ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО СВЯЗИ
Ордена Трудового Красного Знамени федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
Московский технический университет связи и информатики

Е. В. Ильина, А. В. Куприн, С. А. Маненков, С. М. Фроловичев

КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ И ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЕ

Москва 2019

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО СВЯЗИ
Ордена Трудового Красного Знамени федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
Московский технический университет связи и информатики

Е. В. Ильина, А. В. Куприн, С. А. Маненков, С. М. Фроловичев

КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ И ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЕ

Москва 2019

УДК 51 (075.8)

Ильина Е. В., Куприн А. В., Маненков С. А., Фроловичев С. М. Контрольные работы и методические указания по аналитической геометрии и линейной алгебре: учебно-методическое пособие / МТУСИ. — М., 2019 – 36 с.

Сборник контрольных работ содержит задания по основным разделам курса аналитической геометрии и линейной алгебры для направлений подготовки 11.03.01, 11.03.02, 09.03.01, 09.03.02. Вместе с пособиями [1–2] является частью учебно-методического комплекса по указанной дисциплине. Задачи разбиты на 30 однотипных вариантов для выдачи СИДЗ.

Список лит. 2 назв.

Издание одобрено Советом ОТФ-1 в качестве учебно-методического пособия. Протокол №1 от 20.09.2018г.

Рецензент: А. Г. Кюркчан, д. ф.-м. н., профессор (МТУСИ)

Задания к вариантам

1. Исследовать систему линейных уравнений на совместность, найти общее решение, указать фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы и частное решение данной неоднородной системы.

2. Решить матричное уравнение.

3. Привести уравнение кривой второго порядка к каноническому виду, определить тип кривой, найти координаты фокусов, вершин, уравнения директрис, уравнения асимптот (для гиперболы) и построить эту кривую.

4. Решить задачу о кривой второго порядка.

5. Заданы точки A, B, C и D. Найти: 1) скалярное произведение $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ и угол ABC; 2) векторное произведение $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}]$; 3) смешанное произведение $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$ и объем пирамиды $ABCD$; 4) проекцию точки A на прямую BD; 5) уравнения плоскостей ABC, ABD и угол между этими плоскостями; 6) площадь треугольника BCD; 7) расстояние от точки B до плоскости ACD; 8) канонические уравнения перпендикуляра, проведенного из точки A на плоскость BCD, и проекцию точки A на эту плоскость; 9) параметрические уравнения прямой DM, где M — точка пересечения медиан треугольника ABC.

6. Найти матрицу линейного оператора A в указанном базисе линейного пространства L.

7. Матрица линейного оператора A задана в базисе $\{e_1, e_2, e_3\}$. Указать матрицу T перехода к новому базису $\{f_1, f_2, f_3\}$, вычислить обратную матрицу T^{-1} и найти матрицу оператора в новом базисе по формуле $\tilde{A} = T^{-1}AT$.

8. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы A. Указать матрицу T перехода к новому базису, в котором матрица $\tilde{A}$ этого преобразования имеет диагональный вид. Сделать проверку, вычислив матрицу $\tilde{A}$.

9. Для данной квадратичной формы записать ее матрицу A, привести к каноническому виду методом Лагранжа, проверить равенство $\tilde{A} = T^T AT$ (где T^T означает транспонированную матрицу перехода T), вычислить канонические коэффициенты через угловые миноры матрицы A.

10. Привести уравнение кривой второго порядка к каноническому виду ортогональным преобразованием, определить тип кривой и координаты ее фокусов.

Вариант 1

1. $\begin{cases} x_1+3x_2+5x_4=9, \\ 2x_1-5x_2+5x_3-x_5=1, \\ 3x_1+x_2+x_3+5x_4-5x_5=4, \\ 3x_2-4x_3-4x_5=-5. \end{cases}$ **2.** $X\cdot\begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 \\ -6 & 15 & -9 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & -10 & 6 \\ -6 & 15 & -9 \end{pmatrix}.$

3. $4x^2-4x-12y-5=0.$

4. Составить каноническое уравнение гиперболы с фокусами $F_1(-1,\ 2)$ и $F_2(9,\ 2)$, если расстояние между ее вершинами равно 6.

5. $A(4,\ 1,-8)$, $B(1,-2,\ 1)$, $C(-5,-8,\ 4)$, $D(-2,\ 4,-2)$.

6. L_n –линейное пространство многочленов, порядок которых не превышает n, с базисом $\{1,\ x,...,x^n\}$. $Ap=\int\limits_0^x p(t+1)dt$, где $p(x)\in L_4$, $Ap\in L_5$.

7. $A=\begin{pmatrix} 50 & -10 & -20 \\ 20 & 0 & 40 \\ -30 & 10 & 30 \end{pmatrix}$, $\begin{cases} f_1=e_1+e_2+2e_3, \\ f_2=2e_1-e_2-e_3, \\ f_3=-e_1+e_2-2e_3. \end{cases}$ **8.** $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$

9. $x_1^2-4x_1x_2+2x_1x_3+6x_2^2+2x_3^2.$ **10.** $5x^2+6xy+5y^2-16x-16y-16=0.$

Вариант 2

1. $\begin{cases} 2x_1+5x_2-x_3-5x_4+x_5=9, \\ x_1-5x_2+x_3+x_4-2x_5=9, \\ 15x_1+4x_4-x_5=70, \\ 5x_1+x_4=24. \end{cases}$ **2.** $X\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}.$

3. $2x^2+3y^2+20x+6y+29=0.$

4. Составить каноническое уравнение параболы с вершиной в точке $A(2,-1)$ и фокусом $F(4,-1)$.

5. $A(-19,\ 17,-20)$, $B(-1,-7,\ 10)$, $C(11,-13,\ 4)$, $D(-7,-1,-8)$.

6. L – пространство геометрических векторов с базисом $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$.

$A\vec{x}=[\vec{a},[\vec{b},\vec{x}]]$, где $\vec{x}\in L$, $\vec{a}=\{1,1,0\}$ и $\vec{b}=\{1,1,1\}$.

7. $A=\begin{pmatrix} -2 & 5 & -6 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{cases} f_1=2e_1+2e_2-2e_3, \\ f_2=3e_1+e_3, \\ f_3=e_1-e_2+2e_3. \end{cases}$ **8.** $A=\begin{pmatrix} -4 & 2 & 7 \\ 1 & -3 & -1 \\ -4 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$

9. $-4x_1^2+8x_1x_2+10x_1x_3-2x_2^2-10x_2x_3-5x_3^2.$ **10.** $2xy+2x+2y-3=0.$

Вариант 3

1. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_4 = 5, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_5 = 1, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 4, \\ 2x_1 + 7x_2 + 2x_4 = 12. \end{cases}$ **2.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$

3. $9x^2 - 16y^2 + 90x + 32y - 367 = 0.$

4. Составить каноническое уравнение эллипса по его директрисам $x = 1$, $x = 13$ и малой полуоси $b = 2\sqrt{2}$, зная, что его центр лежит на прямой $x - 2y = 3$.

5. $A(10,\ 9, -2)$, $B(-11, -12,\ 19)$, $C(-18, -5,\ 12)$, $D(3,\ 2, -9)$.

6. L – линейное пространство функций вида $y(x) = c_1e^x + c_2xe^x + c_3x^2e^x$ с базисом $\{e^x, xe^x, x^2e^x\}$. $Ay = y(x+1) - y(x-1)$, где $y(x) \in L$.

7. $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -2 \\ 2 & -4 & 4 \\ 0 & -6 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{cases} f_1 = e_1 - e_2, \\ f_2 = e_2 - e_3, \\ f_3 = e_1 + e_3. \end{cases}$ **8.** $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$

9. $-x_1^2 - 6x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2^2 + 8x_2x_3 + 2x_3^2.$ **10.** $3x^2 + 4xy - 10x - 12y + 2 = 0.$

Вариант 4

1. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 + 5x_5 = 10, \\ 3x_1 + 3x_3 - 7x_4 + 9x_5 = 20, \\ 3x_2 - 3x_3 + 5x_4 - 3x_5 = -10. \end{cases}$ **2.** $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & -4 & -2 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$

3. $16x^2 + 25y^2 + 32x - 100y - 284 = 0.$

4. Составить каноническое уравнение гиперболы с вершиной в точке $A(4,\ 1)$ и асимптотами $2x - 3y + 1 = 0$ и $2x + 3y - 5 = 0$.

5. $A(-3,\ 3, -2)$, $B(-3,\ 1, -1)$, $C(0, -2, -1)$, $D(2,\ 1, -1)$.

6. L – линейное пространство квадратных матриц второго порядка с базисом $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. $A(X) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X^T$, где $X \in L$. Здесь X^T – транспонированная матрица X.

7. $A=\begin{pmatrix}-1 & 3 & -5\\ 2 & 6 & -2\\ 1 & 5 & -3\end{pmatrix}$, $\begin{cases} f_1 = e_1 - e_2,\\ f_2 = e_1 + e_2 - 2e_3,\\ f_3 = 2e_1 - e_2 + e_3.\end{cases}$ **8.** $A=\begin{pmatrix}-3 & 5 & 7\\ -1 & 3 & 1\\ -3 & 3 & 7\end{pmatrix}$.

9. $-5x_1^2 - 4x_1x_2 + 10x_1x_3 - 2x_2^2 + 10x_2x_3 - 5x_3^2$. **10.** $x^2 + 2xy + y^2 + 8x + 4y - 7 = 0$.

Вариант 5

1. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 5,\\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = -3,\\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 13,\\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 21.\end{cases}$ **2.** $\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & 0\\ -1 & -1 & 0 & 2\end{pmatrix}\cdot X = \begin{pmatrix}2 & 4\\ 0 & -2\end{pmatrix}$.

3. $16x^2 - 9y^2 - 64x - 18y + 199 = 0$.

4. Составить каноническое уравнение эллипса с вершинами $A(2,\ 3)$ и $B(5,\ 1)$, если известно, что оси эллипса параллельны координатным осям. Чему равен эксцентриситет эллипса?

5. $A(11, -8,\ 6)$, $B(11, -2,\ 3)$, $C(0,\ 7,\ 3)$, $D(-4, -2,\ 3)$.

6. L –линейное пространство многочленов, порядок которых не превышает трех, с базисом $\{1,\ x,\ x^2, x^3\}$. $Ap = (x-1)^2 p''(x) + 2(x-1)p'(x) + 2p(x)$, где $p(x) \in L$.

7. $A=\begin{pmatrix}4 & 8 & -2\\ 2 & -4 & -6\\ 6 & 2 & -2\end{pmatrix}$, $\begin{cases} f_1 = e_1 - e_2 + e_3,\\ f_2 = -e_1 + e_2 + e_3,\\ f_3 = -2e_1 + e_2 - e_3.\end{cases}$ **8.** $A=\begin{pmatrix}4 & 2 & -2\\ -6 & -4 & 6\\ -5 & -5 & 7\end{pmatrix}$.

9. $x_1^2 + 4x_1x_2 + 10x_1x_3 + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 5x_3^2$. **10.** $7x^2 - 24xy - 38x + 24y + 175 = 0$.

Вариант 6

1. $\begin{cases} x_1 - 6x_2 + 2x_3 - 2x_4 + 16x_5 = 7,\\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 - 3x_5 = 4,\\ 2x_1 - 7x_2 + 4x_3 + x_4 = 9,\\ x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 3x_5 = 5,\end{cases}$ **2.** $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 5 & 8\\ 2 & 2\end{pmatrix}\cdot X = \begin{pmatrix}3 & 4\\ 7 & 10\\ 13 & 18\\ 4 & 6\end{pmatrix}$.

3. $9x^2 + 4y^2 - 36x + 8y + 4 = 0$.

4. Составить каноническое уравнение гиперболы, если ее асимптоты задаются уравнениями $x - 3y + 7 = 0$ и $x + 3y - 5 = 0$, а одна из директрис совпадает с осью ординат.

5. $A(22,-14,\ 23)$, $B(4,\ 10,-7)$, $C(-8,\ 16,-1)$, $D(10,\ 4,\ 11)$.

6. L_n –линейное пространство многочленов, порядок которых не превышает n, с базисом $\{1,\ x,...,x^n\}$. $Ap=\int\limits_0^x (3t+2)p(t)dt$, где $p(x)\in L_3$, $Ap\in L_5$.

7. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{cases} f_1=2e_1+e_3, \\ f_2=e_2-2e_3, \\ f_3=e_1-e_2+2e_3. \end{cases}$ **8.** $A=\begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

9. $5x_1^2-6x_1x_2-6x_1x_3+3x_2^2+6x_2x_3+3x_3^2$. **10.** $3x^2-2xy+3y^2-6x+2y+1=0$.

Вариант 7

1. $\begin{cases} x_1+x_2-x_3+x_5=-1, \\ 3x_1-x_2-7x_3-4x_4-3x_5=11, \\ 7x_1-x_2-15x_3-8x_4+6x_5=32, \\ x_1-x_2-3x_3-2x_4-x_5=7. \end{cases}$ **2.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -6 & -12 \end{pmatrix}$.

3. $4x^2+20x-12y+43=0$.

4. Составить каноническое уравнение гиперболы с центром в точке $(-15,\ 0)$ и одним из фокусов, расположенном в начале координат, если гипербола отсекает от оси ординат хорду длиной 32.

5. $A(-5,\ 4,-2)$, $B(4,-2,\ 4)$, $C(4,-5,\ 10)$, $D(-2,\ 1,-5)$.

6. L – линейное пространство квадратных матриц второго порядка с базисом $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. $A(X)=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}\cdot\left(X+X^T\right)$, где $X\in L$. Здесь X^T – транспонированная матрица X.

7. $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 \\ 1 & 2 & -3 \\ 5 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, $\begin{cases} f_1=3e_1-e_2+2e_3, \\ f_2=-e_1+2e_2+e_3, \\ f_3=e_1-e_2+e_3. \end{cases}$ **8.** $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 4 & 2 & -4 \\ 4 & -4 & 2 \end{pmatrix}$.

9. $3x_1^2-6x_1x_2+8x_1x_3+x_2^2-6x_2x_3+4x_3^2$. **10.** $5x^2-2xy+5y^2+10x-2y+1=0$.

Вариант 8

1. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 6x_4 = 10, \\ 2x_1 - 6x_2 + 6x_3 - x_5 = 1, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + 6x_4 - 6x_5 = 4, \\ 2x_1 - 10x_2 + 11x_3 + 4x_5 = 7. \end{cases}$ **2.** $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 14 & 21 \\ -3 & -6 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 14 & 21 \\ -6 & -12 & -18 \end{pmatrix}.$

3. $16x^2 - 9y^2 - 64x - 54y - 161 = 0.$

4. Составить каноническое уравнение эллипса с фокусами $F_1(-2,\ 1)$, $F_2(4,\ 1)$ и директрисой $x = 5$.

5. $A(4,\ 2,-6)$, $B(1,-1,\ 3)$, $C(-5,-7,\ 6)$, $D(-2,\ 5,\ 0)$.

6. L – пространство геометрических векторов плоскости с базисом $\{\vec{i}, \vec{j}\}$.
A – оператор симметрии относительно прямой $x\sqrt{3} - y = 0$.

7. $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{cases} f_1 = 2e_2 + e_3, \\ f_2 = e_1 - e_3, \\ f_3 = e_1 + 2e_2 + e_3. \end{cases}$ **8.** $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & -4 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$

9. $-3x_1^2 - 6x_1x_2 + 6x_1x_3 + 6x_2x_3 + x_3^2$. **10.** $4x^2 - 2xy + 4y^2 - 10x + 10y + 1 = 0.$

Вариант 9

1. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 8x_4 + x_5 = -4, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 - 3x_5 = 3, \\ -2x_1 + 6x_2 - 8x_3 + 34x_4 + 5x_5 = -22, \\ 2x_1 + 9x_2 - 7x_3 + 41x_4 + 3x_5 = -23. \end{cases}$ **2.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 4 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \\ 8 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$

3. $5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y + 9 = 0.$

4. Составить каноническое уравнение гиперболы с фокусами $F_1(1,-1)$ и $F_2(1,\ 5)$, угол между асимптотами которой равен 60^0.

5. $A(-4,\ 6,\ 1)$, $B(1,-4,\ 6)$, $C(6,\ 6,-9)$, $D(1,-4,-4)$.

6. L – линейное пространство функций вида $y(x)=c_1+c_2\cos x+c_3\sin x$ с базисом $\{1,\cos x,\sin x\}$. $Ay=y''(x)-2y'(x)+2y(x)$, где $y(x)\in L$.

7. $A=\begin{pmatrix}2&0&1\\3&5&-5\\2&2&-1\end{pmatrix}$, $\begin{cases}f_1=3e_1+e_2+2e_3,\\f_2=-2e_1+2e_2+e_3,\\f_3=-e_1+3e_2+2e_3.\end{cases}$ **8.** $A=\begin{pmatrix}5&-2&-2\\-2&4&0\\-2&0&6\end{pmatrix}$.

9. $-4x_1^2+16x_1x_2-3x_2^2-20x_3^2$. **10.** $7x^2+16xy-23y^2-14x-16y+32=0$.

Вариант 10

1. $\begin{cases}x_1+3x_2-x_3-6x_4+3x_5=3,\\-2x_1+x_2-x_3-3x_4-x_5=-1,\\x_1+2x_2-3x_3+x_4+2x_5=2,\\-4x_1+x_2-4x_3+x_4+x_5=1.\end{cases}$ **2.** $X\cdot\begin{pmatrix}1&1&0\\1&-2&3\\6&3&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&4&3\\1&-2&3\end{pmatrix}$.

3. $x^2+4x-4y+8=0$.

4. Составить каноническое уравнение эллипса с фокусами $F_1(-1,\ 1)$, $F_2(3,\ 1)$ и директрисой $x=5$.

5. $A(19,-11,\ 18)$, $B(-2,\ 10,-3)$, $C(5,\ 3,-10)$, $D(12,-18,\ 11)$.

6. L –линейное пространство функций вида $y(x)=c_1+c_2\cos x+c_3\sin x$ с базисом $\{1,\cos x,\sin x\}$. $Ay=y(x+\pi/6)-y(x-\pi/6)+2y(x)$, где $y(x)\in L$. Здесь X^T – транспонированная матрица X.

7. $A=\begin{pmatrix}1&-2&3\\-4&5&-6\\7&-8&9\end{pmatrix}$, $\begin{cases}f_1=e_2+2e_3,\\f_2=e_1-e_3,\\f_3=e_1+e_2+2e_3.\end{cases}$ **8.** $A=\begin{pmatrix}3&-2&0\\2&-5&2\\0&-4&3\end{pmatrix}$.

9. $8x_1^2+16x_1x_2+16x_1x_3+4x_2^2+8x_2x_3+8x_3^2$. **10.** $xy-2x-2y+2=0$.

Вариант 11

1. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_4 = 6, \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_5 = 1, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 4, \\ 4x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 3x_5 = 0. \end{cases}$ **2.** $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -3 \\ 4 & 6 \\ -4 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}.$

3. $4x^2 + 3y^2 - 8x + 12y - 32 = 0$.

4. Составить каноническое уравнение параболы, симметричной относительно оси абсцисс, если ее вершина расположена в точке $(-5,\ 0)$, а на оси ординат она отсекает хорду, длина которой равна 32.

5. $A(4,-2,\ 3)$, $B(4,\ 0,\ 2)$, $C(1,\ 3,\ 2)$, $D(-1,\ 0,\ 2)$.

6. L – линейное пространство функций вида $y(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 x^2 e^x$ с базисом $\left\{e^x, xe^x, x^2 e^x\right\}$. $Ay = y'(x) + 3y(x)$, где $y(x) \in L$.

7. $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -6 & -2 & 9 \\ 0 & 11 & -3 \end{pmatrix}$, $\begin{cases} f_1 = 5e_1 + 2e_2 + 3e_3, \\ f_2 = 2e_1 + 4e_2 - e_3, \\ f_3 = e_1 + 3e_2 - e_3. \end{cases}$ **8.** $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -2 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$

9. $4x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_2^2 - 2x_2x_3 + 4x_3^2$. **10.** $6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0$.

Вариант 12

1. $\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 10x_4 + x_5 = 2, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 10x_4 - 3x_5 = -6, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 2, \\ 7x_1 + 10x_2 + 6x_3 - 10x_4 - 2x_5 = -4. \end{cases}$ **2.** $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ -5 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

3. $16x^2 - 4y^2 + 16x + 12y - 9 = 0$.

4. Составить каноническое уравнение эллипса с осями, параллельными осям координат, если он касается оси ординат в точке $(0,\ 3)$ и пересекает ось абсцисс в точках $(3,\ 0)$ и $(7,\ 0)$.

5. $A(-1,\ 0,\ 7)$, $B(2,\ 3,-2)$, $C(8,\ 9,-5)$, $D(5,-3,\ 1)$.

6. L – пространство геометрических векторов с базисом $\left\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right\}$. A – оператор ортогонального проектирования на плоскость $2x - 2y + z = 0$: $A\vec{x} = \vec{x} - (\vec{x}, \vec{n})\vec{n}$, где $\vec{x} \in L$, $\vec{n}$ – единичный нормальный вектор плоскости.

7. $A=\begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ -5 & 4 & -1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{cases} f_1 = e_1 - e_2 + 2e_3, \\ f_2 = e_1 + e_3, \\ f_3 = 3e_1 + e_2. \end{cases}$ **8.** $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 8 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

9. $4x_1^2 - 8x_1x_2 + 16x_1x_3 + 9x_2^2 - 16x_2x_3 + 10x_3^2$. **10.** $4x^2 - 4xy + y^2 - 2x - 14y + 7 = 0$.

Вариант 13

1. $\begin{cases} 3x_1 - 7x_2 + 7x_3 - 2x_4 - 12x_5 = 10, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 3, \\ 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 - 3x_5 = 7, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 4. \end{cases}$ **2.** $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 6 & 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

3. $4x^2 - 8x - y + 7 = 0$.

4. Составить каноническое уравнение эллипса с директрисами $x=-2$ и $x=4$, фокус которого расположен в точке $F(0,\ 3)$.

5. $A(8,\ 1,\ 7)$, $B(9,\ 7,\ 4)$, $C(6,\ 16,\ 4)$, $D(1,\ 7,\ 4)$.

6. L –линейное пространство квадратных матриц второго порядка с базисом $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. $A(X) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X^T$, где $X \in L$.
Здесь X^T – транспонированная матрица X.

7. $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 5 & -3 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{cases} f_1 = 5e_1 - 2e_2 + e_3, \\ f_2 = 2e_1 - e_2 + e_3, \\ f_3 = 4e_1 + e_2 - 6e_3. \end{cases}$ **8.** $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & -2 & -1 \\ 6 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

9. $8x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_2^2 - 2x_2x_3 - 7x_3^2$. **10.** $x^2 - 3xy + y^2 - 6x + 4y - 1 = 0$.

Вариант 14

1. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 - 4x_5 = 5, \\ x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = -2, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_4 - 3x_5 = 3, \\ -7x_2 + 3x_3 + 3x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$ **2.** $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$.

3. $2x^2 - 3y^2 + 20x + 6y + 22 = 0$.

4. Составить каноническое уравнение параболы с фокусом $F(-2,4)$ и директрисой, совпадающей с осью ординат.

5. $A(12,-15,-5)$, $B(-3,\ 15,-20)$, $C(-18,-15,\ 25)$, $D(-3,\ 15,\ 10)$.

6. L –линейное пространство многочленов, порядок которых не превышает трех, с базисом $\{1,\ x,\ x^2, x^3\}$. $Ap = p(x) - p(x+1) + p(x+2)$, где $p(x) \in L$.

7. $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{cases} f_1 = 2e_1 + 3e_2 - e_3, \\ f_2 = e_1 + 2e_2, \\ f_3 = e_1 - e_2 + e_3. \end{cases}$ **8.** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 6 & -4 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

9. $-x_1^2 + 8x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2^2 + 8x_2x_3 - x_3^2$. **10.** $2x^2 - 2xy + 2y^2 + 6x - 6y - 3 = 0$.

Вариант 15

1. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 - 14x_4 + x_5 = 22, \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = -9, \\ -4x_1 - 3x_2 + 11x_3 - 19x_4 + 2x_5 = 17, \\ 3x_1 + x_2 - 7x_3 + 8x_4 - 2x_5 = -3. \end{cases}$ **2.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. $4x^2 + 36y^2 - 8x + 36y + 9 = 0$.

4. Составить каноническое уравнение параболы, если ее директриса задана уравнением $y + 4 = 0$, а фокус расположен в точке $F(2,-6)$.

5. $A(-16,\ 12,-15)$, $B(2,-12,\ 15)$, $C(14,-18,\ 9)$, $D(-4,-6,-3)$.

6. L –линейное пространство многочленов, порядок которых не превышает трех, с базисом $\{1,\ x,\ x^2, x^3\}$. $Ap = (x^2 + x + 1)p''(x) + (x+1)p'(x) + p(x)$, где $p(x) \in L$.

7. $A = \begin{pmatrix} -4 & -8 & 12 \\ 8 & 2 & -20 \\ 2 & -4 & -6 \end{pmatrix}$, $\begin{cases} f_1 = -e_1 + e_3, \\ f_2 = 2e_1 + e_2 - e_3, \\ f_3 = e_1 + 2e_2 - 3e_3. \end{cases}$ **8.** $A = \begin{pmatrix} -2 & 6 & 8 \\ 4 & -4 & -8 \\ -4 & 6 & 10 \end{pmatrix}$.

9. $2x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 5x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2$. **10.** $3x^2 - 24xy + 3y^2 - 30x + 60y + 10 = 0$.

Вариант 16

1. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 5x_4 - 2x_5 = -2, \\ -2x_1 + x_2 - 5x_3 - 3x_5 = -3, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 7x_4 + 6x_5 = 6, \\ 9x_1 + 18x_3 - 9x_4 - x_5 = -1. \end{cases}$ **2.** $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 0 & -7 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 7 \\ 1 & -7 \end{pmatrix}$.

3. $2y^2 - x - 12y + 14 = 0$.

4. Составить каноническое уравнение эллипса с фокусами $F_1(-1,\ 3)$, $F_2(5,\ 3)$ и вершиной $A(2,\ 5)$.

5. $A(3,-6,\ 0)$, $B(-6,\ 0,-6)$, $C(-6,\ 3,-12)$, $D(0,-3,\ 3)$.

6. L –линейное пространство многочленов, порядок которых не превышает трех, с базисом $\{1,\ x,\ x^2, x^3\}$. $Ap = (x^2 + 5x + 3)p''(x) + (4x + 10)p'(x)$, где $p(x) \in L$.

7. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ -1 & -2 & 4 \\ -3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, $\begin{cases} f_1 = e_1 + 2e_2 - 2e_3, \\ f_2 = e_1 + e_2 - e_3, \\ f_3 = 3e_1 + e_3. \end{cases}$ **8.** $A = \begin{pmatrix} 7 & -1 & -3 \\ 0 & 6 & 2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

9. $x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - x_2^2 - 2x_2x_3 - 4x_3^2$. **10.** $x^2 + 4xy + y^2 - 2x - 4y - 5 = 0$.

Вариант 17

1. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_5 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 9x_4 + 2x_5 = 1. \end{cases}$ **2.** $\begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 5 & -25 & 15 \\ 2 & -10 & 6 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 20 & -10 \\ 8 & -4 \end{pmatrix}$.

3. $100x^2 - 16y^2 - 100x - 16y + 17 = 0$.

4. Составить каноническое уравнение эллипса, эксцентриситет которого равен $\varepsilon = 1/2$, директрисы задаются уравнениями $y = 5$ и $y = -3$, зная, что этот эллипс проходит через точку $(2,\ 3)$.

5. $A(-2,\ 1,\ 7)$, $B(1,\ 4,-2)$, $C(7,\ 10,-5)$, $D(4,-2,\ 1)$.

6. L –линейное пространство многочленов, порядок которых не превышает трех, с базисом $\{1,\ x,\ x^2, x^3\}$. $Ap = p(x+1) - 2p(x) + p(x-1)$, где $p(x) \in L$.

7. $A=\begin{pmatrix} 3 & -9 & 0 \\ 0 & 12 & -3 \\ -6 & -3 & 9 \end{pmatrix}$, $\begin{cases} f_1=3e_1-e_2+4e_3, \\ f_2=-e_1+e_2+e_3, \\ f_3=2e_1-e_2. \end{cases}$ **8.** $A=\begin{pmatrix} 8 & 2 & 6 \\ -8 & -1 & -7 \\ -6 & -2 & -4 \end{pmatrix}$.

9. $x_1^2-2x_1x_2-4x_1x_3+4x_2^2+4x_2x_3+4x_3^2$. **10.** $7x^2-10xy+7y^2-20x+28y+16=0$.

Вариант 18

1. $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3-x_4+x_5=0, \\ 5x_1+x_2-2x_3-5x_4-4x_5=5, \\ 4x_1-2x_2+5x_3-7x_4-11x_5=19, \\ x_1-5x_2+7x_3-8x_4-19x_5=24. \end{cases}$ **2.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

3. $4x^2+3y^2+18y+15=0$.

4. Составить каноническое уравнение гиперболы с вершинами в точках $A(3,-2)$ и $B(5,-2)$, если эксцентриситет гиперболы равен $\varepsilon=3$.

5. $A(-11,\ 19,\ 4)$, $B(4,-11,\ 19)$, $C(19,\ 19,-26)$, $D(4,-11,-11)$.

6. L –линейное пространство многочленов, порядок которых не превышает трех, с базисом $\{1,\ x,\ x^2,x^3\}$. $Ap=xp(x+1)-xp(x)+2p(x)$, где $p(x)\in L$.

7. $A=\begin{pmatrix} 1 & -5 & -2 \\ 0 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$, $\begin{cases} f_1=e_1-e_2-2e_3, \\ f_2=e_1+2e_2-e_3, \\ f_3=e_1+2e_2. \end{cases}$ **8.** $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & -5 & 4 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

9. $2x_1^2-4x_1x_2+8x_1x_3-x_2^2+4x_2x_3-x_3^2$. **10.** $x^2-18xy+y^2+54x-6y-31=0$.

Вариант 19

1. $\begin{cases} x_1+3x_2+4x_4=8, \\ 2x_1-4x_2+4x_3-x_5=1, \\ 3x_1+x_2+x_3+4x_4-4x_5=4, \\ x_1+x_2+3x_3+4x_4+3x_5=12. \end{cases}$ **2.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

3. $7x^2-5y^2-14x-20y+22=0$.

4. Составить каноническое уравнение эллипса, если его фокусы совпадают с точками $F_1(-2,-1)$, $F_2(-2,\ 3)$, а одна из вершин расположена в точке $A(0,\ 1)$.

5. $A(-2,\ 6,\ 3)$, $B(-1,\ 6,\ 5)$, $C(-1,\ 3,\ 8)$, $D(-1,\ 1,\ 5)$.

6. L_n –линейное пространство многочленов, порядок которых не превышает n, с базисом $\{1,\ x,...,x^n\}$. $Ap=\int\limits_0^x (t+1)p'(t)dt$, где $p(x)\in L_4$, $Ap\in L_5$.

7. $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & 3 \\ -5 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{cases} f_1=e_1+2e_2-e_3, \\ f_2=3e_1+2e_2-4e_3, \\ f_3=e_1-3e_2-2e_3. \end{cases}$ **8.** $A=\begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & 3 \\ -3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

9. $-x_1^2-6x_1x_2-6x_1x_3+5x_2^2+3x_3^2$. **10.** $2x^2-2xy+2y^2+8x-4y-1=0$.

Вариант 20

1. $\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3-2x_4+x_5=-8, \\ 3x_1+2x_2-x_3+x_4-7x_5=4, \\ 4x_1-9x_2-3x_3-12x_4+19x_5=-28, \\ 7x_1+4x_3-3x_4+11x_5=5. \end{cases}$ **2.** $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 & -8 \\ -6 & -10 \end{pmatrix}$.

3. $x^2+4y^2-8x+20y+5=0$.

4. Составить уравнение параболы с фокусом $F(-1,-1)$ и директрисой $x+y=0$.

5. $A(-7,\ 13,\ 13)$, $B(14,-8,-8)$, $C(7,-15,-1)$, $D(-14,\ 6,\ 6)$.

6. L –линейное пространство квадратных матриц второго порядка с базисом $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. $A(X)=X^T\cdot\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$, где $X\in L$. Здесь X^T – транспонированная матрица X.

7. $A=\begin{pmatrix} -2 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{cases} f_1=e_2-e_3, \\ f_2=-e_1+e_2, \\ f_3=e_1-e_2+e_3. \end{cases}$ **8.** $A=\begin{pmatrix} 7 & -2 & -12 \\ -2 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -4 \end{pmatrix}$.

9. $x_1^2-4x_1x_2-2x_1x_3+5x_2^2-4x_2x_3-x_3^2$. **10.** $2x^2-6xy+2y^2+12x-8y+3=0$.

Вариант 21

1. $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 1, \\ 4x_1 - 10x_2 + 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 1, \\ 2x_1 - 14x_2 + 7x_3 - 7x_4 + 11x_5 = -1. \end{cases}$ **2.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -4 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}.$

3. $4x^2 - 9y^2 - 90y - 261 = 0.$

4. Составить каноническое уравнение эллипса, один из фокусов которого расположен в точке $F(\sqrt{3}-1,\ 2)$, а соответствующая этому фокусу директриса задана уравнением $x = \dfrac{4\sqrt{3}}{3} - 1$, если точка $A(-3,\ 2)$ является вершиной этого эллипса.

5. $A(-8,\ 6,\ 3)$, $B(-2,\ 3,\ 4)$, $C(7,\ 3,\ 1)$, $D(-2,\ 3,-4)$.

6. L –линейное пространство квадратных матриц второго порядка с базисом $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. $A(X) = \left(X \cdot \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \right)^T$, где $X \in L$.

Здесь B^T – транспонированная матрица B.

7. $A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \\ -4 & -16 & -4 \end{pmatrix}$, $\begin{cases} f_1 = 4e_1 - 3e_2 + 2e_3, \\ f_2 = -3e_1 + 2e_2 + 4e_3, \\ f_3 = -e_1 + e_2 - 2e_3. \end{cases}$ **8.** $A = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 6 \\ -1 & 9 & 6 \\ 2 & -10 & -6 \end{pmatrix}.$

9. $2x_1^2 + 6x_1x_2 - 2x_1x_3 - 3x_2^2 - 6x_2x_3 + x_3^2.$ **10.** $2x^2 - 4xy + 2y^2 - 5x + 3y + 10 = 0.$

Вариант 22

1. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - 5x_4 + x_5 = 2, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - 4x_4 - 2x_5 = -6, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 3x_5 = 24, \\ 2x_1 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 10. \end{cases}$ **2.** $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ -4 & 2 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$

3. $9x^2 + 25y^2 - 18x + 100y + 108 = 0.$

4. Составить каноническое уравнение гиперболы с центром $O(2,-3)$, фокусом $F_1(2,\ 1)$ и эксцентриситетом $\varepsilon = 4$.

5. $A(7,-19,\ 0)$, $B(-8,\ 11,-15)$, $C(-23,-19,\ 30)$, $D(-8,\ 11,\ 15)$.

6. L –линейное пространство квадратных матриц второго порядка с базисом $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$. $A(X)=\left(\begin{pmatrix}-1&3\\7&1\end{pmatrix}\cdot X\right)^T$, где $X\in L$. Здесь B^T – транспонированная матрица B.

7. $A=\begin{pmatrix}7&6&0\\-1&3&5\\-1&2&4\end{pmatrix}$, $\begin{cases}f_1=e_1-e_3,\\ f_2=e_1-e_2,\\ f_3=-e_1+e_2+e_3.\end{cases}$ **8.** $A=\begin{pmatrix}3&4&-8\\2&5&-8\\2&4&-7\end{pmatrix}$.

9. $-x_1^2-2x_1x_2-8x_1x_3-2x_2^2+2x_2x_3+4x_3^2$. **10.** $x^2-4xy+y^2+4x-8y+13=0$.

Вариант 23

1. $\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=7,\\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=-2,\\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=23,\\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=12.\end{cases}$ **2.** $\begin{pmatrix}1&-2&1\\-1&-1&5\\-3&3&3\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}2&-4\\4&-2\\0&6\end{pmatrix}$.

3. $36x^2-100y^2+108x+100y+52=0$.

4. Составить каноническое уравнение эллипса с директрисами $y=-2$, $y=8$ и эксцентриситетом $\varepsilon=3/5$, если центр эллипса лежит на прямой $y=x$.

5. $A(-2,\ 2,\ 12)$, $B(1,\ 5,\ 3)$, $C(7,\ 11,\ 0)$, $D(4,-1,\ 6)$.

6. L – линейное пространство квадратных матриц второго порядка с базисом $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$. $A(X)=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix}0&2\\1&0\end{pmatrix}$, где $X\in L$.

7. $A=\begin{pmatrix}2&-10&3\\0&2&5\\-6&-8&-1\end{pmatrix}$, $\begin{cases}f_1=e_1+5e_2+e_3,\\ f_2=-e_1+3e_2+e_3,\\ f_3=e_1-2e_2-e_3.\end{cases}$ **8.** $A=\begin{pmatrix}1&-2&0\\-2&-1&2\\0&2&1\end{pmatrix}$.

9. $-2x_1^2-4x_1x_2-4x_1x_3+2x_2^2+4x_2x_3+x_3^2$. **10.** $x^2+xy+y^2-2x-y-2=0$.

Вариант 24

1. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 - 2x_5 = -5, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_5 = 3, \\ x_1 - 6x_2 + x_3 + 5x_4 - 7x_5 = -18, \\ 5x_1 + 5x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 1. \end{cases}$ **2.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \\ 6 & 8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

3. $16x^2 + 100y^2 - 48x - 100y + 57 = 0.$

4. Составить каноническое уравнение гиперболы с асимптотами $x - 2y - 3 = 0$ и $x + 2y + 1 = 0$, если расстояние между ее фокусами равно 20.

5. $A(6,-4,\ 1)$, $B(-3,\ 2,-5)$, $C(-3,\ 5,-11)$, $D(3,-1,\ 4)$.

6. L – пространство геометрических векторов плоскости с базисом $\{\vec{i}, \vec{j}\}$.

$A\vec{x} = (TS - ST)\vec{x}$, где T – оператор поворота на угол $\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$, а S – оператор симметрии относительно прямой $x + y = 0$.

7. $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$, $\begin{cases} f_1 = -e_2 + e_3, \\ f_2 = -e_1 + e_3, \\ f_3 = e_1 + e_2 - e_3. \end{cases}$ **8.** $A = \begin{pmatrix} 4 & -4 & -6 \\ 5 & 1 & 3 \\ -2 & -2 & -4 \end{pmatrix}.$

9. $x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2^2 + 3x_3^2.$ **10.** $5x^2 - 4xy + 2y^2 + 4x - 4y - 4 = 0.$

Вариант 25

1. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = -2, \\ 2x_1 - x_2 + 5x_5 = 18, \\ 4x_1 - 7x_2 - 5x_3 - 10x_4 = -9, \\ 3x_1 - 14x_2 - 5x_3 + 5x_4 - 5x_5 = 12. \end{cases}$ **2.** $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 3 & -6 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}.$

3. $4x^2 - y^2 + 8x + 6y - 9 = 0.$

4. Составить каноническое уравнение эллипса, если он касается оси ординат в точке $(0,\ 0)$, а его центр расположен в точке $(5,\ 0)$. Эксцентриситет эллипса равен $\varepsilon = 4/5$.

5. $A(19,\ 8,\ 4)$, $B(-2,\ 29,-17)$, $C(-9,\ 22,-10)$, $D(12,\ 1,-3)$.

6. L – пространство геометрических векторов с базисом $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

$A\vec{x} = [\vec{a}, \vec{x}] + 5[\vec{x}, \vec{b}]$, где $\vec{x} \in L$, $\vec{a} = \{1,2,2\}$ и $\vec{b} = \{1,-1,-1\}$.

7. $A=\begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 0 & 10 & 30 \\ -5 & -15 & 25 \end{pmatrix}$, $\begin{cases} f_1=-4e_1-e_2+e_3, \\ f_2=5e_1+4e_2+e_3, \\ f_3=-e_1+3e_2+2e_3. \end{cases}$ **8.** $A=\begin{pmatrix} 4 & -3 & -6 \\ -1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

9. $5x_1^2-10x_1x_2+20x_1x_3+3x_2^2-32x_2x_3+3x_3^2$. **10.** $3x^2-4xy+3y^2-12x+8y+7=0$.

Вариант 26

1. $\begin{cases} x_1+x_2-3x_4-x_5=2, \\ x_1-x_2+2x_3-x_4=0, \\ 4x_1-2x_2+6x_3+3x_4-4x_5=2, \\ 2x_1+4x_2-2x_3+4x_4-7x_5=6. \end{cases}$ **2.** $X\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & -3 \\ 2 & 2 & 6 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 8 & -1 \\ 2 & 4 & 8 & -6 \end{pmatrix}$.

3. $4x^2+9y^2-4x=0$.

4. Составить каноническое уравнение гиперболы, если ее асимптоты задаются уравнениями $x-3y+7=0$ и $x+3y-5=0$, а одна из директрис совпадает с осью ординат.

5. $A(6,-1,-2)$, $B(6,\ 1,-1)$, $C(3,\ 4,-1)$, $D(1,\ 1,-1)$.

6. L – пространство геометрических векторов с базисом $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$.

$A\vec{x}=(\vec{a},\vec{x})\vec{b}-(\vec{b},\vec{x})\vec{a}$, где $\vec{x}\in L$, $\vec{a}=\{1,\ 1,\ 2\}$ и $\vec{b}=\{2,-2,-1\}$.

7. $A=\begin{pmatrix} 2 & -2 & -10 \\ -1 & 11 & -7 \\ 1 & -23 & -5 \end{pmatrix}$, $\begin{cases} f_1=2e_1-e_2+e_3, \\ f_2=-e_1+2e_2+e_3, \\ f_3=2e_1+e_2-e_3. \end{cases}$ **8.** $A=\begin{pmatrix} 0 & -4 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

9. $-x_1^2-4x_1x_2+2x_1x_3-x_2^2-8x_2x_3+9x_3^2$. **10.** $6xy+8y^2-12x-26y+11=0$.

Вариант 27

1. $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3+x_4-x_5=0, \\ 2x_1+x_2-x_3-x_4+x_5=-1, \\ x_1+7x_2-5x_3-5x_4+5x_5=-3, \\ 3x_1-x_2-2x_3+x_4-x_5=-2. \end{cases}$ **2.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 5 & 7 & 2 \end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \\ 3 & 12 \end{pmatrix}$.

3. $25x^2-9y^2+150x+18y-9=0$.

4. Составить каноническое уравнение эллипса с эксцентриситетом $\varepsilon = 2/3$, если один из его фокусов расположен в точке $F_1(2,-3)$ и директриса, соответствующая второму фокусу, имеет уравнение $2y-7=0$.

5. $A(-6,\ 22,\ 5)$, $B(9,-8,\ 20)$, $C(24,\ 22,-25)$, $D(9,-8,-10)$.

6. L – линейное пространство квадратных матриц второго порядка с базисом $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$. $A(X)=\begin{pmatrix}-1&3\\3&-1\end{pmatrix}\cdot X$, где $X\in L$.

7. $A=\begin{pmatrix}5&-5&15\\4&6&-8\\10&-10&20\end{pmatrix}$, $\begin{cases}f_1=e_1-e_2+3e_3,\\f_2=3e_1+e_2-e_3,\\f_3=2e_1-e_2+e_3.\end{cases}$ **8.** $A=\begin{pmatrix}0&10&3\\1&9&3\\-2&-28&-9\end{pmatrix}$.

9. $x_1^2+2x_1x_2-2x_1x_3+3x_2^2-10x_2x_3+11x_3^2$. **10.** $11x^2-20xy-4y^2-20x-8y+1=0$.

Вариант 28

1. $\begin{cases}x_1-2x_2+x_3-x_4+x_5=1,\\2x_1+x_2-x_3+2x_4-3x_5=-2,\\3x_1-2x_2-x_3+x_4-2x_5=-2,\\2x_1-5x_2+x_3-2x_4+2x_5=1.\end{cases}$ **2.** $\begin{pmatrix}2&-2&1&-1\\1&-1&2&-2\\-1&1&-1&1\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}2&1&-4\\4&-1&-2\\-2&0&2\end{pmatrix}$.

3. $y^2-6x-2y-17=0$.

4. Составить каноническое уравнение гиперболы, фокусы которой расположены в точках $F_1(-2,\ 1)$ и $F_2(-2,\ 5)$, а одна из директрис удалена от центра гиперболы на расстояние, равное 1.

5. $A(4,\ 3,-3)$, $B(1,\ 4,\ 3)$, $C(1,\ 1,\ 12)$, $D(1,-4,\ 3)$.

6. L – пространство геометрических векторов с базисом $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$. A – оператор ортогонального проектирования на плоскость $5y-12z=0$: $A\vec{x}=\vec{x}-(\vec{x},\vec{n})\vec{n}$, где $\vec{x}\in L$, $\vec{n}$ – единичный нормальный вектор плоскости.

7. $A=\begin{pmatrix}5&-2&1\\2&3&1\\4&-2&3\end{pmatrix}$, $\begin{cases}f_1=2e_1+e_2-e_3,\\f_2=-e_1+e_2+2e_3,\\f_3=2e_1-e_2+e_3.\end{cases}$ **8.** $A=\begin{pmatrix}3&0&2\\0&5&-2\\2&-2&4\end{pmatrix}$.

9. $x_1^2-6x_1x_2+2x_1x_3+10x_2^2-2x_2x_3+4x_3^2$. **10.** $5x^2+8xy+5y^2-18x-18y+9=0$.

Вариант 29

1. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 + x_5 = 2, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_4 - 2x_5 = 1, \\ 3x_1 + x_2 + 6x_3 + 6x_4 + 4x_5 = 3, \\ 5x_1 + 9x_3 + 10x_4 + 5x_5 = 4. \end{cases}$ **2.** $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

3. $16x^2 + y^2 + 48x + 32 = 0$.

4. Составить каноническое уравнение гиперболы с одним из фокусов, расположенном в начале координат, и соответствующей директрисой, заданной уравнением $x + 3 = 0$, если угол между асимптотами гиперболы равен 60^0.

5. $A(-7,\ 8,\ 11)$, $B(5,-7,\ 2)$, $C(8,-4,-4)$, $D(2,\ 2,\ 5)$.

6. L **–** пространство геометрических векторов плоскости с базисом $\{\vec{i}, \vec{j}\}$.

A – оператор симметрии относительно прямой $y = 3x$.

7. $A = \begin{pmatrix} 8 & -16 & 24 \\ 4 & 6 & -8 \\ 4 & -8 & 12 \end{pmatrix}$, $\begin{cases} f_1 = -3e_1 - 2e_2 + e_3, \\ f_2 = 5e_1 + 3e_2 + e_3, \\ f_3 = e_1 + 2e_2 - 3e_3. \end{cases}$ **8.** $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & -5 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

9. $x_1^2 - 4x_1x_3 - x_2^2 - 6x_2x_3$. **10.** $5x^2 - 14xy + 5y^2 + 20x - 28y + 32 = 0$.

Вариант 30

1. $\begin{cases} 7x_1 - x_2 + 12x_3 + 14x_4 + 6x_5 = 7, \\ 5x_1 + 9x_3 + 10x_4 + 5x_5 = 5, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 3x_1 + x_2 + 6x_3 + 6x_4 + 4x_5 = 3. \end{cases}$ **2.** $X \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \\ 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}.$

3. $4x^2 - 25y^2 + 16x - 50y - 109 = 0$.

4. Составить каноническое уравнение эллипса с центром в точке $(2,-1)$, если его малая ось равна 4, а одна из директрис задана уравнением $y + 5 = 0$.

5. $A(7,-7,-10)$, $B(1,-1,-1)$, $C(-2,\ 5,-1)$, $D(4,-10,-7)$.

6. L **–** пространство геометрических векторов плоскости с базисом $\{\vec{i}, \vec{j}\}$.

$A\vec{x} = (TP - PT)\vec{x}$, где T – оператор поворота на угол $\frac{\pi}{6}$, а P – оператор проектирования на ось Ox.

7. $A=\begin{pmatrix} 1 & 11 & -19 \\ 1 & -9 & 21 \\ -3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$, $\begin{cases} f_1 = -2e_1 - e_3, \\ f_2 = e_1 + e_2 + 2e_3, \\ f_3 = -2e_1 - 2e_2 + e_3. \end{cases}$ **8.** $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & -2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

9. $x_1^2 - 4x_1x_2 - 6x_1x_3 + 5x_2^2 + 4x_2x_3 + 32x_3^2$. **10.** $x^2 - 2xy + y^2 + 6x + 2y + 5 = 0$.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Задание 1

Исследовать систему линейных уравнений $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 - x_3 + 3x_4 = -2, \\ x_1 - 9x_2 - 2x_3 + 4x_4 = -5, \\ 5x_1 - 59x_2 - 13x_3 + 25x_4 = -33 \end{cases}$ *на совместность, найти общее решение, указать фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы и частное решение данной неоднородной системы.*

Составим расширенную матрицу системы и приведем ее к треугольному виду методом Гаусса. При этом сразу переставим первые два уравнения системы, поскольку для удобства преобразований левый верхний элемент должен быть равен единице:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -9 & -2 & 4 & -5 \\ 2 & -4 & -1 & 3 & -2 \\ 5 & -59 & -13 & 25 & -33 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -9 & -2 & 4 & -5 \\ 0 & 14 & 3 & -5 & 8 \\ 0 & -14 & -3 & 5 & -8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -9 & -2 & 4 & -5 \\ 0 & 14 & 3 & -5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -9 & -2 & 4 & -5 \\ 0 & 14 & 3 & -5 & 8 \end{array}\right)$. Здесь мы прибавили ко второй строке исходной матрицы первую, умноженную на -2, а к третьей — первую, умноженную на -5, затем прибавили к третьей строке получившейся матрицы вторую. Нулевые строки вычеркиваются. Если в результате преобразований в какой-то строке до вертикальной черты (указывающей на положение знаков равенства в уравнениях системы) все элементы будут равны нулю, а после черты получится число, отличное от нуля, то это указывает на несовместность системы. Наша система совместна, так как ранг матрицы системы и ранг расширенной матрицы совпадают и равны 2. Порядок системы — это число неизвестных, т. е. 4. Разность порядка и ранга (у нас $4-2=2$) равно количеству неизвестных, которые могут быть выбраны произвольно. Пусть $x_3 = 14c_1$, а $x_4 = 14c_2$, $c_1, c_2 \in R$. Тогда из второго уравнения

$x_2 = -3c_1 + 5c_2 + \dfrac{4}{7}$. Подставим эти выражения в первое уравнение, найдем $x_1 = 9\left(-3c_1 + 5c_2 + \dfrac{4}{7}\right) + 2\cdot 4c_1 - 4\cdot 14c_2 = -19c_1 - 11c_2 + \dfrac{36}{7}$. Запишем общее решение в матричном виде: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36/7 \\ 4/7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \cdot \begin{pmatrix} -19 \\ -3 \\ 14 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} -11 \\ 5 \\ 0 \\ 14 \end{pmatrix}$. Фундаментальной системой решений является пара векторов $(-19, -3, 14, 0)$ и $(-11, 5, 0, 14)$. Частное решение можно получить, выбрав какие-нибудь значения произвольных постоянных, например, при $c_1 = c_2 = 0$ имеем $x_1 = 36/7$, $x_2 = 4/7$, $x_3 = x_4 = 0$.

Задание 2

Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 12 \end{pmatrix}$.

В этом задании предлагается решить матричное уравнение с вырожденными или неквадратными матрицами, которые не имеют обратной матрицы, поэтому матричный метод решения к этим системам неприменим. Сначала определим размерность искомой матрицы X. В произведении AXB в левой части уравнения матрица A размера 2×2, матрица B размера 3×2, следовательно, чтобы умножение матриц было выполнимо, множитель X должен иметь размер 2×3. Значит, матрица X имеет шесть элементов, которые мы примем в качестве неизвестных: $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \end{pmatrix}$. Теперь, согласно определению произведения матриц, выполним умножение в левой части уравнения: $AXB = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_4 & 2x_2 + x_5 & 2x_3 + x_6 \\ 4x_1 + 2x_4 & 4x_2 + 2x_5 & 4x_3 + 2x_6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} -2x_1 - x_4 + 2x_2 + x_5 + 4x_3 + 2x_6 & 6x_1 + 3x_4 - 2x_3 - x_6 \\ -4x_1 - 2x_4 + 4x_2 + 2x_5 + 8x_3 + 4x_6 & 12x_1 + 6x_4 - 4x_3 - 2x_6 \end{pmatrix}$. Приравняв полученную матрицу к той, что стоит в правой части уравнения, получим систему:

$$\begin{cases} -2x_1 - x_4 + 2x_2 + x_5 + 4x_3 + 2x_6 = 2, \\ 6x_1 + 3x_4 - 2x_3 - x_6 = 6, \\ -4x_1 - 2x_4 + 4x_2 + 2x_5 + 8x_3 + 4x_6 = 4, \\ 12x_1 + 6x_4 - 4x_3 - 2x_6 = 12. \end{cases}$$

Эту систему исследуем и решим методом Гаусса, как в задании 1. Приведем расширенную матрицу системы к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} -2 & 2 & 4 & -1 & 1 & 2 & 2 \\ 6 & 0 & -2 & 3 & 0 & -1 & 6 \\ -4 & 4 & 8 & -2 & 2 & 4 & 4 \\ 12 & 0 & -4 & 6 & 0 & -2 & 12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccccc|c} -2 & 2 & 4 & -1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 6 & 10 & 0 & 3 & 5 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 20 & 0 & 6 & 10 & 24 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccccc|c} -2 & 2 & 4 & -1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 6 & 10 & 0 & 3 & 5 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

. Запишем систему, отвечающую преобразованной матрице: $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - 4x_3 + x_4 - x_5 - 2x_6 = -2, \\ 6x_2 + 10x_3 + 3x_5 + 7x_6 = 12. \end{cases}$ Ранг этой системы равен 2, а порядок равен 6, следовательно, четыре переменные могут быть выбраны произвольно. Пусть $x_3 = 3\alpha$, $x_4 = 2\beta$, $x_5 = 2\gamma$, $x_6 = 6\lambda$ (множители при произвольных константах введены для того, чтобы избежать дробных коэффициентов в окончательном решении). Тогда из системы найдем $x_1 = 1 + \alpha - \beta - \lambda$, $x_2 = 20 - 5\alpha - \gamma - 7\lambda$. Таким образом, искомая матрица $X = \begin{pmatrix} 1+\alpha-\beta-\lambda & 2-5\alpha-\gamma-7\lambda & 3\alpha \\ 2\beta & 2\gamma & 6\lambda \end{pmatrix}$, где $\alpha, \beta, \gamma, \lambda$ — произвольные числа.

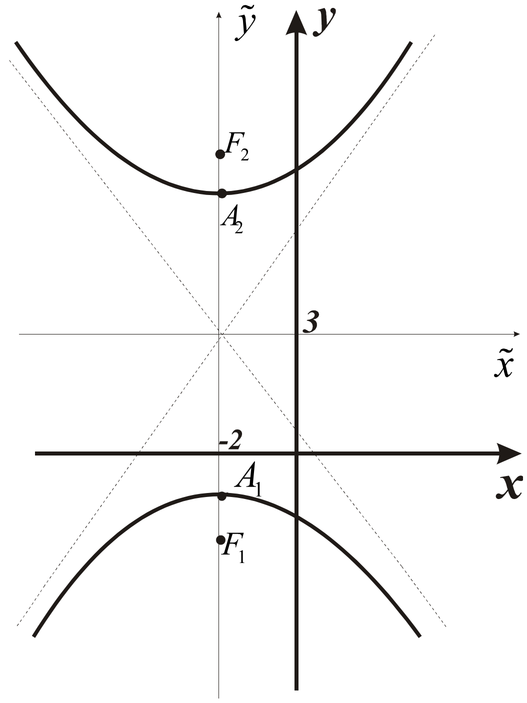
Задание 3

Привести уравнение кривой второго порядка $16x^2 - 9y^2 + 64x + 54y + 127 = 0$ *к каноническому виду, определить тип кривой, найти координаты фокусов, вершин, уравнения директрис, уравнения асимптот (для гиперболы) и построить эту кривую.*

Уравнение кривой второго порядка, не содержащее произведение xy, приводят к каноническому виду методом выделения полных квадратов:

$16x^2-9y^2+64x+54y+127=16(x^2+4x)-9(y^2-6y)+127=16\big((x+2)^2-4\big)-$ $-9\big((y-3)^2-9\big)+127=16(x+2)^2-9(y-3)^2+144=0$. Далее переносим свободный член в правую часть: $16(x+2)^2-9(y-3)^2=-144$. Делим на 144: $\frac{(x+2)^2}{9}-\frac{(y-3)^2}{16}=-1$. Обозначим $\tilde{x}=x+2$, $\tilde{y}=y-3$, тогда уравнение принимает канонический вид $\frac{\tilde{x}^2}{9}-\frac{\tilde{y}^2}{16}=-1$. Это уравнение гиперболы с фокусами, расположенными на оси Oy (так как в правой части -1, а не 1). Здесь $a^2=9,\ b^2=16,\ c^2=a^2+b^2=25$. В данном случае эксцентриситет равен $\varepsilon=\frac{c}{b}=\frac{5}{4}$. Произведем необходимые расчеты сначала в координатах $(\tilde{x},\tilde{y})$: фокусы $F_1(0,-5)$, $F_2(0,5)$; уравнения директрис $\tilde{y}=\pm\frac{b}{\varepsilon}=\pm\frac{16}{5}$; уравнения асимптот $\tilde{y}=\pm\frac{b}{a}\tilde{x}=\pm\frac{4}{3}\tilde{x}$; вершины $A_1(0,-4)$, $A_2(0,4)$. Учитывая соотношения между (x,y) и $(\tilde{x},\tilde{y})$, запишем то же самое в координатах (x,y): фокусы $F_1(-2,-2)$, $F_2(-2,8)$; директрисы $y-3=\pm\frac{16}{5}$, т. е. $y=\frac{31}{5}$, $y=\frac{1}{5}$; асимптоты $y-3=\pm\frac{4}{3}(x+2)$, т. е. $4x-3y+17=0$, $4x+3y-1=0$; вершины $A_1(-2,-1)$, $A_2(-2,7)$.

Для построения кривой удобнее это сделать в системе координат $\tilde{x}O\tilde{y}$, а затем на этом же рисунке построить оси системы координат xOy.



Задание 4

Составить уравнение эллипса с осями, параллельными осям координат, у которого расстояние между директрисами равно 8*, эксцентриситет равен* $\frac{1}{2}$*, а один из фокусов совпадает с точкой* $(-1,\ 5)$.

В подобных задачах следует определить параметры кривой второго порядка, исходя из косвенных данных, приведенных в условии. Иногда условиям задачи может удовлетворять не одна, а несколько кривых. Так, в нашем примере не указано, какой оси, Ox или Oy, параллельна большая ось эллипса. Будем считать сначала, что она параллельна оси абсцисс. Тогда центр эллипса лежит на прямой $y=5$, как и его фокус. Расстояние между директрисами равно $\frac{2a}{\varepsilon}=\frac{2a}{1/2}=8$, откуда $a=2$. Но $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$, отсюда $c=1$, значит, $b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{3}$. Центр эллипса удален от фокуса на расстояние c, поэтому его координаты или $(0,\ 5)$, или $(-2,\ 5)$. Таким образом, получаем два возможных уравнения: $\frac{x^2}{4}+\frac{(y-5)^2}{3}=1$ или $\frac{(x+2)^2}{4}+\frac{(y-5)^2}{3}=1$. Теперь рассмотрим случай, когда большая ось параллельна оси ординат. При этом центр эллипса лежит на прямой $x=-1$. Расстояние между директрисами $\frac{2b}{\varepsilon}=\frac{2b}{1/2}=8$, откуда $b=2$. Но $\varepsilon=\frac{c}{b}=\frac{1}{2}$, отсюда $c=1$, значит, $a=\sqrt{b^2-c^2}=\sqrt{3}$. Возможные координаты центра эллипса $(-1,\ 4)$ или $(-1,\ 6)$. Это приводит к двум уравнениям: $\frac{(x+1)^2}{3}+\frac{(y-4)^2}{4}=1$ или $\frac{(x+1)^2}{3}+\frac{(y-6)^2}{4}=1$. Итак, условиям задачи удовлетворяют четыре эллипса.

Задание 5

Заданы точки $A(0,\ 1,\ 0)$, $B(-1,\ 0,\ 2)$, $C(1,-1,\ 1)$ *и* $D(2,\ 2,-1)$*. Найти:*
1) скалярное произведение $(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})$ *и угол* ABC*; 2) векторное произведение* $[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}]$*; 3) смешанное произведение* $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}$ *и объем пирамиды* $ABCD$*; 4) проекцию точки* A *на прямую* BD*; 5) уравнения плоскостей* ABC, ABD *и угол между этими плоскостями; 6) площадь треугольника* BCD*; 7) расстояние от точки* B *до плоскости* ACD*; 8) канонические уравнения перпендикуляра, проведенного из точки* A *на плоскость* BCD*, и*

проекцию точки A на эту плоскость; 9) параметрические уравнения прямой DM, где M — точка пересечения медиан треугольника ABC.

1) Найдем координаты векторов $\overrightarrow{AC} = \{1-0; -1-1;\ 1-0\} = \{1,-2,\ 1\}$, $\overrightarrow{AD} = \{2-0; 2-1; -1-0\} = \{2,1,-1\}$, отсюда скалярное произведение равно $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = 1\cdot 2 + (-2)\cdot 1 + 1\cdot(-1) = -1$. Аналогично $\overrightarrow{BA} = \{1,\ 1,-2\}$, $\overrightarrow{BC} = \{2,-1,-1\}$, $\left|\overrightarrow{BA}\right| = \left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{6}$, а их скалярное произведение $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = 3$, но $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \left|\overrightarrow{BA}\right| \cdot \left|\overrightarrow{BC}\right| \cdot \cos\angle ABC$, значит, $\cos\angle ABC = \dfrac{3}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}} = \dfrac{1}{2}$, откуда $\angle ABC = 60^0$.

2) Векторы $\overrightarrow{CD} = \{1,3,-2\}$, $\overrightarrow{AB} = \{-1,-1,2\}$, их векторное произведение

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = \{-4,0,-2\}.$$

3) Смешанное произведение $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 6$; объем пирамиды составляет шестую часть объема параллелепипеда, т. е. $V_{пир} = \dfrac{1}{6}\left|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}\right| = 1$.

4) Составим параметрические уравнения прямой BD: $x = 3t-1$, $y = 2t$, $z = -3t+2$; проекцию точки A найдем как пересечение этой прямой и плоскости, проходящей через точку A перпендикулярно к этой прямой. Уравнение этой плоскости $3x + 2(y-1) - 3z = 0$. Подставив вместо x, y и z их выражения из параметрических уравнений BD, получим $3(3t-1) + 2(2t-1) - 3(-3t+2) = 0$, откуда $t = \dfrac{1}{2}$, т. е. $x = \dfrac{1}{2}$, $y = 1$, $z = \dfrac{1}{2}$.

5) Воспользуемся уравнением плоскости, проходящей через три заданные точки. Для (ABC): $\begin{vmatrix} x-0 & y-1 & z-0 \\ -1-0 & 0-1 & 2-0 \\ 1-0 & -1-1 & 1-0 \end{vmatrix} = 0$, что после раскрытия определителя и сокращения на 3 приводит к уравнению $x + y + z - 1 = 0$; аналогично составим уравнение плоскости (ABD): $x - 3y - z + 3 = 0$. Угол между ними $\varphi = \arccos\dfrac{\left|1\cdot 1 + 1\cdot(-3) + 1\cdot(-1)\right|}{\sqrt{1+1+1}\cdot\sqrt{1+9+1}} = \arccos\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{11}} \approx 58{,}5^0$.

6) Площадь треугольника найдем как половину площади параллелограмма, которая численно равна длине векторного произведения: $[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -1 & -1\\ 3 & 2 & -3\end{vmatrix}=\{5,3,7\}$, $S_{\Delta BCD}=\frac{1}{2}\cdot\left|[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}]\right|=\frac{1}{2}\sqrt{25+9+49}=\frac{1}{2}\sqrt{83}\approx 4,6$.

7) Найдем, как в пункте 5, уравнение плоскости (ACD): $x+3y+5z-3=0$. Расстояние от точки B до этой плоскости рассчитаем по формуле $d=\frac{|-1+3\cdot 0+5\cdot 2-3|}{\sqrt{1+9+25}}=\frac{6}{\sqrt{35}}\approx 1{,}01$.

8) Плоскость (BCD) : $\begin{vmatrix}x+1 & y-0 & z-2\\ 1+1 & -1-0 & 1-2\\ 2+1 & 2-0 & -1-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x+1 & y & z-2\\ 2 & -1 & -1\\ 3 & 2 & -3\end{vmatrix}=$ $=5(x+1)+3y+7(z-2)=5x+3y+7z-9=0$. Канонические уравнения перпендикуляра из точки A на эту плоскость имеют вид $\frac{x}{5}=\frac{y-1}{3}=\frac{z}{7}$; проекцию точки A на плоскость (BCD) найдем как пересечение этого перпендикуляра и плоскости (для этого уравнения перпендикуляра запишем в параметрическом виде, см. п. 4). В результате получим $x=\frac{30}{83}\approx 0{,}36$, $y=\frac{101}{83}\approx 1{,}22$, $z=\frac{42}{83}\approx 0{,}51$.

9) Найдем координаты точки M пересечения медиан треугольника ABC. Координаты середины BC — это $E\left(\frac{-1+1}{2},\frac{0-1}{2},\frac{2+1}{2}\right)=(0;-0{,}5;\ 1{,}5)$. Точка M делит отрезок AE в отношении $2:1$, отсюда ее координаты $M\left(\frac{0+2\cdot 0}{3},\frac{1+2\cdot(-0{,}5)}{3},\frac{0+2\cdot 1{,}5}{3}\right)=(0;0;\ 1)$. Направляющим вектором искомой прямой является $\overrightarrow{DM}=\{-2,-2,\ 2\}\,||\,\{1,1,-1\}$. Ее параметрические уравнения $x=t+2$, $y=t+2$, $z=-t-1$.

Задание 6

В шестом задании предлагается найти матрицу линейного оператора в указанном базисе. В качестве примеров рассматриваются интегральные, дифференциальные, разностные операторы, а также различные геометрические преобразования: симметрия, проектирование и т. п. Для построения матрицы оператора следует применить его к каждому из базисных векторов, и результат, записанный в этом же базисе (в случае преобразования линейного пространства) или в базисе пространства-образа, образует соответствующий столбец искомой матрицы линейного оператора.

Пусть L *– линейное пространство многочленов, порядок которых не превышает трех, и* $p(x)\in L$ *. Найти матрицу оператора* A *в базисе* $\left\{x^3, x^2, x, 1\right\}$*, если* $Ap = p(x-1) + p(2x) - 5p(x+1)$.

Обратим внимание, что порядок векторов в указанном базисе нельзя менять, поэтому применяем указанный в условии оператор ко всем векторам поочередно.

$A(x^3) = (x-1)^3 + (2x)^3 - 5(x+1)^3 = 4x^3 - 18x^2 - 12x - 6 = \{4, -18, -12, -6\}$.

(Указаны координаты преобразованного вектора в исходном базисе.)

$A(x^2) = (x-1)^2 + (2x)^2 - 5(x+1)^2 = -12x - 4 = \{0,\ 0, -12, -4\}$,

$A(x) = (x-1) + (2x) - 5(x+1) = -2x - 6 = \{0,\ 0, -2, -6\}$,

$A(1) = (1)^3 + (1)^3 - 5(1)^3 = -3 = \{0,\ 0,\ 0, -3\}$. Координаты преобразованных базисных векторов составляют столбцы матрицы линейного оператора:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ -18 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & -12 & -2 & 0 \\ -6 & -4 & -6 & -3 \end{pmatrix}$$

Задание 7

Матрица линейного преобразования $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & -4 \\ -5 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ *задана в базисе* e_1, e_2, e_3. *Найти матрицу этого преобразования в базисе* f_1, f_2, f_3*, где* $f_1 = -e_1 - 2e_2 - e_3$, $f_2 = 2e_1 + e_3$, $f_3 = 7e_1 - e_2 + 3e_3$.

Прежде всего запишем матрицу T перехода к новому базису. Для этого в столбцах этой матрицы запишем координаты новых базисных ров f_1 , f_2 , f_3 : $T = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 7 \\ -2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Определитель этой матрицы

$\det T = -1 \neq 0$, значит матрица обратима (т. е. преобразование является невырожденным). Найдем обратную матрицу: $T^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -7 & -4 & 15 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$.

Матрица в новом базисе вычисляется по формуле

$$\tilde{A} = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 9 & -18 & -63 \\ 76 & -157 & -547 \\ -21 & 42 & 146 \end{pmatrix}.$$

Задание 8

Найти собственные значения и собственные векторы матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Указать матрицу T перехода к новому базису, в котором матрица $\tilde{A}$ этого преобразования имеет диагональный вид. Сделать проверку, вычислив матрицу $\tilde{A} = T^{-1}AT$.

Собственные значения λ квадратной матрицы A— это корни характеристического уравнения $\det(A - \lambda E) = 0$, где E — единичная матрица того же порядка, что матрица A. В нашем примере характеристическое уравнение имеет вид $\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 3 \\ 1 & -3-\lambda & 0 \\ 1 & 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$. Разложим определитель по первой строке: $(1-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} -3-\lambda & 0 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3-\lambda \\ 1 & 3 \end{vmatrix} =$

$= (1-\lambda)(\lambda^2 - \lambda - 12) + 4 - \lambda + 3(\lambda + 6) = 2\lambda^2 - \lambda^3 + 13\lambda + 10 = 0$, или

$\lambda^3 - 2\lambda^2 - 13\lambda - 10 = (\lambda - 5)(\lambda + 1)(\lambda + 2) = 0$. Собственные числа равны $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = -2$. Теперь найдем отвечающие этим числам собственные векторы. Собственный вектор X является решением матричного уравнения $AX = \lambda X$ или $(A - \lambda E)X = 0$. Последнее уравнение можно записать в виде однородной системы.

Пусть $\lambda = 5$, тогда $\begin{pmatrix} -4 & -1 & 3 \\ 1 & -8 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ или $\begin{cases} -4x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 - 8x_2 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$ После преобразований по методу Гаусса приходим к системе $\begin{cases} x_1 - 8x_2 = 0, \\ 11x_2 - x_3 = 0, \end{cases}$ из которой получаем общее решение в матричном виде $X_1 = \begin{pmatrix} 8t \\ t \\ 11t \end{pmatrix}$.

При $\lambda = -1$ имеем $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ или $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0, \end{cases}$ что равносильно системе $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0, \\ x_2 + x_3 = 0, \end{cases}$ откуда $X_2 = \begin{pmatrix} -2t \\ -t \\ t \end{pmatrix}$.

При $\lambda = -2$ получим $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, т. е. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 0, \end{cases}$ или $\begin{cases} x_1 - x_2 = 0, \\ 2x_2 + 3x_3 = 0, \end{cases}$ с общим решением $X_3 = \begin{pmatrix} 3t \\ 3t \\ -2t \end{pmatrix}$. Во всех собственных векторах t является произвольной константой. При записи ответа t можно придать любое значение, например, $t = 1$. Базис, в котором матрица A принимает диагональный вид, состоит из собственных векторов, которые являются столбцами матрицы перехода $T = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \\ 11 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. Обратная матрица равна $T^{-1} = \frac{1}{42}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -35 & 49 & 21 \\ -12 & 30 & 6 \end{pmatrix}$. В новом базисе $\tilde{A} = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Задание 9

Для данной квадратичной формы $2x_1^2-8x_1x_2+4x_1x_3+9x_2^2-2x_2x_3+8x_3^2$ *записать ее матрицу A, привести к каноническому виду методом Лагранжа, проверить равенство* $\tilde{A}=T^TAT$ *(где* T^T *означает транспонированную матрицу перехода* T *), вычислить канонические коэффициенты через угловые миноры матрицы* A.

Общий вид квадратичной формы записывается так: $\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$, причем $a_{ij}=a_{ji}$, т. е. матрица квадратичной формы $A=(a_{ij})$ является симметричной. Это значит, что коэффициенты при произведении x_ix_j $(i\neq j)$ делятся пополам. В нашем примере $n=3$, $a_{12}=a_{21}=-4$, $a_{13}=a_{31}=2$, $a_{23}=a_{32}=-1$. Коэффициенты при квадратах переменных образуют главную диагональ матрицы. Итак, $A=\begin{pmatrix}2&-4&2\\-4&9&-1\\2&-1&8\end{pmatrix}$.

Метод Лагранжа состоит в выделении полных квадратов. Воспользуемся правилом: квадрат суммы равен сумме квадратов всех слагаемых и сумме их всевозможных удвоенных произведений. Дополним до квадрата суммы все члены квадратичной формы, содержащие x_1:

$$2(\underbrace{x_1^2-4x_1x_2+2x_1x_3}_{\text{было в исходной квадратичной форме}}+\underbrace{4x_2^2+x_3^2-4x_2x_3}_{\text{дополнили до квадрата}})=2(x_1-2x_2+x_3)^2.$$

Добавленные слагаемые вычтем, тогда квадратичная форма примет вид $2(x_1-2x_2+x_3)^2-8x_2^2-2x_3^2+8x_2x_3+9x_2^2-2x_2x_3+8x_3^2$. Приведем подобные члены и выделим полный квадрат с участием слагаемых, содержащих x_2:

$2(x_1-2x_2+x_3)^2+x_2^2+6x_2x_3+6x_3^2=2(x_1-2x_2+x_3)^2+(x_2+3x_3)^2-3x_3^2$. Теперь введем новые переменные $\tilde{x}_1=x_1-2x_2+x_3$, $\tilde{x}_2=x_2+3x_3$, $\tilde{x}_3=x_3$, в которых квадратичная форма принимает канонический вид: $2\tilde{x}_1^2+\tilde{x}_2^2-3\tilde{x}_3^2$. Матрица перехода T к новому базису определяется из соотношения между старыми и новыми координатами:

$$\tilde{X}=\begin{pmatrix}\tilde{x}_1\\\tilde{x}_2\\\tilde{x}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-2&1\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=T^{-1}\cdot X,\ \text{откуда}\ T=\begin{pmatrix}1&-2&1\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&-7\\0&1&-3\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Обратите внимание на то, что в результате применения метода Лагранжа матрица перехода получается треугольной с единицами на главной диагонали. Теперь проверим равенство $\tilde{A} = T^T A T$:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -7 & -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -4 & 9 & -1 \\ 2 & -1 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -7 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -7 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$. Действительно, мы получили диагональную матрицу с элементами главной диагонали, равными каноническим коэффициентам квадратичной формы. Эти коэффициенты можно было вычислить по формуле $\lambda_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta_{i-1}}$, где Δ_i $(i = 1,...,n)$ – угловые миноры матрицы A, а $\Delta_0 = 1$. Имеем

$$\Delta_1 = a_{11} = 2, \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 9 \end{vmatrix} = 2, \quad \Delta_3 = \det A = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -4 & 9 & -1 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix} = -6.$$

Отсюда $\lambda_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta_0} = \dfrac{2}{1} = 2$, $\quad \lambda_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta_1} = \dfrac{2}{2} = 1$, $\lambda_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta_2} = \dfrac{-6}{2} = -3$, что совпадает с диагональными элементами матрицы $\tilde{A}$.

Задание 10

В десятом задании требуется привести общее уравнение кривой второго порядка, содержащее произведение координат xy, к каноническому виду. Сначала нужно привести квадратичную часть $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$ к алгебраической сумме квадратов. Это достигается в базисе из нормированных собственных векторов матрицы $\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$ (ортогональное преобразование). Далее устраняем линейные слагаемые параллельным переносом системы координат (выделением полных квадратов).

Привести уравнение кривой второго порядка $7x^2 + 12xy + 2y^2 + 2x + 8y + 19 = 0$ *к каноническому виду ортогональным преобразованием, определить тип кривой и координаты ее фокусов.*

Найдем собственные векторы матрицы $\begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$ (см. задание 9):

$\begin{vmatrix} 7-\lambda & 6 \\ 6 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$, $\lambda^2 - 9\lambda - 22 = 0$, $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 11$.

Подставим $\lambda_1 = -2$ в уравнение $\begin{pmatrix} 7-\lambda & 6 \\ 6 & 2-\lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = 0$, что дает $\begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = 0$, откуда $3x_1 + 2y_1 = 0$. Этому уравнению удовлетворяют координаты вектора $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$. Его длина равна $\sqrt{13}$. Берем коллинеарный вектор единичной длины $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{13} \\ -3/\sqrt{13} \end{pmatrix}$. Это первый вектор нового базиса.

Аналогично, для $\lambda_2 = 11$ получим $\begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 6 & -9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = 0$, откуда $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 3/\sqrt{13} \\ 2/\sqrt{13} \end{pmatrix}$
. Матрица перехода к новому базису, таким образом, равна $T = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{13} & 3/\sqrt{13} \\ -3/\sqrt{13} & 2/\sqrt{13} \end{pmatrix}$. Новые координаты точки $(x \quad y)$, которые обозначим $(\overline{x} \quad \overline{y})$, находим из матричного равенства $(\overline{x} \quad \overline{y}) = (x \quad y) \cdot T$. В нашем примере $\overline{x} = \dfrac{2x - 3y}{\sqrt{13}}$, $\overline{y} = \dfrac{3x + 2y}{\sqrt{13}}$. Обратное преобразование $x = \dfrac{2\overline{x} + 3\overline{y}}{\sqrt{13}}$, $y = \dfrac{-3\overline{x} + 2\overline{y}}{\sqrt{13}}$. Подставим последние две формулы в уравнение кривой второго порядка:

$$7\left(\frac{2\overline{x}+3\overline{y}}{\sqrt{13}}\right)^2 + 12\left(\frac{2\overline{x}+3\overline{y}}{\sqrt{13}}\right)\left(\frac{-3\overline{x}+2\overline{y}}{\sqrt{13}}\right) + 2\left(\frac{-3\overline{x}+2\overline{y}}{\sqrt{13}}\right)^2 + 2\left(\frac{2\overline{x}+3\overline{y}}{\sqrt{13}}\right) +$$
$$+8\left(\frac{-3\overline{x}+2\overline{y}}{\sqrt{13}}\right) + 19 = 0.$$

После упрощения получим $-2\overline{x}^2 + 11\overline{y}^2 - \dfrac{20}{\sqrt{13}}\overline{x} + \dfrac{22}{\sqrt{13}}\overline{y} + 19 = 0$. Теперь выделим полные квадраты: $-2\left(\overline{x} + \dfrac{5}{\sqrt{13}}\right)^2 + 11\left(\overline{y} + \dfrac{1}{\sqrt{13}}\right)^2 + 22 = 0$.

Обозначим $\bar{x}+\frac{5}{\sqrt{13}}=\tilde{x}$, $\bar{y}+\frac{1}{\sqrt{13}}=\tilde{y}$, тогда $-2\tilde{x}^2+11\tilde{y}^2=-22$, или $\frac{\tilde{x}^2}{11}-\frac{\tilde{y}^2}{2}=1$. Это каноническое уравнение гиперболы. Здесь $\tilde{x}=\frac{2x-3y+5}{\sqrt{13}}$, $\tilde{y}=\frac{3x+2y+1}{\sqrt{13}}$.

Теперь найдем координаты фокусов в канонической системе координат. Определим параметр c гиперболы $\frac{\tilde{x}^2}{11}-\frac{\tilde{y}^2}{2}=1$: $c^2=a^2+b^2=11+2=13$, $c=\sqrt{13}$. Следовательно, координаты фокусов $\tilde{x}=\pm\sqrt{13}$, $\tilde{y}=0$. Отсюда $2x-3y+5=\pm 13$, $3x+2y+1=0$. Решая эту систему, найдем координаты фокусов в исходной системе: $F_1(1,-2)$, $F_2(-3,\ 4)$.

Список литературы

[1] Куприн А. В., Фроловичев С. М. Курс лекций по аналитической геометрии и линейной алгебре: учебное пособие / МТУСИ. – М., 2016. – 88 с.

[2] Куприн А. В., Маненков С. А., Фроловичев С. М. Практикум по аналитической геометрии и линейной алгебре для бакалавров: учебное пособие / МТУСИ. – М., 2018. – 82 с.

План УМД на 2018/19 уч. г.
С. , п.

Елена Васильевна Ильина

Андрей Валентинович Куприн

Сергей Александрович Маненков

Сергей Михайлович Фроловичев

КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ И ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЕ

Учебно-методическое пособие

Подписано в печать . .2019 г. Формат 60х90 1/16.

Объём 2,2 усл.п.л. Тираж экз. Изд.№ . Заказ .