Страхование и актуарная математика

НТ1: Свойства функции полезности

Преподаватель:

Радионов Андрей Владимирович

Александр Широков, ПМ-1701
Санкт-Петербург
2020 г., 7 семестр

Задача 0. Пусть есть инвестор с капиталом w и он может вложить деньги в 2 неколлериованных $\xi_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ и $\xi_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$. $u(x) = 1 - e^{-\lambda x}$. ξ_1, ξ_2 - это доходность, которая выражена в процентах. В какой пропорции нужно разделить капитал, чтобы максимизировать нашу полезность.

Решение

Введём доли α и $1-\alpha$. Тогда доход инвестора будет вычисляться по формуле:

$$s = \alpha w(1+\xi_1) + (1-\alpha)w(1+\xi_2)$$

Будем максимизировать математическое ожидание от функции полезности:

$$Eu(s) = E(1 - e^{-\lambda \cdot s}) = 1 - E\left(e^{-\lambda(\alpha w(1+\xi_1)+(1-\alpha)w(1+\xi_2))}\right) \to \max_{\alpha}$$

Раскроем скобки и упростим выражение:

$$1 - E\left(e^{-\lambda(\alpha w(1+\xi_1)+(1-\alpha)w(1+\xi_2))}\right) = 1 - E\left(e^{-\lambda w(\alpha(1+\xi_1)+(1-\alpha)(1+\xi_2))}\right) =$$

$$= 1 - E\left(e^{-\lambda w(\alpha\xi_1+1+\xi_2-\alpha\xi_2)}\right) = 1 - e^{-\lambda w} E\left(e^{-\lambda w(\alpha\xi_1+\xi_2(1-\alpha))}\right) \to \max \Rightarrow$$

$$E\left(e^{-\lambda w(\alpha\xi_1+\xi_2(1-\alpha))}\right) \to \min$$

Так как величины неколлерированы, то:

$$Ee^{-\lambda w\alpha\xi_1} \cdot Ee^{-\lambda w\xi_2(1-\alpha)} \to \min$$

Сделаем замену $\beta = -w\lambda\alpha$ и попытаемся взять следующий интеграл

$$Ee^{-w\lambda\alpha\xi_1} = Ee^{\beta\xi_1} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\beta x_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x_1-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} dx_1$$

Известно, что производящая функция моментов для нормального распредления есть следующая величина:

$$Ee^{\beta\xi_1} = e^{\mu\beta + \frac{\beta^2\sigma_1^2}{2}}$$

Тогда преобразуем выражение:

$$Ee^{-\lambda w\alpha\xi_1} \cdot Ee^{-\lambda w\xi_2(1-\alpha)} = e^{\left(-\mu_1 w\lambda\alpha + \frac{w^2\lambda^2\alpha^2\sigma_1^2}{2} - \mu_2 w\lambda(1-\alpha) + \frac{w^2\lambda^2(1-\alpha)^2\sigma_2^2}{2}\right)} \to \min_{\alpha}$$

$$-w\lambda\mu_1 + w^2\lambda^2\alpha\sigma_1^2 + w\lambda\mu_2 - w^2\lambda^2(1-\alpha)\sigma_2^2 = 0$$

$$\alpha = \frac{\mu_1 - \mu_2 + w\lambda\sigma_2^2}{w\lambda\sigma_1^2 + w\lambda\sigma_2^2}$$

Пусть $\mu_1 = \mu_2 : \alpha = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$. В какой пропорции нужно разделить, чтобы минимизировать дисперсию.

$$D(w\alpha(1+\xi_1)) + D(w(1-\alpha)(1+\xi_2)) = w^2\alpha^2 D\xi_1 + w^2(1-\alpha)^2 D\xi_2 = w^2\alpha^2\sigma_1^2 + w^2(1-\alpha)^2\sigma_2^2$$

$$2\alpha w^2\sigma_1^2 - 2w^2(1-\alpha)\sigma_2^2 = 0$$

$$\alpha = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$$

Решение, максимизирующее полезность соответствует решению, минимизирующую диспесию портфеля. Совпадения есть в случае $\mu_1 = \mu_2$. Интересно посмотреть через призму полезности.

1 НТ1 Свойства функции полезности

1. Определить, какую максимальную сумму агент с капиталом 100 и функцией полезности $u(x) = 5x - 0.01x^2$ согласится заплатить, чтобы избавиться от потенциального ущерба, принимающего значения $0, 10, 20, 30$ с равными вероятностями.

Решение 1. Величина ушерба - случайная величина с данным (известным) распределением, обозначим за ξ.

Величина $E\xi = \sum\limits_{i=1}^{4} p_i\xi_i = 15$ - ожидаемая величина ущерба в следующий промежуток времени. $u(x)$ - функция полезности от капитала, а a - величина, которую агент может заплатить, если хочет избавиться от риска.

Необходимо сравнить две величины. Первая - $E(u(w-\xi))$ - ожидаемая полезность при отказе от платы. Вторая - $u(w-a)$ - ожидаемая полезность при выплате суммы a за полный отказ от риска.

Так как $u(w)' > 0$, а $w(w)'' < 0$, то есть функция возрастает и вогнута, то по неравенству Йенсена:

$$E(u(w-\xi)) \leq u(E(w-\xi)) = u(w - E\xi)$$

Для того, чтобы найти максмальную сумму, которую агент согласится заплатить, необходимо приравнять ожидаемую полезность при отказе и ожидаемую полезность при выплате суммы a и решить полученное равенство относительно a:

$$E(u(w-\xi)) = u(w-a)$$

$$E(u(w-\xi)) = \sum_{i=1}^{4} u(w-\xi_i)p_i = \sum_{i=1}^{4} p_i(5(w-\xi_i) - 0.01 \cdot (w-\xi_i)^2) = 351.5$$

$$u(w-a) = 5(100-a) - 0.01(100-a)^2 = 351.5$$

$$a = 15.3784$$

2. Определить, при каком значении капитала агент из предыдущей задачи будет наиболее интересен страховой организации, а при каком - наименее интересен.

Решение 2. В прошлой задаче мы определились, что максимальную величину агент готов будет заплатить при выполнении равенства:

$$E(u(w-\xi)) = u(w-a)$$

Агент будет наиболее интересен компании, когда $a \to \max$ (когда выплачивается агентом максимальное количество денег) и менее интересен, когда $a \to \min$.

Идея: выразить a через w и найти максимум и минимум функции по w.

Получим квадратное уравнение относительно w:

$$0.01a^2 - a \cdot (0.02w + 5) + 0.3w - 78.5 = 0$$

$$a = -250 + w \mp \sqrt{70350 - 530w + w^2}$$

Осталось выбрать, как ограничивать u, a и w. a, наверное, не может быть меньше нуля, тогда это означает, что страховая компания должна заплатить. Тогда, в одном из решений, решая относительно w, получим, что $a_{min} = a(w_{min}) = a(261.667)$.

Дальше стоит вопрос как ограничивать u и w. Снизу есть ограничение по w: 0, так как капитал не может быть отрицтаельным. Что есть верхняя граница w? Два варианта: точка, в которой функция полезности начинает убывать, либо точка, в которой функция полезности равна нулю.

Тогда ответы, соответственно, $w_{max} = 200$ или $w_{max} = 500$

3.1 Решить первую задачу в случае, если потенциальный ущерб определяется случайной величиной с плотностью распределения $f_\xi(x) = a\sqrt{25-x^2}, x \in [0;5]$, а функция полезности есть: $u(x) = \ln x = \log_e x$ или $u(x) = \lg x = \log_{10} x$

Решение 3.

$$E(u(w-\xi)) = u(w-a)$$

$$u(w-a) = \ln(100-a)$$

$$E(u(w-\xi)) = E\left(\ln(100-\xi)\right) = \int\limits_0^5 \ln(100-x)a\sqrt{25-x^2}dx$$

Нужно взять интеграл, если будет время, Wolfram взял и дает ответ $a \approx 0.05$

4. Инвестор хочет распределить свой капитал между ценной бумагой, доходность по которой определяется $\xi_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ с матемматическим ожиданием 5% и стандартным отклонением 2% и безрисковой ценной бумагой с фиксированной доходностью $\xi_2 = 4\%$.

Какую часть своего капитала инвестору стоит вложить в первую ценную бумагу, если его функция полезности есть $u(x) = 1 - e^{-\lambda x}$

Решение 4. Введём доли α и $1-\alpha$. Тогда доход инвестора вычислим по формуле:

$$s = w\alpha(1+\xi_1) + \xi_2 \cdot w(1-\alpha)$$

Будем максимизировать математическое ожидание от функции полезности:

$$Eu(s) = E(1 - e^{-\lambda \cdot s}) = 1 - E\left(e^{-\lambda(w\alpha(1+\xi_1)+1.04\cdot w(1-\alpha))}\right) \to \max_\alpha$$

Раскроем скобки и упростим выражение:

$$1 - e^{-\lambda w \xi_2} \cdot Ee^{-\lambda w\alpha(\xi_1-\xi_2)} \to \max_\alpha$$

$$Ee^{-\lambda w\alpha(\xi_1-\xi_2)} = e^{\xi_2\lambda w\alpha} \cdot Ee^{-\lambda w\alpha\xi_1} \to \min_\alpha$$

Сделаем замену $\beta = -w\lambda\alpha$ и попытаемся взять следующий интеграл

$$Ee^{-w\lambda\alpha\xi_1} = Ee^{\beta\xi_1} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\beta x_1}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x_1-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}dx_1$$

Известно, что производящая функция моментов для нормального распредления есть следующая величина:

$$Ee^{\beta\xi_1} = e^{\mu\beta + \frac{\beta^2\sigma_1^2}{2}} \Rightarrow Ee^{-\lambda w\alpha\xi_1} = e^{-\mu_1 w\lambda\alpha + \frac{w^2\lambda^2\alpha^2\sigma_1^2}{2}}$$

$$e^{\xi_2\lambda w\alpha} \cdot Ee^{-\lambda w\alpha\xi_1} = e^{\xi_2\lambda w\alpha} \cdot e^{-\mu_1 w\lambda\alpha + \frac{w^2\lambda^2\alpha^2\sigma_1^2}{2}} \to \min_\alpha$$

$$\xi_2\lambda w - \mu_1 w\lambda + w^2\alpha\lambda^2\sigma_1^2 = 0$$

$$\alpha = \frac{\mu_1 - \xi_2}{w\lambda\sigma_1^2}$$

5. Решить предыдущую задачу, если инвестор распределяет капитал между двумя ценными бумагами, доходности которых распределены нормально с математическими ожиданиями μ_1, μ_2, стандартными отклонениями σ_1, σ_2 и коэффициентов корреляции ρ.

Решение 5.

Посмотрим на задачу 0 и получим следующее выражение:

$$E\left(e^{-\lambda w(\alpha\xi_1+\xi_2(1-\alpha))}\right) \to \min$$

с тем отличием, что величины не являются независимыми

Обозначим за $\xi = e^{-\lambda w\alpha\xi_1}$ и $\eta = e^{-\lambda w\xi_2(1-\alpha)}$

$$cov(\xi, \eta) = \sqrt{D\xi \cdot D\eta} \cdot \rho(\xi, \eta)$$

$$E(\xi\eta) - E\xi\eta = \sqrt{D\xi \cdot D\eta} \cdot \rho(\xi, \eta)$$

$$E(\xi\eta) = \sqrt{D\xi \cdot D\eta} \cdot \rho(\xi, \eta) + E(\xi\eta)$$

$$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2$$

$$E(\xi\eta) = \sqrt{(E\xi^2 - (E\xi)^2) \cdot (E\eta^2 - (E\eta)^2)} \cdot \rho(\xi, \eta) + E(\xi\eta) \to \min_{\alpha} \tag{solution}$$

1. Найдем $E\xi$ и $E\eta$

Сделаем замену $\beta = -w\lambda\alpha$ и попытаемся взять следующий интеграл

$$Ee^{-w\lambda\alpha\xi_1} = Ee^{\beta\xi_1} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\beta x_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x_1-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} dx_1$$

Известно, что производящая функция моментов для нормального распредления есть следующая величина:

$$Ee^{\beta\xi_1} = e^{\mu\beta + \frac{\beta^2\sigma_1^2}{2}}$$

2. Найдем $E(\xi\eta)$

$$E(\xi\eta) = Ee^{-\lambda w\alpha\xi_1} \cdot Ee^{-\lambda w\xi_2(1-\alpha)} = e^{\left(-\mu_1 w\lambda\alpha + \frac{w^2\lambda^2\alpha^2\sigma_1^2}{2} - \mu_2 w\lambda(1-\alpha) + \frac{w^2\lambda^2(1-\alpha)^2\sigma_2^2}{2}\right)} \to \min_{\alpha}$$

Нам известно всё кроме $E\xi^2$ в (1) которое тоже можно найти (но я не знаю, как это брать):

$$E(e^{-w\lambda\alpha\xi_1})^2 = E(e^{\beta\xi_1})^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty}(e^{\beta x_1})^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x_1-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}dx_1 = e^{2\beta(\mu_1+\beta\sigma_1^2)}$$

Подставляя в (1), взяв производную по α, приравняв к нулю, выражаем α через исходные данные: $w, \mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho, \lambda$.