Чернов В.П.

§ 1. Цепи Маркова. Вероятности переходов и состояний

Введение.

Предположим, что некоторый объект S в каждый момент времени находится в одном из состояний из данного конечного или счетного множества возможных состояний. Пусть смена состояний наблюдается в определенные дискретные моменты времени. Функционирование объекта S заключается для нас в смене состояний. Переход из одного состояния в другое осуществляется, вообще говоря, случайным образом и может быть описан на вероятностном языке. Предположим, что вероятность такого перехода не зависит от того, каким образом, то есть через какую последовательность состояний объект S попал в первое из двух рассматриваемых состояний.

В таком случае говорят, что функционирование S описывается цепью Маркова. Состояния S называются также состояниями цепи Маркова. Вероятность перехода из состояния A в состояние B обозначается посредством P_{AB}:

$$P_{AB} = P(A \to B) \tag{1.1}$$

Это условная вероятность: вероятность оказаться в состоянии B при условии, что предыдущим состоянием было A. Согласно определению, она не зависит от истории объекта S, от траектории, по которой объект пришел в состояние A. Свойство независимости от истории называется марковским свойством.

Часто состояния нумеруют целыми числами и обозначают посредством i, j и т.п. Вероятности перехода обозначают тогда посредством p_{ij}. Иногда состояния удобно обозначать наборами целых чисел, $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ в этом случае вероятности перехода записывают обычно в виде выражения

$$\mathbf{p}_{(i_1,\ldots,i_k)\,(j_1,\ldots,j_k)}.$$

Вероятности p_{ij} имеют два индекса, поэтому совокупность всех таких вероятностей естественным образом записывается в виде двумерного массива, в виде матрицы:

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} p_{12} \cdots p_{1n} \\ p_{21} p_{22} \cdots p_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ p_{n1} p_{n2} \cdots p_{nn} \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

В соответствии с конечностью или бесконечностью числа состояний и сама матрица P является конечной или бесконечной. Она называется матрицей вероятностей переходов (или переходной матрицей) и обладает следующими свойствами

$$0 \le p_{ij} \le 1 \qquad (1.3)$$

$$\sum_{j} p_{ij} = 1 \qquad (1.4)$$

Первое - это обычное свойство вероятностей; второе (сумма элементов любой строки равна 1) соответствует тому, что объект S из любого состояния i обязательно переходит в какое-то состояние j (в частности, он может перейти и в прежнее состояние i).Всякая матрица, элементы которой удовлетворяют условиям (1.3), (1.4), называется стохастической матрицей, и ее можно рассматривать как переходную матрицу некоторой марковской цепи.

Для того, чтобы решить задачу о функционировании объекта с помощью теории марковских цепей, требуется правильно ввести состояния объекта. Состояния должны быть определены таким образом, чтобы, с одной стороны, информация о состояниях объекта помогала нам решить задачу, а с другой стороны, - чтобы переходы из состояния в состояние обладали марковским свойством.

Пример.

Рассмотрим следующую игру n лиц. В урне находятся a_1 шаров первого цвета, a_2 - второго цвета, ... a_n шаров n-го цвета. За каждым игроком закреплен определенный цвет. Из урны наугад вынимается шар, его цвет определяет выигрывающего игрока. Затем шар возвращается в урну и разыгрывается следующая партия по тому же правилу.

Здесь объектом S является игра. Пусть состояния 1, 2, … n соответствуют цветам шаров. Тогда переход из состояния в состояние (функционирование S) соответствует результатам последовательности партий. Вероятность перехода определяется формулой

$$p_{ij} = \frac{a_j}{\sum_{k=1}^{n} a_k} \qquad (1.5)$$

и не зависит в данном случае от i, то есть состояния никак не связаны друг с другом. Это соответствует тому, что в матрице вероятностей переходов P все строки одинаковы. Марковская цепь в данном случае является очень простой. Вопрос о том, сколько партий выиграл j-й игрок, можно сформулировать таким образом: сколько раз объект S побывал в j-м состоянии?

Рассмотрим теперь ту же игровую урновую схему, но со следующей модификацией: выигравший игрок перед следующей партией меняет содержание шаров в урне по определенному правилу. Допустим, что он может увеличить вероятность своего выигрыша в будущем, добавляя в урну лишний шар "своего" цвета. В этом случае пропорции цветов в урне меняются от партии к партии. Вероятность p_{ij}, то есть вероятность выигрыша j-го игрока при условии, что в предыдущей партий выиграл i-й игрок, определяется информацией не только о выигрыше i-го игрока, но и о всей последовательности предшествующих выигрышей игроков, так как вся эта последовательность определяет пропорции шаров различных цветов, сложившиеся в урне к рассматриваемому моменту. Таким образом, марковское свойство в этой ситуации отсутствует. Изменения состояний, то есть функционирование рассматриваемой системы (игры) не описывается марковской цепью.

Однако если в той же игре ввести состояния по-другому, так, чтобы в описании состояний содержалась новая информация, то может оказаться, что переходы между состояниями в новом смысле уже будут обладать марковским свойством. Рассмотрим такой вариант.

Введем в той же игре состояния в новом смысле, так, чтобы в состояниях содержалась информация о распределении шаров по цветам. А именно, будем говорить, что S находится в состоянии (b_1, b_2, … b_n) (где b_1, b_2, … b_n - целые неотрицательные числа), если в урне находится b_1 шаров первого цвета, b_2 - второго цвета, … b_n шаров n- го цвета. Переход из состояния в состояние связан с выигрышем одного из игроков. За один шаг может реализоваться лишь такой переход, при котором в наборе (b_1, b_2, … b_n) равно одна компонента увеличивается на 1. Вероятности всех переходов другого типа равны 0, а вероятность перехода данного типа (вероятность выигрыша i-го игрока) равна

$$p_{(b_1,\ldots,b_i,\ldots b_n)(b_1,\ldots b_i+1,\ldots,b_n)} = \frac{b_i}{\sum_{k=1}^{n} b_k}. \qquad (1.6)$$

Эти вероятности не зависят от истории, от той последовательности результатов партий, которая привела к состоянию (b_1, b_2, … b_n), а зависят лишь от сложившейся результирующей ситуации, от самого состояния (b_1, b_2, … b_n). Следовательно, функционирование в нашем новом смысле, описанное в терминах новых состояний, обладает марковским свойством и описывается марковской цепью

Число партий, которые выиграл j- й игрок, определяется разностью между соответствующими компонентами сложившегося состояния (b_1, b_2, … b_n) и исходного состояния (a_1, a_2, … a_n).

Матрицы и графы.

В задачах, связанных с марковскими цепями, удобным оказывается язык теории графов. Вершины графа соответствуют состояниям цепи, а ориентированные дуги - возможным переходам из одного состояния в другое. Например, граф на рис.1.1. соответствует цепи с тремя состояниями: 1, 2, 3 и с ненулевыми вероятностями переходов p_{11}, p_{12}, p_{13}, p_{23}, p_{32}.

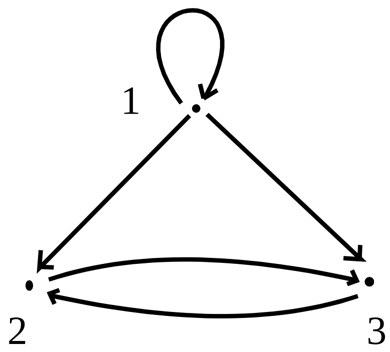

Рис. 1.1. Граф марковской цепи с тремя состояниями

Матрица такой цепи имеет вид

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ 0 & 0 & p_{23} \\ 0 & p_{32} & 0 \end{pmatrix}. \qquad (1.7)$$

Иногда около дуг графа пишут значения вероятностей соответствующих переходов, в этом случае вся информация, содержащаяся в матрице, переносится на граф.

До сих пор мы рассматривали вероятности непосредственного перехода, перехода за 1 шаг. Легко можно получить формулы для вероятностей перехода за несколько шагов. Переход из состояния i, в состояние j за 2 шага осуществляется следующим образом: сначала за 1 шаг происходит переход из i в некоторое промежуточное состояние k, а потом, за второй шаг, из k в j. Таким образом, вероятность $p_{ij}^{(2)}$ перехода из i в j за 2 шага равна

$$p_{ij}^{(2)} = \sum_k p_{ik} \cdot p_{kj} \qquad (1.8)$$

(суммирование ведется здесь по всем состояниям k). В общем случае переход из i в j за m шагов можно разбить на два этапа: сначала за первые t шагов $0<t<m$ осуществляется переход из i в некоторое промежуточное состояние k, затем за оставшиеся m - t шагов переход из k в j. Вероятность $p_{ij}^{(m)}$ перехода из i в j за m шагов равна, таким образом,

$$p_{ij}^{(m)} = \sum_k p_{ik}^{t} \cdot p_{kj}^{(m-t)}. \qquad (1.9)$$

В частности, полагая t = 1 и t = m–1, получаем две формулы:

$$p_{ij}^{(m)} = \sum_k p_{ik}^{m-1} \cdot p_{kj}. \qquad (1.10)$$

$$p_{ij}^{(m)} = \sum_k p_{ik} \cdot p_{kj}^{(m-1)}. \qquad (1.11)$$

При $m=3$ эти формулы позволяют вычислить вероятности перехода за 3 шага, если уже известны вероятности перехода за 2 шага (а последние можно получить по формуле (1.8), которая совпадает с (1.10) и (1.11) при $m=2$). При $m=4$ они дают способ вычисления четырехшаговых вероятностей, если предварительно уже подсчитаны трехшаговые, и т.д. В общем случае эти формулы позволяют найти вероятности перехода за любое число шагов, если предварительно определены вероятности перехода за меньшее число шагов.

Пример.

Дана матрица P цепи Маркова с тремя состояниями:

$$\begin{pmatrix} p_{11}, p_{12}, p_{13} \\ p_{21}, p_{22}, p_{23} \\ p_{31}, p_{32}, p_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}. \qquad (1.12)$$

Найти вероятность $p_{32}^{(3)}$

Решение. Согласно (1.10)

$$p_{32}^{(2)} = p_{31} \cdot p_{12}^{(2)} + p_{32} \cdot p_{22}^{(2)} + p_{33} \cdot p_{32}^{(2)}. \qquad (1.13)$$

Необходимые вероятности перехода за 2 шага вычисляются следующим образом:

$$p_{12}^{(2)} = p_{11} \cdot p_{12} + p_{12} \cdot p_{22} + p_{13} \cdot p_{32} = \frac{5}{12};$$

$$p_{22}^{(2)} = p_{21} \cdot p_{12} + p_{22} \cdot p_{22} + p_{23} \cdot p_{32} = \frac{4}{9};$$

$$p_{32}^{(2)} = p_{31} \cdot p_{12} + p_{32} \cdot p_{22} + p_{33} \cdot p_{32} = \frac{5}{12}.$$

Отсюда $p_{32}^{(2)} = \frac{31}{72}$.

При фиксированном значении m запись массива вероятностей $p_{ij}^{(m)}$ можно оформить в виде матрицы:

$$P^{(m)} = \begin{pmatrix} p_{11}^{(m)}, p_{12}^{(m)}, \ldots, p_{1n}^{(m)} \\ p_{21}^{(m)}, p_{22}^{(m)}, \ldots, p_{2n}^{(m)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_{n1}^{(m)}, p_{n2}^{(m)}, \ldots, p_{nn}^{(m)} \end{pmatrix}. \tag{1.14}$$

В этих обозначениях исходная матрица P совпадает с $P^{(1)}$. Согласно (1.8.) элементы матрицы $P^{(2)}$. совпадают с соответствующими элементами произведения матрицы P на себя, так что $P^{(2)} = P^2$. Методом математической индукции (используя (1.10) или (1.11) для обоснования индукционного перехода) можно доказать, что аналогичное равенство верно и в общем случае

$$P^{(m)} = P^m. \qquad (1.15.)$$

Вероятности состояний.

Мы рассмотрели вероятности перехода из данного исходного состояния в данное заключительное. Предположим теперь, что исходное состояние нам точно не известно. Точнее, пусть дано распределение вероятностей исходного состояния, то есть набор (стохастический вектор)

$$Q = (q_1, q_2, \ldots, q_n). \tag{1.16}$$

где q_j есть вероятность того, что исходным состоянием является j-е. Очевидно, что

$$0 \le q_j \le 1, \tag{1.17}$$

$$\sum_j q_j = 1. \tag{1.18}$$

Случай, когда исходное состояние полностью определено, соответствует тому, что одна из компонент вектора Q равна 1, а остальные равны 0.

Пусть $q_j^{(m)}$ - вероятность того, что объект S через m шагов после начала функционирования окажется в j-м состоянии, если его начальное состояние задано вектором (1.13), а вероятность перехода - матрицей (1.2). Набор таких вероятностей обозначим посредством Q^m:

$$Q^{(m)} = (q_1^{(m)}, q_2^{(m)}, \ldots q_n^{(m)}) \tag{1.19}$$

При этом $Q = Q^{(0)}$.

Нетрудно видеть, что

$$q_j^{(m)} = \sum_{k=1}^{n} q_k \, p_{kj}^{(m)} \tag{1.20}$$

откуда следует, что

$$Q^{(m)} = Q \cdot P^{(m)} = Q \cdot P^m. \tag{1.21}$$

Пример.

Для матрицы (1.12) и вектора

$$Q = \left(0,\ \frac{1}{4},\ \frac{3}{4}\right) \tag{1.22}$$

Найти вероятность $q_2^{(2)}$.

Решение. Согласно (1.20)

$$q_2^{(2)} = q_1 \cdot p_{12}^{(2)} + q_2 \cdot p_{22}^{(2)} + q_3 \cdot p_{32}^{(2)} = \frac{61}{144}.$$

Обобщения.

Отметим два обобщения понятия марковской цепи. Первое связано с отказом от стационарности вероятностей перехода за один шаг. Элементы матрицы P в этом случае могут менять свои значения в зависимости от времени (числа шагов), прошедшего после начала функционирования. Такие цепи называются нестационарными.

Другое обобщение связано с введением ограниченной зависимости от истории. Точнее, допускается зависимость вероятностей p_{ij} от фиксированного числа k состояний, предшествующих i. Такие цепи называются k-связными. При $k = 0$ получаем обыкновенную марковскую цепь.

В дальнейшем мы будем рассматривать лишь стационарные обыкновенные цепи.

Упражнения

1. Задать конкретную стохастическую матрицу 4x4 и 4-мерный стохастический вектор. Найти для них вероятность перехода из одного состояния в другое за 3 шага и вероятность оказаться в данном состоянии через 2 шага после начала функционирования.
2. Рассмотрим некоторое множество мужчин, разделенное по профессиям на работников умственного труда, рабочих высокой квалификации и рабочих низкой квалификации. Допустим, что 60% сыновей работников умственного труда становятся работниками умственного труда, 30% становятся рабочими высокой квалификации и 10% - рабочими низкой квалификации. Пусть из сыновей рабочих высокой квалификации 50% становятся рабочими высокой квалификации и по 25% - работниками умственного труда и рабочими низкой квалификация. Предположим, что 30% сыновей рабочих низкой квалификации становятся рабочими низкой квалификации, 50% - рабочими высокой квалификации и 20% - работниками умственного труда. В предположении, что каждый мужчина имеет одного сына, опишите сложившуюся ситуацию при помощи марковской цепи и найдите вероятность того, что

правнук рабочего низкой квалификации станет работником умственного труда.

3. В предыдущем упражнении мы предположили, что у каждого мужчины есть сын. Предположим теперь, что для мужчины вероятность иметь сына равна 0,7. Опишите эту новую ситуацию в терминах марковской цепи и найдите вероятность того же события, что и в упражнении 2.
4. Является ли стохастической матраца вероятностей перехода за 2 шага? за m шагов? Ответ обосновать двумя способами: опираясь на определение вероятностей перехода за несколько шагов и на правило умножения матриц.
5. Докажите, что если для некоторого числа шагов m вероятность перехода из любого состояния в любое отлична от 0, то это же выполнено и для любого числа шагов, большего m.