

Задачи по курсу “Теория информации 2023”

Домашнее задание 1. Срок сдачи — 18:30 MSK, 16 февраля 2023 года

Задача 1. Имеются 80 монет, среди которых ровно одна фальшивая (неизвестно какая). Все настоящие монеты одного веса, а фальшивая легче. На чашечных весах можно сравнивать по весу любые две группы монет. Нужно найти фальшивую монету. Докажите, что необходимо и достаточно сделать 4 взвешивания.

Задача 2. Дано шесть монет разного веса и известно, что первая монета легче второй, третья легче четвертой, а четвертая легче пятой. Имеются весы, позволяющие сравнить по весу любые две монеты. Доказать, что для того, чтобы упорядочить по весу все монеты, необходимо и достаточно 7 взвешиваний.

Домашнее задание 2. Срок сдачи — 18:30 MSK, 23 февраля 2023 года

Задача 3. Алиса загадала натуральное число в интервале $1, \dots, n$, а Боб хочет узнать загаданное число, задавая Алисе любые вопросы с ответами ДА/НЕТ. За ответ ДА Алиса берет 2 рубля, а за ответ НЕТ — 3 рубля. Сколько денег нужно Бобу, чтобы найти загаданное число? Ответ нужно найти с точностью до добавления константы.

Задача 4. Алиса бросает два кубика и получает сложением двух результатов число x в интервале $2, \dots, 12$. Найти энтропию Шеннона распределения вероятностей, полученного Алисой (ответ нужно дать в виде числа с точностью до 0.1).

Домашнее задание 3. Срок сдачи — 18:30 MSK, 9 марта 2023 года

Задача 5. Пусть вероятности букв a, b, c, d, e, f, g равны, соответственно, 0.05, 0.1, 0.15, 0.15, 0.15, 0.2, 0.2. Постройте код Хаффмена для алфавита a, b, c, d, e, f, g и этих вероятностей. Постройте арифметический код для этого алфавита и этих вероятностей.

Задача 6. Рассмотрим бернуллиевское распределение на словах длины 5 в алфавите a, b, c с вероятностями букв равными, соответственно, $1/6, 2/6,$

3/6. Найдите арифметический код слова bbabc для этого распределения вероятностей.

Домашнее задание 4. Срок сдачи — 18:30 MSK, 16 марта 2023 года

Задача 7. Докажите, что если центральный отрезок всегда относить туда, куда попала его большая часть, то кодирование Шеннона–Фано не является сбалансированным (то есть не существует константы d , для которой выполнено $|c_i| < -\log p_i + d$ для любых n и любых исходных вероятностей p_1, \dots, p_n). Докажите, что и кодирование Хаффмана не является сбалансированным.

Задача 8. Докажите неравенства $H(\alpha|\beta) \leq H(\alpha) \leq H(\alpha, \beta)$.

Домашнее задание 5. Срок сдачи — 18:30 MSK, 23 марта 2023 года

Задача 9. Пусть f — некоторая функция из A в B и пусть α некоторая случайная величина со значениями в A . Докажите, что $H(f(\alpha)) \leq H(\alpha)$.

Задача 10. Пусть случайная величина α имеет распределение $1/3, 2/3$, а случайная величина β имеет распределение $1/2, 1/2$. В каких пределах может изменяться $H(\alpha, \beta)$? Здесь имеется в виду, что мы можем произвольным образом определить совместное распределение α, β , но так, чтобы маргинальные распределения были равны данным в условии.

Домашнее задание 6. Срок сдачи — 18:30 MSK, 30 марта 2023 года

Задача 11. Докажите неравенство или предъявите контрпример к нему:

$$H(\alpha) \leq H(\alpha|\beta) + H(\alpha|\gamma) + I(\beta : \gamma)$$

Задача 12. Докажите неравенство или предъявите контрпример к нему:

$$H(\alpha|\gamma) + H(\beta|\gamma) + H(\gamma) \leq I(\alpha : \beta) + H(\gamma|\beta, \alpha) + H(\alpha, \beta|\gamma) + I(\alpha, \beta : \gamma).$$

Домашнее задание 7. Срок сдачи — 18:30 MSK, 6 апреля 2023 года

Задача 13. Пусть в некотором неориентированном графе без петель и кратных рёбер r рёбер и t треугольников. Докажите, что $(6t)^2 \leq (2r)^3$. [Указание: используйте неравенство Шерера.]

Задача 14. Клетки матрицы раскрашены в s цветов так, что в каждом столбце использовано не более m цветов, и в каждой строке использовано

не более k цветов. При этом все цвета использованы одинаковое количество раз. Докажите, что $c \leq mk$. [Указание: используйте неравенство из задачи 11.]

Домашнее задание 8. Срок сдачи — 18:30 MSK, 13 апреля 2023 года

Задача 15. Даны три совместно распределенных случайных величины X, Y, Z . Алиса знает X , но не знает Z . Боб знает Y , но не знает Z . Надо послать Алисе и Бобу некоторое одинаковое сообщение P , так чтобы оба узнали Z . Докажите, что длина этого сообщения не может быть меньше $\max\{H(Z|X), H(Z|Y)\}$.

Задача 16. В условиях предыдущей задачи докажите, что количество информации в P о паре (X, Y) не может быть меньше $\max\{I(Y : Z|X), I(X : Z|Y)\}$.

Домашнее задание 9. Срок сдачи — 18:30 MSK, 20 апреля 2023 года

Задача 17. Дано слово x . Обозначим через $p(ab)$ количество вхождений диграммы ab в это слово. Докажите, что для всех букв a , кроме первой и последней буквы слова x , выполнено равенство $\sum_b p(ab) = \sum_b p(ba)$. Докажите, что если первая и последняя буква x одинаковы, то это равенство верно и для этой буквы тоже. Наконец, докажите, что если первая и последняя буква x различны, то для первой буквы левая часть на единицу больше правой, а для последней — на единицу меньше.

Задача 18. Пусть даны натуральные числа $p(ab)$, для всех пар букв a, b некоторого конечного алфавита. Пусть также они удовлетворяют равенствам $\sum_b p(ab) = \sum_b p(ba)$ для всех букв a из алфавита. Правда ли, что тогда обязательно найдется слово x в нашем алфавите с таким набором диграмм?

Домашнее задание 10. Срок сдачи — 18:30 MSK, 27 апреля 2023 года

Задача 19. Даны слова x, y с одинаковым количеством диграмм каждого вида. Известно, что x начинается на букву a и заканчивается на букву b . Докажите, что то же самое верно и для слова y .

Задача 20. Известно, что в слове длины 1004 в трехбуквенном алфавите $\{a, b, c\}$, начинающемся с буквы a , количества вхождений двухбуквенных сочетаний $aa, bb, cc, ac, ba, cb, ca$ равны, соответственно, 200, 100, 200, 201, 101, 101, 100. Оцените количество таких слов с точностью до множителя 100.

Домашнее задание 11. Срок сдачи — 18:30 MSK, 4 мая 2023 года

Задача 21. На множестве слов длины 4 в двухбуквенном алфавите 0,1 задана бернуллиева мера с вероятностями 0 и 1 равными $1/3$ и $2/3$, соответственно. Какова минимально возможная вероятность ошибки при кодировании элементов этого множества трехбитовыми последовательностями.

Задача 22. На множестве слов длины 4 в двухбуквенном алфавите 0,1 задана бернуллиева мера с вероятностями 0 и 1 равными $1/4$ и $3/4$, соответственно. Какова минимально возможная длина бинарного кода, если нужно передать случайное слово с вероятностью ошибки не более $1/6$?

Домашнее задание 12. Срок сдачи — 18:30 MSK, 11 мая 2023 года

Задача 23. Симметричным бинарным каналом с вероятностью ошибки $\varepsilon \leq 1/2$, называется канал со входным и выходным алфавитами $\{0, 1\}$, который инвертирует входной символ с вероятностью ε . Найдите пропускную способность симметричного канала.

Задача 24. Параллельным соединением двух каналов с матрицами W_1, W_2 и алфавитами A_1, A_2, B_1, B_2 называется канал с входным алфавитом $A_1 \times A_2$, выходным алфавитом $B_1 \times B_2$, матрица которого есть тензорное произведение W_1 и W_2 (то есть, вероятность преобразования пары (a_1, a_2) в пару (b_1, b_2) равна произведению $W_1(a_1, b_1)W_2(a_2, b_2)$). Докажите, что пропускная способность параллельного соединения равна сумме пропускных способностей исходных каналов.