Задачи по теме “Оценка платежей”

1. Сложные проценты

В задачах 6 — 10 решение заключается в том, чтобы привести все выплаты на дату выплаты оставшейся суммы и решить линейное уравнение. Формула приведения платежа по сложной процентной ставке на конкретную дату:

$$\mathrm{PV} = \frac{\mathrm{FV}}{(1+i)^{t-t_0}} \tag{1}$$

где PV – приведённое значение, i – процентная ставка, t_0 – дата приведения, t – дата платежа, FV – сумма платежа.

Задача 6.

Исходное соглашение: 20 млн. руб. через 3 года и 15 млн. руб. через 4 года.

Новое соглашение: 10 млн. руб. через 6 лет и оставшуюся сумму через 5 лет.

Величина сложной процентной ставки: $i = 10\%$.

Решение. Приведём все платежи на дату “через пять лет”. Оставшуюся сумму обозначим за x

$$\frac{20}{(1+0.1)^{3-5}} + \frac{15}{(1+0.1)^{4-5}} = \frac{10}{(1+0.1)^{6-5}} + x$$

$$x = \frac{20}{(1+0.1)^{3-5}} + \frac{15}{(1+0.1)^{4-5}} - \frac{10}{(1+0.1)^{6-5}}$$

Все расчёты выполнены в системы компьютерной алгебры Wolfram Mathematica.

In[1]:= $\frac{20}{(1+0.1)^{3-5}} + \frac{15}{(1+0.1)^{4-5}} - \frac{10}{(1+0.1)^{6-5}}$

Out[1]= 31.6091

Задача 7. Было три платежа:

600 млн. руб. через 2 года;

200 млн. руб. через 3 года;

100 млн. руб. через 4 года.

Стало два платежа:

500 млн. руб. через 2 года;

x млн. руб. через 4 года.

Величина сложной процентной ставки: $i = 12\%$.

Решение. Приведём все платежи на дату “через 4 года”.

$$\frac{600}{(1+0.12)^{2-4}}+\frac{200}{(1+0.12)^{3-4}}+\frac{100}{(1+0.12)^{4-4}}=\frac{500}{(1+0.12)^{2-4}}+x$$

$$x=\frac{600}{(1+0.12)^{2-4}}+\frac{200}{(1+0.12)^{3-4}}+\frac{100}{(1+0.12)^{4-4}}-\frac{500}{(1+0.12)^{2-4}}$$

In[2]:= $\frac{600}{(1+0.12)^{2-4}}+\frac{200}{(1+0.12)^{3-4}}+\frac{100}{(1+0.12)^{4-4}}-\frac{500}{(1+0.12)^{2-4}}$

Out[2]= 449.44

Задача 8. Было два платежа:
600 млн. руб. через 4 года;
200 млн. руб. через 3 года.
Стало три платежа:
500 млн. руб. через 2 года;
100 млн. руб. через 3 года.
x млн. руб. через 5 лет.
Величина сложной процентной ставки: i = 12%.

Решение. Приведём все платежи на дату “через пять лет”.

$$\frac{600}{(1+0.12)^{2-5}}+\frac{200}{(1+0.12)^{3-5}}=\frac{500}{(1+0.12)^{2-5}}+\frac{100}{(1+0.12)^{3-5}}+x$$

$$x=\frac{600}{(1+0.12)^{2-5}}+\frac{200}{(1+0.12)^{3-5}}-\frac{500}{(1+0.12)^{2-5}}-\frac{100}{(1+0.12)^{3-5}}$$

In[3]:= $\frac{600}{(1+0.12)^{2-5}}+\frac{200}{(1+0.12)^{3-5}}-\frac{500}{(1+0.12)^{2-5}}-\frac{100}{(1+0.12)^{3-5}}$

Out[3]= 265.933

Задача 9. Было два платежа:
800 млн. руб. через 2 года;
200 млн. руб. через 3 года;
100 млн. руб. через 4 года.
Стало три платежа:
500 млн. руб. через 2 года;
100 млн. руб. через 3 года.
x млн. руб. через 4 года.
Величина сложной процентной ставки: i = 12%.

Решение. Приведём все платежи на дату “через 4 года”.

$$\frac{800}{(1+0.12)^{2-4}}+\frac{200}{(1+0.12)^{3-4}}+\frac{100}{(1+0.12)^{4-4}}=\frac{500}{(1+0.12)^{2-4}}+\frac{100}{(1+0.12)^{3-4}}+x$$

$$x=\frac{800}{(1+0.12)^{2-4}}+\frac{200}{(1+0.12)^{3-4}}+\frac{100}{(1+0.12)^{4-4}}-\frac{500}{(1+0.12)^{2-4}}-\frac{100}{(1+0.12)^{3-4}}$$

In[4]:= $\frac{800}{(1+0.12)^{2-4}} + \frac{200}{(1+0.12)^{3-4}} + \frac{100}{(1+0.12)^{4-4}} - \frac{500}{(1+0.12)^{2-4}} - \frac{100}{(1+0.12)^{3-4}}$

Out[4]= 588.32

Задача 10. Было два платежа:

800 млн. руб. через 1 год;

300 млн. руб. через 2 года;

100 млн. руб. через 4 года.

Стало три платежа:

600 млн. руб. через 2 года;

200 млн. руб. через 3 года.

x млн. руб. через 4 года.

Величина сложной процентной ставки: $i = 10\%$.

Решение. Приведём все платежи на дату "через 4 года".

$$\frac{800}{(1+0.1)^{1-4}} + \frac{300}{(1+0.1)^{2-4}} + \frac{100}{(1+0.1)^{4-4}} = \frac{600}{(1+0.1)^{2-4}} + \frac{200}{(1+0.1)^{3-4}} + x$$

$$x = \frac{800}{(1+0.1)^{1-4}} + \frac{300}{(1+0.1)^{2-4}} + \frac{100}{(1+0.1)^{4-4}} - \frac{600}{(1+0.1)^{2-4}} - \frac{200}{(1+0.1)^{3-4}}$$

In[5]:= $\frac{800}{(1+0.1)^{1-4}} + \frac{300}{(1+0.1)^{2-4}} + \frac{100}{(1+0.1)^{4-4}} - \frac{600}{(1+0.1)^{2-4}} - \frac{200}{(1+0.1)^{3-4}}$

Out[5]= 581.8

2. Простые проценты

Пусть платежи S_1, S_2, ..., S_n выплачиваются в даты t_1, t_2, ..., t_n. Пусть все эти выплаты хотят заменить одним платежом известной величины S_0, требуется найти дату выплаты t_0. Решение: в случае с простой процентной ставкой формула для даты консолидированного платежа имеет вид

$$t_0 = \sum_{k=1}^{n} \frac{S_k}{S} t_k \qquad (2)$$

Формула приведения по простым процентам:

$$\text{FV} = \text{PV}\,(1 + i\,(t - t_0)) \qquad (3)$$

Задача 11.

Поток платежей: (3 млн, 4 мес), (3 млн. 5 мес), (5 млн, 6 мес)

Общая сумма: 12 млн

Величина простой процентной ставки: $i = 15\%$

Решение.

$$t_0 = \frac{3}{12} \times 4 + \frac{3}{12} \times 5 + \frac{5}{12} \times 6$$

In[6]:= **N[3/12 × 4 + 3/12 × 5 + 5/12 × 6]**

Out[6]= 4.75

Задача 12.

Поток платежей: (3 млн, 2 мес), (4 млн. 3 мес), (5 млн, 5 мес)

Общая сумма: 13 млн

Величина простой процентной ставки: $i = 10\%$

Решение.

$$t_0 = \frac{3}{13} \times 2 + \frac{4}{13} \times 3 + \frac{5}{13} \times 5$$

In[7]:= **N[3/13 × 2 + 4/13 × 3 + 5/13 × 5]**

Out[7]= 3.30769

Задача 13.

Поток платежей: (20 млн, 1.04), (10 млн. 1.09)

Новый поток платежей: (15 млн, 1.06), (x млн. 1.12)

Величина простой процентной ставки: $i = 15\%$ годовых, временная база 365 дней

Решение.

Дневная процентная ставка $i = 15/365 = 0.0411\%$

In[8]:= **N[0.15 / 365, 3]**

Out[8]= 0.000410959

Запишем уравнение в приведённых стоимостях (дата приведения 1 декабря)

$$20\left(1 + \frac{0.15\,(335 - 91)}{365}\right) + 10\left(1 + \frac{0.15\,(335 - 244)}{365}\right) =$$

$$15\left(1 + \frac{0.15\,(335 - 152)}{365}\right) + x$$

$$x = 20\left(1 + \frac{0.15\,(335 - 91)}{365}\right) +$$

$$10\left(1 + \frac{0.15\,(335 - 244)}{365}\right) - 15\left(1 + \frac{0.15\,(335 - 152)}{365}\right)$$

In[9]:= **20 (1 + 0.15 (335 - 91)/365) + 10 (1 + 0.15 (335 - 244)/365) - 15 (1 + 0.15 (335 - 152)/365)**

Out[9]= 16.2514