

Aprischa Nauva
140810180063
Tugas 5

Studi Kasus 5: Mencari Pasangan Titik Terdekat (Closest Pair of Points)

Tugas:

- 1) Buatlah program untuk menyelesaikan problem closest pair of points menggunakan algoritma divide & conquer yang diberikan. Gunakan bahasa C++

Jawab :

```
/*
Nama : Aprischa Nauva
Npm : 140810180063
Tugas 5
*/

#include <bits/stdc++.h>

using namespace std;

class Point {
public:
    int x, y; };

int compareX(const void* a, const void* b) {
    Point *p1 = (Point *)a, *p2 = (Point *)b;
    return (p1->x - p2->x); }

int compareY(const void* a, const void* b) {
    Point *p1 = (Point *)a, *p2 = (Point *)b;
    return (p1->y - p2->y); }

float dist(Point p1, Point p2){
    return sqrt( (p1.x - p2.x)*(p1.x - p2.x) +
                (p1.y - p2.y)*(p1.y - p2.y) );
}

float bruteForce(Point P[], int n) {
    float min = FLT_MAX;
    for (int i = 0; i < n; ++i)
        for (int j = i+1; j < n; ++j) if (dist(P[i], P[j]) < min) min =
dist(P[i], P[j]);
    return min;
}

float min(float x, float y) {
    return (x < y)? x : y; }

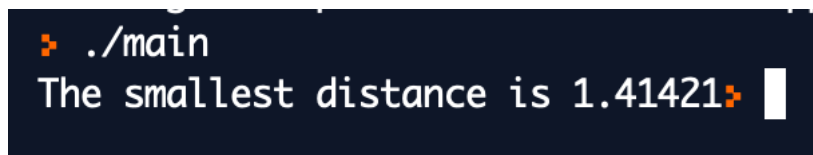
float stripClosest(Point strip[], int size, float d)
{
    float min = d;
    qsort(strip, size, sizeof(Point), compareY);
    for (int i = 0; i < size; ++i)
```

```

        for (int j = i+1; j < size && (strip[j].y - strip[i].y) < min;
++j)
            if (dist(strip[i],strip[j]) < min) min = dist(strip[i],
strip[j]);
        return min; }
float closestUtil(Point P[], int n) {
    if (n <= 3)
        return bruteForce(P, n);
    int mid = n/2;
    Point midPoint = P[mid];
    float dl = closestUtil(P, mid);
    float dr = closestUtil(P + mid, n - mid);
    float d = min(dl, dr);
    Point strip[n];
    int j = 0;
    for (int i = 0; i < n; i++)
        if (abs(P[i].x - midPoint.x) < d) strip[j] = P[i], j++;
    return min(d, stripClosest(strip, j, d) ); }
float closest(Point P[], int n) {
    qsort(P, n, sizeof(Point), compareX);
    return closestUtil(P, n); }

int main() {
    Point P[] = {{2, 3}, {12, 30}, {40, 50}, {5, 1}, {12, 10}, {3, 4}};
    int n = sizeof(P) / sizeof(P[0]);
    cout << "The smallest distance is " << closest(P, n);
    return 0;
}

```



```

./main
The smallest distance is 1.41421

```

- 2) Tentukan rekurensi dari algoritma tersebut, dan selesaikan rekurensinya menggunakan metode recursion tree untuk membuktikan bahwa algoritma tersebut memiliki Big-O ($n \lg n$)

Jawab :

Kompleksitas Waktu

Biarkan kompleksitas waktu dari algoritma di atas menjadi $T(n)$. Mari kita asumsikan bahwa kita menggunakan algoritma pengurutan $O(n \lg n)$. Algoritma di atas membagi semua titik dalam dua set dan secara rekursif memanggil dua set. Setelah membelah, ia menemukan strip dalam waktu $O(n)$, mengurutkan strip dalam waktu $O(n \lg n)$ dan akhirnya menemukan titik terdekat dalam strip dalam waktu $O(n)$. Jadi $T(n)$ dapat dinyatakan sebagai berikut

$$T(n) = 2T(n/2) + O(n) + O(n \lg n) + O(n)$$

$$T(n) = 2T(n/2) + O(n \log n)$$

$$T(n) = T(n \times \log n \times \log n)$$

Catatan

- 1) Kompleksitas waktu dapat ditingkatkan menjadi $O(n \log n)$ dengan mengoptimalkan langkah 5 dari algoritma di atas.
- 2) Kode menemukan jarak terkecil. Dapat dengan mudah dimodifikasi untuk menemukan titik dengan jarak terkecil.
- 3) Kode ini menggunakan pengurutan cepat yang bisa $O(n^2)$ dalam kasus terburuk. Untuk memiliki batas atas sebagai $O(n (\log n)^2)$, algoritma pengurutan $O(n \log n)$ seperti pengurutan gabungan atau pengurutan tumpukan dapat digunakan

Studi Kasus 6 : Algoritma Karatsuba untuk Perkalian Cepat

Tugas:

- 1) Buatlah program untuk menyelesaikan problem fast multiplication menggunakan algoritma divide & conquer yang diberikan (Algoritma Karatsuba). Gunakan bahasa C++

Jawab :

```

/*
  Nama : Aprischa Nauva
  Npm : 140810180063
  Tugas 5
*/

#include<iostream>
#include<stdio.h>

using namespace std;

int makeEqualLength(string &str1, string &str2)
{
    int len1 = str1.size();
    int len2 = str2.size();
    if (len1 < len2)
    {
        for (int i = 0 ; i < len2 - len1 ; i++)
            str1 = '0' + str1;
        return len2;
    }
    else if (len1 > len2)
    {
        for (int i = 0 ; i < len1 - len2 ; i++)
            str2 = '0' + str2;
    }
    return len1;
}

```

```

string addBitStrings( string first, string second )
{
    string result;

    int length = makeEqualLength(first, second);
    int carry = 0;

    for (int i = length-1 ; i >= 0 ; i--)
    {
        int firstBit = first.at(i) - '0';
        int secondBit = second.at(i) - '0';

        int sum = (firstBit ^ secondBit ^ carry)+'0';

        result = (char)sum + result;

        carry = (firstBit&secondBit) | (secondBit&carry) |
(firstBit&carry);
    }

    if (carry) result = '1' + result;

    return result;
}

int multiplyiSingleBit(string a, string b) {
    return (a[0] - '0')*(b[0] - '0'); }

long int multiply(string X, string Y)
{
    int n = makeEqualLength(X, Y);

    if (n == 0) return 0;
    if (n == 1) return multiplyiSingleBit(X, Y);

    int fh = n/2;
    int sh = (n-fh);

    string Xl = X.substr(0, fh);
    string Xr = X.substr(fh, sh);

    string Yl = Y.substr(0, fh);
    string Yr = Y.substr(fh, sh);

    long int P1 = multiply(Xl, Yl);
    long int P2 = multiply(Xr, Yr);
    long int P3 = multiply(addBitStrings(Xl, Xr), addBitStrings(Yl, Yr));

    return P1*(1<<(2*sh)) + (P3 - P1 - P2)*(1<<sh) + P2;
}

```

```
int main() {
    printf ("%ld\n", multiply("1100", "1010"));
    printf ("%ld\n", multiply("110", "1010"));
    printf ("%ld\n", multiply("11", "1010"));
    printf ("%ld\n", multiply("1", "1010"));
    printf ("%ld\n", multiply("0", "1010"));
    printf ("%ld\n", multiply("111", "111"));
    printf ("%ld\n", multiply("11", "11"));
}
```

```
120
60
30
10
0
49
9
Program ended with exit code: 0
```

- 2) Rekurensi dari algoritma tersebut adalah $T(n) = 3T(n/2) + O(n)$, dan selesaikan rekurensinya menggunakan metode substitusi untuk membuktikan bahwa algoritma tersebut memiliki Big-O ($n \lg n$)

Jawab :

- Let's try divide and conquer.
 - Divide each number into two halves.
 - $x = x_H r^{n/2} + x_L$
 - $y = y_H r^{n/2} + y_L$
 - Then:

$$xy = (x_H r^{n/2} + x_L) (y_H r^{n/2} + y_L)$$

$$= x_H y_H r^n + (x_H y_L + x_L y_H) r^{n/2} + x_L y_L$$
 - Runtime?
 - $T(n) = 4 T(n/2) + O(n)$
 - $T(n) = O(n^2)$
- Instead of 4 subproblems, we only need 3 (with the help of clever insight).
- Three subproblems:
 - $a = x_H y_H$
 - $d = x_L y_L$
 - $e = (x_H + x_L) (y_H + y_L) - a - d$
- Then $xy = a r^n + e r^{n/2} + d$
- $T(n) = 3 T(n/2) + O(n)$
- $T(n) = O(n^{\log 3}) = O(n^{1.584...})$

Studi Kasus 7: Permasalahan Tata Letak Keramik Lantai (Tiling Problem)

Tugas:

- 1) Buatlah program untuk menyelesaikan problem tiling menggunakan algoritma divide & conquer yang diberikan. Gunakan bahasa C++

Jawab :

// n adalah ukuran kotak yang diberikan, p adalah lokasi sel yang hilang
Tile (int n, Point p)

- 1) Kasus dasar: $n = 2$, A 2×2 persegi dengan satu sel yang hilang tidak ada apa-apanya tapi ubin dan bisa diisi dengan satu ubin.
- 2) Tempatkan ubin berbentuk L di tengah sehingga tidak menutupi subsquare $n/2 \times n/2$ yang memiliki kuadrat yang hilang. Sekarang keempatnya subskuen ukuran $n/2 \times n/2$ memiliki sel yang hilang (sel yang tidak perlu diisi). Lihat gambar 2 di bawah ini.
- 3) Memecahkan masalah secara rekursif untuk mengikuti empat. Biarkan p_1, p_2, p_3 dan p_4 menjadi posisi dari 4 sel yang hilang dalam 4 kotak.
 - a) Ubin ($n/2, p_1$)
 - b) Ubin ($n/2, p_2$)
 - c) Ubin ($n/2, p_3$)
 - d) Ubin ($n/2, p_4$)
- 2) Relasi rekurensi untuk algoritma rekursif di atas dapat ditulis seperti di bawah ini. C adalah konstanta. $T(n) = 4T(n/2) + C$. Selesaikan rekurensi tersebut dengan Metode Master

Jawab :

Kompleksitas Waktu:

Relasi perulangan untuk algoritma rekursif di atas dapat ditulis seperti di bawah ini. C adalah konstanta.

$$T(n) = 4T(n/2) + C$$

Rekursi di atas dapat diselesaikan dengan menggunakan Metode Master dan kompleksitas waktu adalah $O(n^2)$

Bagaimana cara kerjanya?

Pengerjaan algoritma Divide and Conquer dapat dibuktikan menggunakan Mathematical Induction. Biarkan kuadrat input berukuran $2k \times 2k$ di mana $k \geq 1$.

Kasus Dasar: Kita tahu bahwa masalahnya dapat diselesaikan untuk $k = 1$. Kami memiliki 2×2 persegi dengan satu sel hilang.

Hipotesis Induksi: Biarkan masalah dapat diselesaikan untuk $k-1$.

Sekarang perlu dibuktikan untuk membuktikan bahwa masalah dapat diselesaikan untuk k jika dapat diselesaikan untuk $k-1$. Untuk k , ditempatkan ubin berbentuk L di tengah dan memiliki empat subsquare dengan dimensi $2k-1 \times 2k-1$ seperti yang ditunjukkan pada gambar 2 di atas. Jadi jika dapat menyelesaikan 4 subskuares, dapat menyelesaikan kuadrat lengkap.