Теория игр

ПМ-1701

Преподаватель:

Чернов Виктор Петрович
viktor_chernov@mail.ru

Санкт-Петербург
2020 г., 6 семестр

Список литературы

[1] Теория игр

Содержание

1 10.02.2020

1.1 Введение

Предметом теории игр является моделированием конфликтных ситуаций. Зачинателем "Теории игр"является Джон фон Нейман, а последователем является Джон Нэш.

Зададимся вопросом, а как описать конфликт с помощью математических формул.

Опр: Стороны в "конфликте"называются *игроками.*

Опр: Множество игроков обозначается как I и каждый игрок принадлежит этому множеству:

$$i \in I$$

Опр: S_i - множество стратегий, для каждого игрока i своя стратегия:

$$\{S_i\}_{i \in I}$$

Опр: *Ситуация* - результат выбора игроками своих стратегий.

Опр: Размер выигрыша определяется *платежной функцией* - функция, оценивающая ту или иную ситуацию для отдельного игрока. Данная функция отображает ситуацию в число:

$$i: \ \{H_i\}_{i \in I}$$

$$H_i(s_1, s_2, ..., s_n) \in \mathbb{R}$$

т.е каждый игрок оценивает ситуацию вещественным числом.

Опр: Множество игроков, множество стратегий и множество платежных функций называется *игрой*:

$$< i \in I, \{S_i\}_{i \in I}, \{H_i\}_{i \in I} >$$

Пример: на столе лежит 100 камешков, играют два человека. Ход состоит в том, что каждый игрок забирает из кучки от 1 до 5 камешкев по своему усмотрению. Тот, кто взял последним, выиграл. Существуют ли стратегии?

Решение:

Первый ход: берем 4 камня, а после дополняем количество камешкев до 6. Первый выигрывает. ■

Опр: *стратегия* в такой игре - правило(отображение), которое предписывает игроку для каждой ситуации в игре ход в это ситуации.

Для каждой из игр строится дерево игры, состоящее из стратегий, где каждая ветвь - отдельная игра, а узлы данного вида - ситуации.

На основе дерева игры попытаемся создать *матрицу данной игры* размером $m \times n$ Количество *строк* в данной матрице - *количество стратегий* первого игрока, количество столбцов - количество стратегий второго игрока.

Первый игрок выбирает какую-то строку этой матрицы, второй - какой-то столбец, другими словами первый игрок выбирает какую-то стратегию, а на пересечении столбцов и строк находится размер выигрыша первого игрока (при нулевом балансе у проигравшего получается -1 рубль, а у выигрывшего - $+1$).

H_1 - матрица выигрыша первого игрока, H_2 - матрица выигрыша второго игрока и сумма элементов на одинаковых позициях в этих таблицах равна нулю. Если сумма платежных функций (матриц функций) равна нулю, то такая игра называется игрой с *нулевой суммой*.

$$\sum_{i \in I} H_i(s_1, s_2, ..., s_n) = 0$$

Если сумма равна какой-то константе, то такая игра называется игрой с *постоянной суммой*.

$$\sum_{i \in I} H_i(s_1, s_2, ..., s_n) = Const$$

Опр: *антагонистическая игра* - игра двух игроков с нулевой суммой. В такой игре если выигрывает один, то обязательно проигрывает другой.

Так как сумма матриц равна нулю, то:

$$H_1 = -H_2$$

следовательно, нам не нужно две матрицы и будем проводить рассуждение на основе матрицы выигрышей первого игрока.

1.2 Матричные игры

Рассмотрим матрицу $A_{m \times n}$ с элементами , являющимися вещественными числам, для антагонистической игры, в которую играют два игрока. Первый игрок выбирает номер строки, а второй игрок выбирает номер столбца.

То, что находится на пересечении a_{ij} - размер выигрыша(проигрыша) игрока первого игрока, $-a_{ij}$ - проигрыша(выигрыша) второго игрока.

Будем выписывать минимальные элементы по строке:

$$\min = \{a_{1,j_1}, ..., a_{m,j_m}\}$$

Среди данных минимумов выберем *max* среди *min*. Данная величина называется *максимином*:

$$\max_i \min_j a_{ij} = a_{i_0,j_0}$$

То есть в самой худшей ситуации, если он выберет эту строку, то это будет минимальным его выигрышем.

Допустим второй игрок выбирает первый столбец, тогда худшим вариантом для него будет максимум по строкам в каждом столбце:

$$\max = \{a_{i_1,1}, ..., a_{i_n,n}\}$$

Среди данных минимумов выберем *min* среди *max*(лучшее среди худшего). Данная величина называется *минимаксом*:

$$\min_j \max_i a_{ij} = a_{i_1,j_1}$$

Получили гарантированный проигрыш второго игрока. Предположим, что эти элементы совпали, то такой элемент называется седловой точкой.

Опр: седловой точкой называется точка, для которой $a_{i_0,j_0} = a_{i_1,j_1}$, являющаяся минимумом по одной оси, и точка максимума по другой.

Опр: седловой точкой называется точка(элемент матрицы), которая является минимальным в своей строке и максимальной в своем столбце.

Мы получили ситуацию, в которой ни одному из игроков не выгодно из ситуаиции выходить.

Если мы нашли устойчивую ситуацию (ситуацию, из которой невыгодно выходить любому игроку), то мы решили игру. Признак решения конфликта - наличия свойства устойчивости.

Такое решение называется решением по *Нэшу*.

Теорема 1: (неравенство максимина и минимакса)

Дана матрица $A_{m\times n}$ и a_{ij} - элементы матрицы. Рассмотрим максимин и минимакс: a_{pq} и a_{rs}. Тогда $a_{pq} \le a_{rs}$

Док-во:

Рассмотрим матрицу и рассмотренные в ней элементы a_{pq} и a_{rs}.

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * & * \\ * & a_{pq} & * & a_{ps} & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & a_{rs} & * \\ * & * & * & * & * \end{pmatrix}$$

Рассмотрим элемент a_{ps}. $a_{ps} \le a_{rs}$. С другой стороны $a_{pq} \Rightarrow$ это минимум в строке, следовательно, он меньше либо равен a_{ps}. Теорема доказана. ■

Теорема 2: (необходимое и достаточное условие седловой точки)

Чтобы задача имела седловую точку необходимо и достаточно, чтобы $a_{pq} = a_{rs}$

Док-во:

1. $\exists$ седловая чтока $\Rightarrow a_{pq} = a_{rs}$. Пусть a_{kl} - седловая точка.

$$\begin{vmatrix} * & * & * & * & * \\ * & a_{pq} & * & * & * \\ * & * & a_{kl} & a_{ks} & * \\ * & * & * & a_{rs} & * \\ * & * & * & * & * \end{vmatrix}$$

Если бы мы писали строку максимумов, то в ней бы были точки $a_{kl}a_{rs}$, но в этой строке a_{rs} является минимумом, следовательно:

$$a_{kl} \geq a_{rs}$$

Если бы мы писали столбец минимумов, то в ней бы были точки $a_{pq}a_{kl}$, но в этом столбце a_{pq} является максимумом, следовательно:

$$a_{pq} \geq a_{kl}$$

Следовательно:

$$a_{pq} \geq a_{kl} \geq a_{rs}$$

$$a_{pq} \geq a_{rs}$$

Но:

$$a_{pq} \leq a_{rs}$$

Следовательно:

$$a_{pq} = a_{rs}$$

Доказано, что равенство выполняется. Необходимость доказана. Докажем достаточность.

2. $a_{pq} = a_{rs} \Rightarrow$ Нужно доказать, что $\exists$ - седловая точка

Рассмотрим a_{ps}

Попытаемся построить данную точку. Хочу доказать, что

$$\begin{vmatrix} * & * & * & * & * \\ * & a_{pq} & * & a_{ps} & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & a_{rs} & * \\ * & * & * & * & * \end{vmatrix}$$

$$a_{pq} \leq a_{ps} \leq a_{rs}$$

Можно записать как равенство, так как по условию достаточности:

$$a_{pq} = a_{ps} = a_{rs}$$

Этот элемент равный минимальному в строке и максимальному в столбце - определение минимакса и максимина. Следовательно, по определению, это седловая точка.

Теорема доказана. ■

Теорема 3: (неравенство максимина и минимакса)

a_{kl} и a_{uv} - седловые точки. Тогда: a_{kv} и a_{ul} - тоже седловые точки.

Док-во:

$$\begin{vmatrix} * & * & * & * & * \\ * & a_{kl} & * & a_{kv} & * \\ * & * & * & * & * \\ * & a_{ul} & * & a_{uv} & * \\ * & * & * & * & * \end{vmatrix}$$

$$a_{kl} \geq a_{ul} \geq a_{uv} \geq a_{kv} \geq a_{kl}$$

Так как концы равны, то можно заменить равенствами.

$$a_{kl} = a_{ul} = a_{uv} = a_{kv} = a_{kl}$$

Следовательно, a_{ul} a_{kv} и - максимальный в своем столбце и минимальный в своем столбце, следовательно это седловые точки. ■

Замечание: все седловые точки равны друг другу.

Замечание: Если элемент матрицы равен седловой точке, то он не является седловой точкой.

Рассмотрим пример:

$$\begin{vmatrix} 1_s & 1_s \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

В данном примере в первой строке являются седловыми точками, но единица во второй строке не седловая точка, хоть и равна ей.