Теория и системы поддержки принятия решения

ПМ-1701

Преподаватель:

Фролькис Виктор Абрамович

Санкт-Петербург
2020 г., 6 семестр

Список литературы

[1] Теория игр

Содержание

1 11.02.2020

1.1 Критерий

Опр: *Критерий оптимальности* - совместно сформулированная цель в задаче оптимиации. Слово цель неоднозначно - оно имеет разный смысл: цель намерения и цель планов. Изучая данную дисциплину, мы будем формулировать критерий в смысле *цели плана*.

Если мы говорим об оптимальности,то мы должны понимать, то речь идет о целе, которую мы измеряем в некоторой шкале. Следовательно, цель должна быть измеряемой в рамках некоторой шкалы.

Математически мы можем описать данную шкалу как кортеж:

$$< X, Y, f >$$

где X - множество объектов, которые мы измеряем, Y - знаковая система, а $f : X \xrightarrow{f} Y$ - отображение.

Элементы $y \in Y$ называются делениями шкалы. Y -область значений функции f, X - область определения функция f, f -измерение.

Шкалы принято классифицировать по *типам* измеряемых данных.

Пример: имеется три персоны: Иванов, Петров, Сидиров. Y - измеряется в сантиметрах, с помощью которой мы можем оценить Иванова, Петрова и Сидирова. Знаковая система тогда будет являться следующим списком $(170, 180, 160)$. Мы можем поставить их в различных порядках. Это зависит от выбора *цели* (рост, вес и.т.д).

В общем случае для оценивания объектов X потребется n признаков:

$$x_o \in X : p_1, p_2, ..., p_N$$

Каждый признак оценивается по своей шкале:

$$< X, Y_j, f_j >$$

где j - номер наблюдения.

Для каждого объекта мы можем получить какое-то минимальное и максимальное значение по признаку:

$$[y_{j,min}, y_{j,max}]$$

Задача многокритериального выбора обычно не ограничиваются поиском лучшего объекта - каждому из рассматриваемых объектов присваивается определенный рейтинг. Так как выбор достигается на лучшем объекте, то остальные объекты оцениваются по степени близости к лучшему объекту. Меры достижения цели.

Граница шкал является идеальной целью, которая обычно является недостижимой, поэтому задача многокрителиального выбора основана на компромиссе.

Реальные цены соответствут некоторым граничным значениям. В рамках реальной цели индивидум будет пытаться достичь какую-то точку внутри идеальной цели. В рамках реальной цели будем стремиться к верхней границе реальной цены - наилучшая реальная цена.

В рамках неравенств это выглядит следующим образом:

$$y_{j,min} \le y_{j,n} \le c_j \le y_{j,b} \le y_{j,max}$$

Реальная цель используется в качестве базиса. Для сравнения можно использовать предикат бесконечнозначной логики:

$$P \ge (f_j(x_i), c_j)$$

где $f_j(x_i)$ - оценка, а c_j - критерий(база сравнений)

Опр: Логистическая функция, заданная на множестве утверждений и принимающая какое-то значение на основании утверждения, называется *предикатом* P. В нашем случае наша функция может принимать значение на каком-то интервале.

Опр: *k-значимая логика* - функция принимает k значений.

Опр: *Бесконечнозначимая логика* - функция принимает значения от $(0;1)$

Опр: *Двухзначная логика* - принимает значения "да"или "нет"

У нас может допускаться частичное достижение цели (с какой-то определенной большой вероятностью), так как мы не всегда сможем достичь значение цели по всевозможным параметрам системы.

Замечание: можно ввести предикаты для объектов.

Опр: *Отношение предпочтения* объектов удовлетворяет двум условиям:

1. Если $(A, B) \Leftrightarrow f(A) > f(B) \vee (B, A) \Leftrightarrow f(B) > f(A) \vee (B \equiv A) \Leftrightarrow f(B) = f(A)$

2. Если $(A, B) > (B, C) \Rightarrow (A, B) > (A, C)$

Событие (A, B) читается как "A предпочитетельнее B"

1.2 Измерения и шкалы

Критерий - цель, измеренная в некоторой шкале. Измерение - некоторая итерация, по которой мы наблюдаем состояние объекта, и соответствующее ей некоторое число.

Различным состоянием ставятся разные символами, а неразличимым состояниям - одинаковые символы. Для установления тождества различия состояния должны выполняться 3 аксиомы:

1. $A = B \mid A \neq B$
2. $A = B \Leftrightarrow B = A$
3. $A = B, B = C \Rightarrow A = C$

1.2.1 Типы шкал

1. Шкала наименований (номинальная,классификационная).

По данной шкале объекты либо совпадают, либо различаются. Т.е каждому объекту сопоставляется уникальное имя, позволяющее отличать один объект от другого. Если имена совпадают, то объекты тождественны, иначе объекты различаются.

Способы обработки объектов в номинальной шкале: посчитать количество встречающихся элементов, высчитываются относительные частоты, сравнение частот между собой, мода объекта.

2. Порядковая шкала (ранговая)

Такая шкала позволяет реализовать предпочтение одного объекта по отношению к другому объекту.

2.1 *Шкала строгого порядка* - если между двумя любыми элементами можем установить отношение порядка. Для данной шаклы должно выполняться 3 аксиомы + выполняются следующие две аксиомы.

$$4.\ A > B \mid B > A$$
$$5.\ A > B, B > C \Rightarrow A > C$$

2.2 *Шкала нестрогого порядка* - есть элементы, которые между собой мы упорядочить не можем. Для данной шкалы выполняются три аксиомы и еще две, представленные ниже:

$$4а.\ A > B, B > A \Rightarrow A = B$$
$$5а.\ \geq B, B \geq C \Rightarrow A \geq C$$

2.3 *Шкала линейного порядка* - если можно установить отношение предпочтения, если можно установить предпочтения между всеми парами объекта, т.е все объекты можно упорядочить.

2.4 *Частичная шкала* - неполный класс.

2.5 *Качественная шкала* - объекты разбиваются по классам.

2.6 *Бальная шкала* - разным объектам разные ебаллы

Опр: Расстояние между объектами - насколько далеко находятся между собой объекты. Отклонение - расстояние от объекта до лучшего.

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, x_i > x_j \\ 0, x_i < x_j \end{cases}$$

Тогда, расстояние между двумя несоседними объектами определяется числом предпочтений:

$$d_{ik} = \sum_{j=i}^{K-1} a_{jj+1}$$

$$x_i \sim R_i, x_i \sim x_r : d_{ik}$$

$$r_k = r_i + d_{ik}$$

2.7 *Равномерная шкала* - равные интервалы сопостовляют равные отрезки шкал

2.8 *Интервальная шкала*: $y = ax + b$, a - масштаб, b - смещение.

2.9 *Новая шкала*: $y = ax + n \cdot b$, a - масштаб, b - смещение.

2.10 *Шкала отношений*: $y = ax$ - позволяет сопоставлять величины, измеренные в разных шкалах. Для данной шкалы выполняются следующие свойства:

$$1.\ A = P, B > 0 \Rightarrow A + B > P$$
$$2.\ A + B = B + A$$
$$3.\ A = P, B = Q \Rightarrow A + B = P + Q$$
$$4.\ (A + B) + C = A + (B + C) = A + B + C$$

2.11 *Абсолютная шкала* : переводит ответы в числа.

2.12 *Полярная шкала* : оценивание противоположностей

Чем более слабая шкала, тем больше вероятность исказить результат измерения.

2.12 *Мнение эксперта* : когда не удается произвести оценку эксперимента, эксперты принимают роль экспертного прибора.

1.3 Упорядоченные критерии

В том случае, если все критерии равнозначны, то можно использовать метод порядков, Парето-доминирования.

В основу Парето-доминирования положено следующее.

- Каждый критерий Парето измеряется по своей шкале
- Для каждого критерия шкала критерия позволяет упорядочить объекты по данному критерию
- Все критерии одинаково значимы.

В рамках Парето-доминирования мы должны как-то упорядочить наши правила:

предпочтение одному объекту перед другим отдается только в том случае, когда первый объект по всем критериям *не хуже второго* и первый объект хотя бы по одному критерию *лучше* второго. Тогда мы говорим, что первый объект - *доминирующий*, а второй *доминируемым*. Не хуже $\geq$, не лучше $\leq$.

Допустим, что есть объекты x_i и x_k. Тогде x_i не хуже x_k, если $Pr \geq (x_i, x_k) +$ $x_i > x_k \Leftrightarrow$, когда вектор оценок предпочительнее, т.е:

$$x_i \sim \bar{y_i} = (y_{i1}, \ldots, y_{im})$$

$$x_k \sim \bar{y_k} = (y_{k1}, \ldots, y_{km})$$

$$\bar{y_i} > \bar{y_k} \Leftrightarrow \forall j \in [1, \ldots, n] : (y_{ij} > y_{kj}) \quad \text{and} \quad \exists l : y_{il} > y_{kl}$$

Не лучше - аналогично.

Векторы равнозначны, если их векторные свойства одинаковые. Объекты несравнимы, если существуют номера, для которых один векторный признак больше, а другой векторный признак меньше.

Если на множестве объектов не существует объекта лучшего, чем x, то объект x называется *недоминируемым*. Множество, состоящее из недоминированных объектов, называется множеством Парето.

N-объектов, то нам потребуется $N * (N-1)$ сравнений объектов. Результаты всех сравнений фиксируются в матрице парных сравнений. Элементы диагональной матрицы нулевые. Не хуже - единицы, не лучше -1. Такая матрица показывает предпочтение объектов. Если свойства одинаковы, то 1.

Матрица смежности графа - можно визуально представить с помощью графа доминирования.

Пример:

Допустим, имеются 5 человек, который сдают экзамен.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} math & physics & russian & english \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} & \begin{bmatrix} 5 & 4 & 5 & 5 \\ 4 & 5 & 5 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 3 & 3 & 4 \end{bmatrix} \end{array}$$

Пусть A - матрица предпочтений:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Степени вершин графа: x_i - вершина, то степень вершины графа - число дуг, входящих в вершину графа: $deg^+(x_1)$. $deg^-(x_1)$ - число выходящих.

$$deg^+(x_1) = deg^+(x_2) = 0$$

$$deg^-(x_3) = 0$$

$$def^-(x_1) = deg^-(x_2) = 3$$

$$deg^+(x_3) = deg^+(x_4) = 2$$

$$deg^-(x_3) = deg^-(x_4) = 1$$

$$deg^+(x_5) = 4$$

Число дуг в полном графе определяется числом вершин n: $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$

Первое свойство - свойсто доминирования - число дуг, соедининяющих верхние уровни ранжированного графа с числом дуг, соединияющих вершины нижних дуг.

Показатель доминирования:

$$K_{dom} = \frac{m_{dug}}{g}$$

Показатель неразличимости - число ребер, соединяющих вершины, принадлежащие одному уровню:

$$K_{razl} = \frac{m_{nr}}{g}$$

Показатель несравнимости -

$$K_{nesravn} = 1 - K_{dom} - K_{razl}$$

В нашем примере: $g = 5 \cdot (5-1)/2 = 10$. $m_{dug} = 8$,$k_{dom} = 0.8$,$m_{nr} = 1$,$k_{razl} = 0.1$, $K_{nesravn} = 0.1$

Мера строгостей порядка определяется числом уровней ранжированного графа. 3 уровня. Число достижимости исходного порядка: номер максимального уровня равен n, то достигается максимальный уровень.$3 < 5$

Показатель строгости:

$k_{ctr} = \frac{l_{max}-1}{N-1} = \frac{3-1}{5-1} = 0.5$

Все объекти недоминируемыми, если каждый из них хотя бы по одному критерию лучше всех остальных.

Мощность множества Парето увеличивается с увеличением количества признаков, используемых в качестве критериев.

Чем вершина выше, тем ее ранг ниже:

$$l_{min}(x_i) = def^+(x_i) + 1$$

$$l_{max}(x_i) = N - deg^-(x_i)$$

l_{max} - уровень, ниже которого вершина не может оказаться.

1.4 Задачи многокритериальной линеной оптимизации

Речь идет о том, что существует несколько целевых функций для оптимизации.

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)$$

$$\{y_j(x) \le 0, j = 1, 2, \dots, M\}$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

С целью поиска оптимальной точки, введем понятие *эффективного решения*. Эффективным решением назовем такое решение задачи оптимизации, в рамках которого невозможно улучшить целевое значение какой-то целевой функции без ухудшения других функций.

Решение x^* является эффективным, если не существует другого решения x', такого, что, например, в случае задачи оптимизации, $f_l(x') \ge f_l(x^*), l = 1, 2, \dots, k$, а $f_m(x') > f_m(x^*)$. Такое решение называется Парето оптимальным.

Решение называется неэффективным, если не выполняется предыдущее условие.

Решение, в котором показатель эффективности не оптимальны, но оказываются наилучшими для всех критериев одновременно, определяют область компромисса рассматриваемого критерия. В этой области компромисса невозможно одновременное улучшение всех критериев. Область компромисса принадлежит области допустимых решений.

Решение области компромисса являются оптимальными по Парето.

1.5 Метод компромиссного решения

Рассматривается задача линейного программирования с несколькими функциями.

$$\Phi_j(x) = \sum_{i=1}^{N} a_{ji} x_i \le b_j, j = 1, 2, \dots, M, \quad i = 1, 2, \dots, N, x_i \ge 0$$

$$f_{l'} = \sum_i c_{l'i} x_i \to \max, l' = 1, 2, \dots, k' \tag{2a}$$

$$f_{l''} = \sum_i c_{l''i} x_i \to \max, l'' = 1, 2, \dots, k'' \tag{2b}$$

$$k' + k'' = k$$

$$f_{l',max}, f_{l'',min} =$$

$$\frac{f_{l',max} - f_l(x)}{f_{l',max}} \leq x_{N+1} \qquad (3a)$$

$$\frac{f_{l''}(x) - f_{l'',min}}{f_{l'',min}} \leq x_{N+1} \qquad (3b)$$

Мы хотим, чтобы минимизировать функцию с ограничениями $M + K$:

$$f_{N+1} = x_{N+1} \to \min \qquad (4)$$

Если решение не равно нулю, то решение есть.

$$f_{l'}(x) + f_{l',max} X_{N+1} \geq f_{l',max} \qquad (5a)$$

$$f_{l''}(x) - f_{l',min} X_{N+1} \leq f_{l'',min} \qquad (5b)$$

1.6 Метод последовательных уступок

1.6.1 Метод главного критерия

Будем искать недоминированное решение.

1. Упорядочим критерии по важности, присваивая номеру 1 - самый важный критерий.

$$f_1, f_2 \to F_1, F_2$$

1.6.2 2-ой вариант метода уступок

$$f_1 \to \max + (1) : f_{1,max}, f_2 \to \min + (1) : f_{2,min}$$

$$f_{1,max} > f_{12} > f_{13} > \ldots > f_{1p}$$

$$f_{2min} < f_{22} < f23 < f_{1p}$$

$$f_1(x) \to max + (1) + f_2(x) > f_{2n}, n = 1, 2, p \qquad (8)$$

$$f_2(x) \to min + (1) + f_1(x) < f_{1n}, n = 1, 2, p \qquad (8)$$

Задаем набор уступок для первой задачи и для второй.

1.6.3 Метод равных и наименьших отклонений

Попытаемся сделать максимально маленькими отклонения. Первый критерий всегда максимизируется.

$$f_l^* = extr\, f_l(x)$$

$$\left|\frac{f_1 - f_1^*}{f_1^*}\right| = \left|\frac{f_2 - f_2^*}{f_2^*}\right| = \left|\frac{f_k - f_k^*}{f_k^*}\right|$$

$$q_{l'} = \frac{1}{f_{l'}^*}$$

$$q_1 f_1 = q_{l'} f_{l'} (10)$$

$$\frac{f_1}{f_1^*} - \frac{f_{l'}}{f_{l'}^*} = 0 \tag{11}$$

Если максимизируется, а второй минимизируется, то мы пишем знак + в (10).

$$\frac{f_1}{f_1^*} + \frac{f_{l''}}{f_{l''}^*} = 2 \tag{12}$$

После этого решаем задачу оптимизации:

$$f_1(x) = \sum c_{li} x_i \to \max + (12) + (11) + (1)$$

$$\sum c_{li} x_i - c_{li} x_i - f_{l'} = 0, \sum c_{li} x_i - f_{l''} = 0 \tag{12}$$

1.6.4 Метод весовых оценок критерив

Либо все критерии минимизируются, или максимизируются. Цель - построить максимально копромиссную целевую функцию. Имеется вектор k. 1. Привести все функции к безразмерной форме. Нормировать на те оценки, что получились. 2. Присваиваем веса, получаем целевую функцию:

$$F(X) = \sum_l \alpha_l \frac{f_l(x)}{f_l^*} \to \max(\min)$$