Теория игр

ПМ-1701

Преподаватель:

Чернов Виктор Петрович
viktor_chernov@mail.ru

Санкт-Петербург
2020 г., 6 семестр

Список литературы

[1] Теория игр

Содержание

1 10.02.2020

1.1 Введение

Предметом теории игр является моделированием конфликтных ситуаций. Зачинателем "Теории игр"является Джон фон Нейман, а последователем является Джон Нэш. Зададимся вопросом, а как описать конфликт с помощью математических формул.

Опр: Стороны в "конфликте"называются *игроками*.

Опр: *Множество игроков* обозначается как I и каждый игрок принадлежит этому множеству:

$$i \in I \tag{1}$$

Опр: *Стратегия* в такой игре - правило(отображение), которое преписывает игроку для каждой ситуации в игре ход в это ситуации.

Опр: S_i -*Множество стратегий*, для каждого игрока i своя стратегия:

$$\{S_i\}_{i \in I} \tag{2}$$

Опр: *Ситуация* - результат выбора игроками своих стратегий.

Опр: Размер выигрыша определяется *платежной функцией* - функция, оценивающая ту или иную ситуацию для отдельного игрока. Данная функция отображает ситуацию в число:

$$i: \ \{H_i\}_{i \in I} \tag{3}$$

$$H_i(s_1, s_2, ..., s_n) \in \mathbb{R} \tag{4}$$

т.е каждый игрок оценивает ситуацию вещественным числом.

Опр: Множество игроков, множество стратегий и множество платежных функций называется *игрой*:

$$< i \in I, \{S_i\}_{i \in I}, \{H_i\}_{i \in I} > \tag{5}$$

Пример: на столе лежит 100 камешков, играют два человека. Ход состоит в том, что каждый игрок забирает из кучки от 1 до 5 камешков по своему усмотрению. Тот, кто взял последним, выиграл. Существуют ли выигрышные стратегии для игроков?

Решение:

Первый ход: берем 4 камня, а после дополняем количество камешков до 6. Первый выигрывает. ■

Для каждой из игр строится *дерево игры*, состоящее из стратегий, где каждая *ветвь* - отдельная игра, а *узлы* данного вида - ситуации.

На основе дерева игры попытаемся создать *матрицу данной игры* размером $m \times n$ Количество *строк* в данной матрице - *количество стратегий* первого игрока, количество *столбцов* - количество стратегий второго игрока.

Первый игрок выбирает какую-то строку этой матрицы, второй - какой-то столбец, другими словами первый игрок выбирает какую-то стратегию, а на пересечении столбцов и строк находится размер выигрыша первого игрока (при нулевом балансе у проигравшего получается -1, а у выигрывшего 1).

Пусть H_1 - матрица выигрыша первого игрока, H_2 - матрица выигрыша второго игрока и сумма элементов на одинаковых позициях в этих таблицах равна нулю.

Опр: Если сумма платежных функций (матриц функций) равна нулю, то такая игра называется игрой с *нулевой суммой*.

$$\sum_{i \in I} H_i(s_1, s_2, ..., s_n) = 0 \tag{6}$$

Опр: Если сумма равна какой-то константе, то такая игра называется игрой с *постоянной суммой*.

$$\sum_{i \in I} H_i(s_1, s_2, ..., s_n) = Const \tag{7}$$

Опр: *антагонистическая игра* - игра двух игроков с нулевой суммой. В такой игре если выигрывает один, то обязательно проигрывает другой.

Так как сумма матриц равна нулю, то:

$$H_1 = -H_2 \tag{8}$$

следовательно, нам не нужно две матрицы и будем проводить рассуждение на основе матрицы выигрышей первого игрока.

1.2 Матричные игры

Рассмотрим матрицу $A_{m\times n}$ с элементами , являющимися вещественными числам, для антагонистической игры, в которую играют два игрока. Первый игрок выбирает номер строки, а второй игрок выбирает номер столбца.

То, что находится на пересечении (a_{ij}) - размер выигрыша(проигрыша) игрока первого игрока, $(-a_{ij})$ - проигрыша(выигрыша) второго игрока.

Будем выписывать минимальные элементы по строке:

$$\min_j = \{a_{1,j_1}, ..., a_{m,j_m}\} \tag{9}$$

Опр: Среди данных минимумов выберем max среди min. Данная величина называется *максимином*:

$$\max_i(\min_j a_{ij}) = a_{i_0,j_0} \tag{10}$$

То есть в самой худшей ситуации, если он выберет эту строку, то это будет минимальным его выигрышем.

Допустим второй игрок выбирает первый столбец, тогда худшим вариантом для него будет максимум по строкам в каждом столбце:

$$\max_i = \{a_{i_1,1}, ..., a_{i_n,n}\} \tag{11}$$

Опр: Среди данных минимумов выберем min среди max (лучшее среди худшего). Данная величина называется *минимаксом*:

$$\min_j(\max_i a_{ij}) = a_{i_1,j_1} \tag{12}$$

Получили гарантированный проигрыш второго игрока. Предположим, что эти элементы совпали, тогда такой элемент называется седловой точкой.

Опр: Седловой точкой называется точка(элемент матрицы), которая является минимальным в своей строке и максимальной в своем столбце.

Опр: Устойчивая ситуация - ситуация, из которой невыгодно выходить любому игроку. Признак решения конфликта - наличие свойства устойчивости.

Такое решение называется решением по *Нэшу*.

Теорема 1: (*неравенство максимина и минимакса*)

Дана матрица $A_{m\times n}$ и a_{ij} - элементы матрицы.

Рассмотрим максимин и минимакс: a_{pq} и a_{rs}, такие, что:

$$a_{pq} = \max_i \left(\min_j a_{ij}\right) \tag{13}$$

$$a_{rs} = \min_j \left(\max_i a_{ij}\right) \tag{14}$$

Тогда

$$a_{pq} \leq a_{rs} \tag{15}$$

Доказательство:

Рассмотрим матрицу и рассмотренные в ней элементы a_{pq} и a_{rs}.

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & a_{pq} & \cdot & a_{ps} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & a_{rs} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

Пусть рассматривается a_{ps} - элемент матрицы $A_{m\times n}$. $a_{ps} \leq a_{rs}$, так как a_{rs} - максимум в столбце.

С другой стороны a_{pq} - минимум в строке, следовательно $a_{pq} \leq a_{ps}$. Тогда из двух неравенств получаем: $a_{pq} \leq a_{ps} \leq a_{rs}$. ■

Рассмотрим теперь теорему и необходимом и достаточном условии седловой точке в матрице.

Теорема 2: (*необходимое и достаточное условие седловой точки*)

Чтобы задача имела седловую точку необходимо и достаточно, чтобы

$$a_{pq} = a_{rs} \tag{16}$$

Доказательство:

1. $\exists$ седловая чтока $\Rightarrow a_{pq} = a_{rs}$. Пусть a_{kl} - седловая точка.

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & a_{pq} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & a_{kl} & a_{ks} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & a_{rs} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

Если бы мы писали строку максимумов, то в ней бы были точки $a_{kl}, ..., a_{rs}$, но в этой строке a_{rs} является минимумом, следовательно:

$$a_{kl} \geq a_{rs}$$

Если бы мы писали столбец минимумов, то в ней бы были точки $a_{pq}, ..., a_{kl}$, но в этом столбце a_{pq} является максимумом, следовательно:

$$a_{pq} \geq a_{kl}$$

Из двух неравенств получаем следующие соотношения:

$$a_{pq} \geq a_{kl} \geq a_{rs}$$

$$a_{pq} \geq a_{rs}$$

Но по формуле (15):

$$a_{pq} \leq a_{rs}$$

Следовательно:

$$a_{pq} = a_{rs}$$

Необходимость доказана

2. $a_{pq} = a_{rs} \Rightarrow$ Нужно доказать, что $\exists$ - седловая точка

Для доказательства обратного случая нужно построить каким-то образом седловую точку. Выберем точку a_{ps}, как показано ниже, и докажем, что данная точка является седловой.

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & a_{pq} & \cdot & a_{ps} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & a_{rs} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

$$a_{pq} \leq a_{ps} \leq a_{rs}$$

Можно записать как равенство, так как по условию достаточности:

$$a_{pq} = a_{ps} = a_{rs}$$

Этот элемент равен минимальному в строке и максимальному в столбце - определение минимакса и максимина $\underset{\text{def}}{\Rightarrow}$ седловая точка. ■

Теорема 3: (*множество седловых точек*)

Пусть a_{kl} и a_{uv} - седловые точки, тогда a_{kv} и a_{ul} - тоже седловые точки.

Доказательство:

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & a_{kl} & \cdot & a_{kv} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & a_{ul} & \cdot & a_{uv} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

$$a_{kl} \geq a_{ul} \geq a_{uv} \geq a_{kv} \geq a_{kl}$$

Так как концы равны, то можно заменить равенствами.

$$a_{kl} = a_{ul} = a_{uv} = a_{kv} = a_{kl}$$

Следовательно, a_{ul} и a_{kv} - максимальный в своем столбце и минимальный в своем столбце $\underset{\text{def}}{\Rightarrow}$ седловые точки. ■

Замечание: все седловые точки *равны друг другу*.

Замечание: если элемент матрицы *равен седловой точке*, то он *не обязательно является седловой точкой*.

Рассмотрим пример:

$$\begin{pmatrix} 1_s & 1_s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

В данном примере в первой строке являются седловыми точками, но единица во второй строке не седловая точка, хоть и равна ей.

2 17.02.2020

Будем рассматривать переменные на прямоугольнике.

Пусть задана функция $f(x.y)$ и играется в антоганистическую игру двумя соперниками. Первый игрок выбирает значение x на своем промежутке $x : a \leq x \leq b$, а второй игрок выбирает какое-то значение $y : c \leq y \leq d$.

Требуется определить механизм седловой точки.

Алгоритм нахождения седловой точки:

1. $\max\limits_x \max\limits_y f(x,y)$
   (a) $\min\limits_y f(x,y) = g(x)$
   (b) $\max\limits_x g(x) = A$
2. $\min\limits_y \max\limits_x f(x,y)$
   (a) $\max\limits_x f(x,y) = h(y)$
   (b) $\min\limits_y h(y) = B$
3. $A = B$?

Задача:

$$f(x,y) = (x-y)^2$$

$$-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1$$

Решение: Найдем максимин:

$$\min_y f(x,y) = (f(x,y))'_y = -2x + 2y = g(x)$$

$$y = x$$

$$A = \max_x g(x) = 0$$

Найдем минимакс:

$$\max_x f(x,y) = (f(x,y))'_x = 2x - 2y = h(y) \Rightarrow x = y$$

При каждом y свое значение максимума:

Исследуем границы:

$$\max(1-y)^2 = 4 \ ; \ \max(-1-y)^2 = 4$$

$$h(y) = \begin{cases} (1-y)^2, -1 \leq y \leq 0 \\ (1+y)^2, 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

$$B = \min_y h(y) = 1$$

Седловой точки нет, так как $A \neq B$

3 02.03.2020

Задача 2:

$$f(x,y) = (x-y)^2 - 0.5y$$

$$-1 \le x \le 1, -1 \le y \le 1$$

Решение: В общем случае, нет стационарной точки, значит будем искать на границах.

Найдем максимин:

$$\min_y f(x,y) = (f(x,y))'_y = -2x + 2y - 0.5 = g(x)$$

$$(f(x,y))''_y = 2 - \text{точка минимума}$$

$$y = x + 0.25$$

Из трех функций нужно было бы найти min среди трех выражений $f(x,1), f(x,-1), -0.0625x$

$$g(x) = \max f(x,1), f(x,-1), f(x,x+0.25)$$

$$g(x) = -0.0625 - 0.5x, \quad x \to -1$$

$$A = \max_x g(x) = 0.4375$$

Найдем минимакс:

$$\max_x f(x,y) = (f(x,y))'_x = 2x - 2y = h(y) \Rightarrow x = y$$

При каждом y свое значение максимума:

Исследуем границы:

$$\max(1-y)^2 = 4 \ ; \ \max(-1-y)^2 = 4$$

$$h(y) = \begin{cases} (1-y)^2, -1 \le y \le 0 \\ (1+y)^2, 0 \le y \le 1 \end{cases}$$

$$B = \min_y h(y) = 1$$

Седловой точки нет, так как $A \ne B$

Задача 3:

$$f(x,y) = (x - y(1-y^2))^2 = x^2 - 2xy + y^2 + 2xy^3 - 2y^4 + y^6$$

$$-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1$$

Решение:

Обозначим за $y(1-y^2) = u$, тогда получим функцию: $f(x,u) = (x-u)^2$

Для того, чтобы узнать границы, найдем минимум и максимум функции u:

$$\min(y - y^3) = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$$

$$\max(y - y^3) = \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

1. Найдем максимин:

$$\min_u f(x,u) = (f(x,u))'_u = -2(x-u) - \text{точка минимума}$$

$$u = x$$

$$g(x) = \begin{cases} (x + \frac{2}{3\sqrt{3}})^2 & -1 \leq x \leq -\frac{2}{3\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{3\sqrt{3}} \leq x \leq \frac{2}{3\sqrt{3}} \\ (x - \frac{2}{3\sqrt{3}})^2 & \frac{2}{3\sqrt{3}} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$A = \max_x g(x) = \left(1 - \frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^2$$

2. Найдем минимакс:

$$\max_x f(x,u) = (f(x,u))'_x = 2x - 2u = h(u) \Rightarrow x = u$$

Исследуем границы:

$$h(u) = \begin{cases} (1+u)^2, \frac{2}{3\sqrt{3}} \geq u \geq 0 \\ (1-u)^2, -\frac{2}{3\sqrt{3}} \leq u \leq 0 \end{cases}$$

Рисуем график и находим минимум.

$$B = \min_u h(u) = 1$$

Седловой точки нет, так как $A \neq B$.

3.0.1 23.03.2020 Смешанное расширение матричной игры

Мы видели на разных примерах, что матрица может иметь седловую точку (седловой элемент), а может не иметь ее. Соответственно, решение игры, определяющее равновесие по Нэшу, может существовать, а может не существовать.

Оказывается, что в некотором расширенном смысле решение игры существует всегда.

Рассмотрим матрицу A размерности $m \times n$. Ее элементы обозначим как $a_i j$.

Смешанной стратегией первого игрока назовем распределение вероятностей выбора той или иной строки. Таким образом, смешанная стратегия – это вектор вида:

$$P = (p_1, p_2, \ldots, p_m), (1 \times m)$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

p_i - вероятность выбора игроком его i-ой стратегии.

все компоненты которого неотрицательны и сумма компонент которого равна 1.

Аналогично определяется понятие смешанной стратегии второго игрока. Она представляет собой вектор Q вида:

$$Q = (q_1, q_2, \ldots, q_n), (1 \times n)$$

все компоненты которого неотрицательны и сумма компонент которого равна 1.

Множество смешанных стратегий бесконечно. Частный случай смешанной стратегии, когда одна компонента равна 1, а остальные равны 0, соответствует выбору конкретной строки (или столбца), то есть соответствует стратегии в прежнем смысле.

Теперь такие стратегии мы будем называть чистыми стратегиями. Таким образом, чистые стратегии – частный случай смешанных. Множество чистых стратегий конечно.

Предположим, игроки выбрали какие-то свои смешанные стратегии P и Q. Представим себе, что игра с матрицей A разыгрывается многократно. В каждом конкретном розыгрыше игроки выбирают строку и столбец случайным образом, но каждый игрок делает такой выбор в соответствии с распределением вероятностей P (для первого игрока) и Q (для второго).

Результатом такой игры считается математическое ожидание величины выигрыша. Это математическое ожидание можно задать в виде произведения

$$\mathbb{E} = PAQ^T \tag{18}$$

Такая игра в новом смысле, подразумевающая возможность использования смешанных стратегий, называется *смешанным расширением первоначальной игры.*

Пара смешанных стратегий P^*, Q^* является *седловой точкой смешанного расширения*, если для любых смешанных стратегий P и Q выполнены неравенства:

$$PAQ^{*T} \leq P^* AQ^{*T} \leq P^* AQ^T \tag{19}$$

Эта пара неравенств показывает, что первому игроку невыгодно отклоняться от своей стратегии * в пользу любой другой стратегии P, так как его средний выигрыш при этом не увеличится (при условии, что второй игрок сохранит выбранную им стратегию . Аналогично, второму игроку невыгодно отклоняться от своей стратегии Q^* в пользу любой другой стратегии Q, так как средний выигрыш его противника при этом не уменьшится.

Стратегии P^*, Q^*, определяющие седловую точку, называются оптимальными стратегиями игроков. Они образуют равновесие по Нэшу в смешанном расширении игры.

Задания:

1. Напишите формулу математического ожидания величины выигрыша первого игрока в развернутом виде и докажите, что матричное представление (18) дает тот же результат.

Решение:

a_{ij} - элементы матричной игры.

При использовании смешанных стратегий выигрыш игрока 1 оказывается случайной величиной с распределением, порожденным смешанными стратегиями на множестве всех ситуаций игры. Так как игроки выбирают строки и столбц независимо, то вероятноть случайной величины оказаться равной a_{ij} равна:

$$P(\xi = a_{ij}) = p_i q_j, \quad i = (1, \ldots, m), \quad j = (1, \ldots, n)$$

Поэтому выигрыш игрока 1 в ситуации в смешанных стратегиях полагается равным математическому ожиданию выигрыша в чистых стратегиях:

$$\mathbb{E}(P, Q) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j = PAQ^T$$

Заметим, что игрок 2 получит $-\mathbb{E}(P, Q)$. ■

2. Проверьте, что формула (18) написана правильно по правилам матричного умножения.

Решение:

Формула (18) верна, так как мы имеем дело с матрицами типа:

$$P = (p_1, p_2, \ldots, p_m) : (1 \times m)$$

$$A : (m \times n)$$

$$Q = (q_1, q_2, \ldots, q_n) : (1 \times n)$$

Тогда:

$$\mathbb{E} = PAQ^T = (1 \times m) \cdot (m \times n) \cdot (n \times 1) = (1 \times n) \cdot (n \times 1) = (1 \times 1)$$

Получили число, следовательно, формула верна. ■.

3. В неравенствах (19) участвуют любые смешанные стратегии P и Q. Докажите, что если эти неравенства выполнены на всех чистых стратегиях P и Q, то они будут выполнены и на всех смешанных стратегиях.

Решение:

Доказательство:

Необходимо доказать, что она является равновесной и для смешаннного расширения игры. Пусть ситуация i^*, j^* в чистых стратегиях является равновесной для матричной игры с матрицей $A = a_{ij}$. Тогда выполняются неравенства:

$$a_{ij^*} \leq a_{i^*j^*} \leq h_{i^*j}, \quad \forall i = 1, 2, \ldots, m, \forall j = 1, 2, \ldots, m \tag{20}$$

Все чистые стратегии игрока являются ортами в n-мерном евклидовом пространстве и матрица является единичной. Следовательно, в смешанных стратегиях:

$$P^* = e_{j^*}, Q^* = e_{i^*}$$

Тогда:

$$e_{j^*} A e_{i^*}^T = P^* A Q^* = a_{i^* j^*}$$

$$e_j A e_{i^*}^T = a_{i,j^*}$$

$$e_{j^*} A e_i^T = a_{i^*,j}$$

Таким образом неравенства (20) записываются в виде:

$$e_j A e_{i^*}^T \leq e_{j^*} A e_{i^*}^T \leq e_{j^*} A e_i^T$$

где $e_{j^*} A e_{i^*}^T = a$ - какое-то число

Отсюда вытекает неравенство:

$$PAQ^{*T} \leq a \leq P^* A Q^T$$

для любых чистых стратегий, следовательно, т.е выполняется неравенство

$$PAQ^{*T} \leq P^* A Q^{*T} \leq P^* A Q^T \tag{19}$$

Тогда (P^*, Q^*) - ситуация равновесия в смешанных стратегиях. ■

3.0.2 Формульное решение антагонистических игр

Рассмотрим антагонистическую игру с матрицей $A : 2 \times 2$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Смешанная стратегия первого игрока есть вектор $P = (p, 1-p)$. Он полностью определяется величиной , лежащей на отрезке $[0; 1]$.

Аналогично, смешанная стратегия второго игрока есть вектор $Q = (q, 1-q)$, полностью определяемый величиной q из того же отрезка $[0, 1]$.

Математическое ожидание $\mathbb{E}$ выигрыша первого игрока при выборе игроками своих смешанных стратегий P и Q, то есть при выборе величин p и q, есть:

$$\mathbb{E}(p, q) = PAQ^T = pqa_{11} + p \cdot (1-q)a_{12} + (1-p)qa_{21} + (1-p)(1-q)a_{22} \quad (1)$$

Для того, чтобы стратегия P была оптимальной, необходимо, чтобы она была не хуже каждой из двух чистых стратегий, то есть необходимо, чтобы выполнялись неравенства:

$$\begin{cases} \mathbb{E}(p, q) \geq qa_{11} + (1-q)a_{12} \qquad (2) \\ \mathbb{E}(p, q) \geq qa_{21} + (1-q)a_{22} \qquad (3) \end{cases}$$

Неравенство (2) и (3) преобразуются соответственно в:

$$\begin{cases} (1-p)(qa_{11} + (1-q)a_{12} - qa_{21} - (1-q)a_{22}) \leq 0 \qquad (4) \\ p(qa_{11} + (1-q)a_{12} - qa_{21} - (1-q)a_{22}) \geq 0 \qquad (5) \end{cases}$$

Если матрица A не имеет седловой точки, то $0 < p < 1$. В этом случае обе части последних двух неравенств можно разделить на $1-p$ и на p соответственно. В итоге получаем два неравенства, в совокупности эквивалетных равенству.

$$qa_{11} + (1-q)a_{12} - qa_{21} - (1-q)a_{22} = 0 \tag{6}$$

Обозначим за $C = (a_{11} + a_{22}) - (a_{12} + a_{21}) \qquad (7)$. Тогда:

$$q^* = \frac{a_{22} - a_{12}}{C} \tag{8}$$

$$1 - q^* = \frac{a_{11} - a_{21}}{C} \tag{9}$$

Отметим, что формулы (8), (9), задающие оптимальную стратегию второго игрока, мы получили, исходя из неравенств (2), (3), характеризующих оптимальное поведение первого игрока.

Написав аналогичные неравенства, характеризующих оптимальное поведение второго игрока, и проведя аналогичные рассуждения, получим компоненты оптимальной стратегии первого игрока:

$$p^* = \frac{a_{22} - a_{21}}{C} \tag{10}$$

$$1 - p^* = \frac{a_{11} - a_{12}}{C} \tag{11}$$

Чтобы сосчитать цену игры – размер выигрыша первого игрока – следует подставить формулы (8) – (11) в (1). После простых преобразований получим:

$$\mathbb{E}(p^*, q^*) = \frac{\Delta}{C} = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{(a_{11} + a_{22}) - (a_{12} + a_{21})} \tag{12}$$

где Δ - определитель матрицы A.

Вопросы и задания:

1. Обоснуйте приведенное выше утверждение, что для того, чтобы стратегия P была оптимальной, необходимо, чтобы выполнялись неравенства (2), (3).

Решение:

Какой бы ни была матрица A, равновесные смешанные стратегии игроков существуют, или:

$$\max_P \, (\min_Q \, PAQ^T) = \min_Q \, (\max_P \, PAQ^T)$$

Общее значение минимаксов назовем значением матричной игры с матрицей выигрыша A. Обозначим за V.

Игроки 1,2 должны выбирать такие свои стратегии, которые в игре составляют седловую точку.

Оптимальные стратегии - равновесные стратегии игроков.

Значит определение седловой точки можно перезаписать как:

$$PAQ^{*T} \geq V \geq P^*AQ^T$$

Теперь понятно почему неравенства (2),(3) верны - выбор игроком 1 оптимальной стратегии дает ему выигрыш не меньший, чем значение игры, что бы ни делал игрок 2. ■

2. На самом деле, неравенства (2), (3) являются не только необходимыми, но и достаточными условиями оптимальности стратегии P. Докажите утверждение о достаточности этих условий.

Решение:

Следует из определения минимакса и предыдущего пункта. ■.

3. Выведите формулы (10), (11), определяющие оптимальную стратегию первого игрока.

Решение:

Для того, чтобы стратегия Q была оптимальной, необходимо, чтобы она была не хуже каждой из двух чистых стратегий, то есть необходимо, чтобы выполнялись неравенства:

$$\begin{cases} \mathbb{E}(p,q) \geq pa_{11} + (1-p)a_{21} \quad (2a) \\ \mathbb{E}(p,q) \geq pa_{12} + (1-p)a_{22} \quad (3a) \end{cases}$$

Неравенство (2a) и (3a) преобразуются соответственно в:

$$\begin{cases} (1-q)(a_{21} - a_{22} - a_{21}p + (a_{11} - a_{12} + a_{22})p) \leq 0 \qquad (4a) \\ \quad q(a_{21} - a_{22} - a_{21}p + (a_{11} - a_{12} + a_{22})p) \geq 0 \qquad (5a) \end{cases}$$

Если матрица A не имеет седловой точки, то $0 < p < 1$. В этом случае обе части последних двух неравенств можно разделить на $1-q$ и на q соответственно. В итоге получаем два неравенства, в совокупности эквивалетных равенству.

$$-a_{21} + a_{22} + a_{21}p - (a_{11} - a_{12} + a_{22})p = 0 \qquad (6a)$$

Обозначим за $C = (a_{11} + a_{22}) - (a_{12} + a_{21}) \qquad (7a)$. Тогда:

$$p^* = \frac{a_{22} - a_{21}}{C} \qquad (10)$$

$$1 - p^* = \frac{a_{11} - a_{12}}{C} \qquad (11) \quad ■$$

4. Выведите формулу (12), определяющую цену игры.

Решение:

$$q^* = \frac{a_{22} - a_{12}}{C} \qquad (8)$$

$$1 - q^* = \frac{a_{11} - a_{21}}{C} \tag{9}$$

$$p^* = \frac{a_{22} - a_{21}}{C} \tag{10}$$

$$1 - p^* = \frac{a_{11} - a_{12}}{C} \tag{11}$$

$$\mathbb{E}(p^*, q^*) = PAQ^T = pqa_{11} + p\cdot(1-q)a_{12} + (1-p)qa_{21} + (1-p)(1-q)a_{22} \ (1) =$$
$$= \frac{a_{22} - a_{12}}{C}\frac{a_{22} - a_{21}}{C}a_{11} + \frac{a_{22} - a_{21}}{C}\frac{a_{11} - a_{21}}{C}a_{12} + \frac{a_{11} - a_{12}}{C}\frac{a_{22} - a_{12}}{C}a_{21} +$$
$$+ \frac{a_{11} - a_{12}}{C}\frac{a_{11} - a_{21}}{C}a_{22}$$

$$\mathbb{E}(p^*, q^*) = \frac{(a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})(-a_{12}a_{21} + a_{11}a_{22})}{C^2} = \frac{C \cdot \Delta}{C^2} = \frac{\Delta}{C}(12) \quad \blacksquare$$

5. Формулы (8) – (12) содержат в знаменателе величину С. Естественно, этими формулами нельзя пользоваться, если $C = 0$.

5.1 Докажите, что если матрица А не имеет седловой точки, то $C \neq 0$.

Решение:

Можно доказать следующее аналогичное утверждение:

Для того чтобы у матрицы А размера 2х2 существовала седловая точка достаточно, чтобы сумма элементов главной диагонали матрицы А равнялась сумме элементов её побочной диагонали:

$$a_{11} + a_{22} = a_{12} + a_{21}$$

Доказательство: Выразим в данном равенстве a_{21}:

$$a_{21} = a_{11} - a_{12} + a_{22}$$

Возможны только два случая: $a_{11} \leq a_{12}$ и $a_{11} > a_{12}$.

В первом случае, получаем, что $a_{21} < a_{22}$, что означает, что второй столбец содержит максимальный по солбцам, тогда существует оптимальная смешанная стратегия игрока 1, в которую чистая стратегия входит с нулевой вероятностью - стратегия игрока 1 - оптимальна. По определиню оптимальной стратегии, у матрицы A существует седловая точка.

Аналогично доказывается второй случай. $\blacksquare$

5.2 Таким образом получается, что решение игры 2×2 состоит из двух этапов. На первом этапе проверяем, имеет ли матрица А седловую точку. Если да, то игра имеет решение в чистых стратегиях, и второй этап решения не нужен. Если нет, то переходим ко второму этапу, где по формулам (7) – (12) получаем решение в смешанных стратегиях.

6. Согласно предыдущему заданию, если $=0$, то матрица A имеет седловую точку. Докажите, что обратное утверждение неверно.

Решение:

Достаточно привести антипример:

$$\begin{pmatrix} 1_s & 1_s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

В данном примере в первой строке являются седловыми точками, $C = 1 + 1 - 1 = 1 \neq 0 \quad \blacksquare$

7. Рассмотрим игру в «Два пальца». Игроки одновременно показывают друг другу один или два пальца. Если число показанных пальцев одинаково, то выигрывает первый игрок, если разное, то второй. Размер выигрыша зависит от варианта игры. В первом варианте он равен 1 (или, соответственно, –1), независимо от числа показанных пальцев. Во втором варианте выигрыш равен сумме показанных пальцев (с соответствующим знаком). Напишите матрицу игры для первого и второго вариантов. Попробуйте предсказать оптимальные стратегии и средний выигрыш до проведения расчетов. Проверьте свои догадки расчетами.

3.0.3 Графическая интерпретация решения игры 2×2

8. Напишите на листе бумаги уравнения прямых для диаграммы первого игрока. Вычислите координаты точки пересечения этих прямых. Выпишите оптимальную стратегию первого игрока и размер его выигрыша.

Решение:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Уравнение прямой первого игрока:

$$x = \frac{y-1}{3-1} \Rightarrow y = 2x + 1$$

$$x = \frac{y-4}{2-4} \Rightarrow y = 4 - 2x$$

Найдем точку пересечения:

$$2x + 1 = 4 - 2x \Rightarrow x = \frac{3}{4}, y = 2.5$$

Т.е точка $N(0.75, 0.25)$, откуда $p = 0.75, 1 - p = 0.25, y = 2.5$

9. Проведите на бумаге аналогичные расчеты для второго игрока. Выпишите оптимальную стратегию второго игрока и размер выигрыша первого игрока (проигрыша второго).

Решение:

Уравнение прямой второго игрока:

$$x = \frac{y-1}{4-1} \Rightarrow y = 3x + 1$$

$$x = \frac{y-3}{2-3} \Rightarrow y = 3 - x$$

Найдем точку пересечения:

$$3x + 1 = 3 - x \Rightarrow x = \frac{1}{2}, y = 2.5$$

Размер выигрыша равен:

$$\frac{2-12}{3-7} = 2.5 = y$$

10. Чему соответствует ситуация, когда абсцисса точки пересечения находится за пределами отрезка [0, 1]? Каковы в этом случае оптимальные стратегии игроков?

Решение:

Если у кого-то из игроков абсцисса точки пересечения не принадлежит отрезку (0,1), то игрок выбирает чистую стратегию: 1 игрок выбирает лучшую из худших точек, 2-ой игрок - наоборот.

11. Приведите пример матрицы, для которой один из игроков имеет бесконечно много решений в смешанных стратегиях, а другой имеет единственное решение. Как такая ситуация выглядит на диаграмме?

Решение:

Такое возможно, когда по столбцам больше седловых точек, нежели по строкам. График в файле.

12. Приведите пример матрицы, для которой оба игрока имеют бесконечно много решений в смешанных стратегиях. Как такая ситуация

выглядит на диаграмме?

Решение:

Такое возможно, когда все элементы матрицы одинаковые. График - две горизонтальные прямые (в файле).

13. Проведите показанное на рис. 1 построение в Excel. Построенная конструкция должна быть универсальной, то есть давать решение задачи при любой матрице A (если оптимальных стратегий бесконечно много, то давать одну из них). Проверьте это на разных матрицах. В частности, полезно провести проверку на матрице с одинаковыми элементами.

Решение:

Проведено в файле матрица.xlsx