Чернов В.П.

§ 5. Вероятности состояний в процессах гибели и рождения

В этом параграфе мы будем рассматривать процессы с бесконечным числом состояний, удовлетворяющие условиям (4.13), (4.14). Основные результаты будут верны и для процессов с конечным числом состоянии и условиями (4.13) – (4.15), если в (4.20) – (4.22) положить $\lambda_i = 0$ для $i \geq n$, $\nu_i = 0$ для $i \geq n+1$.

Обозначим посредством $P_k(t)$ вероятность того, что процесс через время t после своего начала окажется в состоянии k. Сформулируем уравнения для таких вероятностей.

Рассмотрим два момента времени t и $t+\tau$. За небольшой промежуток времени τ (в дальнейшем мы устремим τ к 0) процесс мог попасть в состояние k лишь из соседних состояний. Точнее, согласно (4.16), (4.20) – (4.22) для $k \geq 1$ имеем:

$$\begin{aligned} P_k(t+\tau) &= \sum_{i=0}^{\infty} P_i(t) \cdot p_{ik}^{(\tau)} = \\ &= P_{k-1}(t) \cdot (\lambda_{k-1} \cdot \tau + o(\tau)) + \\ &+ P_k(t) \cdot (1 - (\nu_k + \lambda_k)\tau + o(\tau)) + \\ &+ P_{k+1}(t) \cdot (\nu_{k+1} \cdot \tau + o(\tau)) + o(\tau) \end{aligned} \tag{5.1}$$

После элементарных преобразований получаем

$$\begin{aligned} &\frac{P_k(t+\tau) - P_k(t)}{\tau} = \\ &= \lambda_{k-1} \cdot P_{k-1}(t) - (\nu_k + \lambda_k) \cdot P_k(t) + \nu_{k+1} \cdot P_{k+1}(t) + \frac{o(\tau)}{\tau} \end{aligned} \tag{5.2}$$

Переходя к пределу при $\tau \to 0$ получаем дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned} P_k'(t) &= \lambda_{k-1} \cdot P_{k-1}(t) - (\nu_k + \lambda_k) \cdot P_k(t) + \\ &+ \nu_{k+1} \cdot P_{k+1}(t), \end{aligned} \tag{5.3}$$

которое можно рассматривать как систему уравнений. Все члены этого уравнения осмыслены лишь при $k \geq 1$; при $k = 0$ возникают неосмысленные выражения $P_{-1}(t)$, λ_{-1} и ν_0. Можно провести отдельно вывод для $k = 0$, в результате получим

$$P_0'(t) = -\lambda_0 \cdot P_0(t) + \nu_1 \cdot P_1(t)\,. \tag{5.4}$$

Уравнение (5.4) является частным случаем (5.3), если положить в (5.3) указанные выражения равными 0.

Если множество состояний конечно, то для последнего состояния n по аналогичным причинам уравнение принимает вид:

$$P_n'(t) = \lambda_{n-1} \cdot P_{n-1}(t) - \nu_n \cdot P_n(t). \tag{5.5}$$

В случае, если число состояний конечно и все ν_i, λ_i отличны от 0, можно доказать теорему, аналогичную эргодической теореме из §3. Точнее, можно доказать существование пределов

$$\lim_{t \to \infty} P_k(t) = P_k > 0. \tag{5.6}$$

Кроме того, в этом случае для любого t

$$\sum_{k=0}^{n} P_k(t) = 1, \tag{5.7}$$

так что в пределе получаем такое же соотношение для финальных вероятностей:

$$\sum_{k=0}^{n} P_k = 1. \tag{5.8}$$

Если число состояний бесконечно, то строгая положительность ν_i, λ_i не гарантирует выполнение равенств, аналогичных (5.7), (5.8). Именно, может оказаться, что для некоторых значений t

$$\sum_{k=0}^{n} P_k(t) < 1 \tag{5.9}$$

Это может быть связано с тем, что процесс в своем движении по состояниям направо за ограниченное время t проходит бесконечно большое число состояний. Такой процесс описывает явление типа "взрыва".

Можно доказать, что для того, чтобы существовали пределы (5.6) и для любого t (а. следовательно, и в пределе) выполнялось равенство

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k(t) = 1, \tag{5.10}$$

достаточно выполнения следующего условия: существует такая величина β, что для всех k, начиная с некоторого, выполнено неравенство

$$\frac{\lambda_k}{\nu_{k+1}} \le \beta < 1 . \qquad (5.11)$$

Это условие можно интерпретировать следующим образом: начиная с некоторого k передвигаться по состояниям налево становится легче, чем направо, что и предотвращает "взрыв". Как мы увидим далее, в задачах теории массового обслуживания условия (5.11) обычно (но не всегда!) бывают выполнены, так что существуют финальные вероятности, дающие в сумме 1, то есть существует установившийся режим работы системы обслуживания.

Найдем финальные вероятности (в предположении, что они существуют). Для этого перейдем к пределу в уравнениях (5.3) и (5.4) при $t \to \infty$. Пределы левых частей уравнений существуют, так как существуют пределы правых.

Пусть

$$\lim_{t \to 0} P_k'(t) = c_k . \qquad (5.12)$$

Докажем, что $c_k = 0$ при всех значениях k.

Действительно, пусть $c_k > 0$. Тогда по определению предела для всех t, больших некоторого t_0, имеет место неравенство

$$P'(t) > \frac{c_k}{2}. \qquad (5.13)$$

Следовательно, сама функция $P_k(t)$ во всех таких точках t растет со скоростью, большей, чем $\frac{c_k}{2}$. С увеличением t она должна тогда принимать сколь угодно большие значения, а это противоречит ее ограниченности. Действительно, рассматриваемая функция является вероятностью, и потому $P_k(t) \le 1$. Таким образом, наше исходное предположение, что $c_k > 0$ неверно, то есть $c_k \le 0$.

Аналогично предположение, что $c_k < 0$, даст противоречие с тем, что $P_k(t) \ge 0$, так что в результате соответствующего рассуждения мы получим $c_k \ge 0$. Соединяя вместе $c_k \le 0$ и $c_k \ge 0$ получаем, что $c_k = 0$.

Таким образом, предел производных равен 0, то есть переход к пределу в (5.3), (5.4) дает систему линейных алгебраических уравнений

$$\lambda_{k-1} \cdot P_{k-1} - (\nu_k + \lambda_k) \cdot P_k + \nu_{k+1} \cdot P_{k+1} = 0 \qquad (5.14)$$

$$-\lambda_0 \cdot P_0 + \nu_1 P_1 = 0 \qquad (5.15)$$

Для того, чтобы решить эту систему, введем обозначения

$$x_{k+1} = -\lambda_k P_k + \nu_{k+1} P_{k+1} \qquad (5.16)$$

Тогда (5.14), (5.15) перейдут в уравнения

$$x_{k+1} - x_k = 0 \tag{5.17}$$

$$x_1 = 0 \tag{5.18}$$

Выражая с помощью (5.17) x_{k+1} через x_k и последовательно понижая величину k, мы получим цепочку равенств

$$x_{k+1} = x_k = x_{k-1} = ... = x_1 = 0. \tag{5.19}$$

Из этих равенств следует, что единственным решением системы (5.17), (5.18) является $x_k = 0$ для всех значений $k \ge 1$. Отсюда согласно (5.16) получаем для любого $k \ge 1$

$$-\lambda_{k-1} \cdot P_{k-1} + \nu_k \cdot P_k = 0, \tag{5.20}$$

то есть последовательную цепочку равенств

$$\begin{aligned} P_k &= \frac{\lambda_{k-1}}{\nu_k} \cdot P_{k-1}, \\ P_{k-1} &= \frac{\lambda_{k-2}}{\nu_{k-1}} \cdot P_{k-2} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ P_1 &= \frac{\lambda_0}{\nu_1} \cdot P_0. \end{aligned} \tag{5.21}$$

Отсюда получаем для всех $k \ge 1$

$$P_k = \frac{\lambda_{k-1}}{\nu_k} \cdot \frac{\lambda_{k-2}}{\nu_{k-1}} \cdot \ldots \cdot \frac{\lambda_0}{\nu_1} \cdot P_0 = \prod_{i=1}^{k} \frac{\lambda_{i-1}}{\nu_i} \cdot P_0 \tag{5.22}$$

Мы выразили все финальные вероятности P_k через P_0. Вероятность P_0 найдем из нормирующего условия

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k = 1. \tag{5.23}$$

Подставив (5.22) в (5.23), получим

$$P_0 = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{k} \frac{\lambda_{i-1}}{\nu_i}}, \tag{5.24}$$

откуда из (5.22) для $j \ge 1$ получаем окончательные формулы для финальных вероятностей P_j:

$$P_j = \frac{\prod_{i=1}^{j} \frac{\lambda_{i-1}}{\nu_i}}{1 + \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{k} \frac{\lambda_{i-1}}{\upsilon_i}} . \qquad (5.25)$$

Формулы (5.25) позволяют выразить финальные вероятности состояний через параметры вероятностей переходов из одного состояния в другое. При практических расчетах во многих случаях удобнее пользоваться не полностью развернутыми формулами (5.25), а менее громоздкими формулами (5.22), позволяющими выразить искомые вероятности через одну и ту же вероятность P_0, вместе с формулой (5.24), позволяющей определить саму эту вероятность P_0.

Упражнения

1. Проверить, что (5.24) действительно получается из (5.22) и (5.23).
2. Доказать, что если при всех значениях $i \geq 1$

$$\frac{\lambda_{i-1}}{\nu_i} = \beta < 1 , \qquad (5.26)$$

то для всех значений $j \geq 0$

$$P_j = \beta^j (1 - \beta) . \qquad (5.27)$$

3. Доказать, что условие (5.11) является достаточным для сходимости ряда в знаменателе (5.24).
4. Вывести формулы для финальных вероятностей в случае, когда множество состояний конечно.
5. Найти финальные вероятности для задачи об агрегате из §4.