Теория игр

ПМ-1701

Преподаватель:

Чернов Виктор Петрович
viktor_chernov@mail.ru

Санкт-Петербург
2020 г., 6 семестр

Список литературы

[1] Теория игр

Содержание

1 10.02.2020

1.1 Введение

Предметом теории игр является моделированием конфликтных ситуаций. Зачинателем "Теории игр"является Джон фон Нейман, а последователем является Джон Нэш. Зададимся вопросом, а как описать конфликт с помощью математических формул.

Опр: Стороны в "конфликте"называются *игроками.*

Опр: *Множество игроков* обозначается как I и каждый игрок принадлежит этому множеству:

$$i \in I \tag{1}$$

Опр: *Стратегия* в такой игре - правило(отображение), которое преписывает игроку для каждой ситуации в игре ход в это ситуации.

Опр: S_i *-Множество стратегий*, для каждого игрока i своя стратегия:

$$\{S_i\}_{i\in I} \tag{2}$$

Опр: *Ситуация* - результат выбора игроками своих стратегий.

Опр: Размер выигрыша определяется *платежной функцией* - функция, оценивающая ту или иную ситуацию для отдельного игрока. Данная функция отображает ситуацию в число:

$$i: \ \{H_i\}_{i\in I} \tag{3}$$

$$H_i(s_1, s_2, ..., s_n) \in \mathbb{R} \tag{4}$$

т.е каждый игрок оценивает ситуацию вещественным числом.

Опр: Множество игроков, множество стратегий и множество платежных функций называется *игрой*:

$$< i \in I, \{S_i\}_{i\in I}, \{H_i\}_{i\in I} > \tag{5}$$

Пример: на столе лежит 100 камешков, играют два человека. Ход состоит в том, что каждый игрок забирает из кучки от 1 до 5 камешков по своему усмотрению. Тот, кто взял последним, выиграл. Существуют ли выигрышные стратегии для игроков?

Решение:

Первый ход: берем 4 камня, а после дополняем количество камешков до 6. Первый выигрывает. ■

Для каждой из игр строится *дерево игры*, состоящее из стратегий, где каждая *ветвь* - отдельная игра, а *узлы* данного вида - ситуации.

На основе дерева игры попытаемся создать *матрицу данной игры* размером $m \times n$ Количество *строк* в данной матрице - *количество стратегий* первого игрока, количество *столбцов* - количество стратегий второго игрока.

Первый игрок выбирает какую-то строку этой матрицы, второй - какой-то столбец, другими словами первый игрок выбирает какую-то стратегию, а на пересечении столбцов и строк находится размер выигрыша первого игрока (при нулевом балансе у проигравшего получается -1, а у выигрывшего 1).

Пусть H_1 - матрица выигрыша первого игрока, H_2 - матрица выигрыша второго игрока и сумма элементов на одинаковых позициях в этих таблицах равна нулю.

Опр: Если сумма платежных функций (матриц функций) равна нулю, то такая игра называется игрой с *нулевой суммой.*

$$\sum_{i \in I} H_i(s_1, s_2, ..., s_n) = 0 \tag{6}$$

Опр: Если сумма равна какой-то константе, то такая игра называется игрой с *постоянной суммой.*

$$\sum_{i \in I} H_i(s_1, s_2, ..., s_n) = Const \tag{7}$$

Опр: *антагонистическая игра* - игра двух игроков с нулевой суммой. В такой игре если выигрывает один, то обязательно проигрывает другой.

Так как сумма матриц равна нулю, то:

$$H_1 = -H_2 \tag{8}$$

следовательно, нам не нужно две матрицы и будем проводить рассуждение на основе матрицы выигрышей первого игрока.

1.2 Матричные игры

Рассмотрим матрицу $A_{m \times n}$ с элементами , являющимися вещественными числам, для антагонистической игры, в которую играют два игрока. Первый игрок выбирает номер строки, а второй игрок выбирает номер столбца.

То, что находится на пересечении (a_{ij}) - размер выигрыша(проигрыша) игрока первого игрока, $(-a_{ij})$ - проигрыша(выигрыша) второго игрока.

Будем выписывать минимальные элементы по строке:

$$\min_{j} = \{a_{1,j_1}, ..., a_{m,j_m}\} \tag{9}$$

Опр: Среди данных минимумов выберем max среди min. Данная величина называется *максимином*:

$$\max_{i}(\min_{j} a_{ij}) = a_{i_0,j_0} \tag{10}$$

То есть в самой худшей ситуации, если он выберет эту строку, то это будет минимальным его выигрышем.

Допустим второй игрок выбирает первый столбец, тогда худшим вариантом для него будет максимум по строкам в каждом столбце:

$$\max_{i} = \{a_{i_1,1}, ..., a_{i_n,n}\} \tag{11}$$

Опр: Среди данных минимумов выберем min среди max (лучшее среди худшего). Данная величина называется *минимаксом*:

$$\min_{j}(\max_{i} a_{ij}) = a_{i_1,j_1} \tag{12}$$

Получили гарантированный проигрыш второго игрока. Предположим, что эти элементы совпали, тогда такой элемент называется седловой точкой.

Опр: Седловой точкой называется точка(элемент матрицы), которая является минимальным в своей строке и максимальной в своем столбце.

Опр: Устойчивая ситуация - ситуация, из которой невыгодно выходить любому игроку. Признак решения конфликта - наличие свойства устойчивости.

Такое решение называется решением по *Нэшу*.

Теорема 1: (*неравенство максимина и минимакса*)

Дана матрица $A_{m\times n}$ и a_{ij} - элементы матрицы.

Рассмотрим максимин и минимакс: a_{pq} и a_{rs}, такие, что:

$$a_{pq} = \max_i (\min_j a_{ij}) \tag{13}$$

$$a_{rs} = \min_j (\max_i a_{ij}) \tag{14}$$

Тогда

$$a_{pq} \leq a_{rs} \tag{15}$$

Доказательство:

Рассмотрим матрицу и рассмотренные в ней элементы a_{pq} и a_{rs}.

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & a_{pq} & \cdot & a_{ps} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & a_{rs} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

Пусть рассматривается a_{ps} - элемент матрицы $A_{m\times n}$. $a_{ps} \leq a_{rs}$, так как a_{rs} - максимум в столбце.

С другой стороны a_{pq} - минимум в строке, следовательно $a_{pq} \leq a_{ps}$. Тогда из двух неравенств получаем: $a_{pq} \leq a_{ps} \leq a_{rs}$. ■

Рассмотрим теперь теорему и необходимом и достаточном условии седловой точке в матрице.

Теорема 2: (*необходимое и достаточное условие седловой точки*)

Чтобы задача имела седловую точку необходимо и достаточно, чтобы

$$a_{pq} = a_{rs} \tag{16}$$

Доказательство:

1. $\exists$ седловая чтока $\Rightarrow a_{pq} = a_{rs}$. Пусть a_{kl} - седловая точка.

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & a_{pq} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & a_{kl} & a_{ks} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & a_{rs} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

Если бы мы писали строку максимумов, то в ней бы были точки $a_{kl}, ..., a_{rs}$, но в этой строке a_{rs} является минимумом, следовательно:

$$a_{kl} \geq a_{rs}$$

Если бы мы писали столбец минимумов, то в ней бы были точки $a_{pq}, ..., a_{kl}$, но в этом столбце a_{pq} является максимумом, следовательно:

$$a_{pq} \geq a_{kl}$$

Из двух неравенств получаем следующие соотношения:

$$a_{pq} \geq a_{kl} \geq a_{rs}$$

$$a_{pq} \geq a_{rs}$$

Но по формуле (15):

$$a_{pq} \leq a_{rs}$$

Следовательно:

$$a_{pq} = a_{rs}$$

Необходимость доказана

2. $a_{pq} = a_{rs} \Rightarrow$ Нужно доказать, что $\exists$ - седловая точка

Для доказательства обратного случая нужно построить каким-то образом седловую точку. Выберем точку a_{ps}, как показано ниже, и докажем, что данная точка является седловой.

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & a_{pq} & \cdot & a_{ps} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & a_{rs} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

$$a_{pq} \leq a_{ps} \leq a_{rs}$$

Можно записать как равенство, так как по условию достаточности:

$$a_{pq} = a_{ps} = a_{rs}$$

Этот элемент равен минимальному в строке и максимальному в столбце - определение минимакса и максимина $\underset{\text{def}}{\Rightarrow}$ седловая точка. ■

Теорема 3: (*множество седловых точек*)

Пусть a_{kl} и a_{uv} - седловые точки, тогда a_{kv} и a_{ul} - тоже седловые точки.

Доказательство:

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & a_{kl} & \cdot & a_{kv} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & a_{ul} & \cdot & a_{uv} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

$$a_{kl} \geq a_{ul} \geq a_{uv} \geq a_{kv} \geq a_{kl}$$

Так как концы равны, то можно заменить равенствами.

$$a_{kl} = a_{ul} = a_{uv} = a_{kv} = a_{kl}$$

Следовательно, a_{ul} и a_{kv} - максимальный в своем столбце и минимальный в своем столбце $\underset{\text{def}}{\Rightarrow}$ седловые точки. ■

Замечание: все седловые точки *равны друг другу*.

Замечание: если элемент матрицы *равен седловой точке*, то он *не обязательно является седловой точкой*.

Рассмотрим пример:

$$\begin{pmatrix} 1_s & 1_s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

В данном примере в первой строке являются седловыми точками, но единица во второй строке не седловая точка, хоть и равна ей.

2 17.02.2020

Будем рассматривать переменные на прямоугольнике.

Пусть задана функция $f(x.y)$ и играется в антоганистическую игру двумя соперниками. Первый игрок выбирает значение x на своем промежутке $x : a \leq x \leq b$, а второй игрок выбирает какое-то значение $y : c \leq y \leq d$.

Требуется определить механизм седловой точки.

Алгоритм нахождения седловой точки:

1. $\max\limits_x \max\limits_y f(x,y)$
   (a) $\min\limits_y f(x,y) = g(x)$
   (b) $\max\limits_x g(x) = A$
2. $\min\limits_y \max\limits_x f(x,y)$
   (a) $\max\limits_x f(x,y) = h(y)$
   (b) $\min\limits_y h(y) = B$
3. $A = B$?

Задача:

$$f(x,y) = (x-y)^2$$

$$-1 \le x \le 1, -1 \le y \le 1$$

Решение: Найдем максимин:

$$\min_y f(x,y) = (f(x,y))'_y = -2x + 2y = g(x)$$

$$y = x$$

$$A = \max_x g(x) = 0$$

Найдем минимакс:

$$\max_x f(x,y) = (f(x,y))'_x = 2x - 2y = h(y) \Rightarrow x = y$$

При каждом y свое значение максимума:

Исследуем границы:

$$\max(1-y)^2 = 4\ ;\ \max(-1-y)^2 = 4$$

$$h(y) = \begin{cases} (1-y)^2, -1 \le y \le 0 \\ (1+y)^2, 0 \le y \le 1 \end{cases}$$

$$B = \min_y h(y) = 1$$

Седловой точки нет, так как $A \neq B$

3 02.03.2020

Задача 2:

$$f(x,y) = (x-y)^2 - 0.5y$$

$$-1 \le x \le 1, -1 \le y \le 1$$

Решение: В общем случае, нет стационарной точки, значит будем искать на границах.

Найдем максимин:

$$\min_y f(x,y) = (f(x,y))'_y = -2x + 2y - 0.5 = g(x)$$

$$(f(x,y))''_y = 2 - \text{точка минимума}$$

$$y = x + 0.25$$

Из трех функций нужно было бы найти min среди трех выражений $f(x,1), f(x,-1), -0.0625x$

$$g(x) = \max f(x,1), f(x,-1), f(x, x+0.25)$$

$$g(x) = -0.0625 - 0.5x, \quad x \to -1$$

$$A = \max_x g(x) = 0.4375$$

Найдем минимакс:

$$\max_x f(x,y) = (f(x,y))'_x = 2x - 2y = h(y) \Rightarrow x = y$$

При каждом у свое значение максимума:

Исследуем границы:

$$\max(1-y)^2 = 4\ ;\ \max(-1-y)^2 = 4$$

$$h(y) = \begin{cases} (1-y)^2, -1 \le y \le 0 \\ (1+y)^2, 0 \le y \le 1 \end{cases}$$

$$B = \min_y h(y) = 1$$

Седловой точки нет, так как $A \ne B$

Задача 3:

$$f(x,y) = (x - y(1-y^2))^2 = x^2 - 2xy + y^2 + 2xy^3 - 2y^4 + y^6$$

$$-1 \le x \le 1, -1 \le y \le 1$$

Решение:

Обозначим за $y(1-y^2) = u$, тогда получим функцию: $f(x,u) = (x-u)^2$

Для того, чтобы узнать границы, найдем минимум и максимум функции u:

$$\min(y - y^3) = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$$

$$\max(y - y^3) = \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

1. Найдем максимин:

$$\min_u f(x,u) = (f(x,u))'_u = -2(x-u) - \text{точка минимума}$$

$$u = x$$

$$g(x) = \begin{cases} (x + \frac{2}{3\sqrt{3}})^2 & -1 \le x \le -\frac{2}{3\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{3\sqrt{3}} \le x \le \frac{2}{3\sqrt{3}} \\ (x - \frac{2}{3\sqrt{3}})^2 & \frac{2}{3\sqrt{3}} \le x \le 1 \end{cases}$$

$$A = \max_x g(x) = \left(1 - \frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^2$$

2. Найдем минимакс:

$$\max_x f(x,u) = (f(x,u))'_x = 2x - 2u = h(u) \Rightarrow x = u$$

Исследуем границы:

$$h(u) = \begin{cases} (1+u)^2, \frac{2}{3\sqrt{3}} \ge u \ge 0 \\ (1-u)^2, -\frac{2}{3\sqrt{3}} \le u \le 0 \end{cases}$$

Рисуем график и находим минимум.

$$B = \min_u h(u) = 1$$

Седловой точки нет, так как $A \ne B$.