Чернов В.П.

§ 4. Марковские процессы и процессы гибели и рождения

Рассмотрим следующую модификацию понятия марковской цепи: откажемся от условия, что смена состояний возможна лишь в определенные дискретные моменты времени, то есть будем считать допустимой смену состояний в любой момент.

В таком случае говорят не о марковской цепи, а о марковском процессе. Цепь иногда называют дискретным процессом или процессом с дискретным временем.

Подчеркнем, что различие между цепью и процессом связано с дискретностью или непрерывностью времени. Множество же состояний по–прежнему остается конечным или счетным, то есть дискретным.

Для процессов теряет смысл понятие перехода за один или несколько шагов, поскольку неосмысленным становится само понятие шага. Матрица переходов (1.2) заменяется матрицей

$$P^{(t)} = \begin{pmatrix} p_{11}^{(t)}, p_{12}^{(t)}, ..., p_{1n}^{(t)} \\ p_{21}^{(t)}, p_{22}^{(t)}, ..., p_{2n}^{(t)} \\ .... \\ p_{n1}^{(t)}, p_{n2}^{(t)}, ..., p_{nn}^{(t)} \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

где $p_{ij}^{(t)}$ есть вероятность перехода из i в j за время t.

Элементами этой матрицы являются не числа, а функции; конкретная вероятность перехода (число) получается при конкретизации времени t, за которое осуществляется переход.

Матрица (4.1) является стохастической, при любом значении t выполняются свойства стохастической матрицы:

$$0 \le p_{ij}^{(t)} \le 1 \tag{4.2}$$

$$\sum_j p_{ij}^{(t)} = 1 \tag{4.3}$$

Вероятности перехода из состояния i в состояние j за время t_1+t_2 можно выразить через вероятности переходов из состояния i в различные другие состояния промежуточные состояния k за время t_1 и вероятности переходов из этих состояний k в целевое состояние j за время t_2. Соответствующая формула аналогична формуле (1.9) для марковских цепей:

$$p_{ij}^{(t_1+t_2)} = \sum_k p_{ik}^{(t_1)} \cdot p_{kj}^{(t_2)} . \qquad (4.4)$$

Отсюда следует, что матрицы вероятностей переходов за различные промежутки времени связаны между собой соотношением:

$$P^{(t_1+t_2)} = P^{(t_1)} \cdot P^{(t_1)} . \qquad (4.5)$$

Если дан вектор Q вероятностей исходного состояния,

$$Q = (q_1, q_2, \ldots, q_n),$$

то вероятность $q_j^{(t)}$ того, что объект через время t после начала окажется в состоянии j, может быть определена по формуле

$$q_j^{(t)} = \sum_k q_k \cdot p_{kj}^{(t)} . \qquad (4.6)$$

Таким образом, вектор $Q^{(t)}$ состояний через время t, компонентами которого являются $q_j^{(t)}$, удовлетворяет равенству

$$Q^{(t)} = Q \cdot P^{(t)} . \qquad (4.7)$$

Состояния марковского процесса могут быть классифицированы аналогично тому, как это делается для цепи, и может быть сформулирована и доказана соответствующая эргодическая теорема.

Понятие марковского процесса является весьма плодотворным в описании процессов обслуживания. Особенно важную роль при этом играет частный случай марковских процессов – процессы гибели и рождения. Эти процессы определяются следующим образом.

Для каждого состояния i выделяется некоторое множество состояний A_i, содержащее i; состояния $j \in A_i$ называются состояниями, соседними с состоянием i. Марковский процесс называется процессом гибели и рождения, если вероятности перехода из одного состояния в другое удовлетворяют условиям

$$p_{ij}^{(t)} = o(t) \text{ при } j \notin A_i \qquad (4.8)$$

$$p_{ij}^{(t)} = \alpha_{ij} \cdot t + o(t) \text{ при } j \in A_i,\ j \neq i. \qquad (4.9)$$

$$p_{ii}^{(t)} = 1 - \sum_{\substack{j \in A_i \\ j \neq i}} \alpha_{ij} \cdot t + o(t) \qquad (4.10)$$

Условие (4.8) показывает, что вероятность перехода не в соседнее состояние за малый промежуток времени есть величина, бесконечно малая по сравнению с длиной этого промежутка. Таким образом, непосредственный переход не в соседнее состояние невозможен. Равенство (4.9) позволяет выделить в вероятности перехода линейную часть. Оставшаяся часть имеет более высокий порядок малости. Вероятность (4.10) дополняет сумму остальных до 1.

В дальнейшем нам будет удобно множество состояний нумеровать, начиная не с 1, а с 0, так что в случае конечного числа состояний список возможных состояний M имеет вид

$$M = \{0, 1, \ldots, n\}, \tag{4.11}$$

а в случае бесконечного множества состояний - вид

$$M = \{0, 1, \ldots, n, \ldots\}. \tag{4.12}$$

Множество соседних состояний A_i к состоянию i будет определяться обычно следующим образом

$$A_i = \{i-1,\ i,\ i+1\} \tag{4.13}$$

с естественными изменениями, на границах, то есть в тех случаях, когда одно из состояний в (4.13) не существует, а именно при $i = 0$

$$A_0 = \{0,\ 1\}, \tag{4.14}$$

и при $i = n$ в случае (4.11)

$$A_n = \{n-1,\ n\}. \tag{4.15}$$

Далее мы будем рассматривать в основном (4.13), не оговаривая специально каждый раз естественные изменения, связанные с (4.14) и (4.15).

Равенства (4.8) - (4.10) в условиях (4.13) можно записать в следующем виде:

$$P_{ij}^{(t)} = o(t) \text{ при } j < i-1 \text{ или } j > i+1, \tag{4.16}$$

$$P_{i,\,i-1}^{(t)} = \alpha_{i,\,i-1} \cdot t + o(t), \tag{4.17}$$

$$P_{i,\,i+1}^{(t)} = \alpha_{i,\,i+1} \cdot t + o(t), \tag{4.18}$$

$$P_{i,\,i}^{(t)} = 1 - \alpha_{i,\,i-1} \cdot t - \alpha_{i,\,i+1} \cdot t + o(t). \tag{4.19}$$

Для коэффициентов α приняты стандартные обозначения: $\alpha_{i,\,i-1} = \nu_i$, $\alpha_{i,\,i+1} = \lambda_i$, так что (4.17) - (4.19) перепишутся в виде

$$P_{i,i-1}^{(t)} = \nu_i \cdot t + o(t), \tag{4.20}$$

$$P_{i,i+1}^{(t)} = \lambda_i \cdot t + o(t), \tag{4.21}$$

$$P_{i,i}^{(t)} = 1 - (\nu_i + \lambda_i) \cdot t + o(t), \tag{4.22}$$

которым мы и будем пользоваться в дальнейший.

Граф непосредственных переходов при этом имеет вид, изображенный на рис.4.1.

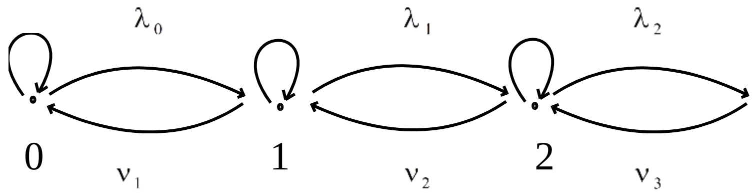

Рис. 4.1.

Величины λ_i и ν_i, указанные на этом рисунке, конечно, не являются вероятностями переходов, они лишь "управляют" такими вероятностями, являясь коэффициентами в соответствующих выражениях. Эти величины неотрицательны. Может оказаться, что некоторые из них равны 0.

В случае, если все $\lambda_i = 0$, процесс называется процессом чистой гибели. В соответствующем графе возможны переходы только налево (в состояние с меньшим либо равным номером). Через некоторое время такой процесс, вообще говоря, приходит в граничное нулевое состояние, в котором зацикливается.

Если, напротив, все $\nu_i = 0$, то процесс называется процессом чистого рождения. Он может разворачиваться только направо и, вообще говоря, уходит по последовательности состояний в бесконечность (если бесконечно множество самих состояний).

Свое название такие процессы получили в связи с тем, что впервые они были применены к биологическим проблемам изучения динамики популяции, распространения эпидемий и другим. Если номер состояния интерпретировать как число индивидов в популяции, то переход направо соответствует рождению, а налево - гибели одного из индивидов.

В дальнейшем процессы гибели и рождения нашли важное применение в экономике, технике и других областях знания. Как мы увидим далее, они играют фундаментальную роль в моделировании процессов обслуживания.

Пример 1.

На стоянку такси поступает пуассоновский поток машин с параметром β и пуассоновский поток пассажиров с параметром γ. Будем считать, что каждая машина забирает одного пассажира, а также что посадка в машину происходит мгновенно (занимает пренебрежимо малое время по сравнению с временем ожидания).

Требуется описать функционирование стоянки такси в терминах марковских процессов и найти вероятности переходов.

Решение. По условию на стоянке не могут одновременно находиться пассажиры и машины. Введем состояния: состояние n для $n \geq 0$ соответствует очереди из n пассажиров; состояние n при $n \leq 0$ соответствует очереди из -n машин. (Состояние 0 соответствует пустой стоянке).

Ввиду пуассоновости потоков пассажиров и машин, в переходе из одного состояния в другое отсутствует последействие, то есть процесс функционирования является марковским. Найдем вероятности перехода.

Переход $n \to n+1$ за время t независимо от знака n соответствует приходу одного пассажира и нуля машин за это время,

$$\begin{aligned} P_{n,n+1}^{(t)} &= \gamma t \cdot e^{-\gamma t} \cdot e^{-\beta t} = \\ &= \gamma t \cdot (1 - \gamma t + o(t)) \cdot (1 - \beta t + o(t)) = \\ &= \gamma t + o(t). \end{aligned} \quad (4.23)$$

Переход $n \to n-1$ за время t независимо от знака n соответствует приходу одной машины и нуля пассажиров за это время:

$$\begin{aligned} P_{n,n-1}^{(t)} &= \beta t \cdot e^{-\beta t} \cdot e^{-\gamma t} = \\ &= \beta t \cdot (1 - \beta t + o(t)) \cdot (1 - \gamma t + o(t)) = \\ &= \beta t + o(t). \end{aligned} \quad (4.24)$$

Переход $n \to n$ описывается аналогично

$$P_{n,n}^{(t)} = e^{-\beta t} \cdot e^{-\gamma t} = 1 - (\beta + \gamma) \cdot t + o(t). \quad (4.25)$$

Вероятности остальных переходов суть величины бесконечно малые. Например,

$$P_{n,n+2}^{(t)} = \frac{(\gamma t)^2}{2!} \cdot e^{-\gamma t} \cdot e^{-\beta t} = o(t). \quad (4.26)$$

Перед нами процесс гибели и рождения с условием (4.13), но без (4.11), (4.12), так как нумерация состояний охватывает все числа $-\infty < n < +\infty$.

Пример 2.

В агрегате имеются два одинаковых дублирующих друг друга узла. Если работают оба узла, то для каждого из них вероятность бесперебойной работы в течение времени t равна:

$$P\{t_{\text{раб}} \geq t\} = e^{-\lambda t}. \tag{4.27}$$

Если один из узлов сломался, то агрегат продолжает работать, но ввиду увеличения нагрузки на оставшийся узел вероятность его бесперебойной работы в течение времени t определяется другой формулой и равна

$$P\{t_{\text{раб}} \geq t\} = e^{-3\lambda t}. \tag{4.28}$$

Ремонтный рабочий ремонтирует сломанный узел, причем вероятность того, что время ремонта займет не меньше t равна

$$P\{t_{\text{рем}} \geq t\} = e^{-\nu t}. \tag{4.29}$$

Если сломаны два узла, то они ремонтируются по очереди. Требуется описать функционирование этой системы в терминах марковских процессов и найти вероятности переходов.

<u>Решение.</u> Введем три состояния: 0, 1, 2 по числу сломанных узлов. Экспоненциальный закон распределения (4.27.) – (4.29.) обеспечивает отсутствие последействия в функционировании нашей системы (см. § 7 предыдущего раздела). Таким образом, функционирование описывается марковским процессом. Найдем вероятности переходов.

Переход $0 \to 1$ означает поломку ровно одного из двух узлов, то есть переход в ситуацию, когда один из узлов сломан, а другой продолжает работать.

$$\begin{aligned} P_{01}^{(t)} &= 2 \cdot (1 - e^{-\lambda t}) \cdot e^{-\lambda t} = \\ &= 2 \cdot (\lambda t + o(t)) \cdot (1 - \lambda t + o(t)) = 2\lambda t + o(t) \end{aligned} \tag{4.30}$$

Переход $1 \to 2$ означает поломку оставшегося узла при том дополнительном условии, что сломанный ранее узел за это время не успели отремонтировать.

$$P_{12}^{(t)} = (1 - e^{-3\lambda t})e^{-\nu t} = (3\lambda t + o(t)) \cdot (1 - \nu t + o(t)) = 3\lambda t + o(t) \tag{4.31}$$

Для вероятности перехода $0 \to 2$ можно написать неравенство

$$P_{02}^{(t)} \leq (1 - e^{-\lambda t})^2 = o(t) \tag{4.32}$$

Аналогично

$$P_{21}^{(t)} = 1 - e^{-\nu t} = \nu t + o(t) \tag{4.33}$$

$$P_{10}^{(t)} = (1 - e^{-\nu t}) \cdot e^{-3\lambda t} = \nu t + o(t) \tag{4.34}$$

$$P_{02}^{(t)} \le (1 - e^{-\nu t})^2 = o(t) \tag{4.35}$$

Перед нами процесс гибели и рождения с N = 3 и условиями (4.13) – (4.15). При этом

$$\lambda_0 = 2\lambda, \quad \lambda_1 = 3\lambda, \quad \nu_2 = \nu_1 = \nu \tag{4.36}$$

Упражнения

1. Докажите формулы (4.4)–(4.7)

2. Проследите, как (4.8) – (4.10) переходят в (4.16) – (4.19) и как изменяются последние условия на границах, то есть при выполнении (4.14), (4.15).

3. Покажите, что в случае конечного числа состояний процесс чистого рождения, удовлетворяющий условиям (4.13) – (4.15), можно заменить процессом чистой гибели, удовлетворяющим тем же условиям, и наоборот.

4. Рассмотрим следующую модификацию примера со стоянкой такси. Пусть машина может забирать от 1 до 4 пассажиров с соответствующими вероятностями p_1, p_2, p_3, p_4 (сумма этих вероятностей равна 1). Требуется в такой новой ситуации найти вероятности переходов из одного состояния в другое.

5. В примере с агрегатом подсчитайте вероятности $p_{00}^{(t)}, p_{11}^{(t)}, p_{22}^{(t)}$. Найдите вероятности переходов для случая, когда при поломке двух узлов рабочий начинает ремонтировать первый из них ускоренно, так что при этом:

$$P\left\{t_{рем} \ge t\right\} = e^{-2\nu t}. \tag{4.37}$$