Математический анализ

Aleksandr Shirokov
improfeo@yandex.ru

Saint-Petersburg
2020

Содержание

1 Предел последовательности

1.1 Понятие последовательности

1.1.1 Определение и способы задавания последовательности

Бесконечный занумерованный ряд вещественных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется числовой последовательностью. Число, стоящее на n-м места, называется n-м членом последовательности, само число n называется номером этого члена.

Опр 1: последовательностью называется функция, областью определения которой является множество натуральных чисел, то есть $D(f) = N$.

Обозначение: x_n. Саму последовательность обозначают $\{x_n\}$.

Последовательности можно задавать реккурентно.

1.1.2 Общие свойства последовательностей

Последовательности устроены проще, чем функции общего вида.

Опр 2: последовательность x_n называется ограниченной снизу, если $\exists A \in R : \forall n \in N A \leq x_n$

Опр 3: последовательность x_n называется ограниченной сверху, если $\exists B \in R : \forall n \in N x_n \leq B$

Опр 4: последовательность называется ограниченной, если она ограничена сверху и снизу, то есть

$$\exists A, B \in R : \forall n \in N A \leq x_n \leq B$$

Опр 5: последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной, если

$$\exists M \in R : \forall n \in N : |x_n| \leq M$$

Можно взять $M = \max\{|A|, |B|\}$, а если существует число из определения, то взять $A = |M|$, $B = -|M|$.

Опр 6: последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной, если найдется такое число $L > 0$, что для всех членов последовательности, начиная с некоторого номера k, выполняется неравенство $|x_n| \leq L$, то есть

$$\exists k \in N : \forall n \geq k \Rightarrow |x_n| \leq L$$

Докажем равносильность этого определения предыдущим. Нам нужно найти такое число M, чтобы оно было больше всех элементов последовательности. Стоп, можно же взять максимум среди всех элементов последовательности и L:

$$M = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{k-1}|, L\}$$

Мы берем модули чисел, потому что не знаем, какого они знака, мы берем x_{k-1}, а не x_k, потому что "начиная с некоторого номера k"включает в себя k, L без модуля, ведь оно положительное по определению. Тогда, для любого номера любой член последовательности будет меньше или равен M:

$$\forall n \in N : |x_n| \leq M$$

что и доказывает эквивалентность определения 6 определению 5, а, как следствие - и всем остальным.

Замечание: "начиная с некоторого члена последовательности "начиная с некоторого нормера "для достаточно больших номеров все эти записи эквиваленты и записываются с помощью кванторов:

$$\exists k \in N : \forall n \geq k$$

Читается так: "существует такой номер в пространсте натуральных чисел, начиная с которого <что-то происходит>".

Формулировка определения 6 может быть переписана в следующей формуле: последовательность ограничена тогда и только тогда, когда она ограничена, начиная с некоторого члена последовательности.

Неравенства для модуля суммы и разности:

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

$$|a - b| \leq |a| + |b|$$

$$|a + b| \geq |a| - |b|$$

$$|a - b| \geq |a| - |b|$$

Эти неравенства обычно используются при доказательстве суммы и разности двух ограниченных последовательностей.

Дадим определение неограниченной последовательности, не употребляя частицы "не".

Опр 7 : последовательность является неограниченной, если не существуют такого числа M, что для всех элементов последовательности $\forall n \in N : |x_n| \leq M$. То есть, какое бы число M мы не взяли бы, найдется такое число $n \in N$, что неравенство не выполняется, то есть для этого n: $|x_n| > M$.

Определение можно записать так: последовательность является ограниченной, если $\forall M \in R, \exists n \in N : |x_n| > M$.

Опр 8 : последовательность называется **строго возрастающей**, если

$$\forall n \in N : x_{n+1} > x_n$$

Опр 9 : последовательность называется строго возрастающей, если $\forall n_1, n_2 \in N : n_2 > n_1$ выполняется неравенство $x_{n_2} > x_{n_1}$

Очевидно, что эти определения равносильны, ведь подставив вместо $n_2 = n_1 + 1$ в опр.9, получим определение 8. Обратно тоже очевидно, в определение вместо x_{n+1} и x_n подставляем номера $n_2 > n_1$, что очевидно. Не умоляя общности можно так сделать.

Определение 9 является определением возрастания последовательности, рассматриваемой как функция.

Обозначение: $\{x_n\} \uparrow$

Опр: последовательность называется нестрого возрастающей, если $\forall n \in N : x_{n+1} \geq x_n$.

Обозначение: $\{x_n\} \nearrow$

Опр: последовательность называется строго убывающей, если $\forall n \in N : x_{n+1} < x_n$.

Обозначение: $\{x_n\} \downarrow$

Опр: последовательность называется нестрого убывающей, если $\forall n \in N : x_{n+1} \leq x_n$.

Обозначение: $\{x_n\} \searrow$

Опр: последовательность называется монотонной, если она является возрастающей (строго или нестрого), либо убывающей (строго или нестрого).

Утверждения про монотонность или ограниченность рекуррентно заданных последовательностей обычно доказываются по индукции.

1.2 Определение предела последовательности. Свойства сходящихся последовательностей

1.2.1 Определение предела последовательности

Рассмотрим последовательность $x_n = \frac{1}{n}$. С увеличением n члены этой последовательности становятся все ближе и ближе к 0.

Если нарисовать члены последовательности на вещественной оси, то наш взгляд сможет различить лишь конечное их число, а все остальные члены последовательности сольются с точкой 0.

При увеличении точности построения (взятии за единичный более длинного отрезка) мы сможем различить большее число членов последовательности, но тоже лишь конечное!

Подобная ситуация встречается достаточно часто, поэтому последовательности, все члены которых «сгущаются» (с ростом номера n) около некоторого числа A, имеют специальное название *сходящихся* (имеющих предел).

Опр: число A называется *пределом* последовательности $\{x_n\}$, если для любого положительного числа ε найдется номер k, начиная с которого все члены последовательности отличаются от A меньше, чем на ε.

При этом пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$ или $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} A$

Опр: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 : \exists k \in N : \forall n \geq k$ выполняется неравенство $|x_n - A| < \varepsilon$

Опр: последовательность, у которой существует конечный предел, называется сходящейся, то есть $\{x_n\}$ сходится $\Leftrightarrow \exists A \in R : \forall\varepsilon > 0, \exists k \in N : \forall n \geq k$ выполняется неравенство: $|x_n - A| < \varepsilon$.

Опр: если последовательность не имеет конечного предела, то говорят, что последовательность расходится.

Построим отрицание утверждения $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$

$$A \neq \lim_{n\to\infty} x_n \Leftrightarrow \exists\varepsilon > 0 : \forall k \in N \quad \exists n \geq k : |x_n - A| \geq \varepsilon$$

Замечание:

1. отметим, что $|x_n - A| < \varepsilon \Leftrightarrow A-\epsilon < x_n < A+\epsilon \Leftrightarrow x_n \in (A-\varepsilon, A+\varepsilon)$. Этой равносильностью мы будем постоянно пользоваться в дальнешйем, записывая неравенство из определения предела в удобной форме.

Интервал $(A-\varepsilon; A+\varepsilon)$ называется ε-окрестностью точки A и обозначается $U_\varepsilon(A)$.

2. Теперь определени предела последовательности может быть сформулировано следующим образом:

Число A есть предел последовательности, если $\forall \varepsilon > 0$, начиная с некоторого номера все члены последовательности попадают внутрь ε-окрестности точки A.

Или так:

Число A есть предел последовательности $\{x_n\}$, если вне любой ε-окрестности точки A лежит конечное (возможно, нулевое) число членов последовательности.

Доказательство. Действительно, если известно, что неравенство $|x_n - A| < \varepsilon$ выполняется, начиная с некоторого номера k, то вне окрестности точки A находится не более $k-1$ (т.е конечное) число членов последовательности.

Наоборот, если вне ε-окрестности точки A лежит конечное (возможно, нулевое) число членов последовательности, то из них можно выбрать $\{x_k\}$ с наибольшим номером k. Тогда все члены последовательности с номерами, большими k, будут попадать внутрь ε-окрестности точки A и неравенство $|x_n - A| < \varepsilon$ будет выполняться, начиная с номера $k+1$. □

1.2.2 Свойства предела последовательности

Теорема 1.1. *Числовая последовательность не может иметь более одного предела*

Доказательство. Допускается, что одна и та же последовательность сходится к разным пределам A и B. Выбирется ε так, чтобы окрестности A и B не имели общих точек, $\varepsilon = \frac{B-A}{3}$. Поскольку A- предел, то найдется номер, начиная с некоторого все члены последовательности лежат внутри окрестности, значит вне окрестности A лежат конечное число членов последовательности x_n, в частности в окрестности B может содерджаться лишь конечное число членов, а в ней бексонечное по предложению, так как есть предел и окрестности не пересекаются. Это противоречит тому, что у последовательности есть предел B. Значит, предел единственный. □

Теорема 1.2. *Сходящаяся последовательность ограничена*

Доказательство. Докажем, что если у последовательности есть предел, то она ограничена, то есть ограничена с двух сторон. Пусть $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} (A)$. Если в определении взять , например, $\varepsilon = 1$, то вся последовательность, начиная с номера k будет заключена между числами $A-1$ и $A+1$. Тогда последовательность будет ограничена снизу $C = \min\{A-1, x_1, \dots, x_k\}$, а сверху числом $D = \max\{A+1, x_1, \dots, x_k\}$. Теорема доказана. □

Обратное неверно! Например, последовательность $x = (-1)^n$ ограничена $(-1;1)$, но у нее нет предела.

1.2.3 Свойства пределов, связанные с неравенствами

Лемма 1.1. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = B$ и $A < B$, то,начиная с некоторого номера, $x_n < y_n$.

Доказательство. Снова выбираем $\varepsilon > 0$, чтобы окрестности не пересекались $\varepsilon = \frac{B-A}{3}$. Тогда существуют соответствующие номера k_1 и k_2, начиная с которых все члены последовательности лежат в своих ε-окрестостях. Выберем $k = \max\{k_1, k_2\}$. Значит, начиная с него $\forall n \geq k$:

$$A - \varepsilon < x_n < A + \varepsilon$$

$$B - \varepsilon < y_n < B + \varepsilon$$

$$A + \varepsilon < B - \varepsilon \Leftrightarrow A + \frac{2}{3}B - \frac{2}{3}A < B \Leftrightarrow A < B$$

Это верно.

Так как $A < B$, То $x_n < A + \varepsilon < B - \varepsilon < y_n$, что и требовалось доказать. □

Следствие: Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, $A < B$. Тогда найдется такой номер k_0, что $\forall n \geq k_0$, $x_n < B$.

Теорема 1.3. *О предельном переходе в неравенстве*

Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = B$ *и* $\forall n \in N : x_n \leq y_n$, *то* $A \leq B$.

Доказательство. Предположим противоречие, тогда $A > B$, Тогда по лемме $\exists k \in N : \forall n \geq k : x_n > y_n$. □

Следующая теорема с легкой руки известного советского математика Г. М. Фихтенгольца носит неформальное название «теорема о двух милиционерах».

Теорема 1.4. *О сжатой последовательности*

Пусть даны три последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$, *такие, что* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = A$ *и* $\forall n \in N x_n \le y_n \le z_n$.

Тогда последовательность $\{y_n\}$ *тоже сходится, причем к тому же числу* A*, то есть* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = A$

Доказательство. Выбираем $\varepsilon > 0$, находится номер k_1 для первой последовательности с которого:

$$A - \varepsilon < x_n < A + \varepsilon$$

Для второй аналогично, находится номер k_2 для z_n, начиная с которого:

$$A - \varepsilon < z_n < A + \varepsilon$$

Выбирая максимум из этих двух номеров: $k = \max\{k_1, k_2\}$. Тогда $\forall n \ge k$:

$$A - \varepsilon < x_n \le y_n \le z_n < A + \epsilon$$

По определению (в силу произвольности выбора $\varepsilon > 0$), получили, что $\exists \lim\limits_{n\to\infty} y_n = A$ □

Утверждение теоремы верно, если выполнения неравенств $x_n \le y_n \le z_n$ требовать не для всех натуральных чисел, а лишь начиная с некоторого номера. Для этого в доказательстве достаточно брать максимум из k_1, k_2 и номера, с которого это неравенство начинает действовать.

1.3 Арифметические действия над сходящимися последовательностями

1.3.1 Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности

Опр: последовательность $\{\alpha_n\}$ называется бесконечно малой, если $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$

Из определения предела следует, что число A является пределом последовательности в том и только в том случае, когда разность $x_n - A$ является бесконечно малой последовательностью.

Утверждение: $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} A \Leftrightarrow x_n - A = \alpha_n$, где $\{\alpha_n\}$ - бесконечно малая последовательность.

Утверждение: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$ тогда и только тогда, когда последовательность $\{x_n\}$ представима в виде суммы числа A и некоторой бесконечно малой последовательности.

Не следует путать понятия «бесконечно малая» и «сколь угодно малое число»: бесконечно малая последовательность является переменной величиной, а не фиксированным, хотя и произвольно выбранным, числом. Кроме того, бесконечно малая последовательность может принимать не только малые значения (ее первый член может быть равен и 1000): для нее единственным условием является то, что значения $\{\alpha_n\}$ стремятся к нулю при $n \to \infty$.

Теорема 1.5. *Свойства бесконечно малых последовательностей*

1. Если $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ - бесконечно малые последовательности, то $\{\alpha_n \pm \beta_n\}$ тоже бесконечно малая последовательность.

2. Если $\{\alpha_n\}$ - бесконечно малая последовательность, а $\{a_n\}$ - ограниченная последовательность, то $\{\alpha_n \cdot a_n\}$ - тоже бесконечно малая последовательность

3. Если $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ - бесконечно малые последовательности, то $\{\alpha_n \cdot \beta_n\}$ тоже бесконечно малая последовательность.

Доказательство. Докажем последовательно

1. $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ - бесконечно малые последовательности. Возьмем $\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2} > 0$. Тогда найдутся номера $k_1 : \forall n \geq k_1$: $|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ и $k_2 : \forall n \geq k_2$: $|\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. Берем максимальный номер среди k_1 k_2. Тогда для него

выполняется:

$$|\alpha_n \pm \beta_n| \le |\alpha_n| + |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Что означает по определению, что $\{\alpha_n \pm \beta_n\}$ тоже бесконечно малая последовательность.

2. Так как последовательность ограничена, то по определению $\forall n \in N : |a_n| < L$. Поскольку $\{\alpha_n\}$ - бексонечно малая, то начиная с какого-то номера $\forall n \ge k : |\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{L}$

Тогда $\forall n \ge k : |a_n \cdot \alpha_n| < L \cdot \frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon$, то есть $\{\alpha_n \cdot a_n\}$ - тоже бесконечно малая последовательность.

3. Так как любая сходящаяся последовательность ограничена (теорема 17), то рассматривая $\{\beta_n\}$ как ограниченную, третье свойство является следствием второго. $\square$

Замечание:

1. С помощью метода математической индукции утверждение распространяется на сумма любого конечного числа бесконечно малых слагаемых.

2. Если количество слагаемых при увеличении n растет, а каждое из слагаемых стреиться к нулю, то общая суммая может вести себя как угодно: и стремиться к нулю, и стремиться к ненулевому числу, и вовсе расходиться.

$$a_n = \underbrace{\frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n}}_{n}, \lim_{n \to \infty} a_n = 1$$

Следствия:

1. Произведение бесконечно малой последовательности на сходящуюся последовательность есть бесконечно малая последовательность, так как сходящаяся последовательность ограничена, по второму свойству теоремы.

2. Произведение конечного числа бесконечно малых последовательностей есть бексонечно малая последовательность.

Опр: последовательность $\{x_n\}$ называется бесконечно большой, если $\forall E > 0$ найдется номер k, начиная с которого $|x_n| > E$

Опр: предел последовательности равен бесконечности (обозначение $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \infty$), если последовательность $\{x_n\}$ бесконечно большая.

Опр: предел последовательности $\{x_n\}$ равен плюс бесконечности (обозначение: $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = +\infty$), если $\forall E > 0$ найдется номер k, начиная с которого $x_n > E$.

Опр: предел последовательности $\{x_n\}$ равен минус бесконечности (обозначение: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$), если $\forall E > 0$ найдется номер k, начиная с которого $x_n < -E$.

Замечание: если последовательность стремится к плюс или минус бесконечности, то она является бесконечно большой, но не наоборот.

Замечание: если $x_n \geq y_n$ при всех n и $y_n \to +\infty$, то $x_n \to +\infty$. То же самое и для $-\infty$.

Теорема 1.6. *О связи бесконечно больших и бесконечно малых последовательностях*

$\{x_n\}$ - бесконечно большая последовательность тогда и только тогда, когда $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ - бесконечно малая последовательность (если последовательности $\{x_n\}$ и $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ существуют).

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ - бесконечно большая последовательность. Берем $\varepsilon > 0$, $\frac{1}{\varepsilon} > 0$, тогда для этого числа найдется номер, начиная с которого для всех n выполняется неравенство $|x_n| > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow |\frac{1}{x_n}| < \varepsilon$, что и означает по определению, что $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ - бесконечно малая (вместо A подставляется 0, найдется номер, начиная с которого $|x_n| < \varepsilon$ $\square$

Замечание: не существует бескончено больших, но ограниченных последовательностей, потому что ограниченные они для любого n меньше какого-то числа L, а бесконечно большие для любого $\varepsilon > 0$, которое мы положим равное L, члены последовательности больше по модулю L, следовательно, противоречие.

Лемма 1.2. Если предел $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B \neq 0$, то последовательность $\left\{\frac{1}{y_n}\right\}$ ограничена.

Доказательство. Берем $r \in R, 0 < r < |B|$, например $r = \frac{|B|}{2}$: по определению предела существует номер k_0, начиная с которого все члены последовательности попадают в окрестность B радиуса $r = \frac{|B|}{2}$, т.е $\forall n \geq k_0$, выполняется неравенство: $|y_n - B| < \frac{|B|}{2}$, откуда $B - \frac{|B|}{2} < y_n < \frac{|B|}{2} + B$. Модуль одного из чисел $B - \frac{|B|}{2}$ или $\frac{|B|}{2} + B$ равен $\frac{|B|}{2}$, а другого равен $\frac{3|B|}{2}$, поэтому $|y_n| > \frac{|B|}{2}$, или, что то же самое, $\frac{1}{|y_n|} < \frac{2}{|B|}$, откуда следует, что $\left\{\frac{1}{y_n}\right\}$ - ограниченная последовательность. $\square$

Теорема 1.7. *Об арифметических действиях с пределами*

Если последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ имеют конечные пределы $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = B$, то их сумма, разность, произведение и (при условии $B \neq 0$), то есть при условии, что последовательность $\{y_n\}$ не бесконечно малая, частное тоже имеют конечные пределы , причём:

$$1. \lim_{n\to\infty} x_n \pm y_n = A \pm B$$

$$2. \lim_{n\to\infty} x_n \cdot y_n = A \cdot B$$

$$3. \lim_{n\to\infty} \left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{A}{B}$$

Доказательство. Предел последовательности равен некоторому числу тогда и только тогда, когда она представима в виде суммы этого числа и бесконечно малой. Этим и будем пользоваться.

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A \Rightarrow x_n = A + \alpha_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B \Rightarrow y_n = B + \beta_n$, где α_n, β_n - бесконечно малые.

1.$x_n \pm y_n = (A \pm B) + (\alpha_n \pm \beta_n)$, $(\alpha_n \pm \beta_n)$ - бесконечно малая, как сумма бесконечно малых, тогда последовательность $x_n \pm y_n$ представлена как число + бесконечно малая последовательность, следовательно $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm y_n = A \pm B$

2.$x_n \cdot y_n = AB + A\beta_n + B\alpha_n + \alpha_n\beta_n$ - все слагаемы бесконечно малые как произведение бесконечно малой на ограниченную (да, число тоже ограниченная функция константы), сумма их тоже бесконечно малая, следовательно: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot y_n = A \cdot B$

3. $|\frac{x_n}{y_n} - \frac{A}{B}| = |\frac{(A+\alpha_n)B-(B+\beta_n)A}{By_n}| = |\alpha_n - \frac{A}{B}\beta_n| \cdot \frac{1}{|y_n|}$

α_n и β_n - бесконечно малые последовательности, первый модуль - бесконечно малая последовательность, $\frac{1}{|y_n|}$ - ограниченная по лемме, значит, их произведение бесконечно малой на ограниченную - бесконечно малая последовательность, следовательно $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{A}{B}$ □

Замечание: из существования пределов суммы, разности, произведения и частного не следует существование исходных пределов.

1.3.2 Виды неопределенностей

Рассмотрим некоторые важные и достаточно часто встречающиеся ситуации, не обсуждавшиеся в приведенных основных теоремах.

1. Частное двух последовательностей: $\frac{x_n}{y_n}$, где $\forall n \in N\ y_n \neq 0$

а. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$ - конечное число $\{y_n\}$ - бесконечно большая последовательность, тогда $\left\{\frac{1}{y_n}\right\}$ - бесконечно малая, сходящаяся, то есть ограниченная на бесконечно малую - бесконечно малая:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 0$$

б. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, $A \neq 0$ - конечное число, $\{y_n\}$ - бесконечно малая последовательность, тогда $\frac{1}{x_n}$ по лемме - ограничена, ограниченная на бесконечно малую - бесконечно малая.

в. $\{x_n\}$ - бесконечно большая, $\{y_n\}$ - бесконечно малая, тогда $\frac{1}{x_n}$ - бесконечно малая, произведение бесконечно малых последовательностей - бесконечно малая последовательность.

г. $\{x_n\}$ - бесконечно большая, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$, $B \neq 0$. Рассмотрим $\frac{1}{\frac{y_n}{x_n}}$ - в знаменателе ограниченная на $\frac{1}{x_n}$ - бесконечно малая, так как x_n - бесконечно большая, тогда в знаменатале произведение бесконечно малой на ограниченную - бесконечно малая , $\frac{1}{\text{б.м}}$ - бесконечно большая.

д. пусть $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ - бесконечно малые последовательности, тогда общего вывода сделать нельзя.

Отношение двух бесконечно малых последовательностей может быть величиной бесконечно малой, бесконечно большой, может иметь конечный предел, отличный от нуля, может не иметь предела. В связи с этим говорят, что отношение двух бесконечно малых последовательностей представляет собой неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$. Когда предел этого отношения найден (или выясняется, что его нет), то говорят, что неопределнность раскрывается.

е. Пусть $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ - бесконечно большие последовательности. Вэтом случае опять последовательность $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ может стремиться к бесконечности, к 0, к конечному числу, отличному от нуля, вовсе не иметь предела. Поэтому говорят, что отношение двух бесконечно больших также представляет собой неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$

2. Сумма двух последовательностей $\{x_n + y_n\}$

а. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$ - конечное число. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} x_n + y_n = \infty$

Доказательство. $\{y_n\}$ - ограниченная последовательность, то есть по определению $\forall n \in N, \exists M > 0 : |y_n| < M$. $-M < y_n < M \Rightarrow |y_n| > -M$.

Поскольку $\{x_n\}$ - бесконечно большая последовательность, то $\forall E =$

$E + M > 0, \exists k \in N : |x_n| > E + M$.

Тогда $\forall n \geq k$:

$$|x_n + y_n| \geq |x_n| + |y_n| > (E + M) - M = E$$

$\{x_n + y_n\}$ - бесконечно большая последовательность. $\square$

В частности, если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty(-\infty)$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n + y_n = +\infty(-\infty)$

б. Сумма двух бесконечно больших - бесконечно большая последовательность

в. Если $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ - бесконечно большие последовательности разных знаков, то предел суммы может быть равен нулю, бесконечности, конечному ненулевому числу, а также не существовать.

Неопределенность вида $(\infty - \infty)$

3. Произведение двух последовательностей $\{x_n \cdot y_n\}$

Особый случай - $\{x_n\}$ - бесконечно малая последовательность, а $\{y_n\}$ - бесконечно большая последовательность. В этом сулчае возникает неопределенность вида $(0 \cdot \infty)$.

Кроме рассмотренных видов неопределнностей вида $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$ $(\infty - \infty), (0 \cdot \infty)$, существуют еще и другие виды неопределенностей , связанные с рассмотрением степеней. Их мы рассмотрим позже.

1.4 Предел монотонной последовательности. Число е. Комбинированные методы нахождения пределов

1.4.1 Ограниченные множества. Точные верхние и нижние границы

Верхние границы. Максимум и минимум множества.

Опр: числовое множество A называется *ограниченным сверху*, если $\exists M : \forall x \in A \quad x \leq M$. Число M называется верхней границей множества.

Если M - верхняя граница множества A, то любое число, большее M, также является верхней границей множества A.

Опр: Верхняя граница числового множества, принадлежащая **самому этому множеству**, называется максимальным элементом или **максимумом множества**.

Аналогично определяются понятия числового множества, ограниченного снизу, нижней границы и минимума множества. Обозначение минимального элемента множества A: $\min A$.

Опр: Числовое множество, ограниченное сверху и снизу, называется **ограниченным.**

Ограниченное множество содержится в некотором отрезке числовой прямой.

Точные нижние и верхние границы

Опр: пусть A - непустое ограниченное сверху множество. Пусть M_A - множество его верхних границ. Если в M_A есть наименьший элемент, то он называется супремумом множества A: $\sup A = \min M_A$

Таким образом, чтобы найти супремум множества, согласно определению нужно найти множество верхних границ данного множества, а затем взять его наименьший элемент (если он есть).

Аналогично инфимумом ограниченного снизу непустого числового множества B называется наибольший элемент в множестве нижних границ (если он существует).

Опр: пусть B - непустое ограниченное снизу множество. Пусть M_B - множество его нижних границ. Если в M_B есть наибольший элемент, то он называется инфимумом множества B: $\inf B = \max M_B$

Супремум и инфимум множества также называются точной верхней границей и точной нижней границей множества соответственно.

Равносильное определение инфимума и супремума

Замечание: можно записать определение верхней и нижней границы с помощью неравенств:

Число b является точной верхней границей множества $X \subset R$ тогда и только тогда, когда выполнены условия:

$b = \sup X$

1. $\forall x \in X : x \leq b$, т.е число b - есть одна из верхних границ множества X

2. $\forall \varepsilon > 0$ найдется такой элемент $x_\varepsilon \in X$, что $x_\varepsilon > b - \varepsilon$ (то есть ни одно число, меньшее b, уже не является верхней границей множества X).

Число a является точной нижней границей множества $X \subset R$ тогда и только тогда, когда выполнены условия:

$a = \inf X$

1. $\forall x \in X : x \geq a$, т.е число a - есть одна из нижних границ множества X

2. $\forall \varepsilon > 0$ найдется такой элемент $x_\varepsilon \in X$, что $x_\varepsilon < a + \varepsilon$ (то есть ни одно число, большее a, уже не является нижней границей множества X).

Теорема 1.8. *Существование верхней и нижней грани*

Всякое непустое ограниченное сверху (снизу) подмножство R имеет верхнюю (нижнюю) грань

1.4.2 Теорема Вейерштрасса

Теорема 1.9. *Теорема Вейерштрасса о монотонной ограниченной последовательности*

Любая монотонная ограниченная последовательность имеет конечный предел.

Теорема может быть сформулирована иначе:

1. если последовательность $\{x_n\}$ возрастает (быть может нестрого) и ограничена сверху, то существует $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = sup\{x_n\}$

2. если последовательность $\{x_n\}$ убывает (может быть нестрого) и ограничена снизу, то существует $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = inf\{x_n\}$

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ возрастает (может быть, нестрого) и ограничена сверху. По аксиоме о верхней границе существует $sup\{x_n\} = A$. Докажем, что число A и есть искомый предел.

Возьмем $\varepsilon > 0$. Так как A является верхней границей множества $\{x_n\}$, то $\forall n \in N$, $x_m \leq A < A + \varepsilon$. Также найдется номер k, что $x_k > A - \varepsilon$ (свойстов 2 точной верхней границы). Но тогда в силу возрастания последовательности и для всех номеров n, больших k, будет выполняться неравенство $x_n > A - \varepsilon$.

Таким образом $\forall n \geq k, A - \varepsilon < x_n < A + \varepsilon$. В силу произвольности выбора $\varepsilon > 0$ это означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$

Аналогично доказывается утверждение теоремы про ограниченную снизу убывающую последовательность. □

Замечание: если последовательность возрастает и не ограничена сверху, то она стремится к плюс бесконечности. Если последовательность убывает и не ограничена снизу, то она стремится к минус бесконечности.

Замечание: пусть $x_n > 0$ при всех n, $\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$. Тогда $x_n \to 0$

Отсюда:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0, a > 1, k \in N$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0, a \in R$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$$

1.4.3 Число e

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

1.5 Подпоследовательности. Теорема Больцано-Вейерштрасса

1.5.1 Теорема Кантора о вложенных отрезках

Опр: назовём последовательность отрезков $[a_n; b_n]$ стягивающейся, если выполнены следующие условия:

1. каждый следующий отрезок является подмножеством предыдущего, то есть $\forall n \in N : [a_{n+1}; b_{n+1}] \subset [a_n; b_n]$

2. последовательность длин отрезков стремиться к нулю, т.е $|b_n - a_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Более формально определение записывается следующим образом:

Опр: говорят, что $\{[a_n; b_n\}_{n=1}^{\infty}$ - последовательность стягивающихся отрезков, если $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$ при всех n и $b_n - a_n \to 0$

Теорема 1.10. *Для любой стягивающейся последовательности отрезков $[a_n; b_n]$ существует единственная точка, принадлежащая всем отрезкам одновременно, то есть $\exists! c \in R : \quad \forall n \in N \quad c \in [a_n; b_n]$. При этом:*

$$c = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$$

1.5.2 Подпоследовательности

Пусть задана последовательность $\{x_n\}$. Если выписывать не все члены последовательности подряд, а с пропуском (например, каждый второй или каждый пятый либо члены с простыми номерами и т. д.), то получится новая последовательность, которая называется частичной последовательностью или подпоследовательностью последовательности $\{x_n\}$.

Точнее, если рассматривать **возрастающую** последовательность натуральных чисел $\{n_k\}, n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$, тогда последовательность $y_k = x_{n_k}$ при всех натуральных k, называется подпоследовательностью подпоследовательности $\{x_n\}$ и обозначается $\{x_{n_k}\}$.

Таким образом подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ образована только из членов последовательности $\{x_n\}$, причём порядок следования членов в подпоследовательности такой же, как и в исходной последовательности.

Числа n_k образуют последовательность - функцию натурального аргумента k. Поэтому можно сказать, что подпоследовательность подпоследовательности x_n - композиция функция $x(n)$ и $n(k)$. Тем самым подпоследовательность является функцией натурального аргумента k, т.е сама является полноценной последовательностью.

Теорема 1.11. *Если последовательность $\{x_n\}$ имеет конечный предел, то любая её последовательность имеет тот же предел:*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A \Rightarrow \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = A$$

Теорема 1.12. *Теорема Больцано-Вейерштрасса*

Из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

2 Предел и непрерывность функции

2.1 Понятие предела функции

2.1.1 Два определения функции и их эквивалентность

Последовательность является частным случаем функции (заданной на множестве натуральных чисел), понятие предела последовательности является частным случаем понятия предела функции.

Понятие предела функции иллюстрирует поведение функции при неограниченном приближении аргумента к некоторому значению. Натуральный аргумент не может неограниченно приближаться никуда, кроме $+\infty$. В то же время произвольный вещественный аргумент может приближаться к произвольному вещественному числу, а также к $+\infty$ и $-\infty$.

Определение предела функции выражает ту же мысль, что и в случае предела последовательности: значение функции неограниченно приближается к числу или бесконечности по мере неограниченного приближения её аргумента к заданному числу или бесконечности.

Определение 2.1. Предела по Коши

Число B называется пределом функции f в точке a, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$, такое, что из неравенства $0 < |x - a| < \delta$ следует $|f(x) - B| < \varepsilon$, то есть:

$$B = \lim_{x \to a} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in \overset{\bullet}{U}_{\delta}(a) : f(x) \in U_{\varepsilon}(B)$$

Замечание 1: здесь и всюду в дальнейшем подразумеваем, что значения функции берутся лишь в тех точках, где она определена. Сама точка a может и не принадлежать области определения $D(f)$ (на это указывает неравенство $0 < |x - a|$)

Замечание 2: Определение предела показывает, что для нахождения предела функции в точке а необходимо знать её значения в некоторой проколотой окрестности этой точки. В частности, изменение значения функции в точке а не изменяет предела функции. Отметим также, что если две функции совпадают в некоторой проколотой окрестности точки а всюду, кроме конечного числа точек, то пределы этих функций в точке а либо равны, либо оба не существуют.

Определение 2.2. Предела по Гейне

Число B называется пределом функции f в точке a, если для любой последовательности $\{x_n\} \subset D(f)$, такой, что:

1. $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$

2. начиная с некоторого номера $x_n \neq a$

последовательность значений функции $f(x_n)$ имеет своим пределом B.

Теорема 2.1. *Определения по Коши и по Гейне предела функции в точке равносильны*

На основании определения по Гейне для пределов функций можно доказать теоермы, аналогичные теоремам о пределе последовательностей:

1. Теорема о единственности предела функции в точке

2. Теоремы об арифметических действиях с пределами функций в одной и той же точке

3. Теорему о предельном переходе в неравенстве

4. Теорему о сжатой функции (аналог теоремы о двух милиционерах)

Например, так формулируется теорема о пределе суммы функций

Теорема 2.2. *Пусть функции f и g определены в некоторой проколотой окрестности точки a и существуют пределы $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$.*

Тогда существуют $\lim\limits_{x\to a}(f(x) + g(x))$, причем

$$\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = A + B$$

Теорема 2.3. *О предельном переходе в неравенства*

Пусть функции f и g определены в некоторой проколотой окрестности точки a, имеющие предел в a. Пусть для всех точек x из этой окрестност выполнено неравенство $f(x) \geq g(x)$. Тогда

$$\lim_{x\to a} f(x) \geq \lim_{x\to a} g(x)$$

Аналогично доказывается теорема о сжатой функции.

Теорема 2.4. *О сжатой последовательности*

Пусть в некоторой проколотой окрестности точки a определены две функции f и g, имеющие одинаковый предел в точке a. Пусть в этой же окрестности определны функция h и для всех точек x этой окрестности выполнено неравенство $f(x) \geq h(x) \geq g(x)$. Тогда существует $\lim\limits_{x \to a} h(x)$, равный общему пределу функций $f(x)$ и $g(x)$ в точке a.

2.1.2 Различные типы пределов

Односторонние пределы

Определение 2.3. Число B_1 называется левосторонним пределом функции f в точке a (пределом f при x, стремящемся к a слева), если $\forall \varepsilon > 0, \exists \sigma > 0 : \forall x \in (a - \sigma, a) : |f(x) - B_1| < \varepsilon$

Обозначение: $f(a-0) = B_1 = \lim\limits_{x \to a-} f(x)$

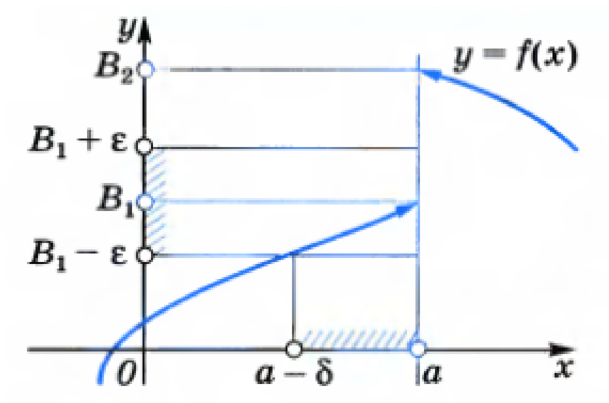


Рис. 1: Левосторонний предел

Аналогично можно дать определение правостороннего предела функции.

Обозначение: $f(a+0) = B_2 = \lim\limits_{x \to a+} f(x)$

Нетрудно доказать, что функция f имеет предел в точке a тогда и только тогда, когда существуют и равны между собой односторонние пределы функции f в точке a.

Бесконечные пределы в точке

Определение 2.4. Функция f имеет бесконечный предел в точке a, если при приближении аргумента к точке a значения функции становятся сколь угодно большими по модулю, то есть:

$$\forall M \in R \quad \exists \delta > 0 : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x)| > M$$

Обозначение: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$

Для $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ в определении меняется $f(x) > M$

Для $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ в определении меняется $f(x) < -M$

Предел функции на бесконечности

Понятие предела функции на бесконечности определяется аналогично понятию предела последовательности (являющемуся частным случаем предела функции на $+\infty$).

Определение 2.5. Число B называется пределом функции f при $x \to +\infty$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_0 : \forall x > x_0 : |f(x) - B| < \varepsilon$$

Обозначение: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = B$

Итак, предел последовательности есть частный случай предела функции при $x \to +\infty$, если функция определена на множестве N.

Определение 2.6. Число C называется пределом функции f при $x \to -\infty$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_0 : \forall x < x_0 : |f(x) - C| < \varepsilon$$

Наконец, если пределы функции при $x \to \infty$ и $x \to -\infty$ равны, то можно говорить о пределе функции при $x \to \infty$.

Определение 2.7. Число A называется пределом функции f при $x \to \infty$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_0 : |x| > x_0 : |f(x) - A| < \varepsilon$$

2.2 Некоторые свойства функции, имеющей предел в точке

2.2.1 Локальные свойства функции, имеющей предел

Локальными свойствами называются свойства, которые выполняются в некоторой окрестности точки.

Определение 2.8. Функция f называется локально ограниченной в точке a, если существуют δ-окрестность точки a, такая, что функция ограничена на $D(f) \cap U_\delta(a)$

Теорема 2.5. *Если функция имеет в точке a конечный предел, то функция локально ограничена в этой точке.*

Теорема 2.6. *Если функция f имеет в точке a конечный предел $B \neq 0$, то в некоторой проколотой окрестности точки a все значения f имеют тот же знак, что и число B.*

2.2.2 Предел монотонной функции

Теорема 2.7. *Если функция f определена и монотонна на отрезке $[a; b]$, то в каждой внутренней точке $x \in (a; b)$ эта функция имеет конечные и односторонние пределы, а в точках a и b соответственно конечные правосторонний и левосторонний пределы $\lim\limits_{x \to a+} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to b-} f(x)$*

2.3 Вычисление пределов

2.3.1 Теорема о замене переменной

Теорема 2.8. *Если существуют $\lim\limits_{x \to a} g(x) = b$ и $\lim\limits_{y \to b} f(y) = c$, причем в некоторой проколотой окрестности точки a выполнено условие $g(x) \neq b$, то существуют предел композиции $\lim\limits_{x \to a} f(g(x)) = \lim\limits_{y \to b} f(y) = c$*

2.3.2 Замечательные пределы

1. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
2. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin \alpha x}{\sin \beta x} = \frac{\alpha}{\beta}$
3. $\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$
4. $\lim\limits_{x \to 0} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$
5. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}$
6. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$
7. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
8. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$
9. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$

2.4 Классификация бесконечно малых функций

Определим понятия бесконечно малой и бесконечно большой функции в окрестности точки a:

Определение 2.9. Функция α называется бесконечно малой в окрестности a (или при $x \to a$), если $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = 0$

Определение 2.10. Функция φ называется бесконечно большой в окрестности a (или при $x \to a$), если $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = \infty$

Определение 2.11. Пусть α и β - бесконечно малые (бесконечно большие) функции при $x \to a$, причём $\beta(x) \neq 0$ в некоторой проколотой окрестности точки a. Если $\lim\limits_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, то функции α и β называются *эквивалентными* в окрестности точки a.

Обозначение: $\alpha(x) \sim \beta(x)$ при $x \to a$.

Замечание. Вообще говоря, понятие эквивалентных функций вводится для произвольных функций f и g, но чаще всего используется, когда обе функции либо бесконечно малые, либо бесконечно большие.

Замечательные пределы могут быть записаны теперь следующим образом:

$$(1+x)^{\alpha} - 1 \sim \alpha x, x \to 0$$

$$\sin x \sim x, x \to 0$$

$$\ln(1+x) \sim x, x \to 0$$

$$\log_a 1 + x \sim \frac{x}{\ln a}, x \to 0$$

$$e^x - 1 \sim x, x \to 0$$

$$a^x - 1 \sim x \ln a, x \to 0$$

$$tgx \sim x, x \to 0$$

2.5 О-большое и о-малое

О-большое и о-малое (O и o) - математеские обозначения для сравнения асимптотического поведения функций. Используются в различных разделах математики, но активнее всего - в математическом анализе, теории алгоритмов. Под **асимптотикой** понимается характер изменения функции при стремлении её аргумента к определённой точке.

$o(f)$, o-малое от f обозначает бесконечно малое относительно f, пренебрежимо малую величину при рассмотрении функции f. Смысл термина О-большое зависит от его области применения, но всегда $O(f)$ растёт не быстрее, чем f.

В частности

- фраза "сложность алгоритма есть $O(f(n))$"означает, что с увеличением параметра n, характеризующего количество входной информации алгоритма, время работы алгоритма будет возрастать не быстрее, чем некоторая константа, умноженная на $f(n)$.
- фраза "функция $f(x)$ является о-малым от функции $g(x)$ в окрестности точки p"означает, что с приближением x к p $f(x)$ уменьшается быстрее, чем $g(x)$ (отношение $\frac{|f(x)|}{|g(x)|}$ стремится к нулю).

Определения: пусть $f(x)$ и $g(x)$ - две функции, определенные в некоторой проколотой окрестности точки x_0, причём в этой окрестности g не обращается в ноль. Говорят, что:

Определение 2.12. f является О-большим от g при $x \to x_0$, если существует такая константа $C > 0$, что для всех x из некоторой окрестности точки x_0 имеет место неравенство

$$|f(x)| \leq C|g(x)| \forall x \in X$$

Иначе говоря, в первом случае отношение:

$$\frac{|f|}{|g|} \leq C$$

ограничено сверху.

Аналогично пишут

$$f(x) = O(g(x)), x \to x_0$$

если неравенство выполнено в некоторой проколотой окрестности точки x_0.

Определение 2.13. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ - две функции, определенные в некоторой проколотой окрестности точки x_0, причём в этой окрестности g не обращается в ноль. Говорят, что:

f является о-малым от g при $x \to x_0$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая проколотая окрестность, что для любого x из этой проколотой окрестности имеет место неравенство:

$$|f(x) < \varepsilon|g(x)|$$

$$\frac{|f|}{|g|} \leq C$$

стремиться к нулю при $x \to x_0$.

Можно сказать, что эквивалентные бесконечно малые функции стремятся к нулю с «одинаковой скоростью». Часто приходится различать бесконечно малые по характеру их стремления к 0: одни бесконечно малые стремятся к 0 «быстрее», а другие — «медленнее».

Определение 2.14. Если α и β - функции, бесконечно малые (бесконечно большие) при $x \to a$, причём $\lim\limits_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = K$, где $K \neq 0$ - число, то α и β называются бесконечно малыми одного порядка малости (бесконечно большими одного порядка роста) при $x \to a$. Обозначение: О-большое.

Определение 2.15. Если α и β - функции, бесконечно малые (бесконечно большие) при $x \to a$, причём $\lim\limits_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, то α называется бесконечно малой высшего порядка по отношению к β при $x \to a$. Обозначение: о-малое.

Обозначение бесконечно малой высшего порядка: $\alpha(x) = o(\beta(x))$ при $x \to a$ или, короче, $\alpha = o(\beta)$, $x \to a$

В частности $f(x) = o(1), x \to a$ означает, что функция $f(x)$ есть бесконечно малая в окрестности точки a.

Следует отметить, что запись $\alpha(x) = o(\beta(x))$ при $x \to a$ не информирует нас ни о чём, кроме того, что α стремится к нулю быстрее, чем β при $x \to a$.

Например, обратим внимание, что при $x \to 0$ выполнены равенства $sinx - x = o(x)$ и $tgx - x = o(x)$. Однако нельзя на основании одинакового вида правых частей этих равенств сделать вывод о равенстве их левых частей.

Замечание 2.1. Критерий эквивалентности бесконечно малых

Бесконечно малые функции α и β эквивалентны тогда и только тогда, когда их разность есть бесконечно малая высшего порядка по отношению к каждой из них.

$$\alpha(x) \sim \beta(x), x \to a \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha(x) - \beta(x) = o(\alpha(x)) \\ \alpha(x) - \beta(x) = o(\beta(x)) \end{cases}, x \to a$$

Следствие: $\alpha(x) \sim \beta(x)$, $x \to a \Leftrightarrow \alpha(x) = \beta(x) + o(\beta), x \to a$

Свойства операции сравнения:

1. Постоянный множитель не влияет на соотношение функций, то есть, если $f(x) = o(g(x))$, то $f(x) = o(c \cdot g(x))$ и $Cf(x) = o(g(x))$

Коротко записывают так: $o(c \cdot g) = o(g)$ и $C \cdot o(g) = o(g)$

2. Предел суммы функций равен сумме их пределов

$$o(g) \pm o(g) = o(g)$$

3. Если $f(x) = o(g(x))$ и $g(x) = o(h(x))$ при $x \to x_0$, то $f(x) = o(h(x))$

$$(o(o(g))) = o(g)$$

4. Если функция самая является малой высшего порядка по отношению к g, то она не влияет на соотношение малости между функцией $g(x)$ и другой функцией.

$$f(x) = o(g(x)) \Rightarrow o(f(x) + g(x)) = o(g(x))$$

$$o(g + o(g)) = o(g)$$

5.
$$g^a \cdot o(g^b) = o(g^{a+b})$$

6.
$$(o(g^a))^b = o(g^{a \cdot b})$$

Пусть f и g функции, бесконечно малые в точке a, h - функция, ограниченная в некоторой окрестности точки a. Тогда (все равенства следует читать только слева направо):

1. $o(f) + o(g) = o(f)$
2. $o(f) \cdot o(g) = o(fg)$
3. $o(hf) = o(f)$
4. $h \cdot o(f) = o(f)$
5. $o(f + o(f)) = o(f)$
6. $g \cdot o(f) = o(fg)$
7. $o(o(f)) = o(f)$

Для доказательства свойств полезно хорошо понять, что означают их формулировки. Рассмотрим, например, первое свойство. Оно может быть прочитано так: «Сумма двух бесконечно малых функций, каждая из которых является бесконечно малой высшего порядка по отношению к f, есть также бесконечно малая функция высшего порядка по отношению к f».

Рассмотрим два асимптотических равенства:

$$\cos x \sim 1$$

$$\cos x \sim 1 - \frac{x^2}{2}, x \to 0$$

Очевидно верных, предел отношение левой и правой частей равен единице. Однако, второе из них содержит в каком-то смысел больше информации о косинусе. Дело в том, что погрешность второго равенства бесконечно мала по сравнению с погрешностью первого.

Поэтому разумно ввести следующее понятие.

Пусть $f \sim g$, $f \sim h$. Если $f - h = o(f - g)$, то говорят, что асимптотическое равенство $f \sim h$ точнее, чем $f \sim g$.

Ни в коем случае нельзя «уничтожать равные слагаемые» по обе части знака равенства! Каждая из записей $o(f)$ в этом равенстве означает свою функцию!

Теорема 2.9. *О замене бесконечно малых функций эквивалентными*

Пусть имеется две пары бесконечно малых функций: α, β и $\alpha_1 . \beta_1$, таких, что $\alpha \sim \alpha_1$ и $\beta \sim \beta_1$ при $x \to a$. Тогда:

$$\lim_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \to a} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$$

при условии существования хотя бы одного из этих пределов.

Замечание. Нельзя производить замену на эквивалентные бесконечно малые отдельных слагаемых в сумме. Если же выражение в числителе или знаменателе дроби есть произведение бесконечно малых, то множители (все или некоторые) при отыскании предела можно заменять на эквивалентные.

Замечание:

1. Асимптотическое равенство функций является отношением эквивалентности

2. Соотношения $f \sim g$, $f = g + o(g)$ и $f = g + o(f)$ равносильны

3. Если $f = o(g)$, то $f = O(g)$

4. Если $\alpha \neq 0$, $f \sim \alpha g$, то f и g сравнимы

Замечание:

Замечательные пределы могут быть перезаписаны следующим образом:

$$\sin x \sim \operatorname{tg} x \sim \arcsin x \sim arctgx \sim \ln 1 + x \sim x$$

$$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$$

$$a^x - 1 \sim x \ln a, \quad (1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$$

или:

$$\sin x = x + o(x)$$

$$tgx = x + o(x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

Большую роль в анализе играют асимтотические формулы вида:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k g_k(x) + o(g_n(x)), x \to x_0$$

Эти равенства тем точнее, чем больше n. Особенно часто встречаются случаи, когда $g_k(x) = (x - x_0)^k$.

Если $f(x) \sim c(x - x_0)^k$, где $c \neq 0$, то функция $c(x - x_0)^k$ называется главной степенной частью f при $x \to x_0$.

Не всякая функция f допускает асимптотическое разложение, но если такое разложение есть , то но единственно.

2.6 Непрерывность функций

2.6.1 Понятие непрерывности функции в точке

Определение 2.16. Функция f называется непрерывной в точке x_0, если выполнются два условия:

1. функция f определена в некоторой окрестности точки x_0
2. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Из этого определения прежде всего следует, что о непрерывности функции можно говорить лишь по отношению к тем точкам x_0, в которых функция определена, т. е. $x_0 \in D(f)$.

Можно предложить еще несколько эквивалентных вариантов определения непрерывной функции в точке. Перво условие, которое требуется во всех последующих определениях: функция f определена в x_0 и в некоторой её окрестности, второе условие можно заменить на равносильные.

Опр: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in U_\delta(x_0) : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Опр: если $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0$, то $f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x_0)$

Опр: существуют односторонние пределы в функции f в точке x_0 равные $f(x_0)$.

Для следующего определения введём следующие понятия. $\Delta x = x - x_0$ назовем приращением аргумента, а разность $\Delta f = f(x) - f(x_0)$ - приращением функции, соответствующим данному приращению аргумента.

Таким образом: $\Delta f = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$

Обратим внимание, что приращение функции в данной точке x_0 есть функция от приращения аргумента.

Определение 2.17. Функция f непрерывна в точке x_0, если выполняются два условия:

1. функция f определена в некоторой окрестности точки x_0
2. $\Delta f \xrightarrow[\Delta x\to 0]{} 0$

(Последнее условие читается: приращение функции стремится к 0 при условии, что приращение аргумента стремится к 0.)

Последнее определение, пожалуй, более всего соответствует нашим интуитивным представлениям, связанным с графиками. Действительно, согласно этому определению, малое изменение аргумента Δx: вызывает лишь малое изменение функции Δy, значения которой в результате не могут меняться скачками, т. е. график функции нигде «не рвется».

По аналогии с понятием одностороннего предела введём понятие непрерывности слева или справа: если функция f определена на полуинтервале $(x_0 - \delta; x - 0]$ и $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x) = f(x_0)$, то функция называется непрерывной слева в точке x_0. Аналогично, если функция f определена на полуинтервале $[x_0; x_0+\delta)$ и $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = f(x_0)$, то функция называется непрерывной справа в точке x_0

Ясно, что для непрерывности функции в точке необходимо и достаточно её непрерывности в этой точке слева и справа.

Сопоставим понятие непрерывности с противоположным ему понятием — разрывности. Самое общее определение гласит, что функция разрывна в точке x_0, если она не является непрерывной в этой точке, т. е. не выполняется по крайней мере одно из условий в определении непрерывности. Нам хотелось бы получить представление о характере разрыва и о поведении графика функции вблизи точки разрыва.

Свойства функции, непрерывной в точке:

1. Если функция f непрерывна в точке x_0, то она ограничена в некоторой окрестности этой точки $U_\delta(x_0)$, т.е $\exists \delta > 0$ и $\exists L > 0 : \forall x \in U_\delta(x_0)$ выполняется неравенство $|f(x)| < L$

2. Если функция f непрерывна в точке x_0 и $f(x_0) \neq 0$, то в некоторой окрестности точки x_0 знак функции f совпадает со знаком числа $f(x_0) : \exists \delta > 0 : \forall x \in U_\delta(x_0) : sign f(x) = sign f(x_0)$

3. Если функции непрерывны в точке x_0, то сумма, произведение и частное этих функций (при условии $g(x_0) \neq 0$) также непрерывны в x_0

4. Если функция f непрерывна в точке x_0, а функция g непрерывна в точке y_0, где $y_0 = f(x_0)$, то функция $h = g \circ f$ непрерывна в x_0.

2.7 Непрерывность функций на промежутке

Опр: функция f называется непрерывной на интервале $(a; b)$, если она непрерывна в каждой точке этого интервала.

Опр: функция f называется непрерывной на отрезке $[a; b]$, если она непрерывна на интервале $(a; b)$, непрерывна справа в точке a и непрерывна слева в точке b.

Опр: функция f называется непрерывной на полуинтервале $[a; b)$, если она непрерывна в каждой точке интервала $(a; b)$ и непрерывна справа в точке a.

2.7.1 Непрерывность монотонной функции

Замечание 2.2. Достаточное условие непрерывности монотонной функции

Если функция f монотонна на промежутке $< a; b >$ и её множество значений на этом промежутке есть некоторый промежуток $< c; d >$, т.е $f(< a; b >) =< c; d >$, то f непрерывна на промежутке $< a; b >$.

2.8 Свойства функций, непрерывных на отрезке

2.8.1 Корни непрерывной функции. Промежуточные значения

Теорема 2.10. *Первая теорема Больцано-Коши*

Если функция f определна и непрерывна на отрезке $[a;b]$ и принимает на его концах значения разных знаков, то есть $f(a)\cdot f(b)<0$, то на интервале $(a;b)$ имеется по крайней мере один корень функции, то есть $\exists c\in(a;b): f(c)=0$

Иначе говоря, непрерывная функция при переходе от значений одного знака к значениям другого знака обязательно проходит нулевое значение!

Следующее утверждение — теорема о промежуточных значениях функции.

Теорема 2.11. *Вторая теорема Больцано-Коши*

Если функция f определна и непрерывна на отрезке $[a;b]$ и принимает на его концах различные значения $f(a)=A, f(b)=B, A\neq B$, то для любого числа C, лежащего между A и B, на интервале $(a;b)$ найдется точка c, что $f(c)=C$.

Следствие. Если функция, отличная от константы, определена и непрерывна на промежутке $<a;b>$, то её множество значений также представляет собой промежуток.

Теорема 2.12. *Первая теорема Вейерштрасса*

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то она ограничена на этом отрезке.

2.8.2 Достижимость точных границ

Теорема 2.13. *Вторая теорема Вейерштрасса*

Если функция f непрерынва на отрезке $[a;b]$, то она достигает на этом отрезке своего наибольшего и наименьшего значений.

2.8.3 Существование и непрерывность обратной функции

Теорема 2.14. *О непрерывности обратной функции*

Пусть на некотором промежутке $< a; b >$ определена непрерывная строго монотонная функция с множеством значений Y. Тогда на множестве Y существует обратная функция g, непрерывная и имеющая тот же характер монотонности, что и функция f.

2.9 Асимптоты графика функции

Теорема 2.15. *Для того чтобы прямая $y = kx + b$ была асимптотой графика функции $y = f(x)$ при $k \to +\infty$, необходимо и достаточно, чтобы существовали пределы $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = k$ и $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - kx) = b$*

3 Дифференциальное исчисление функций одной переменной вещественной переменной. Производная и её применения

3.1 Определение производной

3.1.1 Введение

Основная идея дифференциального исчисления заключается в том, что в определенных ситуацияхх исследование поведения функции может свести к изучению многочлена, который хорошо приближает эту функцию. Преимущества этого подхода:

1. Нахождение значений многочленов требует лишь операций сложения и умножения. Аппроксимируя функцию, мы получаем удобный способ приближенного вычисления ее значений.

2. Проанализировать поведение многочленов первой или второй степени не составляет труда, поскольку графики их легко строятся. Если такие многочлены достаточно хорошо приближают функцию в окрестности какой-либо точки, то мы сможем получить информацию о некоторых локальных свойствах этой функции.

3. Главную часть многочлена вблизи его корня можно выделить алгебраически, разложив многочлен на множители. Для функций вида более общего такой способ не годится. Однако, если мы знае достаточно хорошее локальное приближение функции многочленом, то главные части функции многочлена будут одинаковы.

Нам необходимо построить многочлен $p(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} c_k(x-a)^k$ степени не выше n, для которого:

$$p(x_0) = f(x_0), f(x) = p(x) + o((x-x_0)^n), x \to x_0$$

Это значит, что погрешность приближения f многочленом стремится к нулю быстрее старшей степени p, когда $x \to x_0$.

Если такой многочлен существуют, то он единственный.

Опр: многочлен p степени не выше n, удовлетворяющий условию выше, называется многочленом Тейлора функции f порядка n в точке a и обозначается $T_{\alpha,n}(f)$.

Из определения очевидно, что существование $T_{\alpha,0}f$ равносильно непрерывности функции f в точке a. В случае $n \in N$ вопрос о существовании многочена Тэйлора $T_{\alpha,n}f$ более сложен. Сначала рассмотрим для $n = 1$. Это приведет нас к понятию дифференцируемости и производной, которые будут подробно обсуждаться. Затем рассмотрим задачу в общем случае. Будет показано, что для широкого класса функций f многочлен Тейлора существует, а его коэффициенты выражаются через производные старших порядков функции f в точке x_0. Кроме того мы кажем споосб записи и оценки погрешности $f - T_{\alpha,n}f$, который позволяет использовать многочлен Тейлора для приближенного вычисления значений функции f.

3.1.2 Дифференцируемость функции в точке

Опр: функция f называется дифференцируемой в точке x_0, если существует такое число k, что:

$$f(x) = f(a) + k(x - x_0) + o(x - x_0), x \to x_0$$

Коэффициент k называется производной f в точке x_0 и обозначается $f'(x_0)$.

Фактически дифференцируемость f означает существование у нее многочлена Тэйлора первого порядка в точке x_0. Отсюда вытекает единственность производной, поскольку $f'(x_0)$ является коэффициентом $T_{\alpha,1}f$ при $x - x_0$.

Число $\Delta f = f(x) - f(x_0)$ называют приращением функции f в точке x_0, соответствующим приращению аргумента $\Delta f = x - x_0$ и обозначается:

$$\Delta_{x_0} f(x) = f'(x_0) \cdot \Delta x + o(\Delta x), \Delta x \to 0$$

Отбрасывая в правой части этого соотношения $o(\Delta x)$, мы получим приближенное равенство $f(x) - f(x_0) \approx f'(x_0)(x - x_0)$.

Если $f'(x_0) \neq 0$, то при $x \to x_0$ относительная погрешность такого приближения бексоненчо мала, так как:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{o(x - x_0)}{f'(x_0)(x - x_0)} = 0$$

Таким образом линейная функция $\Delta x \to f'(x_0) \cdot \Delta x$ дает главную часть приращения: $\Delta_{x_0} f(x)$ называется диффернциальном f в точке x_0

и обозначется $d_{x_0} f(x)$.

3.1.3 Геометрический смысл понятия производной. Производная как скорость.

Рассмотрим семейство функция $g(x) = f(x_0)+k(x-x_0)$, где k принимает произвольные значения. Их графики представляют собой прямые, проходящие через точку $(x_0, f(x_0)$

Рассмотрим график функции $y = f(x)$ и определим скорость изменения функции в точке x_0. Найдём среднюю скорость функции на промежутке $[x_0; x]$. Разумно считать средней скоростью функции на этом промежутке отношение изменения значения функции на этом промежутке к длине промежутка, то есть:

$$v_{mean}(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

при этом если мы будем брать x всё ближе и ближе к x_0, то в пределе получим мгновенную скосроть изменения функции f в точке x_0. Эта мгновенная скорость называется производной функции f в точке x_0. Дадим формальное определение.

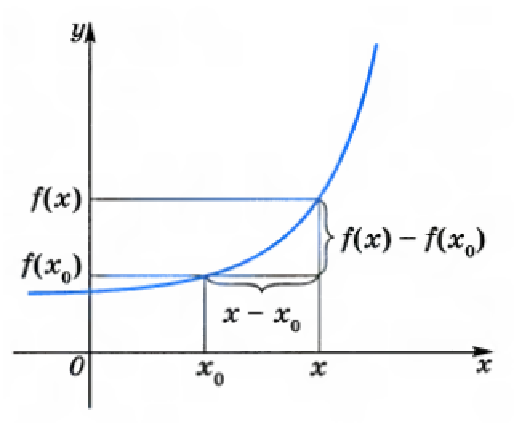


Рис. 2: Графическое понимание производной функции

Определение 3.1. Пусть функция f определена в некоторой окрестности точки x_0. Тогда производной функции f в точке x_0 называется предел (если он существует и конечен):

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Обозначение: $f'(x_0)$ - производная функции f в точке x_0.

Напомним, что величину $f(x)-f(x_0)$ называют приращением функции f на промежутке $[x_0; x]$ и обозначают Δf. При этом величину $x - x_0$ называют приращением аргумента и обозначают Δx. Тогда определение производной можно записать в виде:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Принято также обозначение производной: $f'(x_0) = \frac{df(x_0)}{dx}$, при этом символ символ $\frac{df}{dx}$ воспринимается как единый символ, символы df и dx подчеркивают, что мы рассматриваем бесконечно малое приращение функции и соответствующее бесконечно малое приращение аргумента.

Если мы рассматриваем функцию f на отрезке $[a; b]$, то на его концах можно говорить об односторонних производных, правосторонней производной и левосторонней произвнодной. Они соответственно определяются как правосторонний и левостороний пределы.

3.1.4 Дифференцируемые функции

Для решения многих практических задач оказывается достаточно знать лишь приближённое значение данной функции. Поэтому полезно уметь находить функцию более простого вида, нежели данная, достаточно точно приближающую данную. Одной из самых простых (и самых важных в математическом анализе) функций является линейная функция, график которой есть прямая. Многие функции в окрестности каждой точки своей области определения «похожи на линейную».

Рассмотрим некоторую функцию f в малой окрестности точки x_0 и зададим линейную функцию следующим образом: $g(x) = f(x_0)+k(x-x_0)$. При этом приращению функции $\Delta f = f(x) - f(x_0)$ в точке x_0 соответствует приращение линейной функции $\Delta g = k(x - x_0) = k\Delta x$ в этой точке.

Нам бы хотелось, чтобы приращение линейной функции Δg мало отличалось от соответствующего приращения Δf (точнее, чтобы малое приращение Δg было почти равно малому приращению Δf). Каждому значению k соответствует своя прямая. Оказывается, что теснее всего прилегает к графику функции в окрестности x_0 касательная, проведенная через точку графика с абсциссой x_0. Тем самым линейная функция, графиком которой является эта касательная, будет лучше всего приближать функцию f в малой окрестности точки x_0.

Однако всё сказанное оказывается верным не для всех функций, а для некоторого ограниченного (хотя и достаточно широкого) класса функций. Функции, которые ведут себя «почти как линейная функция» в окрестности точки x_0, называются дифференцируемыми в точке x_0. Такой функцией будет, например, функция синус в точке $x = 0$.

При большом увеличении график синуса почти неотличим в окрестности нуля от графика прямой $y = x$ (касательной к графику $y = \sin x$ в точке $x = 0$).

Определение 3.2. Функция f называется дифференцируемой в точке x_0, если существует вещественное число A и функция α, такие, что $\Delta f = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x)$, причём $\alpha(\Delta x) = o(\Delta x)$ при $\Delta x \to 0$ (при этом $A = f'(x_0)$)

Какие же функции являются дифференцируемыми в точке? Какие функции «ведут себя как линейная» в окрестности данной точки? Оказывается, что это те и только те функции, у которых существует производная в данной точке.

Теорема 3.1. *Критерий дифференцируемости*

Равносильны следующие утверждения:

1. f дифференцируема в точке x_0 и $f'(x_0) = k$

2. Предел $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ существуют и равен k

3. Существует функция F, непрерывная в точке x_0, для которой $F(x_0) = k$ и $f(x) - f(x_0) = F(x)(x - x_0)$

Теорема 3.2. *Функция f имеет производную в точке тогда и только тогда, когда она дифференцируема в этой точке.*

Определение 3.3. Величину $f'(x_0)\Delta x$ рассматриваемую как функцию от Δx, называют дифференциалом функции f в точке x_0. Обозначают его обычно $df(x_0)$. Таким образом, $df(x_0) = f'(x_0)\Delta x$.

При этом величину Δx обозначают за dx и мы получим формулу $df(x_0) = f'(x_0)dx$.

3.1.5 Производная и непрерывность. Производная и гладкость функции

Не каждая функция имеет производную во всех точках её области определения.

Функции, имеющие производную в каждой точке области определения, называют гладкими функциями.

Теорема 3.3. *Если функция f имеет производную в точке x_0, то функция f непрерывна в этой точке. Обратное неверно.*

Замечание 3.1. Если две функции в некоторой окрестности точки x_0 совпадают и одна из них имеют производную в этой точке, то другая также имеет производную в точке x_0 и эти производные равны.

Преде функции в точке существует тогда и только тогда, когда левосторонний и правосторонний предел равны и существуют. Таким образом, для того чтобы функция имела производную в точке x_0 необходимо и достаточно, чтобы левосторонняя и правосторонняя производны в данной точке существовали и были равны.

3.1.6 Вычисление производной

Теорема 3.4. *Пусть функция f и g имеют производную в точке x_0, а c - произвольное вещественное число. Тогда:*

1. $(c \cdot f)'(x_0) = c \cdot f'(x_0)$
2. $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

Данное утверждение называется линейностью операции дифференцирования.

Следствие: существует производная линейной комбинации функций.

3.2 Касательная

Определение 3.4. Пусть функция f имеет производную в точке x_0. Касательной к графику функции f в точке x_0 называется прямая с угловым коэффициентом $k = f'(x_0)$, проходящая через точку $(x_0; f(x_0))$

Заметим, что из этого определения следует геометрический смысл производной: производная функции в точке — это угловой коэффициент касательной к графику функции, проведённой в этой точке. Если производная положительна, то чем она больше, тем «быстрее растёт» функция в данной точке, тем больше угловой коэффициент касательной и тем «круче» сама касательная.

Уравнение касательной:

Выведем уравнение касательной. Будем искать его в виде $y = kx+b$. По определению $k = f'(x_0)$. Найдем b. Касательная проходит через точку $(x_0; f(x_0))$, поэтому верно равенство $f(x_0) = f'(x_0) \cdot x_0 + b$, откуда $b = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$

Откуда получим уравнение касательной:

$$y = f'(x_0)x + f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$$

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Не существует вертикальной касательной по определению.

Замечание 3.2. Уравнения всех касательных, проведеныых к графику функции $y = f(x)$ через произвольную точку $M_0(x_0; y_0)$ могут быть записаны в виде:

$$y = f'(t)(x - t) + f(t)$$

где t является корнем уравнения

$$y_0 = f'(t)(x_0 - t) + f(t)$$

3.2.1 Угол между графиками

Опр: углом между графиками функций в точке их пересеченя называется угол между касательными (если они существуют) к графикам этих функций, проведенными в указанной точке.

Опр: два графика касаются друг друга в их общей точке, если в этой точке они имеют одну и ту же касательную.

3.3 Производная произведения, частного, композиции

Теорема 3.5. *Пусть функции f и g имеют производные в точке x_0, тогда их произведение имеет производную в точку x_0, причём*

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + g'(x_0)f(x_0)$$

Лемма 3.1. Пусть функция f имеет производную в точке x_0 и $f(x_0) \neq 0$, тогда существует производная функции $\frac{1}{f}$ в точке x_0, причём:

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) = -\frac{f'(x_0)}{f^2(x_0)}$$

Теорема 3.6. *Пусть f и g имеют производные в точке x_0 и $g(x_0) \neq 0$, тогда существует производная функции $\frac{f}{g}$ в точке x_0, причём*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - g'(x_0) \cdot f(x_0)}{g^2(x_0)}$$

Теорема 3.7. *О производной композиции*

Если функции g и f дифференцируемы соответственно в точках x_0 и $y_0 = g(x_0)$ и $E(g) \subset D(f)$, то функция $h = f(g)$ дифференцируема в точке x_0, причём $h'(x_0) = f'(y_0) \cdot g'(x_0)$

Замечание:

1. Для линейных функций утверждение очевидно, поскольку их композиция будет линейной функцией, угловой коэффициент которой есть произведение угловых коэффициентов f и g, то есть производных.

Теорема 3.8. *Производная обратной функции*

Пусть f - непрерывная и строго монотонная функция на промежутке $< a; b >$, g - обратная к ней функция. Если функция f дифференцируема в точке $x_0 \in (a; b)$ и $f'(x_0) \neq 0$, то функция g дифференцируема в точке $y_0 = f(x_0)$, причём $g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$

Замечания:

Геометрический смысл теоремы ясен, так как обратная функция получается из графика симметрией относительно $y = x$.

3.4 Производные некоторых элементарных функций

В этом параграфе мы вычислим производные некоторых элементарных функций.

1. Функция $f(x) = c$, где $c \in R$ имеет производную в каждой точке вещественной оси, причём

$$c' = 0$$

2. Функция $f(x) = x^n$, где $n \in N$ имеет производную в каждой

точке вещественной оси, причём

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

3. Функция $f(x) = x^\alpha, \alpha \in R$, имеет производную в каждой точке полуинтервала $(0; +\infty)$, причём

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$$

4. Функция $f(x) = \sin x$ имеет производную в каждой точке вещественной оси, причём

$$(\sin x)' = \cos x$$

5. Функция $f(x) = \cos x$ имеет производную в каждой точке вещественной оси, причём

$$(\cos x)' = -\sin x$$

6. Пусть $a > 0, a \neq 1$. Функция $f(x) = a^x$ имеет производную в каждой точке вещественной оси, причем

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$$

7. $(e^x)' = e^x$

8. Функция $f(x) = \ln x$ имеет производную в каждой точке полуинтервала $(0; +\infty)$, причём

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

9.

$$(\log_a x)' = \frac{1}{\ln a} \cdot \ln x$$

10.

$$(shx)' = chx$$

11.

$$(chx)' = shx$$

12.

$$(thx)' = \frac{1}{ch^2 x}$$

13.

$$(cthx)' = -\frac{1}{sh^2 x}$$

Замечание 3.3. Для любого $x \in (-1;1)$ справедливы формулы:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Замечание 3.4. Для любого вещественного x справедливы формулы

$$(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

Также справедливы формулы:

$$(tgx)' = \frac{1}{cos^2x}$$

$$(ctgx)' = -\frac{1}{sin^2x}$$

Ниже приведена таблица известных производных в общем виде.

№	Функция	Производная
1	$f(x) = c$	$f'(x) = 0$
2	$f(x) = x^{\alpha}$	$f'(x) = \alpha x^{\alpha - 1}$
3	$f(x) = a^x \ (a \neq 1)$	$f'(x) = \ln a \cdot a^x$
4	$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
5	$f(x) = \log_a x$	$f'(x) = \frac{1}{x \ln a} \ (x > 0)$
6	$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \frac{1}{x} \ (x > 0)$
7	$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$
8	$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$
9	$f(x) = \operatorname{tg} x$	$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$
10	$f(x) = \operatorname{ctg} x$	$f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$
11	$f(x) = \arcsin x$	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
12	$f(x) = \arccos x$	$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
13	$f(x) = \operatorname{arctg} x$	$f'(x) = \frac{1}{1 + x^2}$
14	$f(x) = \operatorname{arcctg} x$	$f'(x) = -\frac{1}{1 + x^2}$

Рис. 3: Таблица производных

3.5 Теоремы о среднем и их приложения

В этом параграфе будут доказаны теоремы, позволяющие использовать производную как мощное средство исследования свойств функции, с помощью которого легко определять экстремумы функции, промежутки возрастания и убывания функции, находить множество значений функции, доказывать неравенства и тождества.

Кроме того мы выведем несколько важных следствий этих теорем, в частности, правило Лопиталя, полезное при вычислении пределов.

Докажем вначале необходимое условие того, что в заданной внутренней точке промежутка функция достигает своего наибольшего или наименьшего значения. Этот факт будет использоваться как при доказательстве теорем о среднем, так и при изучении локальных экстремумов.

Теорема 3.9. *Теорема П. Ферма*

Пусть в точке $x_0 \in (A;B)$ функция $f : \langle A;B\rangle \to R$ имеет производную. Если точка x_0 является точкой экстремума (максимума или минимума), то $f'(x_0)$.

Замечание: геометрический смысл теоремы состоит в том, что в точке x_0 касательная к графику функции горизонтальна. В условиях теоремы существенно, что x_0 лежит внтури промежутка. Например, для функции $f(x) = x$, заданной на $[0;1]$, утверждение неверно, так как $\max\limits_{[0;1]} f = f(1)$, но $f'(1) = 1 \neq 0$.

Опр: функция $f : \langle A;B\rangle \to R$ называется дифференцируемой на $\langle A;B\rangle$, если она дифференцируема в любой точке промежутка $\langle A;B\rangle$.

Теорема 3.10. *Теорема М. Ролля*

Пусть функция f определена инепрерывна на отрезке $[A;B]$, а также дифференцируема на интервале $(A;B)$ и при том $f(A) = f(B)$. Тогда существует точка $c \in (A;B)$, для которой $f'(c) = 0$

Геометрический смысл теоремы, также заключается в том, что касательная к графику горизонтальна.

Утверждение теоермы может быть неверным, если f не дифференцируема в некоторой точке $(A;B)$ или разрывна на одном из концов.

Из критерия дифференцируемости в точке x_0 вытекает равенство:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

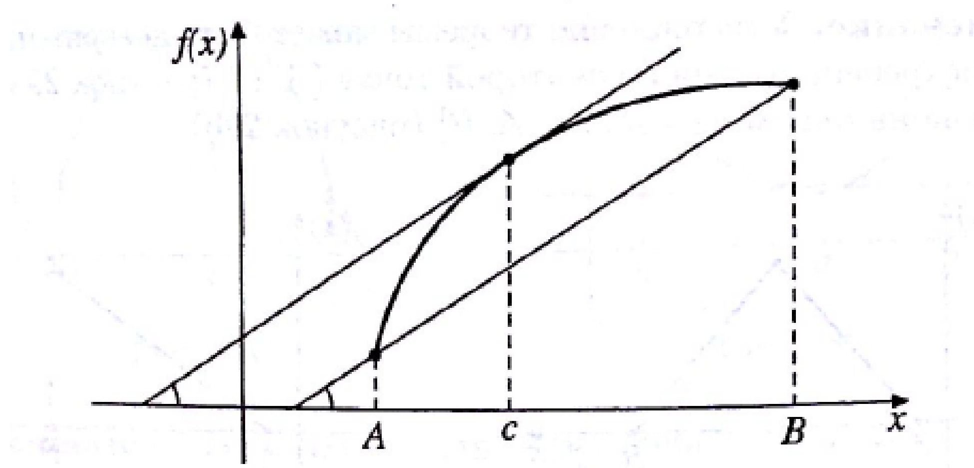
Оно означает, что $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \approx f'(x_0)$ при x, близких к x_0. Оказывается, у этого соотношения есть глобальный аналог. Даже при фиксированном x разностное отношение $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ есть производная f, но не в точке x_0, а в некоторой средней точке, лежащей между x_0 и x. Сформулируем этот важный факт строго.

Теорема 3.11. *Теорема Ж.-Л Лагранжа*

Пусть функция f определена и непрерывна на отрезке $[A;B]$, а также дифференцируема на интервале $(A;B)$. Тогда существует точка $c \in (A;B)$, такая, что

$$f'(c) = \frac{f(B) - f(A)}{B - A}$$

Замечание: геометрический смысл теоремы Лагранжа таков: в некоторой точке $c \in (A; B)$ касательная к графику f параллельна хорде, соединяющей концы графика f.



Теорема Лагранжа: геометрический смысл

Замечания:

1. точка c, вообще говоря, не единственна. Например, для функции $f(x) = x$ в качестве c можно взять любую точку из промежутка.

2. Теорема Ролля является чстным случаем теоремы Лагранжа

3. Утверждение теоремы Лагранжа можно записать в виде:

$$f(B) - f(A) = f'(c)(B - A)$$

Это равенство называют формулой конечных приращений.

4. Теорему Лагранжа часто используют в следующей симметричной форме: существует такое $\theta \in (0; 1)$, что:

$$\frac{f(B) - f(A)}{B - A} = f'(A + \theta(B - A))$$

Для доказательств достаточно положить $\theta = \frac{c-A}{B-A}$. Преимущество такой записи состоит в том, что она справедлива и для функций, заданных на $[B; A]$ при $B < A$.

Следствие 1: Оценка конечных приращений

Пусть f непрерывна на $[A; B]$ и дифференцируема на $(A; B)$. Если существуют $m, M \in R : m \leq f'(x) \leq M$ при всех $x \in (A; B)$, то

$$m(B - A) \leq f(B) - f(A) \leq M(B - A)$$

В частности, если $|f'(x)| \leq M$ при всех $x \in (A, B)$, то:

$$|f(B) - f(A)| \leq M(B - A)$$

Следствие 2: пусть f дифференцируема на $\langle A; B \rangle$ и существует такое $M > 0$, что $|f'(x)| \leq M$ при всех $x \in \langle A; B \rangle$. Тогда f равномерно непрерывна на $\langle A; B \rangle$.

Теорема 3.12. *Теорема Дарбу (теорема о промежуточных значениях производной)*

Пусть f непрерывна на $[A; B]$ и дифференцируема на $(A; B)$ и точки $x_1, x_2 \in (A; B)$. Тогда производная на отрезке $[x_1; x_2]$ принимает все значения между $f'(x_1)$ и $f'(x_2)$.

Теорема 3.13. *Теорема О.Коши*

Пусть функции f и g непрерывны на $[A; B]$ и дифференцируемы $(A; B)$. Предположим, что $g'(x) \neq 0$ при всех $x \in (A, B)$. Тогда существует точка $c \in (A, B)$, для которой:

$$\frac{f(B) - f(A)}{g(B) - g(A)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Замечания:

1. Теорема Лагранжа получается из теоремы Коши, если взять $g(x) = x$.

2. В условиях теоремы значения функции g в точках A и B различны, иначе по теореме Ролля нашлась бы точка $x_0 \in (A, B)$, в которой $g'(x_0) = 0$

3. Теорему Коши часто используют в следующей симметричной форме: существует такое $\theta \in (0; 1)$, что:

$$\frac{f(B) - f(A)}{g(B) - g(A)} = \frac{f'(A + \theta(B - A))}{g'(A + \theta(B - A))}$$

Рассмотрим теперь применение производной к вычислению пределов. Мы приведём правило Лопиталя раскрытия неопределенностей в двух вариантах. Первый из них относится к неопределенностям вида $\frac{0}{0}$.

Теорема 3.14. *Правило Лопиталя для бесконечно малых функций*

Пусть $-\infty \le a < b \le +\infty$*, функции* f *и* g *дифференцируемы на* (a, b)*, причём* $g'(x) \neq 0$ *для всех* $x \in (a, b)$*. Предположим, что выполнены следующие условия:*

1. $f(x) \to 0, g(x) \to 0$ *при* $x \to x_0$

2. предел $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ *существует и равен* $L \in R$*.*

Тогда предел $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ *также существует и равен* L*.*

Замечания

1. В данной редакции правило Лопиталя служит для нахождения правостороннего предела.

2. В условиях теоремы $g(x) \neq 0$ для всех $x \in (a, b)$, то есть функции $\frac{f}{g}$ определена на (a, b), как и $\frac{f'}{g'}$. Это будет установлено в процессе доказательства.

Сформлируем правило Лопиталя для неопределенности вида: $\frac{\infty}{\infty}$.

Теорема 3.15. *Правило Лопиталя для бесконечно больших функций*

Пусть $-\infty \le a < b \le +\infty$*, функции* f *и* g *дифференцируемы на* (a, b)*, причём* $g'(x) \neq 0$ *для всех* $x \in (a, b)$*. Предположим, что выполнены следующие условия:*

1. $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \infty$

2. предел $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ *существует и равен* $L \in R$*.*

Тогда предел $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ *также существует и равен* L*.*

В случае $L > 0$ правило Лопиталя имеет следующую физическую интерпретацию: если одна материальная точка движется быстрее другой приблизительно в L раз, то и расстояния, пройденные этими точками за равное время, будут различаться примерно в L раз.

Выведем с помощью правила Лопиталя несколько равенств, играющих важную роль в математическом анализе.

1. Если $\alpha > 0$, то $\ln x = o(x^\alpha)$ при $x \to +\infty$. Действительно, положим $f(x) = \ln x, g(x) = x^\alpha$. Тогда f и g - бесконечно большие функции на $+\infty$, $g'(x) = \alpha x^{\alpha-1} \neq 0$ на $(0, +\infty)$.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1/x}{\alpha x^{\alpha-1}} = 0$$

то и
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha}=0$$

2. $\left(\frac{x}{c^x}\right)^\alpha \to 0, x\to+\infty$
3. $\lim\limits_{x\to0+} x^x=1$

Теорема 3.16. *Дифференцируемость n.*

Если f и g n раз дифференцируемы в точке x_0, то справедливы следующие утверждения.

1. Для любых $a,b\in R$ функция $af+bg$ n раз дифференцируема в точке x_0 и
$$(af+bg)^{(n)}(x_0)=af^{(n)}(x_0)+bg^{(n)}(x_0)$$

2. Функция $f\cdot g$ n раз дифференцируема в точке x_0 и
$$(f\cdot g)^{(n)}(x_0)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k f^{(k)}(x_0)g^{(n-k)}(x_0)$$

Второе выражение называется **формулой Лейбница**.

3.6 Формула Тэйлора

В этом параграфе мы решим задачу о существовании многочлена Тейлора. Будет доказано, что:
$$T_{\alpha,n}f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

при определенных условиях на функцию f, которые обсуждаются ниже.

Кроме того, мы в различных ситуациях изучим величину:
$$R_{\alpha,n}f(x)=f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

называемую остатком формуле Тейлора.

В заключение будут получены Тейлоровские разложения для основных элементарных функций.

Пусть $a\in R, n\in N$. Рассмотрим вначале случай, когда функция есть многочлен степени не выше n. Обозначим его за p и запишем в виде:

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k (x - x_0)^k, c_0, \ldots, c_n \in R$$

$$c_0 = p(x_0)$$

Как выразить остальные коэффициенты c_k в терминах p. Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема 3.17. *Формула Тейлора для многочленов*

Пусть $n \in Z_+$, p-многочлен степени не выше n. Тогда при любых $a, x \in R$

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{p^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

Таким образом:

$$T_{\alpha,n}p(x) = p(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{p^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k, x \in R$$

Полученное соотношение наводит на мысль, что и для функций f более общего вида должно выполняться равенство $T_{\alpha,n}f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$. Чтобы его правая часть имела смысл, нужно потребовать n-кратную дифференцируемость f в точке x_0. Оказывается, что при данном условии многочлен Тейлора функции f действительно существует и вычисляется по указанной формуле. В этом заключается локальный вариант формулы Тейлора.

Лемма 3.2. Предположим, что функция g n раз дифференцируема в точке x_0 и

$$g(x_0) = g'(x_0) = g^{(n)}(x_0) = 0$$

Тогда $g(x) = o((x - x_0)^n), x \to x_0$

Перейдем к локальному варианту формулы Тейлора.

Теорема 3.18. *Формула Тейлора-Пеано.*

Пусть $E \subset R$, $a \in E, f : E \to R, n \in N$. Предположим, что f n раз дифференцируема в точке x_0. Тогда:

$$T_{\alpha,n}f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o((x - x_0)^n), x \to x_0$$

Данная теорема утверждает, что многочлен Тэйлора хорошо приближает функцию $f(x)$ при $x \approx x_0$. Однако формула Тейлора-Пеано не дает никакой оценки погрешности $R_{\alpha,n}f(x)$ такой аппрокисмации при конкректном x, что делает её непригодной для приближённых вычислений. Мы получим формулу для $R_{\alpha,n}f(x)$ из которой можно будет судить о малости остатка.

Теорема 3.19. *Формула Тейлора-Лагранжа*

Пусть функция f $n+1$ раз дифференцируема на $\langle A;B\rangle$, $x_0, x \in \langle A;B\rangle, x_0 \neq x$. Точка найдётся точка в интервале с концами $x_0, x : c \in \Delta_{x_0,x}$, для которой:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Выведем теперь разложения Тейлора-Пеано для простейших элементарных функций.

1. $f(x) = e^x, f^{(k)}(x) = e^x, f^{(k)}(0) = 1$ для любых $k \in N, x \in R$. Следовательно:

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

2. $f(x) = \sin(x)$, $f^{(m)}(x) = \sin(x + \frac{\pi m}{2}$. Тогда

$$f^{(2k)}(0) = 0, \sin(x+\pi k) = 0, f^{(2k+1)} = (-1)^k$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

3. $f(x) = \cos x$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

4.

$$tgx = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \ldots$$

5. $f(x) = \ln(1+x)$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k} + o(x^n) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

6. $C_\alpha^k = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-k+1)}{k!}$ при $k \in Z_+$. Тогда:

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} C_\alpha^k x^k + o(x^n) = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

7.$f(x) = \sqrt{1+x}$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + \ldots, x \to x_0$$

8.

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} x^n, |x| < 1$$

Формулу Тейлора-Пеано для $(1+x)^\alpha$ называют биномиальным разложением.

Формула Тейлора-Пеано часто используется для раскрытия неопределенностей. Отметим, что асимптотические равенства, полученные в главе 2 являются частными случаями разложений Тейлора-Пеано. Например, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ эквивалетно $\ln(1+x) = x + o(x)(x \to 0)$, а это есть разложение в ряд Тэйлора при $n = 1$.

Для оценки остатка используется следующее утверждение:

Пусть функция удовлетворяет условиям теоремы Тейлора-Лагранжа. Предположим, что существует такое число $M > 0$, что $|f^{(n+1)}(t)| \le M$ для любого t из интервала с концами x_0 и x. Тогда:

$$|R_{\alpha,n}f(x)| \le \frac{M|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Замечание: отмечалось, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|x|^n}{n!} = 0$ при любом $x \in R$. Поэтому для функций f $R_{0,n}f(x) \to 0$ при $n \to \infty$, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} T_{0,n}f(x) = f(x)$. Этот факт окажется полезным в теории степенных рядов.

3.7 Исследование функции с помощью производной

Важным приложеним дифференциального исчисления является исследование функций и построение их графиков. Поэтому оставшаяся часть главы посвящена изучению геометрических свойств функций. Вначале мы разберем понятия монотонности и экстремума функции, тесно связанные с первой производной. Грубо говоря, характер монотонности определяется по знаку производной, а в точках экстремума производная меняет знак. Понятие выпуклости и вогнутости функции, за которые отвечает вторая производная, будут подробно рассмотрены в следующем параграфе.

3.7.1 Возрастание и убывание функции

Наиболее важным приложением первой производной является проверка монотонности на промежутке дифференцируемой функции.

Теорема 3.20. *Критерий нестрогой монотонности функции*

Пусть функция f непрерывна на промежутке $\langle A; B\rangle$ и дифференцируема на интервале $(A; B)$, тогда:

1. Функция f возрастает на $\langle A; B\rangle$ тогда и только тогда, когда $\forall x \in (A; B) : f'(x) \geq 0$

2. Если $f'(x) > 0$ при всех $x \in (A, B)$, то f строго возрастает на $\langle A; B\rangle$.

Первое утверждение теоермы называем критерием возрастания. Второе утверждение дает лишь *достаточное* условие строгого возрастания f на $\langle A; B\rangle$. Оно не является необходимым.

Поменяв в формулировке теоремы знаки неравенств на противоположные, получим соотвественно критерий убывания и достаточное условие строгого убывания f на $\langle A; B\rangle$.

Следствие 1: Критерий постоянства функции Пусть функция f непрерывна на $\langle A; B\rangle$ и дифференцируема на $(A; B)$. Тогда равносильны следующие утверждения.

1. f постоянна на $\langle A; B\rangle$
2. $f'(x) = 0$ при всех $x \in (A, B)$

Следствие 2: пусть функции f и g непрерывны на $[A; B\rangle$ и дифференцируемы на (A, B). Если $f(A) = g(A)$ и $f'(x) > g'(x)$ при всех $x \in (A, B)$, то $f(x) > g(x)$ при любом $x \in (A; B\rangle$

Следствие 2 используется для доказательства неравенств. Разберем полезный пример:

$$\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}, x > 0$$

$f(x) = \cos x, g(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$. Тогда:

$$f'(x) = g'(x) = x - \sin x > 0, x > 0$$

Та как $f(0) = g(0) = 1$, то можно применять следствие к промежутку $[0; +\infty)$.

Теорема 3.21. *Достаточное условие строгого возрастания функции*

Пусть функция f непрерывна на промежутке $< a; b >$ и дифференцируема на интервале $(a; b)$, причём $\forall x \in (a; b) : f'(x) \geq 0$ и производная равна нулю лишь в конечном числе точек, тогда f строго возрастает на промежутке $< a; b >$

Другой важный геометрической характеристикой графика функции является *локальный экстремум* или просто *экстремум*.

Определение 3.5. Экстремум функции. Предположим, что $E \subset R, f : E \to R, x_0 \in E$

1. Пусть существует $\delta > 0$: при всех $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap E$ выполняется неравенство $f(x) \geq f(x_0)$. Тогда x_0 называется точкой минимума f. Если же $f(x) \leq f(x_0)$ при всех $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap E$, то x_0 называется точкой максимума f.

2. Пусть существует $\delta > 0$: при всех $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap E \backslash \{x_0\}$ выполняется неравенство $f(x) > f(x_0)$. Тогда x_0 называется точкой строгого минимума f. Если при всех $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap E \backslash \{x_0\}$ выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$. Тогда x_0 называется точкой строгого максимума f.

3. Если x_0 является точкой минимума или максимума функции f, то x_0 называется точкой экстремума f.

Не следует думать, что в точке минимума реализуется наименьшее значение функции. Оно будет наименьшим лишь локально, то есть в некоторой окрестности точки минимума.

В дальнейшем мы обычно будем предполагать, что f дифференцируема в точке x_0, поскольку условия экстремума записывается в терминах производных. Кроме того, поскольку понятие экстремум является локальным, мы можем ограничиться рассмотрением функций, заданных на промежутке.

Обратимся к задаче поиска точек экстремума. Решение этой задачи производиться в два этапа. Вначале с помощью необходимого условия экстремума мы отбрасываем точки, в которых экстремума заведомо не может быть. Затем оставшиееся точки исследуется с помощью достаточного условия экстремума. Перейдем к реализации этой схемы.

Теорема 3.22. *Необходимое условие экстремума. Пусть* $f : \langle A; B\rangle \to R$, $a \in (A, B)$, f *дифференцируема в точке* x_0. *Если* x_0 *является точкой экстремума* f, *то* $f'(x_0) = 0$

Точка x_0, удовлетворяющая условию $f'(x_0) = 0$, называется стационарной для функции f.

Замечания:

1. Условие стационарности точки не гарантирует, что в ней есть экстремум. Теорема не дает достаточного условия экстремума.

2. Экстремумы могут быть в точках, где функция не дифференцируема.

3. Утверждение теоремы неверно для концевых экстремумов. Например, функция f, определенная на отрезке $[0, 1]$ формулой $f(x) = x$, имеет минимум в точке 0, но $f'(0) = 1$.

4. Назовём точку $x_0 \in (A, B)$ критической (или подозрительной на экстремум), если либо x_0 стационарна для f, либо f не дифференцируема в точке x_0. Необходимое условие экстремума утвердлает, что все принадлежащие (A, B) точки экстремума f лежат в множестве ее критических точек.

Важным приложением теоремы является *задача о наибольшем и наименьшем значениях функции* на отрезке.

Опр: точки, в которых производная функции f существует и равна нулю, а также точки, в которых функция f определена, а производная не существует, называются критическими точками функции f.

Теорема 3.23. *Непрерывная функция* f *на отрезке* $[a; b]$ *достигает своего наибольшего (наименьшего) значения в критических точках или на концах отрезка.*

Объяснение:

Пусть f - непрерывная на $[A, B]$ функция. По теореме Вейерштрасса f достигает на $[A, B]$ наибольшего и наименьшего значений. Для их нахождения необходимо выполнить следующие действия.

1. Найти множество C критических точек f.

2. Вычислить величины:

$$M = \max\{f(A), f(B), \max_C f\}, m = \min\{f(A), f(B), \min_C f\}$$

Тогда $M = \max\limits_{[A,B]} f$ и $m = \min\limits_{[A,B]} f$. Если множество C конечно, то вычисление M и m не представляет трудностей.

В задаче о наибольшем и наименьшем значениях не требовалось искать точки экстремума, достаточно было бы знать критические точки функции. Рассмотрим достаточные условия экстремума, позволяющие исследовать критические точки. Первое условие основано на изучении знака производной в окрестности точки.

Теорема 3.24. *Достаточное условия экстремума в терминах первой производной.*

Пусть функция $f : \langle A; B\rangle \to R, x_0 \in (A, B)$ дифференцируема в окрестности точки x_0 и непрерывна в точке x_0. Если в точке x_0 производная функции f меняет знак, то есть существует $\delta > 0$, такое, что на интервалах $(x_0 - \delta; x_0)$ и $(x_0; x_0 + \delta)$ производная принимает значения разных знаков, то x_0 является точкой строгого экстремума. При этом:

1. Если производная меняет знак с $+$ на $-$, то эта точка строгого максимума.

2. Если производная меняет знак с $-$ на $+$, то это точка строгого минимума.

Замечание: если функция f' не меняет знака на множестве $(x_0-\delta, x_0)\cap(x_0, x_0+\delta)$, то f не имеет экстремума в точке x_0. Действительно, если функция не меняет знак, то в этом случае f строго монотонна на $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ по необходимому условию экстремума.

Другое достаточное условие, использующее вторую производную функции, получается из формулы Тейлора.

Теорема 3.25. *Достаточное условие экстремума в терминах второй производной*

Пусть $f : \langle A; B\rangle \to R, x_0 \in (A, B)$. Предположим, что функция f дважды дифференцируема в точке x_0, причём $f'(x_0) = 0$. Тогда справедливы следующие утверждения:

1. Если $f''(x_0) > 0$, то x_0 - точка строгого минимума f.

2. Если $f''(x_0) < 0$, то x_0 - точка строгого максимума f.

Применим формулу Тейлора-Пеано:

$$f(x)-f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+o((x-x_0)^2) = \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2(1+o(1))$$

Замечание: если $f''(x_0) = 0$, то теорема не дает возможности проверить наличие у f эстремума в точке x_0. Обобщая метод докаательства, можно получить общее правило исследования точек с помощью старших производных.

Теорема 3.26. *Связь экстремума со страшими производными*

Пусть $f : \langle A; B\rangle \to R, x_0 \in (A, B), n \in N$. Предположим, что функция f n раз дифференцируема в точке x_0, причём $f'(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, а $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Тогда справедливы утверждения.

1. Если n нечетно, то f не имеет экстремума в точке x_0.

2. Пусть n четно. Если $f^{(n)}(x_0) > 0$, то f имеет в точке x_0 строгий минимум, а если $f^{(n)}(x_0) < 0$, то строгий максимум.

Плюс данной теоремы в том, что теорема может быть расширена для многомерного аналога.

3.8 Вторая производная. Выпуклые функции

Пусть функция f имеет производную в каждой точке области определения. Тем самым определена функция f' с той же областью определения, что и функция f. Функция f' тоже может иметь производную в каждой точки области определения, тем самым будет определена производная производной $(f')'$. Эта функция называется второй производной функции f и обозначается f''.

Теорема 3.27. *Теорема Г.Дарбу. О нулях производной.*

Пусть f дифференцируемая функция на $\langle A; B\rangle$. Предположим, что точки $a, b \in \langle A; B\rangle$ таковы, что $f'(a) < 0$, $f'(b) > 0$. Тогда существует точка c,лежащая между a и b, для которой $f'(c) = 0$.

Замечание. Если бы функция f' была непрерывной, то теорема Дарбу былы ба следствием теоремы Больцано-Коши. Однако f' может быть разрывной.

Следствие 1. Монотонность функции с ненулевой производной

Пусть f дифференцируемая функция на $\langle A; B\rangle$. Если $f'(x) \neq 0$ при всех $x \in \langle A; B\rangle$, то f строго монотонна на $\langle A; B\rangle$.

Это утверждение уточняет условие строгой монотонности функции.

Следствие 2. О сохранении промежутка

Пусть f дифференцируемая функция на $\langle A; B\rangle$. Тогда образ f' есть промежуток $\langle A; B\rangle$

Следствие 3. О скачках производной

Пусть f - дифференцируемая функция на $\langle A; B\rangle$, $x_0 \in \langle A; B\rangle$. Тогда у функции f' в точке x_0 не может быть скачка ни слева, ни справа.

Таким образом, производная дифференцируемой функции может иметь разрывы только второго рода.

3.8.1 Параметрически заданные функции

Пусть $\varphi, \psi : \langle A; B\rangle \to R$. Будем понимать систему:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \qquad (t \in \langle A; B\rangle)$$

как отображение промежутка $\langle A; B\rangle$ в плоскость R^2. Если трактовать параметр t как время, то система описывает движение точки на плоскости. Можно ли выразить из этой системы t и однозначно выразить y через x - нет Параметрическая заданные функции не являются зависимость y от x.

Заметим, однако, что если функция φ строго монотонна на $\langle A; B\rangle$, то выразить y через x можно. В этом случае φ имеет обратную функцию на $\varphi(\langle A; B\rangle)$. Из первого уравнения получаем: $t = \gamma(x)$, поэтому:

$$y = \psi(\gamma(x)), x \in \varphi(\langle A; B\rangle)$$

Поэтому $f = \phi \circ \gamma$.

Мы будем называть f параметрически заданной функцией.

Предположим, что функции φ и ψ дифференцируемы на $\langle A; B\rangle$. Что можно сказать о дифференцируемости f и как вычислить ее производную? Сформулируем достаточное условие существования и дифференцируемсти параметрически заданной функции.

Теорема 3.28. *О параметрически заданных функциях*

Пусть φ и ψ - дифференцируемые на $\langle A; B\rangle$ функции, причем производная не равна нулю всех $t \in \langle A; B\rangle$. Тогда:

1. существует единственная функция $f : \varphi(\langle A; B\rangle) \to R$, для которой при всех $t \in \langle A; B\rangle$ выполняется равенство: $f(\varphi(t)) = \psi(t)$

2. функция f дифференцируема на $\phi(\langle A; B\rangle)$ и

$$f'(\varphi(t)) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

3.9 Выпуклые функции

Перейдем к рассмотрению важных геометрических характеристик поведения функции - выпуклости и вогнутости.

Вначале мы дадим определение выпуклости и вогнутости и выведем из него ряд утверждений геометрического характера, полезных для построения графиков функции. Затем мы обсудим связь выпуклости с дифференциальным исчислением, которая позволяти нам исследовать функции на выпуклость аналитическими средствами. В заключении, покажем, как с помощью выпуклости можно доказывать неравенства.

Рассмотрим функцию $f : \langle A; B\rangle \to R$

Опр: функция f выпукла на $\langle A; B\rangle$, если $\forall\lambda \in [0; 1] : \forall a, b \in \langle A; B\rangle$ выполняется неравенство:

$$f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b)$$

Опр: функция f строго выпукла на $\langle A; B\rangle$, если $\forall\lambda \in [0; 1] : \forall a, b \in \langle A; B\rangle$, $(a \neq b)$ выполняется неравенство:

$$f(\lambda a + (1-\lambda)b) < \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b)$$

Замечание. Не умоляя общности, будем считать, что $a < b$, что мы и будем делать в дальнейшем. Отметим также, что при $a = b$ неравенство превращается в равенство.

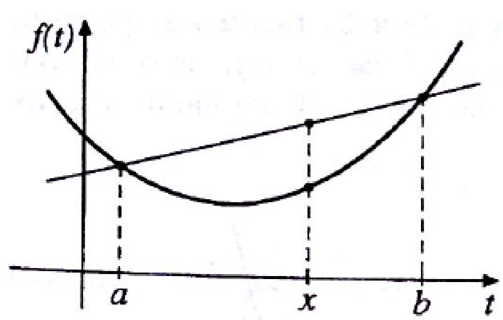
Выясним геометрический смысл выпуклости функции. Пусть $a, b \in \langle A; B\rangle$. Положим $x = \lambda a + (1-\lambda)b$. Когда $\lambda \in [0,1]$, то x пробегает все точки (a, b). Решив уравнение относительно λ, получим:

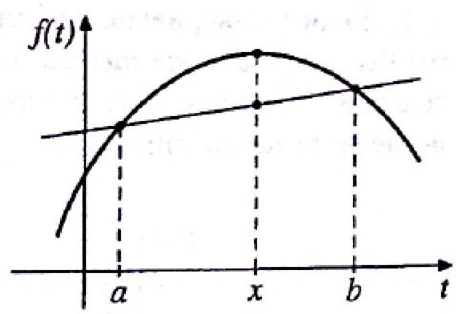
$$\lambda = \frac{b-x}{b-a}, 1-\lambda = 1 - \frac{b-x}{b-a} = \frac{x-a}{b-a}$$

Поэтому неравенство из определения переписывается:

$$f(x) < \frac{b-x}{b-a}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b)$$

График правой части этого неравенства на $[a; b]$ есть хорда, соединяющая точки $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$. Таким образом, строгая выпуклость функции означает, что любая хорда, соединяющая две точки её графика лежит строго выше самого графика, за исключением концевых точек.





Выпуклая и вогнутая функция

Заменяя в определении знаки неравенств на противоположные, мы получим определения вогнутой и строго вогнутой функции.

Опр: функция f называется выпуклой (выпуклой вниз) на промежутке $\langle A; B\rangle$, если любая хорда её графика на этом промежутке не ниже графика функции.

Опр: функция f называется вогнутой (выпуклой вверх) на промежутке $\langle A; B\rangle$, если любая хорда её графика на этом промежутке лежит не выше графика функции.

Непосредственно из определения вытекают следующие правила для арифметических действий над выпуклыми функциями. Пусть f и g выпуклые функции на интервале. Тогда:

1. функция $f + g$ выпукла на том же интервале

2. при любом $a > 0$, функция af выпукла на $\langle A; B\rangle$

3. при любом $a < 0$, функция af вогнута на $\langle A; B\rangle$

Следствие. Пусть $f : \langle A; B\rangle \to R, x_0 \in \langle A; B\rangle$. Обозначим за $F(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Тогда справедливы утверждения.

1. Если f выпукла на $\langle A; B\rangle$, то F возрастает на $\langle A; B\rangle \setminus \{x_0\}$.

2. Если f строго выпукла на $\langle A; B\rangle$, то F строго возрастает на $\langle A; B\rangle \setminus \{x_0\}$.

По рисунку кстати видно, что продолжение хорды лежит ниже графика функции.

Теорема 3.29. *Об односторонних производных. Пусть функция f выпукла на $\langle A; B\rangle$, $x_0 \in \langle A; B\rangle$. Тогда*

1. Для $x_0 < B$ существует правосторонняя производная для $x_0 > A$ и левосторонняя, которые конечны и левосторонняя производная меньше правой производной.

Следствие. Непрерывность выпуклых функций Если функция f выпукла на $\langle A; B\rangle$, то она непрерывна на (A, B).

Можно доказать, что для непрерывных функция определение выпуклости можно заменить на следующее (равносильное данному).

Опр: непрерывная функция f выпукла на $\langle A; B\rangle$, если $\forall A, B \in \langle A; B\rangle$ выполняется неравенство

$$f\left(\frac{A+B}{2}\right) \leq \frac{f(A)+f(B)}{2}$$

Теорема 3.30. *Достаточный признак выпуклости*

Пусть функция f дифференцируема на интервале $(A; B)$, непрерывна на промежутке $\langle A; B\rangle$ и её производная f возрастает (может быть нестрого) на интервале $(A; B)$, тогда функция f выпукла на промежутке $\langle A; B\rangle$.

Теорема 3.31. *Критерий выпуклости в терминах касательных*

Пусть функция $f : \langle A; B\rangle \to R$, f дифференцируема на $\langle A; B\rangle$. Тогда:

1. Функция f выпукла на $\langle A; B\rangle$ тогда и только тогда, когда для любых $x_0, x \in \langle A; B\rangle$ выполняется неравенство $f(x) \geq T_{\alpha,1}f(x)$.

Теорема 3.32. *Условия выпуклости в терминах второй производной*

Пусть $f : \langle A; B\rangle \to R$, f непрерывна на $\langle A; B\rangle$ и дважды дифферн-цируема на (A, B). Справедливо следующее:

1. f выпукла на $\langle A; B\rangle$ тогда и только тогда, когда $f''(x) \geq 0$ при всех $x \in (A, B)$

2. Если $f''(x) > 0$ при всех $x \in (A, B)$, то f строго выпукла на $\langle A; B\rangle$.

3. Если $f''(x) < 0$ при всех $x \in (A, B)$, то f строго вогнута на $\langle A; B\rangle$.

Теорема 3.33. *Пусть функция f задана и выпукла на промежутке $\langle A; B\rangle$ и дифференцируема на интервале (A, B), тогда все точки графика функции f лежат на любой касательной к этому графику (проведённой в точке $x_0 \in (A, B)$) или на ней.*

С выпуклостью связано еще одно геометрическое понятие - *точка перегиба.* Рассмотрим его подробнее.

Определение 3.6. Точка перегиба

Пусть функция $f : \langle A; B\rangle \to R, x_0 \in (A, B)$. Предположим, что выполнены следующие условия.

1. существует $\delta > 0$, такое, что функция f имеет разный характер выпуклости на промежутках $(x_0 - \delta; x_0]$ и $[x_0; x_0 + \delta)$ (то есть на одном из промежутков f выпукла, а на другом - вогнута).

2. f непрерывна в точке x_0

3. существует $f'(x_0) \in R$

Тогда точка $(x_0; f(x_0))$ называется точкой перегиба кривой (графика функции f).

Таким образом, в точке перегиба график функции меняет характер монотонности и переходит с одной стороны касательной на другую. Обратимся к задаче поиска перегиба.

Теорема 3.34. *Необходимое условие точки перегиба*

Пусть функция $f : \langle A; B\rangle \to R, x_0 \in (A, B)$. Пусть функция f дважды дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0 и её вторая производная непрерывна в точке x_0. Если x_0 - точка перегиба, то $f''(x_0) = 0$

Теорема не дает достаточного условия перегиба.

Теорема 3.35. *Достаточное условие точки перегиба*

Пусть функция $f : \langle A; B\rangle \to R, x_0 \in (A, B)$, непрерывна в x_0 и имеет в ней производную. Пусть функция f и дважды дифференцируема в окрестности точки x_0 и $f''(x_0) = 0$ и f'' меняет знак при переходе черех точку x_0. Точка x_0 - точка перегиба функции f.

3.9.1 Разлчные класические неравенства

Рассмотрим различные красивые классические неравенства, которые доказываются с помощью выпуклости и вогнутости.

Определение 3.7. Числа p и q из $(1, +\infty)$, связанные соотношением $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, называются сопряженными показателями.

Теорема 3.36. *Неравенство Юнга. Пусть $x, y \geq 0$, p, q - сопряженные показатели, то есть $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Тогда*

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{x^q}{q}$$

Следующие два неравенства, которые нам предстоит доказать, имеют наглядную геометрическую интерпретацию. Поэтому до их обсуждения мы должны определить некоторые операции над векторами R^n. Пусть $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $y = (y_1, \ldots, y_n)$ - векторы из R^n.

1. Сложение векторов $x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$
2. Умножение вектора на число: $\lambda x = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n), (\lambda \in R)$
3. Скалярное произведение векторов $x \cdot y = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$
4. Длина вектора: $|x| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$.

Для $p \geq 1$ можно определить p-норму вектора x по формуле:

$$||x||_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Заметим, что $||x||_2$ совпадает с длиной вектора x, поэтому p-норму называют еще обобщенной длиной. Мы будем использовать p-нормы в неравенствах Минковского и Гёльдера.

Напомним еще определения *коллинеарности* и *сонаправленности* векторов:

Определение 3.8. Пусть $x, y \in R^n$

1. Векторы x и y называются коллинеарными, если либо один из них нулевой, либо существует $\lambda \in R\backslash\{0\}$, для которого $x = \lambda y$

2. Векторы x и y называются соноправленными, если либо один из них нулевой, либо существует $\lambda > 0$, для которого $x = \lambda y$

Теорема 3.37. *Неравенство Минковского для неотрицательных чисел*

Пусть $n \in N, p \geq 1$. Предположим, что векторы $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ имеют неотрицательны координаты. Тогда:

$$\left(\sum_{k=1}^{n}(x_k + y_k)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Равенство реализуется тогда и только тогда, когда либо $p = 1$, либо x и y соноправлены.

Теорема 3.38. *Неравенство Минковского в R^n*

Пусть $n \in N, p \geq 1$. Предположим, что векторы $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ - из R^n. Тогда:

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k + y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

В случае $p > 1$ равенство реализуется тогда и только тогда, когда x и y соноправлены.

Замечания:

Неравенство минковского можно записать в краткой форме:

$$||x + y||_p \leq ||x||_p + ||y||_p$$

При $p = 2$ числа $||x||_p$, $||y||_p$ и $||x + y||_p$ являются длинами сторон треугольника с вершинами в точках $0, x, x + y$, поэтому неравенство превращается в неравенство треугольника.

Теорема 3.39. *Неравенство Гёльдера для неотрицательных чисел*

Пусть $x, y \geq 0$, p, q - сопряженные показатели, то есть $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, n \in N$. Если векторы $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $y = (y_1, \ldots, y_n)$ имеют неотрицательные координаты, то

$$\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \leq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Замечание: равество в неравенстве Гёльдера достигается тогда и только тогда, когда соноправлены векторы $(x_1^p, \ldots, x_n^p)$ и $(y_1^q, \ldots, y_n^q)$.

Теорема 3.40. *Неравенство Гёльдера для любых чисел.*

Пусть $x, y \geq 0$, p, q - сопряженные показатели, то есть $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, n \in N$. Даны векторы $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $y = (y_1, \ldots, y_n)$. Тогда:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Теорема 3.41. *Неравенство Коши в R^n. Пусть $n \in N$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $y = (y_1, \ldots, y_n)$ - векторы в R^n. Тогда:*

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Равенство достигается тогда и только тогда, когда векторы коллинеарны. Заметим, что для коллинеарных векторов неравенство Коши превращается в равенство. Содержательным является обртаное утверждение.

Замечание: в R^2 и R^3 скалярное произведение вектором x и y определяется по формуле:

$$x \cdot y = |x| \cdot |y| \cdot \cos\alpha$$

где α - угол между x и y. Отсюда видно, что $|x \cdot y| \leq |x| \cdot |y|$, а равенство достигается при $\alpha = 0$ или $\alpha = \pi$, то есть для коллинеарных векторов.

Более того, неравенство Коши позволяет нам корректно определить $\alpha[0; \pi]$ между векторами x и y по формуле:

$$\cos\alpha = \frac{x \cdot y}{|x| \cdot |y|}$$

Перепишем определение выпуклости в общей форме.

Теорема 3.42. *Неравенство Иенсена.*

Пусть функция $f : \langle A; B\rangle \to R, n \in N$. Предположим, что $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \langle A; B\rangle$, а $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ - положительные числа, удовлетворяющие равенству: $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1$. Тогда справедливы утверждения.

1. *Если f выпукла, то:*

$$f(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \ldots + \lambda_n f(x_n)$$

2. *Если f строго выпукла, то либо:*

$$f(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n) < \lambda_1 f(x_1) + \ldots + \lambda_n f(x_n)$$

либо $x_1 = \ldots = x_n$ (в последнем случае реализуется равенство.)

Замечание: теореме справедлива для вогнутых функций.

Теорема 3.43. *Неравенство Йенсена*

Для выпуклой на промежутке функции f и любых чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ из этого промежутка выполняется неравенство:

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)}{n}$$

Теорема 3.44. *Неравенство Коши для средних.*

Для любых положительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$, выполняется неравенство:

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n}$$

Причем равенство реализуется только при равенстве x_n.

4 Интегральное исчисление функций одной вещественной переменной

4.1 Первообразная функции и неопределенный интеграл

В предыдущей главе мы изучилии операцию дифференцирования, соспоставляющую функции её производную, и вывели правила, позволяющие вычислить производну. любой элементарной функции. Рассмотрим обратную задачу, в которой производная известна, а функцию требуется найти.

Удобно иметь название для функции, чьей производной является данная функция.

Определение 4.1. Первообразная функции на промежутке.

Пусть функция $f : \langle A, B\rangle \to R$. Функция $F : \langle A, B\rangle \to R$ называется первообразной f, если F дифференцируема на $\langle A, B\langle$ и $F'(x) = f(x)$ при всех $x \in \langle A, B\langle$.

Замечания:

1. Из теоремы о дифференцировании суммы следует, что если F - первообразная функции f на множества A, то для любого вещественного C функция $F(x) + c$ также является первообразной функции f. Таким образом, если функция имеет одну первообразную, то она имеет бесконечно много первообразных.

2. Первообразная - понятие глобально, то есть можно говорить о первообразной на промежутке, но не представляет интереса изучение первообразной функции f в точке x_0

Определение 4.2. Неопределенный интеграл функции на промежутке.

Пусть функция $f : \langle A, B\rangle \to R$. F принадлежит множеству первообразных. Множество функций $\{F(x) + c : c \in R\}$ называется неопределенным интегралом f на $\langle A, B\rangle$ и обозначается $\int f(x)dx$.

Фактически $\int f(x)dx$ есть множество всех первообразных на промежутке, но запись $\{F(x) + c : c \in R\}$ удобнее, посколью оно дает явное описание этого множества. Для краткости принято писать просто:

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

понимая под c произвольное вещественное число.

Обозначение $\int f(x)dx$ требует пояснений. Оно используется по аналогии с обозначением для определенного интеграла, который тесно связан с неопределенным. Грубо говоря, определенный интеграл есть сумма вида $\sum\limits_k f(x_k)\Delta x_k$, где Δx_k - малые приращения аргумента f. Таким образом, выражение $f(x)dx$ похоже на слагаемые в этих суммах, а значок $\int$ напоминает латинскую букву S, указывающую на операцию суммирования.

Для неопределенного интеграла символ dx не несет никакой смыслойо нагрузки, как и аргумент функции f и может быть записан как $\int f$. Тем не менее запись $\int f(x)dx$ удобна по двум причинам.

1. При наличии у функции f параметров символ dx позволяет указать, что переменной является именно x.

2. Трактуя dx как дифференциал, можно сделать более простым и наглядными формулы замены переменной и интегрирования по частям, которые будут рассмотрены ниже.

Хотя неопределенный интеграл является не функцией, а множеством функций,на негоможно распространить некоторые операции, введенные ранее для функций.

1. Дифференцирование неопределенного интеграла:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x), x \in \langle A, B\rangle$$

2. Пусть функции f и g на множестве A имеют первообразные F и G соответственно, тогда:

1. Функция f и g имеет на множестве A первообразные, одна из которых равна $F+G$

2. $\forall k \in R$ функция kf имеет на множестве A первообразные, одна из которых равна kF

$$\lambda \int f(x)dx = \{\lambda F(x) + c : c \in R\}$$

$$\int f(x)dx + H(x) = \{F(x) + H(x) + c : c \in R\}$$

$$\int f(x)dx + \int g(x)dx = \{F(x) + G(x) + c : c \in R\}$$

Перейдем к вопросу о существовании первообразной. Начнем с необходимого условия.Производная функции, дифференцируемой на промежутке, не может иметь скачков в одной из точек этого промежутка, значит, этому требованию должна удовлетворять и функция, имеющая первообразную на промежутке. Например, функция. С другой стороны, разрывы второго рода могут быть. Поэтому непрерывность функции не является необходимым условием существования у нее первообразной.

Оказывается, что любая непрерывная на промежутке функция имеет на нем первообразную.

Теорема 4.1. *Достаточное условие существования первообразной.*

Если функция f непрерывна на $\langle A, B\rangle$, то у нее на $\langle A, B\rangle$ есть первообразная.

Поскольку элементарные функции непрерывны на своих областях определения, можно доказывать существование их первообразных. Однако применить теорему непосредственно можно к тем элементарным функциям, которые определены на промежутке.

Определение 4.3. Первообразная функции на множестве

Если функция F дифференцируема на E и $F'(x) = f(x)$ при всех $x \in E$, то F называется первообразной f на множестве E.

Лемма 4.1. Пусть F - дифференцируемая на E функция. Тогда справедливы следующие утверждения:

1. Множество E есть объединение своих максимальных промежутков.

2. Пусть $G = F|_{\langle A,B\rangle}$, где $\langle A, B\rangle$ - максимальный промежуток для E. Тогда $F'(x_0) = G'(x_0), \forall x_0 \in \langle A, B\rangle$

Лемма показывает, что для нахождения первообразной некоторой функции на E достаточно найти ее на каждом максимальном промежутке. В частности, если функция f непрерывна на E, то у нее есть первообразная на E. Однако описание первообразных будет более сложным, поскольку постоянные слагаемые на разных макимальных промежутках могут не совпадать.

Например для функции $f(x) = \frac{1}{x}$ имеет два максимальных промежутка: $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$.

Обратимся теперь к задаче вычисления первообразных элементарных функций. Прежде всего выпишем тблицу простейших интегралов, к которым с помощью различных приемов будут сводиться другие, более сложные интегралы.

1. $\int adx = ax + c, a \in R$
2. $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c, a \neq -1$
3. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$
4. $\int e^x dx = e^x + c$
5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c, a > 0, a \neq 1$
6. $\int \sin x dx = -\cos x + c$
7. $\int \cos x dx = \sin x + c$
8. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = tgx + c$
9. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -ctgx + c$
10. $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + c$
11. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$
12. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = arcsin\frac{x}{a} + c, a > 0$
13. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln|x + \sqrt{x^2+a}| + c, a \in R$
14. $\sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2} arcsin\frac{x}{a} + c$

Следствия:

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$$

Если функция f имеет элементарную первообразную, то интеграл $\int f(x)dx$ называется берущимся, впротивном случае - неберущимся.

Поскольку не все интегралы от элементарных функций берутся, не существует и универсального способа вычисления первообразных этих функций, в отличие от правил дифференцирования.

1. Линейность неопределенного интеграла

$$\int (af(x) + bg(x))dx = a \int f(x)dx + b \int g(x)dx$$

Теорема 4.2. *Замена переменной в неопределенном интеграле*

Пусть $f : \langle A, B\rangle \to R$, F *- первообразная* f *на* $\langle A, B\rangle$, $\varphi : \langle C, D\rangle \to \langle A, B\langle$ *- дифференцируемая на* $\langle C, D\rangle$ *функция. Тогда*

$$\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)dx = F(\varphi(x)) + c$$

Трактуем следующим образом: $y = \varphi(x)$ $dy = \varphi'(x)dx$, dx - приразение аргумента функции φ. Формальный переход от x к y в левой части равенства даёт

$$\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)dx = \int f(y)dy = F(y) + c = F(\varphi(x)) + c$$

Эти рассуждения объясняют смысл термина "замена переменной".

Следствие: пусть в условии теоремы о замене переменной, функция ϕ имеет обратную функцию ψ на $\langle A, B\rangle$. Если функция G является первообразной $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$, то:

$$x = \varphi(y), dx = d\varphi(y) = \varphi'(y)dy$$

$$\int f(x)dx = f(\varphi(y)) \cdot \varphi'(y)dy = G(y) + c = G(\psi(x))$$

Пример:

1. Вычислить интеграл $\int ctgxdx$. Положим $y = \sin x$

$$y = \sin x = \varphi(x) \Rightarrow dy = d\sin x = \varphi'(x)dx = \cos xdx$$

$$\int \operatorname{ctg} xdx = \int \frac{\cos xdx}{\sin x} = \int \frac{d\sin x}{\sin x} = \int \frac{dy}{y} = \ln|y| + c = \ln|\sin x| + c$$

2.

$$y = \sqrt{x}, x = y^2, dx = 2ydy$$

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = \int \frac{2ydy}{1+y} = 2\int (1 - \frac{1}{1+y})dy = 2\int dy - 2\int \frac{dy}{y+1} =$$

$$dy + 1 = (y+1)'dy = dy$$

$$= 2y - 2\int \frac{d(y+1)}{y+1} = 2y - 2\ln|y+1| + c = 2\sqrt{x} - \ln(\sqrt{x}+1)^2 + c$$

Докажем теперь формулу интегрирования по частям, которая даёт еще один вжный прием вычисления первообразных.

Теорема 4.3. *Формуа интегрирования по частям*

Пусть f, g непрерывны на интервале $\langle A, B\rangle$ и дифференцируемые на нем же. Тогда:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx$$

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Замечание: формула понижения.

$$2na\int \frac{dx}{(x^2+a)^{n+1}} = (2n-1)\int \frac{dx}{(x^2+a)^n} + \frac{x}{(x^2+a)^n}, n \to N$$

Теорема 4.4. *Любая рациональная функция имеет элементарную первообразную*

Так как в курсе алгебры доказывается, что любую рациональную функцию можно представить в виде суммы многочлена и нескольких простейших дробей. Интегралы от многочленов и простейших дробей первого рода вычисляются непосредственно по таблице.

Отметим специальные функции, которые являются неберущимися интегралами:

$$\int \frac{\sin x}{x}dx, \int \frac{\cos x}{x}dx, \int \frac{dx}{\ln x}dx, \int \frac{e^x}{x}dx, \int sinx^2dx, \int cos^2xdx, \int e^{-x^2}$$

4.2 Определенный интеграл Римана и интегрируемые функции

Определение 4.4. Пусть $[a, b]$ - невырожденный отрезок. Набор точек:

$$\tau = \{x_k\}_{k=0}^n : \quad a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

называется *дроблением* или *разбиением* отрезка $[a, b]$.

Отрезки $[x_k, x_{k+1}], (k \in [0 : n-1])$ называют *отрезками дробления*, через Δx_k обозначается длина k-ого отрезка дробления: $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$.

Величина

$$\lambda = \lambda_\tau = \max_{0 \le k \le n-1} \Delta x_k$$

то есть наибольшая из длин отрезков дробления называется *рангом* или *мелкостью дробления* τ.

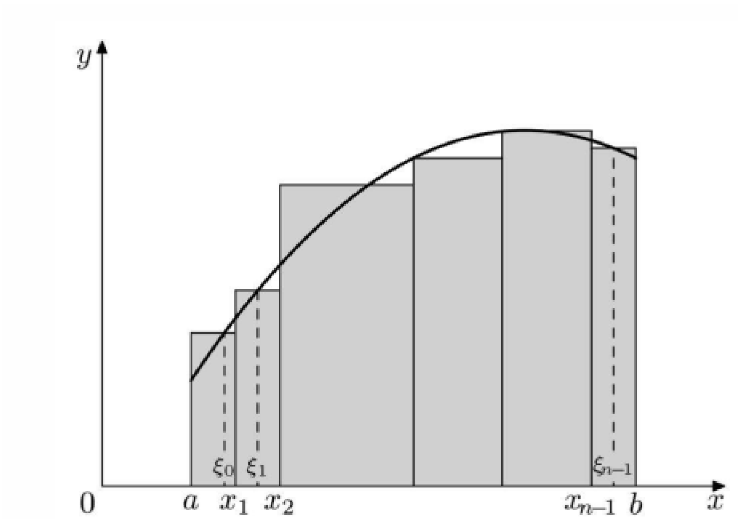
Набор точек $\xi = \{\xi_k\}_{k=0}^{n-1}$, таких что $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$ при всех $k \in [0 : n-1]$, называется *оснащением дробления*. Дробление вместе с его оснащением, то есть пара (τ, ξ), называется оснащенным дроблением.

Эти обозначения, связанные с отрезком $[a, b]$, будут далее употребляться без пояснений.

Определение 4.5. Пусть $f : [a, b] \to R$. Суммы:

$$\delta = \delta_\tau(f, \xi) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k$$

называются *интегральными суммами* или суммами Римана функции f, отвечающие оснащённому дроблению (τ, ξ).



Интегральная сумма Римана

На рисунке изображен график неотрицательной функции f, а интегральная сумма равна сумме площадей прямоугольников с основаниями Δx_k и высотами $f(\xi_k)$. Естественно ожидать, что для достаточно хороших функций с измельчением дробления сумма площадей прямоугольниклв будет все меньше отличаться от площади подграфика. Чтобы превратить эту идею в четкую формулировку, необходимо определение площади.

Дадим определение предела интегральных сумм и займемся его изучением.

Определение 4.6. Пусть $f : [a, b] \to R$. Число $I \in R$ называют *пределом интегральных сумм* при ранге дробления, стремящемся к нулю, и пишут:

$$I = \lim_{\lambda_\tau \to 0} \sigma_\tau(f, \xi), \quad I = \lim_{\lambda \to 0} \sigma$$

если

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall \tau : \lambda_\tau < \delta, \forall \xi : |\sigma_\tau(f, \xi) - I| < \varepsilon$$

то есть для любого положительного числа ξ существует такое положительное число σ, что для любого оснащенного дробления (τ, ξ), ранг которого меньше δ, интегральная сумма отличается от числа I меньше, чем на ε. В общем это определение предела на языке Коши.

Определение 4.7. Пусть $f : [a, b] \to R$. Если существует предел интегральных сумм $\lim\limits_{\lambda \to 0} \sigma$, равный числу I, то функция f называется интегрируемой по Риману на $[a, b]$, а число I - интегралом (определенным интегралом, интегралом Римана) от функции f, но отрезку $[a, b]$ и обозначается: $\int\limits_a^b f$.

Множество интегрируемых по Риману на $[a, b]$ функций обозначается через $R[a, b]$.

Числа a, b в обозначении $\int\limits_a^b f$ называют *пределами интегрирования*, а f - подынтегральной функцией. Часто бывает удобно явно указывать переменную интегрирования и писать $\int\limits_a^b f(x)dx$. Переменная x здесь немая и может юыть заменена другой буквой.

Если определенный интеграл существует, то функция называется интегрируемой.

Рассмотрим фигуру, ограниченную графиком непрерывной функции $f(x)$, принимающей на $[a, b]$ только неотрицательные значения, ограниченную вертикальными прямыми $(x = a, x = b)$ и осью абсцисс.

При диаметре ращбиения стремящемуся к нулю, ступенчатая фигура "исчерпывает"криволинейную трапецию:

$$\int_a^b f(x)dx = S_c, f(x) \geq 0, f(x) \in C([a, b])$$

В этом состоит геометрический смысл определенного интеграла. В случае разрывной, неположительной, знако переменной функции, определенный интеграл определяется алгебраической сумме площадей.

4.2.1 Интегральные Суммы Дарбу

Рассмотрим интегральные суммы специального вида.

Определение 4.8. Пусть $f : [a, b] \to R$, $\tau = \{x_k\}_{k=0}^{n}$ - дробление $[a, b]$,

$$M_k = \sup_{x \in [x_k, x_{k+1}]} f(x), m_k = \inf_{x \in [x_k, x_{k+1}]} f(x), k \in [0 : n-1]$$

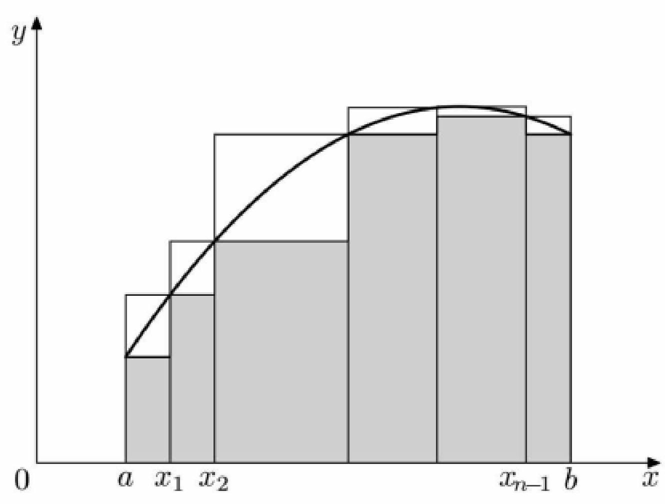
Суммы

$$S = S_\tau(f) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k \quad \text{и} \quad s = s_\tau(f) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k$$

называются верхней и нижней интегральными суммами или суммами Дарбу функции f, отвечающие дроблению τ.

Если f непрерывна на $[a, b]$, то по теореме Вейерштрасса числа M_k и m_k являются наибольшми и наименьшими значениями f на $[x_k, x_{k+1}]$. В общем слчае M_k и m_k не обязаны быть значениями функции, поэтмоу суммы Дарбу могут не быть суммами Римана. Тем не менее суммы Дарбу устроены проще сумм Римана, так как в их определении не участвует оснащение дробления.

Верхняя сумма есть сумма произведения белых прямоугольников, а нижняя - серых прямоугольников.



Разберем некоторые свойства сумм Дарбу.

1. Грани берутся по всевозможным оснащениям дробления τ;

2. При добавлении новых точек дробления верхняя сумма не увеличится, а нижняя - не уменьшится;

3. Каждая нижняя сумма Дарбу не превосходит каждой верхней (даже отвечающей другому дроблению).

4. Каковы бы ни были два разбиения одного и того же отрезка, нижняя сумма Дарбу на одном разбиении не превосходит верхней суммы Дарбу на другом разбиении.

5. Нижние суммы Дарбу ограничены сверху, а верхние - снизу.

Лемма 4.2. Интегрируемая на отрезке функция ограничена на нём

Определение 4.9. Пусть $f : [a, b] \to R$. Величины:

$$I^* = \inf_{\tau} S_\tau, I_* = \sup_{\tau} S_\tau$$

называются верхними и нижними интегралами Дарбу.

Из свойства следует, что $I_* \leq I^*$. Каки для сумм Дарбу, ограниченность f сверху (снизу) равносильна соотношению $I^* < +\infty$.

Теорема 4.5. *Критерий интегрируемости функции.*

Пусть $f : [a, b] \to R$. *Тогда* $f \in R[a, b]$ *в том и только случае, когда* $S_\tau - s_\tau \xrightarrow[\lambda \longrightarrow 0]{} 0$, *то есть:*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall \tau : \lambda_\tau < \delta : S_\tau(f) - s_\tau(f) < \varepsilon$$

Определение 4.10. Пусть $f : D \subset R \to R$. Величина

$$\omega(f)_D = \sup_{x,y \in D} (f(x) - f(y))$$

называется *колебанием* функции f на множестве D.

Из определения граней функции ясно, что:

$$\omega(f)_D = \sup_{x \in D} f(x) - \inf_{y \in D} f(y)$$

Для заданного дробления отрезка $[a, b]$ точками x_k обозначим через

$\omega_k(f)$ колебание f на $[x_k, x_{k+1}]$:

$$\omega_k(f) = \omega(f)_{[x_k, x_{k+1}]} = M_k - m_k$$

Замечание:

Теорема может быть переформулирована следующим образом. Пусть $f : [a, b] \to R$. Тогда $f \in R[a, b]$ в том и только том случае, когда:

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k(f) \Delta x_k = 0$$

$$S_t(f) - s_\tau(f) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k - \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k(f) \Delta x_k$$

Следствие 1. Если $f \in R[a, b]$, то есть если f принадлежит множеству итегрируемых по Риману функций, то :

$$\lim_{\lambda \to 0} S_\tau(f) = \lim_{\lambda \to 0} s_\tau(f) = \int_a^b f$$

$$\lim_{\lambda \to 0} S_\tau(f) = I^*, \lim_{\lambda \to 0} s_\tau(f) = I_*$$

Замечание. Критерий Дарбу интегрируемости функции

Пусть $f : [a, b] \to R$. Тогда $f \in R[a, b]$ в том и только том случае, когда f ограничена на $[a, b]$ и $I_* = I^*$.

Замечание. Критерий Римана интегрируемости функции

Пусть $f : [a, b] \to R$. Тогда $f \in R[a, b]$ в том и только том случае, когда:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \tau : S_\tau(f) - s_\tau(f) < \varepsilon$$

Критерий Римана усиливает теореме для достаточности: для установления интегрируемости функции достаточно любому $\varepsilon > 0$ найти хоть одно дробление, для которого $S_\tau - s_\tau < \varepsilon$, а не добиваться выполнения этого неравенства для всех дроблений достаточно малого ранга.

Геометрическая разность $S_\tau - s_\tau$ есть сумма площадей незакрашенных прямоугоьников. Поэтому критерий Римана имеет наглядное геометрическое истолкование: $f \in R[a, b]$ в том и только том случае, когда график f можно заключить в объединение конечного набора прямоугольникв указанного вида сколь угодно малой суммарной площади.

Теорема 4.6. *Интегрируемость непрерывной функции*

Непрерывная функции на отрезке интегрируема на нем. Другими словами, справедливо включение:

$$C[a,b] \subset R[a,b]$$

Теорема 4.7. *Интегрируемость монотонной функции*

Монотонная на отрезке функция интегрируема на нём

Замечание: если значения интегрируемой функции изменить на конечном множестве точек, то интегрируемость не наршуится и интеграл не изменится.

Теорема 4.8. *Интегрируемость функции и её сужения.*

1. Если $f \in R[a,b], [\alpha,\beta] \subset [a,b]$, то $f \in R[\alpha,\beta]$, то есть если функция интегрируема на отрезке, то и на вложенном отрезке тоже интегрируема.

2. Если $a < c < b$, $f : [a,b] \to R$, f интегрируема на $[a,c]$ и на $[c,b]$, то $f \in R[a,b]$

Второе утверждение справделиво и тогда, когда отрезок разбит и на несколько отрезков. Это проверяется по индукции

Определение 4.11. Функция $f : [a,b] \to R$ называется кусочно-непрерывной на $[a,b]$, если множество её точек разрыва пусто или конечно, и все имеющиеся разрывы - первого рода.

Кусочно непрерывная на отрезке функция интегрируема на нем

Класс интегрируемых функций шире класса непрерывных функций. Тем не менее оказывается, что интегрируемая функция не может быть слишком разрывна. Следующий критерий удобен для вывода многих утверждений об интегрируемых функциях. Для его формулировки нам понадобится еще одно понятие.

Определение 4.12. Говорят, что множество $E \in R$ имеет нулевую меру, если для любого $\varepsilon > 0$ множество E можно заключить в не более чем счетное объединение интервалов, суммарная длина которых меньше ε.

Под суммой счетного семесйства положительных чисел a_k понимается $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$, это понятие будет обсуждаться в числовых рядах.

В часности несложно доказать, что любое не более чем счетное множество, имеет нулевую меру.

Теорема 4.9. *Критерий Лебега интегрируемости функции по Риману*

Пусть $f : [a,b] \to R$. Тогда $f \in R[a,b]$ в том и только том случае, когда f ограничена на $[a,b]$ и множество её точек разрыва имеет нулевую меру.

Будет доказана при изучении интеграла Лебега

Теорема 4.10. *Арифметические действия над интегрируемыми функциями*

Пусть $f, g \in R[a,b]$. Тогда

1. Сумма интегрируема

2. Произведение интегрируемо

3. Умножение на рациональное число интегрируемо

4. Модуль функции интегрируем

5. Если $\inf\limits_{x\in[a,b]} |g(x)| > 0$, то $\frac{f}{g} \in R[a,b]$

Пример:

1. Посчитаем интеграл $\int\limits_0^1 x^2dx$ по определению.

Разобьём отрезок $[0,1]$ на n равных частей.

Отрезки дробления: $\Delta x_k = \frac{1}{n}$, мелкость дробления: $\lambda_\tau = \frac{1}{n}$.

В качестве точек ξ_k возьмем правые концы отрезков: $\xi_k = \frac{k}{n}$.

Следовательно, $f(\xi_k) = \left(\frac{k}{n}\right)^2 = \frac{k^2}{n^2}$

$$\int\limits_0^1 x^2dx = \lim_{\lambda_\tau \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k = \lim_{\frac{1}{n}\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k^2}{n^2} \cdot \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=0}^{n-1} k^2 =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \left(0^2 + 1^2 + \ldots + \ldots (n-1)^2\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

На практике находить интегралы как пределы интегральных сумм приходится редко, для этой цели удобна формула Ньютона Лейбница, доказываемая в дальнейшем. Однако интегральные суммы и их модификации используются для приближенного вычисления интегралов.

2. Функция Дирихле:

$$\begin{cases} 1, x \in Q \\ 0, x \notin Q \end{cases}$$

не интегрируема ни на каком невырожденном отрезке $[a,b]$

Замечание 4.1. Интегрируемость композиции.

Пусть $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a, b], \varphi \in R[\alpha, \beta], f \in C[a, b]$ (непрерывна).

Тогда $f \circ g \in R[\alpha, \beta]$.

4.3 Свойства интеграла

В определении интеграла предполагалось, что $a < b$. Примем следующее дополнительное соглашение. Если $b < a$, $f \in R[b, a]$, то положим:

$$\int_a^b f = -\int_b^a f$$

Будем также считать, что на невырожденном отрезке любая функция f интегрируема и:

$$\int\limits_a^a f = 0$$

Если интегрируемость f известна, то для нахождения интеграла достуточно найти предел какой-нибудь последовательности интегральных сумм, когда последовательность дроблений стремится к нулю. Например, можно дробить отрезок на n равных частей, а в качестве оснащения брать левые или правые концы или середины отрезков дробления. Можно также рассматривать последовательности верхних и нижних сумм Дарбу. Таким образом, для интегральных сумм нет необходимости доказывать теоремы теории пределов, такик как теорема о пределе суммы или о предельном переходе в неравенстве, поскольку достаточно использовать уже известные утверждения о пределах последовательностей.

Установим несколько свойств интеграла.

1. Аддитивность интеграла по отрезку. Если $a, b, c \in R, A = \min\{a, b, c\}, B = \max\{a, b, c, \}, f \in R[A, B]$, то:

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

2. Если функция K постоянна на $[a, b]$, то:

$$\int\limits_a^b K = K(b - a)$$

3. Линейность интеграла. Если $f, g \in R[a,b], \alpha, \beta \in R$, то:

$$\int\limits_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int\limits_a^b f + \beta \int\limits_a^b g$$

4. Монотонность интеграла. Если $a < b,\ f, g \in R[a,b], f \le g$, то:

$$\int_a^b f \le \int_a^b g$$

Другими словами, неравенства можно интегрировать.

Напомним, что запись $f \le g$ на множестве E означает, что $f(x) \le g(x)$ для всех x из E.

Следствие 1. Пусть $a < b, f \in R[a,b]$. Если $M \in R, f \le M$, то:

$$\int\limits_a^b f \le M(b-a)$$

а если $m \in R, f \ge m$, то:

$$\int\limits_a^b f \ge m(b-a)$$

В частности, если $f \in R[a,b], f \ge 0$, то:

$$\int\limits_a^b f \ge 0$$

5. Пусть $a < b, f \in R[a,b], f \ge 0$ и существует такая точка $x_0 \in [a,b]$, что $f(x_0) > 0$ и f непрерывна в точке x_0. Тогда:

$$\int\limits_a^b f > 0$$

Без условия непрерывности f в точке x_0 утверждение неверно. Контрпримерос лужит функция, равная 0 всюду, кроме одной точки, в которой она положительна.

Замечание 4.2. Утверждение справедливо и для двух функция.

Пусть $a < b, f, g \in R[a,b], f \leq g$ и существует такая точка $x_0 \in [a,b]$, что $f(x_0) < g(x_0)$ и f, g непрерывна в точке x_0. Тогда:

$$\int_a^b f < \int_a^b g$$

Замечание 4.3. Пусть $a < b, f \in R[a,b], f > 0$. Тогда:

$$\int_a^b f > 0$$

6. Путь $a < b, f \in R[a,b]$. Тогда:

$$\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$$

Утверждения следующей серии объединяются называнием "первая теорема о среднем интегрального исчисления".

Теорема 4.11. *Пусть $f, g \in R[a,b], g \geq 0 (g \leq 0), m, M \in R, m \leq f \leq M$. Тогда существует такое $\mu \in [m, M]$, что:*

$$\int_a^b fg = \mu \int_a^b g$$

Следствие 1. Пусть $f \in C[a,b], g \in R[a,b], g \geq 0 (g \leq 0)$. Тогда существует такое $c \in [a,b]$, что:

$$\int_a^b fg = f(c) \int_a^b g$$

Следствие 2. Пусть $f \in R[a,b], m, M \in R, m \leq f \leq M$. Тогда существует такое $\mu \in [m, M]$, что:

$$\int_a^b f = \mu(b-a)$$

Следствие 3. Пусть $f \in C[a,b]$. Тогда существует такое $c \in [a,b]$, что:

$$\int_a^b f = f(c)(b-a)$$

Можно доказать, что в условиях следствий 1 и 3 точка c найдется на интервале (a,b).

Обычно следствия 2 и 3 называют первой теоремой о среднем, а теорему и следствие - усиленной или обобщенной певой теоремы о среднем интегрального исчисления. Эти теоремы находятся в тесной связи с теоремами о среднем дифференциального исчисления, что станет понятно после знакомства с формулой Ньютона-Лейбница.

Определение 4.13. Пусть $a < b, f \in R[a,b]$. Величина $\frac{1}{b-a}\int_a^b f$ называется *интегральным средним арифметическим функции* f на $[a,b]$.

Если разбить отрезок $[a,b]$ на равные части длины $\frac{b-a}{n}$ и составить интегральную сумму $\sigma_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\frac{b-a}{n}$, nj $\frac{\sigma_n}{b-a}$ будет средним арифметическим значений функции в точках оснащения дробления. При этом $\frac{\sigma_n}{b-a} \to \frac{1}{b-a}\int_a^b f$, поэтому и принимается такое определение среднего.

Определение 4.14. Пусть $E \subset R$ - невырожденный промежуток $f : E \to R$, f интегрируема на каждом отрезке, содержащемся в $E, a \in E$. Функция:

$$\Phi(x) = \int\limits_a^x f, \quad x \in E$$

называется *интегралом с переменным верхним пределом*

Теорема 4.12. *Об интеграле с переменным верхним пределом.*

Пусть $E \in R$ - невырожденный промежуток, $f : E \to R$, f интегрируема на каждом отрезке, содержащемся в E, $a \in E$, $\Phi(x) = \int\limits_a^x f, x \in E$.

Тогда справедливы следующие утверждения.

1. $\Phi \in C(E)$

2. Если кроме того f непрерывна в точке $x_0 \in E$, то Φ дифференцируема в точке x_0 и $\Phi'(x_0) = f(x_0)$

Утверждение 2 часто называют **теоремой Барроу**.

Следствие 1. Функция, непрерывная на промежутке, имеет на нем первообразную.

Замечание 4.4. $\Psi(x) = \int_x^b f, \quad x \in E$

Так как $\int_x^b = -\int_b^x f$ из теоремы следует, что Ψ непрерывна и:

$$\Psi'(x_0) = -f(x_0)$$

во всех точках непрерывности f.

Следующая теорема - формула Ньютона-Лейбница - важнейшая в интегральном счислении. Она устанавливает связь определенного интеграла с неопределенным и позволяет вычислять определенный интеграл от функции, первообразная которой известна.

Теорема 4.13. *Формуа Ньютона-Лейбница*

Пусть $f \in R[a,b]$, F - первообразная f на $[a,b]$. Тогда:

$$\int\limits_a^b f = F(b) - F(a)$$

Разность $F(b) - F(a)$ называется *двойной подстановкой* функции F на $[a,b]$ и обозначается $F(x)|_a^b$.

Как обычно, переменная x немая и может быть заменена другой буквой. Последняя запись позволяет отметить начало выражения для F, что бывает удобно, когда оно длинное.

Таким образом, формула Ньютона-Лейбнница может быть записана в виде:

$$\int\limits_a^b f = F|_a^b$$

Формула Ньютона-Лейбница доказана для любой первообразной подынтегральной функции. То, что двойная подстановка не зависит от выбора первообразной, ясно и так:

$$\Phi(b) - \Phi(a) = F(b) + C - (F(a) + C) = F(b) - F(a)$$

Попробуем применить формулу Ньютона-Лебйница к интегралу: $\int\limits_{-} 1^1 \frac{dx}{x^2}$:

$$\int\limits_{-} 1^1 \frac{dx}{x^2} = \left(-\frac{1}{x}\right)_{-1}^{1} = -2$$

Получается нелепый результат - интеграл от положительной функции отрицателен. В этом примере нарушены условия теоремы - не интегрируема, так как не ограничена, а во-вторых, равенство не имеет смысла в точке 0.

Замечание 4.5. Пусть $f \in R[a,b], F \in C[a,b]$, F-первооразная f на $[a,b]$

за вычетом конечного множества точек. Тогда:

$$\int_a^b f = F(b) - F(a)$$

Формула Ньютона-Лейбница иногда принимают за определение интеграла от непрерывной функции, но при таком подходе следует отдельно доказывать существование первообразной.

При вычислении определнных, как и неопределенных интегралов, интегралов полезн приемы интегрирования по частям и замены переменной.

Теорема 4.14. *Интегрирование по частям в определенном интеграле.*

Пусть f, g дифференцируемы на $[a, b]$, $f', g' \in R[a, b]$. Тогда:

$$\int_a^b fg' = fg|_a^b - \int_a^b f'g$$

Замечание. Формулу интегрирования по частям записывают и в виде:

$$\int_a^b fdg = fg|_a^b - \int_a^b gdf$$

Теорема 4.15. *Замена переменной в определенном интеграле. Пусть $f \in C[A, B], \phi : [\alpha, \beta] \to [A, B]$, φ дифференцируема на $[\alpha, \beta]$, $\varphi' \in R[\alpha, \beta]$. Тогда:*

$$\int_\alpha^\beta (f \circ \varphi)\varphi' = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(\beta)} f$$

Замечание: правило замены переменной может применяться как слева направо, так и справа налево. Пусть в интеграле $\int\limits_a^b f(x)dx$ мы хотим сделать замену $x = \varphi(t) \Rightarrow dx = \varphi'(t)dt$ и поменять пределы интегрирования: a на α, b на β, где $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$. Получим:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

В отличие от неопрделенного интеграла, при вычислении определенного не надо возвращаться к старой переменной, но надо не забыть поменять пределы интегрирования.

Замечание: в формуле замены переменной на функции можно накладывать и другие условия.

Пусть функция φ дифференцируема, строго монотонна на $[\alpha, \beta], \varphi' \in R[\alpha, \beta],\ f \in R[\varphi(\alpha), \varphi(\beta)]$. Тогда:

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} (f \circ \varphi)\varphi' = \int\limits_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f$$

4.3.1 Формулы Тейлора и Валлиса и интегральные неравенства

Теорема 4.16. *Формулы Тейлора с остатком в интегральной форме. Пусть* $n \in Z_+, f \in C^{n+1}\langle a, b\rangle, x_0, x \in \langle a, b\rangle$. *Тогда:*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{1}{n!}\int\limits_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x - t)^n dt$$

Замечание. Интегральную форму остатка иногда называют формой К.Якоби.

По первой теореме о среднем в условиях теоремы найдется такая точка $c \in [x_0, x]$, что:

$$\frac{1}{n!}\int\limits_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x - t)^n dt = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}\int\limits_{x_0}^{x}(x - t)^n dt = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n + 1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

При $x \neq x_0$ точку c можно выбрать на (x_0, x). Таким образом, лагранжева форма остатка следует из интегральной. Интегральная форма остатка имеет то преимущество, что она не содержит неизвестной точки c.

Далее выведем формулу Валлиса, которая выражает число π в виде предела последовательности рациональных чисел.

Введем стандратное обозначение $m!!$ - *двойной факториал* числа m. При $m \in N$ это произведение всех натуральных чисел, не превосходящих m, одной четности с m, кроме того положим $0!! = (-1)!! = 1$.

Лемма 4.3. Если $m \in Z_+$, то:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x dx = \frac{(m-1)!!}{m!!} \cdot \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & m = 2k \\ 1, & m = 2k+1 \end{cases}$$

Теорема 4.17. *Формула Валлиса:*

$$\pi = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2$$

Теорема 4.18. *(О.Бонне) Вторая33 теореме о среднем интегрального исчисления. Пусть $f \in C[a,b]$, $g \in C^{(1)}[a,b]$, g монотонна на $[a,b]$. Тогда существует такое $c \in [a,b]$, что:*

$$\int\limits_a^b fg = g(a) \int\limits_a^c f + g(b) \int\limits_c^b f$$

Замечание 4.6. Если в условиях замечания 1 функция g убывает и $g \geq 0$, то существует такое $c \in [a,b]$, что:

$$\int\limits_a^b fg = g(a) \int\limits_a^c f$$

Вторая теореме о среднем обычно не дает новых результатов но сравнению с теми, которые можно получить интегрированием по частям.

Далее мы установим несколько интегральных неравенств, аналогичных доказанным в глае 4 для сумм. В их формулировкх будем подразумевать, что $a < b$. Доказательство этих неравенств может быть проведено или повторением рассуждений для сумм, или предельным переходом из неравенств для сумм.

Участвующие в этих неравенствах функции будут предполагаться непрерывными, что обеспесчить существование интегралов. В ряде случаев требование непрерывности может быть ослаблено, но мы не будем на этом останавиваться.

Теорема 4.19. *Неравенство Иенсейна для интагрлов.*

Пусть f выпукла и непрерывна на $\langle A, B \rangle, \varphi \in C([a,b] \to \langle A, B \rangle)$,

$\lambda \in C([a,b] \to [0,+\infty))$, $\int\limits_a^b \lambda = 1$. *Тогда:*

$$f\left(\int\limits_a^b \lambda\varphi\right) \leq \int\limits_a^b \lambda \cdot (f \circ \varphi)$$

Замечание:

1. если φ не постоянна на E, а f строго выпукла, то неравенство Иенсена строгое.

2. для вогнутой функции f неравенство Иенсена выполняется с противоположным знаком.

Теорема 4.20. *Неравенство Гёльдера для интегралов.*

Пусть $f, g \in C[a,b]$, p и q - сопряжённые показатели. Тогда:

$$\left|\int\limits_a^b fg\right| \leq \left(\int\limits_a^b |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int\limits_a^b |g|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Следствие 1. Неравенство Коши-Буняковского для интегралов.

Пусть $f, g \in C[a,b]$. Тогда:

$$\left|\int\limits_a^b fg\right| \leq \left(\int\limits_a^b |f|^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int\limits_a^b |g|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Теорема 4.21. *Неравенство Минковского для интегралов.*

Пусть $f, g \in C[a,b], p \geq 1$. Тогда:

$$\left(\int\limits_a^b |f+g|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int\limits_a^b |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int\limits_a^b |g|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Следствие:

Пусть $f, g \in C[a,b]$. Тогда:

$$\sqrt{\int\limits_a^b (f+g)^2} \leq \sqrt{\int\limits_a^b f^2} + \sqrt{\int\limits_a^b g^2}$$

Неравенства Коши между средним арифметическим и средним геометрическим также имеют интегральный аналог.

Определение 4.15. Пусть $f \in C[a, b]$.

1. Величина

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{b-a} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\Delta x_k = \frac{1}{b-a} \int\limits_a^b f$$

называется *интегральным средним арифметическим функции* f на $[a, b]$.

2. Если $f > 0$, то величина:

$$\exp \frac{1}{b-a} \int\limits_a^b \ln f$$

называется *интегральным средним геометрическим функции* f на $[a, b]$.

Теорема 4.22. *Неравенство для инетгральных средних.*

Пусть $f \in C[a, b], f > 0$. *Тогда:*

$$\exp\left(\frac{1}{b-a} \int\limits_a^b \ln f\right) \le \frac{1}{b-a} \int\limits_a^b f$$

Определение 4.16. Неравенство Чебышева для интегралов. Пусть f возрастает, а g убывает на $[a, b]$. Тогда:

$$\frac{1}{b-a} \int\limits_a^b fg \le \left(\frac{1}{b-a} \int\limits_a^b f\right) \cdot \left(\frac{1}{b-a} \int\limits_a^b g\right)$$

Другими словами, среднее арифметическое от произведения разноименно монотонных функций не превосходит произведения средних.

Покажем на примере неравенства Чебышева, что иногда неравенства для сумм могут, в свою очередь, быть получены как частные случаи интегральных неравенств.

Следствие. Неравенство Чебывева для сумм.

Пусть $n \in N, a, b \in R^n, a_1 \le \ldots \le a_n, b_1 \ge \ldots \ge b_n$. Тогда:

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \le \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k\right) \cdot \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} b_k\right)$$

4.4 Несобственные интегралы

Задача нахождения площадей неограниченных фигур требует расширения понятия интеграла.

Определение 4.17. Функция f называется локально интегрируемой (по Риману) на промежутке E, если f интегрируема (по Риману) на каждом отрезке, содержащемся в E. Множество функций, локально интегриуемых на E, обозначается через $R_{loc}(E)$.

Определение 4.18. Пусть функцця $f(x)$ определена на промежутке $[a, +\infty]$ и интегрируема на любом отрезке $[a, b]$, содержащемся в этом промежутке. Величина

$$\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_{a}^{b} f(x)dx$$

если указанный предел существует, называется неосбственным интегралом Римана или несобственным интегралом от функции f по промежутку.

Определение 4.19. Пусть $-\infty < a < b \leq +\infty$, $f \in R_{loc}[a, b)$. Определенный интеграл называется несобственным, если выполняется по крайней мере одно из следующих условий:

1. Область интегрирования является бесконечной. Например, является бесконечным промежутком $[a, +\infty)$.

2. Функция $f(x)$ является неограниченной в окрестности некоторых точек области интегрирования

Если интервал $[a, b]$ конечный и функция интегрируема по Риману, то значение несобственного интеграла совпадает со значением определенного интеграла.

Пусть $f(x)$ определена и непрерывна на интервале $[a, +\infty)$ и для любого числа $A > a$ существует интеграл $\int\limits_{a}^{A} f(x)dx$.

Если существует предел $\lim\limits_{a\to+\infty} \int\limits_{a}^{A} f(x)dx = I \in R$, то используется обозначение:

$$I = \int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$$

и интеграл называется несобственным интегралом Римана первого рода. В этом случае $I = \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ называется *сходящимся.*

Если не существует конечного предела $\lim\limits_{a\to+\infty} \int\limits_a^A f(x)dx$, то есть если он равен $\pm\infty$ или не существует, то интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ называется расходящимся к ∞ или просто расходящимся.

То же самое, если нижний предел интегрирования равен $-\infty$.

Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на всей числовой прямой, то может существовать несобственный интеграл данной функции с двумя бесконечными пределами интегрирования, определяющиеся формулой.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int\limits_{c}^{+\infty} f(x)dx$$

Несобственный интеграл первого рода выражает бесконечно длинной криволинейной трапеции.

Теорема 4.23. *Критерий Больцано-Коши сходимости несобственных интегралов. Пусть $-\infty < a < b \leq +\infty, f \in R_{loc}[a, b)$. Тогда сходимость интеграла $\int_a^b f$ равносильна условию:*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \Delta \in (a, b): \quad \forall A, B \in (\Delta, b): \left| \int\limits_A^B f \right| < \varepsilon$$

Замечание 4.7. Критерий Больцано-Коши чаще используется для установления *расходимости* интегралов. Если существуют последовательности точек A_n и B_n из $[a, b)$, стремящиеся к b, для которых $\int\limits_{A_n}^{B_n} f \nrightarrow 0$, то интеграл $\int_a^b f$ расходится.

Замечание 4.8. Пусть функция f имеет первообразную F на $[a, b)$. Тогда по формуле Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f = \lim_{A\to b-} \int_a^A f = \lim_{A\to b-} (F(A) - F(a)) = F(b-) - F(a)$$

Таким образом сходимость несобственного интеграла равносильно существованию конечного предела первообразной. Двойную подстановку $F(b-) - F(a)$ также удобно обозначать через $F|_a^b$, понимая под $F(b)$ предел, то есть $F(b-)$.

Свойства несобственного интеграла:

1. Если интеграл $\int_a^b f$ сходится, то для любой точки $c \in (a, b)$ интеграл $\int_c^b f$ тоже сходится и:

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

2. Остаток сходящегося интеграла стремится к нулю

3. Несобственный интерал обладает свойством линейности

4. Если $\int_a^b f$ расходится, а интеграл $\int_a^b g$ сходится, то интеграл $\int_a^b (f+g)$ расходится.

5. Монотонность несобственного интеграла: если $f \leq g$ на $[a, b)$, то $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

6. Переносятся неравенства Иенсейна, Гёльдера и Минковского для несобственных интегралов

7. Переносятся замена переменных и интегрирование по частям

8. Интеграл по конечному промежутку $\in_a^b f(x)dx$ заменой $x = b - \frac{1}{t}$ можно свести к интегралу с бесконечным верхним пределом:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty} f\left(b - \frac{1}{t}\right)\frac{dt}{t^2}$$

Поэтому не умоляя общности , можно ограничиться изучением несобственных интегралов по бесконечному промежутку.

Далее мы выведем несколько признаков сходимости несобственных интегралов. Сначала рассмотрим интегралы от неотрицательных функций.

Лемма 4.4. Пусть $f \in R_{loc}[a, b), f \geq 0$. Тогда сходимость интеграла $\int_a^b f$ равносильна ограниченности функции $F(A) = \int_a^A f$ на $[a, b)$ сверху.

Замечание: из теоремы о пределе монотонной функции также следует, что для $f \geq 0$ интеграл $\int_a^b f$ либо сходится, либо расходится к $+\infty$, причём:

$$\int_a^b f = \sup_{A \in [a,b)} \int_a^A f$$

Теорема 4.24. *Признак сравнения сходимости несобственных интегралов.*

Пусть f, g локально интегрируемы по Риману на $[a, b)$, $f, g \geq 0$, $f(x) = O(g(x))$ при $x \to b-$

1. Если интеграл $\int_a^b g$ сходится, то и интеграл $\int_a^b f$ сходится

2. Если интеграл $\int_a^b f$ расходится, то и интеграл $\int_a^b g$ расходится.

Следствие 1. Признак сравнения в предельной форме.

Пусть f, g локально интегриуемы по Риману, $f \geq 0, g > 0$ и существует предел $\lim\limits_{x \to b-} \frac{f(x)}{g(x)} = l \in [0, +\infty]$.

1. Если $l \in [0, +\infty)$, а интеграл $\int_a^b g$ сходится, то интеграл $\int_a^b f$ сходится.

2. Если $l \in (0, +\infty]$, а интеграл $\int_a^b g$ сходится, то интеграл $\int_a^b f$ сходится.

3. Если $l \in (0, +\infty)$, то интегралы $\int_a^b f$ и $\int_a^b g$ сходятся или расходятся одновременно.

Следствие 2. *Интегралы от неотрицательных эквивалентных в точке b функция сходятся или расходятся одновременно*

Замечание 4.9. Из сходимости интеграла $\int_a^{+\infty}$ не вытекает, что $f(x) \to 0, x \to +\infty$, даже если $f \geq 0$ и f непрерывна.

Ограниченность частичных интегралов является необходимым, но не достаточным условием сходимости.

Определение 4.20. Пусть $-\infty < a < b \leq +\infty$, f локально интегрируема по Риману. Говорят что интеграл асболютно сходится, если $\int_a^b |f|$ сходится.

Замечание 4.10. Если интегралы $\int_a^b f, \int_a^b g$ сходятся абсолютно, $\alpha, \beta \in R$, то интеграл $\int_a^b (\alpha f + \beta g)$ сходится абсолютно.

Замечание 4.11. Если интеграл существует, то модуль интеграла меньше либо равен интеграла от модуля аргумента.

Лемма 4.5. Если интеграл сходится абсолютно, то он сходится.

Если интеграл сходится, но не абсолютно, то говорят, что он сходится условно или неасболютно.

Если интеграл $\int_a^b f$ сходится условно, а интеграл $\int_a^b g$ сходится абсолютно, то интеграл $\int_a^b (f+g)$ сходится условно.

Теорема 4.25. *Признаки Дирихле и Абеля сходимости несобственных интегралов.*

Пусть f непрерывна на $[a, b)$, $g \in C^{(1)}[a, b)$, g монотонна.

1. Признак Дирихле. Если функция $F(A) = \int_a^A f$ ограничена, а $g(x) \xrightarrow[x \to b-]{} 0$, то интеграл $\int_a^b fg$ сходится.

2. Признак Абеля. Если интеграл $\int_a^b f$ сходится, а g ограничена, то интеграл $\int_a^b fg$ сходится.

4.5 Применение интеграла

1. Площадь фигуры.

$$S = \int\limits_a^b f$$

В общем случае, если вдруг фигура лежит и в верхней полуплоскости и в нижней, площадь этой фигуры равна:

$$S = \int\limits_a^b |f|$$

Если фигура ограничена двумя функциями, то площадь равна интегралу разности верхней функции и нижней

$$S = \int\limits_a^b (g - f)$$

2. Формула площади в полярных координатах. Полярные координаты r, φ связаны с декартовыми равенствами:

$$x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$$

$$Q_f = \{(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \in R^2 : \varphi \in [\alpha, \beta], 0 \leq r \leq f(\varphi)\}$$

если f непрерывна, то это множество называется криволинейным сектором и его площадь:

$$S(Q_f) = \frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta f^2$$

3. Объем - это интеграл от площади:

$$V(T) = \int\limits_a^b S$$

Аналогично можно определить тела вращения - тело, получающееся вращением подграфика функции f вокргу оси Ox. Для тела вращения T_f при каждом $x \in [a,b]$ сечение - круг радиуса $f(x)$, поэтому $S(x) = \pi f^2(x)$.

$$V(T_f) = \pi \int\limits_a^b f^2$$

Для тела вращения подграфика непрерывной функци вокргу оси Oy:

$$V(T_f') = 2\pi \int\limits_a^b xf(x)dx$$

Для тела вращения криволинейного сектора, определяемого непрерывной функцией вокруг оси Oy:

$$V(T_f) = \frac{2\pi}{3} \int\limits_\alpha^\beta f^3(\varphi)\cos\varphi d\varphi$$

4. Вычисление длин

Определение 4.21. Путем в R^m называется непрерывное отображение отрезка в R^m:

$$\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_m) : [a,b] \to R^m$$

Точка $\gamma(a)$ называется началом, $\gamma(b)$ - концом пути. Образ отрезка $[a,b]$ называется носителем пути γ.

Если конец совпадает с началом, то путь называется замкнутым. Если равенство $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ имеет место лишь при $t_1 = t_2$ или $t_1, t_2 \in \{a,b\}$, то пусть γ называется простым или несамопересекающимся.

Длина пути не меньше длины любой вписанной в этот путь ломаной.

Определение 4.22. Пусть функция непрерывна на $[a,b]$ и дифференцируема. Тогда длина графика функции (длина пути):

$$s_g = \int\limits_a^b \sqrt{1+f'^2}$$

Определение 4.23. Длина пути в полярных координатах.

Пусть $f \in C^{(1)}[\alpha, \beta], f \geq 0$, путь γ задается в полярных координатах равенством $r = f(\theta), \theta \in [\alpha, \beta]$. Тогда:

$$s_\gamma = \int\limits_a^b \sqrt{f^2 + f'^2}$$

5 Числовые ряды

До сих пор понятие суммы имело смысл для конечного семейства слагаемых. Определение суммы ряда - формализация навиного представления о том, что должно получиться, если сложить бесконечно много чисел одно за другим.

Определение 5.1. Пусть $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ - вещественная или комлексная последовательность. Символ:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

называется *числовым рядом*, а числа a_k - его членами. Последовательность $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ называется общим членом ряда.

Числа $S_n = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ называются частными или частичными суммами ряда.

Если последовательность $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеет предел S (конечный или бесконечный), то S называют суммой ряда и символу $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ приписывают значение S. В противном случае считают, что ряд не имеет суммы и символу не приписывают никакого значения.

Если последовательность $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится, то есть S является числом, то говорят, что ряд сходится, в противном случае говорят, что он расходится.

Итак, по определению:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$$

если предел существует.

Нумерация общего члена может начинаться не с 1, а с любого $m \in Z$.

Любая числовая последовательность $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ является подпоследовательностью частичных сумм некоторого ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$. Общий член этого ряда однозначно восстанавливается по формулам:

$$a_1 = S_1, \quad a_k = S_k - S_{k-1}, k \geq 2$$

Вопросы о сходимости последовательностей и рядов сводятся друг к другу.

Рассмотрим сумму геометрической прогрессии:

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = 1 + z + z^2 + \dots$$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}, z \neq 1$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1 - z}, |z| < 1$$

В формулаз Тэйлора были доказаны равенства:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} = \cos x$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = \sin x$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e$$

Ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$$

называется гармоническим. Его частичные суммы $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ также называются гармоническими.

Свойства рядов:

1. Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, то для любого $m \in N$ ряд $\sum\limits_{k=m+1}^{\infty} a_k$ $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится и:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{m} a_k + \sum_{k=m+1}^{\infty} a_k$$

То же самое и про обратное.

Определение 5.2. Ряд $\sum\limits_{k=m+1}^{\infty} a_k$ называется *остатком* ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ после

m-го члена.

2. Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, то $\sum\limits_{k=m+1}^{\infty} a_k \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$. Другими словами, остаток сходящегося ряда стремится к нулю.

3. Суммирование линейно.

4. Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится, а $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится, то $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k)$ расходится.

5. Если $\{z_k\}$ - последовательность комплексных чисел, то сходимость ряда равносильна одновременной сходимости рядов мнимой и реальной части комплексного числа.

6. Монотонность суммирования. Если ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ с вещественными членами имеют суммы, $a_k \leq b_k$ при всех $k \in N$, то:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

Аналогично с помощью предельного перехода на суммы рядов переносятся неравенства Иенсена, Гёльдера, Минковского.

Теорема 5.1. *Необходимое условие сходимости ряда*

Общий член сходящегося ряда стремится к нулю, если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}$ *сходится, то* $a_n = S_n - S_{n-1} \to 0, n \to \infty$.

Замечание: как показывает пример гармонического ряда, стремления общего члена к нулю для сходимости.

Теореме 1 обычно используется для доказательства расходимости ряда, общий член которого не стремится к нулю. Например, ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} z^k$ расходится при $|z| \geq 1$, так как $z^n \not\to 0$.

Теорема 5.2. *Критерий Коши*

Сходимость ряда S_n *равносильна условию:*

$$\varepsilon > 0, \exists N \in N, \forall n > N, \forall m \in N : |S_{n+m} - S_n| < \varepsilon$$

то есть S_n *является фундаментальной последовательностью или последовательностью Коши*

то есть

Теорема 5.3. *Сходимость ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *равносильна условию:*

$$\varepsilon > 0, \exists N \in N, \forall n > N, \forall p \in N : \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon$$

Чтобы доказать расходимость ряда, достаточно предъявить такую последовательность чисел $\{m_n\}$, что $m_n > n$ и $\sum\limits_{k=n}^{m_n} a_k \not\to 0$. Часто выбирают $m_n = Kn$, где $K > 1$.

Для конечных сумм (то есть сумм конечных семейств) справедливы сочетательный и переместительный законы: можно заключать группы членов в скобки и переставлять члены. Для рядов положение усложняется.

5.1 Положительные ряды

Положительным называется ряд, все члены которого неотрицательны. Это тремин общепринят, хотя было бы логичнее назвать такие ряды неотрицательными.

Лемма 5.1. Пусть $a_k \geq 0$ при всех $k \in N$. Тогда сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ равносильна ограниченности сверху последовательности его частных сумм $\{S_n\}$.

Замечание 5.1. Из теоремы о пределе монотонной последовательности также следует, что положительный ряд либо сходится, либо рсходится к $+\infty$, причем:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sup_{n \in N} S_n$$

Для ограниченности возрастающей подпоследовательности сверху достаточно ограниченности сверху некоторой ее подпоследовательности.

Теорема 5.4. *Признак сравнения сходимости положительных рядов.*

Пусть $a_k, b_k \geq 0$ *при всех* $k \in N$, $a_k = O(b_k)$ *при* $k \to \infty$.

1. Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ *сходится, то и ряд* $\sum\limits_{k=1} \infty a_k$ *сходится.*

2. Если ряд $\sum\limits_{k=1} \infty a_k$ *расходится, то и ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ *расходится.*

Следствие 1. Признак сравнения в предельной форме

Пусть $a_k \geq 0, b_k > 0$ при всех $k \in N$ и существует предел $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = l \in [0, +\infty]$.

1. Если $l \in [0, +\infty)$, а ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится

2. Если $l \in (0, +\infty]$, а ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится

3. Если $l \in (0, +\infty)$, то ряды сходятся или расходятся одновременно.

Следствие 2. Положительные ряды с эквивалентными при $k \to \infty$ общими членами сходятся или расходятся одновременно.

Теорема 5.5. *Радикальный признак Коши сходимости положительных рядов.*

Пусть $a_k \geq 0$ при всех $k \in N$, $K = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$

1. Если $K > 1$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится

2. Если $K < 1$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится.

Если $K = 1$, то признак Коши не дает ответа на вопрос о сходимости ряда.

Теорема 5.6. *Признак Даламбера сходимости положительных рядов.*

Пусть $a_k > 0$ при всех $k \in N$ и существует предел $D = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \in [0, +\infty]$.

1. Если $D > 1$, то ряд расходится

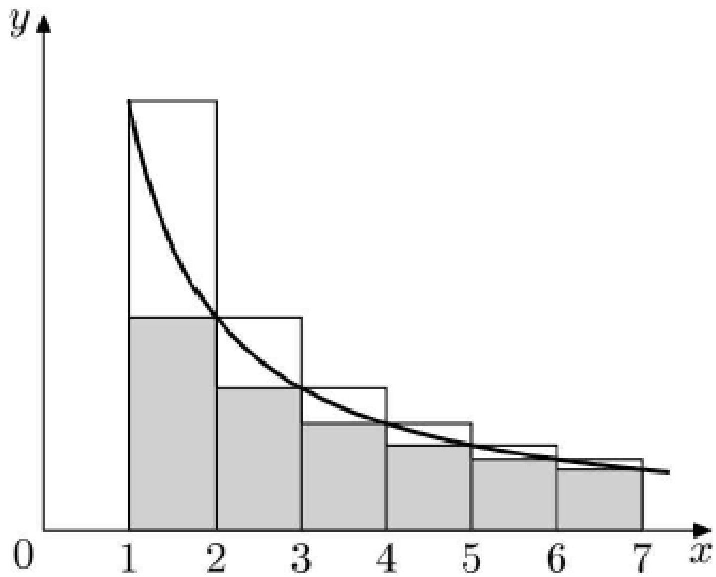
2. Если $D < 1$, то ряд сходится

при $D = 1$ признак Даламбера не дает ответа на вопрос о сходимости ряда.

Замечание 5.2. Пусть $a_n > 0$ при всех $n \in N$. Если существует предел $D = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$, то предел $K = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ также существует и равен D. Обратное неверно.

Теорема 5.7. *Интегральный признак Коши сходимости рядов.*

Пусть функция f монотонна на $[1, +\infty)$. Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f(k)$ и интеграл $\int\limits_1^{+\infty} f$ сходится или расходятся одновременно.



Геометрический смысл интегрального признака Коши сходимости рядов.

Как правило, исследование сходимости интегралов проще, чем рядов, потому что для интегралов есть удобные приемы замены переменной и интегрирования по частям, а также формула Ньютона-Лейбница.

Замечание 5.3. Пусть f убывает на $[1, +\infty)$, $f \geq 0$. Обозначим:

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^{n+1} f$$

Последовательность $\{A_n\}$ возрастает и ограничена.

Если инетграл и ряд сходятся, то ясно, что $c = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f(k) = \int_1^{+\infty} f$. Формула становится содержательной тогда, когда интеграл и ряд сходятся. В этом случае:

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) \sim \int_1^{+\infty} f$$

5.2 Ряды с произвольными членами

Определение 5.3. Говорят, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится абсолютно, если сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$.

Очень похоже все на свойства несобственных интегралов.

1. Если ряды a_k и b_k абсолютно сходятся, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(a\alpha_k + \beta b_k)$ абсолютно сходится.

2.
$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$$

Если ряд сходится асболютно, то он сходится.

Если ряд сходится, но не асюолютно, то говорят, что он сходится улосвно или неабсолютно.

Если ряд a_k сходится условно, а ряд b_k сходится абсолютно, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k)$ сходится условно.

Теорема 5.8. *Радикальный признак Коши сходимости положительных рядов.*

Пусть $a_k \geq 0$ при всех $k \in N$, $K = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$

1. Если $K > 1$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится

2. Если $K < 1$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится.

Теорема 5.9. *Признак Даламбера сходимости положительных рядов.*

Пусть $a_k > 0$ при всех $k \in N$ и существует предел $D = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \in [0, +\infty]$.

1. Если $D > 1$, то ряд расходится

2. Если $D < 1$, то ряд сходится

при $D = 1$ признак Даламбера не дает ответа на вопрос о сходимости ряда.

Следующие признаки Дирихле, Абеля и Лейбница позволяют устанавливать сходимость в том числе и неабсолютно сходящихся рядов.

Теорема 5.10. *Признаки Дирихле и Абеля сходимости рядов.*

Пусть $\{a_k\}$ - вещественная или комплексная последовательность, $\{b_k\}$ - монотонная вещественная последовательность.

*1. **Признак Дирихле**. Если последовательность $A_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ ограничена, а $b_n \to 0$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ сходится.*

*2. **Признак Абеля**. Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ сходится, а последовательность b_k ограничена, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ сходится*

Ряд вида $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}b_k$ или $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k}b_k$, $b_k \geq 0$ при всех k, называется знакочередующимся.

Теорема 5.11. *Признак Лейбница сходимости рядов. Пусть последовательность $\{b_n\}$ монотонна, $b_n \to 0$. Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}b_k$ сходится.*

Ряды, удовлетворяющие условиям признака Лейьница, иногад называют лейбницевскими. Ясно, что любой остаток лейбницевского ряда является лейбницевским.

Замечание 5.4. Остаток лейбницевского ряад не превосходит своего первого члена по абсолютной величине и совпадает с ним по знаку.

Перестановка членов расходящегося положительного ряда приводит к расходящемуся положительному ряду.

Теорема 5.12. *Умножение рядов (О.Коши)*

Если ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum\limits_{j=1}^{\infty} b_j$ абсолютно сходятся к сумма A и B, то при любой нумерации их произведение абсолютно сходится к AB.

Определение 5.4. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$, где:

$$c_k = \sum_{j=1}^{k} a_j b_{k+1-j}$$

называется произведением рядов $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum\limits_{j=1}^{\infty} b_j$ по Коши.

Следствие 1. Если два ряда абсолютно сходятся к суммам A и B, то их произведение по Коши абсолютно сходится к AB.

В определении произвдеение по Коши удобнееначинать нумерацию с нуля: произведением рядов $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ и $\sum\limits_{j=0}^{\infty} b_j$ по Коши называется ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k$, где:

$$c_k = \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}$$

Замечание 5.5. Если два ряда сходятся, причем хотя бы один из них - абсолютно, то их произведение по Коши сходится.

Замечание 5.6. Если ряды сходятся к A и B, а их произведение по Коши к C, то $C = AB$.

6 Комплексные числа

Определение 6.1. Множеством комплексных чисел называется множество упорядоченных пар вещественных чисел $(a;b)$ с введёнными на нём двумя операциями сложения (знак операции обозначается $+$) и умножения $\cdot$, определенные следующим образом

1. $(a;b) + (c;d) = (a+c; b+d)$
2. $(a;b) \cdot (c;d) = (ac - bd; ad + bc)$

$\mathbb{C}$ - множество выражений (чисел) вида $z = x + iy$, где $x, y \in R$

i называется мнимой единицей, $i^2 = -1$.

Вещественное число $x = \operatorname{Re} z$ называется вещественной частью комплексного числа z.

Вещественное число $y = \operatorname{Im} z$ называется мнимой частью комплексного числа z.

Число $x - iy$ называется сопряженным к числу $z = x + iy$ и обозначается $\bar{z} = x - iy$

Определение 6.2. Запись комплексного числа $(x;y)$ в виде $x + iy$ называется алгебраической формой записи комплексного числа.

Модуем числа называется следующая введенная величина:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Если $z \in R \Leftrightarrow y = 0$: $|z| = \sqrt{x^2} = |x|$

Деление комплексных чисел:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z_2}}{|z_2|^2}$$

Лемма 6.1. Два комплексных числа называются авными, когда равны вещественные и мнимые части числа.

Лемма 6.2. На множестве комплексных чисел C невзможно задать линейный порядок, то есть понятия больше, меньше, положительное или отрицательное.

Лемма 6.3. Любое комплексное число можно разделить на комплексное число, не равное нулю и для любого комплексного числа существует обратное к нему число w, дающее в произведении с числом единицу.

Геометрическая интерпертация

Любое комплексное число $z = x + iy$ можно изобразить точкой с координатами (x, y) на координатной плоскости. По оси абсцисс откладывается вещественная часть комплексного числа, а по оси ориднат - мнимая часть.

Такая координатная плоскость называется комплексной плоскостью. Ось абцисс называется вещественной осью, а ось ординат - мнимая ось. Фактически мы получили взаимно однозначное соответствие между точками комплексной плоскости и комплексными числами.

Сложение чисел совпадает со сложением векторов:

$$k = z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ - длина вектора или расстояние от (x, y) до нуля.

Отметим, что сопряженные комлексные числа изображаются точками, симметричными относительно вещественной оси.

Свойства модуля: Пусть u и v - комлпексные числа. Тогда верны следующие равенства

1. $|u \cdot v| = |u| \cdot |v|$
2. $|u + v| \leq |u| + |v|$
3. $u \cdot \overline{u} = |u|^2$
4. $|u| \geq 0$

6.1 Аргумент комлексного числа

Каждой точке декартовой плоскости можно поставить в соответствие пару чисел, первое из которых положительно и равно расстоянию от начала координат, а второе равно обобщенному углу между радиус вектором этой точки и положительным направлением оси абсцисс.

Однако каждой точке плоскости соотвествуют бексонечно много пар чисел. Первое число определяется однозначно, а второе число определено неоднозначно, а именно с точностью прибавления $2\pi k, k \in Z$. Эти два числа называются полярными координатами данной точки.

Полярные координаты данной точки обозначают (ρ, φ), на первом месте полярный радиус, на втором - полярный угол.

Определение 6.3. Аргументом z называется угол между вещественной осью и вектором (x, y), рассматриваемый против часовой стрелки.

Аргумент - многозначная функция: $\varphi + 2\pi k, k \in Z$ - это тоже аргумент.

$argz$ - главная часть аргумента, когда $argz = \varphi \in [0; 2\pi)$

$Argz = argz + 2\pi k, k \in Z$ - множество всех аргументов.

$argz$ - однозначная в C^n

Определение 6.4. Запись ненулевого комлпексного числа z в виде:

$$z = x + iy = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

называется тригонометрической формой комплексного числа z.

Такм образом, два комплексных числа, записанных в тригонометрической форме, равны тогда и только тогда, когда равны их модули, а аргументы отличаются на число вида $2\pi k, k \in Z$. Чтобы избежать однозначности и ввели главный аргумент.

Геометрическая и тригонометрическая интерпретация:

Умножение $z = (x, y)$ на $C = (a, b)$ на плоскости эквивалентно умножению вектора-столбца (x, y) на матрицу $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$

Теорема 6.1. *При умножении комплексных чисел аргументы складываются, а модули перемножаются.*

Геометрический смысл: умножить с на z означает увеличить длину $|z|$ в $|c|$ раз, а угол $argz$ повернется на угол $argc$.

При делении комплексных чисел аргументы вычитаются, а модули делятся.

Формула Муавра:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), n \in Z$$

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

Теорема 6.2. *Существуют ровно n корней степени $n (n \in N, n \geq 2)$ из ненулевого числа $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Все эти корни могут быть заданы формулой:*

$$w = \sqrt[n]{z}\left(\cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right)\right), k \in [0, n-1]$$

Чтобы найти все корни достаточно найти один корень а затем поворачивать его на $\frac{2\pi}{n}$.

6.2 Последовательности комплексных чисед. Топологические определения

Пусть $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ -последовательность, $z_n \in C$.

Определение 6.5. Последовательность z_n сходится к числу z_0, если:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N : \forall n \geq N : |z_n - z_0| < \varepsilon$$

Пишем:

$$\lim_{n \to \infty} z_n = z_0$$

Сходимость равносильно тому, что z_0 - конечное, определенное число.

Можно говорить о бесконечных пределах, но такие последовательности не являются сходящимися.

Лемма 6.4. Пусть $z = x + iy \Leftrightarrow \max\{|x|, |y|\} \leq |z| \leq \sqrt{2} \max\{|x|, |y|\}$

Теорема 6.3. *О сходимости вещественной и мнимой части последовательности*

Пусть $z_n = x_n + iy_n$. Тогда z_n сходится, когда вещественные последовательности x_n и y_n сходятся.

Определение 6.6. последовательност z_n называется фундаментальной или последовательностью Коши, если:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N : \forall n, m \geq N : |z_n - z_m| < \varepsilon$$

Теорема 6.4. *Теореме Коши*

z_n сходится тогда и только тогда, когда последовательность z_n фундаментальная.

Топологические определения

Определение 6.7. $G \subset C$ называется открктым, если каждая точка $z_0 \in G$ принадлежит ему вместе с некоторым открытым шаром.

Определение 6.8. Если точка z_0 принадлежит множеству G вместе с некоторым шаром, то она называется внутренней точкой множества, таким образом G - открытое равносильно тому, что все его точки внутренние.

Множество всех внутренних точек называется внутренностью множества и обозначается $\operatorname{Int} G$.

Определение 6.9. G называется замкнутым, если дополнение к нему $C \backslash G$ - открыто.

Определение 6.10. точка z_0 называется граничной точкой, если в любой окрестности этой точки найдутся точки как принаджлещие G, так и не принадлежащие.

Множество всех граничных точек G называется границей множества и обозначается ∂G.

Точка z_0 называется внешней для G, если она не принадлежит G вместе с некоторой окрестностью.

Пусть G - произвольное множество C, а z - произвольная точка из C. Тогда z является либо внутренней, либо внешней, либо граничной точкой для G.

Определение 6.11. множество $G \subset C$ называется областью, если G открыто и связно, то есть любые две точки в G можно соединить ломаной целиком лежащей в G.

В ТФКП принято накладывать дополнительные ограничения на границу ∂G: считается, что ∂G состоит из конечного числа связных кусков контуров, разрядов иточек, причем контуры и разрезы считаются кусочно-гладкими, то есть составленных из других графиков гладких (непрерывных дифференцируемых функций).

∂G снабжается ориентацией, то есть направлением движения по ней: положительным направлением движения (или обходом по границу) называется такое направление, при котором G лежит слева.

Определение 6.12. Множество $G \subset C$ называется ограниченным, если существует такой кргу радиуса $R < \infty$.

Множество $M \subset C$ называется компактным (компактом), если оно ограничено и замкнуто.

6.3 Функции комплексной переменной

Определение 6.13. Пусть G область в C. Говорят, что на множестве G задана функция f, елси указано правило (или закон), по которому в каждой точке $z \in G$ сопоставляется одно или несколько значений $w \in C$ (сопоставляется одна или некоторая совокупность) точек.

Если сопоставляется 1 точка, то f называется однозначной.

$$f : z \to w$$

Если сопоставляется совокупность точек, то f многозначная.

$$f : z \to \{w_1, \dots, w_n, \dots\}$$

Как правило в случае многозначной функции, сопоставляется либо конечное, либо счетная совокупность.

Определение 6.14. Если f однозначна на области G и при этом разным z соответствуют разные значения $f(z)$, то f называется инъекцией (взаимно однозначной) или однолистной.

Определение 6.15. Пусть $f : G \to D, f(G) = E(f)$

Функция $g(w) : D \to G$ называется обратной к f, если g сопоставляет w совокупность точек z, таких что $f(z) = w$.

Отображение будет взаимно однозначным, если f и g - однозначные, это соответствует хорошему пониманию обратной функции.

Определени предела функции переносятся из определния предела функции вещственной переменной.

Число A называется пределом функции $f(z)$ при $z \to z_0$, если

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall z : 0 < |z - z_0| < \delta : |f(z) - A| < \varepsilon$$

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = A$$

Определение 6.16. Говорят, что f непрерывна в z_0, если $\exists \lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$

f называется непреывной в области G, если она непрерынва в каждой обасти G

Обозначение: $f \in C(G)$

Определение 6.17. f называется равномерно непрерывной в области G, если:

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 : \forall z_1, z_2 \in G, |z_1 - z_2| < \delta \Rightarrow |f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$$

6.4 Дифференцируемость Ф.К.П. Условие Коши-Римана

Пусть $f(z) : G \to D$, пусть $f(z)$ - однозначная.

Определение 6.18. Пусть f дифференцируема в $z_0 \in G$, если существует такое число $A \in C$, что:

$$f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = A \cdot \Delta z + o(\Delta z)$$

Определение 6.19. f дифференцируема в $z_0 \in G$, если существует предел:

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

$$A = f'(z_0)$$

производная а точке z_0

Теорема 6.5. *Условие Коши-Римана*

Пусть $f : G \to D$, f - однозначная. Пусть $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, пусть $z_0 = x_0 + iy_0 \in G$

Для того чтобы f была дифференцируемрй в z_0 необходимо и достаточно, чтобы функции u и v были дифференцируемы в (x_0, y_0) и удовлетворяли в этой точке следующим соотношениям:

$$U'_x(x_0, y_0) = V'_y(x_0, y_0)$$

$$U'_y(x_0, y_0) = -V'_x(x_0, y_0)$$

Следствие (4 различных формуы f'_z):

$$f'_z(z) = U'_x + iV'_x = U'_x - iU'_y = V'_y + iV'_x = V'_y - iU'_y$$

Заменяем согласно условию Коши-Римана

Определение 6.20. Функция $f : G \to C$ называется аналитической в G, если f дифференцируема в любой точке G.

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z - z_0)^k$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

Свойства аналитических функций:

Лемма 6.5. Справедливы классические факты из вещественного анализа

Пусть f и g - аналитические функции. Тогда

1. $f \pm g$ - аналитические функции

$$(f \pm g)' = f' \pm g'$$

2. fg - аналитическая

$$(fg)' = f'g + fg'$$

3. если $g(z) \neq 0$, то $\frac{f}{g}$ - аналитическая и

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

4. если $f : G \to D$, $g : D \to C$ и таким образом можно построить композицию: $G \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} C$, $g(f(z))$ - аналитическая функция и справедливо:

$$(g(f(z)))' = g'(f(z)) \cdot f'(z)$$

5. Обратная функция

Пусть $f : G \to C$- однозначна и $f'(z_0) \neq 0$, тогда в окрестности z_0 существует обратная функция $g = f^{-1}$ к f (то есть f - взаимно-однозначная), что:

$$w = f(z) \Leftrightarrow z = g(w)$$

$$g'(w) = \frac{1}{f'(z)} = \frac{1}{f'(g(w))}$$

Лемма 6.6. Если f аналитична в G, то f непрерынва на G

Лемма 6.7. Пусть $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ - аналитическая функция. Тогда градиент u ортогонален градиенту v.

Лемма 6.8. Пусть $f = u + iv$. Если f аналитическая, то u, v удовлетворяют уравнению Лапласа:

$$U''_{xx} + U''_{yy} = 0$$

$$V''_{xx} + V''_{yy} = 0$$

Решением этого уравнения называют гармоническими функциями

Лемма 6.9. Пусть $f = u + iv$ аналитическая. Тогда v воостанавливается однозначно (с точностью до C) по функции и наоборот.

6.5 Элементарные функции

1. $w = e^z$

Определение 6.21. Пусть $z = x + iy$

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$$

Формула Эйлера

1. e^z совпадает с обычной вещественной экспонентой
2. e^z аналитична
3. $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e_{z_2}$
4. e^z - периодическая функция с $T = 2\pi i$

2. Логарифм z

Определение 6.22. Логарифмом z называется число $w \in C$ такое, что $e^w = z$

Так как e^w - периодическая с периодом $2\pi i$, то $\ln z$ - бексоненчно много, то есть если w - логарифм, то $w + 2\pi in$ - тоже логарифм, $n \in Z$.

$$\operatorname{Ln} z = w = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi n)$$

Логарифм не определен лишь в нуле.

Через логарифм определим $\sin z$ и $\cos z$

$$e^{iy} = \cos y + i\sin y$$

$$e^{-iy} = \cos y - i\sin y$$

$$\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} = ch(iy)$$
$$\sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} = \frac{1}{i} sh(iy)$$

Эти равенства и есть определение косинуса и синуса.

В частности из определения знаменитое красивое равенство, связывающее между собой 4 постоянные:

$$e^{\pi i} = -1$$

Разумеется для $\cos z$ и $\sin z$ выполняются все вещественные тригонометрические тождества, например:

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1$$

Проверяется путем подстановки комплексной формы числа

Лемма 6.10. $\cos z$ и $\sin z$ - аналитические функции на C

$$\cos z' = -\sin z$$

$$\sin z' = \cos z$$

6.6 Интеграл от функции комплексной переменной

Интеграл вычисляется сведением к криволинейным интегралам функции действительной переменной

Теорема 6.6. $\int\limits_L f(\xi)d\xi$ *равносильно тому, что существует 2 вещественных интеграла:* $\int\limits_L udx - vdy$ *и* $\int\limits_L vdx + udy$ *при этом:*

$$\int\limits_L f(\xi)d\xi = \int\limits_L udx - vdy + i\left(\int\limits_L vdx + udy\right)$$

где $f(\xi) = u + iv$, *u-вещественная часть, v-мнимая.*

Свойства интеграла

1. $\int\limits_L f(z)dz = -\int\limits_{-L} f(z)dz$

2. Аддитивность: $\int\limits_{L_1 \cup L_2} f(z)dz = \int\limits_{L_1} f(z)dz + \int\limits_{L_2} f(z)dz$

3. Линейность. $\int\limits_L (af(z) + bg(z)dz = a\int\limits_L f(z)dz + b\int\limits_L g(z)dz$

4. Модуль интеграла меньше интеграла модуля (лемма об оценке)

$$\left|\int\limits_L f(z)dz\right| < \int\limits_L |f(z)|dl, dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

5. $\int\limits_L f(z)dz$ и пусть $z = \varphi(w)$ аналитическая функция

$$\int\limits_L f(z)dz = \int\limits_L f(\varphi(w))\varphi'(w)dw$$

6. Измененеи направления обхода кривой интегрирования не влияет на знак интеграла

7. Интеграл по контуру - кусочно-гладкий замкнутый путь - не зависит от выбора начальной точки контура.

Пусть l - гладкая, без особых точек и самопересечений кривая, заданная параметрически:

$$l : \begin{cases} x = \alpha(t) \\ y = \beta(t) \end{cases}, t \in [a, b]$$

Пусть функция $f(x, y)$ определена и интегрируема вдоль кривой l в смысле криволинейного интеграла первого рода, тогда:

$$\int\limits_L f(x, y)dl = \int\limits_a^b f(\alpha(t), \beta(t))\sqrt{\alpha'(t) + \beta'(t)}$$

где $[a, b]$ - отрезок параметризации, то есть рассматривается часть кривой.

В частности для определения комплексного интеграла.

Сделаем параметризацию:

$$L : \begin{cases} x = \alpha(t) \\ y = \beta(t) \end{cases}, t \in [0, 1]$$

Тогда:

$$\int\limits_L udx - vdy = \int\limits_0^1 (u(\alpha(t), \beta(t)))d(\alpha(t)) - v(\alpha(t), \beta(t))d(\beta(t))$$

Так как $d(\alpha(t)) = \alpha'(t)dt$ и $d(\beta(t)) = \beta'(t)dt$, то получаем вещественный интеграл, который можно спокойно интегрировать:

$$\int\limits_L udx - vdy = \int\limits_0^1 (u\alpha' - v\beta')dt$$

6.7 Интегралы от аналитических функций. Первообразная

Теорема 6.7. *Пусть $f(z)$ - аналитическая функция в односвязяной области.*

1. Тогда интеграл по любому замкнутому контуру из G от f равен нулю, то есть

$$\oint\limits_C f(z)dz = 0$$

2. Тогда интегралы от f по любым двум путям из G, имеющие общие начало и конец совпадают, то есть $\forall L_1, L_2$:

$$\int\limits_{L_1} f(z)dz = \int\limits_{L_2} f(z)dz$$

Таким обращом интеграл от $f(z)$ не зависит от пути, соединяющего точки z_1 и z_2, а зависит лишь от самих точек.

Теорема 6.8. *Коши, вторая Теорема Коши для многосвязной области*

Пусть f аналитична в многосвязной области D, которая устроена так, что у нее C_0 - внутренняя граница, а $C_1, \ldots, C_n$ - компоненты связности внутри границы.

Тогда:

$$\int\limits_{\partial D} f(z)dz = 0$$

то есть:

$$\int\limits_{C_0^+ + C_1^- + \ldots + C_n^-} f(z)dz = 0$$

Определение 6.23. вычетом функции $f(z)$ в z_0 наывается:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C f(z)dz$$

где C -маленький контур

Определение 6.24. $F(z)$ называется первообразной функции $f(z)$ в области G, если $\forall z \in G$ F дифференцируем в z и $F'(z) = f(z)$, таким образом $F(z)$ - аналитическая функция в G.

Рассмотрим непрерывную функцию $f(z)$ в G. Пусть $f(z)$ обладает свойством: интеграл по любому замкнутому контуру равен нулю, тогда определено выражение $\int\limits_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi$ и с, следовательно, определена функция:

$$F(z) = \int\limits_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi$$

F определена однозначно, так как интеграл не зависит от первообразной.

Теорема 6.9. *Есть выполнены вышеперечисленные условия, то $F(z)$ - первообразная функции $f(x)$*

Лемма 6.11. Если G - связная область, то любые две первообразные отличаются лишь на константу.

Теорема 6.10. *Формула Ньютона-Лебйница*

$$\int\limits_{z_1}^{z_2} f(\xi)d\xi = F(z_2) - F(z_1)$$

где F - первообразная f (любая)

6.8 Формула Коши

Теорема 6.11. *Первая формула Коши, первый интеграл Коши*

Пусть f аналитическая функция в односвязяной облатси G, пусть $z_0 \in G$, а C -произвольный контур, окружающий z_0 $C \in G$. Тогда справедлива:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz, C : |z - z_0| < R$$

Замечание 6.1. Формула среднего значения

$C : z = z_0 + Re^{i\varphi}, \varphi \in [0, 2\pi)$. Тогда:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{i\varphi}) d\varphi$$

Это аналог формулы для интегрального среднего функции $f(x)$ на $\langle a, b \rangle$: $\frac{1}{b-a} \int\limits_a^b f(x)dx$

Замкнутый путь $z_0 \in C, r \in [0, +\infty)$:

$$\gamma_{r,z_0}(t) = z_0 + r * e^{it}, t \in [-\pi, \pi]$$

как и его носитель, называется окружностью с центром z_0 и радиусом r.

Значение теоремы - среднее по окружности равно значению функции в центре окружности.

Теорема 6.12. *Принцип максимума модуля*

Пусть $f(z)$ - аналитическая функция в области G и $f \neq const$. Тогда $\max |f(z)|$ может достигаться только на ∂G.

Если $\max |f(z)|$ аналитические функции достигается во внутренней точке D, то $\frac{F}{G} \equiv const$

Замечание 6.2. Если $f(z)$ нигде не обращается в ноль на G, то для нее справедлив принципе минимума - $\min f(z)$ достигается только на ∂G.

Теорема 6.13. *Основная теорема алгебры*

Любой многочлен $P_n(z) = z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$ с коэффициентами $a_k \in C$ имеет по крайней мере один комплексный корень.

6.9 Второй интеграл Коши

Теорема 6.14. *Вторая формула интеграла Коши*

Если F аналитична в G, тогда у f существует производная любого порядка, причём:

$$f^{(n)}(\xi) = \frac{n!}{2\pi i} \oint\limits_C \frac{f(z)dz}{(z-\xi)^{n+1}}$$

Теорема 6.15. *Теорема Морера*

Пусть $f(z)$ непрерывна в односвязной области $G \subset C$ и $\oint\limits_C f(z)dz = 0$. Тогда для любой замкнутой $C \in G$ следует, что $f(z)$ - аналитическая в G. (обратная теореме к теореме Коши)

Теорема 6.16. *Теорема Лаувилля*

Пусть $f(z)$ - аналитическая на всей комплексной плоскости C и пусть $|f(z)|$ - ограничена на C:$|f(z)| \leq M, \forall z \in C$. Тогда $f(z) \equiv const$.

7 Дифференциальные исчисление в евклидовых пространствах. Функции многих переменных, частные производные

7.1 Линейные операторы в евклидовых пространствах

Термин оператор употребляется как синоним термина отображение, однако произвольные отображения операторами называют редко. Чаще всего операторами называют отображения векторных пространств, обладающие свойствами линейности.

Напомним несколько известных из курса алгебры определений и фактов. В них X - векторно пространство над полем K. Нулевой вектор будем обозначать θ_X.

Если $n \in N, x_1, \dots, x_N \in X, \lambda_1, \dots, \lambda_N \in K$, то вектор $\sum\limits_{k=1}^{N} \lambda_k x_k$ называется линейной комбинацией векторов $x_1, \dots, x)_n$, а скаляре $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ - её коэффициентами.

Если $E \subset X$, то множество всевозможных линейных комбинаций векторов из E называется линейной оболчкой множества E.

Набор векторов $E \subset X$ называется *линейной зависимым*, если существует линейная комбинация векторов из E, не все коэффициенты которой равны нулю, и котороая при этом обращается в ноль. В противном случае E называется линейно независимым.

Пусть $n \in N$. Если в пространстве X существуют линейно независимые n векторов, а любые $n+1$ векторов линейно зависимы, то число n называют размерностью пространства X, а само пространство X - n-мерным или конечномерным. Если в пространстве X существуют сколь угодно большое число линейно независимых векторов, то оно называется бесконечномерным. Размерностью нулевого пространства, считается равной нулю.

Линейно независимый набор векторов $E \subset X$, линейная оболчка которого равна X называется базисом пространства X. Всякий вектор $x \in X$ единственным образом представляется в виде линейной комбинации векторов из базиса. В n-мерном прострнанства любой линейно независимый набор n векторов является базисом, а любой базис состоит из n векторов.

Размерность пространства R^n равна n. В R^n имеется стандартный базис из ортов $\{e^k\}_{k=1}^n$:

$$e_j^k = \begin{cases} 1, & j = k \\ 0, & j \neq k \end{cases}$$

Всякий вектор $x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n$ раскладывается по базису из ортов:

$$x = \sum_{k=1}^{n} x_k e^k$$

Действиями с векторами из R^n по умолчанию своершаются как со столбцами. Пусть A - матрица размера $m \times n$, то есть имеющая m строк и n столбцов, a_{ik} - её элементы. Через A^T обозначается транспонированная матрица, то есть размера $n \times m$ с элементами a_{ki}. Матрица размера $1 \times n$ есть вектор-строка.

Если A - линейный оператор, то вместо $A(x) = Ax$, опуская скобки.

Определение 7.1. Пусть X, Y - векторные пространства над одним и тем же полем K. Оператор $A : X \to Y$ называется линейным, если для любых $x, y \in X, \lambda, \mu \in K$

$$A(\lambda x + \mu y) = \lambda Ax + \mu Ay$$

Перечислим несколько простых алгебраических свойств линейных операторов.

1. Если $x_1, \ldots, x_n \in X, \lambda_1, \ldots, \lambda_N \in K$, то:

$$A(\sum_{k-1}^{N} \lambda_k x_k) = \sum_{k-1}^{N} \lambda_k x_k$$

2. $A\theta_X = \theta_Y$

3. Множество линейных операторов, действуюзих из X в Y, являются векторным пространством.

4. $(A + B)x = Ax + Bx$

5. $(\lambda A)x = \lambda \cdot Ax (x \in X)$

Если X, Y, Z - векторные пространства над одним и тем же полем, а $A : X \to Y, B : Y \to Z$ - линейные операторы, то оператор $BA : X \to Z$, действующий по формуле $(BA)x = B(Ax)(x \in X)$ называется произведением операторов A и B.

Всякая матрица размера $m \times n$ задает линейный оператор A из R^n в R^m, который действует на вектора из R^n по правилу умножения строка на столбец.

Каждый линейный оператор задается единственной матрицей размера $m \times n$

Если A - линейный оператор из R^n в R^n , то определителем оператора A называется определитель его матрицы: $\det A = \det(A)$

Теорема 7.1. *Пусть $A : R^n \to R^n$ - линейный оператор. Тогда следующие утверждения равносильны:*

1. *A обратим*

2. $A(R^n) = R^n$

3. $\det A \neq 0$

Тождественный (единичный) оператор в R^n будем обозначать через I или I_n. Ему соответствует единичная матрица, у которой на главной диагонали стоят единицы, а на остальных местах - нули. Если линейный оператор обратим, то обратный оператор A^{-1} тоже линеен, а матрица A^{-1} обратна к матрице A: $(A^{-1}) = (A)^{-1}$

Взаимно обратные операторы свзяаны равенством:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

Определение 7.2. Пусть X, Y - нормированные пространства (оба вещественные или оба комплексные), $A : X \to Y$ - линейный оператор. Нормой оператора A называется величина:

$$||A|| = \sup_{||x||_X \leq 1} ||Ax||_Y$$

Если $||A|| < +\infty$, то оператор A называется ограниченным.

Нормы оператора удовлетворяют трем свойства из определения.

Множество с нормой, определенной равенством, является нормированным пространством.

Теорема 7.2. *Вычисление нормы линейного оператора.*

Пусть X, Y - нормированные пространства, $A : X \to Y$ - линейные *оператор. Тогда:*

$$\sup_{||x||\le 1} ||Ax|| = \sup_{||x||<1} ||Ax|| = \sup_{||x||=1} ||Ax|| = \sup_{||x||\ne\theta} \frac{||Ax||}{||x||}$$

Замечание: для всех $x \in X$ верна оценка:

$$||Ax|| \le ||A|| \cdot ||x||$$

Всякий линейный оператор из R^n в R^m непрерывен.

Теорема 7.3. *Оценка нормы линейного оператора в евклидовых пространствах.*

Пусть $A : R^n \to R^m$ - линейный оператор с матрицей A, тогда:

$$||A|| \le \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2}$$

7.2 Дифференцируемость и частные производные

Мы давали два равносильных определения дифферцнируемости и производной функций одной переменной.

Первой описывало то свойство функции, что её приращение в "малом"линейно зависит от приращения аргумента: функция f называется дифференцируемой в точке x, если существует число $A \in R$, что:

$$f(x+h) = f(x) + Ah + o(h), \quad h \to 0$$

При этом A называется производной функции f в точке x.

Производная функции f в точке x обозначается $f'(x)$.

Обобщение этих определений на функции нескольких переменных и шире, на отображениях в евклидовых пространствах, приводят к различным понятияем. Наиболее естественное обобщение допускает первое определение. При этом число A трактуется как линейный оператор из R в R или матрицу размера 1×1, а умножение A на h - как действие оператора A на вектор h или умножение матрицы A на вектор h.

Определение 7.3. Пусть $F : D \subset R^n \to R^m$. Если существует такой линейный оператор $f'(x) : R^n \to R^m$, что:

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + o(h)$$

то отображение f называется дифференцируемым в точке x. При этом оператор $f'(x)$ называется проивзодным оператором, производным отображением или, короче, производной отображения f в точке x и обозначается $f'(x)$

Определение дифферцнируемсоит: если существует такой линейный оператор $A \in L(R^n \to R^m)$ и такое отображение в нуле непрерывное и равное нулю, что выполнено равенство:

$$f(x+h) = f(x) + Ah + \alpha(h)|h|$$

то отображение fназывается дифференцируемым в точке x. Величина $f'(x)h$ называется дифферунциалом отображения f в точке x, соответствующим приращению h.

Замечание 7.1. Производный оператор единственный

Определение 7.4. Пусть отображение $f : D \subset R^n \to R^m$ дифференцируемо во внутренней точке x. Матрица оператора $f'(x)$ называется матрицей Якоби отображения f в точке x.

Матрица Якоби имеет размер $m \times n$, и обозначается $J = (f'(x))$.

Определитель матрицы Якоби называется *якобианом*.

Сформулируем в других терминах частный случай определения дифференцируемости для функций n переменных, то есть при $m = 1$. При переформулировке учтем, что матрица линейного оператора из R^n в R^1 есть вектор-строка размерности n:$(A) = a = (a_1, \ldots, a_n)$. При этом $Ah = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k h_k$, что можно трактовать как скалярное произведение.

Определение 7.5. Пусть $f : D \subset R^n \to R$. Если существует такой вектор $a \in R^n$, что:

$$f(x+h) = f(x) + \langle a, h\rangle + o(h)$$

то функция f называется дифференцируемой в точке x.

Вектор строка a называется *градиентом* функции f в точке x и наряду с $(f'(x))$ обозначается $gradf(x)$ или $\bigtriangledown f(x)$. Символ читается как "набла"и называется символом или оператором Гамильтона.

Градиент - вектор, своим направлением указывающий направление наибольшего возрастания некоторой величины φ, значение которой меняется от одной точки пространства к другой, а по величине (модулю) равный скорости роста этой величины в этом направлении.

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial\varphi}{\partial x_n}\right)$$

компоненты которого равны частным производным φ по всем аргументам.

Смысл градинета в том, что его скалярное произведение с бесконечно малым вектором dx дает полный дифференциалл этоф функции при соответствуюзем изменении координат в пространстве, на котором определена f, то есть главную часть изменения f при смещении на dx.

Дифференцируемость отображения f в точке x равносильна одновременной дифференцируемости всех его координатных функция f_i в точке x.

Строки матрицы Якоби отображения f слежуат градиенты координатных функций f.

Замечание 7.2. Если отображение f дифференцируемо в точке x, то оно непрерывно в x.

Частные производные

Обобщение производной как предела разностного отношения приводит к понятием производной по вектору и частной производной.

Определение 7.6. Пусть $f : D \subset R^n \to R, h \in R^n$. Предел:

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x+th) - f(x)}{t}$$

называется производной функции f по вектору h в точке x и обозначается $D_h(f(x))$ или $\frac{\partial f}{\partial h}(x)$. Если $|h| = 1$, то есть если h - единичный вектор и его длина равна единице, то вектор h назвыается направлением, а производная - *производной по направлению* h. Если существует конечная производная, то говорят, что функция f дифференцируема по вектору h в точке x.

Теорема 7.4. *Производная дифференцируемой функции по вектору*

Если функция f дифференцируема в точке x, то f дифференцируема в точке x по любому вектору $h \in R^n$ и

$$D_h f(x) = f'(x)h$$

таким образом: $\frac{\partial f}{\partial h}(x) = \langle gradf(x), h \rangle$

Проивзодная по направлению показывает скорость изменения функции в данном направлении. Выясним, в каком направлении функция быстрее всего возрастает или быстрее всего убывает.

Напомним, что величина $f'(x)h$ есть дифференциал, обозначаемый $df(x, h)$. Он может быть записан в виде скалярного произведения. $\langle gradf(x), h \rangle$.

Следствие 1. Экстремаьное свойство градиента.

Пусть функция $f : D \subset R^n \to R$ дифференцируема в точке x, $gradf(x) \neq O_n$. Тогда для любого направления:

$$-|gradf(x)| \leq D_h f(x) \leq |gradf(x)|$$

Таким образом, градиент указывает направление скорейшего изменения функции. Неравенство обращается в равенство, когда $gradf(x)$ и h коллинеарны.

Особый интерес представляют производные по ортам e^k:

Определение 7.7. Пусть $f : D \subset R^n \to R$. Производная $\frac{\partial f}{\partial e^k}(x)$ называется частной производной функции f по k-ой переменной в точке x и обозначается еще $f'_{x_k}(x)$ или $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x)$

Таким образом:

$$D_k f(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + te^k) - f(x)}{t} = F'_k(0)$$

Воспользовашвшись координатным обозначениям аргументов, можно переписать определение в виде:

$$D_k f(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_k + t, \ldots, x_n)}{t} - f(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n)$$

На практике вычисление частной производной сводится к вычислению производной функции одной переменной, поэтому все свойства обычной производной переносятся на частные производные. Если существует предел, то называют частной производной.

Круглое ∂ испоользуется вместо d для обозначения именно частной производной или производной по вектору.

Вычислим производные в направлении оси абцисс и оси ординат. Для этого возьмем в качестве единичного вектора оси абцисс i и, соответственно, оси ординат j. Получим:

$$\frac{\partial f}{\partial i}(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$

то есть производные в направлении координатных осей являются частными производными, то есть это объясняет, почему в определении было сказано про орты.

Говоря о существовании частных производных, мы всегда будем подразумевать их конечность, то есть предел существует и конечен.

Следствие 2. Частные производные дифференцируемой функции. Пусть функция $f : D \subset R^n \to R$ дифференцируема в точке x. Тогда для всех $k \in [1 : n]$ существует $D_k f(x)$ и

$$D_k f(x) = f'(x)e^k = \langle gradf(x), e^k \rangle$$

Следствие 3. Структура матрицы Якоби и градиента.

Пусть отображение $f : D \subset R^n \to R^m$ дифференцируемо в точке x. Тогда:

$$J = (f'(x)) = \begin{pmatrix} D_1 f_1(x) & \dots & D_n f_1(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ D_1 f_m(x) & \dots & D_n f_m(x) \end{pmatrix}$$

В частности, при $m = 1$.

$$gradf(x) = (D_1 f(x), \dots, D_n f(x))$$

То есть, допустим, мы хотим вычислить частную производную дифференцируемой функции по x. Тогда это будет орта в навправлении оси x и скалярное произвденеие градиента и орты будет равно частной производной функции по x, потому во всех остальных координатах стоят нули, кроме кооридинты, по которой движется вектор.

Рассмотрим геометрический смысл вектора $gradf(x_0)$. Тогда в силу:

$$D_e f(x_0) = |gradf(x_0)| \cos \varphi$$

где φ - угол между векторами e и $gradf(x_0)$. При смещении в направлении, перпендикулярном вектору $gradf(x_0)$ скорость изменения значений функции равна нулю.

Производная по единочному вектора данного направления есть производная по данному направлению.

Поскольку единичны вектор в евклидовом пространстве задается направляющими косинусами:

$$e = (\cos a_1, \dots, \cos a_m)$$

где a_1 - угол, который вектор e образует с базисным вектором e_i декартовой системы координат,то:

$$D_e f(x_0) = \langle f(x_0), e \rangle = \frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0) \cos a_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x^m}(x_0) \cos a_m$$

На отмеченном геометрическом свойстве градиента основаны так называемые градиентные методы численного поиска экстремумов функции многих переменных.

Замечание 7.3. Дифференциал функции f записывется в виде:

$$df(x,h) \sum_{k=1}^{n} D_f f(x) h_k$$

Правило цепочки в координатах. Пусть

Для частных производных сложной функции справедливо:

$$\frac{\partial h(x_0)}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g(y_0)}{\partial y_i} \frac{\partial f(x_0)}{x_j}, j = 1, \dots, m$$

или если $f : D \subset R^n \to R^m$, $g : E \subset R^m \to R^l$, $f(D) \subset E$ и отображение f дифференцируемо в точке x, а отображение g дифференцируемо в точке $f(x)$. Тогда для всех $j \in [1 : l], k \in [1 : n]$

$$D_k (g \circ f)_j (x) = \sum_{i=1}^{m} D_i g_i(f(x)) D_k f_i(x)$$

Пример:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial x}$$

Пример: $h(x) = (3x^2 - 5x)^7$

Тогда функция h может быть записана в виде композиции $h = g \circ f$,где:

$$f(x) = 3x^2 - 5x, g(y) = y^7$$

$$dz = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)dx$$

$$f'(x) = 6x - 5, g'(y) = 7y^6$$

$$h'(x) = 7(3x^2 - 5x)^6 \cdot (6x - 5)$$

Теорема 7.5. *Дифференцируемость функции с непрерывными частными производными*

Пусть все частные производные f существуют в некоторой окрестности x и непрерывны в точке x. Тогда f дифференцируема в точке x.

7.3 Частные производные высших порядков и формула Тейлора

Производная $D_i(D_k f)(x)$ называется *частной производной второго порядка* функции f по k-й и i-й переменным в точке x и обозначается:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i}(x)$$

Частные производные высших порядков определяются по индукции.

Частные производные порядка r в точке x также обозначают:

$$\frac{\partial^r f}{\partial x_{i_1}, \ldots \partial x_{i_r}}(x)$$

Под производной нулевого порядка понимают саму функцию. Таким образом, у функции n переменных может существовать n^r частных производных порядка r.

Если $i_1 = \ldots = i_r$, то частная производная называется чистой, в противном случае - смешанной. Чистые производные обозначают короче, например, $f''_{x_i^2}(x)$ или $\frac{\partial^r f}{\partial x_i^r}(x)$

Если частные производные существуют в окрестности точки (x_0, y_0)

и непрерывны в точке (x_0, y_0). Тогда:

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$$

Определение 7.8. Пусть $r \in N, D$ открыто в R^n. Функция $f : D \to R$ называется r раз непрерывно дифференцируемой или r-гладкой на множестве D, если все ее частные производные до порядка r включительно существует и непрерывны на D.

Пусть множество d открыто и непрерывно, $i_1, \ldots, i_r \in [1 : n]$ набор $(j_1, \ldots, j_r)$ получен из набора $(i_1, \ldots, i_r)$ перестановкой. Тогда для всех $x \in D$:

$$D^r_{i_1,\ldots,i_r} f(x) = D^r_{j_1,\ldots,j_r} f(x)$$

Алгебраические операции (сложение, умножение векторной функции на скалярную, скалярное произвдеение) и операция композиции не выводят из класса непрерывных.

Теорема 7.6. *Многомерная формула Тейлора-Лагранжа*

$$f(x) = \sum_{(k) \le r} \frac{f^{(k)}(x^0)}{k!}(x - x^0)^k + \sum_{(k)=r+1} \frac{f^{(k)}(x^0 + \theta(x - x^0))}{k!}(x - x^0)^k$$

Функция:

$$T_{r,x^0} f(x) \sum_{(k) \le r} \frac{f^{(k)}(x^0)}{k!}(x - x^0)^k$$

есть многочлен степени не выше r от n переменных $x_1, \ldots, x_n$. Он называется многочленом Тейлора порядка r функции f с центром в точке x^0.

Формулы Тейлора с центром в нуле называется формулой Маклорена.

Следствие 2. Многомерная формула Тейлора-Пеано:

$$f(x + h) = \sum_{(k) \le r} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} h^k + o(|h|^r)$$

Замечание 7.4. Многомерная формула Тейлора в дифференциалах

$$f(x + h) = \sum_{l=0}^{r} \frac{1}{l!} d^l f(x, h) + \frac{1}{(r + 1)!} d^{r+1} f(x + \theta h, h)$$

Следствие.

Пусть f задана на открытом множестве D и имеет на множестве D непрерывные частные производные первого и второго порядка. Пусть $(x_0, y_0) \in D$. Тогда для любогой точки $(x, y) \in D$ такой, что отрезок, соединяющий точки (x_0, y_0) и (x, y) лежит в D, существует такая точка (x_1, y_1) на этом отрезке, что:

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0) \cdot h + f_y(x_0, y_0)k + \frac{1}{2}(f_{xx}(x_1, y_1)h^2 +$$

$$+2f_{xy}(x_1, y_1)hk + f_{yy}(x_1, y1)k^2), h = x - x_0, k = y - y_0$$

Многочлен P от n переменных называется однородным многочленом или формой степени $l \in Z_+$, если:

$$P(\lambda x) = \lambda^l P(x), x \in R^n, \lambda \in R$$

Однородный многочлен степени 1 есть линейная функция. Однородный многочлен степени 2 называется квадратичной формой.

$$d^2 f(x, h) = \sum_{i,j=1}^{n} D^2_{ij} f(x) h_i h_j$$

Это квадратичная форма с матрицей $\left(D^2_{ij} f(x)\right)^n_{i,j=1}$ частных производных второго порядка. Так как непрерывные смешанные производные не зависят от очередности дифференцирования, матрица симметрична. Матрица второго дифференциала $d^2 f(x)$ называется матрицей Гессе функции f в точке x.

7.4 Экстремумы и неявные отображения

Экстремум функции

Определение точек экстремума функции некольких переменных и необходимое условие экстремума формулируется аналогично одномерному случаю.

Определение 7.9. $f : D \subset R^n \to R, x_0 \in D$. Если существует такая окрестность V_{x_0} точки x_0, что:

для любого $x \in V_{x_0} \cap D$ выполняется неравенство $f(x) \leq f(x_0)$, то x_0 называется точкой максимума функции f

для любого $x \in V_{x_0} \cap D$ выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$, то x_0 называется точкой строгого максимума функции f.

Если выполняются противоположные неравенства, то x_0 назывется соответственно точкой минимума и точкой строгого минимума f.

Если x_0 является точкой (строоого) максимума или минимума функции f, то x_0 называется точкой (строгого) экстремума f.

В точке экстремума функция не обязана принимать наибольшее или наименьшее значеие на всей области определения: оно будет такми лишь по сравнению со значениями в достаточно близких точках. Поэтому точки из опредлеения называют точками *локального экстремума*, в противовес точкам *глобального экстремума*, то есть тем, в которых функция принимает наибольшее или наименьшее значение. Слово локальный при обсуждении точек экстремума будет опускаться.

Теорема 7.7. *Необходимое условие экстремума функции нескольких переменных.*

Пусть f задана на множестве D, x_0 - точка экстремума функции f. Если f имеет частные производные x, то они равны нулю, то есть:

$$D_k f(x_0) = 0$$

Если $D_k f(x_0)$ существует при всех $k \in [1 : n]$, то $D_k f(x_0) = 0$ при всех $k \in [1 : n]$. Для дифференцируемой функции эту систему n уравнений можно записать в виде $f'(x_0) = 0$ или $gradf(x_0) = 0$.

Внутренние точки из области определения функции, в которых выполняются необходимые условия экстремума, называются критическими.

Определение 7.10. Пусть $f : D \subset R^n \to R, x_0$ - внутренняя точка. Если:

$$gradf(x_0) = 0_n$$

то x_0 называется стационарной точкой функции f.

Теорема утверждеает, что все внутренние точки экстремума дифф. функции лежат в множестве ее стационарных точек. Таким образом, стационарные точки - это точки, подозрительные на экстремум. Как известно из одномерной ситуации, стационарные точки не обязаны быть точками экстремума. Поэтому необходимо иссeлвдование найденных стационаных точек.

Правило по второй производной мы обобщим на многомерный случай, только вместо второй производной будем рассматривать второй дифференциал.

Второй дифференциал функции n переменных в точке x_0 - это квадратичная форма с матрицей частных производных второго порядка.

$$d^2f(x,h) = \sum_{i,j=1}^{n} D^2_{ij}f(x_0)h_ih_j$$

Квадратичные формы изучаются в курсе алгебры.

Определение 7.11. Пусть K - квадратичная форма от n переменных.

1. Если $K(h) > 0$ для всех $h \in R^n \backslash \{O_n\}$, то форма называется положительно определенной

2. Если $K(h) < 0$, то форма K называется отрицательно определенной

3. Если форма K принимает значения разных знаков, то K называется неопределенной

4. Если $K(h) \geq 0 (\leq 0)$ для всех $h \in R^N$ и существует такое $h \neq O_n$, что $K(h) = 0$, то форма K называется положительно (отрицательно) полуопределенной.

Теорема 7.8. *Достаточное условие экстремума функции нескольких переменных*

Пусть множество D открыто в R^n, f непрерывна и дифференцируема дважды, $x_0 \in D$ - стационарная точка f. Тогда справедливы следующие утверждения:

1. Если $d^2f(x_0)$ - положительно определенная, то x_0 - точка строгого минимума

2. Если $d^2f(x_0)$ - отрицательно определенная, то x_0 - точка строгого максимума

3. Если $d^2f(x_0)$ - неопределенная, то x_0 - не точка экстремума f.

Доказывается с помощью f формулу Тейлора-Пеано:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + d^1f(x_0,h) + \frac{1}{2}d^2f(x_0,h) + \frac{1}{2}\alpha(h)|h|^2$$

Для иселдования квадратичной формы на определенность можно привести ее к диагональному виду или использовать следующий критерий Сильвестра, который доказывается в курсе алгебры.

Пусть A - матрица с элементами a_{ij}, $i, j \in [1 : n]$. Определители:

$$\Delta_k = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{pmatrix}$$

называют главными минорами матрицы A.

Теорема 7.9. *Критерий Сильвестра.*

Квадратичная форма положительно определена тогда и только тогда, когда все главные миноры ее матрицы положительны.

Квадратичная форма отрциательно определена тогда и только тогда, когда:

$$(-1)^k \Delta_l > 0, k \in [1 : n]$$

где Δ_k - главные миноры ее матрицы

7.5 Неявные функции

7.5.1 Постановка вопроса и наводящие соображения

В этом параграфе будет доказана важная как сама по себе, так и благодаря ее многочисленным следствиям теорема о неявной функции.

Пусть, например, мы имеем соотношени: $x^2 + y^2 - 1 = 0$ между координатами x, y точек плоскости. Совокупность точек плоскости R^2, удовлетворяющих этому соотношению, есть единичная окружность.

Наличие связи показывает, что фикисровав одну из координат, x, мы не в праве брать вторую координату произвольно. Таким образом, соотношение предопредлеяет зависимость y от x. Нас интересует вопрос об условиях, при которых неявная связь может быть разрешена в виде явной функциональной зависимости $y = y(x)$.

Вопрос о том, является ли множество, задаваемов в R^2 соотношением, графиком некоторой функциональной зависимости $y = y(x)$, очевидно, решается отрциательно, ибо с геометрической точки зрения он равносилен вопросу о возможности взаимно однозначного прямого проектирования окружности на некоторую прямую.

Но наблюдение подсказывает, что все-таки в окрестности отдельной точки (x_0, y_0) дуга окружности взаимно однозначно проектируется на ось x.

Теорема 7.10. *Если функция F, определенная в окрестности точки такова, что она непрерывна, $F(x_0, y_0) = 0$ и производная по y не равна нулю, то существует двумерный промежуток, являющийся содержащейся окрестнотьсю точки (x_0, y_0) и такая функция f, что для любой внутренней точки (x, y):*

$$F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x)$$

причем производная функции $y = f(x)$ в точках x может быть вычислена по формуле:

$$f'(x) = -(F'_y(x, f(x)))^{-1} \cdot (F'_x(x, f(x)))$$

$$f'(x) = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}$$

7.5.2 Переход к многомерному случаю неявной функции

Простым обобщением утверждения на случай зависимости $F(x^1, \ldots, x^m, y) = 0$ является следующее.

Все остается то же самое, только непрерывна при $p \geq 1$ дифференцировании, неявная функция равна нулю, производная по y не равна нулю, тогда существует такая функция, задающее однозначное отображение x в y:

$$F(x^1, \ldots, x^m, y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x^1, x^2, \ldots, x^m)$$

причем частные производные функции $y = f(x^1, x^2, \ldots, x^m)$ во внутренних точках могут быть вычислены по формуле:

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(x) = \frac{F'_{x^i}(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}$$

В окрестности некритической точки x_0 функции F уравнение:

$$F(x^1, \ldots, x^m) = 0$$

задает $(m-1)$-мерную поверхность.

Перейдем к общему случаю системы уравнений:

$$\begin{cases} F^1(x^1, \dots, x^m, y^1, \dots, y^n) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F^n(x^1, \dots, x^m, y^1, \dots, y^n) = 0 \end{cases}$$

которую мы будем решать относительно $y^1, \dots, y^n$, то есть искать локально эквивалентную системе систему функциональныйх связей.

Дальше положим матрицу производной $f'(x)$ размерном $n \times m$, матрицу производной неявной функции по x размерном $n \times m$ и матрицу производной неявной функции по y, квадратную размерностью $n \times n$.

Так как матрица квадратная и она обратима только тогда, когда ее определитель отличен от нуля. В случае $n = 1$ она сводится к условию, что единственный элемент отичлен от нуля. Матрицу обратную к $F'_y(x, y)$ будем, как обычно, обозначать символом $[F'_y(x, y)]^{-1}$.

Тогда если F непрерывна и дифферецируема, равна нулю, а матрица производных обратима, то есть опредитель не равен нулю, то $F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x)$

причем:

$$f'(x) = -\frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}$$

7.6 Условный экстремум

Одним из наиболее ярких и популярных достижений дифференциального исчисления являются предлагаемые им рецепты отыскания экстремумов функций. Необходимые условия и достаточные дифференциальные признаки экстремума, которые мы получили из формулы Тейлора, относятся, как уже отмечалось, к внутренним экстремумам.

Часто возникает более сложная с практической точки зрения даже более интересная ситуация, когда ищется экстремум функции при некоторых условиях, ограничивающих область изменения аргумента.

Если для любого x, удовлетворяющего условию $\Phi(x) = O_m$ выполняется неравенство $f(x) \leq f(x_0)$, то x_0 называется точкой условного или относительного экстремума функции f при условии связи.

В отличие от точек обычного (безусловного) экстремума, в опредлеении точек условного экстремума учитываются значения функции не во всех близлежащих точках, а только в тех, которые удовлетворяют условию (уравнению) связи.

Используют метод неопределенных множителей Лагранжа, который позволяет свести классическую задачу на условный экстремум к задаче на безусловный.

Идея метода - построение вспомогательной функции - фукции Лагранжа, точка безусловного экстремума которого совпадает с точкой условного экстремума.

Лагранж предложи при отсыкании условного экстремума использовать следующую вспомогательную функцию:

$$L(x, \lambda) = f(x) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i F^i(x)$$

от $n+m$ переменных $(x, \lambda) = (x^1, \ldots, x^n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m)$.

Эту функцию называют функцией Лагранжа, а метод ее использования - методом множителей Лагранжа.

Функция удобна тем, что необходимые условия ее экстремума как функции переменных $(x, \lambda) = (x^1, \ldots, x^n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ в точности совпадают с необходимыми условиями при поиске беузсловного экстремума.

В аналитической записи равносильно тому, что вектор $gradx_0$ является линейнок мобинацией векторов $gradF^i(x_0), i = [1 : m]$, то есть:

$$\operatorname{grad} f(x_0) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \operatorname{grad} F^i(x_0)$$

Действительно:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_j}(x, \lambda) = \frac{\partial f}{\partial x^j}(x) - \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial F^i}{\partial x^j}(x) = 0, j = 1, \ldots, n \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_i}(x, \lambda) = -F^i(x) = 0, i = 1, \ldots, m \end{cases}$$

Таким образом, при отыскании экстремума функции можно написать с неопределенными множителями функцию Лагранжа и искать уже ее критические точки. Если есть возможность из системы x_0 не находя λ, то с точки зрения исходной задачи именно это и следует делать.

Как видно из соотношения, множители $\lambda_i(i = [1 : m]$ определяются однозначно, если только векторы $gradF^i(x_0), i = [1 : m]$ линейно независимы. Независимость векторов равносильна тоу, что ранг равне m, что означает, что все уравнения этой системы существенны (ни одно не является следствием остальных).

Теорема 7.11. *Достаточный признак условного экстремума*

Пусть есть функция Лагранжа, параметры $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ *выбраны в соответствии с необходимым признаком условного экстремума. Для того, чтобы при этом точка* x_0 *была точкой экстремума функции достаточно, чтобы квадратичная форма:*

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^i \partial x^j}(x_0)\xi^i\xi^j$$

была знакоопределенной для векторов.

8 Функциональные последовательности и ряды

8.1 Определение и признаки равноменой сходимости

В этой главе рассматриваются функциональные последовательности, то есть последовательности $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, членами которых являются функции. Мы будем предполагать, что все члены последовательности определены на одном и том же множестве X. Запись $f_n : X \to R(C)$ означает, что задана функциональная последовательность.

Определение 8.1. Поточечная сходимость

Пусть X - множество и на нем существует функциональная последовательность. Говорят, что последовательность *поточечно сходится* к функции f на множестве X, если для любого $x \in X$ числовая последовательность $\{f_n(x)\}$сходится $f(x)$:

$$\forall x \in X : f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$$

В силу определения предела последовательности поточечная сходимость означает, что для любого x найдется такое малое число, что начиная с некоторого номера: $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

Для сохранения непрерывности требуется более сильное условие, чем поточечная сходимость.

Определение 8.2. Равномерная сходимость. Пусть X - множество, $f_n, f : X \to R(C)$. Говорят, что последовательность равномерно сходится к функции f на множестве X и пишут:

$$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\longrightarrow} f(x)$$

если для любого маленького числа существует номер больший k, что для любого $x \in X$: $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

Замечание: из сказанного ясно, что если последовательность $\{f_n\}$ сходится к f равномерно, то сходится и поточечно. Обратное неверно.

Замечание: если $\{\alpha_n\}$ - сходящаяся числовая последовательность, $\alpha_n \to \alpha$, то последовательность постоянных функций $f_n \equiv \alpha_n$ равномерно сходится на любом множестве к постоянной же функции $f \equiv \alpha$.

Определение 8.3. Функциональный ряд.

Пусть $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ - функционалная последовательность, f_k. Символ $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ называется функциональным рядом. Функции:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f_k : X \to R(C)$$

называются частными или частичными сумма функционального ряда. При каждом $x \in X$ функциональный ряд порождает числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$. Множество:

$$E = \left\{ x \in X : \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \text{ сходится} \right\}$$

называют множеством сходимости функционального ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$.

Функция $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ называется суммой функционального ряда и обозначается тем же символом, что и сам ряд: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$.

Говорят, что функциональный ряд равномерно (поточечно) сходится на множестве X к сумме S, если последовательность его частных сумм $\{S_n\}$ равномерно (поточечно) сходится на X к S.

Определение 8.4. функция $f(z)$ называется суммой функционального ряда в области G, если для любого $z_0 \in G$ числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(z_0)$ сходится к $f(z_0)$. Тогда $f(z) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ - поточечная сходимость.

$S_n(z) = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(z)$ - n-ая частичная сумма

$r_n(z) = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} f_k(z) = f(z) - S_n(z)$ - n-ый остаток

Таким образом ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ сходится к $f(z)$ тогда и только тогда, когда:

$$\forall z \in G, \forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\xi, z) : \forall n > N : |r_n(z)| < \varepsilon$$

Если $N = N(\varepsilon)$ не зависит от $z \in G$, то есть N можно выбрать по ε одни и тем же сразу для всех $z \in G$, то сходимость называется равномерной, т.е $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ ряд сходится равномерно к $f(z) \in G$.

Определение 8.5. Равномерная норма.

Пусть X - множество, $f : X \to R(C)$. Величина:

$$||f|| = \sup_{x \in X} |f(x)|$$

называется *равномерной* или *чебышёвской* нормой функции f.

Чебышёвская норма обладает тремя свойствами

1. Положительная определенность: $||f|| > 0$
2. Положительная однородность: $||\lambda f|| = |\lambda|||f||$
3. Неравенство треугольника:

$$||f + g|| \leq ||f|| + ||g||$$

Если последовательности функциональные, то $||fg|| \leq ||f||||g||$

Следующуу замечание сводит исследование равномерной сходимости функциональной последовательности к проверке сходимости числовой последовательности. Равномерная сходимость f_n к f гарантирует ограниченность разности $f_n - f$, начиная с некоторого номера.

Замечание 8.1. Пусть $f_n, f : X \to R(C)$. Тогда:

$$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\rightarrow} f(x) \Leftrightarrow ||f_n - f||_X \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Замечание указывает следующий способ исследования равномерной сходимости. Пусть дана последовательность функций. Сначала слежует найти ее поточечный предел f. Затем составить разность $f_n - f$ и найти или оценить величины $||f_n - f||$. Для функций однойо или нескольких переменных вэто обычно делается средствами дифференциального исчисления. Например, сотается выяснить, стермится ли последовательность $\{\alpha_n\}$ к нулю.

При переходе к подмножеству супремум не увеличивается, так что если последовательность равномерно сходится, то и последовательность сходится к подпоследовательности множества.

Свойства

1. Равномерная сходимость линейна.

2. Если функциональная последовательность равномерно сходится к f, а функция g ограничена на X, то $f_n g$ равномерно сходится к $fg(X)$

Теорема 8.1. *Критерий Больцано-Коши равномерной сходимости функ-*

циональных последовательностей.

Пусть X - множество, $f_n : X \to R(C)$. Тогда равномерная сходимость последовательности f_n на X равносильна условию, что для любого $\varepsilon > 0$ существует номер, для любых n, m и для любого x из множества X выполняется неравенство:

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

Свойство называют равномерной сходимостью в себе.

Теорема 8.2. *Критерий Больцано-Коши равномерной сходимости функциональных рядов.*

Пусть X - множество, задана функциональная последовательность. Тогда равномерная сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ на X равносильна условию:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n \in N, \forall n > N, \forall p \in N, \forall x \in X : \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x)\right| < \varepsilon$$

Если ряд функциональной последовательности сходится равномерно на X, то f_n равномерно сходится к нулю.

Определение 8.6. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости рядов.

Пусть X - множество, $f_k : X \to R(C)$

$$\sum_{k=1}^{\infty} ||f_k|| < +\infty$$

Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ сходится равномерно на X.

Следствие (**Признак Вейерштрасса равномерной сходимости рядов**)

если члены функционального ряда мажорируются членами сходящегося числового ряда, то функциональный ряд равномерно сходится, то есть для всех $k \in N, x \in X : |f_k(x)| \leq a_k$ и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится. Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ сходится равномерно на X.

Пример: Ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^2}$ сходятся по признаку Вейерштрасса, так как для всех $x \in R$

$$\frac{\sin kx}{k^2} \leq \frac{1}{k^2}$$

, а ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ сходится.

Замечание: в условиях признака Вейерштрасса ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ сходится на X не только равномерно, но и абсолютно. Более того, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |f_k|$ сходится равномерно на X, так как удовлетворяет условиям признака. Если $\sum\limits_{k=1}^{\infty} ||f_k|| < +\infty$, то говорят, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}$ сходится мажорированно.

Теорема 8.3. *Пусть функциональная последовательность непрерывна на G и ряд $\sum f_k(z)$ равномерно сходится в G к $f(z)$. Тогда функция $f(z)$ непрерывна в $C(G)$.*

Опредение равномерной сходимости последовательностей и рядов переносятся на отображение со значениями в R^m. При этом величину $f_n(x) - f(x)|$ надо заменить $||f_n(x) - f(x)||_m$, где $||\cdot||_m$ - евклидова норма в R^m. Аналогом чебышевской нормы будет величина:

$$||f|| = \sup_{x \in X} ||f(x)||_m$$

Определение 8.7. Равномерная ограниченность

Последовательность функция g_n функциональная последовательность называется равномерно ограниченной на X, если последовательность норм g_n ограничена:

$$\exists M \in [0, +\infty), \forall n \in N, \forall x \in X : |f_n(x)| \leq M$$

Теорема 8.4. *Признаки Дирихле и Абеля равноменой сходимости рядов.*

Пусть X - множество, функцональный последовательности:

1. последовательность $F = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k$ - равномерно ограничена на X

2. при любом $x \in X$ последовательность $g_k(x)$ монотонна и равномерно сходится к нулю

то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k g_k$ равномерно сходится на X.

Теорема 8.5. *Признак Абеля*

Если

1. ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ *равномерно сходится на* X

2. при любом $x \in X$ *последовательность* $g_k(x)$ *монотонна и* g_k *равномерно ограничена на* X, *то ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k g_k$ *равномерно сходится на* X.

Теорема 8.6. *Следствие 1. Признак Лейбница равномерной сходимости рядов.*

Пусть X *- множество,* $g_k : X \to R$, *при любом* $x \in X$ *последовательность* $g_k(x)$ *монотонна,* g_n *равномерно сходится к нулю. Тогда ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} g_k$ *равномерно сходится на* X.

8.2 Свойства равномерно сходящихся рядов

Теорема 8.7. *Перестановка пределов.*

Пусть $D \subset R^M$, x_0 *- предельная точка* D, *задана функциональная последовательность и выполнены следующие условия:*

1. f_n *равномерно сходится* $f(D)$

2. для любого $n \in N$ *существует* $\lim\limits_{x \to x_0} f_n(x) = A_n \in R(C)$

Тогда пределы $\lim\limits_{n \to \infty} A_n$ *и* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ *существуют, конечны и совпадают:*

$$\lim_{x \to x_0} \lim_{n \to \infty} f_n(x) = \lim_{n \to \infty} \lim_{x \to x_0} f_n(x)$$

Теорема 8.8. *Почленный переход к пределу*

Пусть $D \subset R^m$,x_0 *- предельная точка* D, *задана функциональная последовательность* f_k *и выполнены следующие условия:*

1. ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ *равномерно сходится на* D *к сумме* S

2. для любого $k \in N$ *существует* $\lim\limits_{x \to x_0} f_k(x) = a_k \in R(C)$

Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится к некоторой сумме* A, *а предел* $\lim\limits_{x \to x_0} S(x)$ *существует и равен* A, *то есть:*

$$\lim_{x \to x_0} \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{x \to x_0} f_k(x)$$

Следствие. Непрерывность предельной функции в точке (суммы ряда в точке)

Пусть $D \subset R^m, x_0 \in D$, задана функциональная последовательность и выполнены следующие условия:

1. f_n равномерно сходится к $f(D)$ (ряд равномерно сходится на D к сумме S)

2. все функции f_n непрерывны в точке x_0 (все функции f_k непрерывны в точке x_0)

Тогда функция f непрерывна в точке x_0 (тогда функция S непрерывна в точке x_0)

Следствие (Теореме Стокса-Зейделя) Сумма авномерно сходящегося ряда непрерывных функций непрерывна

В условиях и заключениях следствий непрерывность можно одновременно заменить на равномерную непрерывность

Теорема 8.9. *У.Дини для последовательностей*

Пусть для любого $x \in K$ последовательность $\{f_n(x)\}$ возрастает. Тогда f_n равномерно сходится к $f(K)$

Теорема 8.10. *У.Дини для рядов*

Пусть ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}$ с непрерывными неотрицательными на K членами сходится к непрерывной на K сумме. Тогда ряд равномерно сходится на K.

Теорема 8.11. *Предельный переход под знаком интеграла.*

Пусть функциональная последовательность непрерывна на $[a, b]$ и равномерно сходится к f на $[a, b]$. Тогда $\int_a^b f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^b f$, то есть:

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n$$

Теорема 8.12. *Почленное интегрирование равномерно сходящихся рядов.*

Пусть функциональная последовательность непрерывна на $[a, b]$, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ равномерно сходится на $[a, b]$. Тогда:

$$\int_a^b \sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)dz = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b f_k(z)dz$$

Равномерная сходимость существенна, а так же это распростра-

няется на криволинейный интегралы (кривая - кусочно гладкая)

Иными словами, равномено сходящийся ряд непрерывных функция можно интегрировать почленно.

Теорема 8.13. *Предельный переход под знаком производной.*

Пусть E - ограниченный промежуток, $f_n, \varphi : E \to R$, функция f_n дифференцируемы на E, $f_n' \overset{\rightarrow}{\longrightarrow} \varphi$ на E и существует такое c, что последовательность $f_n(c)$ сходится. Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Последовательность $\{f_n\}$ равномерно сходится на E к некоторой функции f.

2. f диффеенцируема на E.

3. $f' = \varphi$

$$(\lim_{n\to\infty} f_n)' = \lim_{n\to\infty} f_n'$$

Теорема 8.14. *Почленное дифференцирование рядов*

Пусть E - ограниченный промежуток, функции f_k дифференцируемы на E, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k'$ равномерно сходится на E и существует такое $c \in E$, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(c)$ сходится. Тогда справедливы следующие утверждения:

1. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ равномерно сходится на E

2. Его сумма дифференцируема на E

3. $(\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k)' = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k'$

Теорема 8.15. *Теореме Вейерштрасса о равномерно сходящихся рядах из аналитических функций*

Пусть $f_k(z)$ - аналитическая функция в G, $f(z)$ - некая функция, определенная в G. Пусть существует замкнутое подмножества $D \subset G$, где ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ равномерн сходится и $f(z)$ на D:

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$$

Тогда:

1. $f(z)$ -аналитична в G

2. ряд можно полченно дифференцировать

$$f^{(m)}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k^{(m)}(z)$$

3. Рад $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k^{(m)}(z)$ *равномерно сходится на любом замкнутом подмножестве* $D \in G$

8.3 Степенные ряды

Степенной ряд - это частный случай функционального ряда.

Определение 8.8. Степенной ряд. Ряд вида

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k$$

где $c_k, z, a \in C$,называются степенным рядом. Числа c_k называются коэффициентами, a - центром. Если $c_k, z, a \in R$, то ряд называется вещественным степенным рядом.

Теорема 8.16. *Теорема Абеля*

Пусть степенной ряд сходится в некоторой точке z_1*. Тогда он сходится во всех точках* z*, для которых выполняется неравенство:* $|z-a| < |z_1 - a|$*. Более того, в* $\forall$ *круге* $|z-a| \leq \rho$*, где* $\rho < |z_1 - z_0|$*, ряд сходится равномерно*

Из теореме Абеля следует, что область сходимости степенного ряда - это круг

Определение 8.9. Радиус сходимости

Величина $R \in [0, +\infty]$ называется радиусом сходимости ряда, если

1. Для всех z, таких что $|z-a| < R$, ряд сходится

2. Для всех z, таких что $|z-a| > R$, ряд расходится

Определение 8.10. Формула Коши-Адамара

Всякий степенной ряд имеет радиус сходимости, и он выражается формулой:

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}}$$

Причем мы утверждаем, что $\frac{1}{0} = \infty, \frac{1}{\infty} = 0$

По признаку Коши при $|z-a|<R$ ряд сходится абсолютно.

$V_a(R)$ обозначается открытый круг радиуса R с центром в точке a:

$$V_a(R) = \{z \in C : |z-a| < R\}$$

Определение 8.11. Круг сходимости.

Пусть дан степенной ряд, R -его радиус сходимости. Множество $V_a(R)$ называется кругом сходимости ряда

Часто радиус сходимости можно найти не только по формуле Коши-Адамара, но и с помощью признака Даламбера.

Именно:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$$

если предел в правой части существует.

Теорема 8.17. *Равномерная сходимость степенных рядов. Пусть дан степенной ряд и его радиус сходимости, тогда для любого $r \in (0,R)$ ряд равномерно сходится в круге $V_a(r)$.*

Следствие: сумма степенного ряда непрерывна в круге сходимости.

Следствие. Интегрирование степенных рядов.

Пусть дан вещественный степенной ряд, $R \to (0,+\infty)$ - его радиус сходимости. Тогда ряд можно интегрировать почленно по любому отрезку, лежащему в интервале сходимсоит: если $[A,B] \subset (a-R, a+R)$, то:

$$\int_A^B \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k dx = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{(B-A)^{k+1}-(A-a)^{k+1}}{k+1}$$

Определение 8.12. Комплексная дифференцируемость

Если существует предел $\lim\limits_{z\to x_0} \frac{f(z)-f(x_0)}{z-x_0}$, то он называется произвводной функции f в точке x_0 и обозначается $f'(x_0)$.

На функции комплексной переменной переносятся вместе с доказательствами правила диффференцированияю

Определение 8.13. Дифференцирование степенных рядов.

Пусть $R \in (0,+\infty]$ - радиус сходимости ряда.

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^k$$

Тогда f бесконечно дифференцируема в круге $V_a(R)$ и ряд можно дифференцировать почленно любое число раз.

$$f^{(m)}(z) = \sum_{k=m}^{\infty} k(k-1)\dots(k-m+1)c_k(z-a)^{k-m}, |z-a| < R$$

Внутри круга сходимости $|z-a| < R$ степенной ряд сходится к аналитической функции $f(z)$, причем:

Теорема 8.18. *Единственность разложения функции в степенной ряд.*

Пусть $R \in (0, +\infty]$*:*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^k, |z-a| < R$$

Тогда коэффициенты c_k *определяются единственным образом по формуле* $c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$

Определение 8.14. Ряд Тэйлора.

Пусть $f(z)$ -аналитическая функция в круге $|z-x_0| < R$ (пусть f имеет в точке x_0 производные всех порядков.). Тогда f может быть однозначно представлена в этом круге степенным рядом, называемым рядом Тэйлора:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^k$$

Числа $c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$ называются коэффициентами Тейлора, а ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(z-a)^k$ - рядом Тейлора функции f с центром в точке a.

Ряд Тейлора с центром в нуле называется **рядом Маклорена**

Если $x = a$ он сходится к $f(a)$. При $x \neq a$ возможны три случая:

1. Ряд сходится к $f(x)$
2. Ряд расходится
3. Ряд сходится, но не к $f(x)$

Частная суммая ряда Тейлора:

$$T_{\alpha,n}f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

есть многочлен Тейлора. По определению суммы ряда сходимость ряда Тейлора к $f(x)$ означает, что $T_{\alpha,n}f(x) \to f(x)$.

Определение 8.15. Степенной ряд $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(z-z_0)^k$, где $c_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$ называется рядом Тэйлора для $f(z)$ в точке (z_0).

Любая аналитическая функция совпадает со своим рядом Тэйлора внутри круга анатиличности.

Следствие:

Если f аналитична в замкнутой и ограниченной области G и не равна нулю, то f имеет лишь конечное число нулей.

Аналитическая функция может иметь бесконечное число нулей либо в открытой, либо в неограниченной области.

Любая аналтитическая функция может иметь не более чем счетное число нулей.

Аналитиечская функция единственна, именно поэтому разложение ряда Тэйлора единственно.

Теорема 8.19. *Признак разложимости функции в ряд.*

Если выполняется неравенство $|f^{(n)}(t)| \leq M$. *Тогда:*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = f(x)$$

Определение 8.16. Пусть $-\infty \leq A < B \leq +\infty, f : (A, B) \to R, a \in (A, B)$. Функция f называется аналитической или вещественно-аналитической в точке a, если она раскладывается в степенной ряд в некоторой окрестности a, то есть существуют такие числа $r > 0$ и $c_k \in R$.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k, \quad x \in (a-r, a+r)$$

Функция $f : (A, B) \to R$ называется аналитической или вещественно-аналитической на промежутке (A, B), если она аналитична в каждой точке (A, B).

8.4 Разложение элементарных функций

Если при $|z| < R$ верны разложения:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k, \quad g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k z^k, \lambda \in R(C)$$

, то также при $|z| < R$:

$$(f+g)(z) = \sum_{k=0}^{\infty}(c_k + d_k)z^k, \quad \lambda f(z) = \sum_{k=0}^{\infty}(\lambda c_k)z^k$$

$$(fg)(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{k} c_j d_{k-j}\right) z^k$$

Определение 8.17. При $z \in C$ положим:

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}$$

$$\sin z = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}z^{2k+1}$$

$$\cos z = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}z^{2k}$$

Многие свойства этих функций вещественной переменной переносятся на комплексный случай.

Функции $e, \sin, \cos$ бесконечно дифференцируемы на C и

$$(e^z)' = e^z, (\sin z)' = \cos z, \quad (\cos z)' = -\sin z$$

Сумма степенного ряда бесконечно дифференцируема в круге сходимости. Производные находятся почленным дифференцированием рядов.

$$(e^z)' = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{kz^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!} = e^z$$

Произведение по Коши: $c_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$ где

$$c_k = \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}$$

называется произведением по Коши рядов $\sum\limits_{k=1}^{\infty}$ и $\sum\limits_{j=1}^{\infty} b_j$

Теорема 8.20. *Основное свойство степени*

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$$

Доказательство. Записывая произведение рядов по Коши, получаем:

$$e^{z_1}e^{z_2} = \left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z_1^k}{k!}\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{z_2^j}{j!}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k}\frac{z_1^j}{j!}\frac{z_2^{k-j}}{(k-j)!} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}C_k^j z_1^j z_2^{k-j} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z_1+z_2)^k}{k!} = e^{z_1+z_2}$$

Мы воспользуемся формулой Бинома Ньютона. □

Теорема 8.21. *Синус - нечетная функция, а косинус - четная.*

Теорема 8.22. *Формулы Эйлера*

$$e^{iz} = \cos z + i\sin z$$

$$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$$

$$\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$$

Укажем частные случаи формулы Эйлера:

$$e^{i\pi} = -1$$

Напомним, что комплексное число z может быть записано в алгебраической форме:

$$z = x+iy, z = Rez, y = Imz$$

и в тригонометрической форме:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), r = |z|, \varphi \in Argz$$

По формуле Эйлера последнее выржаение можно переписать в виде:

$$z = re^{i\varphi}, \quad r = |z|, \varphi \in Argz$$

Такая форма записи комплексного числа называеся показательной.

Определение 8.18. Функция ch и sh, определяемые формулами:

$$chz = \frac{e^z+e^{-z}}{2}, \quad shz = \frac{e^z-e^{-z}}{2}$$

называется гиперболическим косинусом и гиперболическим синусом.

По формулам Эйлера:

$$chz = \cos iz, \quad \cos z = chiz = ishz = \sin iz, \quad i \sin z = shiz$$

Отсюда получаются разложения гиперболических функций в степенные ряды:

$$chz = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!}, \quad \operatorname{sh} z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

асбсолютно сходящиеся на C. Производные этих функций равны:

$$(shz)' = chz, \quad (chz)' = shz$$

2. Логарифм и арктангенс. Запишем формулу для суммы геометрической прогрессии:

Геометрическая прогрессия

$b_1 = b, b_n = b_{n-1}q$

Числа q называют знаменателем данной геометрической прогрессии $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$

Формула знаменателя геометрической прогрессии:

$$q = \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

Формула суммы n-первых членов геометрической прогрессии

$$S_n = \frac{b_1(1 - q^n)}{1 - q}$$

$$S_n = \frac{b_1 - b_n \cdot q}{1 - q}, q \neq 1$$

Формула суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

$$S = \frac{b_1}{1 - q}$$

Запишем формулу для суммы геометрической прогрессии:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k, \quad |x| < 1$$

Заменив в ней x на $-t$ мы получим:

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^k, \quad |t| < 1$$

Возьмем теперь $x \in (-1, 1)$ и проинтегрируем получившееся равенство от 0 до x. Напомним, что степенной ряд можно интегрировать почленно по любому отрезку, лежащему в интервале сходимости. Поэтому:

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k, -1 < x \leq 1$$

$$\ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}, -1 \leq x < 1$$

Теорема 8.23. *Формула Стирлинга. Если $n \in N$, то существует такое $\theta \in (0, 1)$, что:*

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\theta}{12n}}$$

Теорема 8.24. *Биномиальный ряд Ньютона. При $\alpha \in R, x \in (-1, 1)$ справедливо разложение:*

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} C_\alpha^k x^k$$

Пример 1. При $\alpha = -1$ после упрощения биномиальных коэффициентов снова получается формула суммы геометрической прогрессии:

$$\frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k, \quad -1 < x < 1$$

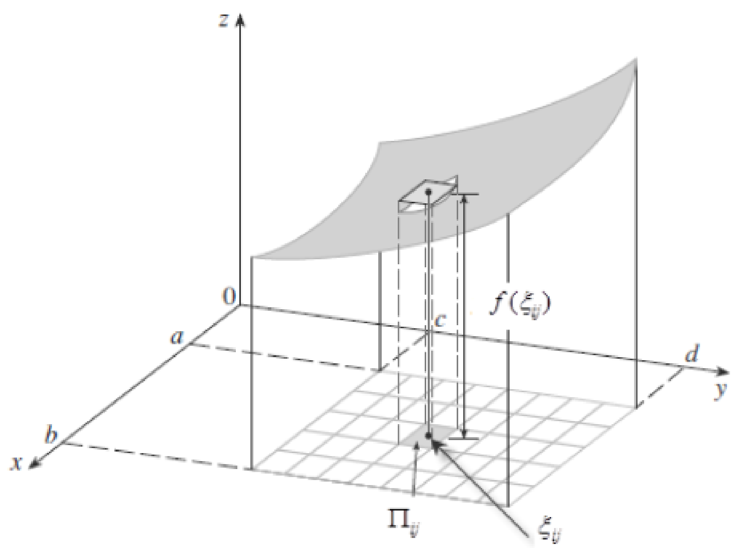
$$\frac{1}{(1+x)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k C_{n+k-1}^k x^k, \quad -1 < x < 1$$

9 Кратные интегралы

9.1 Двойные интегралы

9.1.1 Введение

а. Что представляет из себя двойной интеграл . Если обычный определенный интеграл представлял из себя в геометрическом смысле площадь фигуры под графиком, то двойной интеграл есть объём подграфика неотрицательной функции:



Геометрическая интерпретация двойного интеграла

Для вычисления объёма подграфика разобьем область определения функции f как показано на рисунке. Пусть V - искомый обхем, тогда:

$$V = \sum_{ij} V_{ij}$$

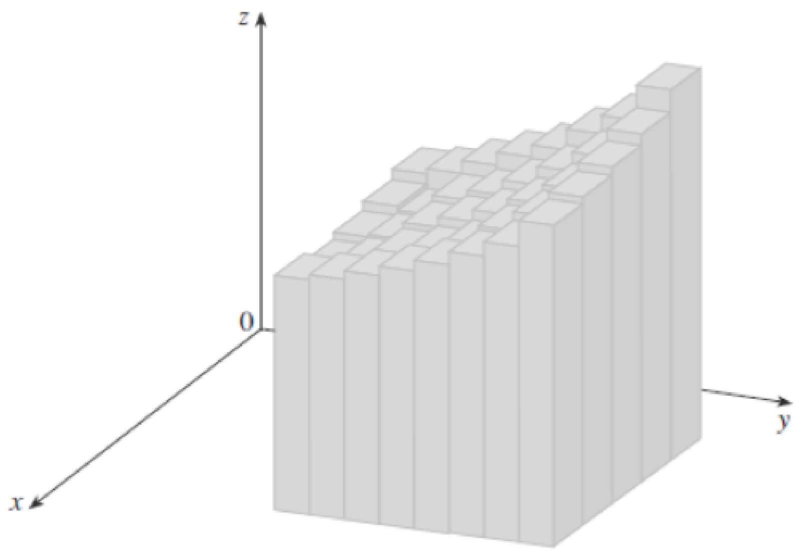
где V_{ij} - объем подграфика ограничения функции f на прямоугольнике Π_{ij}. Так как:

$$V_{ij} \approx f(\xi_{ij})S(\Pi_{ij}) = f(\xi_{ij})\Delta x_i \Delta y_j$$

где Δx_i и Δy_j, соответственно, основание и высота прямоугольника Π_{ij}. Таким образом:

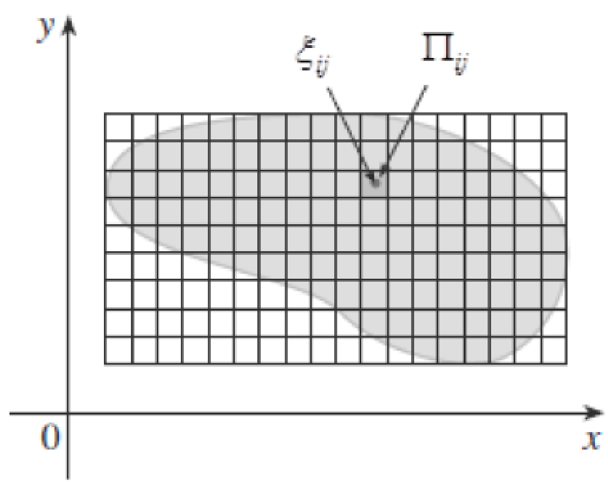
$$V \approx \sum_{ij} f(\xi_{ij})\Delta x_i \Delta y_j$$

Неограниченно измельчая разбиение прямоугольника, мы получаем все более и более точное приближение искомого объема.



Измельчение прямоугольника

б. Масса неоднородной плоской пластины



Масса неоднородной пластины

Для вычисления массы пластины дополним ее мысленно до прямоугольной пластины (добавленные части имют массую нуль). Пусть П - полученная прямоугольна япластина. Масса исходной пластины равна массе полученной пластины П. Далее:

$$m(\Pi) = \sum_{i,j} m(\Pi_{ij}) \approx \sum_{i,j} p(\xi_{i,j}) S(\Pi_{i,j}) = \sum_{i,j} p(\xi_{i,j}) \Delta x_i \Delta y_j$$

где Δx_i и Δy_j, соответсвенно, основание и высота прямоугольника $\Pi_{i,j}$.

Неограниченно измельчая разбиение прямоугольника, мы получаем все более и более точное приближение искомой массы.

9.1.2 Определение интеграла по двумерному промежутку

Рассмотрим двумерный промежуток, то есть прямоугольник со сторонами, параллельными координатным осям:

$$\Pi = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

Будем рассматривать такие разбиения P промежутка Π, которые определяется разбиениями:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

$$c = y_0 < y_1 < \ldots < y_{m-1} < y_m = d$$

отрезков $[a, b]$ и $[c, d]$. Каждый промежуток Π_{ij} разбиения P имеет вид:

$$\Pi_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] = \{(x, y) | x \in [x_{i-1}, x_i], y \in [y_{j-1}, y_j]\}$$

и его площадь равна $(x_i - x_{i-1})(y_i - y_{i-1})$. Пусть $\lambda(\Pi_{ij})$ - наибольшая из длин сторон прямоугольника Π_{ij}, то есть наибольшее из чисел $x_i - x_{i-1}, y_i - y_{i-1}$.

Рангом разбиения P назвывается наибольшее из чисел $\lambda(\Pi_{ij})$. Введем обозначение:

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad \Delta y_j = y_j - y_{j-1}$$

Выберем в каждом из промежутков Π_{ij} по точке ξ_{ij}. Разбиение, в каждом промежутке которого выбрано по точке $\xi_{ij} \in \Pi_{ij}$, называется *разбиением с отмеченными точками* или *оснащенным разбиением.* Набор точек $\{\xi_{ij}\}$ будем обозначать одной буквой ξ, а соответствующее разбиение с отмеченными точками - символом (P, ξ)

Интегральные суммы. Определение и простейший свойства

Определение 9.1. Пусть функция f задана на двумерном промежутке Π и пусть (P, ξ) - разбиение промежутка Π с отмеченными точками. Интегральной суммой функции f для данного разбиения (P, ξ) называется число:

$$S(f,(P,\xi)) = \sum_{1\le i\le n, 1\le j\le m} f(\xi_{ij})\Delta x_i \Delta y_j$$

Перечислсим простейшие свойства интегральных сумм:

1. Если все значения функции неотрицательны, то интегральная сумма неотрицательна для любого разбиения с отмеченными точками и положительна, если значения функции положительны.

2. Интегральные суммы линейны для любых функци f и g

3. Если $f(x,y) > g(x,y)$ для всех $(x,y) \in \Pi$, то интегральные суммы f не меньше интегральных сумм g.

Определение интеграла

Пусть f - функция, заданная на двумерном промежутке Π. Число I называется пределом интегральных сумм (или интегралом) функции f на мпромежутке Π, если для каждой последовательности оснащнных разбиений $(P,\xi)_n$ такой, что $\lambda((P,\xi)_n) \to 0$ при $n \to \infty$, последовательность интегральных сумм стремится к I.

Функция f называется интегрируемой по Риману на Π, если для нее существует интеграл. Интеграл функции f на прямоугольнике Π обозначается:

$$\iint\limits_{\Pi} f(x,y)dxdy$$

Пример 1. Пусть $f(x,y) = c$ - постоянная функция, заданная на прямоугольнике:

$$\Pi = \{(x,y) | a_1 \le x \le b_1, a_2 \le y \le b_2\}$$

Тогда для любого разбиения с отмеченными точками (P,ξ) выполняется равенство:

$$\iint\limits_{\Pi} f(x,y)dxdy = c(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)$$

Это единственный случай, когда интеграл легко вычисляетяс непосредственно из определения.

Таким образом $f(x,y) = c$ интегрируема и ее интеграл равен произведению ее значения c на площадь области распределения.

Какие же функции двух переменных, заданные на прямоугольнике интегрируемы? Для того, чтобы ответить на поставленный вопрос, нужна некоторая подготовительная работа.

Множества меры нуль на плоскости Пусть $A \in R^2$. Множество A называется *множеством меры нуль*, если для любого $\varepsilon > 0$ можно найти последовательность прямоугольников со следующими свойствами:

1) эти прямоугольники покрывают множество A

2) сумма площадей прямоугольников из этой последовательности меньше ε

Примеры:

1) Любое конечное множество точек на плоскости имеет меру нуль

2) Любое подмножество множества меры нуль имеет меру нуль

3) Объединение конечного набора множеств меры нуль имеет меру нуль.

4) Если множество A имеет меру нуль, то и всякое множество, получающееся из него перемещением, также имеет меру нуль

Пусть $A \in R^2$. Мы будем говорить, что некоторое свойство выполняется почти всюду на A, если множество точек, где этой свойство не выполняется имеет меру нуль. Мы приведем без доказательства следующий, принадлежаший Лебегу, критерий интегрируемости.

Теорема 9.1. *Критерий интегрируемости Лебега*

Пусть $f : \Pi \to R$ ограниченная функция. Функция f интегрируема в том и только в том случае, если f почти всюду на A непрерывна.

Свойства интеграла по прямоугольнику

Теорема 9.2. *Интеграл от неотрицательной функции неотрицателен*

Теорема 9.3. *Интегрируемая функция ограничена.*

Теорема 9.4. *Линейность интеграла*

Пусть функции f и g заданые на промежутке Π и интегрируемы. Тогда для любых α и β функция $\alpha f + \beta g$ интегрируема и выполняется свойство линейности.

Теорема 9.5. *Монотонность интеграла. Пусть функции f и g заданы на промежутке Π и интегрируемы. Если в любой точке $(x, y) \in \Pi$ справедливо неравенство $f(x, y) \geq g(x, y)$, то:*

$$\iint\limits_{\Pi} f(x,y)dxdy \geq \iint\limits_{\Pi} g(x,y)dxdy$$

Теорема 9.6. *Пусть функция f задана на промежутке* Π *и интегрируема. Тогда функция* $|f|$ *интегрируема и:*

$$\left|\iint\limits_{\Pi} f(x,y)dxdy\right| \leq \iint\limits_{\Pi} |f(x,y)|dxdy$$

Теорема 9.7. *Пусть функция f задана на промежутке* Π *и интегрируема. Если f почти всюду равна нулю, то:*

$$\iint\limits_{\Pi} f(x,y)dxdy = 0$$

Теорема 9.8. *Пусть функции f и g заданы на промежутке* Π *и интегрируемы. Если $f = g$ почти всюду, то:*

$$\iint\limits_{\Pi} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{\Pi} g(x,y)dxdy$$

Теорема 9.9. *Пусть функции f задана на промежутке* Π *и интегрируема. Пусть промежуток* Π *разбит на промежутки. Тогда функция f интегрируема* Π *в том и только том случае, если f интегрируема на каждом из промежутков* $\Pi_1, \ldots, \Pi_n$. *Кроме того, если f интегрируема на* Π, *то:*

$$\iint\limits_{\Pi} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{\Pi_1} f(x,y)dxdy + \ldots + \iint\limits_{\Pi_n} f(x,y)dxdy$$

9.1.3 Интеграл по допустимому множеству

Допустимые множества В предыдущем разделе мы определили интеграл функции по произвольному двумерному про- межутку. Наша цель — определить интеграл по более сложному множеству. Это удастся сде- лать, если наложить на множество некоторые ограничения. Пусть $A \in R^2$. Будем говорить, что множество A допустимо, если оно ограничено и его граница ∂A имеет меру нуль.

Можно доказать, что если $A, B \subset R^2$, то

1. ∂A - замкнутое подмножество R^2
2. $\partial(A \cap B) \subset \partial A \cap \partial B$
3. $\partial(A \cup B) \subset \partial A \cup \partial B$

4. $\partial(A \backslash B) \subset \partial A \cup \partial B$

Если $A, B \subset R^2$ - допустимые множества, то и объединение, пересечение и разность этих множеств - тоже допустимые множества.

Определение интеграла по допустимому множеству

Определение 9.2. Пусть f - функция, заданная на допустимом множестве $D \subset R^2$ и П- произвольный двумерный промежуток, для которого $D \subset$ П. Пусть fs - функция, заданная на промежутке П, равная f на множестве D и нулю в остальных точках промежутка П. Если функция fs интегрируема, то функция f называется интегрируемой, а число:

$$\iint_{\Pi} fs(x,y)dxdy$$

называется интегралом функции f по множеству D и обозначается:

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy$$

Свойства интегралов по промежутку схожи.

Теорема 9.10. *Интеграл от неотрицательной функции неотрицателен*

Теорема 9.11. *Интегрируемая функция ограничена.*

Теорема 9.12. *Пусть функция f задана на множестве D и интегрируема. Если f почти всюду равна нулю, то:*

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = 0$$

Теорема 9.13. *Пусть функции f и g заданы на множестве D и интегрируемы. Если $f = g$ почти всюду, то:*

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D} g(x,y)dxdy$$

Теорема 9.14. *Линейность интеграла*

Пусть функции f и g заданые на множестве D и интегрируемы. Тогда для любых α и β функция $\alpha f + \beta g$ интегрируема и выполняется свойство линейности.

Теорема 9.15. *Монотонность интеграла. Пусть функции f и g заданы на множестве D и интегрируемы. Если в любой точке $(x, y) \in \Pi$ справедливо неравенство $f(x, y) \geq g(x, y)$, то:*

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy \geq \iint\limits_D g(x,y)dxdy$$

Теорема 9.16. *Пусть функция f задана на множестве D и интегрируема. Тогда функция $|f|$ интегрируема и:*

$$\left|\iint\limits_D f(x,y)dxdy\right| \leq \iint\limits_D |f(x,y)|dxdy$$

Теорема 9.17. *Пусть D_1 и D_2 допустимые монжества и f-функция, заданная на $D_1 \cup D_2$. Тогда*

а. функция f интегрируема на $D_1 \cup D_2$ в том и только том случае, если она интегрируема на каждом из множеств D_1, D_2

б. если площадь $D_1 \cap D_2$ равна нулю, то:

$$\iint\limits_{D_1 \cup D_2} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy$$

Теорема 9.18. *Пусть функция f задана на допустимом множестве D и интегрируема. Если для некоторых чисел m и M справделиво неравенство $m \leq f \leq M$, то:*

$$mS(d) \leq \iint\limits_D f(x,y)dxdy \leq MS(D)$$

где $S(D)$ - площадь множества D.

Сведение двойного интеграла к повторному

Теорема 9.19. *Теорема Фубини. Пусть $[a, b], [c, d]$ - промежутки числовой оси и:*

$$\Pi = \{(x, y) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

промежуток на плоскости. Пусть функция f задана на промежутке Π и интегрируема. Пусть для каждого $[a, b]$ существует интеграл

$\int\limits_c^d f(x,y)dy$. *Таким образом, на промежутке* $[a,b]$ *задан функция:*

$$F(x) = \int\limits_c^d f(x,y)dy$$

Тогда F *интегрируема на промежутке* $[a,b]$ *и:*

$$\iint\limits_{\Pi} f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b F(x)dx$$

Аналогично и для $y \in [c,d]$.

Теорема 9.20. *Пусть* $f \in R([a,b])$ *и* $g \in R([c,d])$. *Тогда* $h(x,y) = f(x)g(y) \in R(\Pi)$ *и:*

$$\iint\limits_{\Pi} h(x,y)dxdy = \int\limits_a^b f(x)dx \int\limits_c^d g(y)dy$$

Следствие 3.2

Пусть D - допустимое множество точек плоскости. Пусть проекцией этого множества на ось абсцисс является отрекзок $[a,b]$ и пусть прямая, перпендикулярная оси абсцисс и проходящая через точку $x \in [a,b]$ пересекает множество D по некоторому отрезку с концами $(x, \varphi_1(x))$ и $(x, \varphi_2(x))$. Если $f \in R(D)$ и для каждого $x \in [a,b]$ функция $G(y) = f(x,y)$ интегрируема, то:

$$\int\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_1(x)} f(x,y)dy$$

9.1.4 Замена переменных в интеграле

Формула замены переменной в интеграле для функции одной переменной имеет вид:

$$\int\limits_a^b f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)dx = \int\limits_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)dt$$

Для функций двух переменных формула замены переменных имеет вид:

$$\iint\limits_{D_{x,y}} f(\varphi(x,y),\psi(x,y))\cdot|\det J|dxdy = \iint\limits_{D_{t,u}} f(t,u)dtdu$$

где J - определитель матрицы:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x} & \frac{\partial\varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial\psi}{\partial x} & \frac{\partial\psi}{\partial y} \end{pmatrix}$$

назвыаемый якобианом замены переменных $t=\varphi(x,y)$ и $u=\psi(x,y)$. Множестве предполагаются допустимыми, функция f предполагается интегрируемой на множестве $D_{t,u}$. Функция $f(\varphi(x,y),\psi(x,y))$ предполагается инетгриуемой на множестве $D_{x,y}$. Предолагается, что функции φ и ψ имеют непрерывные частные производные.

Следствие 4.1(переход к полярным координатам). Пусть:

$$\Pi = \{(r,\varphi)|r_1\le r\le r_2, 0\le\varphi_1\le\varphi\le\varphi_2\le 2\pi\}$$

$$D = \{(x,y)|r_1^2\le x^2+y^2\le r_2^2\}$$

Пусть $f\in R(D)$. Декартовы координаты x,y выражаются через полярные по формулам:

$$x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$$

Якобиан полярной замены:

$$\det J(r,\varphi) = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial\varphi} \\ \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial\varphi} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix} = r$$

Тогда:

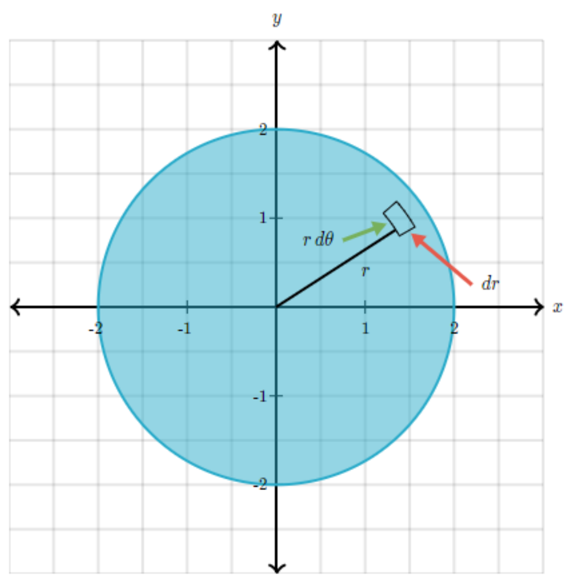
$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{R_1}^{R_2} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdr$$

Давайте разберемся в полученном результате. Двойно интеграл разрезает область, которую мы интегрируем на крошечные кусочки и представляет область из этих кусочков.

Так как мы находимся в полярных координатах, нам будет легче думать о крошечных кусочках, если их края представляют значение r, либо постоянное φ.

Сосредоточимся на более маленьком кусочке. Даже если он имеет криволинейную форму, если мы будем разрезать все тоньше, то мы сможем рассматривать его как прямоугольник. Длина одной стороны этого прямоугольника - dr - крошечное изменение r-координаты.

Какова длина другой стороны прямоугольника. Это не $d\varphi$, крошечное изменение угла, потому что радианы не являются единицей длины. Чтобы превратить радианы в единицы длины дуги, мы должны умножить его на r.



Переход к полярным координатам

9.2 Несобственные интегралы

Пусть $D \in R^2$ и f - функция, заданная на D. Пусть D_n - произвольная последовательность допустимых множеств таких, что: $D_1 \subset D_2 \subset D_3 \dots$ и $D = \cup_n D_n$. Пусть функция f интегрируема на D_n для каждого n. Пусть предел:

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{D_n} f(x,y)dxdy$$

и его величина не зависит от выбора последовательности D_n. Тогда число:

$$\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{D_n} f(x,y)dxdy$$

называется несобственным интегралом функции f по множеству D.

Теорема 9.21. *Если множество D допустимо и $f\in R(D)$, то несобственный интеграл функции f по множеству D совпадает с обычным интегралом.*

Теорема 9.22. *Пусть $D\subset R^2$ и f - функция, заданная на D. Пусть D_n - произвольная последовательность допустимых монжеств таких, что $D_1\subset D_2\subset D_3\ldots$ и $D=\cup_n D_n$. Пусть $f\in R(D_n)$ для каждого n. Пусть:*

$$\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{D_n} f(x,y)dxdy = A$$

Пусть $f(x)\geq 0$ при всех $x\in D$. Тогда интеграл $\int\limits_D f(x)dx$ сходится и равен A.

Следствие:

Пусть $X\subset R^n, Y\subset R^m, f\in S(X\to[0,+\infty]), g\in S(Y\to[0,+\infty])$, $h=f\circ g$. Тогда:

$$\int\limits_{X\times Y} hd\mu_{n+m} = \int\limits_X fd\mu_n\cdot\int\limits_Y gd\mu_m$$

Вычислим с помощью полярной замены интеграл Эйлера-Пуассона.

$$I=\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$$

Рассмотрим промежуток длины $(0;+\infty)^2$. Тогда можно воспользоваться следствием и написать следующее:

$$I^2=\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}dx\cdot\int\limits_0^{+\infty} e^{-y^2}dy=\iint\limits_{(0,+\infty)^2} e^{-x^2+y^2}dxdy=$$

$$=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int\limits_0^{+\infty} e^{-r^2}rdr=\frac{\pi}{4}$$

Здесь у меня возникали вопросы, почему до $\frac{\pi}{2}$ - потому что у нас ограниченный промежуток первой четвертью от $x \in [0, +\infty)$ и $y \in [0, +\infty)$. Поэтому в полярной угле мы используем $\frac{\pi}{2}$. Также мы используем $+\infty$ по формуле - корень из радиуса.

Теорема 9.23.

$$\iint\limits_{R^2} e^{-x^2-y^2} dxdy = \pi$$

Доказательство. Пусть D_n - круг радиуса n^2 с центром в начале координат. Тогда

$$\int\limits_{D_n} e^{-x^2-y^2} dxdy = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^n e^{-r^2} rdr = \pi(1 - e^{-n^2})$$

При $n \to \infty$ получаем (определение несобственного интеграла), что:

$$\iint\limits_{R^2} e^{-x^2-y^2} dxdy = \pi$$

□

Следствие:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

Доказательство. Пусть D_n - квадрат со стороной $2n$ и центром в начале координат. Тогда

$$\pi = \iint\limits_{R^2} e^{-x^2-y^2} dxdy = \lim_{n \to \infty} \int\limits_{D_n} e^{-x^2-y^2} dxdy$$

В силу следствия:

$$\int\limits_{D_n} e^{-x^2-y^2} dxdy = \left(\int\limits_{-n}^{n} e^{-x^2} dx \right) \cdot \left(\int\limits_{-n}^{n} e^{-y^2} dy \right)$$

Переходя к пределу, получаем:

$$\pi = \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \right)^2$$

откуда вытекает требуемое утверждение. $\square$

Рассмотрим функцию ошибки, которая используется в математической статистики при Номальном Распределении.

Error Function

Определение 9.3. Функцией ошибки называется следующий интеграл:

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^x e^{-t^2} dt$$

Мы знаем, что, интеграл при верхнем пределе интегрирования ∞ равен $\frac{\pi}{2}$, поэтому происходит домножение на $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$, чтобы площадь под графиком была равна единице.

Теперь и понятно, почему функция плотности вероятности нормального распределения правильно определена, ведь:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{2\pi} = 1$$

Что соответствует вероятностному определению

Гамма-функция

Многие важные неэлементарные функции задаются как интегралы, зависящие от параметра. Определим и иселдуем одну такую функцию.

Определение 9.4. Функция

$$\Gamma(p) = \int\limits_0^{\infty} x^{p-1} e^{-x} dx, p > 0$$

называется Γ-функцией (Эйлера).

9.2.1 Путь. Простой путь. Гладкие и кусочно-гладкие пути

Путь - непрерывное отображение $[a, b] \to R$, $t \in [a, b]$, где функции $x_1, \ldots, x_n$ - непрерывные функции на $[a, b]$. $r(a)$ - начало пути, $r(b)$ - конец пути. Путь называется замкнутым, если $r(a) = r(b)$.

Гладкий путь: r-гладкий, если все $x_1, \ldots, x_n$ непрерывные и дифференцируемы и $\forall t \in [a, b]$:

$$r'(t) = (x_1'(t), \ldots, x_n'(t)), r'(t) \neq 0$$

Кусочно гладкий путь:

Если существует $x_i : x_0 = a < x_1 < \ldots x_{k-1} < b = x_k$, то $r|_{[x_{i-1}, x_i]}$ - гладкий путь.

Пусть называется простым, если равенство $r(t_1) = r(t_a)$ возможно только если $t_1 = t_a$, либо $t_1 \neq t_a$.

Гладкая кривая - класс эквивалентных гладких путей.

Кусочно глакдая кривая - функция, определенная и дифференцируемая на некотором из интервало, составляющих область определения.

Масса кривой. Определение криволинейного интеграла первого рода

Пусть AB-гладкая или кусочно-гладкая кривая. $f(x, y)$ - определенная и ограниченння на кривой AB. Разобъем кривую $A = a_0, a_1, \ldots, a_n = B$. Выберем на друге произвольную точку M_i.

Тогда масса дуги a_i, a_{i+1} будет равна:

$$m_i = f(M_i)\Delta a_i$$

где Δa_i - длина дуги a_i, a_{i+1}. Масса всей кривой $AB : m = \sum\limits_{i=0}^{n-1} f(M_i)\Delta a_i$

Пусть λ - наибольшее из длин Δa_i, тогда точной формулой массы кривой будет:

$$m = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(M_i)\Delta a_i$$

Определение 9.5. если интегральная сумма имеет предел, равный I при $\lambda \to 0$, то этот предел называется криволинейным интегралом первого рода от функции $f(x, y)$ по кривой AB.

$$\int\limits_{AB} f(x,y)ds = \int\limits_{BA} f(x,y)ds$$

Свойства криволинейного интеграла 1-ого рода:

1. Интеграл не зависит от ориентации кривой

2. Пусть кривая C_1 начинается в точке A и заканчивается в B. Тогда их объединение будет называться кривая $C_1 \cup C_2$, которая будет проходит от A до B вдоль кривой C_1 и затем от B к D вдоль кривой C_2:

$$\int\limits_{C_1 \cup C_2} F ds = \int\limits_{C_1} F ds + \int\limits_{C_2} F ds$$

3. Если гладкая кривая C задана параметрически соотношением $r = r(t), \alpha \le t \le \beta$ и скалярная F непрерывная на C, то:

$$\int\limits_{C} F(x,y,z)dS = \int\limits_{\alpha}^{\beta} F(x(t), y(t), z(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}dt$$

4. Если C является гладкой кривой в плоскости OXY заданной уравнением $y = f(x), a \le x \le b$, то:

$$\int\limits_{C} F(x,y)ds = \int\limits_{a}^{b} F(x, f(x))\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$$

5. Если C является гладкой кривой в плоскости OXY заданной уравнением $x = f\varphi(x), c \le y \le d$, то:

$$\int\limits_{C} F(x,y)ds = \int\limits_{c}^{d} F(\varphi(y), y)\sqrt{1 + (\varphi'(y))^2}dy$$

6. В полярных координатах интеграл $\int\limits_{F} F(x,y)ds$ выражается формулой:

$$\int\limits_{C} F(x,y)ds = \int\limits_{\alpha}^{\beta} F(r\cos\theta, r\sin\theta)\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}d\theta$$

Связь между криволинейным интегралами первого и второго рода:

$$dx = \cos\alpha dl, dy = \cos\beta dl$$

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx = \int\limits_{AB} P(x,y)\cos\alpha dl$$

$$\int\limits_{AB} Q(x,y)dy = \int\limits_{AB} Q(x,y)\cos\beta dl$$

$$\int\limits_{AB} Q(x,y)dy + P(x,y)dx$$

это криволиненый интеграл второго рода

$$\int\limits_{AB} Q(x,y)dy + P(x,y)dx = \int\limits_{AB} P(x,y)\cos\alpha dl + Q(x,y)\cos\beta dl =$$

$$= \int\limits_{AB} (P(x,y)\cos\alpha + Q(x,y)\cos\beta)dl$$

а это криволинейный интеграл первого рода

Свойства криволинейного интеграла второго рода

Линейность, аддитивность и интеграл по пути равен минус интегралу по обратному пути.

Замечание. Для криволинейных интегралов второго рода несправедливы свойство монотонности, оценка модуля и теорема о среднем.

Вычисление:

Пусть l-гладкая, скривая, заданная параметрически. Пусть функция $f(x,y,z)$ определена и интегрируема вдоль кривой l в смысле криволинейного интеграла второго рода. Тогда:

$$\int\limits_{l} f(x,y,z)dx = \int\limits_{a}^{b} f(x(t), y(t), z(t)x'(t))dt$$

$$\int\limits_{l} f(x,y,z)dy = \int\limits_{a}^{b} f(x(t), y(t), z(t)y'(t))dt$$

$$\int\limits_{l} f(x,y,z)dz = \int\limits_{a}^{b} f(x(t),y(t),z(t)z'(t))dt$$

Теорема 9.24. *Формула Грина*

Пусть D - ограниченная область в R^2 с дважды гладкой границей, G открыто в R^2. Тогда:

$$\iint\limits_{D} (Q'_x - P'_y)dxdy = \int\limits_{\partial D} Pdx + Qdy$$

10 Ряды Фурье и приближение функций

Чтобы вести речь о приближении функций, нужно тем или иным способом ввести понятие близости (расстояния) между двумя функциями. В этом параграфе определяется и изучается несколько важных нормированных пространств функций. Прежде всего установим для интеграла по мере неравенства Гёльдера и Минковского, которые будут использоваться при изучении функциональных пространств.

10.1 Линейные пространства. Норма

Определение 10.1. Множество L называется линейным пространством над полем L, если на L заданы две операции $x+y$-сложение элементов L и αx - умножение вектора на скаляр, удовлетворяющие свойствам сложения, умножеия, коммутативности,ассоциативность, существует нулевой элемент, дистрибутивность, ассоциативность скаляров и существует нейтральный элемент по умножению.

Определение 10.2. функция $n : L \to R^+ = [0, +\infty)$ называется нормой, если выполняется 3 аксиомы:

1. $n(\overline{x}) \geq 0$, причём $n(\overline{x}) = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{0}$ (положительная определенность)

2. $n(\alpha\bar{x}) = |\alpha|n(\bar{x}), \forall\alpha \in R$

3. $n(\bar{x}+\bar{y}) \leq n(\bar{x}) + n(\bar{y})$ - неравенство треугольника

Идея нормы - расстояние между $\bar{x}$ и $\bar{0} : n(\bar{x}) = \mathrm{dist}(\bar{x}, \bar{0})$

Обозначение: $n(\bar{x}) = ||\bar{x}||$, линейное нормированное пространство - $(L, ||\cdot||)$

10.2 Метрические ространства

Пусть M - множество произвольной природы. Метрика - обобщение понятия расстояния на случай абстрактных множеств.

Определение 10.3. Метрикой на множестве M называется функция $\rho(x, y) : M \times M \to [0, +\infty)$, которая удовлетворяет следующим свойствам:

1. невырожденность $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ - симметричность
3. $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ - неравенство треугольника

Пара (M, ρ) называется метрическим пространством.

Лемма 10.1. Пусть $(L, ||\cdot||)$ - это линенйное нормированное пространство. Тогда $|| \cdot ||$ порождает метрику на L.

Пусть (M, ρ) - метрическое пространство. Понятие метрики позволяет определить на M открытые, замкнутые множества, непрерывность отображений, сходимость.

Определение 10.4. Шар (открытый) радиуса r с центром x_0:

$$B_r(x_0) = \{x \in M | \rho(x, x_0) < r\}$$

Замкнутый шар:

$$\overline{B_r}(x_0) = \{x \in M | \rho(x, x_0) < r\}$$

Множество $G \subset M$ называется открытым, если для любого x существует открытый шар.

Точка x называется предельной точкой, если $G \Leftrightarrow \forall r > 0, B_r(x) \cap G \neq 0$

Предельная точка может как принадлежать, так и не принадлежать множеству G.

Множество G называется замкнутым, если оно содержит все свои предельные точки.

Лемма 10.2. Если G замкнутое $\Leftrightarrow M \backslash G$ - открыто.

Множество всех граничных точек обозначается ∂G.

Любая точка является либо внешней точкой, либо внутренней точкой, либо граничной.

Определение 10.5. пространством M называется сепарабельным, если в M существует не более чем счетное всюду плотное множество.

последовательность $x_n \in M$ имеет предел $x_0 \in M$ равносильно существованию такого числа $\varepsilon > 0$ и существует такой номер N, что начиная с этого номера: $\rho(x_n, x_0) < \varepsilon$

Метрика позволяет ввести понятия сходимости и непрерывности.

Говорят, что функция непрерывна на множестве, если она непрерывна в каждой точке этого множества

Если существует предел, то он единственный.

Определение 10.6. Пусть (M, ρ)- метрическое пространство

последовательность $x_n \in M$ называется фундаментальной (или последовательностью Коши), если $\forall \varepsilon > 0$ существует N $\forall n, m$ выполняется $\rho(n, m) < \varepsilon$.

Последовательность вещественных чисел x_n сходится, если x_n - фундаментальная

Определение 10.7. метрическое пространство (M, ρ) назвывается полным, если любая фундаментальная последовательность из M имеет $\lim \in M$.

Лемма 10.3. Любое конечномерное линейно нормированное пространство полно.

10.3 Скалярное произведение

Пусть M - линейно нормированное пространство с нормой $||\cdot||$ над полем R.

Определение 10.8. отображение $\langle x, y\rangle : M \times M \to R$ называется скалярным произведением, если выполняются следующие свойства (аксиомы):

1. аддитивность по первому аргументу

$$\langle x_1 + x_2, y\rangle = \langle x_1, y\rangle + \langle x_2, y\rangle$$

2. однородность по 1-му аргументу:

$$\langle \lambda x, y\rangle = \lambda \langle x, y\rangle$$

3. симметричность $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$
4. неотрицательность скалярного произведения
5. невырожденность $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Определение 10.9. линейное пространство M со скалярным произведением и нормой, порожденное этим скалярным произведением, называется унитарным.

Определение 10.10. Скалярное произведение порождает норму в M:

$$||x|| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

Если получившееся нормированное пространство полно, то оно называется гильбертовым пространством.

Лемма 10.4. неравенсто Коши-Буняковского-Шварца:

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle = ||x|| \cdot ||y||$$

Гильбертово пространство будет обозначаться буквой H. Кроме того буквой θ обозначается нулевой вектор.

Лемма 10.5. Сходящийся в H ряд можно умножать на любой вектор почленно:

$$\left\langle \sum_{k=1}^{\infty} x_k, y \right\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x_k, y\rangle$$

Теорема 10.1. *Непрерывность скалярного произведения*

Пусть $x_n \to x, y_n \to y$. Тогда $\langle x_n, y_n\rangle \to \langle x, y\rangle$ в любом унитарном пространстве.

Теорема 10.2. *Тождество Параллелограмма. $\forall x, y \in M$:*

$$||x + y||^2 + ||x - y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2)$$

Свойство нормы, порожденно скалярным произведением:

$$||x|| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

Теорема 10.3. *Формула, восстанавливающая скалярное произведение*

Пусть $||x||$ порождена скалярным произведением $\langle\rangle$. Тогда:

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left(||x + y||^2 - ||x - y||^2\right)$$

10.4 Пространство Лебега

Пусть функция $f(x) : [a,b] \to R$. Мы хотим определить понятие интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$.

1. Множество меры нуль:

$$M \subset R, M \subset \cup_{k=1}^{n}(a_k, b_k) : \sum_{k=1}^{n} |b_k - a_k| \to 0$$

2. Пусть $L^2[a;b], f(x), g(x)$

Хотим отпределить интеграл по мере и определить через него скалярные произведения:

$$\langle f, g \rangle = \int\limits_a^b f(x)g(x)d\mu$$

3. Дискретная или очищающая мера

$$\left| \int\limits_a^b fgd\mu \right| \leq \left(\int\limits_a^b |f|^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int\limits_a^b |g|^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$||f||_{L_2} = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \left(\int\limits_a^b f^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}}$$

4. Полная мера

Теорема 10.4. *Неравенство Гёльдера*

Пусть (X, A, μ) *- пространство с мерой, функции* f *и* g *измеримы на* E*, существует интеграл* $\int\limits_E fgd\mu$*,* $1 < p < +\infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*. Тогда:*

$$\left| \int\limits_E fgd\mu \right| \leq \left(\int\limits_E |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int\limits_E |g|^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}}$$

Теорема 10.5. *Неравенство Минковского*

$$\left(\int\limits_E |f+g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int\limits_E |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \cdot + \left(\int\limits_E |g|^q d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

Определение 10.11. Пусть задано пространство с мерой. С помощью неравенства Минковского легко видеть, что множество - векторное пространство. Норма в пространстве $L_p(E, \mu)$ задается равенством:

$$||f||_{L_p(E,\mu)} = \left(\int\limits_E |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

а. Пусть $L = R^n$

Тогда: $||x||_l = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2}$ - евклидова норма

б. Пусть $L = R^n$

Тогда: $||x||_p = \sqrt[p]{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^p}$, $p \in N$.

Лемма 10.6. Если $f \in L$, то для любого $a \in R$ выполнено равенство:

$$\int\limits_a^{a+2\pi} f = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f$$

Лемма 10.7. Непрерывная периодическая функция равномерно непрерывна.

10.5 Ортогональность

Определение 10.12. Элементы $x, y \in H$ называются ортогональными и пишут $x \perp y$, если $\langle x, y \rangle = 0$

Говорят, что $x \perp A$, если $\forall y \in A$, $x \perp y$, то есть для любого y: $\langle x, y \rangle = 0$.

Свойства:

1. $x \perp y \Leftrightarrow y \perp x$
2. $x \perp y$ и $x \perp z \Leftrightarrow x \perp c_1 y + c_2 y, \forall c_1, c_2 \in R$

Определение 10.13. $y, z \in M$-линейные пространства

линейной оболочкой, натянутой на элементы y, z называют множество всех линейных комбинаций этих элементов над R:

$$\lim(y, z) = \{c_1 y + c_2 z | c_1, c_2 \in R\}$$

Очевидно, что линейная оболочка - линейной подпространство M.

3. Если $x \perp y, x \perp z \Rightarrow x \perp \lim(y, z)$

Определение 10.14. линейная оболочка, натянутое на любое конечно количество элементов:

$$\lim(x_1, \ldots, x_n) = \{\sum_{k=1}^{n} c_k x_k | c_k \in R\}$$

4. Непрерывность ортогональности:

Пусть $y_n \to y$ и $x \to y_n, \forall n \Rightarrow x \perp y$.

Определение 10.15. Определение $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ называется ортогональным, если $x_i \perp x_j$ при $i \neq j$.

Теорема 10.6. *Теорема Пифагора*

Пусть $\{x_1, \ldots, x_n\}$ состоит из попарно перпендикулярных x элементов,т.е $x_i \perp x_j$ при $i \neq j$. Тогда:

$$||\sum_{k=1}^{n} x_k||^2 = \sum_{k=1}^{\infty} ||x_k||^2$$

Теорема 10.7. *О сходимости ортогонального ряда*

В гильбертовом пространстве сходимость ортогонального ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ равносильна сходимости числового ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} ||x_k||^2$, при этом:

$$||\sum_{k=1}^{\infty} x_k||^2 = \sum_{k=1}^{\infty} ||x_k||^2$$

верна теорема пифагора

Определение 10.16. Пусть M - гильбертово пространство. Система векторов $\{e_k\} \in H$ называется ортогональной системой, если:

1. $e_k \perp e_j$ при всех $k \neq j$
2. $e_k \neq \theta$ при всех k (оно не содержит нулевой элемент).

Если при этом $||e_k|| = 1$ для всех k, то система называется ортонормированной.

Замечание: любое ортогоналное семейство легко превращается в ортонормированное:

$$e'_k = \frac{e_k}{||e_k||}$$

Ортогональная система линейно независима.

Приведем примеры ортогональных систем.

1. В пространстве l_2 орты $e_k = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ образуют ортонормированную систему векторов.

2. Тригонометрическая система $\{1, \cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t, \ldots\}$ ортогональна в пространстве L_2. Соответствующая ортонормированная система будет:

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos t}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin t}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2t}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2t}{\sqrt{\pi}}\right\}$$

Определение 10.17. Пусть $\{e_1, \ldots, e_n\}$ - произвольный набор элементов из M. Линейно оболочкой, натянутой на элементы $e_1, \ldots, e_n$ называется множество всех линейных комбинаций этих элементов.

$$\operatorname{lin}\{e_1, \ldots, e_n\} = \langle e_1, \ldots, e_n \rangle = \{\sum_{k=1}^{n} c_k \cdot e_k | c_k \in R\}$$

Теорема 10.8. *Пусть M - гильбертово пространство. Пусть $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ - ортогональное семейство, пусть некий элемент $x \in M$ можно записать в виде $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k e_k$.*

Тогда такое представление единственно.

Теорема 10.9. *Вычисление коэффициентов ортогонального ряда.*

Пусть $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ - ортогональное семейство в гильбертовом пространстве, $x \in H$, $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k e_k$. Тогда коэффициенты c_k определяются единственным образом по формуле:

$$c_k = \frac{\langle x, e_k \rangle}{||e_k||^2}$$

Определение 10.18. Пусть $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ - ортогональное семейство в гильбертовом пространстве, $x \in H$. Числа:

$$c_k(x) = \frac{\langle x, e_k \rangle}{||e_k||^2}$$

называются коэффициентами Фурье, а ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k(x) e_k$ - рядом Фурье вектора x по ортогональной системе векторов $\{e_k\}$.

Замечание: элементы ортогонального семейства обязательно линейно независимы.

Замечание: геометрический смысл k-ого слагаемого ряда Фурье - проекция вектора x на прямую $L(e_k)$, то есть:

$$x = c_k(x)e_k + z, z \perp e_k$$

Теорема 10.10. *Свойства частичных сумм ряда Фурье*

Пусть $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ - ортогональное семейство в гильбертовом пространстве, $x \in H$, $n \in N$.

$S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k(x)e_k$ - частичная суммая ряда Фурье элемента x, а $L = L(e_1, \ldots, e_n)$ - линейная оболочка ортогонального семейства. Тогда справедливы следующие утверждения:

1. S_n - ортогональная проекция x на L, то есть:

$$x = S_n + z, z \perp L$$

2. S_n - элемент наилучешго приближения $x \in L$, то есть:

$$||x - S_n|| = \min_{y \in L} ||x - y||$$

3. $||S_n|| \leq ||x||$

Следствие 1. Неравенство Бесселя

Пусть $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ - ортогональное семейство в гильбертовом пространстве, $x \in H$, $n \in N$. Тогда:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k(x)|^2 \cdot ||e_k||^2 \leq ||x||^2$$

Теорема 10.11. *Ф.Рисс, Э.Фишер*

Пусть $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ - ортогональное семейство в гильбертовом пространстве, $x \in H$. Тогда справедливы следующие утверждения:

1. Ряд Фурье вектора x сходится

2. $x = z + \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k(x)e_k$, где $z \perp e_k$ для всех k.

3. $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k(x)e_k \Leftrightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} |c_k(x)|^2 \cdot ||e_k||^2 = ||x||^2$ (выполняется условие замкнутости)

Замечание: пункт 2 говорят, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k(x)e_k$ - ортогональная проекция x на L.

Определение 10.19. Пусть $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ - ортогональное семейство в гильбертовом пространстве называется базисом (ортогональным базисом), если любой вектор $x \in H$ раскладывается в ряд по этой системе:

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(x) e_k$$

Теорема 10.12. *Процесс Грамма-Шмидта. Об ортогонализации*

Пусть $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ - линейно независимая система векторов H. Тогда найдется такая ортонормированная система векторов $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$, что для всех $n \in N$ будет:

$$L(e_1, \ldots, e_n) = L(x_1, \ldots, x_n)$$

При этом система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ единственная с точностью до множителей, по модулю равных единице.

Пример построения ортонормированного базиса в $L^2[a, b]$ с вычислением проекции и расстояния до линейной оболочки.

Пусть $L^2[0, 2\pi]$.

$$x_1(t) = 1, x_2(t) = cos^2(t), x_3(t) = \cos t \cdot \cos 3t$$

$$L = \text{Lin}\{x_1, x_2, x_3\}$$

1. Превратить x_1, x_2, x_3 в ортонормированный базис в L

2. Найти проекцию $\varphi(t) = t$ на линейную оболочку, то есть найти в L наилучшее приближение к t и вычислить $dist(\varphi, L)$ в $L^2[0, 2\pi]$

Доказательство. 1.

1-ый этап:

$$e_1 = \frac{x_1}{||x_1||_2}$$

$$||x_1||_2 = \left(\int_0^{2\pi} 1^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2\pi}$$

$$e_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

2-ой этап:

$$z_2 = x_2 - \langle x_2, e_1 \langle e_1 = \cos^2 t - \left(\int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos^2 t dt}{\sqrt{2\pi}} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{2}\cos 2t$$

$$e_2(t) = \frac{z_2}{||z_2||_2} = \frac{\cos 2t}{\sqrt{\pi}}$$

3-ий этап:

$$z_3 = x_3 - \langle x_3, e_1 \rangle e_1 - \langle x_3, e_2 \rangle e_2 = \frac{1}{2}\cos 4t$$

$$e_3 = \frac{z_3}{||z_3||_2} = \frac{\cos 4t}{\sqrt{\pi}}$$

$$(e_1, e_2, e_3) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos 2t}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 4t}{\sqrt{\pi}} \right)$$

Мы построили орнормированный базис.

2. Что есть наилучшее приближение? Это такой элемент, который дает наименьшее расстояние, то есть:

$$dist(\varphi, L) = \min ||\varphi - y||_2$$

Но также нам известно, что наилучшим приближением (то есть проекцией на линейную оболочку - ортогональная проекция φ на L) является частичная сумма Фурье. Найдем этот наилучший элемент для $\varphi(t) = t$.

Наилучшее приближение есть

$$S_n = y = \sum_{k=1}^{3} c_k(x) e_k = \sum_{k=1}^{3} \frac{\langle x, e_k \rangle}{||e_k||^2} e_k =$$

так как мы построили ортонормированный базис, то норма векторов равна единице и вытекает следующее равенство наилучего приближения:

$$S_n = \langle \varphi, e_1 \rangle e_1 + \langle \varphi, e_2 \rangle e_2 + \langle \varphi, e_3 \rangle e_3$$

Заметим, что скалярные произведения с векторам e_2 и e_3 равны нулю, косинусы перпедикулярны линейной оболочке, поэтому:

$$\langle \varphi, e_1 \langle = \int_0^{2\pi} t \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = \pi \cdot \sqrt{2\pi}$$

Значит, наименьшее расстояние есть:

$$\operatorname{dist}(\varphi, L) = ||\varphi - y||_2 = \left(\int_0^{2\pi} (t-\pi)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{2\pi^3}{3} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$\square$

Теорема 10.13. *Пусть (X, ρ) -метрическое пространство, $A \subset X, x \in X$. Величина:*

$$E_A(x) = \rho(x, A) = \inf_{y \in A} \rho(x, y)$$

называется наилучшим приближением элемента x в множестве A. Элемент $y^* \in A$ для которого $\rho(x, y^*) = E_A(x)$, называется элементом наилучшего приближения к x в A

Существование элемента наилучшего приближения в гилбертовом пространстве

Пусть A - непустое замкнутое выпуклое подможество $H, x \in H$. Тогда существует единственный элемент наилучшего приближения x в A.

По сути говорится, что y лучшее приближение, что длина вектора $z = ||x - y||$ является минимальной, а следующая теорема говорит о том, что наименьшеая длина этого вектора есть при наименьшем приближении и вектор является проекцией.

Теорема 10.14. *О проекции*

Пусть L-замкнутое подпространство $H, x \in H$. Тогда x единственным образом представляется в виде:

$$x = y + z, y \in L, z \perp L$$

При этом y - элемент наилучшего приближения x в L.

10.5.1 Тригонометрические ряды Фурье

Определение 10.20. Пусть $n \in Z_+$. Функции T_n вида:

$$T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

называются тригонометрическим многочленом (полиномом) порядка не выше n, а числа a_k и b_k - его коэффициентами.

Определение 10.21. Функциональный ряд вида:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

называется тригонометрическим рядом, а числа a_k и b_k его коэффициентами.

По формулам Эйлера:

$$\cos kx = \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2}, \quad \sin kx = \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i}$$

всякий тригонометрический многочлен может быть записан в виде:

$$T_n(x) = \sum_{-n}^{n} c_k e^{ikx}$$

Обратно по формуле Эйлера:

$$e^{ikx} = \cos kx + i \sin kx$$

Ввиду ортогональности тригонометрической системы из теории гильбертовых пространств следует, что если тригонометрчиеский ряд сходится в пространстве L_2, то он является рядом Фурье своей суммы. Тем более это верно, если ряд сходится равномерно, так как равномерная сходимость влечет сходимость в L_2. Требование сходимости в L_2 можно еще ослабить.

Лемма 10.8. 1. $\cos mx \perp \cos nx, m \neq n$

2. $\sin mx \perp \sin nx, m \neq n$

3. $\cos mx \perp \sin nx, \forall m, n$

Лемма 10.9. Если тригонометрический ряд (вещественной или комплексной форме) сходится к сумме f в пространстве $L \in [0, 2\pi]$, то его коэффициенты выражаются через сумму единственным образом по формулам, которые мы сейчас выведем.

$$||\cos nx|| = \left(\int_0^{2\pi} \cos^2 nx dx\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\pi}$$

$$||\sin nx|| = \sqrt{\pi}$$

$$a_k = \frac{\langle f, \cos kx\rangle}{||\cos kx||^2} = \frac{\int_0^{2\pi} f(x) \cos kx dx}{\pi}$$

$$b_k = \frac{\langle f, \sin kx\rangle}{||\sin kx||^2} = \frac{\int_0^{2\pi} f(x) \sin kx dx}{\pi}$$

Определение 10.22. Пусть $f \in L$. Числа:

$$a_k(f) = \frac{\int_0^{2\pi} f(x) \cos kx dx}{\pi}, k \in Z_+$$

$$b_k(f) = \frac{\int_0^{2\pi} f(x) \sin kx dx}{\pi}, k \in N$$

$$c_k(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx, k \in Z$$

называются коэффициентами Фурье (соответственно косинус-коэффициентами, синус-коэффициентами и комплексными коэффициентами), а ряд:

$$\frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k(f) e^{ikx}$$

называется тригонометрическим рядом Фурье функции f.

Замечание 10.1. Если $f \in L$ четна, то $b_k(f) = 0$,

$$a_k(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos kx dx$$

Если $f \in L$ нечетна, то $a_k(f) = 0$:

$$b_k(f) = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi} f(x) \sin kx dx$$

Частичную сумму ряда Фурье:

$$S_n(f) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(f)$$

будем называть коротко суммой Фурье (порядка n) функции f. Запись

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} A_k(f, x)$$

будет означать, что ряд, написанный справа, является рядом Фурье функции f. В силу ортогональности тригонометрической системы тригонометрический многочлен является своим рядом Фурье. Заметим еще, что мы можем записывать ряд Фурье вещественозначной функции в комплексной форме, и наоборот.

Пусть $f \in L[0, \pi]$. Тогда можно составить ряды Фурье функции f по косинусам и по синусам.

$$f(x) \sim \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(f) \cos kx, \quad f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} b_k(f) \sin kx$$

где коэффициенты $a_k(f)$ и $b_k(f)$ определяются формулами. Ряд по косинусам - это тригонометрический ряд Фурье четного, а ряд по синусам - нечетного 2π-периодического продолжения f.

Изучение ряда Фурье мы начнем с изучения его коэффициентов. Как утверждает результат Комлгорова, ряд Фурье суммируемой функции может расходиться всюду. Оказывается, что коэффициенты Фурье любой суммируемой функции стремятся к нулю.

Теорема 10.15. *Риман, Лебег*

Если $f \in L(E)$, то:

$$\int_E f(t) \begin{cases} e^{i\lambda t} \\ cos\lambda tdt \\ \sin\lambda t \end{cases} \xrightarrow[\lambda\to\infty]{} 0$$

Если $f \in L$, то $a_k(f), b_k(f), c_k(f) \to \infty, k \to \infty$

В вопросах приближения функций, в частности, при изучении скорости сходимости рядов Фурье, оказывается, что чем лучше функция, тем быстрее сходимость приближающего процесса. Функция считается тем лучше, чем большее число раз она дифференцируема. Удобной характеритиской промежуточных классво функций служат модули непрерывности функции и ее производных.

Определение 10.23. Пусть $E = \langle a, b\rangle$ - промежуток в R, $f : E \to R, h \geq 0$. Величина:

$$w(f, h) = w(f, h)_E = \sup_{|x-y|\leq h} |f(x) - f(y)|$$

называется модулем непрерывности функции f с шагом h на промежутке E. Для непериодический функций $E = R$.

Модуль непрерывности показывает. на какую величину может измениться значение функции, когда изменение аргумента не превосходит h. Величина уже встречалась при интеграла Римана и называлась колебанием функции f на $[a, b]$.

Определение 10.24. Пусть $E = \langle a, b\rangle$ - промежуток в R, $f : E \to R, \alpha, M > 0$. Если для любых $x, y \in E$ выполняется неравенство:

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|^\alpha$$

то говорят, что функция f удовлетворяет условию Липшица.

Если f дифференцируема и $|f'(x)| \leq M$ для всех x, то функция принадежит условию Липшица с $\alpha = 1$.

Ряд Фурье функции $f \in L$ можно интегрировать полченно по любому отрезку.

Ряд фурье функции f поучается из ряда Фурье функции F почленным дифференцированием, то есть:

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty}(kb_k(F)\cos kx - ka_k(F)\sin kx)$$

Теорема 10.16. *О приближении алгебраическими многочленами, Вейерштрасс*

множество всех многочленов с рациональными коэффициентами всюду лотно в $C[a,b]$ можно сколько угодно точно приблизить (апроксимировать) многочленом с рациональными коэффициентами.

Замечание: хорошо известно, что функция, являющаяся пределом равномено сходящейся на отрезке $[a,b]$ последовательности многочленов, непрерывна на $[a,b]$. Теореме Вейерштрасса утверждает, что, обратно, всякая непрерывная функция явялется пределом равномерно сходящейся последовательности. Таким образом, для того чтобы функция f ыла непрерывна на отрезке $[a,b]$, необходимо и достаточно, чтоыб она являлась пределом равномерно сходящейся на $[a,b]$ последовательности алгебраических многочленов.

Аналогично, для того чтобы 2π периодическая функция f была непрерывна на R необходимо и достаточно, чтобы она являлась пределом равномерно сходящейся последовательности тригонометрических многочленов.

10.6 Интеграл и преобразование Фурье

До сих пор изучение периодических функций мы считали период равным 2π. Пусть $l > 0$, функция f имеет период $2l$ и суммируема на конечном отрезке. Положим $f(\frac{ly}{\pi})$ $g(\frac{\pi x}{l})$. Составим ряд Фурье функции g

$$\frac{a_0(g)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k(g)\cos ky + b_k(g)\sin ky)$$

где коэффициенты получаются по обычным формулам. Делая замену $t = \frac{\pi u}{k}$

$$\beta_k = b_k(g) = \frac{1}{l}\int_{l}^{-k} f(u)\sin\left(\frac{k\pi u}{l}\right)du$$

Заменяя $y = \frac{\pi x}{l}$, получаем, что функции f соответствует ряд:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{l} + \beta_k \sin \frac{k\pi x}{l} \right)$$

Формула Фурье:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos y(x-t) dt \right) dy$$

Формула Фурье может быть перезаписана в виде:

$$f(x) = \int\limits_0^{+\infty} (a(f,y) \cos xy + b(f,y) \sin xy) dy$$

где

$$a(f,y) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos yt dt$$

$$b(f,y) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin yt dt$$

Определение 10.25. Пусть $f \in L(R)$. Функция:

$$\hat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-yt} dt$$

называется преобразованием Фурье (комплексным) функции f.

Определение 10.26. Функция:

$$\hat{\varphi(x)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) e^{ixy} dy$$

называется обратным преобразованием Фурье функции φ.