Методы прогнозирования

ПМ-1701

Преподаватель:

Ивахненко Дарья Александровна
viktor_chernov@mail.ru

Санкт-Петербург
2020 г., 6 семестр

Список литературы

[1] Теория игр

Содержание

1 11.02.2020 **2**

1.1 Введение 2

2 Наивные методы прогнозирования **3**

2.1 Адаптивные методы прогнозирования 3

3 Функционалы качества **3**

1 11.02.2020

1.1 Введение

Будем исследовать временные ряды и варианты его прогнозирования. В конце семестра перейдем к машинному обучению.

Мы рассматривали введение в файле и семейство преобразований Бокса-Кокса:

$$y^{(\lambda)} = \begin{cases} \frac{y^{\lambda}-1}{\lambda}, \lambda \neq 0 \\ \ln y, \lambda = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{y^{\lambda} - 1}{\lambda} = \lim_{\lambda \to 0} \frac{\exp(\lambda \ln y) - 1}{\lambda} = \lim_{\lambda \to 0} \frac{1 + \lambda \ln y + O((\lambda \ln y)^2) - 1}{\lambda} = \ln y$$

$$y^{\lambda} = \frac{y^{\lambda} - 1}{\lambda}$$

$$\frac{\partial y^{\lambda}}{\partial \lambda} = \frac{\lambda y^{\lambda - 1}}{\lambda} = y^{\lambda - 1}$$

Параметр λ можно найти с помощью метода максимального правдоподобия:

$$L = \prod_{i=1}^{T} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot \exp\left(-\frac{(y_i^{(\lambda)} - \overline{y}^{(\lambda)})^2}{\sigma^2}\right) \cdot J(\lambda, y) \to \max$$

Прологорифмируем:

$$\ln L = \sum_{i=1}^{T} \left(\ln \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} - \frac{(y_i^{(\lambda)} - \overline{y}^{(\lambda)})^2}{2\sigma^2} + \ln J(\lambda, y)\right)$$

Воспользуемся оценкой выборочной дисперсии:

$$\hat{\sigma}^2 = \sum_{i=1}^{T} \frac{(y_i^{(\lambda)} - \overline{y}^{(\lambda)})^2}{T}$$

$$\ln \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} = \ln \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \ln \frac{1}{\sqrt{\sigma^2}} = \ln \frac{1}{\sqrt{2\pi}} - \ln \frac{(y_i^{(\lambda)} - \overline{y}^{(\lambda)})^2}{T}$$

Тогда:

$$\ln L = \sum_{i=1}^{T} \ln \frac{1}{\sqrt{2\pi}} - \ln \frac{(y_i^{(\lambda)} - \overline{y}^{(\lambda)})^2}{T} - \frac{T}{2} + \log \prod_{i=1}^{T} y_i^{\lambda-1} =$$

$$= \sum_{i=1}^{T} \ln \frac{1}{\sqrt{2\pi}} - \sum_{i=1}^{T} \ln \frac{(y_i^{(\lambda)} - \overline{y}^{(\lambda)})^2}{T} - \frac{T}{2} + (\lambda-1) \sum_{i=1} \ln y_i = -\frac{T}{2} \cdot \ln \sum_{i=1}^{T} \frac{(y_i^{(\lambda)} - \overline{y}^{(\lambda)})^2}{T} + (\lambda-1) \sum_{i=1} \ln y_i$$

Итого: логафрим функции правдоподобия Бокса-Кокса:

$$\ln L = -\frac{T}{2} \cdot \ln \sum_{i=1}^{T} \frac{(y_i^{(\lambda)} - \overline{y}^{(\lambda)})^2}{T} + (\lambda - 1) \sum_{i=1} \ln y_i$$

где

$$\overline{y}^{(\lambda)} = \frac{1}{T} \sum y_i^{(\lambda)}$$

T - количество элементов в выборке.

Взяв производную по параметру λ и прировняв к нулю, найдем решение, получим оценку методом максимального правдоподобия.

2 Наивные методы прогнозирования

2.1 Адаптивные методы прогнозирования

$$y_2 = y_1$$

$$y_3 = \alpha y_2 + (1 - \alpha) y_1 = l_3$$

$$y_4 = \alpha y_3 + (1 - \alpha)(\alpha y_2 + (1 - \alpha) y_1)$$

где $1 - \alpha = l_3$

С помощью l_0 можно использовать начальное значение.

3 Функционалы качества

Пусть случайная величина y распределена по следующему закону:

$$y_i = \sum_{j=0}^{m} \theta_j x_{ij} + N(0, \sigma^2) = N(\sum_{j=0}^{m} \theta_j x_{ij}, \sigma^2)$$

То есть
$$\mu = \sum_{j=0}^{m} \theta_j x_{ij} = \bar{\theta}^T \cdot \bar{x}_i$$

Найдем оценку параметра θ методом максимального правдоподобия.

Функция правдоподобия записывается следующим образом:

$$L(\mu, \sigma) = \prod_{i=1}^{n} p(y_i, \mu, \sigma^2) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi} \cdot \sigma)^n} \cdot e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{(y_i-\mu)^2}{\sigma^2}} \to \max_{\theta}$$

Прологарифмируем:

$$\ln L(\mu, \sigma) = \ln\left(\frac{1}{(\sqrt{2\pi} \cdot \sigma)^n}\right) + \left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{(y_i-\mu)^2}{\sigma^2}\right) = \ln\left((\sqrt{2\pi} \cdot \sigma)^{-n}\right) -$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{(y_i-\mu)^2}{\sigma^2} = -n \ln\sqrt{2\pi\sigma^2} - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\mu)^2 =$$

$$= -\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{\theta}^T \cdot \bar{x}_i)^2 \to \max_{\theta}$$

$$Q = -\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{\theta}^T \cdot \bar{x}_i)^2 \to \max_{\theta}$$

Пусть величина $y \in \{0, 1, 2, \ldots, \}$, тогда для нее применимо распределение Пуассона:
$$y \sim Poiss(\lambda)$$

Так как λ должно быть больше нуля, то хотелось бы линейную комбинацию $(-\infty, \infty)$ переделать в промежуток $(0, \infty)$. Это можно сделать с помощью потенцирования.

$$\log y = \bar{\theta}^T \cdot \bar{x} \Rightarrow \lambda = e^{\bar{\theta}^T \cdot \bar{x}}$$

Опять же найдем с помощью ммп логарифм функции правдоподобия
$$P(\xi = y) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^y}{y!}, y \in \{0, 1, 2, \ldots, \}$$
$$L(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} p(y_i, \lambda) = \prod_{i=1}^{n} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{y_i}}{y_i!}$$

$$\ln L(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \ln \frac{e^{-\lambda}\lambda^{y_i}}{y_i!} = \sum_{i=1}^{n} (-\lambda + y_i \ln \lambda - \ln(y_i!))$$

Последнее слагаемое не сожержит оцениваемого параметра λ, поэтому:

$$Q = \sum_{i=1}^{n} (-\lambda + y_i \ln \lambda) \to \max_{\theta}$$

$$Q = \sum_{i=1}^{n} (e^{\bar{\theta}^T \cdot \bar{x}} - y_i \ln e^{\bar{\theta}^T \cdot \bar{x}}) \to \min_{\theta}$$

В обобщенных линейных моделях ожидаемые значения отклика представляют собой линейную комбинацию предикторов, которые связаны с зависимой переменной через функцию связи g:

$$\mu = g^{-1}(\bar{\theta}^T \cdot \bar{x}_i)$$

$$g(\mu) = \bar{\theta}^T \cdot \bar{x}_i$$

Для нормального распределения, изначально было положено:

$$g(\mu) = \bar{\theta}^T \cdot \bar{x}_i = \mu$$

Для пуассоновского распределения:

$$g(\mu) = \log \lambda$$

$$\mu = g^{-1}(\log \mu) = e^{\log \mu} = \mu$$

Рассмотрим экспоненциальное семейство распределений:

$$f(y, \alpha, \varphi) = exp\left[\frac{y \cdot \alpha - c(\alpha)}{\varphi} + h(y, \phi)\right]$$

Для нормального распределения:

$$f(y, \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}} = exp\left[-\frac{y^2}{2\sigma^2} + \frac{y\mu}{\sigma^2} - \frac{\mu^2}{2\sigma^2} - \frac{1}{2}\log(2\pi\sigma^2)\right] =$$

$$= exp\left[\frac{\mu y - \frac{\mu^2}{2}}{\sigma^2} - \frac{y^2}{2\sigma^2} - \frac{1}{2}\log(2\pi\sigma^2)\right]$$

Это экспонненциальное распределение с:

$$\alpha = \mu, c(\alpha) = \frac{\alpha^2}{2}$$

$$E(y) = \mu = c'(\alpha)$$

$$D(y) = \varphi \cdot c''(\alpha) = \sigma^2 \cdot 1 = \sigma^2$$

$$g(\mu) = [c']^{-1}(\mu)$$

$$c(\mu)' = \mu = \bar{\theta}^T \cdot \bar{x}$$

Для Пуассона:

$$f(y, \lambda) = exp\left(\frac{y \cdot \log \lambda - \lambda}{1} - log(y!)\right)$$

$$\alpha = \log(\lambda), \lambda = exp(\alpha), c(\alpha) = \lambda, c(\lambda) = e^\lambda$$

$$\log(\lambda) = \bar{\theta}^T \cdot \bar{x}$$