

# **Страхование и актуарная математика**

**Александр Широков ПМ-1701**

Преподаватель:

РАДИОНОВ АНДРЕЙ ВЛАДИМИРОВИЧ

Санкт-Петербург  
2020 г., 7 семестр

## Список литературы

[1]

## Содержание

<b>1</b>	<b>Конспекты лекций</b>	<b>2</b>
1.1	Микроэкономические основы страхования . . . . .	2
1.1.1	01.09.2020 . . . . .	2
1.1.2	03.09.2020 . . . . .	2
1.1.3	04.09.2020 . . . . .	4
1.1.4	08.09.2020 . . . . .	5
1.2	НТ1 Свойства функции полезности . . . . .	9
1.3	. . . . .	12
1.4	Страховой контракт . . . . .	13

# 1 Конспекты лекций

## 1.1 Микроэкономические основы страхования

### 1.1.1 01.09.2020

Страхование вклада - если у банка возникают проблемы, то нам возвращают деньги банк в некоторой границе. Страхование - выход США из великой депрессии. Застраховать в принципе можно все что угодно.

### 1.1.2 03.09.2020

В ситуациях неопределенностей человек принимает решение не на основании математического ожидания  $E\xi$ , а на основании математического ожидания некоторой функции полезности  $Eu(\xi)$ , где  $u$  - некая функция полезности. За  $w$  - обозначим капитал, а за  $a$  - плата за риск,  $\xi$  - потенциальные убытки. Тогда ситуация будет описываться:

$$Eu(w - \xi) \quad u(w - a)$$

Пусть  $W = 100$  и случайная величина убытков принимает следующие значения: 0 с вероятностью 0.9, 1 с вероятностью 0.05, 20 с вероятностью 0.05. Функция полезности -  $u(x) = \ln(x + 1)$ . Математическое ожидание убытка  $E\xi = 0.55$ . Приходит банк и говорит продать за 60.

$w - \xi$  - начальное состояние,  $w - a$  - возможное состояние, сравнение полезностей

Посчитаем:

$$Eu(w - \xi) = E \ln(100 - \xi + 1) = \ln(101 - 0 + 1) \cdot 0.9 + \ln(100 - 1 + 1) \cdot 0.05 + \ln(100 - 20 + 1) \cdot 0.05 = 4.60941$$

$$E \ln(100 + 1 - 0.55) = 4.60966$$

Есть  $W, u(\xi), \xi, f_\xi(x)$ :

$$E(u(W - \xi)) = \int_{-\infty}^{\infty} u(W - x) f_\xi(x) dx$$

Вместо бесконечностей используются границы интегрирования.

$$\Delta u = \frac{\Delta W}{W} \quad du = \frac{dW}{W} \quad u = \ln W$$

**Определение 1.1.1.** Пусть есть набор случайных величин  $\xi$  и будем задавать предпочтение подобным образом  $\xi \geq \eta$  - предпочтение нестрогого отношения, если существуют какие-то пары, которые находятся в бинарном отношении.

Мы будем говорить про свойства отношений:

1. Полнота:  $\xi \geq \eta$  или  $\eta \geq \xi$
2. Транзитивность:  $\xi \geq \eta, \eta \geq \varepsilon \Rightarrow \xi \geq \varepsilon$
3. Из первого следует рефлексивность

Будем говорить, что данное бинарное отношение является отношением *эквивалентности* - рефлексивно, транзитивно, симметрично.

**Определение 1.1.2.** Будем говорить, что  $\xi \geq \eta$  и  $\xi \not\geq \eta$  - отношение строгого порядка

**Определение 1.1.3.**  $V : \Xi \rightarrow R$  - функция  $V$  сохраняет упорядочивание, если  $\xi \geq \eta$ , то:

$$V(\xi) \geq V(\eta)$$

**Определение 1.1.4.** Пусть есть набор  $A_j$ .  $B \in A$  является полным по упорядочиванию, если для любых элементов  $a, b \in A$  существует элемент  $\exists c \in B$ , что либо  $a \geq c > b$  либо  $a > c \geq b$ .

**Теорема 1.1.** На  $\Xi \leq V$  существует отношение, сохраняющее отношение, тогда и только тогда, когда в  $\Xi$  существует счетно или конечное подмножество плотное по упорядочиванию.

Как построить функцию полезности? Построим отношение порядка на множестве товаров, строим кривые безразличия - классы эквивалентности (все элементы внутри эквивалентны между собой), они не пересекаются.

Построим прямую, единичный вектор (биссектриса). На что нужно умножить единичный вектор, чтобы попасть в точку пересечения, и высчитываем функцию полезности.

$$V^*(\xi) = Eu(\xi) = \sum u(x_i)p_i = V(x_1)p_1 + V(x_2)p_2$$

$$\xi : x_1 \mapsto p_1, x_2 \mapsto p_2$$

Мы можем выбрать функцию полезности таким образом

### 1.1.3 04.09.2020

Пусть случайная величина принимает значения  $x \mapsto p$  и  $y \mapsto 1 - p$ .  
Введем обозначение для такой случайной величины:

$$(x, y)_p$$

Наложим некоторые ограничения:

- Тогда индивид индеферентен:  $(x, y)_1 \sim x$ .

Например: пусть  $\xi$  равномерно распределен на отрезке  $[0, 1]$ :  $\xi \sim \mathbb{U}[0, 1]$ .

- $(x, y)_p \sim (y, x)_{1-p}$
- $((x, y)_p, y)_q \sim (x, y)_{pq}$

Пример:  $(1, (2, 3)_{\frac{1}{2}})_{\frac{1}{2}}$  для игры  $1 \mapsto \frac{1}{2}, 2 \mapsto \frac{1}{4}, 3 \mapsto \frac{1}{4}$

Ограничения:

- $\{p \in [0, 1] : (x, y)_p \geq z\}$  - замкнутое множество
- $\{p \in [0, 1] : z \geq (x, y)_p\}$  - замкнутое множество  $\forall x, y, z \in \Xi$
- $x \sim y : (x, z)_p \sim (y, z)_p$
- $\exists w, b : \forall \xi \in \Xi$  выполняется, что  $w \geq x \geq b$
- $(b, w)_p \geq (b, w)_q \Leftrightarrow p > q$

**Теорема 1.2.** Если  $\Xi$  и на нём введено отношение предпочтения  $\geq$ , то найдётся такая функция  $V$ , что

$$V((x, y)_p) = pV(x) + (1 - p)V(y)$$

$$Eu(\xi) = (x, y)_p$$

$$V(\xi) = Eu(\xi)$$

$$u(y) : R \rightarrow R, V : \Xi \rightarrow R$$

Доказательство: Хэливэриан.

Рассмотрим некоторый функционал  $V((x, y)_p)$  и применим к нему некоторое преобразование:

$$f(V((x, y)_p)) = f(V(x) \cdot p + V(y) \cdot (1 - p)) = f(V(x)) \cdot p + f(V(y)) \cdot (1 - p)$$

и это линейная функция - линейное преобразование.

Пример:  $u(x) = \ln(x + 1)$ ,  $\xi$ ,  $f_\xi(y)$ ,  $Eu(\xi) = \int u(x)f_\xi(x)dx$

$$u_1(x) = a \ln(x + 1) + b, a > 0$$

$$Eu_1(\xi) = \int a \ln(x+1) + b f_\xi(x) dx = a \int \ln(x+1) f(x) dx + b \int f(x) dx = a \int u(x) f_\xi(x) dx + b$$

следовательно функционал является единственным с точностью до линейного преобразования.

#### 1.1.4 08.09.2020

Напоминание:

$$V(\xi) = \sum p_j V(x_j)$$

и при дискретных  $\xi$ :

$$V(x_j) = u(x_j)$$

Рассмотрим некоторые свойства, которыми должна обладать функция полезности:

1. Функция начинается в нуле из-за монотонного преобразования
2. Функция полезности  $u(x)$  не убывает (возрастает):

$$u'(x) > 0$$

3. Функция  $u(x)$  вогнутая.

$$u(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \lambda u(x_1) + (1 - \lambda)u(x_2)$$

Заметим, что если функция полезности вогнутая, то находясь в ситуации неопределенности, индивид будет согласен заплатить, чем иметь состояние неопределенности. Человек хочет иметь детерминированный выигрыш, нежели при ситуации неопределенности - это происходит из-за вогнутости функции.

- есть функция вогнута, то говорят RISK AVERSION
- если выпукла, то говорят RISK LOVING
- если функция линейна, то RISK NEUTRAL

Почитать [здесь](#) можно.

4.

$$Eu(\xi) \leq u(E(\xi))$$

Сравнивает полезность ситуации  $u(w - a)$  - нет риска, чуть меньше денег, и есть риск и чуть больше денег -  $Eu(w - \xi)$  и если больше, то он соглашается - страхование возможно для некоторого  $a$  и человек готов заплатить. С помощью неравенства Йенсена:

$$Eu(w - \xi) \leq u(E(w - \xi)) = u(w - E\xi)$$

$$u(w - a) \geq Eu(w - \xi) \Leftrightarrow u(w - E\xi) = u(w - a)$$

и следовательно мы сможем найти  $a = E\xi$  из которого будет выполняться свойство.

*Пример 1.* Возьмем экспоненциальную функцию полезности:

$$u(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

При желании для любой ограниченной функции можно подобрать лотерею так, в которой можно подбирать математическое ожидание, чтобы человек всегда играл.

В данном случае у нас ограниченная функция и ограниченное математическое ожидание.

*Пример 2.* Степенная функция полезности:

$$u(x) = x^\alpha, \alpha < 1$$

*Пример 3.* Квадратичная функция полезности:

$$u(x) = bx - cx^2 : b, c > 0, x < \frac{b}{2c}$$

**Задача 1.** Пусть есть инвестор с капиталом  $w$  и он может вложить деньги в 2 неколлиерованных  $\xi_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$  и  $\xi_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ .

$u(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ .  $\xi_1, \xi_2$  - это доходность, которая выражена в процентах. В какой пропорции нужно разделить капитал, чтобы максимизировать нашу полезность.

РЕШЕНИЕ

Введём доли  $\alpha$  и  $1 - \alpha$ . Тогда доход инвестора будет вычисляться по формуле:

$$s = \alpha w(1 + \xi_1) + (1 - \alpha)w(1 + \xi_2)$$

Будем максимизировать математическое ожидание от функции полезности:

$$Eu(s) = E(1 - e^{-\lambda \cdot s}) = 1 - E(e^{-\lambda(\alpha w(1+\xi_1)+(1-\alpha)w(1+\xi_2))}) \rightarrow \max_{\alpha}$$

Раскроем скобки и упростим выражение:

$$\begin{aligned} 1 - E(e^{-\lambda(\alpha w(1+\xi_1)+(1-\alpha)w(1+\xi_2))}) &= 1 - E(e^{-\lambda w(\alpha(1+\xi_1)+(1-\alpha)(1+\xi_2))}) = \\ &= 1 - E(e^{-\lambda w(\alpha\xi_1+1+\xi_2-\alpha\xi_2)}) = 1 - e^{-\lambda w} E(e^{-\lambda w(\alpha\xi_1+\xi_2(1-\alpha))}) \rightarrow \max \Rightarrow \\ &E(e^{-\lambda w(\alpha\xi_1+\xi_2(1-\alpha))}) \rightarrow \min \end{aligned}$$

Так как величины неколлинеарны, то:

$$Ee^{-\lambda w \alpha \xi_1} \cdot Ee^{-\lambda w \xi_2 (1-\alpha)} \rightarrow \min$$

Сделаем замену  $\beta = -w\lambda\alpha$  и попытаемся взять следующий интеграл

$$Ee^{-w\lambda\alpha\xi_1} = Ee^{\beta\xi_1} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\beta x_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x_1-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} dx_1$$

Известно, что производящая функция моментов для нормального распределения есть следующая величина:

$$Ee^{\beta\xi_1} = e^{\mu\beta + \frac{\beta^2\sigma_1^2}{2}}$$

Тогда преобразуем выражение:

$$Ee^{-\lambda w \alpha \xi_1} \cdot Ee^{-\lambda w \xi_2 (1-\alpha)} = e^{\left(-\mu_1 w \lambda \alpha + \frac{w^2 \lambda^2 \alpha^2 \sigma_1^2}{2} - \mu_2 w \lambda (1-\alpha) + \frac{w^2 \lambda^2 (1-\alpha)^2 \sigma_2^2}{2}\right)} \rightarrow \min_{\alpha}$$

$$-w\lambda\mu_1 + w^2\lambda^2\alpha\sigma_1^2 + w\lambda\mu_2 - w^2\lambda^2(1-\alpha)\sigma_2^2 = 0$$



$$\alpha = \frac{\mu_1 - \mu_2 + w\lambda\sigma_2^2}{w\lambda\sigma_1^2 + w\lambda\sigma_2^2}$$

Пусть  $\mu_1 = \mu_2 : \alpha = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$ . В какой пропорции нужно разделить, чтобы минимизировать дисперсию.

$$D(w\alpha(1+\xi_1)) + D(w(1-\alpha)(1+\xi_2)) = w^2\alpha^2 D\xi_1 + w^2(1-\alpha)^2 D\xi_2 = w^2\alpha^2\sigma_1^2 + w^2(1-\alpha)^2\sigma_2^2$$

$$2\alpha w^2\sigma_1^2 - 2w^2(1-\alpha)\sigma_2^2 = 0$$

$$\alpha = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$$

Решение, максимизирующее полезность соответствует решению, минимизирующую дисперсию портфеля. Совпадения есть в случае  $\mu_1 = \mu_2$ . Интересно посмотреть через призму полезности.

Активы, различные портфели, ожидание и дисперсия.  $\mu, \sigma$  - спектр доходности. Почему он определяется выпуклой фигурой.

Стандартное отклонение - выпуклая функция. Если есть возможность выбрать из различных портфелей, то мы можем сформировать любой портфель. Данное множество - плотно, сплошное (говорим про овал).

Такое множество называется ЭФФЕКТИВНОЕ МНОЖЕСТВО. Набор не даёт конкретный портфель, потому что мы не понимаем в чём разница между портфелями. **Критерий выбора** - поиск точки, в которой полезность максимальная - на кривой выбирает тот портфель, который даёт максимальную полезность и в этом случае будет достигаться баланс между двумя теориями.

НТ: кривые безразличия - те портфели, между которыми клиент индеферентен. В осях  $\mu, \sigma$  и если рассмотреть одинаково полезные портфели, то они будут образовывать выпуклую кривую. И тогда решение - это точка касательной множества всех портфелей и совпадать с базовыми теориями кривых безразличия.

## 1.2 НТ1 Свойства функции полезности

1. Определить, какую максимальную сумму агент с капиталом 100 и функцией полезности  $u(x) = 5x - 0.01x^2$  согласится заплатить, чтобы избавиться от потенциального ущерба, принимающего значения 0, 10, 20, 30 с равными вероятностями.

*Решение* 1. Величина ущерба - случайная величина с данным (известным) распределением, обозначим за  $\xi$ .

Величина  $E\xi = \sum_{i=1}^4 p_i \xi_i = 15$  - ожидаемая величина ущерба в следующий промежуток времени.  $u(x)$  - функция полезности от капитала, а  $a$  - величина, которую агент может заплатить, если хочет избавиться от риска.

Необходимо сравнить две величины. Первая -  $E(u(w - \xi))$  - ожидаемая полезность при отказе от платы. Вторая -  $u(w - a)$  - ожидаемая полезность при выплате суммы  $a$  за полный отказ от риска.

Так как  $u(w)' > 0$ , а  $w(w)'' < 0$ , то есть функция возрастает и вогнута, то по неравенству Йенсена:

$$E(u(w - \xi)) \leq u(E(w - \xi)) = u(w - E\xi)$$

Для того, чтобы найти максимальную сумму, которую агент согласится заплатить, необходимо приравнять ожидаемую полезность при отказе и ожидаемую полезность при выплате суммы  $a$  и решить полученное равенство относительно  $a$ :

$$E(u(w - \xi)) = u(w - a)$$

$$E(u(w - \xi)) = \sum_{i=1}^4 u(w - \xi_i) p_i = \sum_{i=1}^4 p_i (5(w - \xi_i) - 0.01 \cdot (w - \xi_i)^2) = 351.5$$

$$u(w - a) = 5(100 - a) - 0.01(100 - a)^2 = 351.5$$

$$a = 15.3784$$

2. Определить, при каком значении капитала агент из предыдущей задачи будет наиболее интересен страховой организации, а при каком - наименее интересен.

*Решение 2.* В прошлой задаче мы определились, что максимальную величину агент готов будет заплатить при выполнении равенства:

$$E(u(w - \xi)) = u(w - a)$$

Агент будет наиболее интересен компании, когда  $a \rightarrow \max$  (когда выплачивается агентом максимальное количество денег) и менее интересен, когда  $a \rightarrow \min$ .

Идея: выразить  $a$  через  $w$  и найти максимум и минимум функции по  $w$ .

Получим квадратное уравнение относительно  $w$ :

$$0.01a^2 - a \cdot (0.02w + 5) + 0.3w - 78.5 = 0$$

$$a = -250 + w \mp \sqrt{70350 - 530w + w^2}$$

Осталось выбрать, как ограничивать  $u$ ,  $a$  и  $w$ .  $a$ , наверное, не может быть меньше нуля, тогда это означает, что страховая компания должна заплатить. Тогда, в одном из решений, решая относительно  $w$ , получим, что  $a_{\min} = a(w_{\min}) = a(261.667)$ .

Дальше стоит вопрос как ограничивать  $u$  и  $w$ . Снизу есть ограничение по  $w$ : 0, так как капитал не может быть отрицательным. Что есть верхняя граница  $w$ ? Два варианта: точка, в которой функция полезности начинает убывать, либо точка, в которой функция полезности равна нулю.

Тогда ответы, соответственно,  $w_{\max} = 200$  или  $w_{\max} = 500$

3.1 Решить первую задачу в случае, если потенциальный ущерб определяется случайной величиной с плотностью распределения  $f_\xi(x) = a\sqrt{25-x^2}, x \in [0; 5]$ , а функция полезности есть:  $u(x) = \ln x = \log_e x$  или  $u(x) = \lg x = \log_{10} x$

Решение 3.

$$E(u(w - \xi)) = u(w - a)$$

$$u(w - a) = \ln(100 - a)$$

$$E(u(w - \xi)) = E(\ln(100 - \xi)) = \int_0^5 \ln(100 - x) a\sqrt{25 - x^2} dx$$

Нужно взять интеграл, если нечего будет делать,  $a \approx 0.05$

4. Инвестор хочет распределить свой капитал между ценной бумагой, доходность по которой определяется  $\xi_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$  с математическим ожиданием 5% и стандартным отклонением 2% и безрисковой ценной бумагой с фиксированной доходностью 4%.

Какую часть своего капитала инвестору стоит вложить в первую ценную бумагу, если его функция полезности есть  $u(x) = 1 - e^{-ax}$

Решение 4. Введём доли  $\alpha$  и  $1 - \alpha$ . Тогда доход инвестора вычислим по формуле:

$$s = w\alpha(1 + \xi_1) + 1.04 \cdot w(1 - \alpha)$$

Будем максимизировать математическое ожидание от функции полезности:

$$Eu(s) = E(1 - e^{-\lambda \cdot s}) = 1 - E(e^{-\lambda(w\alpha(1+\xi_1)+1.04 \cdot w(1-\alpha))}) \rightarrow \max_{\alpha}$$

Раскроем скобки и упростим выражение:

$$1 - e^{-\lambda w 1.04} \cdot Ee^{-\lambda w \alpha (\xi_1 - 0.04)} \rightarrow \max_{\alpha}$$

$$Ee^{-\lambda w \alpha (\xi_1 - 0.04)} \rightarrow \min_{\alpha}$$

Сделаем замену  $\beta = -w\lambda\alpha$  и попытаемся взять следующий интеграл

$$Ee^{-w\lambda\alpha\xi_1} = Ee^{\beta\xi_1} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\beta x_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x_1 - \mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} dx_1$$

Известно, что производящая функция моментов для нормального

распределения есть следующая величина:

$$\begin{aligned}
Ee^{\beta\xi_1} &= e^{\mu\beta + \frac{\beta^2\sigma_1^2}{2}} \\
Ee^{-\lambda w\alpha\xi_1} &= e^{-\mu_1 w\lambda\alpha + \frac{w^2\lambda^2\alpha^2\sigma_1^2}{2}} \\
-\mu_1 w\lambda + w^2\alpha\lambda^2\sigma_1^2 &= 0 \\
\alpha &= \frac{\mu_1}{w\lambda\sigma_1^2} = \frac{5}{w \cdot a \cdot 4}
\end{aligned}$$

5. Решить предыдущую задачу, если инвестор распределяет капитал между двумя ценными бумагами, доходности которых распределены нормально с математическими ожиданиями  $\mu_1, \mu_2$ , стандартными отклонениями  $\sigma_1, \sigma_2$  и коэффициентов корреляции  $\rho$ .

$$\begin{aligned}
cov(\xi, \eta) &= \sqrt{D\xi \cdot D\eta} \cdot \rho(\xi, \eta) \\
E(\xi\eta) - E\xi E\eta &= \sqrt{D\xi \cdot D\eta} \cdot \rho(\xi, \eta) \\
E(\xi\eta) &= \sqrt{D\xi \cdot D\eta} \cdot \rho(\xi, \eta) + E\xi E\eta \\
D\xi &= E\xi^2 - (E\xi)^2 \\
E(\xi\eta) &= \sqrt{(E\xi^2 - (E\xi)^2) \cdot (E\eta^2 - (E\eta)^2)} \cdot \rho(\xi, \eta) + E\xi E\eta \rightarrow \min_{\alpha}
\end{aligned}$$

Нам известно всё, кроме  $E\xi^2$

### 1.3

Хотим понять, кто менее склонен к риску. Давайте предлагать игру с маленькими выигрышами, игра характеризуется маленькой дисперсией. Кто готов заплатить в этой игре больше, то тем меньше человек склонен к риску.

Давайте разложим правую и левую часть в ряды Тейлора в окрестности капитала  $x_0 = w$

Не умоляя общности положим  $E\xi = 0$ . Чем коэффициент больше тем будет больше Risk Aversion. Данный коэффициент называется Эрроу-Пратт. Первая производная отрицательная, а вторая положительная.

Если коэффициент Эрроу-Прата возрастает, то чем больше капитал, тем больше мы готовы к риску.

Такую экспоненциальную функцию называют Constant Aversion,  
Relative COnst Aversion

Каро-утилити. А

CARA

Аксиоматика задних чисел

## 1.4 Страховой контракт

Есть  $w$ ,  $\xi$  и  $a$ :

$$Eu(w - \xi) \leq u(w - a)$$

Страхователь - я, страховщик - они. Что странивает для себя страховщик.  $u(w_1)$  - начальное состояние, а альтернатива  $Eu(w_1 + a - \xi)$

$$u(w_1) \leq Eu(w_1 + a - \xi)$$

ЗАДАЧА: компания будет платить только половину убытка.

Страхование эксцедента