

Исследование операций. Билеты

Александр Широков ПМ-1701

Преподаватель:

ЧЕРНОВ ВИКТОР ПЕТРОВИЧ

Санкт-Петербург
2020 г., 6 семестр

Список литературы

[1]

Содержание

1	Управление запасами	4
1.1	Понятие стратегии управления запасами	4
1.2	Классификация затрат в моделях управления запасами. Критерий оптимальности в моделях управления запасами .	5
1.3	Предпосылки простейшей модели управления запасами и вывод формул Уилсона	7
1.3.1	Предпосылки простейшей модели и обозначения . .	7
1.3.2	Доказательство оптимальности модели с одинако- выми периодами	8
1.3.3	Оптимальная стратегия запасов простейшей модели. Формула Уилсона	9
1.4	Простейшая модель управления запасами с допущением незадолженного дефицита	12
1.5	Простейшая модель управления запасами с допущением задолженного дефицита	14
1.6	Модель управления запасами с растянутой поставкой . . .	17
1.7	Модель управления запасами с растянутой поставкой и за- долженным дефицитом	20
1.8	Последовательность компьютерных моделей управления за- пасами	24
1.8.1	Модель 1. Определение оптимальной стратегии по- полнения запасов в условиях полной определенно- сти (период-неделя)	24
1.8.2	Модель 2. Автоматическое определение критическо- го уровня запасов	25
1.8.3	Модель 3. Ежедневные данные	25
1.8.4	Модель 4. Организация обработки статистики в ком- пьютерных моделях управления запасами	26
1.8.5	Определение величины страхового запаса в компью- терных моделях управления запасами	29

2	Теория массового обслуживания	30
2.1	Общая схема системы обслуживания	30
2.2	Три свойства потоков требования	32
2.2.1	Стационарность потока требования	33
2.2.2	Ординарность потока требований	33
2.2.3	Свойство отсутствия последствия	34
2.3	Параметр и интенсивность потока	37
2.4	Пуассоновский поток в дискретном времени. Вывод формулы $V_0(t)$ для пуассоновского потока	41
2.5	Вывод формул для вероятностей V_k элементарным методом	44
2.6	Графики и свойства вероятностей V_k пуассоновского потока	46
2.6.1	Параметр и интенсивность пуассоновского потока .	48
2.7	Распределение длин интервалов в пуассоновском потоке . .	49
2.8	Дисперсия длины интервала в пуассоновском потоке	54
2.9	Случайная фильтрация пуассоновских потоков	55
2.10	Объединение пуассоновских потоков	57
2.11	Нестационарные потоки	59
2.11.1	Вывод формул для $V_0(t_0, t)$	59
2.11.2	Вывод дифференциальных уравнений $V_k(t_0, t)$. . .	61
2.11.3	Решение дифференциальных уравнений $V_k(t_0, t)$. .	62
2.11.4	Мгновенные параметр и интенсивность нестационарного потока, их связь	63
2.12	Неординарные потоки. Формулы для $V_k(t)$ для начальных k	65
2.13	Параметр и интенсивность неординарного потока	70
2.14	Потоки с последствием. Функции Пальма-Хинчина. Вывод системы дифференциальных уравнений для $V_k(t_0, t)$.	72
2.14.1	Решение системы дифференциальных уравнений. Вывод формул для $V_k(t)$	74
2.14.2	Параметр и интенсивность потока с последствием	75
2.15	Регулярные потоки. Вывод формул для $V_k(t)$	77
2.16	Марковские цепи	78
2.16.1	Матрица вероятностей переходов	78
2.16.2	Вероятности перехода за несколько шагов	79
2.16.3	Финальные вероятности состояний и их вычисление	82
2.17	Марковские процессы	85

2.18	Процессы гибели и рождения	87
2.18.1	Задача об агрегате	89
2.18.2	Задача о станке-автомате	91
2.19	Финальные вероятности состояний для процессов гибели и рождения	93
2.20	СМО с отказанием	98
2.20.1	Функционирование системы как процесс гибели и рождения	98
2.20.2	Финальные вероятности состояний	101
2.20.3	Важнейшие характеристики функционирования си- стемы	101
2.21	СМО с ожиданием	105
2.21.1	Функционирование системы как процесс гибели и рождения	106
2.21.2	Финальные вероятности состояний	108
2.21.3	Важнейшие характеристики функционирования си- стемы	110
2.22	СМО с ограниченным накопителем	111
2.22.1	Функционирование системы как процесс гибели и рождения	111
2.22.2	Финальные вероятности состояний	111
2.22.3	Важнейшие характеристики функционирования си- стемы	112
2.23	СМО с ограниченным временем ожидания. Функциони- рование системы как процесс гибели и рождения	114

1 Управление запасами

1.1 Понятие стратегии управления запасами

Для определения понятия стратегии управления запасами нарисуем типичный график зависимости *запасов* от *времени*.

В начальный момент времени у производства есть какой-то запас продукции и он изменяется с течением времени. Склад является *аккумулятором* запасов потребления и на него поступает продукция поставщиков. В какой-то момент времени запас склада пополняется на некоторую величину V_1 .

Определение 1.1.1. Дефицит запаса - необходимость пополнения запаса склада на некоторую величину, на графике линии спада по оси ординат будет меньше или равна нулю.

Дефицит может отображаться двумя способами.

- **Незадолженный дефицит** - спустя какое-то время на склад при *нулевом запасе* приходит товар;
- **Задолженный дефицит** - дефицит уходит в отрицательную область.

Определение 1.1.2. Последовательность пополнения запасов - результат принятия решений, она возникает тогда, когда потребительская система формирует заказ поставщикам:

$$\begin{cases} V_1 & V_2 & \dots \\ t_1 & t_2 & \dots \end{cases}$$

Данный график носит название **стратегии управления поставками**.

Стратегия управления поставками состоит из отдельных управленческих решений. **Оптимизационная задача** состоит в том, чтобы понять - какая стратегия *оптимальна*, то есть какой график поставок лучше (выгоднее).

1.2 Классификация затрат в моделях управления запасами. Критерий оптимальности в моделях управления запасами

В моделях управления запасами существует 3 вида затрат:

- Затраты, связанные с **поставками** - например, это могут быть затраты на организацию.

1. Постоянные затраты
2. Переменные затраты

- Затраты, связанные с **хранением** - затраты, связанные с обеспечением сохранности продукции. Являются дополнительными затратами, в них входят затраты по содержанию склада, зарплата персонала

1. Постоянные затраты
2. Переменные затраты

- Затраты, связанные с **дефицитом** - имеют место тогда, когда нет в наличии необходимых видов продукции - невыполнение заказа (задержка продукции), потеря сбыта (постоянный заказчик обращается за покупкой на другое предприятие).

1. Постоянные затраты
2. Переменные затраты

Как мы видим, каждая из затрат подразделяется на *постоянные* и *переменные затраты*.

Определение 1.2.1. Постоянные затраты - затраты, не зависящие от изменения объема исполняемых заказов внутренних и внешних потребителей.

Определение 1.2.2. Переменные затраты - затраты, зависящие от объема производства.

Критерий оптимальности в моделях управления запасами заключается в том, чтобы *средние затраты за единицу времени* по поставке и хранению были **минимальными**.

Необходимо минимизировать затраты, связанные с образованием и хранением запасов и убытков. При этом следует иметь в виду, что в расчет затрат надо брать лишь те, которые *зависят от размера партии поставок и величины запасов*.

1.3 Предпосылки простейшей модели управления запасами и вывод формул Уилсона

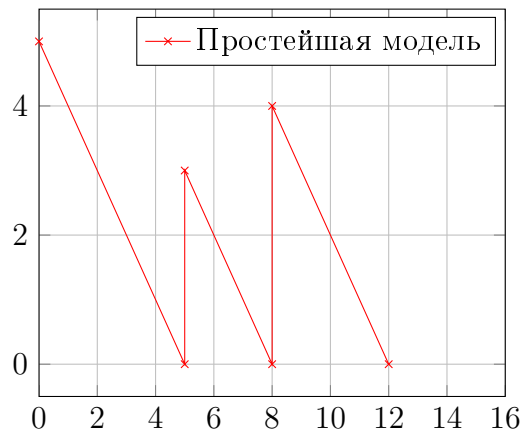
1.3.1 Предпосылки простейшей модели и обозначения

Определение 1.3.1. Простейшая модель управления запасами - это такая модель, которая обладает тремя следующими *предпосылками* свойствами:

1. Дефицит не допускается;
2. Постоянный не меняющийся спрос, темп спроса на товар известен и постоянен.
3. Отсутствует неопределенность, то есть получение заказа происходит мгновенно и закупочная цена не зависит от размера заказа.

Поиск оптимальной стратегии

Обратимся к графику зависимости *запасов от времени*, то оптимальную стратегию мы будем искать среди графиков следующего вида:



На графике кривые уменьшения запасов будут заменяться *прямыми* с *одинаковыми углами наклона* по второму свойству, так как темп спроса по нему - *постоянен*. При нулевых запасах предположим, что поставка будет приходить *точно в срок* и мы можем быть уверены, что все так и будет.

Введем некоторые обозначения:

Определение 1.3.2. Темп (объём) спроса α - сколько единиц товара уходит за единицу времени.

Определение 1.3.3. Пусть a - **постоянные затраты поставок**, то есть они постоянны по отношению к одному заказу.

Постоянные затраты, связанные с хранением, мы устраним из рассмотрения, как и переменная составляющая по поставкам, так как она изменяется от нас не зависяще и мы не можем на нее влиять. Дефицитные затраты тоже исключаются, так как дефицит отсутствует в предположениях модели.

Определение 1.3.4. Пусть b - **коэффициент затрат по хранению** - затраты по хранению товара на *единицу времени*. Размерность:

$$\frac{\text{КОЛИЧЕСТВО ЕДИНИЦ ТОВАРА}}{\text{ЕДИНИЦУ ВРЕМЯ}}$$

Определение 1.3.5. Пусть Q - **величина поставки**.

Коэффициент b на графике - это единичный квадрат, то есть чтобы найти затраты по хранению, нужно найти площадь треугольника, в котором сторонами будут являться время периода и величина поставки и умножить на коэффициент затрат по хранению b .

1.3.2 Доказательство оптимальности модели с одинаковыми периодами

Доказательство. Рассмотрим график зависимости запасов от времени. Рассмотрим первые два треугольника, то есть первые два периода поставки. Обозначим за T_1 - время первого периода управления запасом, а за T_2 - время второго периода управления запасом. Общее время равно: $T = T_1 + T_2$. Заметим, что общая сумма затрат равна сумме постоянных затрат поставок и затрат по хранению.

Так как темп спроса - угол наклона прямой уменьшения запасов, то значит $\text{tg } y = \frac{Q}{T}$, следовательно, $Q = \text{tg } y \cdot T = \alpha \cdot T$. Эту величину еще называют **критическим спросом**.

Тогда общие затраты равны удвоенной сумме затрат постоянного хранения и сумме площадей двух треугольников:

$$2a + b \left(\frac{1}{2} Q_1 T_1 + \frac{1}{2} Q_2 T_2 \right)$$

Тогда средние затраты равны отношению общих затрат к полному

промежутку времени T :

$$f_L = \frac{2a + b \left(\frac{1}{2} Q_1 T_1 + \frac{1}{2} Q_2 T_2 \right)}{T}$$

Так как $Q_1 = \alpha \cdot T_1$ $Q_2 = \alpha \cdot T_2$, то:

$$f_L = \frac{2a + b \left(\frac{1}{2} \alpha T_1^2 + \frac{1}{2} \alpha T_2^2 \right)}{T}$$

Необходимо минимизировать следующее выражение:

$$f_L = 2a + \frac{1}{2} b \alpha (T_1^2 + (T - T_1)^2) \rightarrow \min$$

Возьмем производную и приравняем ее к нулю по необходимому условию экстремума:

$$\frac{\partial f_L}{\partial T_1} = b \alpha (T_1 - (T - T_1)) = b \alpha (-T + 2T_1) = 0$$

$$T_1 = \frac{T}{2} \quad T_2 = T - T_1 = \frac{T}{2}$$

Следовательно, оптимальные решения нужно искать среди **периодической модели с одинаковыми треугольниками**. \square

1.3.3 Оптимальная стратегия запасов простейшей модели. Формула Уилсона

Теперь задача состоит в том, чтобы найти оптимальную величину партии поставки Q и T - оптимальный период. Пусть имеется периодическая модель с одинаковыми треугольниками.

Определение 1.3.6. Обозначим за L - **общие затраты на одном цикле управления запасами** (сумма постоянных затрат поставок и затрат по хранению).

Затраты на одном цикле управления запасами:

$$L = a + \frac{1}{2} b Q T = a + b \frac{1}{2} \alpha T^2$$

Такие формулы не позволяют сравнивать стратегии, следовательно нужно сравнить средние затраты, поэтому поделим общие затраты на

длину цикла и подставим $Q = \alpha \cdot T$

$$L_{sr} = \frac{a + b\frac{1}{2}\alpha T^2}{T} = \frac{a}{T} + \frac{1}{2} \cdot b \cdot \alpha \cdot T \rightarrow \min$$

Нам необходимо минимизировать средние затраты по сформулированному ранее критерию оптимальности. Исследуем функцию и найдем значение, при котором она обращается в минимум.

$$L'_{sr}(T) = -\frac{a}{T^2} + \frac{1}{2}b\alpha = 0$$

Тогда оптимальная величина периода управления запасом:

$$T^* = \sqrt{\frac{2a}{b\alpha}}$$

Оптимальное значение величины поставки (размера заказа):

$$Q^* = \alpha T^* = \sqrt{\frac{2a\alpha}{b}}$$

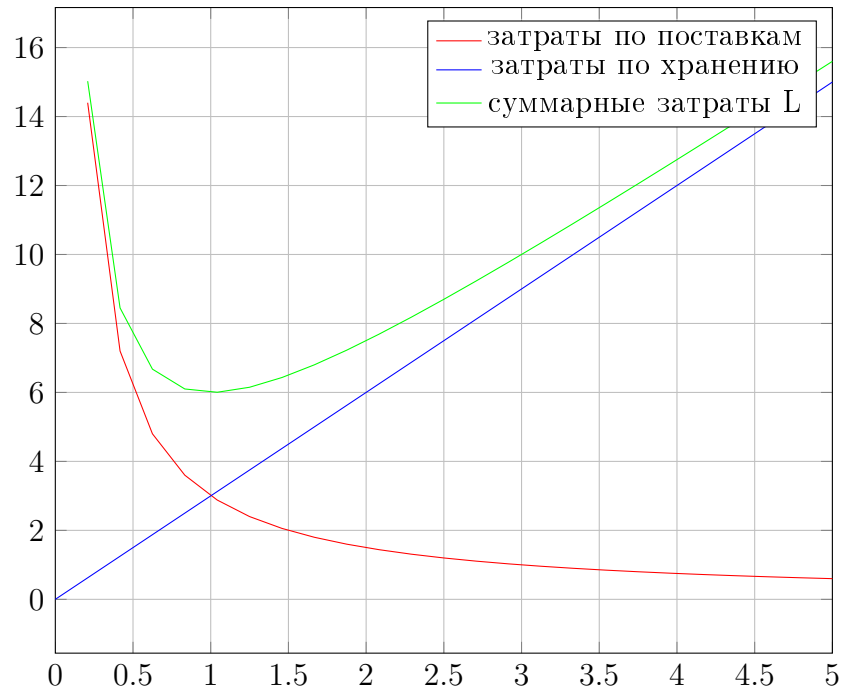
Оптимальная величина общих затрат на одном цикле (или **минимальные средние издержки по управлению запасами**):

$$L^* = \frac{a}{\sqrt{\frac{2a}{b\alpha}}} + \frac{1}{2}b\alpha\sqrt{\frac{2a}{b\alpha}} = \sqrt{\frac{ab\alpha}{2}} + \sqrt{\frac{ab\alpha}{2}} = \sqrt{2ab\alpha}$$

Данные формулы называются *Формулами Уилсона*.

Затраты на оформление заказа постоянны по отношению к одному заказу. Если рассмотреть зависимость двух величин: Q - размером заказа и L_{sum} - затратами, то затраты постоянны затраты обратно пропорциональны размеру заказа Q - их общий объем за установленный период рассчитывается исходя из количества совершенных заказов N , поэтому мелкие партии приводят к росту числа поставок и увеличению издержек оформления.

Затраты по хранению прямопропорциональный величине заказа - чем большими партиями пополняется запас, тем дороже стоит его хранение. Графически мы ищем минимум зеленой прямой на графике:

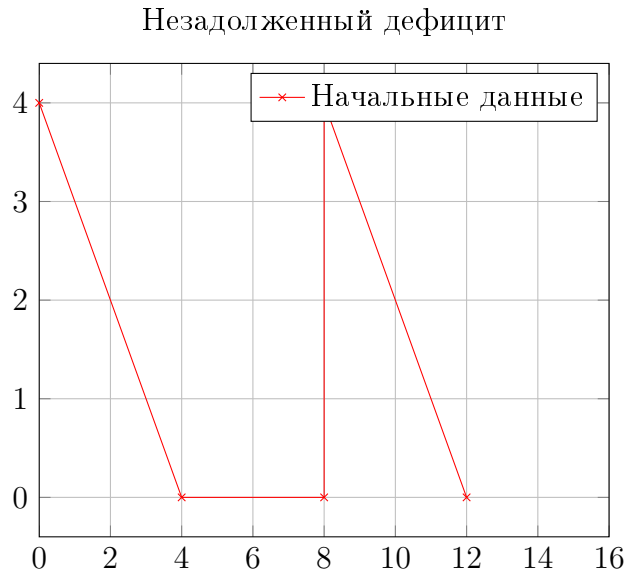


Необходимо выбрать прямоугольник заданной площади с минимальным периодом и данный прямоугольник является квадратом.

Философское правило: лучше перебрать, чем недобрать.

1.4 Простейшая модель управления запасами с допущением незадолженного дефицита

Рассмотрим график простейшей модели с допущением незадолженного дефицита



Обозначим за T_1 недефицитный период $[0 : 4]$. За $T_2 : [4 : 8]$ обозначим период дефицитного периода и g - штраф за отсутствие товара.

Все предыдущие обозначения сохраняются с предыдущего параграфа, а именно:

- α - темп (объем спроса);
- a - постоянные затраты поставки;
- b - коэффициент затрат по хранению;
- $Q = \alpha \cdot T_1$ - величина поставки;
- L - величина суммарных затрат

Будем решать задачу минимизации средних затрат по хранению и поставкам. Запишем по аналогии с предыдущим параграфом величину суммарных затрат как сумма постоянных затрат, затрат по хранению, а также добавим величину штрафа (затрат) за отсутствие товара. Поделив

на $T = T_1 + T_2$ получим величину средних затрат, которую и необходимо минимизировать:

$$L_{sr} = \frac{a + b \frac{1}{2} Q \cdot T_1 + g \cdot T_2}{T_1 + T_2} \rightarrow \min$$

$$L_{sr} = \frac{a + \frac{1}{2} \cdot b \cdot \alpha \cdot T_1^2 + g \cdot T_2}{T_1 + T_2} \rightarrow \min$$

Мы не будем решать оптимизацию данной функции, а применим следующую лемму.

Лемма 1.1. $\frac{A_1}{B_1} \leq \frac{A_2}{B_2}$

Доказательство.

$$\frac{A_1}{B_1} \leq \frac{A_1 + A_2}{B_1 + B_2} \leq \frac{A_2}{B_2}$$

$$A_1 B_1 + A_2 B_2 \leq A_1 B_1 + A_2 B_1$$

$$\frac{A_1}{B_1} \leq \frac{A_2}{B_2}$$

□

Применим данную лемму. В качестве A_1, A_2, B_1, B_2 возьмем:

$$A_1 = a + \frac{1}{2} \cdot b \cdot Q \cdot T_1 \quad A_2 = g \cdot T_2 \quad B_1 = T_1 \quad B_2 = T_2$$

Тогда применяя лемму и знания из предыдущего параграфа о том, что в левой части неравенства минимальное значение суммы затрат $A_1 = L$ достигается при величине равной $\sqrt{2ab\alpha}$, получим следующее выражение:

$$\sqrt{2ab\alpha} \leq L_{sr} \leq \frac{gT_2}{T_2}$$

$$\sqrt{2ab\alpha} \leq L_{sr} \leq g$$

Соответственно, делаются следующие выводы из данного неравенства:

- $\sqrt{2ab\alpha} < g$ - дефицит не выгоден, оптимальное значение суммарных затрат < дефицита
- $\sqrt{2ab\alpha} > g$ - выгоден дефицит

1.5 Простейшая модель управления запасами с допущением задолженного дефицита

Рассмотрим график простейшей модели с допущением задолженного дефицита:

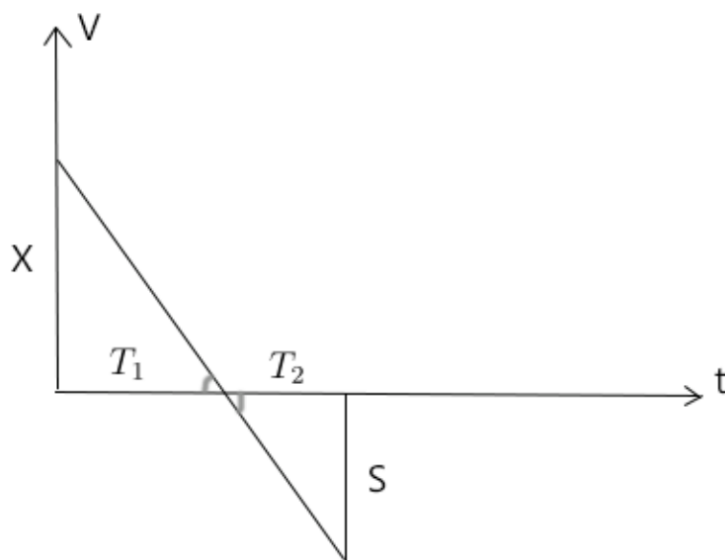


Рис. 1: График модели управления запасами с задолженным дефицитом

Все предыдущие обозначения сохраняются с предыдущего параграфа с добавлением величины штрафа, а именно:

- α - темп (объем спроса);
- a - постоянные затраты поставки;
- b - коэффициент затрат по хранению;
- $Q = \alpha \cdot T_1$ - величина поставки, размер партии;
- L - величина суммарных затрат
- g - величина штрафа за отсутствие запаса
- X - максимальный объем запаса на складе
- S - максимальный объем задолженного дефицита

В данной модели дефицит - это допущение отложенного спроса. В течение промежутка времени T_1 спрос удовлетворяется за счет имеющегося запаса. В течение T_2 запас отсутствует, возникает ситуация дефицита, постепенно накапливается долг величины S по неудовлетворенному спросу. Этот долг удовлетворяется за счет поступившей партии Q , после чего на складе остается запас X и все возобновляется по циклу. Длина цикла: $T = T_1 + T_2$.

Штраф за дефицит исчисляется на основе g - издержек за единицу объёма дефицита за единицу времени.

Выразим данные величины через темп роста α , как это делалось ранее:

$$X = \alpha T_1 \quad S = \alpha T_2 \quad Q = \alpha T$$

Величина суммарных средних затрат за цикл, которую по критерию оптимальности необходимо минимизировать, в данном случае выражается следующим образом:

$$L_{sr} = \frac{a + \frac{1}{2}bT_1X + \frac{1}{2}gT_2S}{T_1 + T_2} \rightarrow \min$$

$$L_{sr} = \frac{a + \frac{1}{2}bT_1^2\alpha + \frac{1}{2}gT_2^2\alpha}{T_1 + T_2} \rightarrow \min$$

$$T_2 = \frac{b}{g} \cdot T_1(?)$$

Приравниваем к нулю производные уравнений и решаем систему, получая оптимальные значения интервала удовлетворения спроса T_1 и интервала учета спроса (интервал отсутствия запаса и наличия дефицита) T_2 :

$$T_1^* = \sqrt{\frac{2a}{b\alpha \cdot (1 + \frac{b}{g})}}$$

$$T_2^* = \frac{b}{g} \sqrt{\frac{2a}{b\alpha \cdot (1 + \frac{b}{g})}} = \sqrt{\frac{2agb^2}{b\alpha \cdot (g+b)g^2}} = \sqrt{\frac{2ab}{\alpha \cdot (g+b)g}}$$

Если мы рассмотрим данные величины в пределе, то есть если коэффициент затрат по хранению будет меньше штрафа $g \rightarrow \infty$ (рост штрафа за дефицит приводит в пределе к запрету дефицита ввиду абсолютной невыгодности, $\frac{b}{g} \rightarrow 0$), то модель сведется к Формулам Уилсона,

а дефицита и вовсе не будет в модели:

$$T_1^* \rightarrow \sqrt{\frac{2a}{b\alpha}} \quad T_2^* \rightarrow 0$$

Найдем оптимальный максимальный объем запаса на складе:

$$X^* = \alpha T_1 = \alpha \sqrt{\frac{2a}{b\alpha \cdot (1 + \frac{b}{g})}}$$

И оптимальный размер задолженного дефицита:

$$S^* = \alpha T_2 = \alpha \sqrt{\frac{2ab}{\alpha \cdot (g + b)g}}$$

То есть при оптимальном случае, размер дефицита стремится к нулю $S^* \rightarrow 0$, а $X \rightarrow Q$.

1.6 Модель управления запасами с растянутой поставкой

Рассмотрим модель с растянутой поставкой и отсутствием дефицита. Пополнение запаса в такой модели происходит не мгновенно и занимает некоторое время, которым нельзя пренебречь и считать его равным 0. График динамики запасов изображен ниже.

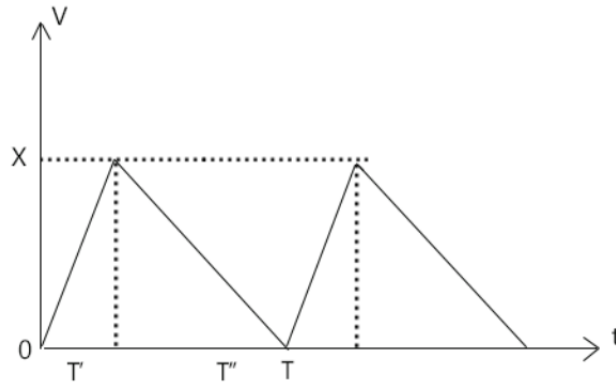


Рис. 2: График модели управления запасами с растянутыми поставками

На промежутке времени T' продукция производится и отправляется на склад (но в то же время потребляется). Далее в течение промежутка T'' на оборудовании производится другая продукция, запас первой продукции не пополняется, он только потребляется. Через цикл управления запасами $T = T' + T''$ на предприятии снова приступают к производству первой продукции и пополнению ее запасов.

Постоянные затраты в такой ситуации связаны с переналадкой оборудования для запуска в производство партии изделий. Переменные затраты связаны с хранением.

Как известно, темп спроса α .

Определение 1.6.1. Обозначим за β - **темп поставки** - объём поставки в единицу времени.

Определение 1.6.2. **Реальная скорость пополнения** на промежутке T' равна $\beta - \alpha$, эта разность определяет угол наклона прямой на промежутке T' : $\text{tg}(\beta - \alpha)$. На промежутке T'' угол наклона прямой определяется величиной $\text{tg} \alpha$.

Все предыдущие обозначения сохраняются с предыдущего параграфа, а именно:

- α - темп (объем спроса);
- β - темп поставки
- a - постоянные затраты поставки;
- b - коэффициент затрат по хранению;
- $Q = \alpha \cdot T$ - величина поставки, размер партии;
- L - величина суммарных затрат
- T' - интервал поставки (время, в течение которого поступает партия)
- T'' - интервал отсутствия поставки
- T - длина цикла управления запасами
- X - максимальный объем запаса на складе

Выразим данные величины через темп роста α , темп поставки β , как это делалось ранее:

$$X = \alpha T'' = (\beta - \alpha) \cdot T' \quad Q = \alpha T$$

$$T = T' + T'' = \frac{X}{\beta - \alpha} + \frac{X}{\alpha}$$

$$Q = \alpha T = \alpha \cdot \left(\frac{X}{\beta - \alpha} + \frac{X}{\alpha} \right) = \frac{\alpha X}{\beta - \alpha} + X = \frac{X}{1 - \frac{\alpha}{\beta}}$$

$$X = Q \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{\beta} \right) = \alpha T \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{\beta} \right)$$

Величина суммарных средних затрат за цикл, которую по критерию оптимальности необходимо минимизировать, в данном случае выражается следующим образом:

$$L_{sr} = \frac{a + \frac{1}{2}bXT}{T} = \frac{a + \frac{1}{2}b\alpha T^2 \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{\beta} \right)}{T} = \frac{a}{T} + \frac{1}{2}b\alpha \left(1 - \frac{\alpha}{\beta} \right) \cdot T$$

Возьмем производную по T и найдем оптимальный цикл поставки:

$$\frac{\partial L_{sr}}{\partial T} = -\frac{a}{T^2} + \frac{1}{2}b\alpha \left(1 - \frac{\alpha}{\beta} \right) = 0$$

$$T^2 = \frac{2a}{b\alpha \left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right)}$$

$$T^* = \sqrt{\frac{2a}{b\alpha \left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right)}}$$

Если величина $\frac{\alpha}{\beta} \rightarrow 0$ в пределе, то формулы переходят в простейшую модель поставки, которая была рассмотрена ранее.

Из данного оптимального значения цикла поставки выведем другие оптимальные характеристики:

$$Q^* = \alpha \cdot T^* = \alpha \sqrt{\frac{2a}{b\alpha \left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right)}} = \sqrt{\frac{2a\alpha}{b \left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right)}}$$

$$X^* = Q^* \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right) = \left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right) \sqrt{\frac{2a\alpha}{b \left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right)}} = \sqrt{\frac{2a\alpha \left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right)}{b}}$$

$$L^* = a + \frac{1}{2}bX^*T^* = a + \frac{1}{2}b \sqrt{\frac{2a\alpha \left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right)}{b}} \cdot \sqrt{\frac{2a}{b\alpha \left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right)}} = a + \sqrt{a\alpha}$$

$$T'^* = \frac{X^*}{\beta - \alpha} = \frac{\sqrt{\frac{2a\alpha \left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right)}{b}}}{\beta - \alpha} = \sqrt{\frac{2a\alpha}{\beta b(\beta - \alpha)}}$$

$$T''^* = \frac{X^*}{\alpha} = \frac{\sqrt{\frac{2a\alpha \left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right)}{b}}}{\alpha} = \sqrt{\frac{2a \left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right)}{\alpha b}}$$

1.7 Модель управления запасами с растянутой поставкой и задолженным дефицитом

Рассмотрим модель с растянутой поставкой и допущением задолженного дефицита.

Цикл управления разделяется на 4 части:

$$T = T'_1 + T''_1 + T'_2 + T''_2$$

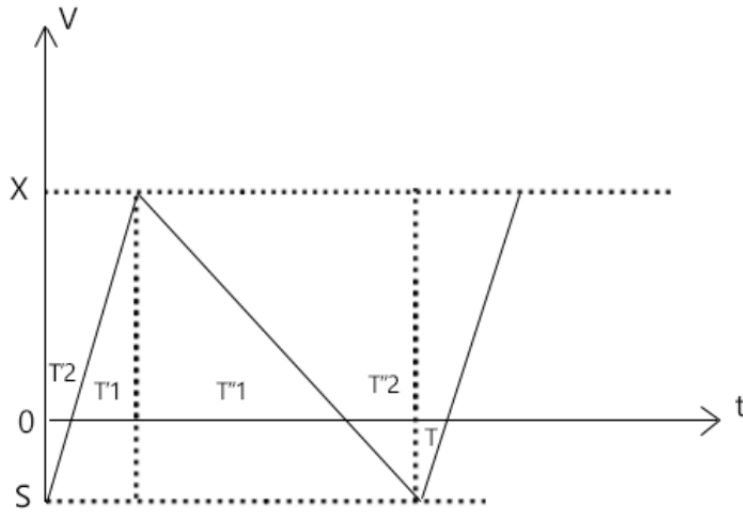


Рис. 3: График модели управления запасами с растянутой поставкой и задолженным дефицитом

Как и в предыдущей модели в тот момент, когда приходит доставка запас увеличивается по какой-то линейной функции. Если β - темп поставки, а α - темп роста, то угол наклона прямой разгрузки и поставки равен $\text{tg}(\beta - \alpha)$.

В данной модели с дефицитом запасы уходят в минус со с тем же коэффициентом наклона прямой α и со скоростью $\beta - \alpha$ повышаются.

Все предыдущие обозначения сохраняются с предыдущего параграфа, а именно:

- α - темп (объем спроса);
- β - темп поставки
- g - величина затрат за единицу дефицита (величина штрафа за отсутствие запаса)

- a - постоянные затраты поставки, не зависят от объёма
- b - коэффициент затрат по хранению;
- $Q = \alpha \cdot T$ - величина поставки, размер партии;
- L - величина суммарных затрат
- T'_1 - интервал поставки (время, в течение которого поступает партия) (интервал наличия запаса и отсутствия дефицита)
- T''_1 - интервал удовлетворения спроса (интервал наличия запаса и отсутствия дефицита) в условиях отсутствия поставки
- T'_2 - интервал учета спроса (наличия дефицита и отсутствия поставки) в условиях осуществления поставки
- T''_2 - интервал учета спроса (наличие дефицита и отсутствие запаса) в условиях отсутствия поставки
- T - длина цикла управления запасами
- X - максимальный объём запаса на складе
- S - максимальный размер дефицита

Рассмотрим различные взаимосвязи между характеристиками, чтобы в последствии вычислить оптимальные характеристики:

$$X = \alpha T''_1 = (\beta - \alpha) \cdot T'_1$$

$$S = \alpha T''_2 = (\beta - \alpha) \cdot T'_2$$

$$T = T'_1 + T''_1 + T'_2 + T''_2 = \frac{X}{\beta - \alpha} + \frac{X}{\alpha} + \frac{S}{\beta - \alpha} + \frac{S}{\alpha} = \frac{X + S}{\alpha \left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right)}$$

$$Q = \alpha \cdot T = \alpha \frac{X + S}{\alpha \left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right)} = \frac{X + S}{\left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right)}$$

$$T_1 = T'_1 + T''_1 \quad T_2 = T'_2 + T''_2$$

Величина суммарных средних затрат за цикл, которую по критерию оптимальности необходимо минимизировать, в данном случае вы-

ражается следующим образом:

$$L = \frac{a + \frac{1}{2}bT_1X + \frac{1}{2}gT_2S}{T} = \frac{a + \frac{1}{2}bT_1X + \frac{1}{2}gT_2S}{T_1 + T_2} \rightarrow \min$$

Должны минимизировать относительно T_1, T_2, X, S .

Доказательство. Начнем вывод формул:

$$T_1 = T'_1 + T''_1 = \frac{X\beta}{\alpha(\beta - \alpha)} \Leftrightarrow X = \frac{\alpha(\beta - \alpha)}{\beta}T_1$$

$$T_2 = T'_2 + T''_2 = \frac{S\beta}{\alpha(\beta - \alpha)} \Leftrightarrow S = \frac{\alpha(\beta - \alpha)}{\beta}T_2$$

Обозначим за

$$\lambda = \frac{\alpha(\beta - \alpha)}{\beta} = \alpha \left(1 - \frac{\alpha}{\beta} \right)$$

Подставим в формулу средних затрат вместо X и S выведенные значения:

$$L = \frac{a + \frac{1}{2}b\lambda T_1^2 + \frac{1}{2}g\lambda T_2^2}{T_1 + T_2} \rightarrow \min$$

Возьмем частные производные:

$$\frac{\partial L}{\partial T_1} = \frac{b\lambda T_1(T_1 + T_2) - (a + \frac{1}{2}b\lambda T_1^2 + \frac{1}{2}g\lambda T_2^2)}{(T_1 + T_2)^2} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial T_2} = \frac{g\lambda T_2(T_1 + T_2) - (a + \frac{1}{2}b\lambda T_1^2 + \frac{1}{2}g\lambda T_2^2)}{(T_1 + T_2)^2} = 0$$

Вычитая второе равенство из первого, получим следующее выражение:

$$(T_1 + T_2)\lambda(bT_1 - gT_2) = 0 \Rightarrow T_2 = \frac{b}{g}T_1$$

Подставим T_2 в одно из равенств и решим относительно T_1 данное уравнение:

$$b\lambda T_1 \left(T_1 + \frac{b}{g}T_1 \right) - \left(a + \frac{1}{2}b\lambda T_1^2 + \frac{1}{2}g\lambda \left(\frac{b}{g}T_1 \right)^2 \right) = 0$$

$$\frac{1}{2}b\lambda T_1^2 \left(1 + \frac{b}{g} \right) = a$$

Найдем оптимальные значения:

$$T_1^* = \sqrt{\frac{2a}{b\lambda(1 + \frac{b}{g})}} \quad T_2^* = \frac{b}{g} \sqrt{\frac{2a}{b\lambda(1 + \frac{b}{g})}}$$

Через данные характеристики выводятся все остальные.

Если $\frac{b}{g} \rightarrow \min$, $T_2^* = 0$, $S^* = 0$, то получится бездефицитная модель.

Выразим λ :

$$\lambda = \alpha(1 - \frac{\beta}{\alpha})$$

Если $\alpha \rightarrow 0$, то $\lambda \rightarrow \alpha$. И прямая становится все более вертикальной - разбираемся с растяжкой. \square

1.8 Последовательность компьютерных моделей управления запасами

1.8.1 Модель 1. Определение оптимальной стратегии пополнения запасов в условиях полной определенности (период - неделя)

Сначала мы строили простейшую модель, в которой в качестве исходных данных была информация за два периода времени и формат ввода исходных данных в данную и будущую неделю.

Расчетная форма состояла из двух частей - *запасы, спрос, дефицит* в тоннах, а в правой части - *данные о динамике денежных средств* - выручка, затраты, прибыль в рублях

Модель 1 - Определение оптимальной стратегии пополнения запасов в условиях полной определенности (период - неделя)																			
Исходные данные		Заказы, запасы спрос, дефицит (т)								Выручка, затраты, прибыль (тыс. руб.)									
		Неделя	Запасы в начале	Новый заказ	Приход	Для продажи	Объем спроса	Объем продаж	Запасы в конце	Объем дефицита	Выручка от продаж	Затраты на закупку	Затраты на доставку	Затраты на хранение	Прочие затраты	Сумм. затраты	Прибыль	Нараст. прибыль	Касса
Денги, цены и затраты		1	6.50	4.00	0.00	6.50	3.50	3.50	3.00	0.00	77.840	64.000	15.680	2.660	14.000	96.340	-18.500	-18.500	281.500
Начальные ден. ср-ва (тыс. руб.)		2	3,00	0,00	4,00	7,00	3,50	3,50	3,50	0,00	77,840	0,000	0,000	2,940	14,000	16,940	60,900	42,400	342,400
Закупочная цена (руб./кг)		3																	
Отпускная цена (руб./кг)		4																	
Доставка (тыс. руб.)		5																	
Хранение (% в неделю)		6																	
Прочие затраты (тыс. руб./нед.)		7																	
Заказы, запасы, сроки		8																	
Объем заказа (т)		9																	
Период проверки (нед.)		10																	
Часть периода (%)		11																	
Срок поставки (нед.)		12																	
Расчетный срок (нед.)		13																	
Средний спрос (т)		14																	
За неделю		15																	
За расч. срок		16																	
Станд. отклон. спроса (т)		17																	
За неделю		18																	
За расч. срок		19																	
Надежность работы системы (%)		20																	
Страховой запас (т)		21																	
Расчетный		22																	
Назначенный		23																	
Критич. уровень (т)		24																	
Грузоподъемность транспорта (т)		25																	
		26																	
		27																	
		28																	
		29																	
		30																	
		31																	
		32																	
		33																	
		34																	
		35																	

Модель 1

Мы вводили формулы и протягивали их вниз на 52 недели, то есть на год. Необходимо было определить **размер поставки** (столбец Новый заказ) и **периодичность поставки**. Для визуализации была построена диаграмма, отображающая динамику денежных средств и дефицита.

Поставки удовлетворялись двум условиям

1. В системе не должно было быть дефицитов
2. Поставки должны делать столбец Касса максимально возможным

После этого мы по формулам Уилсона вывели оптимальные характеристики управления запасами.

1.8.2 Модель 2. Автоматическое определение критического уровня запасов

Затем мы строили модель 2 для автоматического определения уровня запасов, при достижении которого следовало подавать заказ на поставку. Для этого мы ввели несколько дополнительных столбцов (Заказы в пути, фиктивный запас), главным из которых являлся столбец ПРИЗНАК КРИТИЧЕСКОГО УРОВНЯ. Он показывал, когда фиктивный запас становился меньше фиксированного *критического уровня* и являлся индикатором подачи заказа на поставку.

Исходные данные	Заказы, запасы, спрос, дефицит (т)												Выручка, затраты, прибыль (тыс. руб.)									
	Неделя	Заказы в заказе	Заказы в пути	Фиктивный запас	Порядок крит. уровня	Новый заказ	Продажа	Для заказа	Объем заказа	Объем продаж	Запасы в конце	Объем дефицита	Выручка от продаж	Затраты на закупку	Затраты на доставку	Затраты на хранение	Прочие затраты	Сумм. затраты	Прибыль	Накрат. прибыль	Касса	
Длины, цены и затраты	1	8,50				4,10	0,00	0,50	3,50	3,50	3,00	0,00	77,840	0,000	0,000	2,940	14,000	98,340	-18,500	-18,500	281,500	
Максимальная ден. цена (тыс. руб.)	2	3,00	0,00	3,50		1,00	0,00	4,00	7,00	3,50	3,50	0,00	77,840	0,000	0,000	2,940	14,000	98,940	60,900	42,400	342,400	
Закупочная цена (руб./кг)	3	3,50	0,00	3,50		1,00	0,00	14,00	0,00	3,50	3,50	0,00	77,840	224,000	15,880	0,980	14,000	254,860	-178,820	-134,420	166,580	
Отпускная цена (руб./кг)	4	0,00	14,00	14,00		0,00	0,00	14,00	14,00	3,50	3,50	10,50	77,840	0,000	0,000	0,880	14,000	20,880	58,980	-77,440	222,580	
Стоимость ден. (руб./кг)	5	10,50	0,00	10,50		0,00	0,00	0,00	10,50	3,50	3,50	7,00	77,840	0,000	0,000	4,900	14,000	18,900	58,940	-18,500	281,500	
Доставка (тыс. руб.)	6	7,00	0,00	7,00		0,00	0,00	0,00	7,00	3,50	3,50	0,00	77,840	0,000	0,000	2,940	14,000	16,940	60,900	42,400	342,400	
Коррекция % в неделю	7	3,50	0,00	3,50		1,00	14,00	0,00	3,50	3,50	3,50	0,00	77,840	224,000	15,880	0,980	14,000	254,860	-178,820	-134,420	166,580	
Почасовая аренда (тыс. руб./ч. авто.)	8	0,00	14,00	14,00		0,00	0,00	14,00	14,00	3,50	3,50	10,50	77,840	0,000	0,000	0,880	14,000	20,880	58,980	-77,440	222,580	
Заказы, запасы, сроки	9	10,50	0,00	10,50		0,00	0,00	0,00	10,50	3,50	3,50	7,00	77,840	0,000	0,000	4,900	14,000	18,900	58,940	-18,500	281,500	
Объем заказа (т)	10	7,00	0,00	7,00		0,00	0,00	0,00	7,00	3,50	3,50	0,00	77,840	0,000	0,000	2,940	14,000	16,940	60,900	42,400	342,400	
Порядок поставки (млн.)	11	3,50	0,00	3,50		1,00	14,00	0,00	3,50	3,50	3,50	0,00	77,840	224,000	15,880	0,980	14,000	254,860	-178,820	-134,420	166,580	
Часть заказа (%)	12	0,00	14,00	14,00		0,00	0,00	14,00	14,00	3,50	3,50	10,50	77,840	0,000	0,000	0,880	14,000	20,880	58,980	-77,440	222,580	
Срок поставки (млн.)	13	10,50	0,00	10,50		0,00	0,00	0,00	10,50	3,50	3,50	7,00	77,840	0,000	0,000	4,900	14,000	18,900	58,940	-18,500	281,500	
Расчетный срок (млн.)	14	7,00	0,00	7,00		0,00	0,00	0,00	7,00	3,50	3,50	0,00	77,840	0,000	0,000	2,940	14,000	16,940	60,900	42,400	342,400	
Средний период (т)	15	3,50	0,00	3,50		1,00	14,00	0,00	3,50	3,50	3,50	0,00	77,840	224,000	15,880	0,980	14,000	254,860	-178,820	-134,420	166,580	
Средний период (т) за разн. срок	16	0,00	14,00	14,00		0,00	0,00	14,00	14,00	3,50	3,50	10,50	77,840	0,000	0,000	0,880	14,000	20,880	58,980	-77,440	222,580	
Средний период (т) за разн. срок	17	10,50	0,00	10,50		0,00	0,00	0,00	10,50	3,50	3,50	7,00	77,840	0,000	0,000	4,900	14,000	18,900	58,940	-18,500	281,500	
Средний период (т) за разн. срок	18	7,00	0,00	7,00		0,00	0,00	0,00	7,00	3,50	3,50	0,00	77,840	0,000	0,000	2,940	14,000	16,940	60,900	42,400	342,400	
Средний период (т) за разн. срок	19	3,50	0,00	3,50		1,00	14,00	0,00	3,50	3,50	3,50	0,00	77,840	224,000	15,880	0,980	14,000	254,860	-178,820	-134,420	166,580	
Надежность работы склада (%)	20	0,00	14,00	14,00		0,00	0,00	14,00	14,00	3,50	3,50	10,50	77,840	0,000	0,000	0,880	14,000	20,880	58,980	-77,440	222,580	
Стоимость (руб./кг)	21	10,50	0,00	10,50		0,00	0,00	0,00	10,50	3,50	3,50	7,00	77,840	0,000	0,000	4,900	14,000	18,900	58,940	-18,500	281,500	
Запас (т)	22	7,00	0,00	7,00		0,00	0,00	0,00	7,00	3,50	3,50	0,00	77,840	0,000	0,000	2,940	14,000	16,940	60,900	42,400	342,400	
Максимум (руб./кг)	23	3,50	0,00	3,50		1,00	14,00	0,00	3,50	3,50	3,50	0,00	77,840	224,000	15,880	0,980	14,000	254,860	-178,820	-134,420	166,580	
Грузоподъемность транспорта (т)	24	0,00	14,00	14,00		0,00	0,00	14,00	14,00	3,50	3,50	10,50	77,840	0,000	0,000	0,880	14,000	20,880	58,980	-77,440	222,580	
Грузоподъемность транспорта (т)	25	10,50	0,00	10,50		0,00	0,00	0,00	10,50	3,50	3,50	7,00	77,840	0,000	0,000	4,900	14,000	18,900	58,940	-18,500	281,500	
Грузоподъемность транспорта (т)	26	7,00	0,00	7,00		0,00	0,00	0,00	7,00	3,50	3,50	0,00	77,840	0,000	0,000	2,940	14,000	16,940	60,900	42,400	342,400	
Грузоподъемность транспорта (т)	27	3,50	0,00	3,50		1,00	14,00	0,00	3,50	3,50	3,50	0,00	77,840	224,000	15,880	0,980	14,000	254,860	-178,820	-134,420	166,580	
Грузоподъемность транспорта (т)	28	0,00	14,00	14,00		0,00	0,00	14,00	14,00	3,50	3,50	10,50	77,840	0,000	0,000	0,880	14,000	20,880	58,980	-77,440	222,580	
Грузоподъемность транспорта (т)	29	10,50	0,00	10,50		0,00	0,00	0,00	10,50	3,50	3,50	7,00	77,840	0,000	0,000	4,900	14,000	18,900	58,940	-18,500	281,500	
Грузоподъемность транспорта (т)	30	7,00	0,00	7,00		0,00	0,00	0,00	7,00	3,50	3,50	0,00	77,840	0,000	0,000	2,940	14,000	16,940	60,900	42,400	342,400	
Грузоподъемность транспорта (т)	31	3,50	0,00	3,50		1,00	14,00	0,00	3,50	3,50	3,50	0,00	77,840	224,000	15,880	0,980	14,000	254,860	-178,820	-134,420	166,580	
Грузоподъемность транспорта (т)	32	0,00	14,00	14,00		0,00	0,00	14,00	14,00	3,50	3,50	10,50	77,840	0,000	0,000	0,880	14,000	20,880	58,980	-77,440	222,580	
Грузоподъемность транспорта (т)	33	10,50	0,00	10,50		0,00	0,00	0,00	10,50	3,50	3,50	7,00	77,840	0,000	0,000	4,900	14,000	18,900	58,940	-18,500	281,500	
Грузоподъемность транспорта (т)	34	7,00	0,00	7,00		0,00	0,00	0,00	7,00	3,50	3,50	0,00	77,840	0,000	0,000	2,940	14,000	16,940	60,900	42,400	342,400	
Грузоподъемность транспорта (т)	35	3,50	0,00	3,50		1,00	14,00	0,00	3,50	3,50	3,50	0,00	77,840	224,000	15,880	0,980	14,000	254,860	-178,820	-134,420	166,580	
Грузоподъемность транспорта (т)	36	0,00	14,00	14,00		0,00	0,00	14,00	14,00	3,50	3,50	10,50	77,840	0,000	0,000	0,880	14,000	20,880	58,980	-77,440	222,580	
Грузоподъемность транспорта (т)	37	10,50	0,00	10,50		0,00	0,00	0,00	10,50	3,50	3,50	7,00	77,840	0,000	0,000	4,900	14,000	18,900	58,940	-18,500	281,500	
Грузоподъемность транспорта (т)	38	7,00	0,00	7,00		0,00	0,00	0,00	7,00	3,50	3,50	0,00	77,840	0,000	0,000	2,940	14,000	16,940	60,900	42,400	342,400	
Грузоподъемность транспорта (т)	39	3,50	0,00	3,50		1,00	14,00	0,00	3,50	3,50	3,50	0,00	77,840	224,000	15,880	0,980	14,000	254,860	-178,820	-134,420	166,580	
Грузоподъемность транспорта (т)	40	0,00	14,00	14,00		0,00	0,00	14,00	14,00	3,50	3,50	10,50	77,840	0,000	0,000	0,880	14,000	20,880	58,980	-77,440	222,580	
Грузоподъемность транспорта (т)	41	10,50	0,00	10,50		0,00	0,00	0,00	10,50	3,50	3,50	7,00	77,840	0,000	0,000	4,900	14,000	18,900	58,940	-18,500	281,500	
Грузоподъемность транспорта (т)	42	7,00	0,00	7,00		0,00	0,00	0,00	7,00	3,50	3,50	0,00	77,840	0,000	0,000	2,940	14,000	16,940	60,900	42,400	342,400	
Грузоподъемность транспорта (т)	43	3,50	0,00	3,50		1,00	14,00	0,00	3,50	3,50	3,50	0,00	77,840	224,000	15,880	0,980	14,000	254,860	-178,820	-134,420	166,580	
Грузоподъемность транспорта (т)	44	0,00	14,00	14,00		0,00	0,00	14,00	14,00	3,50	3,50	10,50	77,840	0,000	0,000	0,880	14,000	20,880	58,980	-77,440	222,580	
Грузоподъемность транспорта (т)	45	10,50	0,00	10,50		0,00	0,00	0,00	10,50	3,50	3,50	7,00	77,840	0,000	0,000	4,900	14,000	18,900	58,940	-18,500	281,500	
Грузоподъемность транспорта (т)	46	7,00	0,00	7,00		0,00	0,00	0,00	7,00	3,50	3,50	0,00	77,840	0,000	0,000	2,940	14,000	16,940	60,900	42,400	342,400	
Грузоподъемность транспорта (т)	47	3,50	0,00	3,50		1,00	14,00	0,00	3,50	3,50	3,50	0,00	77,840	224,000	15,880	0,980	14,000	254,860	-178,820	-134,420	166,580	
Грузоподъемность транспорта (т)	48	0,00	14,00	14,00		0,00	0,00	14,00	14,00	3,50	3,50	10,50	77,840	0,000	0,000	0,880	14,000	20,880	58,980	-77,440	222,580	
Грузоподъемность транспорта (т)	49	10,50	0,00	10,50		0,00	0,00	0,00	10,50	3,50	3,50	7,00	77,840	0,000	0,000	4,900	14,000	18,900	58,940	-18,500	281,500	
Грузоподъемность транспорта (т)	50	7,00	0,00	7,00		0,00	0,00	0,00	7,00	3,50	3,50	0,00	77,840	0,000	0,000	2,940	14,000	16,940	60,900	42,400	342,400	
Грузоподъемность транспорта (т)	51	3,50	0,00	3,50		1,00	14,00	0,00	3,50	3,50	3,50	0,00	77,840	224,000	15,880	0,980	14,000	254,860	-178,820	-134,420	166,580	
Грузоподъемность транспорта (т)	52	0,00	14,00	14,00		0,00	0,00	14,00	14,00	3,50	3,50	10,50	77,840	0,000	0,000	0,880	14,000	20,880	58,980	-77,440	222,580	

Модель 2

1.8.3 Модель 3. Ежедневные данные

Модель 3 служила для обработки ежедневных данных в детерминированном случае.

Исходные данные	Заказы, запасы, спрос, дефицит (т)										Выручка, затраты, прибыль (тыс. руб.)										
	День	Заказы в начале	Заказы в пути	Фактический запас	Приказ крит. уровня	Новый заказ	Приход	Дня продаж	Объем продаж	Заказы в конце	Объем дефицита	Выручка от продаж	Затраты на закупку	Выручка, затраты, прибыль (тыс. руб.)							
														Затраты на доставку	Затраты на хранение	Прочие затраты	Сумм. затраты	Прибыль			
1	5.50					4.00			5.50	0.50	0.50	6.00	0.00	11.120	64.000	16.880	0.500	2.000	82.180	-71.000	228.840
2	5.00	4.00	10.00				5.00	0.50	0.50	5.50	0.00	11.120	0.000	0.000	0.480	2.000	2.480	8.660	-42.400	237.800	
3	5.50	4.00	9.50				5.50	0.50	0.50	5.00	0.00	11.120	0.000	0.000	0.420	2.000	2.420	8.700	-53.700	245.300	
4	5.00	4.00	9.00				5.00	0.50	0.50	4.50	0.00	11.120	0.000	0.000	0.380	2.000	2.380	8.740	-44.860	255.040	
5	4.50	4.00	8.50				4.50	0.50	0.50	4.00	0.00	11.120	0.000	0.000	0.340	2.000	2.340	8.780	-36.180	263.620	
6	4.00	4.00	8.00				4.00	0.50	0.50	3.50	0.00	11.120	0.000	0.000	0.300	2.000	2.300	8.820	-27.360	272.640	
7	3.50	4.00	7.50				3.50	0.50	0.50	3.00	0.00	11.120	0.000	0.000	0.260	2.000	2.260	8.860	-18.500	281.620	
8	3.00	4.00	7.00				3.00	0.50	0.50	2.50	0.00	11.120	0.000	0.000	0.240	2.000	2.240	8.900	-9.820	290.080	
9	5.50	0.00	6.50				5.50	0.50	0.50	6.00	0.00	11.120	0.000	0.000	0.500	2.000	2.500	8.820	-1.300	298.700	
10	5.00	0.00	6.00				5.00	0.50	0.50	5.50	0.00	11.120	0.000	0.000	0.480	2.000	2.480	8.860	7.360	307.360	
11	5.50	0.00	5.50				5.50	0.50	0.50	5.00	0.00	11.120	0.000	0.000	0.420	2.000	2.420	8.700	16.060	316.060	
12	5.00	0.00	5.00				5.00	0.50	0.50	4.50	0.00	11.120	0.000	0.000	0.380	2.000	2.380	8.740	24.800	324.800	
13	4.50	0.00	4.50				4.50	0.50	0.50	4.00	0.00	11.120	0.000	0.000	0.340	2.000	2.340	8.780	33.580	333.580	
14	4.00	0.00	4.00				4.00	0.50	0.50	3.50	0.00	11.120	0.000	0.000	0.300	2.000	2.300	8.820	42.400	342.400	
15	3.50	0.00	3.50			14.00	3.50	0.50	0.50	3.00	0.00	11.120	224.000	16.880	0.260	2.000	241.340	220.620	-188.420	111.580	
16	3.00	14.00	17.00				3.00	0.50	0.50	2.50	0.00	11.120	0.000	0.000	0.220	2.000	2.220	8.900	-179.520	120.480	
17	2.50	14.00	16.50				2.50	0.50	0.50	2.00	0.00	11.120	0.000	0.000	0.180	2.000	2.180	8.940	-170.580	129.420	
18	2.00	14.00	16.00				2.00	0.50	0.50	1.50	0.00	11.120	0.000	0.000	0.140	2.000	2.140	8.980	-161.600	138.400	
19	1.50	14.00	15.50				1.50	0.50	0.50	1.00	0.00	11.120	0.000	0.000	0.100	2.000	2.100	9.020	-152.580	147.420	
20	1.00	14.00	15.00				1.00	0.50	0.50	0.50	0.00	11.120	0.000	0.000	0.060	2.000	2.060	9.060	-143.520	156.480	
21	0.50	14.00	14.50				0.50	0.50	0.50	0.00	0.00	11.120	0.000	0.000	0.020	2.000	2.020	9.100	-134.420	165.580	
22	0.00	14.00	14.00				14.00	0.50	0.50	13.50	0.00	11.120	0.000	0.000	0.100	2.000	2.100	9.020	-125.400	173.600	
23	13.50	0.00	13.50				13.50	0.50	0.50	13.00	0.00	11.120	0.000	0.000	0.060	2.000	2.060	9.060	-116.340	181.660	
24	13.00	0.00	13.00				13.00	0.50	0.50	12.50	0.00	11.120	0.000	0.000	0.020	2.000	2.020	9.100	-107.240	189.760	
25	12.50	0.00	12.50				12.50	0.50	0.50	12.00	0.00	11.120	0.000	0.000	0.940	2.000	2.940	9.180	-98.100	197.900	
26	12.00	0.00	12.00				12.00	0.50	0.50	11.50	0.00	11.120	0.000	0.000	0.900	2.000	2.900	9.220	-88.920	206.080	
27	11.50	0.00	11.50				11.50	0.50	0.50	11.00	0.00	11.120	0.000	0.000	0.860	2.000	2.860	9.260	-79.700	214.300	
28	11.00	0.00	11.00				11.00	0.50	0.50	10.50	0.00	11.120	0.000	0.000	0.820	2.000	2.820	9.300	-70.440	222.560	
29	10.50	0.00	10.50				10.50	0.50	0.50	10.00	0.00	11.120	0.000	0.000	0.780	2.000	2.780	9.340	-61.140	230.860	
30	10.00	0.00	10.00				10.00	0.50	0.50	9.50	0.00	11.120	0.000	0.000	0.740	2.000	2.740	9.380	-51.800	239.200	
31	9.50	0.00	9.50				9.50	0.50	0.50	9.00	0.00	11.120	0.000	0.000	0.700	2.000	2.700	9.420	-42.420	247.580	
32	9.00	0.00	9.00				9.00	0.50	0.50	8.50	0.00	11.120	0.000	0.000	0.660	2.000	2.660	9.460	-33.000	255.900	
33	8.50	0.00	8.50				8.50	0.50	0.50	8.00	0.00	11.120	0.000	0.000	0.620	2.000	2.620	9.500	-23.540	264.360	
34	8.00	0.00	8.00				8.00	0.50	0.50	7.50	0.00	11.120	0.000	0.000	0.580	2.000	2.580	9.540	-14.000	272.860	
35	7.50	0.00	7.50				7.50	0.50	0.50	7.00	0.00	11.120	0.000	0.000	0.540	2.000	2.540	9.580	-4.460	281.400	
36	7.00	0.00	7.00				7.00	0.50	0.50	6.50	0.00	11.120	0.000	0.000	0.500	2.000	2.500	9.620	5.100	290.000	
37	6.50	0.00	6.50				6.50	0.50	0.50	6.00	0.00	11.120	0.000	0.000	0.460	2.000	2.460	9.660	15.500	298.700	
38	6.00	0.00	6.00				6.00	0.50	0.50	5.50	0.00	11.120	0.000	0.000	0.420	2.000	2.420	9.700	25.860	307.360	
39	5.50	0.00	5.50				5.50	0.50	0.50	5.00	0.00	11.120	0.000	0.000	0.380	2.000	2.380	9.740	36.180	316.060	
40	5.00	0.00	5.00				5.00	0.50	0.50	4.50	0.00	11.120	0.000	0.000	0.340	2.000	2.340	9.780	46.460	324.800	
41	4.50	0.00	4.50				4.50	0.50	0.50	4.00	0.00	11.120	0.000	0.000	0.300	2.000	2.300	9.820	56.700	333.580	
42	4.00	0.00	4.00				4.00	0.50	0.50	3.50	0.00	11.120	0.000	0.000	0.260	2.000	2.260	9.860	66.900	342.400	
43	3.50	0.00	3.50			14.00	3.50	0.50	0.50	3.00	0.00	11.120	224.000	16.880	0.260	2.000	241.340	220.620	-188.420	111.580	
44	3.00	14.00	17.00				3.00	0.50	0.50	2.50	0.00	11.120	0.000	0.000	0.220	2.000	2.220	8.900	-179.520	120.480	
45	2.50	14.00	16.50				2.50	0.50	0.50	2.00	0.00	11.120	0.000	0.000	0.180	2.000	2.180	8.940	-170.580	129.420	
46	2.00	14.00	16.00				2.00	0.50	0.50	1.50	0.00	11.120	0.000	0.000	0.140	2.000	2.140	8.980	-161.600	138.400	
47	1.50	14.00	15.50				1.50	0.50	0.50	1.00	0.00	11.120	0.000	0.000	0.100	2.000	2.100	9.020	-152.580	147.420	
48	1.00	14.00	15.00				1.00	0.50	0.50	0.50	0.00	11.120	0.000	0.000	0.060	2.000	2.060	9.060	-143.520	156.480	
49	0.50	14.00	14.50				0.50	0.50	0.50	0.00	0.00	11.120	0.000	0.000	0.020	2.000	2.020	9.100	-134.420	165.580	
50	0.00	14.00	14.00				14.00	0.50	0.50	13.50	0.00	11.120	0.000	0.000	0.100	2.000	2.100	9.020	-125.400	173.600	
51	13.50	0.00	13.50				13.50	0.50	0.50	13.00	0.00	11.120	0.000	0.000	0.060	2.000	2.060	9.060	-116.340	181.660	
52	13.00	0.00	13.00				13.00	0.50	0.50	12.50	0.00	11.120	0.000	0.000	0.020	2.000	2.020	9.100	-107.240	189.760	
53	12.50	0.00	12.50				12.50	0.50	0.50	12.00	0.00	11.120	0.000	0.000	0.000	2.000	2.000	9.140	-98.100	197.900	
54	12.00	0.00	12.00				12.00	0.50	0.50	11.50	0.00	11.120	0.000	0.000	0.940	2.000	2.940	9.180	-88.920	206.080	
55	11.50	0.00	11.50				11.50	0.50	0.50	11.00	0.00	11.120	0.000	0.000	0.900	2.000	2.900	9.220	-79.700	214.300	
56	11.00	0.00	11.00				11.00	0.50	0.50	10.50	0.00	11.120	0.000	0.000	0.860	2.000	2.860	9.260	-70.440	222.560	

Модель 3

В исходных данных мы поделили на 7 многие ячейки, чтобы преобразовать недельные данные в суточные, но срок проверки оставили равным 1, так как проверка на наличие запасов должна происходить ежедневно. Так же был добавлен столбец ПРИХОД, в котором мы первый заказ сместили на 7 дней вниз и данный столбец мы протянули вниз до конца года (365 дней). В результате получилась модель 3.

1.8.4 Модель 4. Организация обработки статистики в компьютерных моделях управления запасами

Затем мы попытались смоделировать реальные системы управления запасов с помощью неопределенности в спросе. Мы хотели провести имитационное моделирование оптимальной стратегии управления запасами при заданном значении объема спроса и при неопределенности спроса. Для этого мы создали новый столбец СЛ.ЧИСЛ СПРОС в модели 3 и туда была введена формула СЛЧИС для случайной генерации спроса.

Модель 4

Величину страхового запаса мы хотели бы подобрать с помощью имитационного моделирования. Была построена следующая таблица имитационного моделирования, содержащая 3 столбца, с помощью которой мы хотели бы обрабатывать статистику.

Обработка статистики

Некоторые полезные показатели выделены синим цветом:

- **УРОВЕНЬ ОБСЛУЖИВАНИЯ** - числа дефицитных циклов должно быть как можно меньше, чтобы величина была ближе к 100 процентам:

$$\frac{\text{отношение общего числа циклов} - \text{число дефицитных циклов}}{\text{отношение общего числа циклов}}$$

- **НАДЕЖНОСТЬ** - число дефицитных дней должно быть очень небольшим, что величина надежности стремилась к 100 процентам

$$\frac{\text{общее число дней} - \text{число дефицитных дней}}{\text{общее число дней}}$$

- **ПРИБЫЛЬ** - должна быть положительной при имитационном моделировании

1.8.5 Определение величины страхового запаса в компьютерных моделях управления запасами

Имитационное моделирование мы проводили до тех пор, пока результаты при очередном обновлении не становились стабильными. Мы проводили имитационное моделирование на определение объема страхового запаса.

Ячейка критический уровень (C27) была равна величине среднего спроса, умноженного на срок поставки с прибавлением назначенного страхового запаса.

Для определения оптимального запаса необходимо было при заданном среднем спросе (ячейка C20) и при заданном уровне надежности системы (ячейка C24) подобрать такую величину страхового запаса, чтобы надежность была соответствующей, а уровень обслуживания варьировался в выбранной нами диапазоне доверия (обычно выбирают больше 95%).

После этого строилась модель 5, в которой было реализовано вероятностное распределение срока поставок.

2 Теория массового обслуживания

2.1 Общая схема системы обслуживания

Определение 2.1.1. Теория массового обслуживания является основной проектирования и анализа систем *систем массового обслуживания (СМО)*

В борьбу за клиента в современной экономике вкладываются огромные средства. Во-многих случаях неудовлетворенность клиента вызывается неудачной организацией его обслуживания (долгое ожидание в очереди, отказ обслуживания). Использование теории массового обслуживания позволяет фирме избежать подобных неприятностей.

На вход в СМО поступает *поток требований* на обслуживание. В качестве требований могут выступать клиенты, пациенты, поломки в оборудовании и.т.д.

Требования поступают обычно в нерегулярные, случайные моменты времени. Случайный характер носит и продолжительность обслуживания. Все это создает нерегулярности в работе обслуживающей системы, является причиной ее перегрузок или недогрузок, причиной сбоев в работе.

Определение 2.1.2. Детерминированный поток - поток, который подчиняется некоторому расписанию.

Определение 2.1.3. Регулярный поток - поток с постоянным интервалом между соседними элементами.

В СМО можно выделить четыре основных звена:

- входящий поток требований
- накопитель
- узлы обслуживания
- выходящий поток

Определение 2.1.4. Накопитель - место, где поступившие требования ждут начала обслуживания, перед тем как попасть в очередь. С накопителем могут связываться пространственные или временные ограничения.

Накопитель может быть *ограниченным* или неограниченным. Требование может пробыть некоторое время в очереди, покинуть ее, не дождавшись обслуживания. А может уйти в другую очередь.

Определение 2.1.5. Узлы обслуживания - место, где обслуживаются требования. В системе может быть один узел, а может быть несколько. Число узлов может быть переменным (машина такси на остановке может рассматриваться как отдельный узел).

Узлы могут быть *универсальными* (обслуживающие любое требование) и *специализированными*.

Будучи универсальными они могут отличаться значениями своих характеристик. Среди таких характеристик одной из наиболее существенных является *интенсивность обслуживания* - среднее число требований, которое способен обслужить узел в единицу времени.

Узлы могут работать *параллельно*, *последовательно* или *смешанным* образом.

Обычно в каждый момент времени *узел* обслуживает не более одного требования, но бывают СМО, в которых узлы обычно обслуживают сразу группы требований: преподаватель в вузе или экскурсовод.

Определение 2.1.6. Замкнутая СМО - обслуженные требования после некоторой случайной, неизвестной заранее задержки опять поступают на вход.

Замкнутой структурой является, например, поликлиника.

Определение 2.1.7. Выходящий поток требований - те требования, которые прошли обслуживание в узлах. Сам процесс обслуживания - случайный процесс.

Мы рассмотрим базовые структуры и для рассмотренных ниже СМО предположим, что входящий поток является пуассоновским, а длительность обслуживания распределена по экспоненциальному закону. Это предположение применяется для широкого класса систем обслуживания и позволяют применить к изучению систем теорию *марковских процессов*.

Давайте ознакомимся с СМО!

2.2 Три свойства потоков требования

Изучение потока требований нацелено на получение важнейших его характеристик. Характеристики вероятностного потока, естественно, являются вероятностными.

К ним относятся, например:

1. вероятности поступления того или иного числа требований на заданном отрезке времени;
2. среднее число требований, поступающих за данное время;
3. вероятностное распределение длин временных интервалов между соседними требованиями и т.д.

Оказывается, первая из названных характеристик является **фундаментальной**: зная ее, можно *определить остальные*.

Мы введем для нее специальное обозначение: ХАРАКТЕРИСТИКА ПОТОКА ТРЕБОВАНИЯ НА ПРОМЕЖУТКЕ.

Определение 2.2.1.

$$V_k(t_0, t)$$

- **вероятность возникновения k -требований** из рассматриваемого потока на промежутке времени, начинающийся в t_0 и имеет длину t .

Определение 2.2.2.

$$V_{\geq k}(t_0, t) \quad V_{\leq k}(t_0, t)$$

- **вероятность возникновения не менее (не более) k -требований** (хотя бы k) из рассматриваемого потока на промежутке времени, начинающийся в t_0 и имеет длину t .

Определение 2.2.3.

$$V_0(t_0, t)$$

- **вероятность отсутствия требований** на нашем отрезке времени.

Определение 2.2.4. Вероятность $V_k(t_0, 0)$:

$$V_k(t_0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} V_k(t_0, t) \quad (1.1)$$

есть вероятность поступления k требований на отрезке времени, длина которого равна 0, то есть поступления k требований в точке t_0 на оси времени.

А следующее понятие поможет нам для анализа свойств потока:

Определение 2.2.5. $x = o(x)$ - бесконечно малая величина более высокого порядка, чем x , если:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x)}{x} = 0 \quad (1.2)$$

Рассмотрим 3 основных свойства потока требований

2.2.1 Стационарность потока требования

Определение 2.2.6. Поток называется **стационарным**, если его базовая характеристика $V_k(t_0, t)$ не зависит от t_0 , то есть не зависит от положения отрезка на оси времени (для двух отрезков $[t_0, t_0 + t]$ и $[t'_0, t'_0 + t]$) выполнено равенство:

$$V_k(t_0, t) = V_k(t'_0, t) \quad (1.3)$$

Вероятности V_k , а потому и другие вероятностные характеристики стационарного потока, не зависят от положения начальной точки, как следствие, и всего отрезка на оси времени.

В связи с этим для *стационарных потоков* вместо $V_k(t_0, t)$ будем писать просто $V_k(t)$.

На относительно коротких промежутках многие потоки можно считать стационарными. В связи с этим длинный промежуток времени иногда разбивают на участки стационарности и рассматривают поток на каждом участке отдельно.

2.2.2 Ординарность потока требований

Определение 2.2.7. Поток называется **ординарным**, если требования возникают по одному, то есть какова бы ни была точка t_0 :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{V_{\geq 2}(t_0, t)}{t} = 0 \quad (1.4)$$

Условие *ординарности* означает, что вероятность наступления хотя бы двух требований на отрезке $[t_0, t_0 + t]$ стремится к 0 при $t \rightarrow 0$ и при

этом существенно быстрее, чем сама длина отрезка t .

Так как отрезок при $t \rightarrow 0$ стягивается в точку t_0 , то свойство ординарности означает, что ни в какой момент времени t_0 *невозможно наступление двух или более требований*, то есть в ординарном потоке требования поступают *по одному*.

Условию (1.4) можно придать другую эквивалентную формулировку через бесконечную малую величину - величину, стремящуюся к нулю быстрее, чем t :

$$V_{\geq 2}(t_0, t) = o(t) \quad (1.5)$$

Если поток является стационарным, то условие ординарности упрощается и приобретает вид:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{V_{\geq 2}(t_0, t)}{t} = 0 \quad (1.6)$$

$$V_{\geq 2}(t) = o(t) \quad (1.7)$$

2.2.3 Свойство отсутствия последействия

Определение 2.2.8. Поток требований называется **поток без последействия**, если условные вероятности поступлений k требований на произвольном отрезке, вычисленные при предположениях о распределении моментов поступления требований до t_0 , совпадают с безусловной вероятностью.

Отсутствие последействия означает **независимость вероятностных характеристик потока** на отрезке времени от истории потока до этого отрезка, то есть означает внутреннюю независимость потока.

У потока отсутствует последействие, если его вероятностные характеристики, связанные с разными промежутками времени являются независимыми.

Теорема 2.1. Для потоков без последействия верна формула:

$$V_k(t_0, t + \tau) = \sum_{m=0}^k V_m(t_0, t) \cdot V_{k-m}(t_0 + t, \tau) \quad (1.8)$$

Доказательство. Возьмем на оси времени два промежутка t и τ .

Определим вероятность того, что за время $t + \tau$ событие наступит ровно k раз. Это может осуществиться $k + 1$ различными способами, а

именно:

- за промежуток времени длительности t произойдет k событий, а за время $(t + \tau)$ - ни одного. Вероятность данного события:

$$V_0(t_0, t) \cdot V_k(t_0 + t, \tau)$$

- за промежуток времени длительности t произойдет $k - 1$ событий, а за время $(t + \tau)$ - 1. Вероятность данного события:

$$V_1(t_0, t) \cdot V_{k-1}(t_0 + t, \tau)$$

- за промежуток времени длительности t произойдет $k - 2$ событий, а за время $(t + \tau)$ - 2
- ...
- за промежуток времени длительности 0 не наступит ни одного события, а за время $(t + \tau)$ - k событий.

Так как данные события являются независимыми и условная вероятность равна обычной вероятности, то по формуле полной вероятности, где в качестве события A выступает вероятность наступления k событий, получим следующую формулу, совпадающую с той, что мы пытались доказать:

$$V_k(t_0, t + \tau) = \sum_{m=0}^k V_m(t_0, t) \cdot V_{k-m}(t_0 + t, \tau) \quad \blacksquare \quad (1.8)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} V_k(t_0, t) = 1$$

□

Определение 2.2.9. Если поток удовлетворяет всем трем свойствам, то такой поток является **Пуассоновским**.

Примеры потоков:

1. стационарный + ординарный + отсутствие последствий: падение капли из не до конца завинченного крана.

2. стационарный + ординарный + последствия: проходящая баржа под разведенными мостами ночью
3. стационарный + не ординарный + последствия: машины, въезжающих на Володарский мост
4. стационарный + не ординарный + отсутствие последствий: поток пассажиров входящих в метро
5. не стационарный + ординарный + последствия: появление поезда из туннеля в метро
6. не стационарный + ординарный + отсутствие последствий: выход из квартиры человека
7. не стационарный + не ординарный + отсутствие последствий: поток уборки станций в одно и то же время.
8. не стационарный + не ординарный + последствия: появление вагонов из туннеля в метро

2.3 Параметр и интенсивность потока

Введем две важные характеристики потоков: *параметр* и *интенсивность*

Определение 2.3.1. Параметром стационарного потока называется предел (если он существует для рассматриваемого потока):

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - V_0(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{V_{\geq 1}(t)}{t} = \lambda \quad (2.1)$$

Так же можно записать определение предела на языке бесконечно малых функций:

$$1 - V_0(t) = V_{\geq 1}(t) = \lambda t + o(t)$$

Параметр показывает скорость сходимости к 0 вероятности поступления хотя бы одного требования на отрезке t при стремлении к 0 длины отрезка. Очевидно, что параметр не может быть отрицательным.

Если параметр конечен, то:

$$V_{\geq 1}(0) = 0 \quad V_0(t) = 1 - \lambda t - o(t) = 1$$

то есть вероятность наступления хотя бы одного требования в точке равна 0, а вероятность отсутствия требований равна 1.

Определение 2.3.2. Интенсивностью стационарного потока называется среднее число требований, поступающих из потока за единицу времени. Интенсивность обозначается буквой $\mu > 0$:

$$\mu \cdot t = E(t) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot V_k(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot V_k(t)$$

- математическое ожидание числа требований.

Если поток не предполагается стационарным, то значение параметра может меняться во времени.

Определение 2.3.3. Значением параметра в момент t_0 (**мгновенным значением параметра**) называется предел:

$$\lambda(t_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - V_0(t_0, t)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{V_{\geq 1}(t_0, t)}{t} \quad (2.6)$$

Аналогично может менять свое значение и интенсивность.

Определение 2.3.4. Значением интенсивности в момент t_0 (**мгновенной интенсивностью**) называется предел

$$\mu(t_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mathbb{E}(t_0, t)}{t} \quad (2.7)$$

где математическое ожидание числа требования на промежутке времени $\mathbb{E}(t_0, t)$:

$$\mathbb{E}(t_0, t) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot V_k(t_0, t) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot V_k(t_0, t) \quad (2.8)$$

В стационарном случае значение $\lambda(t_0), \mu(t_0)$ постоянны:

$$\lambda(t_0) = \lambda, \quad \mu(t_0) = \mu$$

Теорема 2.2. Мгновенные параметры и интенсивность связаны следующим соотношением:

$$\mu(t_0) \geq \lambda(t_0) \quad (2.9)$$

Доказательство.

$$\mathbb{E}(t_0, t) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot V_k(t_0, t) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot V_k(t_0, t) \geq \sum_{k=1}^{\infty} V_k(t_0, t) = V_{\geq 1}(t_0, t)$$

$$\mathbb{E}(t_0, t) \geq V_{\geq 1}(t_0, t) \quad (2.10)$$

$$\mu(t_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mathbb{E}(t_0, t)}{t} \geq \lim_{t \rightarrow 0} \frac{V_{\geq 1}(t_0, t)}{t} = \lambda(t_0) \Rightarrow \mu(t_0) \geq \lambda(t_0)$$

□

Следствие:

Для стационарных потоков выполняется

$$\mu \geq \lambda \quad (2.11)$$

Доказательство.

$$\mu = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=0}^{\infty} k \cdot V_k(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot V_k(t)}{t} \geq \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=1}^{\infty} V_k(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{V_{\geq 1}(t)}{t} = \lambda$$

$$\mu \geq \lambda$$

□

У потоков, моделирующих реальные процессы поступления требований, параметр (то есть предел (2.1) или (2.6)) обычно существует; в дальнейшем мы будем изучать только такие потоки.

Теорема 2.3. *Стационарные потоки, у которых параметр равен 0 или $+\infty$ не представляют интереса для практики.*

Доказательство. Зафиксируем отрезок времени длины t , разделим его на n равных частей. Если за время t появилось хотя бы одно требование из потока, то это произошло хотя бы на одном из отрезков $\frac{t}{n}$. Следовательно:

$$V_{\geq 1}(t) \leq n \cdot V_{\geq 1}\left(\frac{t}{n}\right) = \frac{V_{\geq 1}\left(\frac{t}{n}\right)}{\frac{t}{n}} \cdot t$$

где правая часть стремится к λt при $n \rightarrow \infty$. Таким образом:

$$V_{\geq 1}(t) \leq \lambda t$$

И если $\lambda = 0$, то вероятность возникновения хотя бы 1 требования равна нулю, то есть ни на каком отрезке нет требований, список пуст и не содержит требований. Если $\lambda = +\infty$, то так как $\mu \geq \lambda$, то $\mu = +\infty$, то на любом отрезке t бесконечное число требований $\mu t = +\infty$, поток является бесконечно плотным. \square

Для рассматриваемых в дальнейшем потоков всегда будет выполняться:

$$0 < \lambda < +\infty$$

Исходя из этого, мы можем теперь дать другую формулировку ординарности стационарных потоков, эквивалентную (1.6).

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{V_{\geq 2}(t)}{t} = 0 \tag{1.6}$$

Теорема 2.4. *Поток является ординарным тогда и только тогда, когда:*

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{V_{\geq 2}(t)}{t} = 0 \sim \lim_{t \rightarrow 0} \frac{V_{\geq 2}(t)}{V_1(t)} = 0 \tag{2.15}$$

то есть, когда вероятность поступления на малом отрезке в точке двух или меньшего числа требования есть величина более высокого порядка малости, чем вероятность наступления одного требования

Доказательство. Верно, что

$$V_1(t) = V_{\geq 1}(t) - V_{\geq 2}(t) \quad (2.16)$$

так как:

$$V_{\geq 1}(t) - V_{\geq 2}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} V_k(t) - \sum_{k=2}^{\infty} V_k(t) = V_1(t)$$

Откуда получаем:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{V_1(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{V_{\geq 1}(t)}{t} - \lim_{t \rightarrow 0} \frac{V_{\geq 2}(t)}{t} = \lambda - \lim_{t \rightarrow 0} \frac{V_{\geq 2}(t)}{t} \quad (2.17)$$

Пусть поток ординарен, то есть выполнено (1.6). Тогда из (2.17) следует:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{V_1(t)}{t} = \lambda \quad (2.18)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{V_{\geq 2}(t)}{V_1(t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{V_{\geq 2}(t)}{t} \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{V_1(t)} = 0 \quad (2.19)$$

Достаточность тоже доказывается. \square

Утв: для стационарных потоков с конечной интенсивностью из условия $\mu = \lambda$ следует условие ординарности.

Утв: поток называется ординарным тогда и только тогда, когда

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{V_{\geq 2}(t)}{V_1(t)} = 0 \sim \lim_{t \rightarrow 0} \frac{V_{\geq 2}(t)}{V_{\geq 1}(t)} = 0$$

Утв:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{V_{\geq 2}(t)}{V_1(t)} = 0 \sim \lim_{t \rightarrow 0} \frac{V_1(t)}{V_{\geq 1}(t)} = 1$$

2.4 Пуассоновский поток в дискретном времени. Вывод формулы $V_0(t)$ для пуассоновского потока

Определение 2.4.1. Если поток удовлетворяет свойствам ординарности, стационарности и отсутствием последствия, то такой поток является **Пуассоновским**.

Пуассоновский поток в дискретном времени

Представим себе, что ось времени разбита на примыкающие друг к другу маленькие отрезки одной и той же длины δ :



Рис. 4: Пуассоновский поток

На каждом отрезке δ производится испытание, которое оканчивается удачей с вероятностью p и неудачей с вероятностью $1 - p$. Тогда последовательности отрезков, соответствующие удаче, можно рассматривать как *последовательность требований*, поступающих из пуассоновского потока.

Доказательство. Действительно:

- на каждом отрезке имеется лишь одно испытание - *ординарность*
- вероятность удачи p предполагается одной и той же, независимо от того, в каком месте на оси времени расположен отрезок δ - *стационарность*
- также вероятность удачи не зависит от того, чем кончились испытания на предыдущих отрезках - *отсутствие последствия*.

□

Отличие пуассоновского потока состоит в том, что требования из потока поступают мгновенно, в то время как здесь этому соответствует целый отрезок длины δ .

Данный поток называется *пуассоновским потоком в дискретном времени*.

Чем меньше δ , тем ближе наша последовательность зачерненных отрезков к последовательности требований, возникающих из пуассоновского потока. В пределе $\delta \rightarrow 0$ получаем пуассоновский поток.

Вероятность неудачи на t отрезках подряд равна q^t . Аналогичная формула получится далее для пуассоновского потока.

Определение 2.4.2. Пуассоновский поток в виду своей простоты называют иногда **простейшим**.

Выведем формулу $V_0(t)$ для пуассоновского потока - **вероятности отсутствия требований** на промежутке времени длины t .

Доказательство. Разделим единичный отрезок n равных отрезков. Тогда:

$$V_0(1) = \left(V_0 \left(\frac{1}{n} \right) \right)^n \quad V_0 \left(\frac{1}{n} \right) = (V_0(1))^{\frac{1}{n}}$$

то есть вероятность отсутствия требований на единичном отрезке равно вероятности отсутствия требований на отрезке $\frac{1}{n}$ в n степени.

Рассматривая k отрезков одинаковой длины $\frac{1}{n}$ получаем:

$$V_0 \left(\frac{k}{n} \right) = \left(V_0 \left(\frac{1}{n} \right) \right)^k = (V_0(1))^{\frac{k}{n}}$$

То есть мы получили, что:

$$V_0(t) = a^t \quad t \in [0; 1] \quad V_0(1) = a$$

откуда следует, что в виду монотонности вероятности, соотношение данное верно не только для рационального, но и для любого $t \in [0, 1]$.

Любое число $t \in [0, +\infty]$ можно представить в виде суммы целой и дробной части. Формула верна и для любого $t \in [0, +\infty)$.

Так как a -вероятность, то $0 \leq a \leq 1$. При $a = 1$ - вероятность отсутствия требований равна 1 и поток пуст. При $a = 0$ - поток является бесконечно плотным, на любом отрезке наверняка есть требования. Оба эти случая не предоставляют интереса. Следовательно, $0 < a < 1$.

Пусть $\alpha = -\ln a$ $0 < \alpha < \infty$. Тогда:

$$V_0(t) = a^t = e^{-\alpha t}$$

Так как экспоненциальная функция может быть разложена через ряд Тейлора:

$$e^x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots$$

Параметр пуассоновского потока:

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - V_0(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-\alpha t}}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - (1 - \alpha t + o(t))}{t} = \alpha$$

Таким образом, $\lambda = \alpha$ и:

$$V_0(t) = e^{-\lambda t}$$

□

При выводе этой формулы мы не пользовались *ординарностью потока*.

Очевидно, что чем большая время наблюдения, тем вероятность непоявления ни одного события меньше. Это соответствует тому, что если интенсивность появлений событий велика, то вероятность непоявления события быстро уменьшается со временем наблюдения.

Вероятность появления хотя бы одного события, наоборот, стремится со временем к единице, то есть при соответствующем длительном наблюдении событие таковое обязательно рано или поздно произойдет. Чем больше интенсивность появления события, тем быстрее наступает это событие и тем быстрее функция стремится к единице.

2.5 Вывод формул для вероятностей V_k элементарным методом

Найдем вероятность поступления k требований из пуассоновского потока на отрезке времени длины t .

Разделим отрезок $[0; t]$ на n равных частей $n > k$.

Пусть $P'_{k,n}(t)$ - вероятность того, что на $[0, t]$ поступит k требований, и при этом на каждой из n частей окажется не более одного требования.

Пусть $P''_{k,n}(t)$ - вероятность того, что на $[0, t]$ поступит k требований и при этом хотя бы на одной из n частей окажется более одного требования. Тогда при любом n :

$$V_k(t) = P'_{k,n}(t) + P''_{k,n}(t)$$

Переходя в левой и правой части к пределу при $n \rightarrow \infty$, получим:

$$\begin{aligned} V_k(t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (P'_{k,n}(t) + P''_{k,n}(t)) \\ P'_{k,n}(t) &= C_n^k \cdot \left(V_1 \left(\frac{t}{n} \right) \right)^k \cdot \left(V_0 \cdot \left(\frac{t}{n} \right) \right)^{n-k} \\ &= \left(V_0 \cdot \left(\frac{t}{n} \right) \right)^{n-k} = e^{-\lambda \cdot \frac{t}{n} (n-k)} = e^{-\lambda t} \cdot e^{\lambda t \frac{k}{n}} \\ \left(V_1 \left(\frac{t}{n} \right) \right)^k &= \left(1 - V_0 \left(\frac{t}{n} \right) - V_{\geq 2} \left(\frac{t}{n} \right) \right)^k = \left(1 - e^{-\lambda \frac{t}{n}} + o \left(\frac{t}{n} \right) \right)^k = \\ &= \left(1 - \left(1 - \lambda \cdot \frac{t}{n} + o \left(\frac{t}{n} \right) \right) + o \left(\frac{t}{n} \right) \right)^k = \left(\lambda \cdot \frac{t}{n} + o \left(\frac{t}{n} \right) \right)^k = \\ &= \frac{(\lambda t)^k}{n^k} \cdot \left(1 + \frac{o \left(\frac{t}{n} \right)}{\frac{t}{n}} \right) \end{aligned}$$

Таким образом:

$$P'_{k,n}(t) = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \cdot \frac{(\lambda t)^k}{n^k} \cdot \left(1 + \frac{o \left(\frac{t}{n} \right)}{\frac{t}{n}} \right) e^{-\lambda t} \cdot e^{\lambda t \frac{k}{n}}$$

но тут все пределы при $n \rightarrow \infty$ равны 1.

Поэтому:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P'_{k,n}(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

А:

$$P''_{k,n}(t) \leq n \cdot V_{\geq 2} \left(\frac{t}{n} \right) = t \cdot \frac{V_{\geq 2} \left(\frac{t}{n} \right)}{\frac{t}{n}}$$

и так как при $n \rightarrow \infty : \frac{t}{n} \rightarrow 0$, то имеем следующее по определению ординарности потока:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P''_{k,n}(t) = 0$$

Поэтому формулы дают следующее выражение для вероятности возникновения k требований в момент времени t :

$$V_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

Формула показывает, что для вычисления $V_k(t)$ нужно знать лишь одну вероятностную характеристику потока - значение его параметра λ . Пуассоновский поток полностью определяется значением его параметра. Два пуассоновских потока одинаковы, если равны их параметры.

Будет дан еще один метод вывод формулы - *метод дифференциальных уравнений*.

2.6 Графики и свойства вероятностей V_k пуассоновского потока

Рассмотрим, как выглядит графики вероятности V_k (возникновения k требований в момент времени t) для $\lambda = 0.25$ и $k = 0, \dots, 15$.

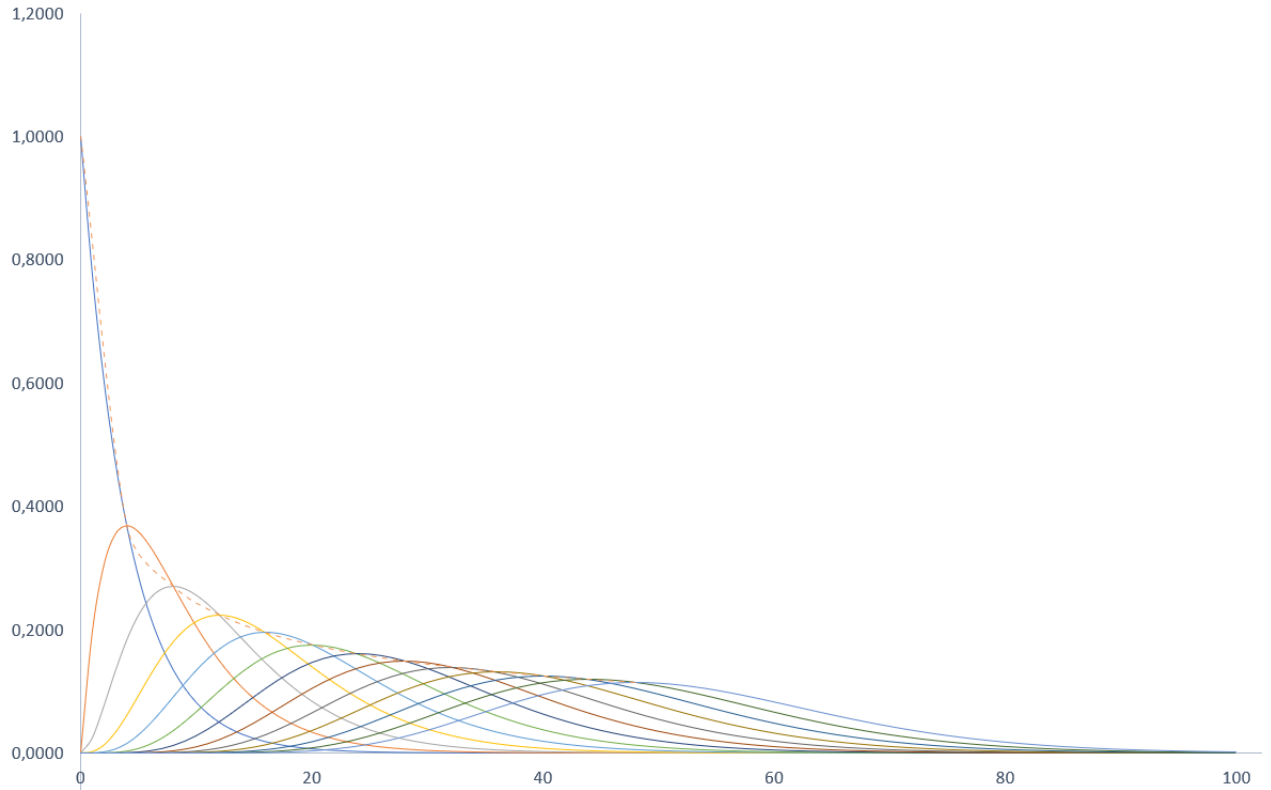


Рис. 5: График вероятностей V_k в зависимости от t и k . $\lambda = 0.25$

На данных графиках мы можем видеть пунктирную линию. Эта линия соединяет точки максимумов каждого графика распределения вероятностей V_k . Можно видеть, что у каждой вероятности имеется единственная точка максимума и она находится на линии предыдущей вероятности, а еще эти максимумы равномерно уменьшаются. Данный график позволил нам предсказать некоторые свойства вероятностей V_k и давайте их докажем.

Реализация данного графика находится в файле:

1. РАЗЛИЧНЫЕ ВИДЫ ПОТОКОВ.XLSX

Вероятности $V_k(t)$ обладают следующими свойствами:

1. У каждой вероятности есть *единственная точка максимума* и сама точка максимума находится на *линии предыдущей вероятности*

Доказательство.

$$f(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda t} \rightarrow \max$$

$$\frac{\partial f(t)}{\partial t} = \frac{\lambda k (\lambda t)^{k-1}}{k!} \cdot e^{-\lambda t} - \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} = 0$$

$$e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}$$

Действительно, точка максимума одна и в стационарной точке, являющейся максимумом, и совпадает с предыдущей вероятностью. \square

2. Точки максимумов располагаются *равномерно*

Доказательство. Нам нужно доказать, что точки максимумов, являющиеся стационарными точками решений, убывают с одинаковым шагом.

Возьмем выражение с предыдущего свойства для приравненной к нулю производной по t :

$$e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}$$

Заметим, что $\lambda \neq 0, k \geq 1, e^{-\lambda t} \neq 0$, то, следовательно, выражение принимает вид:

$$\lambda t = k \Rightarrow t = \frac{k}{\lambda}$$

Мы видим, что точки максимума каждой вероятности V_k находятся в момент времени t , причем он зависит от постоянного параметра $\lambda < 1$ и k , которая задает возрастающую последовательность. Следовательно, последовательность максимумов будет убывающей с шагом $t = \frac{k}{\lambda}$, то есть они располагаются равномерно, что и требовалось доказать \square

3. Значение точек максимумов *убывают с увеличением t*

Доказательство. Подставим в исходную функцию значение точки максимума, выведенное в прошлом свойстве и воспользуемся Формулой Стирлинга: $k! \sim \sqrt{2\pi k} \left(\frac{k}{e}\right)^k$:

$$f\left(\frac{k}{\lambda}\right) = \frac{k^k}{k!} e^{-k} = \frac{1}{k!} \cdot \left(\frac{k}{e}\right)^k \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi k} \left(\frac{k}{e}\right)^k} \cdot \left(\frac{k}{e}\right)^k \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi k}}$$

Следовательно, последовательность точек максимумов стремится к нулю, что и требовалось доказать в данном свойстве. \square

2.6.1 Параметр и интенсивность пуассоновского потока

Теперь докажем следующую теорему:

Теорема 2.5. *Интенсивность пуассоновского потока μ равна параметру λ .*

Доказательство. Так как

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

то можно записать следующую цепочку действий:

$$\begin{aligned} \mu t = \mathbb{E}(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot V_k(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot V_k(t) \quad (2.5) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{(\lambda t)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{(k-1)!} = \\ &= e^{-\lambda t} \lambda t \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} = e^{-\lambda t} \lambda t \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} = e^{-\lambda t} \cdot \lambda t \cdot e^{\lambda t} = \lambda t \end{aligned}$$

Следовательно:

$$\mu = \lambda$$

\square

Теорема 2.6. *В пуассоновском потоке дисперсия равна $D\xi = \lambda t$:*

Доказательство.

$$\begin{aligned} E\xi^2 &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot V_k(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cdot V_k(t) \quad (2.5) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cdot \frac{(\lambda t)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t} \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{(\lambda t)^k}{(k-1)!} = \\ &= e^{-\lambda t} (\lambda t) (\lambda t + 1) e^{\lambda t} = \lambda t + \lambda^2 t^2 \\ D\xi &= E\xi^2 - (E\xi)^2 = \lambda t + \lambda^2 t^2 - (\lambda t)^2 = \lambda t \end{aligned}$$

\square

2.7 Распределение длин интервалов в пуассоновском потоке

Задача

На шоссе мимо наблюдателя движется в одном направлении пуассоновский поток машин с известным значением параметра λ . В некоторый момент времени мимо наблюдателя проходит машина

1. Найти вероятность того, что в течение заданного промежутка времени t после этого момента мимо наблюдателя не прошла ни одна машина
2. Пусть в течение времени s после этого момента мимо наблюдателя не прошла ни одна машина. Найти вероятность того, что в течение заданного промежутка времени t , начинающегося в момент окончания s , мимо него не пройдет ни одна машина.

Решение:

Пусть $\varphi_0(t)$ - условная вероятность отсутствия требований за время t в первом пункте, а $\varphi(t|s)$ - во втором. Условие состоит в том, что этот промежуток времени начинает отсчитываться не с произвольного момента времени, а с такого, в который поступает требование. Ввиду отсутствия последствия:

$$\varphi_0(t) = V_0(t) = e^{-\lambda t}$$

Отсутствие последствия влечет независимость оставшегося времени ожидания t от уже прошедшего s - какое бы время наблюдатель ни провел в ожидании машины, предсказать отсутствие (или) появление машины на любом предстоящем отрезке времени он может с теми же шансами на успех, как если бы он совсем не ждал.

Свойство отсутствия памяти - если время ожидания распределено по экспоненциальному закону, то информация о том, что событие не наступило к данному моменту не улучшает шансы на его поступление в дальнейшем.

Воспользуемся определением условной вероятности:

$$\varphi_0(\xi > t + s | \xi > t) = \frac{\varphi(\xi \geq t + s \cap \xi \geq t)}{\varphi_0(\xi \geq t)} = \frac{\varphi_0(\xi \geq t + s)}{\varphi_0(\xi \geq t)} =$$

$$= \frac{1 - (1 - e^{-\lambda(t+s)})}{1 - (1 - e^{-\lambda t})} = \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s} = \varphi_0(\xi \geq s)$$

Мы получили совпадения условной и безусловной вероятности, следовательно $\varphi_0(t)$ есть экспоненциальная функция. Для стационарных и ординарных потоков отсутствие последействия эквивалентно *экспоненциальности* функции $\varphi_0(t)$.

Действительно, вероятность $\varphi_0(t)$ тесно связана с функцией распределения $F(t)$ длин интервалов между соседними требованиями.

Определение 2.7.1. Пусть ξ - случайная величина - длина интервала между соседними требованиями в пуассоновском потоке.

Определение 2.7.2. **Функция распределения $F_\xi(t)$** - функция, что ее значение в произвольной точке t есть вероятность того, что длина интервала не превосходит t :

$$F_\xi(t) = P(\xi \leq t)$$

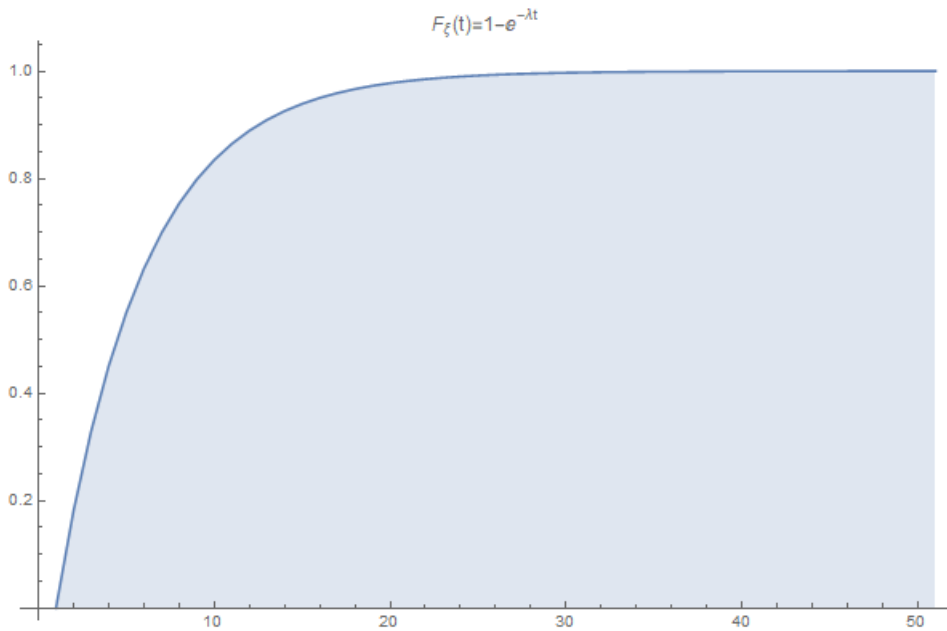


Рис. 7: Функция экспоненциального распределения

Событие, состоящее в том, что $\xi \leq t$, совпадает с событием, состоящим в том, что за промежуток времени t , начинающийся в момент поступления требования t , поступит хотя бы одно требование:

$$V_{\geq 1}(t) = F_\xi(t) = P(\xi \leq t) = 1 - V_0(t) = 1 - \varphi_0(t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

Определение 2.7.3. будем говорить, что случайная величина имеет абсолютное непрерывное распределение, если найдется функция $f_\xi(x) \geq 0$, что $\forall x \in \mathbb{R}(-\infty, \infty)$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$$

$f_\xi(x)$ называется плотностью распределения случайной величины - функция, значение интеграла от нее на произвольном отрезке $[t_1, t_2]$ равно вероятности того, что $t_1 \leq \xi \leq t_2$

Если случайная величина ξ имеет плотность распределения, то ее функция распределения непрерывна, поскольку интеграл - непрерывная функция верхнего предела.

$$P(\omega : a \leq \xi(\omega) \leq b) = F(b) - F(a) = \int_{-\infty}^b f(t)dt - \int_{-\infty}^a f(t)dt = \int_a^b f(t)dt$$

Свойства плотности вероятности:

1. $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1$ - площадь под кривой плотности распределения равна единице
2. $f(x) = F'(x)$, если функция распределения дифференцируема
3. $P(\xi = x) = \int_x^x f(t)dt = 0$

Пусть $[x; x + \delta x)$ - интервал произвольно малой длины. Вероятность попадания случайной величины в этот интервал приближенно равна произведению значения плотности распределения в точке x на длину этого интервала. То есть пропорциональна длине интервала.

Выведем плотность распределения. $F_\xi(t)$ и $f_\xi(t)$ связаны с друг другом соотношением:

$$F_\xi(t) = \int_0^t f_\xi(x)dx$$

$$f_\xi(t) = \frac{\partial F_\xi(t)}{\partial t} = \lambda \cdot e^{-\lambda t}$$

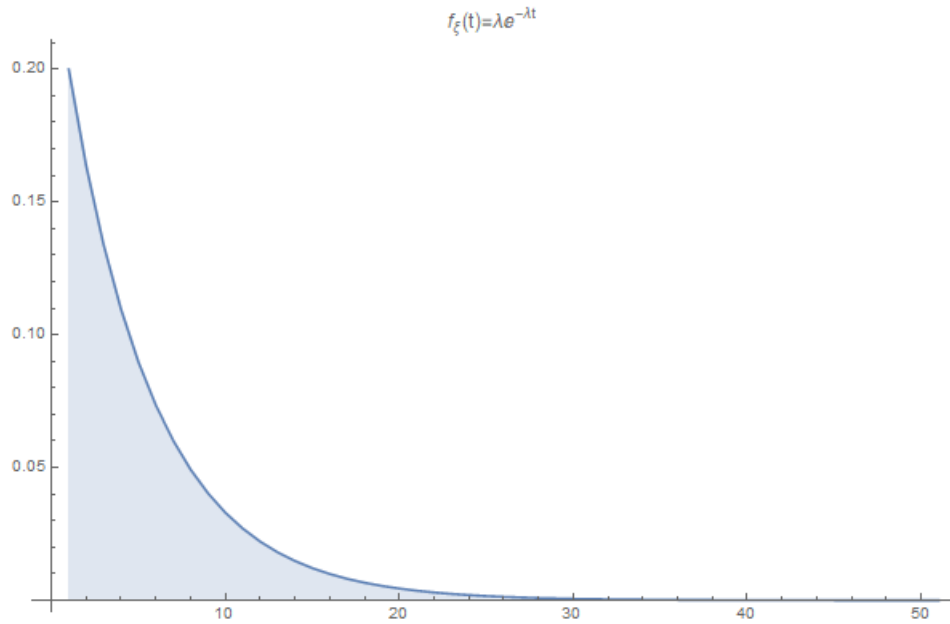


Рис. 8: Плотность экспоненциального распределения

Определение 2.7.4. Математическим ожиданием случайной величины ξ с непрерывным распределением с плотностью распределения $f_{xi}(x)$ называется:

$$E\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_{\xi}(x) dx$$

если данный интеграл абсолютно сходится, в противном случае говорят, что математическое ожидание не существует.

Найдем математическое ожидание интервала между соседними требованиями.

Доказательство. Средняя длина интервала между соседними требованиями, то есть математическое ожидание $E\xi$ случайной величины ξ определим по формуле:

$$E\xi = \int_0^{\infty} x \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda x} dx$$

Проведем интегрирование по частям

$$\int_0^{\infty} u dv = uv - \int_0^{\infty} v du$$

$$u = \lambda x, du = \lambda dx, dv = e^{-\lambda x}, v = \frac{-e^{-\lambda x}}{\lambda}$$

$$\begin{aligned}
E\xi &= \int_0^{\infty} x \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda x} dx = \left(\lambda x \frac{-e^{-\lambda x}}{\lambda} \right) \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \frac{-e^{-\lambda x}}{\lambda} \lambda dx = \\
&= (-xe^{-\lambda x})_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dx
\end{aligned}$$

Заметим, что предел:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} xe^{-\lambda x} = 0$$

Тогда:

$$E\xi = \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dx = \frac{-e^{-\lambda x}}{\lambda} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda}$$

□

Мы определили среднюю длину промежутка между соседними требованиями в потоке. Она оказывается равной величине, обратной по значению параметру потока.

Мы получили, что вероятности $V_k(t)$ для пуассоновского потока простым способом выражаются через одну единственную $V_0(t)$. Вероятность $V_0(t)$ полностью определяется значением параметра λ , а значение λ можно найти, зная вероятность $V_0(t)$ хотя бы для одного ненулевого конкретного значения $t = t_0$:

$$\lambda = -\frac{\ln V_0(t_0)}{t}$$

Таким образом, одно конкретное значение вероятности $V_0(t)$ полностью определяет все вероятностные характеристики пуассоновского потока.

2.8 Дисперсия длины интервала в пуассоновском потоке

Дисперсия длины интервала в пуассоновском потоке равна:

$$D = \frac{1}{\lambda^2}$$

Доказательство.

$$D = \int_0^{\infty} (x - \mathbb{E})^2 \cdot f(x) dx = \int_0^{\infty} \left(x - \frac{1}{\lambda}\right)^2 \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx$$

$$E\xi^2 = \int_0^{\infty} x^2 \cdot f(x) dx = \int_0^{\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx$$

Проведем интегрирование по частям:

$$u = x^2, du = 2x dx, dv = \lambda e^{-\lambda x}, v = -e^{-\lambda x}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} u dv &= uv - \int_0^{\infty} v du \\ \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx &= \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left(x^2 \cdot (-e^{-\lambda x}) \Big|_0^{\alpha} - \int_0^{\alpha} 2x \cdot (-e^{-\lambda x}) dx \right) = \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left(x^2 \cdot (-e^{-\lambda x}) \Big|_0^{\alpha} + 2 \cdot \frac{1}{\lambda} \int_0^{\alpha} x \cdot \lambda \cdot (e^{-\lambda x}) dx \right) \end{aligned}$$

Видим, что второй предел в скобке является высчитанным на паром мат.ожиданием: $\mathbb{E} = \frac{1}{\lambda}$.

$$E\xi^2 = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left(x^2 \cdot (-e^{-\lambda x}) \Big|_0^{\alpha} + \frac{2}{\lambda^2} \right) = 0 + \frac{2}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda^2}$$

Следовательно, дисперсия равна:

$$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

□

2.9 Случайная фильтрация пуассоновских потоков

Определение 2.9.1. Случайная фильтрация (разрежение) потока с вероятностью p - операция, в результате применения которой каждое требование потока с вероятностью p остается в нем, а с вероятностью $q = 1 - p$ удаляется из него. Эту операцию называют p -преобразованием.

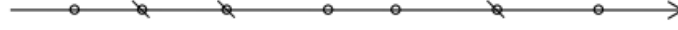


Рис. 9: p -преобразование

Теорема 2.7. Поток, получаемый в результате p -преобразования κ пуассоновскому потоку, также является **пуассоновским**.

Доказательство. Необходимо проверить, что полученный поток обладает тремя свойствами: стационарностью, ординарностью и отсутствием последействия.

1) Вероятностные характеристики преобразованного потока зависят от p и от характеристики исходного потока λ параметра. Так как исходный поток стационарный, то и преобразованный тоже будет стационарным.

2) Если за промежуток времени t из преобразованного потока поступает не менее двух требований, то и из исходного так же поступает не менее двух. Следовательно, вероятности возникновения не мене 2 требований равны:

Структура потока не была изменена, следовательно, раз начальный поток был ординарным, то и преобразованный тоже является ординарным:

$$V'_{\geq 2}(t) \leq V_{\geq 2}(t)$$

3) Для проверки отсутствия последействия рассмотрим $V'_0(t)$. В преобразованном потоке требований нет за время t в том и только том случае, когда их нет и в исходном поток, или и в исходном потоке есть одно требование, но оно удалено, или в исходном потоке есть 2 требования и они удалены. Таким образом:

$$V'_0(t) = V_0(t) + V_1(t)q + V_2(t)q^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} V_k(t) \cdot q^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda t} \cdot q^k = e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t q)^k}{k!} = e^{-\lambda t} \cdot e^{\lambda t q} = e^{-\lambda p t}$$

Мы убедились в отсутствии последствия, а также получили параметр преобразованного потока:

$$V'_0(t) = e^{-\lambda p t}$$

$$\lambda' = \lambda p$$

□

Задача:

По шоссе в одном направлении движется пуассоновский поток машин с интенсивностью $\mu = 2,5$ машины в минуту. Пост ГАИ, находящийся на развилке, для разгрузки дальнейшей ремонтируемой части дороги, каждую машину с вероятностью $\frac{2}{3}$ отправляет в объезд по боковой дороге. Какова вероятность прохождения хотя бы одной машины в течение минуты мимо наблюдателя, стоящего на основной дороге? На боковой дороге?

Решение:

Вероятность удачи $p = \frac{1}{3}$, то есть машина поедет по ремонтной дороге и человек увидит ее в течение минуты хотя бы один раз:

$$V_{\geq 1}(t) = 1 - V_0(t) = 1 - e^{-\lambda p t} = 1 - e^{-2.5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1} \approx 0.56$$

Для наблюдателя, стоящего на второй дороге:

$$V_{\geq 1}(t) = 1 - V_0(t) = 1 - e^{-\lambda p t} = 1 - e^{-2.5 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1} \approx 0.81$$

2.10 Объединение пуассоновских потоков

Рассмотрим другой тип преобразования пуассоновских потоков.

Определение 2.10.1. Объединение потоков - операция объединения нескольких потоков в один поток.

Теорема 2.8. *Если исходные потоки являются пуассоновскими и независимыми друг от друга, то их объединение тоже является пуассоновским потоком.*

Доказательство. Доказательство проведем для двух потоков, после чего методом математической индукции его можно распространить на любое количество потоков.

Необходимо проверить, что полученный поток обладает тремя свойствами: стационарностью, ординарностью и отсутствием последействия.

1) Характеристики объединенного потока зависят только от характеристик объединяемых потоков. Поскольку последние являются стационарными, то стационарным будет и результат их объединения.

2) Для независимых потоков возможность одновременного поступления требования из одного потока и из другого практически нереализуема.

Действительно, из объединенного потока за время t поступает не менее 2-х требований, то либо не менее двух поступает из одного из объединяемых потоков, либо из каждого поступает ровно по одному:

$$V_{\geq 2}(t) \leq V'_{\geq 2}(t) + V''_{\geq 2}(t) + V'_1(t) \cdot V''_1(t)$$

$$\frac{V_{\geq 2}(t)}{t} \leq \frac{V'_{\geq 2}(t)}{t} + \frac{V''_{\geq 2}(t)}{t} + \frac{V'_1(t) \cdot V''_1(t)}{t}$$

Первые два слагаемых стремятся к нулю по определению ординарности, а:

$$\frac{V_{\geq 2}(t)}{t} \leq e^{-t(\lambda' + \lambda'')} t \lambda' \lambda''$$

в пределе $t \rightarrow 0$ дает бесконечно малую, таким образом, объединенный поток является ординарным ($V'_1(t) = o(\sqrt{t})$)

3) Для доказательства отсутствия последействия заметим, что:

$$V_0(t) = V'_0(t) \cdot V''_0(t) = e^{-t(\lambda' + \lambda'')}$$

$$\lambda = \lambda' + \lambda''$$

Для другого доказательства отсутствия последействия, напомним формулу отсутствия последействия (1.8), которую мы доказывали ранее по формуле полной вероятности:

$$\begin{aligned} V_k(t) &= \sum_{n=0}^k V'_n(t) \cdot V''_{k-n}(t) = \sum_{n=0}^k \frac{(\lambda' t)^n}{n!} e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda'' t)^{k-n}}{(k-n)!} e^{-\lambda'' t} = \\ &= \frac{e^{-t(\lambda' + \lambda'')} \cdot t^k}{k!} \cdot \sum_{n=0}^k \frac{k!}{n!(k-n)!} (\lambda')^n \cdot (\lambda'')^{k-n} \end{aligned}$$

Последняя формула является Биномом Ньютона, так как:

$$(\lambda' + \lambda'')^k = \sum_{n=0}^k \frac{k!}{n!(k-n)!} (\lambda')^n \cdot (\lambda'')^{k-n}$$

так что:

$$V_k(t) = \frac{e^{-t(\lambda' + \lambda'')} \cdot t^k}{k!} \cdot (\lambda' + \lambda'')^k = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^k}{k!}$$

Следовательно, получили формулу вероятности для k требований для пуассоновского потока по формуле отсутствия последействия. Объединенный поток обладает тремя свойствам, следовательно, он пуассоновский. \square

2.11 Нестационарные потоки

Определение 2.11.1. Простейшим потоком с возможной нестационарностью называется поток, обладающий свойствами ординарности, отсутствия последействия, и имеющий в каждый момент времени t конечное мгновенное значение параметра $\lambda(t)$.

Очевидно, что пуассоновский поток является стационарным частным случаем потоков этого типа, для пуассоновского потока параметр является величиной постоянной:

$$\lambda(t) = \lambda$$

Простейшие потоки с возможной нестационарностью называют также *нестационарными пуассоновскими потоками*.

2.11.1 Вывод формул для $V_0(t_0, t)$

Найдем вероятности $V_0(t_0, t)$ для потоков этого типа. Рассмотрим два примыкающих друг к другу отрезка времени $[t_0, t_0+t]$ и $[t_0+t, t_0+t+\tau]$.

В силу отсутствия последействия по формуле (1.8):

$$V_0(t_0, t + \tau) = V_0(t_0, t) \cdot V_0(t_0 + t, \tau)$$

Так как $1 - V_0(t) = V_{\geq 1}(t) = \lambda t + o(t)$, то:

$$V_0(t_0 + t, \tau) = 1 - \lambda(t_0 + t) \cdot \tau + o(\tau)$$

Тогда переходя к пределу при $\tau \rightarrow 0$ получаем:

$$V_0(t_0, t + \tau) = V_0(t_0, t) \cdot (1 - \lambda(t_0 + t) \cdot \tau + o(\tau))$$

$$\frac{V_0(t_0, t + \tau) - V_0(t_0, t)}{\tau} = -\lambda(t_0 + t)V_0(t_0, t) + \frac{o(\tau)}{\tau}$$

$$\frac{\partial V_0(t_0, t)}{\partial t} = -\lambda(t_0 + t)V_0(t_0, t)$$

$$\frac{\partial \ln V_0(t_0, t)}{\partial t} = -\lambda(t_0 + t)$$

Проинтегрируем обе части на отрезке $[0, t]$

$$\ln V_0(t_0, t) - \ln V_0(t_0, 0) = - \int_0^t \lambda(t_0 + y) dy$$

Вероятность отсутствия требования равна 1, следовательно:

$$V_0(t_0, 0) = 1 \Rightarrow \ln V_0(t_0, 0) = 0$$

Интеграл зависит от t_0 и t . Введем обозначения:

$$\Lambda(t_0, t) = \int_0^t \lambda(t_0 + y) dy$$

Произведем замену переменной:

$$\Lambda(t_0, t) = \int_{t_0}^{t_0+t} \lambda(z) dz$$

$$\ln V_0(t_0, t) = - \int_0^t \lambda(t_0 + y) dy = -\Lambda(t_0, t)$$

$$V_0(t_0, t) = e^{-\Lambda(t_0, t)}$$

Так как пуассоновские потоки являются частным случае потока рассматриваемого типа, то формула должна оказаться обобщением соответствующей формулы $V_0(t) = e^{-\lambda t}$.

Чтобы убедиться в этом рассмотрим интегральное среднее функции $\lambda(z)$ на отрезке $[t_0, t_0 + t]$:

$$\bar{\Lambda}(t_0, t) = \frac{1}{t} \int_{t_0}^{t_0+t} \lambda(z) dz = \frac{1}{t} \Lambda(t_0, t)$$

Эта средняя величина равна высоте такого прямоугольника, построенного на основании $[t_0, t_0 + t]$, площадь которого равна площади подграфика $\lambda(z)$ с тем же основанием ($\lim_{t \rightarrow 0} \bar{\Lambda}(t_0, t) = \lambda(t_0)$).

В частности, если функция $\lambda(z)$ является константой $\lambda(z) = \lambda$, то ее подграфик представляет прямоугольник и ее значение (высота пря-

моугольника) совпадает с интегральным средним. Таким образом, для потока с постоянным параметром:

$$V_0(t_0, t) = e^{-\bar{\Lambda}(t_0, t)t} = e^{-\lambda t}$$

Вероятность $V_0(t_0, t)$ не зависит от t_0 и ее обозначим за $V_0(t)$. Это то, что мы и хотели показать.

Вся нестационарность, имеющаяся в потоках рассматриваемого здесь типа, может быть выражена через нестационарность параметра. Если параметр постоянный, то и поток стационарный. Это обстоятельство позволяет для проверки на стационарность ограничиться проверкой неименности его параметра (или его интенсивности), как увидим даже.

2.11.2 Вывод дифференциальных уравнений $V_k(t_0, t)$

Выведем формулы для вероятностей $V_k(t_0, t)$.

Доказательство. По формуле отсутствия последствия:

$$V_k(t_0, t + \tau) = \sum_{m=0}^k V_m(t_0, t) \cdot V_{k-m}(t_0 + t, \tau)$$

$$V_k(t_0, t + \tau) = \sum_{m=0}^{k-2} V_m(t_0, t) \cdot V_{k-m}(t_0 + t, \tau) + V_1(t_0 + t, \tau) \cdot V_{k-1}(t_0, t) + V_0(t_0 + t, \tau) \cdot V_k(t_0, t)$$

По условию ординарности (1.5):

$$V_{\geq 2}(t_0 + t, \tau) = o(\tau)$$

Так как $1 - V_0(t) = V_{\geq 1}(t) = \lambda t + o(t)$, то:

$$V_0(t_0 + t, \tau) = 1 - \lambda(t_0 + t) \cdot \tau + o(\tau)$$

и

$$V_1(t_0 + t, \tau) = 1 - V_0(t_0 + t, \tau) - V_{\geq 2}(t_0 + t, \tau) = \lambda(t_0 + t) \cdot \tau + o(\tau)$$

то приведем к другому виду:

$$V_k(t_0, t + \tau) = o(\tau) + (\lambda(t_0 + t) \cdot \tau + o(\tau)) \cdot V_{k-1}(t_0, t) + (1 - \lambda(t_0 + t) \cdot \tau + o(\tau)) \cdot V_k(t_0, t)$$

так как вероятность возникновения больше 2 требований стремится к 0 при $t \rightarrow 0$ и при этом существенно быстрее, чем сама длина отрезка t .

Преобразуем данное выражение привычным нам способом:

$$\frac{V_k(t_0, t + \tau) - V_k(t_0, t)}{\tau} = -\lambda(t_0 + t) \cdot (V_k(t_0, t) - V_{k-1}(t_0, t)) + \frac{o(\tau)}{\tau}$$

При переходе к пределу при $\tau \rightarrow 0$:

$$\frac{\partial V_k(t_0, t)}{\partial t} = -\lambda(t_0 + t) \cdot (V_k(t_0, t) - V_{k-1}(t_0, t))$$

Это уравнение можно рассматривать как запись бесконечной системы уравнений, каждое из которых соответствует своему конкретному значению k при $k \geq 2$, но по аналогичным рассуждениям оно верно и для $k \geq 0$, если положить $V_{-1}(t_0, t) \equiv 0$.

2.11.3 Решение дифференциальных уравнений $V_k(t_0, t)$

Для решения системы введем производящую функцию:

$$f(t_0, t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} V_k(t_0, t) \cdot x^k$$

Умножим левую и правую часть на x^k и просуммируем получившиеся равенства по всем k . Получаем:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\partial V_k(t_0, t)}{\partial t} x^k = -\lambda(t_0 + t) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} V_k(t_0, t) x^k - \sum_{k=0}^{\infty} V_{k-1}(t_0, t) x^k \right)$$

Преобразуем в дифференциальное уравнение относительно функции f :

$$\frac{\partial f(t_0, t, x)}{\partial t} = -\lambda(t_0 + t)(f(t_0, t, x) - x \cdot f(t_0, t, x))$$

$$\frac{\partial \ln f(t_0, t, x)}{\partial t} = -\lambda(t_0 + t)(1 - x)$$

Проинтегрируем обе части на отрезке $[0, t]$, получаем:

$$\ln f(t_0, t, x) - \ln f(t_0, 0, x) = - \int_0^t \lambda(t_0 + y) dy (1 - x) = -\Lambda(t_0, t)(1 - x)$$

$$f(t_0, t, x) = e^{-\Lambda(t_0, t)(1-x)} = e^{-\Lambda(t_0, t)} \cdot e^{\Lambda(t_0, t)x}$$

Разложим в ряд экспоненту:

$$e^{\Lambda(t_0, t)x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\Lambda(t_0, t)x)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\Lambda(t_0, t))^k}{k!} \cdot x^k$$

Подставим в формулу для производящей функции:

$$f(t_0, t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} V_k(t_0, t) \cdot x^k = e^{-\Lambda(t_0, t)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\Lambda(t_0, t))^k}{k!} \cdot x^k$$

$$V_k(t_0, t) = \frac{(\Lambda(t_0, t))^k}{k!} \cdot e^{-\Lambda(t_0, t)}$$

где

$$\Lambda(t_0, t) = \int_0^t \lambda(t_0 + y) dy = \int_{t_0}^{t_0+t} \lambda(z) dz$$

□

Приведенные рассуждения показывают, что данная формула является обобщением формулы для пуассоновских потоков.

2.11.4 Мгновенные параметр и интенсивность нестационарного потока, их связь

Теорема 2.9. *Мгновенная интенсивность нестационарного простейшего потока $\mu(t_0)$ равна мгновенному значению параметра $\lambda(t_0)$:*

$$\mu(t_0) = \lambda(t_0)$$

Доказательство. Проведем следующую цепочку преобразований:

$$\begin{aligned} E(t_0, t) &= \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot V_k(t_0, t) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot V_k(t_0, t) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{(\Lambda(t_0, t))^k}{k!} \cdot e^{-\Lambda(t_0, t)} = \\ &= e^{-\Lambda(t_0, t)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\Lambda(t_0, t))^k}{(k-1)!} = e^{-\Lambda(t_0, t)} \cdot \Lambda(t_0, t) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\Lambda(t_0, t))^k}{k!} = \\ &= e^{-\Lambda(t_0, t)} \cdot \Lambda(t_0, t) \cdot e^{\Lambda(t_0, t)} = \Lambda(t_0, t) \end{aligned}$$

На основе доказанного предела:

$$\mu(t_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{E(t_0, t)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Lambda(t_0, t)}{t} = \lambda(t_0)$$

Тем самым равенство доказано. Оно является обобщением равенства $\mu = \lambda$ на случай простейшего потока с возможной нестационарностью. \square

2.12 Неординарные потоки. Формулы для $V_k(t)$ для начальных k

Определение 2.12.1. Простейший поток с возможной неординарностью - поток, обладающий свойствами стационарности и отсутствия последовательности. Требования могут поступать не по одному, а пакетами.

Наряду с потоком требований следует рассматривать *поток пакетов*, то есть новый поток, требования которого соответствуют пакетам требований исходного потока. В пакет объединяются все требования, поступающие одновременно.

Таким образом, несколько пакетов, поступивших одновременно, объединяются по определению в единый пакет, так что поток пакетов является ординарным.

Вероятность поступления 2-х или большего числа пакетов за промежуток времени t является величиной, бесконечно малой по отношению к t .

Определение 2.12.2. Вероятность $V_0(t)$ - вероятность отсутствия пакетов, то есть вероятность отсутствия требований определяется так же, как и для пуассоновских потоков:

$$V_0(t) = e^{-\lambda t} \quad (10.1)$$

так как при выводе этой формулы мы не пользовались ординарностью.

Параметр потока требования равен параметру потока пакетов.

Можно доказать, что при любом $k \geq 1$ существует предел:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{V_k(t)}{V_{\geq 1}(t)} = p_k$$

Это выражение является условной вероятностью - вероятность возникновения k требований за время t при учете, что за это время t поступает хотя бы одно требование. При $t \rightarrow 0$ отрезок t стягивается в точку, так что в пределе мы получаем вероятность поступления k требований в некоторый момент времени, если в него вообще поступают требования. Требования образуют пакет требований

Таким образом p_k - вероятность того, что в поступившем пакете содержится ровно k требований.

Рассмотрим отрезок τ и примыкающий к нему t :

$$V_k(\tau + t) = \sum_{m=0}^k V_m(\tau) \cdot V_{k-m}(t)$$

Так как $1 - V_0(t) = V_{\geq 1}(t) = \lambda t + o(t) \Rightarrow V_0(t) = 1 - \lambda t + o(t)$, то при $k \geq 1$:

$$V_k(\tau + t) = V_0(\tau) \cdot V_k(t) + \sum_{m=1}^k V_m(\tau) \cdot V_{k-m}(t) = (1 - \lambda \tau + o(\tau)) \cdot V_k(t) + \sum_{m=1}^k V_m(\tau) \cdot V_{k-m}(t)$$

$$\frac{V_k(\tau + t) - V_k(t)}{\tau} = -\lambda V_k(t) + \sum_{m=1}^k \frac{V_m(\tau)}{\tau} \cdot V_{k-m}(t) + \frac{o(\tau)}{\tau}$$

Заметим, что по (2.18):

$$\frac{V_m(\tau)}{\tau} = \frac{V_m(\tau)}{V_{\geq 1}(\tau)} \cdot \frac{V_{\geq 1}(t)}{\tau} \xrightarrow{t \rightarrow 0} p_m \cdot \alpha$$

Тогда мы получаем дифференциальное уравнение при $t \rightarrow 0$:

$$V'_k(t) = -\lambda \cdot V_k(t) + \lambda \cdot \sum_{m=1}^k p_m \cdot V_{k-m}(t)$$

Это уравнение можно рассматривать как систему уравнений, каждое из которых соответствует своему значению k для $k \geq 1$. Так как по 10.1:

$$V_0(t) = e^{-\lambda t}$$

то

$$V'_0(t) = -\lambda e^{-\lambda t} = -\lambda V_0(t)$$

Если положить в дифференциальном полученном уравнении $k = 0$, то оно будет выполнено, хоть и неосмысленно для суммы, поэтому будем считать, что оно выполнено $\forall k \geq 0$.

Приступим к решению данного дифференциального уравнения:

$$V'_k(t) = -\lambda \cdot V_k(t) + \lambda \cdot \sum_{m=1}^k p_m \cdot V_{k-m}(t)$$

Доказательство. Введем производящую функцию числа требований, по-

ступающих за время t :

$$q(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} V_k(t) \cdot x^k$$

и производящую функцию числа требований, содержащихся в пакете:

$$h(x) = \sum_{m=1}^{\infty} p_m \cdot x^m$$

Умножим дифференциальное уравнение на x^k :

$$V'_k(t)x^k = -\lambda \cdot V_k(t)x^k + x^k \lambda \cdot \sum_{m=1}^k p_m \cdot V_{k-m}(t)$$

просуммируем по $k = 0, \dots, \infty$ правые и левые части:

$$\sum_{k=0}^{\infty} V'_k(t)x^k = -\lambda \sum_{k=0}^{\infty} V_k(t)x^k + \lambda \sum_{k=0}^{\infty} \left(x^k \cdot \sum_{m=1}^k p_m \cdot V_{k-m}(t) \right)$$

Рассмотрим коэффициент при p_m , получившийся в правой части после приведения подобных членов:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \left(x^k \cdot \sum_{m=1}^k p_m \cdot V_{k-m}(t) \right) &= \sum_{m=1}^{\infty} \left(p_m \cdot \sum_{k=m}^{\infty} V_{k-m}(t) \cdot x^k \right) = \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \left(p_m \cdot \sum_{n=0}^{\infty} V_n(t) \cdot x^{n+m} \right) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(p_m x^m \cdot \sum_{n=0}^{\infty} V_n(t) \cdot x^n \right) = q(t, x) \cdot h(x) \end{aligned}$$

Тогда перобразуем вышестоящее дифференциальное уравнение на языке производящих функций:

$$\frac{\partial q(t, x)}{\partial t} = -\lambda \cdot q(t, x) + \lambda \cdot q(t, x) \cdot h(x)$$

Прологарифмировав получим:

$$\frac{\partial \ln q(t, x)}{\partial t} = \lambda(h(x) - 1)(?)$$

Проинтегрируем обе части на отрезке $[0, t]$ и , так как вероятность поступления хотя бы одного требования в момент времени на отрезке вре-

мени длины 0 равна 0, то:

$$\ln q(t, x) - \ln q(0, x) = \lambda \cdot (h(x) - 1) \cdot t$$

$$q(t, x) = e^{\lambda \cdot (h(x) - 1) \cdot t}$$

Мы нашли производящую функцию числа требований, поступающих за время t :

$$q(t, x) = e^{\lambda \cdot (h(x) - 1) \cdot t} = e^{-\lambda t} e^{\lambda t \cdot h(x)} = e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t h(x))^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \left(\sum_{m=1}^{\infty} p_m \cdot x^m \right)^n$$

Мы нашли производящую функцию, теперь найдем оставшийся коэффициент x^k , чтобы выразить все.

Зафиксируем k и найдем сначала коэффициент при x^k , который получается в выражении:

$$\left(\sum_{m=1}^{\infty} p_m \cdot x^m \right)^n$$

после возведения в степень (умножения суммы на себя n раз и приведения подобных членов). Обозначим этот коэффициент посредством $Q_k^{(n)}$.

При $n = 0$ выражение обращается в 1, так что:

$$Q_k^{(0)} = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \geq 1 \end{cases}$$

При произвольном $n \geq 1$:

$$Q_k^{(n)} = \begin{cases} 0, & k \leq n - 1 \\ \sum_{\sum_{j=1}^n m_j = k} \prod_{j=1}^n p_{m_j}, & k \geq n \end{cases}$$

Данное равенство верно для любых $n, k \geq 0$. При фиксированном k и растущем n лишь конечное число коэффициентов отлично от нуля.

Тогда вероятности $V_k(t)$ можно выразить через $Q_k^{(n)}$:

$$V_k(t) = e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \cdot Q_k^{(n)} = e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^k \frac{(\lambda t)^n}{n!} \cdot Q_k^{(n)}$$

То есть общий вид формулы:

$$V_k(t) = e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^k \left(\frac{(\lambda t)^n}{n!} \cdot \sum_{\sum_{j=1}^n m_j = k} \prod_{j=1}^n p_{m_j} \right)$$

Каждое слагаемое внешней суммы при том или ином значении n соответствует поступлению определенного числа пакетов, каждое слагаемое само распадается в сумму (внутренняя сумма), слагаемые которой соответствуют возможным распределениям k требований по пакетам. \square

Вывод: вероятностные характеристики простейшего потока с возможной неординарностью полностью определяются значением параметра λ и вероятностями p_m того, что в пакете содержится m требований.

При $k = 0$:

$$V_0(t) = e^{-\lambda t}$$

Слагаемые в формулах имеют естественную интерпретацию. Поступление одного требования за время t возможно, когда за это время поступает один пакет и в нем содержится 1 требование.

При $k = 1$:

$$V_1(t) = e^{-\lambda t} \cdot \lambda t \cdot p_1$$

Поступление двух требований за время t означает либо поступление одного пакета с двумя требованиями, либо двух пакетов с одним требованием в каждом. Первое слагаемое - вероятность поступления одного пакета на вероятность p_2 , что в этом пакете содержится два требования, второе - вероятность поступления двух пакетов на вероятность p_1^2 того, что в каждом из них содержится по одному требованию.

При $k = 2$:

$$V_2(t) = e^{-\lambda t} \cdot \lambda t \cdot p_2 + e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^2}{2!} \cdot p_1^2$$

2.13 Параметр и интенсивность неординарного потока

Найдем интенсивность $\bar{\mu}$ требований простейшего потока с возможной неординарностью. Обозначим посредством c - среднее число требований в пакете:

$$c = \sum_{i=1}^{\infty} m \cdot p_m \geq \sum_{i=1}^{\infty} p_m = 1$$

μ - интенсивность пуассоновского потока.

Теорема 2.10. Верно равенство $\bar{\mu} = c \cdot \mu$

Доказательство. Зафиксируем отрезок времени t . Если за время t поступает n пакетов, то среднее число требований составляет cn ($E(c\xi) = cE\xi$). Вероятность поступления n пакетов равна:

$$\frac{(\lambda t)^n}{n!} \cdot e^{-\lambda t}$$

Следовательно, среднее число требований за время t есть вероятность сумма вероятностей получения n пакетов на среднее значение числа требований в n пакетах, то есть:

$$\bar{\mu} \cdot t = \sum_{n=1}^{\infty} c \cdot n \cdot \frac{(\lambda t)^n}{n!} \cdot e^{-\lambda t} = c\mu t$$

$$\bar{\mu} = c \cdot \mu$$

□

Равенство $\bar{\mu} = \lambda = \mu$ происходит при $c = 1$, а такое возможно, если вероятность 1 требования в пакете равна 1, а все а вероятность другого любого числа требования равно 0 ($p_1 = 1, p_m = 0 \quad m \geq 2$), то есть когда в каждом пакете содержится ровно одно требование и, тем самым, поток является ординарным и, следовательно, пуассоновским.

Утверждение: равенство интенсивности и параметра равносильно ординарности потока.

Мы распространим это утверждение на случай потоков с последствием. Если поток является неординарным, то его интенсивность строго больше параметра.

Теорема 2.11. Если $p_1 = 1, p_m = 0 \quad m \geq 2$ условие выполняется, то формулы для неординарного потока переходят в формулы для пуассоновского потока.

Доказательство. Действительно, при $n < k$ сумма, равная k , больше, чем число слагаемых n . Следовательно, хотя бы для одного m_j выполняется неравенство $m_j \geq 2$, что обращает в 0 каждое произведение $n < k$.

При $n = k$ сумма $\sum_{j=1}^n m_j$ равна числу составляющих слагаемых. Это возможно, если $m_j = 1$. Тогда внутренняя сумма состоит из одного слагаемого, имеющего вид произведения, все сомножители которого равны 1. Следовательно, вся внутренняя сумма равна 1, а рассматриваемое слагаемое внешней суммы равно:

$$\frac{(\lambda t)^k}{n!} = \frac{(\lambda t)^k}{k!}$$

Таким образом, получается, что при условии $p_1 = 1, p_m = 0 \quad m \geq 2$ формула преобразуется в:

$$V_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

совпадающую с формулами вероятности пуассоновского потока, что и требовалось доказать. \square

2.14 Потоки с последствием. Функции Пальма-Хинчина.

Вывод системы дифференциальных уравнений для $V_k(t_0, t)$

Определение 2.14.1. Простеший поток с возможным последствием - поток, обладающий свойствами стационарности и ординарности, но не обладающий третьим свойством пуассоновского потока.

Условная вероятность поступления некоторого числа требований на t , вычисленная при предположениях о предыстории потока, может отличаться от безусловной вероятности.

Рассмотрим промежуток времени τ и примыкающий к нему справа промежуток t . Пусть $h_k(\tau, t)$ - вероятность того, что за время τ поступит хотя бы одно требование и за t поступит ровно k требований. Тогда:

$$\frac{h_k(\tau, t)}{V_{\geq 1}(\tau)}$$

является условной вероятностью - вероятностью поступления k требований на промежутке времени t при условии, что на τ поступает хотя бы одно требование, действительно:

$$V_k(t|\tau) = \frac{h_k(\tau, t)}{V_{\geq 1}(\tau)}$$

Если бы события, связанные с промежутками τ и t были независимыми, то эта дробь оказалась бы равна вероятности $V_k(t)$ по определению независимости. Но мы такой независимости не предполагаем.

Определение 2.14.2. Функция Пальма-Хинчина - предел следующего выражения:

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{h_k(\tau, t)}{V_{\geq 1}(\tau)} = \varphi_k(t)$$

- вероятность поступления k требований за время t при условии, что в начальный момент этого промежутка t поступает хотя бы одно (по ординарности одно) требование.

Рассмотрим событие, состоящее в том, что за время $\tau+t$ поступает k требований. Обозначим посредством n_1 число требований, поступивших

на промежутке времени τ , n_2 - на t . Тогда:

$$V_k(\tau + t) = \sum_{m=0}^k P(n_1 = m, n_2 = k - m)$$

Вероятность того, что $P(n_2 = k)$ можно разбить хитрым способом:

$$P(n_2 = k) = P(n_1 = 0, n_2 = k) + P(n_1 \geq 1, n_2 = k)$$

тогда

$$P(n_1 = 0, n_2 = k) = P(n_2 = k) - P(n_1 \geq 1, n_2 = k) = V_k(t) - h_k(\tau, t)$$

Аналогично:

$$P(n_1 = 1, n_2 = k-1) = P(n_1 \geq 1, n_2 = k-1) - P(n_1 \geq 2, n_2 = k-1) = h_{k-1}(\tau, t) + o(\tau)$$

В силу ординарности потока выполнено условие:

$$\sum_{m=2}^k P(n_1 = m, n_2 = k - m) = o(\tau)$$

так как вероятность наступления хотя бы двух требований на отрезке стремится к нулю при $\tau \rightarrow 0$.

Соответственно, условие можно переписать при $k \geq 1$:

$$\begin{aligned} V_k(\tau + t) &= \sum_{m=0}^k P(n_1 = m, n_2 = k - m) = P(n_1 = 0, n_2 = k) + P(n_1 = 1, n_2 = k - 1) = \\ &= V_k(t) - h_k(\tau, t) + h_{k-1}(\tau, t) + o(\tau) \end{aligned}$$

Откуда:

$$\frac{V_k(\tau + t) - V_k(t)}{\tau} = -\frac{h_k(\tau, t)}{\tau} + \frac{h_{k-1}(\tau, t)}{\tau} + \frac{o(\tau)}{\tau}$$

Заметим, что:

$$\frac{h(\tau, t)}{\tau} = \frac{h(\tau, t)}{V_{\geq 1}(\tau)} \cdot \frac{V_{\geq 1}(\tau)}{\tau} \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} \varphi(t)\lambda$$

Получаем дифференциальное уравнение:

$$V'_k(t) = -\lambda(\varphi_k(t) - \varphi_{k-1}(t))$$

Это уравнение рассматривается как система уравнения, каждое из которых соответствует k имеет для $k = 0$ не осмысленную, но верную подстановку:

$$V'_0(t) = -\lambda \cdot \varphi_0(t)$$

то есть данное уравнение верно для $k \geq 0$ при $\varphi_{-1} \equiv 0$

2.14.1 Решение системы дифференциальных уравнений. Вывод формул для $V_k(t)$

Чтобы решить, проинтегрируем уравнение на отрезке $[0; t]$:

$$V_k(t) - V_0(t) = -\lambda \int_0^t (\varphi_k(x) - \varphi_{k-1}(x)) dx$$

Вероятность наступления хотя бы одного требования в точке равна 0, а вероятность отсутствия требований равна 1, следовательно и так как $\varphi_{-1} \equiv 0$, то при $k \geq 1$:

$$V_k(t) = -\lambda \int_0^t (\varphi_k(x) - \varphi_{k-1}(x)) dx$$

а при $k = 0$:

$$V_0(t) = 1 - \lambda \int_0^t \varphi_0(x) dx$$

Мы выразили безусловные вероятности через условные и тем самым получили искомые формулы для $V_k(t)$.

Формулы для вероятностей поступления не более k требований за время t :

$$V_{\leq k}(t) = \sum_{n=0}^k V_n(t) = 1 - \lambda \cdot \int_0^t \varphi_k(x) dx$$

Дифференцируя, получаем функцию Пальма-Хинчина через без-

условные вероятности:

$$\varphi_k(t) = -\frac{V'_{\leq k}}{\lambda}$$

2.14.2 Параметр и интенсивность потока с последствием

Теорема 2.12. *Параметр для простейших потоков с возможным последствием λ равен интенсивности μ*

Доказательство. Было доказано, что для стационарных потоков $\mu \geq \lambda$. Следовательно, нужно доказать обратное неравенство:

$$\mu \leq \lambda$$

для потоков данного типа.

$$\begin{aligned} \mu t &= \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot V_k(t) = -\lambda \sum_{k=1}^{\infty} k \int_0^t (\varphi_k(x) - \varphi_{k-1}(x)) dx = \\ &= -\lambda \left(\sum_{k=1}^{\infty} k \int_0^t \varphi_k(x) dx - \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \int_0^t \varphi_k(x) dx \right) = \lambda \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^t \varphi_k(x) dx \end{aligned}$$

В конечных суммах операции суммирования и интегрирования можно менять местами, кроме того:

$$\sum_{k=0}^n \varphi_k(x) = \varphi_{\leq n}(x) \leq 1$$

так как это есть вероятность. Следовательно:

$$\sum_{k=0}^n \int_0^t \varphi_k(x) dx = \int_0^t \sum_{k=0}^n \varphi_k(x) dx \leq \int_0^t 1 dx = t$$

При $n \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \mu t &= \lambda \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^t \varphi_k(x) dx \leq \lambda t \\ \mu &\leq \lambda \end{aligned}$$

Тем самым доказывая теорему. □

Прежде мы доказывали, что равенство интенсивности и параметра влечет условие ординарности. Теперь мы доказали обратное утверждение. Для стационарных потоков с конечной интенсивностью эти два условия равносильны.

2.15 Регулярные потоки. Вывод формул для $V_k(t)$

Определение 2.15.1. Регулярным называется поток, если события в потоке следуют один за другим через строгие равные интервалы времени a .

Регулярный поток является *ординарным, стационарным* и потоком *с последствием*.

Регулярный поток отнюдь не является простейшим, так как в нем ярко выражено последствие: моменты появления следующих друг за другом событий связаны жесткой функциональной зависимостью. Именно из-за наличия последствия анализ процессов, протекающих в системе массового обслуживания при регулярном потоке заявок, гораздо сложнее, чем при простейшем.

Интенсивность потока равна $\lambda = \frac{1}{a}$.

Попытаемся вывести формулы $V_k(t)$.

Заметим, что функция Пальма-Хинчина для $t \leq a$ равна 1 - вероятность поступления 0 требований за t , если в начальный момент промежутка t поступает хотя бы одно (по ординарности) требование:

$$\varphi_0(t) = \begin{cases} 1, & t < a \\ 0, & t \geq a \end{cases}$$

Для функции $\varphi_k(t)$:

$$\varphi_k(t) = \begin{cases} 1, & ak \leq t \leq a(k+1) \\ 0, & t < ak, t > a(k+1) \end{cases}$$

$$V_k(t) = -\lambda \int_0^t (\varphi_k(x) - \varphi_{k-1}(x)) dx$$

Тогда формулы приобретают следующий вид:

$$V_k(t) = \begin{cases} -\lambda(-(t - a(k-1))) = \frac{t}{a} - (k-1) & t \in [a(k-1), a-k] \\ -\lambda(t - a(k+1)) = (k+1) - \frac{t}{a} & t \in [ak, a(k+1)] \\ 0, & t < a(k-1), t > a(k+1) \end{cases}$$

2.16 Марковские цепи

Предположим, что некоторый объект S в каждый момент времени находится в одном из состояний из данного конечного или счетного множества состояний.

Пусть смена состояний наблюдается в определенные дискретные моменты времени. Функционирование объекта S заключается для нас в смене состояний. Переход из одного состояния в другое осуществляется на вероятностном языке. Предположим, что вероятность такого перехода *не зависит* от того, каким образом (через какую последовательность состояний) объект S попал в первое из двух рассматриваемых состояний).

Определение 2.16.1. Если вероятность перехода не зависит каким образом объект S попал в первое из двух рассматриваемых состояний, то в таком случае говорят, что функционирование S описывается **цепью Маркова**.

Определение 2.16.2. Состояния S называются **состояниями цепи Маркова**.

Определение 2.16.3. Вероятность перехода из состояния A в состояние B обозначается посредством:

$$P_{AB} = P(A \rightarrow B)$$

и является условной вероятностью оказаться в состоянии B при условии, что предыдущим состоянием было A .

Определение 2.16.4. Свойство независимости от истории называется **марковским свойством**, то есть условная вероятность не зависит от истории объекта S , не зависит от траектории, по которой объект пришел в состояние B .

2.16.1 Матрица вероятностей переходов

Состояния нумеруются целыми числами, p_{ij} - вероятность перехода. Иногда состояния удобно обозначать наборами целых чисел, в этом случае вероятности перехода записывают в виде:

$$P_{(i_1, \dots, i_k)(j_1, \dots, j_k)}$$

Определение 2.16.5. Совокупность всех вероятностей записывается в виде матрицы:

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} \end{bmatrix}$$

В соответствии с конечностью или бесконечностью числа состояний и сама матрица P является конечной или бесконечной.

Определение 2.16.6. Данная матрица называется **матрицей вероятностей переходов** (*переходной матрицей*)

Свойства матрицы вероятностей переходов:

- $0 \leq p_{ij} \leq 1$ - обычное свойство вероятностей
- $\sum_j p_{ij} = 1$ - сумма элементов любой строки равна 1, соответствует тому, что объект S из любого состояния i обязательно переходит в какое-то состояние j (может перейти и в прежнее i).

Определение 2.16.7. Всякая матрица, элементы которой удовлетворяют данным двум свойствам, называется **стохастической матрицей** и ее можно рассматривать как переходную матрицу некоторой марковской цепи.

Для того, чтобы решить задачу о функционировании объекта с помощью теории марковских цепей, требуется правильно ввести состояния объекта. Состояния должны быть определены таким образом, чтобы, с одной стороны, информация о состояниях объекта помогала нам решить задачу, а с другой стороны, - чтобы переходы из состояния в состояние обладали марковским свойством.

2.16.2 Вероятности перехода за несколько шагов

Матрицы и графы

В задачах, связанных с марковскими цепями, удобным оказывается язык теории графов. Вершины графа соответствуют *состояниям цепи*, а *ориентированные дуги* - возможным *переходам* из одного состояния в другое.

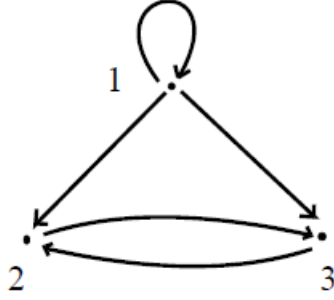


Рис. 10 Представление марковской цепи в виде графа

На рисунке 10 граф соответствует цепи с тремя состояниями с ненулевыми следующими вероятностями, составляющие следующую матрицу такой цепи:

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ 0 & 0 & p_{23} \\ 0 & p_{32} & 0 \end{bmatrix}$$

Около дуг графа пишут значения вероятностей соответствующих переходов, вся информация, содержащаяся в матрице, переносится на граф.

Мы рассматривали вероятности перехода за 1 шаг. Получи формулы для вероятностей перехода за несколько шагов.

Переход из состояния i в состояние j за два шага осуществляется следующим образом: за 1 шаг переходим из i в k (промежуточное состояние), а потом за второй шаг из k в j . таким образом, вероятность $p_{ij}^{(2)}$ перехода из i в j за 2шага равна:

$$p_{ij}^{(2)} = \sum_k p_{ik} \cdot p_{kj}$$

где суммирование ведется по всем состояниям k .

В общем случае переход из i в j за m шагов можно разбить на два этапа: за первые t шагов $0 < t < m$ осуществляется переход из i в некоторое промежуточное состояние k , затем за оставшиеся $m - t$ шагов переход из k в j . Вероятность $p_{ij}^{(m)}$ перехода из i в j за m шагов:

$$p_{ij}^{(m)} = \sum_k p_{ik}^t \cdot p_{kj}^{(m-t)}$$

При $t = 1$ и $t = m - 1$:

$$p_{ij}^{(m)} = \sum_k p_{ik} \cdot p_{kj}^{(m-1)}$$

$$p_{ij}^{(m)} = \sum_k p_{ik}^{m-1} \cdot p_{kj}$$

Эти формулы позволяют найти вероятности перехода за любое число шагов, если предварительно определены вероятности перехода за меньшее число шагов.

Пример:

Дана матрица P цепи Маркова с тремя состояниями:

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Найти вероятность $p_{32}^{(3)}$, то есть вероятность перехода из 3-его во 2-е состояние за 3 шага.

Доказательство. Решение

Согласно формуле для $t = 1$ при $m = 3$:

$$p_{32}^{(3)} = \sum_{k=1}^3 p_{3k} \cdot p_{k2}^{(2)} = p_{31} \cdot p_{12}^{(2)} + p_{32} \cdot p_{22}^{(2)} + p_{33} \cdot p_{32}^{(2)}$$

Вероятности для второго шага:

$$p_{12}^{(2)} = \sum_{k=1}^3 p_{1k} \cdot p_{k2} = p_{11} \cdot p_{12} + p_{12} \cdot p_{22} + p_{13} \cdot p_{32} = \frac{5}{12}$$

$$p_{22}^{(2)} = \sum_{k=1}^3 p_{2k} \cdot p_{k2} = p_{21} \cdot p_{12} + p_{22} \cdot p_{22} + p_{23} \cdot p_{32} = \frac{4}{9}$$

$$p_{32}^{(2)} = \sum_{k=1}^3 p_{3k} \cdot p_{k2} = p_{31} \cdot p_{12} + p_{32} \cdot p_{22} + p_{33} \cdot p_{32} = \frac{5}{12}$$

Следовательно:

$$p_{32}^{(3)} = p_{31} \cdot p_{12}^{(2)} + p_{32} \cdot p_{22}^{(2)} + p_{33} \cdot p_{32}^{(2)} = \frac{31}{72}$$

□

При фиксированном значении m запись массива вероятностей $p_{ij}^{(m)}$ можно оформить в виде матрицы:

$$p^{(m)} = \begin{bmatrix} p_{11}^{(m)} & p_{12}^{(m)} & \cdots & p_{1n}^{(m)} \\ p_{21}^{(m)} & p_{22}^{(m)} & \cdots & p_{2n}^{(m)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1}^{(m)} & p_{n2}^{(m)} & \cdots & p_{nn}^{(m)} \end{bmatrix}$$

В этих обозначениях исходная матрица P совпадает с $P^{(1)}$. Согласно правилу умножения и формуле 1.8 вероятности за два шага, которая является ничем иным, как представление элемента при перемножении матриц при фиксированной строке и столбце, соответствующие индексу элементами. Поэтому, элементы матрицы $P^{(2)}$ совпадают с соответствующими элементами произведения матрицы P на себя, так что $P^{(2)} = P^2$.

Замечание 2.1. Верно следующее равенство:

$$P^{(m)} = P^m$$

Утв: матрица вероятностей перехода за m шагов является стохастической.

2.16.3 Финальные вероятности состояний и их вычисление

Мы рассмотрели вероятности перехода из данного исходного состояния. Предположим, что исходное состояние нам не известно.

Пусть дано распределение вероятностей исходного состояния, то есть набор (стохастический вектор)

$$Q = (q_1, \dots, q_n)$$

где q_j - вероятность того, что исходным является j -е.

Свойства данного стохастического набора:

- $0 \leq q_j \leq 1$
- $\sum_j q_j = 1$

Случай, когда исходное состояние полностью определено, соответствует тому, что одна из компонент вектора Q равна 1, а остальные равны 0.

Пусть $q_j^{(m)}$ - вероятность того, что объект S через m шагов после начала функционирования окажется в j -м состоянии, если его начальное состояние задано вектором (1.3), а вероятность перехода - матрицей (1.2). Набор таких вероятностей обозначим посредством Q^m :

$$Q^{(m)} = (q_1^{(m)}, q_2^{(m)}, \dots, q_n^{(m)})$$

при этом $Q = Q^{(0)}$ (0 шагов).

Нетрудно видеть, что:

$$q_j^{(m)} = \sum_{k=1}^n q_k p_{kj}^{(m)}$$

то есть вероятность того, на m -м шаге окажется в j -м состоянии (вектор вероятностей q на столбец вероятности j).

Откуда следует, что:

$$Q^{(m)} = Q \cdot P^{(m)} = Q \cdot P^m$$

Пример

Дана матрица P цепи Маркова с тремя состояниями:

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

и стохастический вектор вероятности того, что исходным является одно из 3 состояний:

$$Q = \left(0, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$$

Найти вероятность того, что через 2 шага после начала функционирования объект окажется во 2 состоянии, то есть $q_2^{(2)}$:

$$q_2^{(2)} = \sum_{k=1}^n q_k p_{k2}^{(2)} = q_1 \cdot p_{12}^{(2)} + q_2 \cdot p_{22}^{(2)} + q_3 \cdot p_{32}^{(2)} = \frac{61}{144}$$

Обобщения

Отметим два обобщения понятия марковской цепи.

1. Первое связано с отказом от стационарности вероятностей перехода за один шаг, то есть элементы матрицы P могут менять свои значения в зависимости от времени (числа шагов), прошедшего после начала функционирования. Такие цепи называются нестационарными.
2. Второе связано с введением ограниченной зависимости от истории. Допускается, что зависимость вероятностей p_{ij} от фиксированного k состояний, предшествующих i . Такие цепи называются **k -связными**. При $k = 0$ получаем обычную марковскую цепь.

В дальнейшем мы будем рассматривать лишь стационарные обыкновенные цепи.

2.17 Марковские процессы

Рассмотрим модификацию марковской цепи: откажемся от условия, что смена вероятностей возможна лишь в определенные дискретные моменты времени, то есть будем считать *допустимой* смену состояний в любой момент.

Определение 2.17.1. В таком случае говорят не о марковской цепи (дискретном процессе), а о **марковском процессе**.

Различие между цепью и процессом связано с *дискретностью или непрерывностью времени*. Множество состояний по-прежнему остается конечным или счетным, то есть дискретным.

Для процессов теряет смысл понятие перехода за один или несколько шагов, так как теряет смысл понятие шага. Матрица перехода заменяется матрицей:

$$P^{(t)} = \begin{bmatrix} p_{11}^{(t)} & p_{12}^{(t)} & \dots & p_{1n}^{(t)} \\ p_{21}^{(t)} & p_{22}^{(t)} & \dots & p_{2n}^{(t)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1}^{(t)} & p_{n2}^{(t)} & \dots & p_{nn}^{(t)} \end{bmatrix}$$

где $p_{ij}^{(t)}$ есть вероятность перехода из i в j за время t .

Элементами этой матрицы являются не числа, а функции - конкретная числовая вероятность перехода получается при конкретизации времени t , за которое осуществляется переход.

Матрица переходов в непрерывном случае является стохастической, то есть $\forall t$ выполняются свойства стохастической матрицы:

- $0 \leq p_{ij}^{(t)} \leq 1$
- $\sum_j p_{ij}^{(t)} = 1$

Вероятности перехода из состояния i в состояние j за время $t_1 + t_2$ можно выразить через вероятности переходов из состояния i в различные другие промежуточные состояния k за время t_1 и вероятности переходов из этих состояний k в целевое состояние j за время t_2 . Соответствующая формула аналогична формуле для марковских цепей:

$$p_{ij}^{(t_1+t_2)} = \sum_k p_{ik}^{(t_1)} \cdot p_{kj}^{(t_2)}$$

Матрицы вероятностей переходов за различные промежутки времени связаны между собой соотношением:

$$P^{(t_1+t_2)} = P^{(t_1)} \cdot P^{(t_2)}$$

Если дан вектор Q вероятностей исходного состояния:

$$Q = (q_1, \dots, q_n)$$

то вероятность $q_j^{(t)}$ того, что объект через время t после начала окажется в состоянии j может быть определен по формуле:

$$q_j^{(t)} = \sum_{k=1}^n q_k P_{kj}^{(t)}$$

Таким образом, вектор $Q^{(t)}$ состояний через время t , компонентами которого являются $q_j^{(t)}$, удовлетворяет равенству:

$$Q^{(t)} = Q \cdot P^{(t)}$$

2.18 Процессы гибели и рождения

Понятие марковского процесса является весьма плодотворным в описании процессов обслуживания. Особенно важную роль при этом играет частный случай марковских процессов – процессы гибели и рождения. Эти процессы определяются следующим образом.

Для каждого состояния i выделяется некоторое множество состояний A_i , содержащее i : состояния $j \in A_i$ называются состояниями, **соседними с состоянием i** .

Определение 2.18.1. Марковский процесс называется процессом **гибели и рождения**, если вероятности перехода из одного состояния в другое удовлетворяют условиям:

$$\begin{aligned} p_{ij}^{(t)} &= o(t) \quad j \notin A_i \\ p_{ij}^{(t)} &= a_{ij} \cdot t + o(t) \quad j \in A_i, j \neq i \\ p_{ij}^{(t)} &= 1 - \sum_{j \in A_i, j \neq i} a_{ij} \cdot t + o(t) \end{aligned}$$

Первое условие показывает, что вероятность перехода не в соседнее состояние за малый промежуток времени есть величина, бесконечно малая по сравнению с длиной этого промежутка. Таким образом, переход не в соседнее состояние невозможен.

Второе равенство позволяет выделить в вероятности перехода линейную часть.

Третье равенство дополняет сумму остальных до 1.

В дальнейшем множество состояний будем нумеровать с 1:

$$M = \{0, 1, \dots, n\}$$

$$M = \{0, 1, \dots, n\}$$

в случае конечного и бесконечного числа состояний.

Множество соседних состояний A_i к состоянию i будет определяться следующим образом:

$$A_i = \{i - 1, i, i + 1\}$$

при $i = 0$ и при $i = n$:

$$A_0 = \{0, 1\} \quad A_n = \{n - 1, n\}$$

Будем рассматривать далее обычное множество соседних состояний, не оговаривая каждый раз естественные изменения.

Равенства из определения при условии множества соседних состояний можно записать в следующем виде:

$$p_{ij}^{(t)} = o(t) \quad j < i - 1 \quad j > i + 1$$

$$p_{i,i-1}^{(t)} = a_{i,i-1} \cdot t + o(t)$$

$$p_{i,i+1}^{(t)} = a_{i,i+1} \cdot t + o(t)$$

$$p_{i,i}^{(t)} = 1 - a_{i,i-1} \cdot t - a_{i,i+1} \cdot t + o(t)$$

Для коэффициентов α приняты специальные обозначения:

$$a_{i,i-1} = v_i \quad a_{i,i+1} = \lambda_i$$

так что:

$$p_{i,i-1}^{(t)} = v_i \cdot t + o(t)$$

$$p_{i,i+1}^{(t)} = \lambda_i \cdot t + o(t)$$

$$p_{i,i}^{(t)} = 1 - (v_i + \lambda_i) \cdot t + o(t)$$

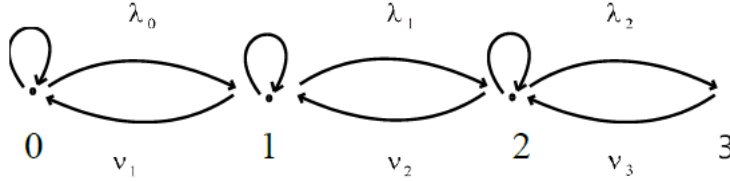


Рис. 11 Граф непосредственных переходов

Величины λ_i и v_i не являются вероятностями переходов, они лишь управляют вероятностями, являясь коэффициентами в соответствующих выражениях. Эти величины неотрицательны. Может оказаться, что некоторые из них равны 0.

Определение 2.18.2. Если $\lambda_i = 0$, то процесс называется процессом **чистой гибели**. В соответствующем графе возможны переходы только налево (в состояние с меньшим либо равным номером). Через некоторое время процесс приходит в граничное нулевое состояние, в котором закикливается.

Определение 2.18.3. Если $v_i = 0$, то процесс называется процессом **чистого рождения**. Он разворачивается только направо и уходит по последовательности состояний в бесконечность.

Свое название такие процессы получили в связи с тем, что впервые они были применены к биологическим проблемам изучения динамики популяции, распространения эпидемий и другим. Если номер состояния интерпретировать как число индивидов в популяции, то переход направо соответствует рождению, а налево - гибели одного из индивидов.

В дальнейшем процессы гибели и рождения нашли важное применение в экономике, технике и других областях знания. Как мы увидим далее, они играют фундаментальную роль в моделировании процессов обслуживания.

В случае конечного числа состояний процесс чистого рождения, удовлетворяющий условиям множества соседних событий, можно заменить процессом чистой гибели, удовлетворяющим тем же условиям и наоборот.

2.18.1 Задача об агрегате

В станке имеются два одинаковых дублирующих друг друга узла. Если работают оба узла, то для каждого из них вероятность бесребойной работы в течение времени t равна:

$$P(t_w \geq t) = e^{-\lambda t}$$

Если один из узлов сломался, то станок продолжает работать, но ввиду увеличения нагрузки на оставшийся узел вероятность его бесперебойной работы в течение времени t определяется другой формулой и равна:

$$P(t_w \geq t) = e^{-3\lambda t}$$

Ремонтный рабочий ремонтирует сломанный узел, причем вероятность того, что время ремонта займет не меньше t равна:

$$P(t_{\text{рем}} \geq t) = e^{-\nu t}$$

Если сломаны два узла, то они ремонтируются по очереди. Требуется описать функционирование этой системы в терминах марковских

процессов и найти вероятности переходов.

Доказательство. Решение:

Введем три состояния: 0, 1, 2 по числу сломанных узлов.

Экспоненциальный закон распределения обеспечивает отсутствие последствия в функционировании нашей системы. Таким образом, функционирование описывается марковским процессом. Найдем вероятности переходов.

Переход $0 \rightarrow 1$ означает поломку одного из двух узлов, переход в ситуацию, когда один из узлов сломан, а другой продолжает работать:

$$P_{0,1}^{(t)} = 2 \cdot (1 - e^{-\lambda t}) \cdot e^{-\lambda t} = 2 \cdot (\lambda t + o(t)) \cdot (1 - \lambda t + o(t)) = 2\lambda t + o(t)$$

Переход $1 \rightarrow 2$ означает поломку оставшегося узла при условии, что сломанный ранее узел не успели отремонтировать:

$$P_{1,2}^{(t)} = (1 - e^{-3\lambda t}) \cdot e^{-vt} = (3\lambda t + o(t)) \cdot (1 - vt + o(t)) = 3\lambda t + o(t)$$

Для вероятности перехода $0 \rightarrow 2$ можно написать равенство:

$$P_{0,2}^{(t)} \leq (1 - e^{-\lambda t})^2 = o(t)$$

то есть вероятность того, что оба станка сломаются очень маленькая по сравнению с промежутком времени t .

Аналогично:

$$P_{2,1}^{(t)} = 1 - e^{-vt} = vt + o(t)$$

$$P_{1,0}^{(t)} = (1 - e^{-vt}) \cdot e^{-3\lambda t}$$

$$P_{2,0}^{(t)} \leq (1 - e^{-vt})^2 = o(t)$$

Перед нами процесс гибели и рождения с $N = 3$, соответствующим условиям. При этом:

$$\lambda_0 = 2\lambda, \lambda_1 = 3\lambda, v_2 = v_1 = v$$

Посчитаем вероятности нахождения в состояниях:

$$p_{0,0}^{(t)} = e^{-\lambda t} e^{-\lambda t} = 1 - 2\lambda t + o(t)$$

что соответствует условию:

$$p_{0,0}^{(t)} = 1 - (v_0 + \lambda_0) \cdot t + o(t) = 1 - 2\lambda t$$

$$p_{1,1}^{(t)} = e^{-3\lambda t} e^{-vt} = 1 - (3\lambda + v)t + o(t)$$

что соответствует работе станка нагруженно при непочинке нерабочего станка

$$p_{1,1}^{(t)} = 1 - (v_1 + \lambda_1) \cdot t + o(t) = 1 - (v + 3\lambda)t + o(t)$$

$$p_{2,2}^{(t)} = 1 - (v_2 + \lambda_2) \cdot t + o(t) = 1 - v \cdot t + o(t)$$

□

2.18.2 Задача о станке-автомате

На станок автомат каждую минуту может поступить деталь одного из двух типов. Время обработки первой детали - 1 минута, второго типа - 2 минуты. Если деталь поступает тогда, когда станок занят, то она получает отказ и переходит на другой станок. Вероятность поступления детали в очередную минуту равна p , вероятности отсутствия - q . Вероятности того, что поступившая деталь окажется деталью первого и второго типа равны b_1 и b_2 соответственно.

Найти: доли времени, когда станок занят обработкой и когда он свободен.

Доказательство. Решение

Опишем функционирование в терминах марковской цепи.

Введем три состояния: 0 - станок свободен (деталь не поступила), 1 - станок занят и оставшееся время обработки равно 1 минуте (как деталь первого, так и деталь второго), 2 - станок занят и оставшееся время обработки равно 2 минутам.

$p_{00} = q$ - вероятность того, что станок из состояния 0 перейдет в состояние 0, то есть равна вероятности непоступления детали.

$p_{10} = q$ - так как если станок находился в состоянии 1, то к следующей минуте он окончил работу и освободится, а вероятность того, что он останется свободным равна q .

$p_{01} = pb_1$ - вероятность поступления детали первого типа умноженную на вероятность поступления детали в принципе.

$p_{11} = pb_1$ - вероятность поступления детали первого типа, умноженную на вероятность поступления детали в принципе.

$$p_{02} = p_{12} = pb_2$$

$$p_{20} = p_{22} = 0$$

$$p_{21} = 1$$

Таким образом, матрица переходов:

$$\begin{bmatrix} q & pb_1 & pb_2 \\ q & pb_1 & pb_2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Финальные вероятности есть следующая система векторов:

$$\begin{cases} p_0 = qp_0 + qp_1 \\ p_1 = pb_1 \cdot p_0 + pb_1 \cdot p_1 + p_2 \\ p_2 = pb_2 \cdot p_0 + pb_2 \cdot p_1 \\ p_0 + p_1 + p_2 = 1 \end{cases}$$

Решением данной системы является:

$$p_0 = \frac{q}{1 + pb_2} \quad p_1 = \frac{p}{1 + pb_2} \quad p_2 = \frac{pb_2}{1 + pb_2}$$

Доля времени, когда станок свободен - p_0 , доля времени, когда станок занят - $p_1 + p_2$. □

2.19 Финальные вероятности состояний для процессов гибели и рождения

Будем рассматривать процесс с бесконечным числом состояний, удовлетворяющие условиям множества соседних событий.

Обозначим $P_k(t)$ - вероятность того, что процесс через время t после своего начала окажется в состоянии k . Сформулируем уравнения для таких вероятностей.

Рассмотрим два момента времени t и $t + \tau$. За небольшой промежуток времени τ процесс мог попасть в k лишь из соседних состояний. Для $k \geq 1$:

$$\begin{aligned} P_k(t + \tau) &= \sum_{i=0}^{\infty} P_i(t) \cdot p_{ik}^{(\tau)} = P_{k-1}(t) \cdot p_{k-1,k}^{(\tau)} + P_k(t) \cdot p_{k,k}^{(\tau)} + P_{k+1}(t) \cdot p_{k+1,k}^{(\tau)} = \\ &= P_{k-1}(t) \cdot (\lambda_{k-1} \cdot \tau + o(\tau)) + P_k(t) \cdot (1 - (v_k + \lambda_k) \cdot \tau + o(\tau)) + P_{k+1}(t) \cdot (v_{k+1} \cdot \tau + o(\tau)) + o(\tau) \end{aligned}$$

Преобразуем данное выражение и устремим $\tau \rightarrow 0$:

$$\frac{P_k(t + \tau) - P_k(t)}{\tau} = \lambda_{k-1} \cdot P_{k-1}(t) - (v_k + \lambda_k) P_k(t) + v_{k+1} \cdot P_{k+1}(t) + \frac{o(\tau)}{\tau}$$

$$P'_k(t) = \lambda_{k-1} \cdot P_{k-1}(t) - (v_k + \lambda_k) \cdot P_k(t) + v_{k+1} \cdot P_{k+1}(t)$$

получаем дифференциальное уравнение, которое можно рассматривать как систему уравнений. Все члены этого уравнения осмыслены лишь при $k \geq 1$, при $k = 0$ возникают неосмысленные выражения, но можно провести отдельно вывод для $k = 0$, получив:

$$P'_0(t) = -\lambda_0 \cdot P_0(t) + v_1 \cdot P_1(t)$$

Если множество состояний конечно и v_i, λ_i отличны от 0, то для последнего состояния n по аналогичным причинам уравнение принимает вид:

$$P'_n(t) = -\lambda_{n-1} \cdot P_{n-1}(t) + v_n \cdot P_n(t)$$

Можно доказать, что:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_k(t) = P_k > 0$$

Для любого t :

$$\sum_{k=0}^n P_k(t) = 1$$

так что в пределе получаем такое же соотношение финальных вероятностей:

$$\sum_{k=0}^n P_k = 1$$

Если число состояний бесконечно, то строгая положительность v_i, λ_i не гарантирует выполнения аналогичных равенств, может оказаться, что

$$\sum_{k=0}^n P_k(t) < 1$$

Это может быть связано с тем, что процесс в своем движении по состояниям направо за ограниченное время t проходит бесконечно большое число состояний.

Определение 2.19.1. Такой процесс описывает явление типа "взрыва".

Теорема 2.13. Для того, чтобы существовали пределы $\lim_{t \rightarrow \infty} P_k(t) = P_k > 0$ для любого t и выполнялось равенство:

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k(t) = 1$$

достаточно выполнения следующего условия: существует такая величина β , что для всех k , начиная с некоторого, выполнено неравенство:

$$\frac{\lambda_k}{v_{k+1}} \leq \beta < 1$$

То есть начиная с некоторого k передвигаться по состояниям налево становится легче, чем направо, что и предотвращает взрыв. В ТМО это условие обычно (но не всегда) выполнено, так что существуют финальные вероятности, дающие в сумме 1, то есть существует установившийся режим работы системы обслуживания.

Теорема 2.14. Найдем финальные вероятности в предположении, что они существуют

Доказательство. Перейдем к пределу в дифференциальных уравнениях при $t \rightarrow \infty$. Пределы левых частей уравнений существуют, так как существуют пределы правых.

Пусть $\lim_{t \rightarrow 0} P'_k(t) = c_k$. Тогда $c_k = 0 \forall k$.

То есть предел производных равен 0 и переход к пределу дает систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} \lambda_{k-1} \cdot P_{k-1}(t) - (v_k + \lambda_k) \cdot P_k(t) + v_{k+1} \cdot P_{k+1}(t) = 0 \\ -\lambda_0 \cdot P_0(t) + v_1 \cdot P_1(t) = 0 \end{cases}$$

Обозначим за $x_{k+1} = -\lambda_k P_k + v_{k+1} P_{k+1}$, тогда:

$$\begin{cases} x_{k+1} - x_k = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases}$$

Следовательно $x_{k+1} = x_k = \dots = x_1 = 0$, то есть единственным решением является $x_k = 0$ для $k \geq 1$. Получаем для любого $k \geq 1$:

$$x_k = -\lambda_{k-1} P_{k-1} + v_k P_k = 0$$

$$P_k = \frac{\lambda_{k-1}}{v_k} \cdot P_{k-1} \quad P_{k-1} = \frac{\lambda_{k-2}}{v_{k-1}} \cdot P_{k-2} \quad P_1 = \frac{\lambda_0}{v_1} \cdot P_0$$

Отсюда получаем:

$$P_k = \frac{\lambda_{k-1}}{v_k} \cdot \frac{\lambda_{k-2}}{v_{k-1}} \cdot \dots \cdot \frac{\lambda_0}{v_1} \cdot P_0 = \prod_{i=1}^k \frac{\lambda_{i-1}}{v_i} \cdot P_0$$

Мы выразили все финальные вероятности P_k через P_0 . Вероятность P_0 найдем из нормирующего условия:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} P_k &= 1 \\ \sum_{k=0}^{\infty} \prod_{i=1}^k \frac{\lambda_{i-1}}{v_i} \cdot P_0 &= 1 \\ P_0 &= \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{i=1}^k \frac{\lambda_{i-1}}{v_i}} \end{aligned}$$

Откуда для $j \geq 1$ получаем окончательные формулы для финальных вероятностей p_j :

$$P_j = \frac{\prod_{i=1}^j \frac{\lambda_{i-1}}{v_i}}{1 + \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{i=1}^k \frac{\lambda_{i-1}}{v_i}}$$

□

Формулы позволяют выразить финальные вероятности состояний через параметры вероятностей переходов из одного состояния в другое. При практических расчетах удобнее использовать формулу:

$$P_k = \frac{\lambda_{k-1}}{v_k} \cdot \frac{\lambda_{k-2}}{v_{k-1}} \cdot \dots \cdot \frac{\lambda_0}{v_1} \cdot P_0 = \prod_{i=1}^k \frac{\lambda_{i-1}}{v_i} \cdot P_0$$

позволяющую выразить искомые вероятности через одну и ту же вероятность P_0 вместе с формулой

$$P_0 = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{i=1}^k \frac{\lambda_{i-1}}{v_i}}$$

позволяющей определить саму вероятность P_0 .

Пример:

Выведем финальные вероятности для задачи об агрегате:

Доказательство. Напомним результаты, которые мы получили:

Перед нами процесс гибели и рождения с $N = 3$, соответствующим условиям. При этом:

$$\lambda_0 = 2\lambda, \lambda_1 = 3\lambda, v_2 = v_1 = v$$

Тогда:

$$P_0 = \frac{1}{1 + \frac{\lambda_0}{v_1} + \frac{\lambda_0 \lambda_1}{v_1 v_2} + \frac{\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2}{v_1 v_2 v_3}} = \frac{2\lambda}{v} + \frac{6\lambda^2}{v^2}$$

$$\lambda_i \quad i \geq n \quad v_i = 0 \quad i \geq n + 1$$

$$P_1 = \prod_{i=1}^1 \frac{\lambda_{i-1}}{v_i} \cdot P_0 = \frac{\lambda_0}{v_1} P_0 = \frac{4\lambda^2(v + 3\lambda)}{v^3}$$

$$P_2 = \prod_{i=1}^2 \frac{\lambda_{i-1}}{v_i} \cdot P_0 = \frac{\lambda_0}{v_1} \cdot \frac{\lambda_1}{v_1} \cdot P_0 = \frac{12\lambda^3(v+3\lambda)}{v^4}$$

□

2.20 СМО с отказанием

Мы рассмотрим в этом параграфе систему обслуживания, удовлетворяющему следующим:

1. Если в момент поступления требования имеется хотя бы один свободный узел обслуживания, то требование сразу начинает обслуживаться (любым из свободных узлов)
2. Каждый узел в любой момент времени обслуживает не более одного требования
3. Каждое требование обслуживается одним узлом
4. Обслуживание не прерывается
5. По окончании обслуживания требование покидает систему
6. Входящий поток является пуассоновским
7. Продолжительность обслуживания является случайной величиной, распределенной по экспоненциальному закону, одному и тому же для всех узлов обслуживания - узлы предполагаются *одинаковыми по вероятностным характеристикам*, причем вероятность того, что время обслуживания больше заданного времени t равна:

$$P(t_{\text{обл}} > t) = e^{-vt}$$

где v - интенсивность обслуживания - среднее число требования, обслуживаемых узлом в единицу времени.

Такой системой обслуживания является **телефонная станция**. Исследовалась датским ученым *А.К. Эрлангом*.

2.20.1 Функционирование системы как процесс гибели и рождения

Пусть λ - параметр входящего пуассоновского потока требования. Пусть $N \geq 1$ - число узлов обслуживания. Опишем функционирование СМО в терминах процессов гибели и рождения.

Для этого необходимо:

- Ввести понятие состояния
- Обосновать, что процесс перехода из состояния в состояние является марковским
- Доказать, что вероятности перехода удовлетворяют условиям процессов гибели и рождения

1. Формализация понятия состояния

Определение 2.20.1. Состоянием СМО с отказами назовем число требований, находящихся в системе, то есть число требований, находящихся в узлах обслуживания.

Состояниями являются целые неотрицательные числа в пределах от 0 до N :

$$\{0, 1, \dots, N\}$$

2. Процесс функционирования является марковским

Действительно, пусть в момент времени t состоянием является i , в момент $t + \tau$ состоянием является j . Изменение состояния (изменение числа требований), находящихся в системе обслуживания, имеет две причины:

1. Поступление новых требований из входящего потока - так как входящий поток пуассоновский, то поступление требований на любом отрезке не зависит от истории потока до начального момента этого отрезка (отсутствие последствия в пуассоновском потоке). Оно не зависит и от требований, покидающих систему. Таким образом, изменение состояния с первой причине обладает марковским свойством
2. Уход обслуженных требований - если в момент времени t требование уже обслуживалось, то вероятность окончания обслуживания до момента $t + \tau$ не зависит от того, сколько длилось обслуживание до момента t . Это обстоятельство связано с экспоненциальностью распределения длительности обслуживания (отсутствие памяти). Рассматривая интервал между началом и окончанием обслуживания, мы можем убедиться в этом. Таким образом, данное свойство также обладает марковским свойством и процесс функционирования является марковским.

3. Вероятности переходов из одного состояния в другое

Переход из $i \rightarrow i + 1$ за t связан с поступлением одного требования в систему за это требование и уходом нуля требований (с тем, что ни один из занятых узлов за это время обслуживания не закончил).

Число занятых узлов равно i умноженную на вероятность поступления одного требования

$$P_{i,i+1}^{(t)} = e^{-\lambda t} \cdot \lambda t \cdot e^{-i v t} = \lambda t (1 - \lambda t + o(t)) (1 - i v t + o(t)) = \lambda t + o(t)$$

Переход $i \rightarrow i - 1$ связан с поступлением нуля требований и уходом одного (ровно один из занятых узлов окончил обслуживание):

$$P_{i,i-1}^{(t)} = e^{-\lambda t} \cdot C_i^1 (1 - e^{-v t}) (e^{-v t})^{i-1} = i v t + o(t)$$

Переход $i \rightarrow i$ связан с отсутствием поступления требований в систему и уходу требований из системы. Такой переход имеет вероятность:

$$P_{i,i}^{(t)} = e^{-\lambda t} \cdot e^{-i v t} = 1 - \lambda t - i v t + o(t)$$

Все остальные вероятности переходов величины бесконечно малые.

При определении вероятностей мы учли не все возможные случаи. Например, переход $i \rightarrow i + 1$ возможен не только при поступлении одного, но и при поступлении n требований и уходе $n - 1$ требований, но вероятности таких событий при $n \geq 2$ (и их сумма) являются бесконечно малыми, единственный существенный вклад в эту вероятность даст случай, учтенный выше - $n = 0$.

Мы убедились, что вероятности переходов удовлетворяют условиям процессов гибели и рождения. При этом коэффициенты λ_i и v_i , характеризующие процессы, определяются формулами:

$$\lambda_i = \lambda$$

$$v_i = i v$$

по определению процессов гибели и рождения.

2.20.2 Финальные вероятности состояний

Воспользуемся формулой финальных вероятностей для процессов гибели и рождения:

$$P_k = \frac{\lambda_{k-1}}{v_k} \cdot \frac{\lambda_{k-2}}{v_{k-1}} \cdot \dots \cdot \frac{\lambda_0}{v_1} \cdot P_0 = \prod_{i=1}^k \frac{\lambda_{i-1}}{v_i} \cdot P_0 = \frac{\lambda}{kv} \cdot \frac{\lambda}{(k-1)v} \cdot \dots \cdot \frac{\lambda}{1 \cdot v} \cdot P_0 = \frac{\lambda^k}{v^k k!} P_0$$

Определение 2.20.2. Величина $\rho = \frac{\lambda}{v}$ является отношением интенсивности входящего потока к интенсивности обслуживания и называется **загрузкой системы**.

Данная величина является безразмерной и, в отличие от λ и v , она не зависит от того, какой интервал времени выбран в качестве единицы. ρ является естественной и важной характеристикой систем обслуживания и через нее выражаются многие другие характеристики

Подставим в формулу вероятностей $P_k(t)$:

$$P_k = \frac{\rho^k}{k!} \cdot P_0$$

Так как $\sum_{k=0}^N P_k = 1$, то:

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^N \frac{\rho^k}{k!}}$$

и отсюда имеем формулы любых вероятностей:

$$P_j = \frac{\frac{\rho^j}{j!}}{\sum_{k=0}^N \frac{\rho^k}{k!}}$$

Эти формулы носят название **формул Эрланга**. Эти формулы верны для СМО с отказами при любом законе распределения длительности обслуживания, при интенсивности обслуживания, равной v .

2.20.3 Важнейшие характеристики функционирования системы

1. Вероятность отказа

Требование, поступающее в систему, получает отказ в том и только том случае, когда все узлы заняты. Поэтому вероятность отказа $P_{\text{отк}}$ равна:

$$P_{\text{отк}} = P_N = \frac{\frac{\rho^N}{N!}}{\sum_{k=0}^N \frac{\rho^k}{k!}}$$

Определение 2.20.3. Вероятность отказа $P_{\text{отк}}$ характеризует долю требований, получающих отказ.

Определение 2.20.4. Величина

$$\alpha = 1 - P_{\text{отк}} = 1 - P_N$$

определяется долю обслуженных требований и называется **относительной пропускной способностью** СМО.

Определение 2.20.5. Абсолютная пропускная способность системы - среднее число требований, поступающих в узлы обслуживания за единицу времени:

$$A = \lambda \cdot (1 - P_N) = \lambda \cdot \alpha$$

Определение 2.20.6. Среднее число занятых узлов обслуживания $M_{\text{зан}}$ равна:

$$\begin{aligned} M_{\text{зан}} &= \sum_{k=0}^N k \cdot P_k = \sum_{k=1}^N k \cdot \frac{\rho^k}{k!} \cdot P_0 = \rho \cdot \sum_{m=0}^{N-1} \frac{\rho^m}{m!} \cdot P_0 = \\ &= \rho \cdot \sum_{m=0}^{N-1} \frac{\rho^m}{m!} \cdot \frac{1}{\sum_{k=0}^N \frac{\rho^k}{k!}} = \rho \cdot \frac{\sum_{k=0}^N \frac{\rho^k}{k!} - \frac{\rho^N}{N!}}{\sum_{k=0}^N \frac{\rho^k}{k!}} = \\ &= \rho \cdot \left(1 - \frac{\frac{\rho^N}{N!}}{\sum_{k=0}^N \frac{\rho^k}{k!}} \right) = \rho \cdot (1 - P_N) \end{aligned}$$

Определение 2.20.7. Среднее число свободных узлов $M_{\text{св}}$ равно разности:

$$M_{\text{св}} = N - M_{\text{зан}}$$

Для случая, когда в СМО с отказами имеется всего один узел обслуживания, мы получаем:

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^1 \frac{\rho^k}{k!}} = \frac{1}{1 + \rho}$$

$$P_{\text{отк}} = P_1 = \frac{\rho}{1 + \rho}$$

$$M_{\text{зан}} = \rho \cdot (1 - P_N) = \rho \cdot (1 - P_1) = \rho \cdot \left(1 - \frac{\rho}{1 + \rho}\right) = \frac{\rho}{1 + \rho}$$

Для случая, когда в СМО с отказами имеется всего два узла обслуживания, мы получаем:

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^2 \frac{\rho^k}{k!}} = \frac{1}{1 + \rho + \frac{\rho^2}{2}}$$

$$P_{\text{отк}} = P_2 = \frac{\frac{\rho^2}{2!}}{1 + \rho + \frac{\rho^2}{2}}$$

$$M_{\text{зан}} = \rho \cdot (1 - P_N) = \rho \cdot (1 - P_2) = \rho \cdot \left(1 - \frac{\frac{\rho^2}{2!}}{1 + \rho + \frac{\rho^2}{2}}\right) = \frac{\rho}{1 + \rho} = \frac{2\rho \cdot (1 - \rho)}{2 + \rho(2 + \rho)}$$

Если число узлов велико по сравнению с загрузкой системы, то $N = \infty$.

Теорема 2.15. Для систем с бесконечным числом узлов:

$$P_0 = e^{-\rho}$$

$$P_k = \frac{\rho^k}{k!} \cdot e^{-\rho}$$

$$M_{\text{зан}} = \rho$$

Доказательство.

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\rho^k}{k!}} = \frac{1}{e^{\rho}} = e^{-\rho}$$

$$P_k = \frac{\rho^k}{k!} \cdot P_0 = \frac{\rho^k}{k!} \cdot e^{-\rho}$$

При $N \rightarrow \infty$ $P_N \rightarrow 0$:

$$M_{\text{зан}} = \rho(1 - P_N) = \rho$$

□

2.21 СМО с ожиданием

Мы рассмотрим в этом параграфе систему обслуживания с накопителем, удовлетворяющую следующим условиям:

1. Если в момент поступления требования имеется хотя бы один свободный узел обслуживания, то требование сразу начинает обслуживаться (любым из свободных узлов)
2. Если все узлы заняты, то поступившее требование становится в очередь за уже имеющимся в накопителе требованиям
3. Если в момент освобождения узла имеется хотя бы одно требование в накопителе, то первое из них по очереди сразу поступает на обслуживание
4. Каждый узел в любой момент времени обслуживает не более одного требования
5. Каждое требование обслуживается одним узлом
6. Обслуживание не прерывается
7. По окончании обслуживания требование покидает систему
8. Входящий поток является пуассоновским
9. Продолжительность обслуживания является случайной величиной, распределенной по экспоненциальному закону, одному и тому же для всех узлов обслуживания - узлы предполагаются *одинаковыми по вероятностным характеристикам*, причем вероятность того, что время обслуживания больше заданного времени t равна:

$$P(t_{\text{обл}} > t) = e^{-vt}$$

где v - интенсивность обслуживания - среднее число требования, обслуживаемых узлом в единицу времени.

Из 2 – 3 условий следует, что очередь в накопителе упорядочена естественным образом, не предусматривается, что требования обладают приоритетом перед другими. Любой узел доступен непосредственно из накопителя, то есть узлы работают не последовательно, а параллельно. Свободные узлы - пустой накопитель.

Из 4 – 6 - требования обслуживаются независимо и узлы работают независимо.

7 - разомкнутость системы.

2.21.1 Функционирование системы как процесс гибели и рождения

Пусть λ - параметр входящего пуассоновского потока требования. Пусть $N \geq 1$ - число узлов обслуживания. Опишем функционирование СМО в терминах процессов гибели и рождения.

Для этого необходимо:

- Ввести понятие состояния
- Обосновать, что процесс перехода из состояния в состояние является марковским
- Доказать, что вероятности перехода удовлетворяют условиям процессов гибели и рождения

1. Формализация понятия состояния

Определение 2.21.1. Состоянием СМО с отказами назовем число требований, находящихся в системе, то есть сумму числа требований в узлах и числа требований в накопителе.

При этом 0 соответствует отсутствию требований в системе, состояние k при $k \leq N$ соответствуют отсутствию очереди, при $k \geq N$ - занятость всех узлов, а при $k > N$ - еще и наличие очереди.

2. Процесс функционирования является марковским

Действительно, пусть в момент времени t состоянием является i , в момент $t + \tau$ состоянием является j . Изменение состояния (изменение числа требований), находящихся в системе обслуживания, имеет две причины:

1. Поступление новых требований из входящего потока - так как входящий поток пуассоновский, то поступление требований на любом отрезке не зависит от истории потока до начального момента этого отрезка (отсутствие последствия в пуассоновском потоке). Оно не зависит и от требований, покидающих систему. Таким образом, изменение состояния о первой причине облажает марковским свойством

2. Уход обслуженных требований - если в момент времени t требование уже обслуживалось, то вероятность окончания обслуживания до момента $t + \tau$ не зависит от того, сколько длилось обслуживание до момента t . Это обстоятельство связано с экспоненциальностью распределения длительности обслуживания (отсутствие памяти). Рассматривая интервал между началом и окончанием обслуживания, мы можем убедиться в этом. Таким образом, данной свойство также обладает марковским свойством и процесс функционирования является марковским.

3. Вероятности переходов из одного состояния в другое

Переход из $i \rightarrow i + 1$ за t связан с поступлением одного требования в систему за это требование и уходом нуля требований (с тем, что ни один из занятых узлов за это время обслуживания не закончил).

Число занятых узлов равно i при $i \leq N$ и равно N при $i \geq N$. При $i \leq N$ имеем:

$$P_{i,i+1}^{(t)} = e^{-\lambda t} \cdot \lambda t \cdot e^{-i v t} = \lambda t(1 - \lambda t + o(t))(1 - i v t + o(t)) = \lambda t + o(t)$$

Аналогично при $i \geq N$:

$$P_{i,i+1}^{(t)} = \lambda t \cdot e^{-\lambda t} \cdot (e^{-v t N}) = \lambda t(1 - \lambda t + o(t)) \cdot (1 - N v t + o(t)) = \lambda t + o(t)$$

Переход $i \rightarrow i - 1$ связан с поступлением нуля требований и уходом одного (ровно один из занятых узлов окончил обслуживание). При $i \leq N$:

$$P_{i,i-1}^{(t)} = e^{-\lambda t} \cdot C_i^1(1 - e^{-v t}) (e^{-v t})^{i-1} = i v t + o(t)$$

При $i \geq N$:

$$P_{i,i-1}^{(t)} = e^{-\lambda t} \cdot C_N^1(1 - e^{-v t}) (e^{-v t})^{N-1} = N v t + o(t)$$

Переход $i \rightarrow i$ связан с отсутствием поступления требований в систему и уходу требований из системы. Такой переход имеет вероятность при $i \leq N$:

$$P_{i,i}^{(t)} = e^{-\lambda t} \cdot e^{-i v t} = 1 - \lambda t - i v t + o(t)$$

При $i \leq N$:

$$P_{i,i}^{(t)} = e^{-\lambda t} \cdot (e^{-v t})^N = 1 - \lambda t - N v t + o(t)$$

Все остальные вероятности переходов величины бесконечно малые.

При определении вероятностей мы учли не все возможные случаи. Например, переход $i \rightarrow i + 1$ возможен не только при поступлении одного, но и при поступлении n требований и уходе $n - 1$ требований, но вероятности таких событий при $n \geq 2$ (и их сумма) являются бесконечно малыми, единственный существенный вклад в эту вероятность даст случай, учтенный выше - $n = 0$.

Мы убедились, что вероятности переходов удовлетворяют условиям процессов гибели и рождения. При этом коэффициенты λ_i и v_i , характеризующие процессы, определяются формулами:

$$\lambda_i = \lambda$$

$$v_i = \begin{cases} iv, i \leq N \\ Nv, i \geq N \end{cases}$$

по определению процессов гибели и рождения.

2.21.2 Финальные вероятности состояний

Воспользуемся формулой финальных вероятностей для процессов гибели и рождения. При $k \leq N$

$$P_k = \frac{\lambda_{k-1}}{v_k} \cdot \frac{\lambda_{k-2}}{v_{k-1}} \cdot \dots \cdot \frac{\lambda_0}{v_1} \cdot P_0 = \prod_{i=1}^k \frac{\lambda_{i-1}}{v_i} \cdot P_0 = \frac{\lambda}{kv} \cdot \frac{\lambda}{(k-1)v} \cdot \dots \cdot \frac{\lambda}{1 \cdot v} \cdot P_0 = \frac{\lambda^k}{v^k k!} P_0$$

При $k \geq N$:

$$P_k = \frac{\lambda}{Nv} \cdot \dots \cdot \frac{\lambda}{Nv} \cdot \frac{\lambda}{Nv} \cdot \frac{\lambda}{(N-1)v} \cdot \dots \cdot \frac{\lambda}{1v} \cdot P_0 = \frac{\lambda^k}{v^k \cdot N! \cdot N^{k-N}} \cdot P_0$$

Определение 2.21.2. Величина $\rho = \frac{\lambda}{v}$ является отношением интенсивности входящего потока к интенсивности обслуживания и называется **загрузкой системы**.

Данная величина является безразмерной и, в отличие от λ и v , она не зависит от того, какой интервал времени выбран в качестве единицы. ρ является естественной и важной характеристикой систем обслуживания и через нее выражаются многие другие характеристики

Подставим в формулу вероятностей $P_k(t)$:

$$P_k = \begin{cases} \frac{\rho^k}{k!} \cdot P_0 & k \leq N \\ \frac{\rho^k}{N! \cdot N^{k-N}} \cdot P_0 & k \geq N \end{cases}$$

Для упрощения формулы можно ввести обозначение:

$$h_N(t) = \begin{cases} k! & k \leq N \\ N! \cdot N^{k-N} & k \geq N \end{cases}$$

Тогда:

$$P_k = \frac{\rho^k}{h_N(k)} \cdot P_0$$

Мы выразили вероятность P_k через P_0 . Сумма вероятностей всех состояний равна 1, получим: то:

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^N \frac{\rho^k}{k!} + \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{\rho^k}{N! \cdot N^{k-N}}}$$

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^N \frac{\rho^k}{k!} + \frac{N^N}{N!} \sum_{k=N+1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{N}\right)^k}$$

Данная прогрессия является убывающей и имеет конечную сумму при $\frac{\rho}{N} < 1$, при невыполнении этого условия, все вероятности будут равны 0 и наступает явление "взрыва".

Будем предполагать условие выполненным. Тогда:

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{N}\right)^k = \frac{b_1}{1-q} = \frac{\left(\frac{\rho}{N}\right)^{N+1}}{1 - \frac{\rho}{N}} = \frac{\rho \cdot \left(\frac{\rho}{N}\right)^N}{N - \rho}$$

$$\frac{N^N}{N!} \cdot \frac{\rho \cdot \left(\frac{\rho}{N}\right)^N}{N - \rho} = \frac{\rho^{N+1}}{N! \cdot (N - \rho)}$$

И формулы для P_0 принимают вид:

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^N \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^{N+1}}{N! \cdot (N - \rho)}}$$

2.21.3 Важнейшие характеристики функционирования системы

Итого, **вероятность отсутствия требований** в системе обслуживания P_0 определяется формулой:

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^N \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^{N+1}}{N! \cdot (N - \rho)}}$$

В последующих расчетах будет использоваться вероятность P_0 .

Вероятность наличия очереди в системе обслуживания $P_{оч}$ есть вероятность того, что число требований в системе больше числа узлов обслуживания:

$$P_{оч} = \sum_{k=N+1}^{\infty} P_k = \frac{\rho^{N+1}}{N! \cdot (N - \rho)} \cdot P_0$$

Вероятность того, что все узлы обслуживания заняты:

$$P_{зан} = \frac{\rho^N}{(N - 1)! \cdot (N - \rho)} \cdot P_0$$

2.22 СМО с ограниченным накопителем

Обычно в СМО с ожиданием накопитель велик и его можно считать бесконечным, однако иногда приходится учитывать его *ограниченность*. СМО с накопителем ограниченного объёма удовлетворяют всем условиям (1 – 9) и еще одному новому условию.

- Если требование приходит, когда накопитель заполнен, то оно получает отказ и сразу покидает систему

Посредством S обозначим объём накопителя, λ - параметр входящего пуассоновского потока, N - число узлов обслуживания, v - интенсивность обслуживания - среднее число требований, обслуживаемых узлом в единицу времени.

2.22.1 Функционирование системы как процесс гибели и рождения

Под состоянием будем, как и раньше, понимать число требований, находящихся в системе. Множество состояний есть:

$$\{0, 1, \dots, N, N + 1, \dots, N + S\}$$

Можно доказать, что функционирование системы описывается процессом гибели и рождения (аналогично предыдущему параграфу), причем:

$$\lambda_i = \lambda \quad (0 \leq i \leq N + S - 1)$$
$$v_i = \begin{cases} iv, 1 \leq i \leq N \\ Nv, N \leq i \leq N + S \end{cases}$$

2.22.2 Финальные вероятности состояний

Используя ранее выведенные формулы получаем:

$$P_k = \begin{cases} \frac{\rho^k}{k!} \cdot P_0 & k \leq N \\ \frac{\rho^k}{N! \cdot N^{k-N}} \cdot P_0 & N \leq k \leq N + S \end{cases}$$

Поскольку сумма финальных вероятностей равна единицу, то из

описанных выше вероятностей получаем:

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^N \frac{\rho^k}{k!} + \sum_{k=N+1}^{N+S} \frac{\rho^k}{N! \cdot N^{k-N}}} = \frac{1}{\sum_{k=0}^N \frac{\rho^k}{k!} + \frac{N^N}{N!} \sum_{k=N+1}^{N+S} \left(\frac{\rho}{n}\right)^k}$$

$$\sum_{k=N+1}^{N+S} \left(\frac{\rho}{n}\right)^k = \frac{b_1 \cdot (1 - q^S)}{1 - q} = \left(\frac{\rho}{n}\right)^{N+1} \cdot \frac{1 - \left(\frac{\rho}{n}\right)^S}{1 - \frac{\rho}{n}} = \frac{\rho \cdot \left(\frac{\rho}{N}\right)^N}{N - \rho} \cdot \left(1 - \left(\frac{\rho}{n}\right)^S\right)$$

Тогда P_0 принимает вид:

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^N \frac{\rho^k}{k!} + \frac{N^N}{N!} \sum_{k=N+1}^{N+S} \left(\frac{\rho}{n}\right)^k} = \frac{1}{\sum_{k=0}^N \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^{N+1}}{N! \cdot (N - \rho)} \cdot \left(1 - \left(\frac{\rho}{n}\right)^S\right)}$$

При этом в данной формуле не требуется выполнения условий, предохраняющих от ситуации взрыва, поскольку множество состояний данной СМО конечно.

Формулы весьма напоминают вероятности, которые мы получали раньше. При $S = 0$ получаем СМО с отказами, а при $S = \infty$ получаем СМО с ожиданием. Данная формула и формула для характеристик является обобщением.

2.22.3 Важнейшие характеристики функционирования системы

Вероятность отказа $P_{\text{отк}}$ системы с ограниченным накопителем:

$$P_{\text{отк}} = P_{N+S} = \frac{\rho^{N+S}}{N^S \cdot N!} \cdot P_0$$

Относительная пропускная способность α есть величина, дополняющая вероятность отказа до 1, а абсолютная пропускная способность A равна:

$$A = \lambda \cdot (1 - P_{\text{отк}})$$

Вероятность наличия очереди $P_{\text{оч}}$ определяется формулой:

$$P_{\text{оч}} = \sum_{k=N+1}^{N+S} P_k = \frac{\rho^{N+1}}{N! \cdot (N - \rho)} \cdot \left(1 - \left(\frac{\rho}{n}\right)^S\right) \cdot P_0$$

Вероятность того, что все узлы обслуживания заняты:

$$P_{\text{зан}} = \sum_{k=N+1}^{N+S} P_k = \frac{\rho^N \cdot \left(N - \rho \cdot \left(\frac{\rho}{N}\right)^S\right)}{N! \cdot (N - \rho)} \cdot P_0$$

2.23 СМО с ограниченным временем ожидания. Функционирование системы как процесс гибели и рождения

В предыдущей системе было наложено ограничение на объем накопителя. Теперь мы будем считать его неограниченным по объему, но введем другое ограничение – по времени. Предположим, что требования являются "нетерпеливыми" и могут уходить из очереди (и тем самым из системы), не дождавшись начала обслуживания.

Рассмотрим систему, удовлетворяющую условиям (1 – 9) и, кроме того, следующим дополнительным условиям:

- Требования могут покидать систему до начала обслуживания
- Интервал времени между моментом прихода в систему и моментов такого ухода распределен по экспоненциальному закону

Посредством α обозначим **интенсивность ухода нетерпеливых требований**, λ - параметр входящего пуассоновского потока, N - число узлов обслуживания, v - интенсивность обслуживания - среднее число требований, обслуживаемых узлом в единицу времени.

Состоянием системы назовем количество содержащихся в нем требований. Множество состояний бесконечно. Функционирование системы описывается марковским процессом. Определение вероятностей перехода показывает, что это процесс гибели и рождения. Мы выпишем формулы лишь для некоторых вероятностей.

При $i \geq N$:

$$P_{i,i+1}^{(t)} = \lambda t e^{-\lambda t} (e^{-\lambda t})^{i-N} \cdot (e^{-vtN}) = \lambda t + o(t)$$

то есть вероятность поступления одного требования в течение промежутка времени t на вероятность продолжения обслуживания в N узлах на вероятность поступления требования в $i - N$ узлов.

$$P_{i,i-1}^{(t)} = (N + (i - N)\beta) \cdot vt + o(t)$$

где $\beta = \frac{\alpha}{v}$.

Можно доказать, что функционирование системы описывается процессом гибели и рождения (аналогично предыдущему параграфу), при-

чем:

$$\lambda_i = \lambda$$

$$v_i = \begin{cases} iv, i \leq N \\ (N + (i - N)\beta) \cdot v, i \geq N \end{cases}$$

При $\beta > 0$ условия выполняются всегда, так что процесс гибели и рождения обладает установившимся режимом, условие $\frac{\rho}{n} < 1$, предохраняющее от ситуации взрыва, для системы с нетерпеливыми требованиями не является необходимым.

Подставляя параметры в формулу получим:

$$P_k = \begin{cases} \frac{\rho^k}{k!} \cdot P_0 & k \leq N \\ \frac{\rho^k}{N! \cdot (N+\beta) \cdot (N+2\beta) \cdot \dots \cdot (N+(k-N)\beta)} \cdot P_0 & k \geq N \end{cases}$$

Откуда:

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^N \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^N}{N!} \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\rho^j}{(N+\beta) \cdot \dots \cdot (N+j\beta)}}$$

и по признаку Даламбера ($\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = D < 1$) ряд в знаменателе сходится и сходится быстро, не являясь геометрической прогрессией. При практических расчетах бывает достаточно вычислить несколько его первых членов.