Страхование и актуарная математика

Александр Широков ПМ-1701

Преподаватель:

Радионов Андрей Владимирович

Санкт-Петербург
2020 г., 7 семестр

Список литературы

[1]

Содержание

1 Конспекты лекций

1.1 Микроэкономические основы страхования

1.1.1 01.09.2020

Страхование вклада - если у банка возникают проблемы, то нам возвращают деньги банк в некоторой границе. Страхование - выход США из великой депрессии. Застраховать в принципе можно все что угодно.

1.1.2 03.09.2020

В ситуациях неопределенностей человек принимает решение не на основании математического ожидания $E\xi$, а на основании математического ожидания некоторой функции полезности $Eu(\xi)$, где u - некая функция полезности. За w - обозначим капитал, а за a - плата за риск, ξ - потенциальные убытки. Тогда ситуация будет описываться:

$$Eu(w-\xi) \quad u(w-a)$$

Пусть $W = 100$ и случайая величина убытков принимает следующие значения: 0 с вероятностью 0.9,1 с вероятностью 0.05,20 с вероятностью 0.05. Функция полезности - $u(x) = \ln(x+1)$. Математическое ожидание убытка $E\xi = 0.55$. Приходит банк и говорит продать за 60.

$w-\xi$ - начальное состояние, $w-a$ - возможное состояние, сравнение полезностей

Посчитаем:

$$Eu(w-\xi) = E\ln(100-\xi+1) = \ln(101-0+1)\cdot 0.9+\ln(100-1+1)\cdot 0.05+\ln(100-10+1)\cdot 0.05 = 4.60941$$

$$E\ln(100+1-0.55) = 4.60966$$

Есть $W, u(\xi), \xi, f_\xi(x)$:

$$E\left(u(W-\xi)\right) = \int_{-\infty}^{\infty} u(W-x)f_\xi(x)dx$$

Вместо бесконечностей используются границы интегрирования.

$$\Delta u = \frac{\Delta W}{W} \qquad du = \frac{dW}{W} \qquad u = \ln W$$

Определение 1.1.1. Пусть есть набор случайных величин ξ и будем задавать предпочтение подобным образом $\xi \geq \eta$ - предпочтение нестрого отношение, если существуют какие-то пары, которые находятся в бинарном отношении.

Мы будем говорить про свойства отношений:

1. Пиолнота: $\xi \geq \eta$ или $\eta \geq \xi$
2. Транзитивность: $\xi \geq \eta, \eta \geq \varepsilon \Rightarrow \xi \geq \varepsilon$
3. Из первого следует рефлексиновть

Будем говорить, что данное бинарное отношение является отношением *эквивалентности* - рефлексивно, транзитивно, симметрично.

Определение 1.1.2. Будем говорить, что $\xi \geq \eta$ и $\xi \not\sim \eta$ - отношение строго порядка

Определение 1.1.3. $V : \Xi \to R$ - функция V сохраняет упорядочивание, если $\xi \geq \eta$, то:

$$V(\xi) \geq V(\eta)$$

Определение 1.1.4. Пусть есть набор $\mathbb{A}_j$. $B \in A$ является полным по упорядочиванию, если для любых элементов $a, b \in A$ существует элемент $\exists c \in B$, что либо $a \geq c > b$ либо $a > c \geq b$.

Теорема 1.1. *На $\Xi \leq V$ существует отношение, сохраняющее отношение, тогда и только тогда, когда в Ξ существует счетно или конечное подмножество плотное по упорядочиванию.*

Как построить функцию полезности? Построим отношение порядка на множестве товаров, строим кривые безразличия - классы эквивалентности (все элементы внутри эквивалентны между собой), они не пересекаются.

Построим прямую, единичный вектор (бисскетриса). На что нужно умножить единичный вектор, чтобы попасть в точку пересечения, и высчитываем функцию полезности.

$$V^*(\xi) = Eu(\xi) = \sum u(x_i)p_i = V(x_1)p_1 + V(x_2)p_2$$

$$\xi : x_1 \mapsto p_1, x_2 \mapsto p_2$$

Мы можем выбрать функцию полезности таким образом

1.1.3 04.09.2020

Пусть случайная величина принимает значения $x \mapsto p$ и $y \mapsto 1-p$. Введем обозначение для такой случайной величины:

$$(x, y)_p$$

Наложим некоторые ограничения:

- Тогда индивид индеферентен: $(x, y)_1 \sim x$.

  Например: пусть ξ равномерно распределен на отрезке $[0, 1]$: $\xi \sim \mathbb{U}[0, 1]$.

- $(x, y)_p \sim (y, x)_{1-p}$

- $((x, y)_p, y)_q \sim (x, y)_{pq}$

  Пример: $(1, (2, 3)_{\frac{1}{2}})_{\frac{1}{2}}$ для игры $1 \mapsto \frac{1}{2}, 2 \mapsto \frac{1}{4}, 3 \mapsto \frac{1}{4}$

Ограничения:

- $\{p \in [0, 1] : (x, y)_p \geq z\}$ - замкнутное множество

- $\{p \in [0, 1] : z \geq (x, y)_p\}$ - замкнутное множество $\forall x, y, z \in \Xi$

- $x \sim y : (x, z)_p \sim (y, z)_p$

- $\exists w, b : \forall \xi \in \Xi$ выполняется, что $w \geq x \geq b$

- $(b, w)_p \geq (b, w)_q \Leftrightarrow p > q$

Теорема 1.2. *Если Ξ и на нём введено отношение предпочтения $\geq$, то найдётся такая функция V, что*

$$V((x, y)_p) = pV(x) + (1-p)V(y)$$

$$Eu(\xi) = (x, y)_p$$

$$V(\xi) = Eu(\xi)$$

$$u(y) : R \to R, V : \Xi \to R$$

Доказательство: Хэливэриан.

Рассмотрим некоторый функционал $V((x,y)_p)$ и применим к нему некоторое преобразование:

$$f\left(V((x,y)_p)\right) = f(V(x)\cdot p + V(y)\cdot(1-p)) = f(V(x))\cdot p + f(V(y))\cdot(1-p)$$

и это линейная функция - линейное преобразование.

Пример: $u(x) = \ln(x+1)$, $\xi, f_\xi(y), Eu(\xi) = \int u(x) f_\xi(x)dx$

$u_1(x) = a\ln(x+1) + b, a > 0$

$$Eu_1(\xi) = \int a\ln(x+1) + b f_\xi(x)dx = a\int ln(x+1)f(x)dx + b\int f(x)dx = a\int u(x)f_\xi(x)dx + b$$

следовательно функционал является единственным с точностью до линейного преобразования.

1.1.4 08.09.2020

Напоминание:

$$V(\xi) = \sum p_j V(x_j)$$

и при дискретных ξ:

$$V(x_j) = u(x_j)$$

Рассмотрим некоторые свойства, которыми должна обладать функция полезности:

1. Функция начинается в нуле из-за монотонного преобразования
2. Функция полезности $u(x)$ не убывает (возрастает):

$$u'(x) > 0$$

3. Функция $u(x)$ вогнутая.

$$u(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \lambda u(x_1) + (1-\lambda)u(x_2)$$

Заметим, что если функция полезности вогнутая, то находясь в ситуации неопределенности, индивид будет согласен заплатить, чем иметь состояние неопределенности. Человек хочет иметь детерменированный выигрыш, нежели при ситуации неопределенности - это происходит из-за вогнутости функции.

- есть функция вогнута, то говорят RISK AVERSION
- если выпукла, то говорят RISK LOVING
- если функция линейна, то RISK NEUTRAL

Почитать здесь можно.

4.

$$Eu(\xi) \leq u(E(\xi))$$

Сравнивает полезность ситуации $u(w-a)$ - нет риска, чуть меньше денег, и есть риск и чуть больше денег - $Eu(w-\xi)$ и если больше, то он соглашается - страхование возможно для некоторого a и человек готов заплатить. С помощью неравенства Йенсена:

$$Eu(w-\xi) \leq u(E(w-\xi)) = u(w - E\xi)$$

$$u(w-a) \geq Eu(w-\xi) \Leftrightarrow u(w-E\xi) = u(w-a)$$

и следовательно мы сможем найти $a = E\xi$ из которого будет выполняться свойство.

Пример 1. Возьмем экспоненциальную функцию полезности:

$$u(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

При желании для любой ограниченной функции можно подобрать лотерею так, в которой можно подбирать математическое ожидание, чтобы человек всегда играл.

В данном случае у нас ограниченная функция и ограниченное математическое ожидание.

Пример 2. Степенная функция полезности:

$$u(x) = x^{\alpha}, \alpha < 1$$

Пример 3. Квадратичная функция полезности:

$$u(x) = bx - cx^2 : b, c > 0, x < \frac{b}{2c}$$

Задача 1. Пусть есть инвестор с капиталом w и он может вложить деньги в 2 некоррелированных $\xi_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ и $\xi_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$.

$u(x) = 1 - e^{-\lambda x}$. ξ_1, ξ_2 - это доходность, которая выражена в процентах. В какой пропорции нужно разделить капитал, чтобы максимизировать нашу полезность.

Решение

Введём доли α и $1-\alpha$. Тогда доход инвестора будет вычисляться по формуле:

$$s = \alpha w(1+\xi_1) + (1-\alpha)w(1+\xi_2)$$

Будем максимизировать математическое ожидание от функции полезности:

$$Eu(s) = E(1 - e^{-\lambda \cdot s}) = 1 - E\left(e^{-\lambda(\alpha w(1+\xi_1)+(1-\alpha)w(1+\xi_2))}\right) \to \max_{\alpha}$$

Раскроем скобки и упростим выражение:

$$1 - E\left(e^{-\lambda(\alpha w(1+\xi_1)+(1-\alpha)w(1+\xi_2))}\right) = 1 - E\left(e^{-\lambda w(\alpha(1+\xi_1)+(1-\alpha)(1+\xi_2))}\right) =$$

$$= 1 - E\left(e^{-\lambda w(\alpha\xi_1+1+\xi_2-\alpha\xi_2)}\right) = 1 - e^{-\lambda w}E\left(e^{-\lambda w(\alpha\xi_1+\xi_2(1-\alpha))}\right) \to \max \Rightarrow$$

$$E\left(e^{-\lambda w(\alpha\xi_1+\xi_2(1-\alpha))}\right) \to \min$$

Так как величины неколлерированы, то:

$$Ee^{-\lambda w\alpha\xi_1} \cdot Ee^{-\lambda w\xi_2(1-\alpha)} \to \min$$

Сделаем замену $\beta = -w\lambda\alpha$ и попытаемся взять следующий интеграл

$$Ee^{-w\lambda\alpha\xi_1} = Ee^{\beta\xi_1} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\beta x_1}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x_1-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}dx_1$$

Известно, что производящая функция моментов для нормального распредления есть следующая величина:

$$Ee^{\beta\xi_1} = e^{\mu\beta+\frac{\beta^2\sigma_1^2}{2}}$$

Тогда преобразуем выражение:

$$Ee^{-\lambda w\alpha\xi_1} \cdot Ee^{-\lambda w\xi_2(1-\alpha)} = e^{\left(-\mu_1 w\lambda\alpha+\frac{w^2\lambda^2\alpha^2\sigma_1^2}{2}-\mu_2 w\lambda(1-\alpha)+\frac{w^2\lambda^2(1-\alpha)^2\sigma_2^2}{2}\right)} \to \min_{\alpha}$$

$$-w\lambda\mu_1 + w^2\lambda^2\alpha\sigma_1^2 + w\lambda\mu_2 - w^2\lambda^2(1-\alpha)\sigma_2^2 = 0$$

$$\alpha = \frac{\mu_1 - \mu_2 + w\lambda\sigma_2^2}{w\lambda\sigma_1^2 + w\lambda\sigma_2^2}$$

Пусть $\mu_1 = \mu_2 : \alpha = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$. В какой пропорции нужно разделить, чтобы минимизировать дисперсию.

$$D(w\alpha(1+\xi_1))+D(w(1-\alpha)(1+\xi_2)) = w^2\alpha^2 D\xi_1+w^2(1-\alpha)^2 D\xi_2 = w^2\alpha^2\sigma_1^2+w^2(1-\alpha)^2\sigma_2^2$$

$$2\alpha w^2\sigma_1^2 - 2w^2(1-\alpha)\sigma_2^2 = 0$$

$$\alpha = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$$

Решение, максимизирующее полезность соответствует решению, минимизирующую диспесию портфеля. Совпадения есть в случае $\mu_1 = \mu_2$. Интересно посмотреть через призму полезности.

Активы, различные портфели, ожидание и дисперсия. μ, σ - спектр доходности. Почему он определяется выпуклой фигурой.

Стандартное отклонение - выпуклая функция. Если есть возможность выбрать из различных портфелей, то мы можем сформировать любой портфель. Данное множество - плотно , сплошное (говорим про овал).

Такое множество называется эффективное множество. Набор не даёт конкректный портфель, потому что мы не понимаем в чём разница между портфелями. **Критерий выбора** - поиск точки, в которой полезность максимальная - на кривой выбирает тот портфель, который дает максимальная полезность и в этом случае будет достигаться баланс между двумя теориями.

НТ: кривые безразличия - те портфели, между которыми клиент индеферентен. В осях μ, σ и если рассмотреть одинаково полезные портфели, то они будут образовывать выпуклую кривую. И тогда решение - это точка касательной множества всех портфелей и совпадать с базовыми теорями кривых безразличия.

1.2 НТ1 Свойства функции полезности

1. Определить, какую максимальную сумму агент с капиталом 100 и функцией полезности $u(x) = 5x - 0.01x^2$ согласится заплатить, чтобы избавиться от потенциального ущерба, принимающего значения $0, 10, 20, 30$ с равными вероятностями.

Решение 1. Величина ушерба - случайная величина с данным (известным) распределением, обозначим за ξ.

Величина $E\xi = \sum\limits_{i=1}^{4} p_i \xi_i = 15$ - ожидаемая величина ущерба в следующий промежуток времени. $u(x)$ - функция полезности от капитала, а a - величина, которую агент может заплатить, если хочет избавиться от риска.

Необходимо сравнить две величины. Первая - $E(u(w - \xi))$ - ожидаемая полезность при отказе от платы. Вторая - $u(w - a)$ - ожидаемая полезность при выплате суммы a за полный отказ от риска.

Так как $u(w)' > 0$, а $w(w)'' < 0$, то есть функция возрастает и вогнута, то по неравенству Йенсена:

$$E(u(w - \xi)) \leq u(E(w - \xi)) = u(w - E\xi)$$

Для того, чтобы найти максмальную сумму, которую агент согласится заплатить, необходимо приравнять ожидаемую полезность при отказе и ожидаемую полезность при выплате суммы a и решить полученное равенство относительно a:

$$E(u(w - \xi)) = u(w - a)$$

$$E(u(w - \xi)) = \sum_{i=1}^{4} u(w - \xi_i) p_i = \sum_{i=1}^{4} p_i (5(w - \xi_i) - 0.01 \cdot (w - \xi_i)^2) = 351.5$$

$$u(w - a) = 5(100 - a) - 0.01(100 - a)^2 = 351.5$$

$$a = 15.3784$$

2. Определить, при каком значении капитала агент из предыдущей задачи будет наиболее интересен страховой организации, а при каком - наименее интересен.

Решение 2. В прошлой задаче мы определились, что максимальную величину агент готов будет заплатить при выполнении равенства:

$$E(u(w-\xi)) = u(w-a)$$

Агент будет наиболее интересен компании, когда $a \to \max$ (когда выплачивается агентом максимальное количество денег) и менее интересен, когда $a \to \min$.

Идея: выразить a через w и найти максимум и минимум функции по w.

Получим квадратное уравнение относительно w:

$$0.01a^2 - a \cdot (0.02w + 5) + 0.3w - 78.5 = 0$$

$$a = -250 + w \mp \sqrt{70350 - 530w + w^2}$$

Осталось выбрать, как ограничивать u, a и w. a, наверное, не может быть меньше нуля, тогда это означает, что страховая компания должна заплатить. Тогда, в одном из решений, решая относительно w, получим, что $a_{min} = a(w_{min}) = a(261.667)$.

Дальше стоит вопрос как ограничивать u и w. Снизу есть ограничение по w: 0, так как капитал не может быть отрицтаельным. Что есть верхняя граница w? Два варианта: точка, в которой функция полезности начинает убывать, либо точка, в которой функция полезности равна нулю.

Тогда ответы, соответственно, $w_{max} = 200$ или $w_{max} = 500$

3.1 Решить первую задачу в случае, если потенциальный ущерб определяется случайной величиной с плотностью распределения $f_\xi(x) = a\sqrt{25-x^2}, x \in [0;5]$, а функция полезности есть: $u(x) = \ln x = \log_e x$ или $u(x) = \lg x = \log_{10} x$

Решение 3.

$$E(u(w-\xi)) = u(w-a)$$

$$u(w-a) = \ln(100-a)$$

$$E(u(w-\xi)) = E\left(\ln(100-\xi)\right) = \int\limits_0^5 \ln(100-x)a\sqrt{25-x^2}dx$$

Нужно взять интеграл, если нечего будет делать, $a \approx 0.05$

4. Инвестор хочет распределить свой капитал между ценной бумагой, доходность по которой определяется $\xi_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ с матемматическим ожиданием 5% и стандартным отклонением 2% и безрисковой ценной бумагой с фиксированной доходностью 4%.

Какую часть своего капитала инвестору стоит вложить в первую ценную бумагу, если его функция полезности есть $u(x) = 1 - e^{-ax}$

Решение 4. Введём доли α и $1-\alpha$. Тогда доход инвестора вычислим по формуле:

$$s = w\alpha(1+\xi_1) + 1.04 \cdot w(1-\alpha)$$

Будем максимизировать математическое ожидание от функции полезности:

$$Eu(s) = E(1 - e^{-\lambda \cdot s}) = 1 - E\left(e^{-\lambda(w\alpha(1+\xi_1)+1.04\cdot w(1-\alpha))}\right) \to \max_\alpha$$

Раскроем скобки и упростим выражение:

$$1 - e^{-\lambda w 1.04} \cdot Ee^{-\lambda w\alpha(\xi_1 - 0.04)} \to \max_\alpha$$

$$Ee^{-\lambda w\alpha(\xi_1 - 0.04)} \to \min_\alpha$$

Сделаем замену $\beta = -w\lambda\alpha$ и попытаемся взять следующий интеграл

$$Ee^{-w\lambda\alpha\xi_1} = Ee^{\beta\xi_1} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\beta x_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x_1-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} dx_1$$

Известно, что производящая функция моментов для нормального распредления есть следующая величина:

$$Ee^{\beta\xi_1} = e^{\mu\beta + \frac{\beta^2\sigma_1^2}{2}}$$

$$Ee^{-\lambda w\alpha\xi_1} = e^{-\mu_1 w\lambda\alpha + \frac{w^2\lambda^2\alpha^2\sigma_1^2}{2}}$$

$$-\mu_1 w\lambda + w^2\alpha\lambda^2\sigma_1^2 = 0$$

$$\alpha = \frac{\mu_1}{w\lambda\sigma_1^2} = \frac{5}{w \cdot a \cdot 4}$$

5. Решить предыдущую задачу, если инвестор распределяет капитал между двумя ценными бумагами, доходности которых распределены нормально с математическими ожиданиями μ_1, μ_2, стандартными отклонениями σ_1, σ_2 и коэффициентов корреляции ρ.

$$cov(\xi, \eta) = \sqrt{D\xi \cdot D\eta} \cdot \rho(\xi, \eta)$$

$$E(\xi\eta) - E\xi\eta = \sqrt{D\xi \cdot D\eta} \cdot \rho(\xi, \eta)$$

$$E(\xi\eta) = \sqrt{D\xi \cdot D\eta} \cdot \rho(\xi, \eta) + E\xi\eta$$

$$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2$$

$$E(\xi\eta) = \sqrt{(E\xi^2 - (E\xi)^2) \cdot (E\eta^2 - (E\eta)^2)} \cdot \rho(\xi, \eta) + E\xi\eta \to \min_{\alpha}$$

Нам известно всё, кроме $E\xi^2$