Taller 4

SOLUCIÓN NUMÉRICA 1D y 2D DE LA ECUACIÓN DE BURGERS

MECÁNICA DE FLUIDOS COMPUTACIONAL

MAESTRÍA EN HIDROSISTEMAS

PONTIFICIA UNIVERSIDAD JAVERIANA

La ecuación de Burgers se emplea constantemente en la mecánica de fluidos computacional para verificar la robustez numérica de los diferentes métodos de discretización espacial y temporal ante la presencia de no linealidades. La ecuación de Burgers en una dimensión se puede escribir como

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

A la cual se le adicionan las respectivas condiciones de contorno, e iniciales para cada caso.

Para validar la calidad de los diferentes esquemas de discretización se va a emplear la solución analítica de la ecuación de Burgers dada por la transformación de Hopf-Cole

$$u(x,t) = \left(-\frac{\int_{-\infty}^{\infty} \sin\left[\pi(x-\eta)\right] f(x-\eta) \exp\left(\frac{-\eta^2}{4\nu t}\right) d\eta}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x-\eta) \exp\left(\frac{-\eta^2}{4\nu t}\right) d\eta} \right)$$

Con

$$f(y) = \exp\left(-\frac{\cos(\pi y)}{2\pi\nu}\right)$$

La condición inicial está dada por

$$u(x, t=0) = -\sin(\pi x)$$

Los límites del dominio son $-1 \leq X \leq 1$, y las condiciones de contorno están dadas por $u(\pm 1, t) = 0$

A partir de los códigos desarrollados en clase con diferencias finitas, realizar los siguientes cálculos, con una viscosidad de 10e-2 m^2/s, y escogiendo un tamaño de paso de tiempo que genere una solución estable.

1. Implementar las tres diferentes formas del operador no lineal (variables primitivas, divergencia y forma skew-symmetric) y solucionar la ecuación de Burgers 1D mediante el método de pasos fraccionados.
2. Comparar, con respecto a la solución analítica (que se debe solucionar numéricamente) en t=(2/π)seg, en términos de la gráfica del error y de la norma de este los resultados obtenidos para cada caso. Discutir los resultados
3. Hacer gráficas de convergencia para cada caso en las cuales se grafique la norma del error vs el número de grados de libertad
4. Por favor jueguen con el número de Peclet ($Pe = UL/D$). Qué pasa con la solución si este valor es cada vez más grande (pensar en la analogía con el número de Reynolds)?
5. Jugar con el tamaño del paso de tiempo para ver qué tanto el error en la solución depende de la discretización temporal o de la discretización espacial.

Implementar un solver para la ecuación de Burgers 2D, la cual tiene la siguiente forma:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$$

Usar como solución analítica, la solución unidimensional evaluada en sentido horizontal (v=0), y en sentido vertical (u=0). Hacer uso de un esquema de pasos fraccionados. Emplear el esquema de su preferencia (upwind, central, etc) para discretizar el operador no lineal.

Hacer un análisis de convergencia.