Финансовая математика

ПМ-1701

Преподаватель:

Чернов Алексей Викторович
alex_tche@mail.ru

Санкт-Петербург
2020 г., 6 семестр

Список литературы

[1] Sulsky D., Chen Z., Schreyer H. L. A particle method for history-dependent materials // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. — 1994, V. 118. — P. 179–196.

[2] Liu G. R., Liu M. B. Smoothed particle hydrodynamics: a meshfree particle method. — Singapore : World Scientific Publishing. — 2003. — 449 p.

Содержание

1 Конспекты лекций

1.1 Простая и сложная процентная ставка 05.02.2020

Для иллюстрации понимания работы сложного и простого процента введем следующие обозначения:

- i - процентная ставка (по умолчанию годовая)
- t - срок вклада
- $S_0 = P$ - начальный вклад
- S - конечный вклад

Опр: *Простыми процентами* называются такие процентные ставки, которые применяются к одной и той же первоначальной сумме на протяжении всей финансовой операции

Опр: *Сложными процентами* называются ставки, применяемые после каждого интервала начисления к сумме первоначального долга и начисленных за предыдущие интервалы процентов.

t (год)	Простой процент (%)	Сложный процент (%)
0	**100**	100
1	**110**	110
2	**120**	121

Таблица 1: Пример использования сложных и простых процентов

1.1.1 Формулы простых процентов

Формула для S_{n+1}:

$$S_{n+1} = S_n + S_0 \cdot i$$

Формула для конечного вклада:

$$S = P + P \cdot i \cdot n = P \cdot (1 + i \cdot n)$$

Формула для начального вклада:

$$P = \frac{S}{1 + i \cdot n}$$

Формула для процентной ставки:

$$i = \frac{\frac{S}{P} - 1}{t} = \frac{S - P}{t \cdot P}$$

Формула для продолжительности вклада:

$$t = \frac{\frac{S}{P} - 1}{i} = \frac{S - P}{i \cdot P}$$

1.1.2 Формулы простых процентов

Формула для S_{n+1}:

$$S_{n+1} = S_n \cdot (1+i) = S_n + S_n \cdot i$$

Формула для конечного вклада:

$$S = P \cdot (1+i)^n$$

Формула для начального вклада:

$$P = \frac{S}{(1+i)^n}$$

Формула для процентной ставки:

$$i = \sqrt[t]{\frac{S}{P}} - 1$$

Формула для продолжительности вклада:

$$t = log_{(1+i)} \frac{S}{P}$$

1.1.3 Срок удвоения вклада

Для простого процента:

$$2P = P \cdot (1 + i \cdot t_{new})$$

$$t_{new} = \frac{1}{i}$$

Для сложного процента:

$$2P = P \cdot (1+i)^{t_{new}}$$

$$2 = (1+i)^{t_{new}}$$

$$t_{new} = log_{(1+i)} 2$$

1.1.4 Задача о.в Манхэттен

t (год)	Деньги ($)
t_1 - 1626 год	$P - 24$
t_2 - 2019 год	$S - 49 \cdot 10^9$

Таблица 2: Данные о Манхэттене

Вопрос: Какова процентная ставка при простом и сложном проценте?

Решение:

Простой процент:

$$i = \frac{\frac{S}{P} - 1}{t} = \frac{S - P}{(t_2 - t_1) \cdot P} = \frac{49 \cdot 10^9 - 24}{24 * (2019 - 1626)} = 5.19 \cdot 10^6$$

Сложный процент:

$$i = \sqrt[(t_2 - t_1)]{\frac{S}{P}} - 1 = \sqrt[2019-1626]{\frac{49 \cdot 10^9}{24}} - 1 = 0.056 = 5.6\%$$

Срок удвоения оклада:

$$t_{new} = log_{(1+i)}2 = log_{(1+0.056)}2 = 12.7 \approx 13 \text{ years}$$

1.1.5 Смешанная ставка

Опр: *Смешанная процентная ставка* - ставка, которая осуществляется по следующему правилу - в пределах года используется простая ставка, а остальные - по сложной.

Формула для смешанной процентной ставки:

$$S = P \cdot (1 + i_c)^{[t]} + P \cdot (1 + i_c)^{[t]} \cdot \{t\} \cdot i_p = P(1 + i_c)^{[t]} \cdot (1 + \{t\} \cdot i_p)$$

где $[t]$ - целая часть числа, а $\{t\}$ - дробная.

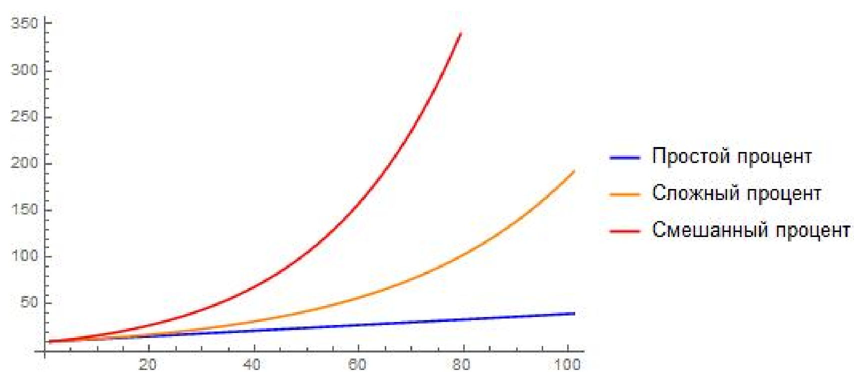


Рис. 1: График простой, сложной и процентной ставки

1.2 Процентная ставка для разных периодов времени 09.02.2020

Пусть задана простая процентная ставка. Нужно найти эквивалентную месячную ставку.

$$P \cdot (1 + i_{year} \cdot t) = P \cdot (1 + 12 \cdot i_m \cdot t)$$

$$i_m = \frac{i_{year}}{12}$$

$$i_d = \frac{i_{year}}{365}$$

Такой способ приведения и соотношения называются *относительными*.

Для сложных процентов:

$$S = P \cdot (1 + i_{year})^n = P \cdot (1 + i_m)^{12n}$$

$$i_m = \sqrt[12]{1 + i_{year}} - 1$$

А такой способ называется *уравновешенным*.

Пример:

Банк предъявляет простую годовую ставку i_{year} на срок до 3-х лет. Можем ли мы придумать более легкую стратегию? Да, мы можем положить деньги на вклад, снять деньги, а потом заново открыть вклад. Рассмотрим решение задачи двумя разными способами:

Решение:

$$P \cdot (1 + i \cdot t) < P(1 + i)^t$$

Если использовать месячную ставку, то получаем формулу:

$$(1 + \frac{i}{12})^{12} = BinomNewion = 1 + 12\frac{i}{12} + ... + > (1 + i)$$

$$i > 0,\, t > 1$$

$$\lim_{m \to \infty} (1 + \frac{i}{m})^{t \cdot m} = \lim_{m \to \infty} ((1 + \frac{i}{m})^{\frac{m}{i}})^{t \cdot i} = e^{it}$$

Такое начисление процентов называется *непрерывным*.

$$S = P \cdot e^{it}$$

Для сложной процентной ставки:

$$S = P \cdot (1 + i)^t = P \cdot e^{\alpha \cdot t}$$

$$\alpha = \ln(1 + i)$$

α - сила роста, сила процента, скорость относительного прироста вклада за $\Delta t \to 0$

$$\frac{\Delta f}{f \Delta t} = \frac{f'}{f}$$

$$S(t) = P \cdot e^{\alpha \cdot t}$$

Высчитаем силу прироста для функции $S(t)$

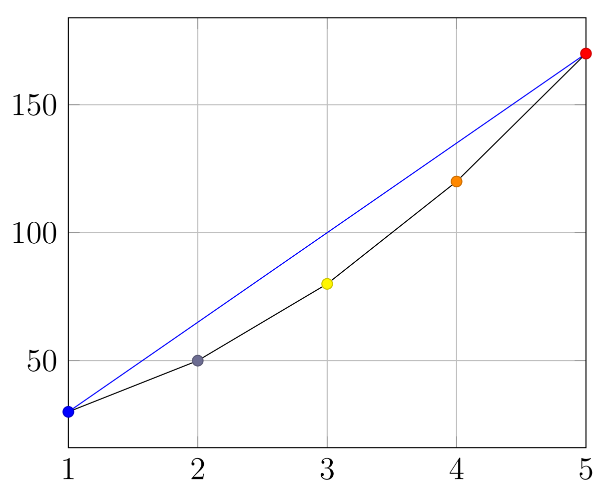
$$\frac{S'}{S} = \frac{P \cdot e^{\alpha \cdot t} \cdot \alpha}{P \cdot e^{\alpha \cdot t}} = \alpha$$

1.2.1 Переменная процентная ставка

Пусть на каком-то интервале времени t_1 действовала ставка i_1, на каком-то другом времени t_2 выполнялась ставка t_2 и.т.д. Ставка была простая, процентны набегали только на начальный вклад.

Задача: найти эквивалентную среднюю процентную ставку, которая по формуле простой процентной ставки приводила к такому же результату.

График переменной процентной ставки



$$T = \sum_i \tau_i$$

Формула для конечного вклада при переменной ставке для простых процентов:

$$P = P \cdot (1 + \tau_1 \cdot i_1 + \tau_2 \cdot i_2 + ... + \tau_n \cdot i_n) = P \cdot (1 + \bar{i} \cdot T)$$

Обозначим за $k_j = \frac{\tau_j}{T}$. Также очевидно, что $\sum k_j = 1$

Формула для средней ставке процентов при переменной ставке для простых процентов.

$$\bar{i} = \sum_k k_j \cdot i_j$$

Для переменной процентной сложной ставки выведем похожую формулу:

$$P \cdot (1+i_1)^{t_1} \cdot (1+i_2)^{t_2} \dots (1+i_n)^{t_n} = P \cdot (1+\bar{i})^T$$

$$T = \sum_i \tau_i$$

Обозначим за $k_j = \frac{\tau_j}{T}$. Также очевидно, что $\sum k_j = 1$. Формула для средней ставки сложных процентов равна:

$$\bar{i} = \prod_j (1+i_j)^{\tau_j} - 1$$

2 Консолидация платежей

2.1 Простая процентная ставка

Два участника - один другому задолжал какую-то часть денег. Будем считать, что одинаковая процентная ставка. Платежи соответствуют определенным моментам времени:

$$(P_1, t_1)|(P_2, t_2)| \dots |(P_n, t_n)$$

$$S = \sum_{i=1}^{n} p_k$$

Нужно найти такое время t^*, при котором обе стороны смогут друг с другом договориться.

Искомый момент t не может наступить и позже срока последнего платежа t_m или в сам момент t_m. На это не пойдет та сторона, которая должна получать платежи. Она могла бы на это согласиться, если бы консолидированная величина была больше суммы консолидируемых платежей. Однако по предположению они равны друг другу. Таким образом, $t < t_m$.

Итак, искомый момент t лежит в промежутке от t_1 до t_m. Для части консолидируемых платежей моменты их выплаты окажутся раньше, чем t. Такие платежи назовем *ранними платежами.*

Моменты выплаты другой части платежей окажутся позже, чем t. Эти платежи назовем *поздними платежами.*

Получим искомое значение t^*:

$$\sum p_k \cdot (1 + i(t' - t_k)) = S(1 + i(t' - t^*))$$

$$\sum p_k + \sum p_k i t' - \sum p_k t_k = S + it'S - St^*$$

$$it' \sum p_k - \sum p_k t_k = it'S - St^*$$

$$t^* = \frac{\sum_{k=1}^n p_k t_k}{S} \text{ -- искомая формула}$$

Обозначая за $\alpha_k = \frac{p_k}{S}$, получаем:

$$t^* = \sum \alpha_k t_k$$

Пример: два периода, t_1 и t_1+1, две выплаты: $1000, 2000$. Рассчитать оптимальное время.

Решение:

$$t^* = \frac{1000}{3000} t_1 + \frac{2000}{3000} \cdot (t_1 + 1) = \frac{1}{3} t_1 + \frac{2}{3} \cdot (t_1 + 1) = t_1 + \frac{2}{3}$$

Ответ: через $\frac{2}{3}$ года нужно выплатить.

Для того, чтобы проверить, что мы не зависим от времени, то есть формула инварианта, добави какую-то константу и посчитаем новое отношение.

2.2 Сложная процентная ставка

$$\sum_{k=1}^n p_k (1+i)^{(t^* - t_k)} = S(1+i)^{(t' - t^*)}$$

$$\sum_k p_k (1+i)^{t'} (1+i)^{-t_k} = (1+i)^{t'} \sum_k (1+i)^{-t_k} = (1+i)^{t'} \frac{S}{(1+i)^{t^*}}$$

$$\sum_{k=1}^n p_k (1+i)^{(t^* - t_k)} = S$$

$$\sum_{k=1}^n p_k \frac{(1+i)^{t^*}}{(1+i)^{t_k}} = S$$

$$(1+i)^{t^*} = \frac{S}{\sum_{k=1}^n p_k (1+i)^{-t_k}}$$

$$t^* \cdot \ln(1+i) = \ln_{(1+i)} \frac{S}{\sum_{k=1}^n p_k (1+i)^{-t_k}}$$

$$t^* = \frac{\ln S - \ln(\sum_{k=1}^n p_k (1+i)^{-t_k})}{\ln(1+i)}$$

Также можно высчитывать по другой формуле:

$$t^* = -\log_{1+i} \frac{\sum p_k (1+i)^{-t_k/365}}{S} \cdot 365$$

2.3 Приведение платежей

Для простой процентной ставки:

$$P_2 = P_1 \cdot (1 + i(t_2 - t_1)), \text{если } t_2 > t_1$$

$$P_2 = \frac{P_1}{(1 + i(t_1 - t_2))}, \text{если } t_2 < t_1$$

$$P_3 = P_1(1 + i(t_2 - t_1)) \cdot (1 + i(t_3 - t_2)) \neq P_1(1 + i(t_3 - t_2))$$

Для сложной процентной ставки:

$$P_2 = P_1 \cdot (1 + i)^{(t_2 - t_1)}, \text{если } t_2 > t_1$$

$$P_2 = \frac{P_1}{(1 + i)^{(t_1 - t_2)}} = P_1 \cdot (1 + i)^{(t_2 - t_1)}, \text{если } t_2 < t_1$$

$$P_3 = P_1 \cdot (1 + i)^{(t_2 - t_1)} \cdot (1 + i)^{(t_3 - t_2)} = P_1(1 + i)^{(t_3 - t_1)}, \text{если } t_2 < t_1$$

2.3.1 Вклады с конверсией в валюту

Рассмотрим расчет оценок доходности, связанных с возможностью замены валюты.

$K_{1,2}$ - текущий курс валюты 2 относительно 1. $K_{1,2}(t)$ - курс валюты спустя промежуток времени t.

Между собой нужно сравнить следующие величины:

$$P \cdot (1 + i_1 \cdot t) \qquad ? \qquad \frac{P}{K_{1,2}} \cdot (1 + i_2 t) \cdot K_{1,2}(t)$$

Предположим, что у нас линейная функция:

$$K_{1,2}(t) = K_{1,2}(1 + kt)$$

$$\frac{P}{K_{1,2}} \cdot (1 + i_2 t) \cdot K_{1,2}(t) = \frac{P}{K_{1,2}} \cdot (1 + i_2 t) \cdot K_{1,2}(1 + kt) = P \cdot (1 + i_2 t)(1 + kt)$$

Тогда равенство преобразуется в:

$$P \cdot (1 + i_1 \cdot t) \qquad ? \qquad P \cdot (1 + i_2 t)(1 + kt)$$

$$(1 + i_1 \cdot t) \qquad ? \qquad (1 + i_2 t)(1 + kt)$$

Предположим, что $k > 0$. Найдем условие крайности!

$$(1 + i_2 t)(1 + kt) - (1 + i_1 \cdot t) = 0$$

$$i_2 k t^2 + (k + i_2 - i_1)t = 0$$

Корни того уравнения:

$$t = 0 \qquad t = \frac{i_1 - i_2 - k}{i_2 k}$$

То есть, если $i_1 > i_2 + k$, то вариант с конверсией валюты дает больший результат лишь результат лишь при достаточно большом сроке вклада t. Иначе - вариант с конверсией валюты 1 в валюту 2 дает болший результат при любом сроке.

При отрицательном коффициенте аналогично.

$$= 1 = \frac{i_1 - i_2 - k}{i_2 k} \Rightarrow i_2 = \frac{i_1 k}{1+k}$$

Для сложной процентной ставки предполагаем степенную функцию:

$$K_{1,2}(t) = K_{1,2}(1+k)^t$$

$$\frac{P}{K_{1,2}} \cdot (1 + i_2 t) \cdot K_{1,2}(t) = \frac{P}{K_{1,2}} \cdot (1 + i_2 t) \cdot K_{1,2}(1+k)^t = P \cdot (1 + i_2 t)(1+k)^t$$

Тогда равенство преобразуется в:

$$P \cdot (1 + i_1)^t \qquad ? \qquad P \cdot (1 + i_2 t)(1+k)^t$$

$$(1 + i_1) \qquad ? \qquad (1 + i_2)(1+k)$$

$$i_1 \qquad ? \qquad i_2 + k + i_2 k$$

На основании данного соотношения делаем вывод: если $i_1 > i_2 + k + i_2 k$, то с конверсией, иначе - без конверсии.

2.3.2 Темп инфляции

h - темп инфляции i - номинальная % ставка r - реальая % ставка Формула Фишера:

$$1 + r = \frac{1+i}{1+h} \Rightarrow r = \frac{i-h}{1+h}$$

Рассмотрим периоды инфляции для разных периодов времени. Допустим, что у нас 4 квартала. Тогда:

$$(1 + h_{mean})^4 = (1 + h_1) \cdot (1 + h_2) \cdot (1 + h_3) \cdot (1 + h_4)$$