Исследование операций

ПМ-1701

Преподаватель:

Чернов Виктор Петрович
viktor_chernov@mail.ru

Санкт-Петербург
2020 г., 6 семестр

Список литературы

[1] Sulsky D., Chen Z., Schreyer H. L. A particle method for history-dependent materials // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. — 1994, V. 118. — P. 179–196.

[2] Liu G. R., Liu M. B. Smoothed particle hydrodynamics: a meshfree particle method. — Singapore : World Scientific Publishing. — 2003. — 449 p.

Содержание

1 Конспекты лекций

1.1 13.02.2020

Отчет о результатах: в каких пределах можно менять коэффициенты целевой функции чтобы оптимальынй план не изменился.

Перейдем к листу отчета об устойчивости.

Теневая цена - предельная полезность ресурса, компонент оптимального плана двойственной задачи, частная производная целелвой функции по правой части ограничения - величина, показывает на сколько единиц изменится результат, если изменить правую часть на единицу.

Представим задачу, меняем коэффициенты правой части, получили оптимальное решение z^*:

$$CX \to max$$

$$\begin{cases} AX \leq B \\ X \geq 0 \end{cases}$$

$$Z^* = Z(B) = Z(b_1, b_2, ..., b_n)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial b_i} = y_i^*$$

где y_i^* - теневые цены, компоненты оптимального плана.

График предельной полезности является кусочно-линейным.

Отчет о пределах - сомнительная польза: если объем печенья будем равны 0, то остается один бисквит.

1.2 20.02.2020

1.2.1 Стратегии управления запасами и критерий оптимальности

Рисуем типичный график зависимости запасов от времени. В начальный момент времени есть какой-то запас и он изменяется с течением времени. Склад является аккумулятором запасов потребителя. На склад, в свою очередь постсупает продукция поставщиков.

В какой-то момент времени запас склада пополняется на некоторую величину V_1. Дефицит может отображаться двумя способами.

- Незадолженный дефицит - спустя какое-то время на склад при нулевом запасе приходит товар

- Задолженный дефицит - дефицит уходит в отрицательную область.

Последовательность пополнения запасов - результат принятия решений, она возникает тогда, когда потребительская система формирует заказ поставщикам.

$$\begin{cases} V_1 & V_2 & \dots \\ t_1 & t_2 & \dots \end{cases}$$

Данный график носит название *стратегии управления поставками.* Она состоит из отдельных управленческих решений. Какой график поставок лучше, т.е какая стратегия оптимальна? В этом и состоит оптимизационная задача.

Сущестует три вида затрат:

- Затраты связаны с поставками
- Затраты связаны с хранением
- Затраты связаны с дефицитом

Каждая из затрат подразделяется на постоянные и переменные затраты Постоянные - не зависещее от объема. Затраты, связанные с поставкой, не зависят от объема: затраты на огранизацию.

Критерий оптмимальности: средние затраты в единицу времени были минимальными.

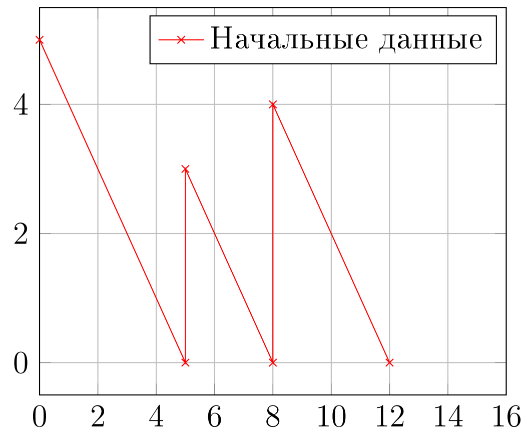
1.2.2 Простейшие модели управления запасами. Формула Уилсона.

Простешйая модель обладает тремя свойствами:

1. Дефицит не допускается.
2. Постоянный не меняющийся спрос, α -сколько единиц товара уходит на единицу времени
3. Отсутствует неопределенность

На графике мы заменяем кривые прямыми, угол наклона будет одинаковым по второму свойству. Можно предположить, что поставка будет приходить точно в срок, и быть уверенным, что все так и будет.

Оптимальную стратегию следует искать среди графиков следующего вида:



Обозначим за a - постоянные затраты поставок. Постоянные затраты связанные с хранением мы устраняем из рассмотрения. Переменная составляющая по поставкам - тоже исключается, так как мы на нее не можем влиять - она изменяется от нас не зависяще. b - коэффициент затрат по хранению - затраты по хранению товара на единицу времени. Размерность - количество единиц товара на единицу времени. Дефицитные поставки все исключаем.

Коэффициент b на графике - единичный квадрат.

Допустим у нас есть два треугольника. Общие затраты равны суммы двух затрат $T = T_1 + T_2$, $Q = \alpha \cdot T$ Тогда средние затраты равны площади этих двух треугольников, то есть:

$$mse = \frac{2a + b(\frac{1}{2}Q_1T_1 + \frac{1}{2}Q_2T_2)}{T}$$

Так как $Q = \alpha \cdot T$, то:

$$mse = \frac{2a + b(\frac{1}{2}\alpha T_1^2 + \frac{1}{2}\alpha T_2^2)}{T}$$

Необходимо минимизировать следующее выражение:

$$2a + \frac{1}{2}b\alpha(T_1^2 + (T - T_1)^2) \to \min$$

Возьмем производную:

$$f'(T_1) = b\alpha(T_1 - (T - T_1)) = b\alpha(-T + 2T_1) = 0$$

$$T_1 = \frac{1}{2}T, T_2 = \frac{1}{2}T$$

Следовательно, оптимальные решения нужно искать среди периодической модели с одинаковыми треугольниками. Теперь задача состоит в том, чтобы найти длину партии Q и T - пероид.

Затраты на одном цикле управления запасами:

$$L_{sum} = a + \frac{1}{2}bQT = a + b\frac{1}{2}\alpha T^2$$

Такие формулы не позволятют сравнивать стратегии, следовательно нужно сравнить средни затраты, поэтому поделим на длину цикла:

$$L = \frac{a + b\frac{1}{2}\alpha T^2}{T} = \frac{a}{T} + \frac{1}{2} \cdot b \cdot \alpha \cdot T \to \min$$

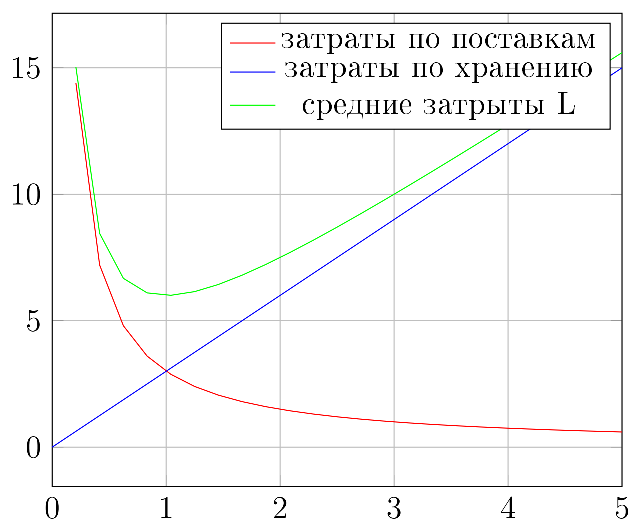
$$L'(T) = -\frac{a}{T^2} + \frac{1}{2}b\alpha = 0$$

$$T^* = \sqrt{\frac{2a}{b\alpha}} - \min$$

$$Q^* = \sqrt{\frac{2a\alpha}{b}} - \min$$

$$L = \frac{a}{\sqrt{\frac{2a}{b\alpha}}} + \frac{1}{2}b\alpha\sqrt{\frac{2a}{b\alpha}} = \sqrt{\frac{ab\alpha}{2}} + \sqrt{\frac{ab\alpha}{2}} = \sqrt{2ab\alpha}$$

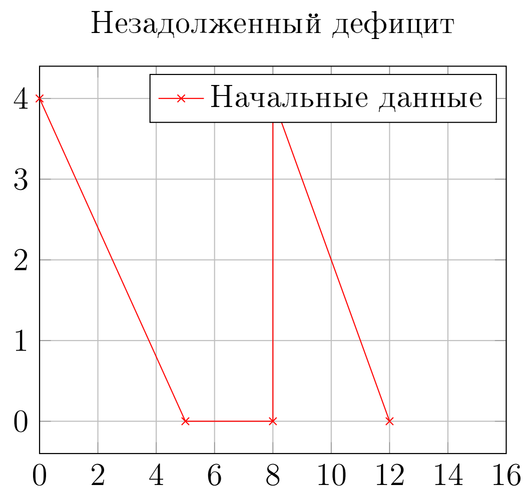
Данные формулы называются *Формулами Уилсона*. Если рассмотреть зависимость двух величин L от T, то графически мы ищем минимум зеленой прямой на графике:



Необходимо выбрать прямоугольник заданной площади с минимальным периодом и данный прямоугольник является квадратом.

Философское правило: лучше перебрать, чем недобрать.

1.2.3 Простейшая модель с допущением незадолженного дефицита.



Обозначим за T_1 недефицитный период $(0;4)$: T_1 и $(4,8)$: T_2 - период дефицтного периода. g - штраф за отсутствие товара.

$$\alpha, a, b, g, Q = \alpha \cdot T_1$$

$$L = \frac{a + b\frac{1}{2}Q \cdot T_1 + g \cdot T_2}{T_1 + T_2} \to \min$$

Лемма о неправильной суммы дробей:

Лемма 1. $\frac{A_1}{B_1} \leq \frac{A_2}{B_2}$

Доказательство:

$$\frac{A_1}{B_1} \leq \frac{A_1 + A_2}{B_1 + B_2} \leq \frac{A_2}{B_2}$$

$$A_1B_1 + A_2B_2 \leq A_1B_1 + A_2B_1$$

$$\frac{A_1}{B_1} \leq \frac{A_2}{B_2} \qquad \blacksquare$$

$\sqrt{2a\alpha b} < g$ - дефифит не выгоден, $\sqrt{2a\alpha b} > g$ - выгоден дефицит.

1.2.4 Простешная модель с задолженным дефицитом

$$X = \alpha T_1, S = \alpha T_2, \alpha, a, b, g$$

$$Q = \alpha T$$

S - задолженный дефицит.

$$L = \frac{a + bT_1 X\frac{1}{2} + gT_2 S\frac{1}{2}}{T_1 + T_2} \to \min$$

$$L = \frac{a + bT_1^2 \alpha\frac{1}{2} + gT_2^2 \alpha\frac{1}{2}}{T_1 + T_2} \to \min$$

Приравниваем к нулю производные уравнений и решаем систему.

$$T_2 = \frac{b}{g} T_1$$

$$T_1^* = \sqrt{\frac{2a}{b\alpha \cdot (1 + \frac{b}{g})}}$$

$$T_2^* = \frac{b}{g}\sqrt{\frac{2a}{b\alpha \cdot (1 + \frac{b}{g})}} = \sqrt{\frac{2agb^2}{b\alpha \cdot (g+b)g^2}} = \sqrt{\frac{2ab}{\alpha \cdot (g+b)g}}$$

В пределе:

$$T_1^* \to \sqrt{\frac{2a}{b\alpha}}$$

$$T_2^* \to 0$$

$$X* = \alpha T_1 = \alpha\sqrt{\frac{2a}{b\alpha \cdot (1 + \frac{b}{g})}}$$

Размер дефицита:

$$S^* = \alpha T_2 = \alpha\sqrt{\frac{2ab}{\alpha \cdot (g+b)g}}$$

То есть при оптимальном случае, размер дефицита стремится к нулю, а $X \to Q$.

1.2.5 Модель с растянутой поставкой и задолженным дефицитом.

В тот момент, когда приходит поставка, запас увеличивается по какой-то линейной функции с каким-то угловым коффициентом. Разгрузка товара проходит с какой-то скоростью β. α - скорость уменьшения запаса (интенсивность спроса - объем разгружаемого товара в единицу времени). $\beta - \alpha$ - угол наклона прямой разгрузки поставки.

α - угловой коэффициент ($\operatorname{tg}\alpha$) В модели с дефицитом запасы уходят в минус и со скоростью $\beta - \alpha$ повышаются.

T_1' - поставка есть. T_1'' - поставки нет. T_1 - запас есть. T_2 - дефицит. Максимальный размер запаса X, максимальный размер дефицита S.

$$X = (\beta - \alpha) \cdot T_1' = \alpha T_1''$$

$$S = (\beta - \alpha) \cdot T_2' = \alpha T_2''$$

a - постоянные затраты не зависящие от объема.

Определим средние затраты.

$$L = \frac{a + b\frac{1}{2}T_1X + g\frac{1}{2}T_2S}{T} = \frac{a + b\frac{1}{2}T_1X + g\frac{1}{2}T_2S}{T_1 + T_2} \to \min$$

Должны минимизировать относительно T_1, T_2, X, S.

$$T_1' = \frac{x}{\beta - \alpha}, \quad T_1 = \frac{X}{\alpha} \Rightarrow T_1 = \frac{(\alpha + \beta - \alpha)X}{\alpha(\beta - \alpha)}$$

$$X = \frac{\alpha(\beta - \alpha)}{\beta}T_1 = \lambda T_1$$

$$S = \frac{\alpha(\beta - \alpha)}{\beta}T_2 = \lambda T_2$$

Подставим:

$$L = \frac{a + b\frac{1}{2}\lambda T_1^2 + g\frac{1}{2}T_2^2\lambda}{T_1 + T_2} \to \min$$

Возьмем частные производные:

$$\frac{\partial L}{\partial T_1} = \frac{b\lambda T_1(T_1 + T_2) - (a + \frac{1}{2}b\lambda T_1^2 + \frac{1}{2}g\lambda T_2^2)}{(T_1 + T_2)^2} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial T_1} = \frac{g\lambda T_1(T_1 + T_2) - (a + \frac{1}{2}b\lambda T_1^2 + \frac{1}{2}g\lambda T_2^2)}{(T_1 + T_2)^2} = 0$$

$$(T_1 + T_2)\lambda(bT_1 - gT_2) = 0 \Rightarrow T_2 = \frac{b}{g}T_1$$

$$b\lambda T_1(T_1 + \frac{b}{g}T_1) - (a + \frac{1}{2}b\lambda T_1^2 + \frac{1}{2}g\lambda(\frac{b}{g}T_1)^2) = 0$$

$$\frac{1}{2}b\lambda T_1^2(1+\frac{b}{g})=a$$

Найдем оптимальные значения:

$$T_1^*=\sqrt{\frac{2a}{b\lambda(1+\frac{b}{g})}},\quad \lambda=\frac{\alpha(\beta-\alpha)}{\beta}$$

$$T_2^*=\frac{b}{g}\sqrt{\frac{2a}{b\lambda(1+\frac{b}{g})}},\quad \lambda=\frac{\alpha(\beta-\alpha)}{\beta}$$

$$X^*=\sqrt{\frac{2a\lambda}{b(1+\frac{b}{g})}},\quad \lambda=\frac{\alpha(\beta-\alpha)}{\beta}$$

$$S^*=\frac{b}{g}\sqrt{\frac{2a\lambda}{b(1+\frac{b}{g})}},\quad \lambda=\frac{\alpha(\beta-\alpha)}{\beta}$$

Если $\frac{b}{g}\to\min, T_2^*=0, S^*=0$, то получится бездефицитная модель. Выразим λ:

$$\lambda=\alpha(1-\frac{\beta}{\alpha})$$

Если $\alpha\to 0$, то $\lambda\to\alpha$. И прямая становится все более вертикальной - разбираемся с растяжкой.

Домашнее задание - разобрать модель с растянутой поставкой и незадолженным дефицитом.

1.3 Теория массового обслуживания

1.3.1 Структура систем массового обслуживания

Есть некоторый поток входящих требований. Детерменированные потоки - потоки, которые подчиняются некому расписанию. Регулярный поток - поток с постоянным интервалом между соседними элементами. Перед тем как попасть на очередь, используется *накопитель*. Накопитель может быть ограниченным или неограниченным.

После этого - парралельно работающие устройства - узлы обслуживания. Сам процесс обсулживания - случайный процесс.Длительность обслуживания может быть разной. Посе прохождения обсужливания получается выходящий поток требований.

1.3.2 Три свойства потоков требования

Характеристика потока требования на промежутке

$V_k(t_0, t)$ - вероятность возникновения k-требований на промежутке времени, начинающийся в t_0 и имеет длину t. $V_0(t_0, t)$ - вероятность отсутствует, $V_{\geq 1}(t_0, t)$ - возникновение хотя бы одного требования.

Свойства потока требования:

1. Стационарность потока. Поток называется стационарным, если его базовая характеристика $V_k(t_0, t)$ не зависит от t_0, то есть не зависит от положения отрезка на оси времени (вероятность не зависит от положения на оси).

$$V_k(t_0, t) = V_k(t_0', t)$$

2. Ординарность потока.

Поток называется ординарным, если требования возникают по одному.

Рассмотрим вероятность возникновения на каком-то промежутке времени более двух требований.$V_{\geq 2}(t_0, t)$. Устремим конец к началу, тогда данная вероятность будет стремиться к нулю. Для того чтобы уловить ординарность необходимо, чтобы данная вероятность стремилась быстро к нулю.

Поток называется ординарным, если выполнено следующее условие.

$$\lim_{t \to 0} \frac{V_{\geq 2}(t_0, t)}{t} = 0$$

Еще одно определение: $V_{\geq 2}(t_0, t) = o(t)$ - бесконечно малая величиная - величина, стремящаяся к нулю быстрее, чем t.

3. Отсутсвует последействие

У потока отсутствует последействие, если его вероятностные характеристики, связанные с разными промежутками времени являются независимыми.

Возьмем на оси времени два промежутка t и τ.

$V_k(t_0, t+\tau) = \sum_{m=0}^{k} V_m(t_0, t) \cdot V_{k-m}(t_0+t, \tau)$ - знание истории не дает уточнить что-то в будущем. $\sum_{k=0}^{\infty} V_k(t_0, t) = 1$

Если поток удовлетворяет всем трем свойствам, то такой поток является *Пуассоновским.*

1.3.3 Параметр и интенсивность потока

Опр: Параметром потока называется предел вероятности возникновения хотя бы одного требования:

$$\lim_{t \to 0} \frac{V_{\geq 1}(t_0, t)}{t} = \lambda(t_0)$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{V_{\geq 1}(t)}{t} = \lambda$$

λ - параметр потока.

Опр: рассмотрим математическое ожидание числа требования на промежутке времени $\mathbb{E}(t_0, t)$:

$$\mathbb{E}(t_0, t) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot V_k(t_0, t) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot V_k(t_0, t)$$

.

Будем рассматривать среднее число требования на коротких промежутках времени:

$$\lim_{t \to 0} \frac{\mathbb{E}(t_0, t)}{t} = \mu(t_0)$$

$\mu(t_0)$ - мгновенная интенсивность потока.

$$\lim_{t \to 0} \frac{\mathbb{E}(t)}{t} = \mu$$

μ - число, интенсивность потока