Задачи 8-11

Выполнил:

Александр Широков, ПМ-1701
improfeo@yandex.ru

Санкт-Петербург
2020 г., 6 семестр

1 Задача 8

1.1 Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами

Рассмотрим линейное однородное разностное уравнение порядка k с постоянными вещественными коэффициентами:

$$u(s+k) + a_1 u(s+k-1) + \dots + a_k u(s) = 0 \tag{1}$$

$$s = 0, 1, 2, \dots; \quad a_j = const \in \mathbb{R}$$

Будем искать частные решения этого уравнения в виде:

$$u(s) = \lambda^s, \qquad \lambda = const \neq 0 \tag{2}$$

Функция такого вида есть решения уравнения (1) в том и только том случае, когда λ есть корень *характеристического уравнения*:

$$\lambda^k + a_1 \lambda^{k-1} + \dots + a_k = 0 \tag{3}$$

Доказательство:
Действительно, эта функция обладает свойством:

$$u(s+p) = \lambda^p u(s) \tag{4}$$

поэтому левая частья уравнения принимает вид:

$$(\lambda^k + a_1 \lambda^{k-1} + \ldots + a_k) \cdot u(s) = 0 \tag{5}$$

Так как $u(s) = \lambda^s \neq 0$, следует утверждение, то формула (3) выполняется. ■

Уравнение (3) имеет ровно k комплексных корней с учётом кратности (по основной теореме алгебры).

Из-за вещественности коэффциентов каждому комплексному корню соответствует сопряженный корень той же кратности.

1.2 8.14

$$u_{s+4} - 6u_{s+3} - 17u_{s+2} + 150u_{s+1} + 192u_s = 0$$

Приводим данное однородное разностное уравнение порядка 4 к характеристическому уравнению:

$$\lambda^4 - 6\lambda^3 - 17\lambda^2 + 150\lambda + 192 = 0$$

Находим корни данного характеристического уравнения:

$\lambda_1 = -4.14285, \lambda_2 = -1.19976, \lambda_3 = 5.6713 - 2.54264 \cdot i, \lambda_4 = 5.6713 + 2.54264 \cdot i$

Найдем аргумент комлексного числа:

$$|\lambda_3| = \sqrt{5.6713^2 + (-2.54264)^2} = 6.21$$

Т.к $x > 0, y < 0$, то:

$$arg\lambda_3 = 2\pi - arctgx(\frac{|y|}{x}) = 2\pi - 0.42 \Rightarrow \phi_3 = \frac{-\pi}{7}$$

$$arg\lambda_4 = \frac{-\pi}{7}$$

Представим данные числа в тригонаметрической форме:

$$\lambda_3 = \cos\frac{-\pi}{7} + i \cdot \sin\frac{-\pi}{7}$$

$$\lambda_4 = \cos\frac{\pi}{7} + i \cdot \sin\frac{\pi}{7}$$

Теперь мы готовы записать общее решение однородного линейного разностного уравнения через частные решения:

$$u_s = C_1 \cdot (-4.15)^s + C_2 \cdot (-1.2)^s + 6.21^s((C_4 + C_3)\sin\frac{\pi}{7} \cdot s + i(C_4 - C_3)\cos\frac{\pi}{7} \cdot s)$$

$$U_k = \sqrt{C_{k+}^2 + C_{k-}^2}$$

$$\sin\theta_k = \frac{C_{k-}}{U_k}$$

$$\cos\theta_k = \frac{C_{k+}}{U_k}$$

$$2U_k \cdot 6.21^s \cdot \cos(\frac{\pi}{7} + \theta_k)$$

$$u_s = C_1 \cdot (-4.15)^s + C_2 \cdot (-1.2)^s + 2U \cdot 6.21^s \cdot \cos(\frac{\pi}{7}s + \theta)$$

1.3 8.28

$$u_{s+4} + 5u_{s+3} - 6u_{s+2} - 32u_{s+1} + 32u_s = 0$$

Приводим данное однородное разностное уравнение порядка 4 к характеристическому уравнению:

$$\lambda^4 + 5\lambda^3 - 6\lambda^2 - 32\lambda + 32 = 0$$

Находим корни данного характеристического уравнения:

$$\lambda_1 = -4, \lambda_2 = -4, \lambda_3 = 1, \lambda_4 = 2$$

Запишем общее решения линейного однородного уравнения:

$$u_s = (C_1 + C_2 s) \cdot (-4)^s + C_3 + C_4 \cdot (2)^s$$

2 Задача 9

Необходимо найти общее решение неоднородного линейного разностного уравнения первого порядка:

$$u_{s+1} = \frac{5N+1}{5N+2} \cdot u_s + \frac{s+5N+1}{s+5N+2}$$

У меня номер в списке - 14, поэтому я буду решать следующее уравнение:

$$u_s = \frac{71}{72} u_{s-1} + \frac{s+71}{s+72}$$

2.1 Метод итераций

Нам необходимо задать n начальных решений по аналогии с обыкновенными дифференциальными уравнениями.

Будем рассматривать наше неоднородное уравнение первого порядка с начальным значением u_0. Запишем первое начальное значение:

$$u_1 = a_0 + a_1 \cdot u_0 + x_1$$

В нашем случае $a_0 = 0$, $a_1 = \frac{71}{72}$, а x_1 можно записать через разностный опретор или оператор сдвига назад. Запишем все это:

$$u_1 = \frac{71}{72} u_0 + \frac{s+71}{s+72} \cdot \frac{71}{72} = \frac{71}{72} u_0 + \frac{72}{73} \cdot \left(\frac{71}{72}\right)^0$$

Получили первое начальное значение. Получим второе:

$$u_2 = a_0 + a_1 \cdot u1 + x_2 = a_0 \cdot (1 + a_1) + a_1^2 u_0 + a_1 x_1 + x_2 = a_1^2 u_0 + a_1 x_1 + x_2$$

Подставим сюда значения из предыдущего пункта и x_2:

$$u_2 = \left(\frac{71}{72}\right)^2 u_0 + \frac{71}{72} \cdot \frac{72}{73} + \frac{73}{74} \cdot \left(\frac{71}{72}\right)^0$$

Воспользуемся общей формулой решения при $a_0 = 0$:

$$u_s = a_1^s u_0 + \sum_{k=0}^{s-1} a_1^k x_{s-k} = u_0 \cdot \left(\frac{71}{72}\right)^s + \sum_{k=0}^{s-1} \left(\frac{71}{72}\right)^k \left(\frac{71+s-k}{72+s-k}\right)$$

2.2 Метод обратного оператора

Еще раз рассмотрим неоднородное линейное разностное уравнение:

$$u_s = \frac{71}{72}u_{s-1} + \frac{s+71}{s+72}$$

$$a_1 = \frac{71}{72}$$

с начальным значением u_0.

Идеей метода обратного оператора является представление решения в виде суммы общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного.

Для однородного уравнения: $u_s = a_1 u_{s-1}$ будем искать решения в виде $u(s) = \lambda^s$. Получаем характеристический полином (уравнение):

$$\lambda - \frac{71}{72} = 0$$

Корнем данного уравнения является $\lambda = \frac{71}{72}$. Решением данного однороднго уравнения является:

$$u'_s = C \cdot \left(\frac{71}{72}\right)^s$$

Определим постоянную С определяется из начального условия:

$$C = u_0 - a_0 \sum_{k=0}^{\infty} a_1^k = u_0$$

Запишем неоднородное уравнение в операторной форме:

$$a(B)u_s = (1 - a_1 B)u_s = a_0 + x_s = x_s$$

$$a(B)u_s = x_s$$

Частное решение неоднородного уравнения:

$$u''_s = a^{-1}(B)x_s = (1 + a_1 B + a_1^2 B^2 + \ldots)x_s = x_s + a_1(B)x_s + a_1^2(B)^2 x_s + \ldots =$$

$$= x_s + a_1 x_{s-1} + a_1^2 x_{s-2} + \ldots + a_1^{s-1} x_1 = \sum_{k=0}^{s-1} a_1^k x_{s-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{s-1} \left(\frac{71}{72}\right)^k \left(\frac{71+s-k}{72+s-k}\right)$$

Общее решение линейного неоднородного разностного уравнения получается как сумма общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения:

$$u_s = u'_s + u''_s = u_0 \cdot \left(\frac{71}{72}\right)^s + \sum_{k=0}^{s-1} \left(\frac{71}{72}\right)^k \left(\frac{71+s-k}{72+s-k}\right)$$

Данное решение совпало с решением в итерационном методе.

2.3 Решение неоднородного линейного уравнения первого порядка: z-преобразование

$$y_{t+1} = a_0 + a_1 y_t + x_{t+1}$$
$$u_s = \frac{71}{72} u_{s-1} + \frac{s+71}{s+72}$$

При начальном решении u_0
В нашем случае $a_0 = 0$, $a_1 = \frac{71}{72}$.
В результате z-преобразования имеем: По формуле:

$Z\{x_{k+m}\} = z^m(Z\{x_k\} - x_0 - x_1 z^{-1} - x_2 z^{-2} - \ldots - x_{m-1} z^{-m+1})$

Получаем:

$$\mathbb{Z}\{y_{t+1}\} \equiv z(\widetilde{y}(z) - y_0) = \mathbb{Z}\{a_0\} + a_1 \widetilde{y}(z) + z(\widetilde{x}(z) - x_0)$$

x_0 - равно нулю по начальному условию.
По формуле:

$$Z\{x_k\} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$$

Получаем:

$$x_0 = 0, \mathbb{Z}\{a_0\} = a_0 \mathbb{Z}\{1\} = a_0 \frac{z}{z-1}$$
$$z(\widetilde{y}(z) - y_0) = a_0 \frac{z}{z-1} + a_1 \widetilde{y}(z) + z\widetilde{x}(z)$$
$$z\widetilde{y}(z) - a_1 \widetilde{y}(z) = a_0 \frac{z}{z-1} + z\widetilde{x}(z) + zy_0$$
$$\widetilde{y}(z) = a_0 \frac{z}{(z-1)(z-a_1)} + (\widetilde{x}(z) + y_0) \frac{z}{z-a_1}$$

Раскладываем на простые дроби:

$$\widetilde{y}(z) = \frac{a_0 a_1}{(z-a_1)\cdot(a_1-1)} - \frac{a_0}{(z-1)\cdot(a_1-1)} + (\widetilde{x}(z) + y_0)\frac{z}{z-a_1}$$
$$y_t = \frac{a_0}{1-a_1} + (y_0 - \frac{a_0}{1-a_1}) a_1^t + x(\bar{a}_1) a_1^t$$

Следствие причиннсоти:

$$x(\bar{a}_1) a_1^t = \sum_{m=0}^{t-1} x_{t-m} a_1^m$$
$$u_s = \frac{a_0}{1-a_1} + (u_0 - \frac{a_0}{1-a_1}) a_1^s + \sum_{k=0}^{s-1} x_{s-k} \cdot a_1^k =$$
$$= u_0 \left(\frac{71}{72}\right)^t + \sum_{k=0}^{s-1} \left(\frac{71}{72}\right)^k \left(\frac{71+s-k}{72+s-k}\right)$$

3 Задача 10

Модель делового цикла Самуэльсона-Хикса предполагает прямую пропорциональность объемов инвестирования приросту национального дохода (принцип акселерации).

$$I_t = V(X_{t-1} - X_{t-2})$$

$$V > 0 - \text{фактор акселерации}$$

$$I_t - \text{величина инвестиций в период } t$$

X_{t-1}, X_{t-2} - величины национального дохода. Предполгается, что спрос на данном этапе C_t зависит от величины национального дохода на предыдущем этапе X_{t-1} линейным образом $C_t = aX_{t-1} + b$.

Условие равенства спроса и предложения:

$$X_t = I_t + C_t$$

Тогда приходим к уравнению Хикса:

$$X_t = V(X_{t-1} - X_{t-2}) + C_t + aX_{t-1} + b = (a +)X_{t-1} - VX_{t-2} + b$$

Это уравнение имеет частное решение - стационарная последовательность $X_t^* = c = const$ является решением уравнения Хикса только при $c = \frac{b}{1-a}$. Множитель $\frac{1}{1-a}$ называется мультипликатором Кейнса.

Какова динамика роста национального дохода?

Решение:

$$X_t = (a + V)X_{t-1} - VX_{t-2} + b$$

Найдем общее решение соответствующего ему однородного уравнения. Характеристическое уравнение имеет вид:

$$\lambda^2 - (a + V)\lambda + V = 0$$

Дискриминант данного уравнения:

$$(a + V)^2 - 4V$$

Динамика национального дохода зависит от предельной склонности к потреблению, определяющей величины мультипликатора и акселератора. При $(a+V)^2 - 4V > 0$, то корни действительны и отрицательны, а общее решение имеет вид:

$$X(t) = c + C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$

.

При $t \to \infty$:

$$\lim_{t\to\infty} X(t) = c$$

То есть при дискриминанте больше нуля национальный ход стремится к частному решению - стационарной последовательности с ростом времени. Можно предположить, что изменение национального дохода будет происходить монотонно.

Если же $(a+V)^2 - 4V < 0$, то характеристическое уравнение имеет комплексно-сопряженные корни:

$$\lambda_{1,2} = \alpha + i\beta, \alpha = -\frac{a+V}{2}, \beta = \sqrt{V - \left(\frac{a+V}{2}\right)^2}$$

Общее решение уравнения принимает вид:

$$X(t) = c + e^{\alpha t}(C_1 \cos \beta t + C_2 \sin(\beta t))$$

И из-за вида функий cos и sin национальный доход совершает колебания, скорее всего с затухающей амплитудой.

График дискриминанта помогает отделить множество сочетаний a, V обеспечивающих монотонное изменение $X(t)$ от множества комбинаций из значений a, V, приводящих к колебаний $X(t)$.

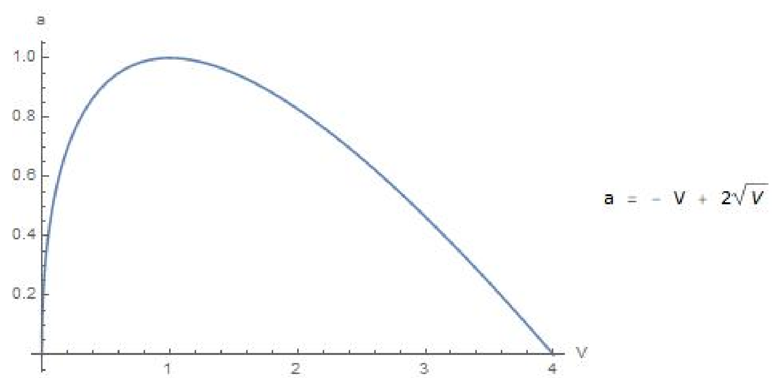

Рис. 1: График дискриминанта

По данному графику видно, что если $V > 1$, то равновесия никогда не наступит, если $V < 1$, то равновесие установится на определнном уровне, и, если $V = 1$, то национальный доход будет колебаться с постоянной амплитудой.

Мы попытались предугадать траектории, построим в нашем примере, что будет происходить.

$$V = 2.3, a = 0.5, b = 4$$

Дискриминант равен $(0.5+2.3)^2 - 4 \cdot 2.3 = -1.36 < 0$, следовательно характеристическое уравнение имеет комплексно-сопряженные корни и начальный доход будет совершать колебания.

Стационарное решение: $c = \frac{b}{1-a} = 8$, $V > 1$, следовательно, равновесия в нашем случае не наступит (только если взять начальные значения $X_1 = X_2 = c$).

Несколько графиков, подтверждающие наши утверждения: Дина-

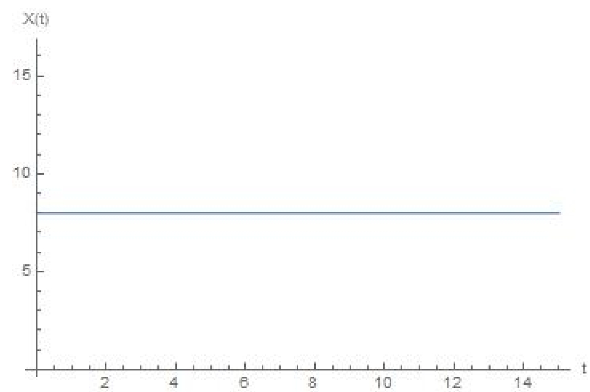

Рис. 2: При начальных значениях $x_0 = x_1 = c$

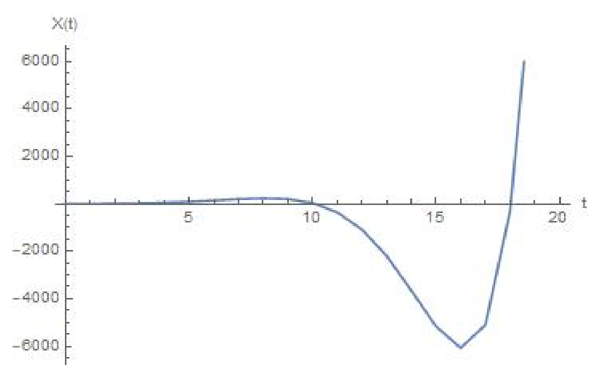

Рис. 3: При начальных значениях $x_0 = 0, x_1 = 1$, видны колебания

мика националього дохода совершает колебания, но при определенных условиях, выявленных при анализе, может быть и стационарной, а так же колебаться с постоянной амплитудой. ■

4 Задача 11. Паутинная модель рынка

Рассмотрим паутинную модель рынка.

Спрос и предложение заданы линейными функциями, но спрос зависит от цены в момент времени, а предложение от цены в предыдущий момент.

Функция спроса:

$$d_t = a - bp_t$$

Функция предложения:

$$s_t = m + np_{t-1}$$

$$a, b, m, n \in \mathbb{R}$$

Прировняв спрос и предложение, получим линейной разностное уравнение первого порядка с постоянными коэффициентами:

$$s_t = d_t$$

$$a - bp_t = m + np_{t-1}$$

$$p_t = \frac{a - m - np_{t-1}}{b} = \frac{a-m}{b} - \frac{n}{b}p_{t-1}$$

$$a = N, b = \frac{N+2}{N}, m = \frac{N}{2}, n = \frac{N}{N+3}$$

$$a = 14, b = \frac{8}{7}, m = 7, n = \frac{14}{17}$$

Решение:

Запишем наше уравнение с подставленными значениями:

$$p_t = \frac{49}{8} - \frac{49}{68}p_{t-1}$$

Будем решать итерационным методом с начальным значением p_0. В данном задании мы должны учесть тот факт, что знак a_1 - минус.

$$p_1 = a_0 + a_1 p_0 = \frac{49}{8} - \frac{49}{68}p_0$$

$$p_2 = a_0 \cdot (1 + a_1) + a_1^2 p_0 = \frac{49}{8} - \frac{49}{8} \cdot \frac{49}{68} + \left(\frac{-49}{68}\right)^2 p_0$$

$$p_3 = a_0 + a_0 a_1 + a_0 a_1^2 + a_1^3 p_0 = \frac{49}{8} - \frac{49}{8} \cdot \frac{49}{68} + \frac{49}{8} \cdot \left(\frac{49}{68}\right)^2 - \left(\frac{49}{68}\right)^3 p_0$$

Можно заметить закономерность с чередующимися знаками и вывести общее решение:

$$p_s = (-1)^s \cdot a_1^s \cdot p_0 + a_0 \cdot \sum_{k=0}^{s-1} (-1)^k \cdot a_1^k = (-1)^s \left(\frac{49}{68}\right)^s \cdot p_0 + \frac{49}{8} \sum_{k=0}^{s-1} (-1)^k \cdot \left(\frac{49}{68}\right)^k \blacksquare$$

5 Вывод формул

Решим неоднородное линейное уравнение первого порядка:

$$y_{t+1} = a_0 + a_1 y_t + x_{t+1}, y_{t=0} = y_0, t \geq 0$$

В результате z-преобразования имеем:

$$\mathbb{Z}\{y_{t+1}\} \equiv z(\widetilde{y}(z) - y_0) = \mathbb{Z}\{a_0\} + a_1\widetilde{y}(z) + z(\widetilde{x}(z) - x_0)$$

$$x_0 = 0, \mathbb{Z}\{a_0\} = a_0\mathbb{Z}\{1\} = a_0\frac{z}{z-1}$$

$$z(\widetilde{y}(z) - y_0) = a_0\frac{z}{z-1} + a_1\widetilde{y}(z) + z\widetilde{x}(z)$$

$$z\widetilde{y}(z) - a_1\widetilde{y}(z) = a_0\frac{z}{z-1} + z\widetilde{x}(z) + zy_0$$

$$\widetilde{y}(z) = a_0\frac{z}{(z-1)(z-a_1)} + (\widetilde{x}(z) + y_0)\frac{z}{z-a_1}$$

Раскладываем на простые дроби:

$$\widetilde{y}(z) = \frac{a_0 a_1}{(z-a_1)\cdot(a_1-1)} - \frac{a_0}{(z-1)\cdot(a_1-1)} + (\widetilde{x}(z) + y_0)\frac{z}{z-a_1}$$