Финансовая математика
ПМ-1701

Преподаватель:

Чернов Алексей Викторович
alex_tche@mail.ru

Санкт-Петербург
2020 г., 6 семестр

Список литературы

[1] Sulsky D., Chen Z., Schreyer H. L. A particle method for history-dependent materials // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. — 1994, V. 118. — P. 179–196.

[2] Liu G. R., Liu M. B. Smoothed particle hydrodynamics: a meshfree particle method. — Singapore : World Scientific Publishing. — 2003. — 449 p.

Содержание

1 Конспекты лекций **2**

1.1 Простая и сложная процентная ставка 05.02.2020 2

1.1.1 Формулы простых процентов 2

1.1.2 Формулы простых процентов 3

1.1.3 Срок удвоения вклада 3

1.1.4 Задача о.в Манхэттен 3

1.1.5 Смешанная ставка 4

1.2 Процентная ставка для разных периодов времени 09.02.2020 5

1.2.1 Переменная процентная ставка 6

1 Конспекты лекций

1.1 Простая и сложная процентная ставка 05.02.2020

Для иллюстрации понимания работы сложного и простого процента введем следующие обозначения:

- i - процентная ставка (по умолчанию годовая)
- t - срок вклада
- $S_0 = P$ - начальный вклад
- S - конечный вклад

Опр: *Простыми процентами* называются такие процентные ставки, которые применяются к одной и той же первоначальной сумме на протяжении всей финансовой операции

Опр: *Сложными процентами* называются ставки, применяемые после каждого интервала начисления к сумме первоначального долга и начисленных за предыдущие интервалы процентов.

t (год)	Простой процент (%)	Сложный процент (%)
0	**100**	100
1	**110**	110
2	**120**	121

Таблица 1: Пример использования сложных и простых процентов

1.1.1 Формулы простых процентов

Формула для S_{n+1}:

$$S_{n+1} = S_n + S_0 \cdot i$$

Формула для конечного вклада:

$$S = P + P \cdot i \cdot n = P \cdot (1 + i \cdot n)$$

Формула для начального вклада:

$$P = \frac{S}{1 + i \cdot n}$$

Формула для процентной ставки:

$$i = \frac{\frac{S}{P} - 1}{t} = \frac{S - P}{t \cdot P}$$

Формула для продолжительности вклада:

$$t = \frac{\frac{S}{P} - 1}{i} = \frac{S - P}{i \cdot P}$$

1.1.2 Формулы простых процентов

Формула для S_{n+1}:

$$S_{n+1} = S_n \cdot (1+i) = S_n + S_n \cdot i$$

Формула для конечного вклада:

$$S = P \cdot (1+i)^n$$

Формула для начального вклада:

$$P = \frac{S}{(1+i)^n}$$

Формула для процентной ставки:

$$i = \sqrt[t]{\frac{S}{P}} - 1$$

Формула для продолжительности вклада:

$$t = log_{(1+i)} \frac{S}{P}$$

1.1.3 Срок удвоения вклада

Для простого процента:

$$2P = P \cdot (1 + i \cdot t_{new})$$

$$t_{new} = \frac{1}{i}$$

Для сложного процента:

$$2P = P \cdot (1+i)^{t_{new}}$$

$$2 = (1+i)^{t_{new}}$$

$$t_{new} = log_{(1+i)} 2$$

1.1.4 Задача о.в Манхэттен

t (год)	Деньги ($)
t_1 - 1626 год	$P - 24$
t_2 - 2019 год	$S - 49 \cdot 10^9$

Таблица 2: Данные о Манхэттене

Вопрос: Какова процентная ставка при простом и сложном проценте?

Решение:

Простой процент:

$$i = \frac{\frac{S}{P} - 1}{t} = \frac{S - P}{(t_2 - t_1) \cdot P} = \frac{49 \cdot 10^9 - 24}{24 * (2019 - 1626)} = 5.19 \cdot 10^6$$

Сложный процент:

$$i = \sqrt[(t_2 - t_1)]{\frac{S}{P}} - 1 = \sqrt[2019-1626]{\frac{49 \cdot 10^9}{24}} - 1 = 0.056 = 5.6\%$$

Срок удвоения оклада:

$$t_{new} = log_{(1+i)}2 = log_{(1+0.056)}2 = 12.7 \approx 13 \text{ years}$$

1.1.5 Смешанная ставка

Опр: *Смешанная процентная ставка* - ставка, которая осуществляется по следующему правилу - в пределах года используется простая ставка, а остальные - по сложной.

Формула для смешанной процентной ставки:

$$S = P \cdot (1 + i_c)^{[t]} + P \cdot (1 + i_c)^{[t]} \cdot \{t\} \cdot i_p = P(1 + i_c)^{[t]} \cdot (1 + \{t\} \cdot i_p)$$

где $[t]$ - целая часть числа, а $\{t\}$ - дробная.

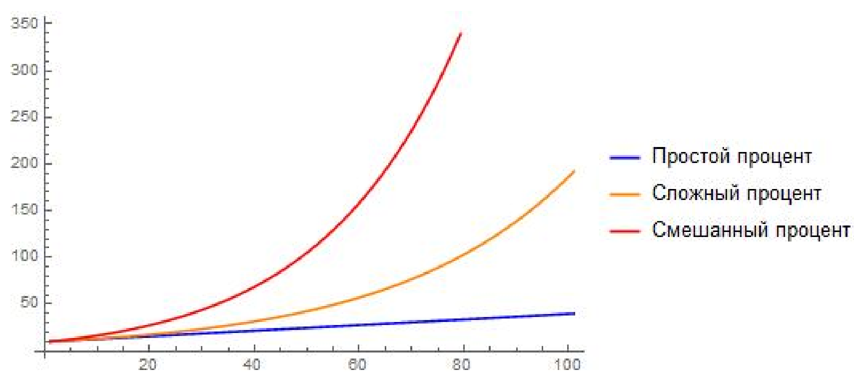


Рис. 1: График простой, сложной и процентной ставки

1.2 Процентная ставка для разных периодов времени 09.02.2020

Пусть задана простая процентная ставка. Нужно найти эквивалентную месячную ставку.

$$P \cdot (1 + i_{year} \cdot t) = P \cdot (1 + 12 \cdot i_m \cdot t)$$

$$i_m = \frac{i_{year}}{12}$$

$$i_d = \frac{i_{year}}{365}$$

Такой способ приведения и соотношения называются *относительными*.

Для сложных процентов:

$$S = P \cdot (1 + i_{year})^n = P \cdot (1 + i_m)^{12n}$$

$$i_m = \sqrt[12]{1 + i_{year}} - 1$$

А такой способ называется *уравновешенным*.

Пример:

Банк предъявляет простую годовую ставку i_{year} на срок до 3-х лет. Можем ли мы придумать более легкую стратегию? Да, мы можем положить деньги на вклад, снять деньги, а потом заново открыть вклад. Рассмотрим решение задачи двумя разными способами:

Решение:

$$P \cdot (1 + i \cdot t) < P(1 + i)^t$$

Если использовать месячную ставку, то получаем формулу:

$$(1 + \frac{i}{12})^{12} = BinomNewion = 1 + 12\frac{i}{12} + ... + > (1 + i)$$

$$i > 0,\, t > 1$$

$$\lim_{m \to \infty} (1 + \frac{i}{m})^{t \cdot m} = \lim_{m \to \infty} ((1 + \frac{i}{m})^{\frac{m}{i}})^{t \cdot i} = e^{it}$$

Такое начисление процентов называется *непрерывным*.

$$S = P \cdot e^{it}$$

Для сложной процентной ставки:

$$S = P \cdot (1 + i)^t = P \cdot e^{\alpha \cdot t}$$

$$\alpha = \ln(1 + i)$$

α - сила роста, сила процента, скорость относительного прироста вклада за $\Delta t \to 0$

$$\frac{\Delta f}{f \Delta t} = \frac{f'}{f}$$

$$S(t) = P \cdot e^{\alpha \cdot t}$$

Высчитаем силу прироста для функции $S(t)$

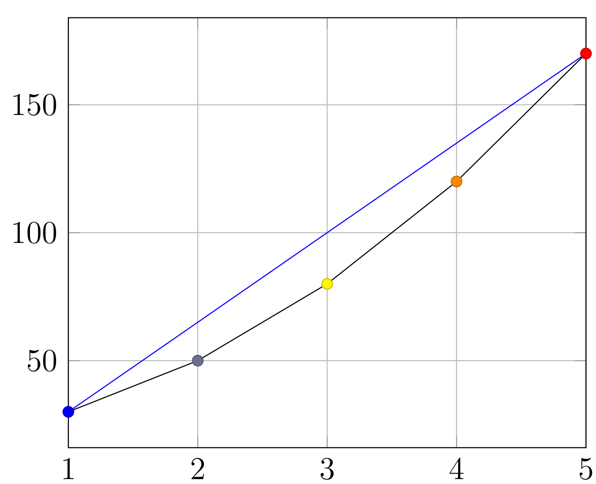
$$\frac{S'}{S} = \frac{P \cdot e^{\alpha \cdot t} \cdot \alpha}{P \cdot e^{\alpha \cdot t}} = \alpha$$

1.2.1 Переменная процентная ставка

Пусть на каком-то интервале времени t_1 действовала ставка i_1, на каком-то другом времени t_2 выполнялась ставка t_2 и.т.д. Ставка была простая, процентны набегали только на начальный вклад.

Задача: найти эквивалентную среднюю процентную ставку, которая по формуле простой процентной ставки приводила к такому же результату.

График переменной процентной ставки



$$T = \sum_i \tau_i$$

Формула для конечного вклада при переменной ставке для простых процентов:

$$P = P \cdot (1 + \tau_1 \cdot i_1 + \tau_2 \cdot i_2 + ... + \tau_n \cdot i_n) = P \cdot (1 + \bar{i} \cdot T)$$

Обозначим за $k_j = \frac{\tau_j}{T}$. Также очевидно, что $\sum k_j = 1$

Формула для средней ставке процентов при переменной ставке для простых процентов.

$$\bar{i} = \sum_k k_j \cdot i_j$$

Для переменной процентной сложной ставки выведем похожую формулу:

$$P \cdot (1 + i_1)^{t_1} \cdot (1 + i_2)^{t_2} \dots (1 + i_n)^{t_n} = P \cdot (1 + \bar{i})^T$$

$$T = \sum_i \tau_i$$

Обозначим за $k_j = \frac{\tau_j}{T}$. Также очевидно, что $\sum k_j = 1$. Формула для средней ставки сложных процентов равна:

$$\bar{i} = \prod_j (1 + i_j)^{\tau_j} - 1$$