Чернов В.П.

§ 7. СМО с ожиданием. Вероятности состояний

Мы рассмотрим в этом параграфе систему обслуживания с накопителем, удовлетворяющую следующим условиям:

(1) если в момент поступления требования имеется хотя бы один свободный узел обслуживания, то требование сразу начинает обслуживаться (любым из свободных узлов);

(2) если все узлы заняты, то поступившее требование становится в очередь за уже имеющимся в накопителе требованиями;

(3) если в момент освобождения узла имеется хотя бы одно требование в накопителе, то первое из них по очереди сразу поступает на обслуживание;

(4) каждый узел в любой момент времени обслуживает не более одного требования;

(5) каждое требование обслуживается одним узлом;

(6) обслуживание не прерывается;

(7) по окончании обслуживания требование покидает систему;

(8) входящий поток является пуассоновским;

(9) продолжительность обслуживания является случайной величиной, распределенной по экспоненциальному закону, одному и тому же для всех узлов обслуживания.

Из второго и третьего условий следует, что очередь в накопителе упорядочена естественным образом; в частности, в этой модели не рассматривается случай, когда одни требования обладают приоритетом перед другими. Кроме того, в этих условиях говорится, что любой узел доступен непосредственно из накопителя, то есть узлы работают не последовательно, а параллельно. Из этих же условий следует, что свободные узлы могут быть только при пустом накопителе. Из четвертого, пятого и шестого условий вытекает, что требования обслуживаются независимо и узлы работают независимо: организация обслуживания не предусматривает их группировку. Седьмое свидетельствует о разомкнутости системы. Из девятого следует, что узлы обслуживания предполагаются одинаковыми, причём вероятность того, что время обслуживания больше заданного времени t равна

$$P\left\{t_{обсл.} > t\right\} = e^{-\nu t}, \tag{7.1}$$

где ν – интенсивность обслуживания, то есть среднее число требований, обслуживаемых узлом в единицу времени.

Общая схема СМО с ожиданием представлена на рис. 7.1.

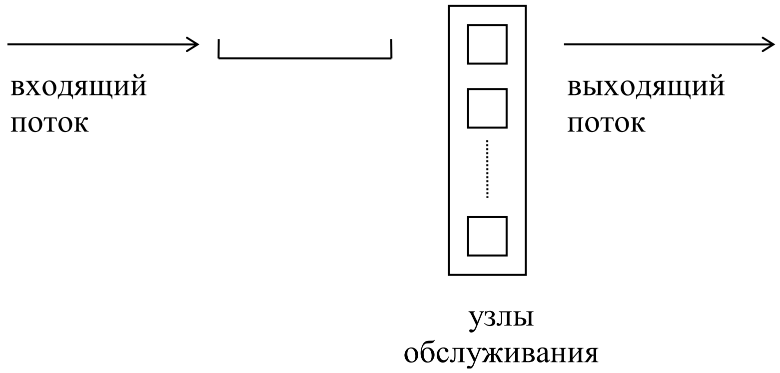

Рис. 7.1.

Пусть λ – параметр входящего пуассоновского потока требований. Посредством N обозначим число узлов обслуживания ($N \geq 1$). Опишем функционирование такой СМО в терминах процессов гибели и рождения. Для этого требуется ввести понятие состояния, обосновать то, что процесс перехода из состояния в состояние является марковским и доказать, что вероятности перехода удовлетворяют соответствующим условиям.

Состоянием СМО с ожиданием назовем общее число требований, находящихся в системе, то есть сумму числа требований в узлах и числа требований в накопителе. Состояниями являются целые неотрицательные числа. При этом 0 соответствует отсутствию требований в системе; состояние k при $k \leq N$ соответствует отсутствию очереди, при $k \geq N$ – занятости всех узлов, а при $k > N$ – еще и наличию очереди.

Процесс функционирования, то есть перехода из состояния в состояние, является марковским. Обоснование подробно изложено для СМО с отказами, оно остается верным и для СМО с ожиданием.

Найдем вероятности переходов из одного состояния в другое. Переход $i \to i+1$ за время t связан с поступлением одного требования в систему за это время и уходом нуля требований (то есть с тем, что ни один из занятых узлов за это время обслуживания не закончил). Число занятых узлов равно i при $i \leq N$ и равно N при $i \geq N$. При $i \leq N$ имеем

$$P_{i,i+1}^{(t)} = \lambda t \cdot e^{-\lambda t} \cdot (e^{-\nu t})^i = \lambda t \cdot (1 - \lambda t + o(t)) \cdot (1 - i\nu t + o(t)) = \lambda t + o(t). \qquad (7.2)$$

Аналогично, при $i \geq N$ имеем

$$P_{i,i+1}^{(t)} = \lambda t \cdot e^{-\lambda t} \cdot (e^{-\nu t})^N = \lambda t \cdot (1 - \lambda t + o(t)) \cdot (1 - N\nu t + o(t)) = \lambda t + o(t). \qquad (7.3)$$

Переход $i \to i-1$ связан с поступлениям нуля требований и уходом одного (то есть с тем, что ровно один из занятых узлов окончил обслуживание). При $i \le N$

$$P_{i,i-1}^{(t)} = e^{-\lambda t} \cdot (e^{-\nu t})^{i-1} \cdot (1 - e^{-\nu t}) \cdot C_i^1 = i\nu t + o(t). \qquad (7.4)$$

При $i \ge N$

$$P_{i,i-1}^{(t)} = e^{-\lambda t} \cdot (e^{-\nu t})^{N-1} \cdot (1 - e^{-\nu t}) \cdot C_N^1 = N\nu t + o(t). \qquad (7.5)$$

Далее, переход $i \to i$ связан с отсутствие поступления требований в систему и ухода требований из системы. При $i \le N$ такой переход имеет вероятность

$$P_{i,i}^{(t)} = e^{-\lambda t} \cdot (e^{-\nu t})^{i} = 1 - \lambda t - i\nu t + o(t). \qquad (7.6)$$

При $i \ge N$

$$P_{i,i}^{(t)} = e^{-\lambda t} \cdot (e^{-\nu t})^{N} = 1 - \lambda t - N\nu t + o(t). \qquad (7.7)$$

Все остальные вероятности переходов суть величины бесконечно малые. Например, при $i \ge N$

$$P_{i,i+2}^{(t)} = \frac{(\lambda t)^2}{2} \cdot e^{-\lambda t} \cdot (e^{-\nu t})^N = o(t) \qquad (7.8)$$

$$P_{i,i-2}^{(t)} = e^{-\lambda t} \cdot (e^{-\nu t})^{N-2} \cdot (1 - e^{-\nu t})^2 \cdot C_N^2 = o(t) \qquad (7.9)$$

При определении формул для вероятностей (7.2) – (7.7) мы учли не все возможные случаи. Так, например, переход $i \to i+1$ возможен не только при поступлении одного, но и при поступлении n требований и уходе $n+1$ требований. Легко можно подсчитать вероятности таких событий и убедиться, что при $n \ge 2$ они (и их сумма) являются бесконечно малыми, так что единственный существенный вклад в эту вероятность даст учтенный выше случай $n = 0$.

Мы убедились, что вероятности перехода удовлетворяют условиям (4.16), (4.20) – (4.22), так что функционирование рассматриваемой системы обслуживания описывается процессом гибели и рождения. При этом

$\lambda_i = \lambda,$

$$\nu_i = \begin{cases} i\nu \text{ при } i \le N \\ N\nu \text{ при } i \ge N \end{cases} \quad (7.10)$$

Подставив (7.10) в (5.22), мы получим формулы для финальных вероятностей состояний. При $k \le N$

$$P_k = \frac{\lambda}{k\nu} \cdot \frac{\lambda}{(k-1)\nu} \cdot \ldots \cdot \frac{\lambda}{1 \cdot \nu} \cdot P_0 = \frac{\lambda^k}{\nu^k \cdot k!} \cdot P_0 \quad (7.11)$$

При $k \ge N$

$$P_k = \frac{\lambda}{N\nu} \cdot \ldots \cdot \frac{\lambda}{N\nu} \cdot \frac{\lambda}{N\nu} \cdot \frac{\lambda}{(N-1)\nu} \cdot \ldots \cdot \frac{\lambda}{1 \cdot \nu} \cdot P_0 =$$

$$= \frac{\lambda^k}{\nu^k \cdot N^{k-N} \cdot N!} \quad (7.12)$$

Введем обозначение для загрузки системы ρ

$$\rho = \frac{\lambda}{\nu} \quad (7.13)$$

Подставив (7.13) в (7.11) и (7.12), получим

$$P_k = \begin{cases} \dfrac{\rho^k}{k!} \cdot P_0, \text{ если } k \le N \\ \dfrac{p^k}{N^{k-N} \cdot N!} P_0, \text{ если } k \ge N \end{cases} \quad (7.14)$$

Для упрощения формулы (7.14) можно ввести обозначение

$$h_N(k) = \begin{cases} k!, \text{ если } k \le N \\ N^{k-N} \cdot N!, \text{ если } k \ge N \end{cases} \quad (7.15)$$

Тогда

$$P_k = \frac{\rho^k}{h_N(k)} \cdot P_0 \quad (7.16)$$

Мы выразили вероятность P_k через P_0. Исходя из условия, что сумма вероятностей всех состояний равна 1, получим:

$$P_0 = \frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{N} \frac{\rho^k}{k!} + \sum\limits_{k=N+1}^{\infty} \cdot \frac{\rho^k}{N^{k-N} \cdot N!}} \qquad (7.17)$$

Во второй сумме знаменателя (7.17) можно вынести за скобки выражение $N^N/N!$ после чего остается просуммировать геометрическую прогрессию

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{N}\right)^k \qquad (7.18)$$

Эта прогрессия является убывающей и имеет конечную сумму только при условии, что

$$\frac{\rho}{N} < 1 \qquad (7.19)$$

При невыполнении условия (7.19) сумма прогрессии является бесконечной, то есть вероятность $P_0 = 0$, а, следовательно, по (7.16) и все вероятности $P_k = 0$. В этом случае ни одно из состояний не является устойчивым, число требований в системе стремится к бесконечности, наступает явление "взрыва".

Это обстоятельство следует учитывать при проектировании и анализе СМО с ожиданием.

Рассмотрим следующий пример. Предположим, что врач на прием одного пациента тратит в среднем 10 мин. Тогда на первый взгляд кажется естественным, что за двухчасовой прием он должен обслужить 12 больных. Однако это обосновано лишь в том случае, когда поток больных является регулярным и длительность обслуживания постоянна. Если же поток и время обслуживания являются случайными, то в некоторые периоды врач окажется свободным, а в другие перед его кабинетом будет накапливаться очередь. Если поток и время обслуживания предельно случайны (поток пуассоновский, а время экспоненциальное), то ситуация соответствует "взрыву", так как $\rho/N = 1$. Естественное планирование работы оказывается необоснованным.

В дальнейшем при рассмотрении СМО с ожиданием мы будем предполагать условие (7.19) выполненным. При этом (7.17) принимает вид:

$$P_0 = \frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{N} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^{N+1}}{N!(N-\rho)}}. \qquad (7.20)$$

Формулы (7.20), (7.14) дают возможность вычислить вероятности состояний P_k для любых $k \geq 0$. Для вычисления требуется знать две характеристики СМО: число узлов обслуживания N и загрузку ρ.

Упражнения

1. Проведите необходимые преобразования, чтобы убедиться в правильности формул (7.2) – (7.9).
2. Найдите вероятности перехода в не соседнее состояние кроме тех, которые охвачены формулами (7.6), (7.9)
3. Проведите преобразования для получения (7.17), (7.20).
4. Обоснуйте, что для процесса гибели и рождения, описывающего функционирование СМО с ожиданием, условия (7.19) и (5.11) эквивалентны.