco.

| | 1A | 1B | 1C | 1D | 2A | 2B | 2C | 2D | 3A | 3B | 3C | 3D | 4A | 4B | 4C | 4D |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **V** | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ |
| **F** | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ |
| **C** | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ |

**1)** Sia

$$F(t) = \int_{-5}^{t} [\cos^2(4\,x^2) + 4\,x^2]\,dx\,.$$

**1A)** Si ha $F(0) > 0$.
**1B)** La funzione $F(t)$ è crescente su $\mathbb{R}$.
**1C)** La funzione $F(t)$ è una funzione dispari.
**1D)** Si ha

$$\lim_{t\to+\infty} F(t) = +\infty\,.$$

---

**2)** Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false

**2A)**

$$\int_{-6}^{6} [x^9 + \sin(5\,x)]\,dx = 0\,.$$

**2B)**

$$\int_{-5}^{5} [x^2 + x^9]\,dx = 0\,.$$

**2C)**

$$\int_{5}^{7} \frac{dx}{x-3} = \int_{15}^{27} \frac{dx}{x-3}\,.$$

**2D)**

$$\int_{0}^{\pi/7} \sin(7\,x)\,dx = \frac{1}{7}\int_{0}^{\pi} \sin(x)\,dx\,.$$

**3)** Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false

**3A)**

$$\int_{0}^{\pi} \sin(7\,x)\,dx = 14$$

**3B)**

$$\int_{0}^{1/\sqrt{7}} x\,\mathrm{e}^{7\,x^2}\,dx = 14\,(\mathrm{e}-1)\,.$$

**3C)**

$$\int_{0}^{1} 6\,x\,\mathrm{e}^{x}\,dx = 6\,.$$

**3D)**

$$\int_{0}^{3\,\pi} \sin^2(x)\,dx = \frac{3}{2}\,\pi\,.$$

---

**4)** Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false

**4A)**

$$\int_{4}^{5} \frac{dx}{|x-3|} = -\ln(2)\,.$$

**4B)**

$$\int_{6}^{7} \frac{dx}{(x-5)^2} = -\frac{1}{2}\,.$$

**4C)**

$$\int_{4}^{8} \frac{dx}{x^2+4x} = \ln(4/3)\,.$$

**4D)**

$$\int_{0}^{4} \frac{x}{x^2+9}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{5}{3}\right).$$

**Docente**
☐ DelaTorre Pedraza
☐ Orsina

□□□□□□□□ **Cognome** **Nome** **Matricola** **Compito 00129**

---

**5)** Calcolare una primitiva delle funzioni $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ e $k(x)$ e calcolare gli integrali.

$$\textbf{a12)}\ f(x) = \frac{1}{x+6}\,, \quad \int_0^1 f(x)\,dx\,, \qquad \textbf{b12)}\ g(x) = \frac{1}{x^2 - 6\,x}\,, \quad \int_{12}^{18} g(x)\,dx\,,$$

$$\textbf{c12)}\ h(x) = \frac{12\,x + 12}{x^2 + 2\,x + 1}\,, \quad \int_0^1 h(x)\,dx\,, \qquad \textbf{d12)}\ k(x) = \frac{x^3}{x^2 - 36}\,, \quad \int_{-1}^1 k(x)\,dx\,,$$

---

☐☐☐☐☐☐☐☐ **Cognome** **Nome** **Matricola** **Compito 00129**

---

**6)** Calcolare una primitiva delle funzioni $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ e $k(x)$ e calcolare gli integrali.

**a12)** $f(x) = x^3\,\cos(x^2)\,,\quad \displaystyle\int_0^{\sqrt{7\,\pi}} f(x)\,dx\,,$ **b12)** $g(x) = (x^2+2x-9)\,\mathrm{e}^x\,,\quad \displaystyle\int_0^3 g(x)\,dx\,,$

**c12)** $h(x) = \cos^3(x)\,,\quad \displaystyle\int_0^{\frac{5}{2}\,\pi} h(x)\,dx\,,$ **d12)** $k(x) = \dfrac{4x-5}{5}\,\ln(x)\,,\quad \displaystyle\int_1^5 k(x)\,dx\,,$

---

# Soluzioni del compito 00129

**1)** Sia

$$F(t) = \int_{-5}^{t} [\cos^2(4\,x^2) + 4\,x^2]\,dx\,.$$

---

**1A)** Si ha $F(0) > 0$.

**Vero:** Si ha

$$F(0) = \int_{-6}^{0} [\cos^2(4\,x^2) + 4\,x^2]\,dx > 0\,,$$

dato che la funzione integranda è positiva.

---

**1B)** La funzione $F(t)$ è crescente su $\mathbb{R}$.

**Vero:** Per il teorema fondamentale del calcolo integrale si ha

$$F'(t) = \cos^2(4\,t^2) + 4\,t^2 \geq 0\,,$$

e quindi la funzione $F(t)$ è crescente.

---

**1C)** La funzione $F(t)$ è una funzione dispari.

**Falso:** Se la funzione $F(t)$ fosse dispari, si avrebbe

$$F(-5) = -F(5)\,.$$

Tuttavia,

$$F(-5) = \int_{-5}^{-5} [\cos^2(4\,x^2) + 4\,x^2]\,dx = 0\,,$$

e quindi (se la funzione $F(t)$ fosse dispari), dovrebbe essere $F(5) = 0$. Dato però che la funzione $F(t)$ è strettamente crescente, si ha $F(5) > F(-5) = 0$, e quindi $F(t)$ non è dispari.

---

**1D)** Si ha

$$\lim_{t\to+\infty} F(t) = +\infty\,.$$

**Vero:** Si ha, per $t \geq -5$,

$$F(t) = \int_{-5}^{t} [\cos^2(4\,x^2) + 4\,x^2]\,dx \geq \int_{-5}^{t} 4\,x^2\,dx = \frac{4}{3}\,t^3 - \frac{500}{3}\,.$$

Pertanto,

$$\lim_{t\to+\infty} F(t) \geq \lim_{t\to+\infty} \frac{4}{3}\,t^3 - \frac{500}{3} = +\infty\,.$$

---

**2)** Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false

---

**2A)**

$$\int_{-6}^{6} [x^9 + \sin(5\,x)]\,dx = 0\,.$$

**Vero:** Dal momento che le funzioni $x \mapsto x^9$ e $x \mapsto \sin(5\,x)$ sono funzioni dispari, e che l'intervallo di integrazione è simmetrico rispetto all'origine, l'integrale vale zero.

---

**2B)**

$$\int_{-5}^{5} [x^2 + x^9]\,dx = 0\,.$$

**Falso:** Dal momento che la funzione $x \mapsto x^9$ è una funzione dispari, e che l'intervallo di integrazione è simmetrico rispetto all'origine, l'integrale di $x^9$ vale zero; d'altra parte, dato che la funzione $x \mapsto x^2$ è una funzione pari, e che l'intervallo è simmetrico rispetto all'origine, si ha

$$\int_{-5}^{5} x^2\,dx = 2\int_{0}^{5} x^2 = \frac{2}{3}\,5^3 > 0\,.$$

---

**2C)**

$$\int_{5}^{7} \frac{dx}{x-3} = \int_{15}^{27} \frac{dx}{x-3}\,.$$

**Vero:** Infatti si ha

$$\int_{5}^{7} \frac{dx}{x-3} = \ln(|x-3|)\Big|_{5}^{7} = \ln(4) - \ln(2) = \ln(2)\,,$$

e

$$\int_{15}^{27} \frac{dx}{x-3} = \ln(|x-3|)\Big|_{15}^{27} = \ln(24) - \ln(12) = \ln(2)\,,$$

e quindi i due integrali sono uguali.

---

**2D)**

$$\int_{0}^{\pi/7} \sin(7\,x)\,dx = \frac{1}{7}\int_{0}^{\pi} \sin(x)\,dx\,.$$

**Vero:** Si ha

$$\int_{0}^{\pi/7} \sin(7\,x)\,dx = -\frac{1}{7}\cos(7\,x)\Big|_{0}^{\pi/7} = -\frac{\cos(7\cdot\pi/7) - \cos(0)}{7} = \frac{2}{7}\,,$$

e

$$\int_{0}^{\pi} \sin(x)\,dx = -\cos(x)\Big|_{0}^{\pi} = -\cos(\pi) + \cos(0) = 2\,,$$

e quindi

$$\int_{0}^{\pi/7} \sin(7\,x)\,dx = \frac{2}{7} = \frac{1}{7}\cdot 2 = \frac{1}{7}\int_{0}^{\pi} \sin(x)\,dx$$

---

**3)** Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false

---

**3A)**

$$\int_0^{\pi} \sin(7\,x)\,dx = 14$$

**Falso:** Si ha infatti

$$\int_0^{\pi} \sin(7\,x)\,dx = -\frac{\cos(7\,x)}{7}\Big|_0^{\pi} = -\frac{\cos(7\,\pi) - \cos(0)}{7} = \frac{2}{7} \neq 14\,.$$

---

**3B)**

$$\int_0^{1/\sqrt{7}} x\,\mathrm{e}^{7\,x^2}\,dx = 14\,(\mathrm{e} - 1)\,.$$

**Falso:** Si ha, con la sostituzione $y = 7\,x^2$, da cui $dy = 14\,x\,dx$ e quindi $x\,dx = \frac{dy}{14}$,

$$\int_0^{1/\sqrt{7}} x\,\mathrm{e}^{7\,x^2}\,dx = \frac{1}{14}\int_0^{1} \mathrm{e}^{y}\,dy = \frac{\mathrm{e} - 1}{14} \neq 14\,(\mathrm{e} - 1)\,.$$

---

**3C)**

$$\int_0^{1} 6\,x\,\mathrm{e}^{x}\,dx = 6\,.$$

**Vero:** Si ha, integrando per parti (derivando $6\,x$ e integrando l'esponenziale),

$$\int_0^{1} 6\,x\,\mathrm{e}^{x}\,dx = 6\,x\,\mathrm{e}^{x}\Big|_0^{1} - 6\int_0^{1} \mathrm{e}^{x}\,dx = 6\,\mathrm{e} - 6\,\mathrm{e}^{x}\Big|_0^{1} = 6\,\mathrm{e} - 6\,\mathrm{e} + 6 = 6\,.$$

---

**3D)**

$$\int_0^{3\,\pi} \sin^2(x)\,dx = \frac{3}{2}\,\pi\,.$$

**Vero:** Iniziamo con il calcolare una primitiva di $\sin^2(x)$; ricordando la formula

$$\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}\,,$$

si ha

$$\int \sin^2(x)\,dx = \frac{1}{2}\int [1 - \cos(2x)]\,dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4}\,.$$

Si ha pertanto

$$\int_0^{3\,\pi} \sin^2(x)\,dx = \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4}\right]\Big|_0^{3\,\pi} = \frac{3}{2}\,\pi\,.$$

dato che $\sin(6\,\pi) = 0 = \sin(0)$.

---

**4)** Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false

---

**4A)**

$$\int_4^5 \frac{dx}{|x-3|} = -\ln(2)\,.$$

**Falso:** Iniziamo con l'osservare che si ha $x-3 \geq 0$ sull'intervallo $[4,5]$; su tale intervallo si ha pertanto $|x-3| = x-3$. Si ha allora

$$\int_4^5 \frac{dx}{|x-3|} = \int_4^5 \frac{dx}{x-3} = \ln(|x-3|)\Big|_4^5 = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2) \neq -\ln(2)\,.$$

Alternativamente, si poteva osservare che, essendo la funzione integranda positiva, l'integrale non poteva venire un numero negativo.

---

**4B)**

$$\int_6^7 \frac{dx}{(x-5)^2} = -\frac{1}{2}\,.$$

**Falso:** Infatti si ha

$$\int_6^7 \frac{dx}{(x-5)^2} = -\frac{1}{x-5}\Big|_6^7 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2} \neq -\frac{1}{2}\,.$$

Alternativamente, si poteva osservare che, essendo la funzione integranda positiva, l'integrale non poteva venire un numero negativo.

---

**4C)**

$$\int_4^8 \frac{dx}{x^2+4x} = \ln(4/3)\,.$$

**Falso:** Il polinomio al denominatore si scompone come

$$x^2 + 4x = x\,(x+4)\,,$$

che ha come radici $x_1 = -4$ e $x_2 = 0$. Ricordando che

$$\int \frac{dx}{(x-x_1)\,(x-x_2)} = \frac{1}{x_2 - x_1}\,\ln\left(\left|\frac{x-x_2}{x-x_1}\right|\right),$$

si ha quindi

$$\int_4^8 \frac{dx}{x^2+4x} = \int_4^8 \frac{dx}{x\,(x+4)} = \frac{1}{4}\,\ln\left(\left|\frac{x}{x+4}\right|\right)\Big|_4^8 = \frac{1}{4}\left[\ln\left(\frac{8}{12}\right) - \ln\left(\frac{4}{8}\right)\right] = \frac{1}{4}\,\ln(4/3) \neq \ln(4/3)\,.$$

---

**4D)**

$$\int_0^4 \frac{x}{x^2+9}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{5}{3}\right).$$

**Falso:** Si ha, facendo comparire al numeratore la derivata del denominatore,

$$\int_0^4 \frac{x}{x^2+9}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^4 \frac{2x}{x^2+9}\,dx = \frac{1}{2}\,\ln(|x^2+9|)\Big|_0^4.$$

Svolgendo i calcoli, si ha allora

$$\int_0^4 \frac{x}{x^2+9}\,dx = \frac{\ln(25)-\ln(9)}{2} = \frac{1}{2}\,\ln\left(\frac{5^2}{3^2}\right) = \ln\left(\frac{5}{3}\right) \neq \frac{1}{2}\ln\left(\frac{5}{3}\right).$$

---

**5)** Calcolare una primitiva delle funzioni $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ e $k(x)$ e calcolare gli integrali.

$$\textbf{a12)}\ f(x) = \frac{1}{x+6}\,, \quad \int_0^1 f(x)\,dx\,, \qquad \textbf{b12)}\ g(x) = \frac{1}{x^2 - 6\,x}\,, \quad \int_{12}^{18} g(x)\,dx\,,$$

$$\textbf{c12)}\ h(x) = \frac{12\,x + 12}{x^2 + 2\,x + 1}\,, \quad \int_0^1 h(x)\,dx\,, \qquad \textbf{d12)}\ k(x) = \frac{x^3}{x^2 - 36}\,, \quad \int_{-1}^1 k(x)\,dx\,,$$

---

**Soluzione:**

**a12)** Ricordando che si ha

$$\int \frac{dx}{x+a} = \ln(|x+a|)\,,$$

si ha

$$\int \frac{dx}{x+6} = \ln(|x+6|)\,,$$

e quindi

$$\int_0^1 \frac{dx}{x+6} = \ln(|x+6|)\Big|_0^1 = \ln(7) - \ln(6) = \ln\left(\frac{7}{6}\right).$$

**b12)** Ricordando che si ha

$$\int \frac{dx}{(x-x_2)\,(x-x_1)} = \frac{1}{x_2 - x_1}\,\ln\left(\left|\frac{x-x_2}{x-x_1}\right|\right),$$

ed essendo $x^2 - 6\,x = x\,(x-6) = (x-0)(x-6)$, si ha

$$\int \frac{dx}{x^2 - 6\,x} = \frac{1}{6}\,\ln\left(\left|\frac{x-6}{x}\right|\right).$$

Pertanto,

$$\int_{12}^{18} \frac{dx}{x^2 - 6\,x} = \frac{1}{6}\,\ln\left(\left|\frac{x-6}{x}\right|\right)\Big|_{12}^{18} = \frac{1}{6}\left[\ln\left(\frac{12}{18}\right) - \ln\left(\frac{6}{12}\right)\right] = \frac{1}{6}\,\ln\left(\frac{4}{3}\right).$$

**c12)** La derivata del denominatore è:

$$[x^2 + 2\,x + 1]' = 2x + 2\,,$$

mentre il numeratore si può scrivere come:

$$12\,x + 12 = 6\,(2x + 2)\,.$$

Si ha allora

$$\int \frac{12\,x + 12}{x^2 + 2\,x + 1}\,dx = 6\int \frac{2x+2}{x^2 + 2\,x + 1}\,dx = 6\,\ln(|x^2 + 2\,x + 1|)\,,$$

da cui segue che

$$\int_0^1 \frac{12\,x + 12}{x^2 + 2\,x + 1}\,dx = 6\,\ln(|x^2 + 2\,x + 1|)\Big|_0^1 = 6\,[\ln(4) - \ln(1)] = 6\,\ln(4)\,.$$

**d12)** Si ha

$$x^3 = x^3 - 36\,x + 36\,x = x\,(x^2 - 36) + 36\,x\,,$$

e quindi

$$\frac{x^3}{x^2 - 36} = \frac{x\,(x^2 - 36) + 36\,x}{x^2 - 36} = x + \frac{36\,x}{x^2 - 36} = x + 18\,\frac{2x}{x^2 - 36}\,.$$

Ne segue che

$$\int \frac{x^3}{x^2 - 36}\,dx = \int \left[x + 18\,\frac{2x}{x^2 - 36}\right]dx = \frac{x^2}{2} + 18\,\ln(|x^2 - 36|)\,,$$

e quindi che

$$\int_{-1}^1 \frac{x^3}{x^2 - 36}\,dx = \left[\frac{x^2}{2} + 18\,\ln(|x^2 - 36|)\right]\Big|_{-1}^1 = \frac{1}{2} + 18\,\ln(35) - \frac{1}{2} - 18\,\ln(35) = 0\,.$$

Si noti che, essendo la funzione integranda dispari e l'intervallo simmetrico rispetto all'origine, si poteva concludere che l'integrale valeva zero **senza** calcolare la primitiva.

**6)** Calcolare una primitiva delle funzioni $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ e $k(x)$ e calcolare gli integrali.

$$\textbf{a12)}\ f(x) = x^3 \cos(x^2)\,, \quad \int_0^{\sqrt{7\,\pi}} f(x)\,dx\,, \qquad \textbf{b12)}\ g(x) = (x^2 + 2x - 9)\,\mathrm{e}^x\,, \quad \int_0^3 g(x)\,dx\,,$$

$$\textbf{c12)}\ h(x) = \cos^3(x)\,, \quad \int_0^{\frac{5}{2}\,\pi} h(x)\,dx\,, \qquad \textbf{d12)}\ k(x) = \frac{4x-5}{5}\,\ln(x)\,, \quad \int_1^5 k(x)\,dx\,,$$

---

**Soluzione:**

**a12)** Con la sostituzione $y = x^2$, da cui $dy = 2x\,dx$, e quindi $x\,dx = \frac{dy}{2}$, si ha

$$\int x^3 \cos(x^2)\,dx = \int x^2 \cos(x^2)\,x\,dx = \frac{1}{2}\int y \cos(y)\,dy\,.$$

Integrando per parti (al solito, derivando $y$ ed integrando il coseno), si ha

$$\int y \cos(y)\,dy = y \sin(y) - \int \sin(y)\,dy = y \sin(y) + \cos(y)\,,$$

da cui segue (ricordando la sostituzione) che

$$\int x^3 \cos(x^2)\,dx = \frac{x^2 \sin(x^2) + \cos(x^2)}{2}\,.$$

Si ha dunque

$$\int_0^{\sqrt{7\,\pi}} x^3 \cos(x^2) = \frac{x^2 \sin(x^2) + \cos(x^2)}{2}\Big|_0^{\sqrt{7\,\pi}} = \frac{\cos(7\,\pi) - \cos(0)}{2} = -1\,.$$

**b12)** Ricordiamo che se $P(x)$ è un polinomio, si ha

$$\int P(x)\,\mathrm{e}^x\,dx = Q(x)\,\mathrm{e}^x\,,$$

dove $Q(x)$ è un polinomio dello stesso grado di $P(x)$ e tale che

$$P(x) = Q(x) + Q'(x)\,.$$

Considerando un generico polinomio di secondo grado $Q(x) = a\,x^2 + b\,x + c$, si ha dunque

$$Q(x) + Q'(x) = x^2 + (2a + b)\,x + (b + c) = x^2 + 2x - 9\,,$$

da cui si deduce che deve essere $a = 1$, $2a + b = 2$ e $b + c = -9$; da queste tre equazioni si ricava facilmente che $a = 1$, $b = 0$ e $c = -9$, cosicché si ha

$$\int (x^2 + 2x - 9)\,\mathrm{e}^x\,dx = (x^2 - 9)\,\mathrm{e}^x\,.$$

Se ne deduce che

$$\int_0^3 (x^2 + 2x - 9)\,\mathrm{e}^x\,dx = (x^2 - 9)\,\mathrm{e}^x\Big|_0^3 = 9\,.$$

**c12)** Iniziamo a scrivere

$$\cos^3(x) = \cos^2(x)\,\cos(x) = (1 - \sin^2(x))\,\cos(x)\,,$$

cosicché si tratta di calcolare

$$\int (1 - \sin^2(x))\,\cos(x)\,dx\,.$$

Con la sostituzione $y = \sin(x)$, da cui $dy = \cos(x)\,dx$, si ha

$$\int (1 - \sin^2(x))\,\cos(x)\,dx = \int (1 - y^2)\,dy = y - \frac{y^3}{3} = \sin(x) - \frac{\sin^3(x)}{3}\,.$$

Se ne deduce che

$$\int_0^{\frac{5}{2}\,\pi} \cos^3(x)\,dx = \Big[\sin(x) - \frac{\sin^3(x)}{3}\Big]\Big|_0^{\frac{5}{2}\,\pi} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}\,.$$

**d12)** Integrando per parti (derivando il logaritmo e integrando il polinomio) si ha

$$\begin{aligned}\int \frac{4x-5}{5}\,\ln(x)\,dx &= \frac{2x^2-5\,x}{5}\,\ln(x) - \int \frac{2x^2-5\,x}{5}\,\frac{1}{x}\,dx = \frac{2x^2-5\,x}{5}\,\ln(x) - \int \frac{2x-5}{5}\,dx \\ &= \frac{2x^2-5\,x}{5}\,\ln(x) - \frac{x^2-5\,x}{5}\,.\end{aligned}$$

Ne segue che

$$\int_1^5 \frac{4x-5}{5}\,\ln(x)\,dx = \Big[\frac{2x^2-5\,x}{5}\,\ln(x) - \frac{x^2-5\,x}{5}\Big]\Big|_1^5 = 5\,\ln(5) - 0 - 0 + \frac{1-5}{5} = 5\,\ln(5) - \frac{4}{5}\,.$$