Страхование и актуарная математика

НТ2 & НТ3: Измерение риска

Преподаватель:

Радионов Андрей Владимирович

Александр Широков, ПМ-1701
Санкт-Петербург
2020 г., 7 семестр

1. [HT2] Вычислите 90% и 95% рисковый капитал для убытка, определяемого дискретной случайной величиной, принимающей значения $0, 1, 2, 5, 10, 50$ с вероятностями $0.1, 0.2, 0.4, 0.2, 0.07, 0.03$.

Решение: Запишем определение Value at Risk (VaR). Пусть ξ - случайный убыток:

$$\mathrm{VaR}_\alpha(\xi) = \inf\{x_\alpha : P\{\xi \geqslant x_\alpha\} \leqslant 1 - \alpha\}$$

Тогда:

$$\mathrm{VaR}_{0.95}(\xi) = \inf\{x_\alpha : P\{\xi \geqslant x_\alpha\} \leqslant 0.05\} = 10$$

$$\mathrm{VaR}_{0.9}(\xi) = \inf\{x_\alpha : P\{\xi \geqslant x_\alpha\} \leqslant 0.1\} = 5 \qquad \blacksquare$$

1. [HT3] Вычислите 90% и 95% условный рисковый капитал для убытка, определяемого дискретной случайной величиной, принимающей значения $0, 1, 2, 5, 10, 50$ с вероятностями $0.1, 0.2, 0.4, 0.2, 0.07, 0.03$.

Решение:

$$\mathrm{CVaR}_{0.9}(\xi) = \mathbb{E}(\xi | \xi \geqslant \mathrm{VaR}_{0.9}) =$$

$$= 5 \cdot \frac{0.2}{0.2 + 0.07 + 0.03} + 10 \cdot \frac{0.07}{0.2 + 0.07 + 0.03} + 50 \cdot \frac{0.03}{0.2 + 0.07 + 0.03} = 10.6667$$

$$\mathrm{CVaR}_{0.95}(\xi) = \mathbb{E}(\xi | \xi \geqslant \mathrm{VaR}_{0.95}) =$$

$$= 10 \cdot \frac{0.07}{0.07 + 0.03} + 50 \cdot \frac{0.03}{0.07 + 0.03} = 22 \qquad \blacksquare$$

2. [HT2] Для случайных величин с функциями распределения:

1. $\mathbb{F}(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}, x \in \mathbb{R}$
2. $\mathbb{F}(x) = 1 - \frac{16}{x^4}, x > 2$

Найти положительную полудисперсию, отрицательную полудисперсию, $\mathrm{VaR}_{0.9}$

Решение 2.1: Для начала найдем плотности, как производные от функций произведения:

$$f_\xi(x) = F(x)' = -\frac{e^{-x} \cdot (-1)}{(1+e^{-x})^2} = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$$

2.1.1 Тогда положительная полудисперсия определяется следующим выражением:

$$D\xi_+ = E(\xi - E\xi)_+^2 = \int\limits_{E\xi}^{+\infty} (x - E\xi)^2 f_\xi(x) dx$$

Найдем $E\xi$:

$$E\xi = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_\xi(x) dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} dx = 0$$

так как график симметричен относительно нуля

$$D\xi_+ = \int\limits_{0}^{+\infty} x^2 \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} dx = \frac{\pi^2}{6}$$

2.1.2 Отрицательная полудисперсия:

$$D\xi_- = \int\limits_{-\infty}^{0} x^2 \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} dx = \frac{\pi^2}{6}$$

2.1.3 $\mathrm{VaR}_{0.9}$:

$$F(x_\alpha) = \alpha : x_\alpha = \mathrm{VaR}_\alpha(\xi)$$

$$\frac{1}{1+e^{-x}} = \alpha$$

$$\frac{1}{\alpha} - 1 = e^{-x}$$

$$-x = \log\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)$$

$$\mathrm{VaR}_\alpha(\xi) = x_\alpha = -\log\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) = 2.19722 \qquad \blacksquare$$

2. [НТ3] Для случайных величин с функциями распределения:

1. $\mathbb{F}(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}, x \in \mathbb{R}$
2. $\mathbb{F}(x) = 1 - \frac{16}{x^4}, x > 2$

Найти $\mathrm{CVaR}_{0.9}$.

Решение:

$$1.\, \mathrm{CVaR}_\alpha(\xi) = \mathbb{E}(\xi|\xi \geqslant \mathrm{VaR}_\alpha) = \frac{1}{1-\alpha} \cdot \int\limits_{\mathrm{VaR}_\alpha}^{\infty} x f_\xi(x) dx = 3.25083$$

$$2.\, \mathrm{CVaR}_\alpha(\xi) = \frac{1}{1-\alpha} \cdot \int\limits_{\min\{\mathrm{VaR}_\alpha, 2\}}^{\infty} x f_\xi(x) dx = 4.74208 \qquad \blacksquare$$

3. Для портфеля из двух нормальных случайных величин с математическими ожиданиями $\mu_1 = 3, \mu_2 = 5$ и дисперсиями $\sigma_1^2 = 4$ и $\sigma_2^2 = 1$ и коэффициентом корреляции $\rho = 0.3$ найти 99% рисковый капитал.

Решение: Пусть $\xi_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ и $\xi_2 \sim N(\mu_2, \sigma_1^2)$. Тогда распределение портфеля является следующей нормальной величиной со следующими характеристиками:

$$\eta \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2)$$

$$F_\eta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2}} \cdot \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t-(\mu_1+\mu_2)}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2+2\rho\sigma_1\sigma_2)}} dt$$

Осталось решить уравнение $F(x) = \alpha$, где $\alpha = 0.99$. $\mathrm{VaR}_\alpha(\xi) = x_\alpha \approx 22.42$.

Если убыток $\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$, то:

$$\mathrm{VaR}_\alpha(\xi) = \mu + q_\alpha \sigma$$

где q_α - квантиль стандартного нормального распределения. Можнр и так считать. ■

4. (?) Объяснить, как распределить средства между двумя ценными бумагами из предыдущей задачи, чтобы минимизировать рисковый капитал. Сравните результат минимизации рискового капитала и минимизации дисперсии. Подумайте, можно ли обобщить вывод на другие распределения.

Решение: Пусть λ - доля средств, которую мы распределим для первой бумаги, а $(1-\lambda)$ - для второй. Математическое ожидание и дисперсия портфеля тогда будут равны:

$$\mu^* = \lambda\mu_1 + (1-\lambda)\mu_2$$

$$\sigma^* = \sqrt{\lambda^2\sigma_1^2 + (1-\lambda)^2\sigma_2^2 + 2\rho\lambda(1-\lambda)\sigma_1\sigma_2}$$

А что дальше я не понимаю - хотелось бы разобрать.

5. [HT2] Проверьте, насколько отличаются $\mathrm{VaR}_{0.99}$ и $\mathrm{VaR}_{0.995}$ для нормальной случайной величины, распределения Стьюдента с 10 степенями свободы, логнормального распределения. Подумайте, что это значит.

Рассуждение: капитал, который может быть потерян с вероятностью 0.01, может быть значительно больше, чем с вероятностью 0.005. Это происходит из-за медленной сходимости распределений и наличия тяжелых хвостов, вероятность убытка из которых тоже необходимо оценивать и не принебрегать.

3. [HT3] Такое же рассуждение, хвосты тяжелые.

7. [HT2] Симулируйте выборку объёмом 200 из нормального распределения случайной величины и оцените $VaR_{90\%}, VaR_{95\%}, VaR_{99\%}$ непараметрически и в предположении, что выборка получена из нормального распределения. Сравните качество методов. Эмперически сравните средне квадратичную ошибку оценки, полученной параметрическим и непараметрическим образом.

Решение:

1. Сначала найдём теоретические квантили

$$z_{\alpha=(0.9,0.95,0.99)} = 1.28155, 1.64485, 2.32635$$

2. Найдём непараметрические оценки квантилей. Квантили вычисляются по следующей формуле

$$X_{([\alpha n]+1)}$$

где X - вариационный ряд выборки, α - уровень значимости, n - число наблюдений.

3. В предположении, что выборка получена из нормального распределения поступим следующим образом. В качестве оценок для μ и σ вычислим выборочные средние и выборочное снадартное отклонение. В предположении, что $\xi \sim N(\mu, \sigma^2), \xi = \mu + \sigma\eta$, решим уравнение:

$$F_\xi(q_\alpha) = \mathbb{P}\{\xi < q_\alpha\} = \alpha$$

$$\mathbb{P}\left\{\frac{\xi - \mu}{\sigma} < \frac{q_\alpha - \mu}{\sigma}\right\} = \alpha$$

$$\Phi\left(\frac{q_\alpha - \mu}{\sigma}\right) = \alpha$$

где $\Phi_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$, откуда в принципе можем найти q_α. $q_\alpha = \mu + \sigma z_\alpha$. После этого ищем среднеквадратичную ошибку.

5. [НТ3]

Симулируйте выборку объёмом 200 из нормального распределения случайной величины и оцените $CVaR_{90\%}, CVaR_{95\%}, CVaR_{99\%}$ непараметрически и в предположении, что выборка получена из нормального распределения. Сравните качество методов. Эмперически сравните средне квадратичную ошибку оценки, полученной параметрическим и непараметрическим образом.

1. Непараметрическая оценка: рассматриваем вариационный ряд, находи α-квантиль по формуле из предыдущего пункта, находим все числа, большие данного квантиля и рассматриваем среднее значение.

2. Теоретические квантили ?

3. Параметрические оценки ?