Страхование и актуарная математика

Александр Широков ПМ-1701

Преподаватель:

Радионов Андрей Владимирович

Санкт-Петербург
2020 г., 7 семестр

Список литературы

[1]

Содержание

1 Конспекты лекций

1.1 Микроэкономические основы страхования

1.1.1 01.09.2020

Страхование вклада - если у банка возникают проблемы, то нам возвращают деньги банк в некоторой границе. Страхование - выход США из великой депрессии. Застраховать в принципе можно все что угодно.

1.1.2 03.09.2020

В ситуациях неопределенностей человек принимает решение не на основании математического ожидания $E\xi$, а на основании математического ожидания некоторой функции полезности $Eu(\xi)$, где u - некая функция полезности. За w - обозначим капитал, а за a - плата за риск, ξ - потенциальные убытки. Тогда ситуация будет описываться:

$$Eu(w-\xi) \quad u(w-a)$$

Пусть $W = 100$ и случайая величина убытков принимает следующие значения: 0 с вероятностью 0.9,1 с вероятностью 0.05,20 с вероятностью 0.05. Функция полезности - $u(x) = \ln(x+1)$. Математическое ожидание убытка $E\xi = 0.55$. Приходит банк и говорит продать за 60.

$w-\xi$ - начальное состояние, $w-a$ - возможное состояние, сравнение полезностей

Посчитаем:

$$Eu(w-\xi) = E\ln(100-\xi+1) = \ln(101-0+1)\cdot 0.9+\ln(100-1+1)\cdot 0.05+\ln(100-10+1)\cdot 0.05 = 4.60941$$

$$E\ln(100+1-0.55) = 4.60966$$

Есть $W, u(\xi), \xi, f_\xi(x)$:

$$E\left(u(W-\xi)\right) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} u(W-x)f_\xi(x)dx$$

Вместо бесконечностей используются границы интегрирования.

$$\Delta u = \frac{\Delta W}{W} \qquad du = \frac{dW}{W} \qquad u = \ln W$$

Определение 1.1.1. Пусть есть набор случайных величин ξ и будем задавать предпочтение подобным образом $\xi \geq \eta$ - предпочтение нестрого отношение, если существуют какие-то пары, которые находятся в бинарном отношении.

Мы будем говорить про свойства отношений:

1. Пиолнота: $\xi \geq \eta$ или $\eta \geq \xi$
2. Транзитивность: $\xi \geq \eta, \eta \geq \varepsilon \Rightarrow \xi \geq \varepsilon$
3. Из первого следует рефлексиновть

Будем говорить, что данное бинарное отношение является отношением *эквивалентности* - рефлексивно, транзитивно, симметрично.

Определение 1.1.2. Будем говорить, что $\xi \geq \eta$ и $\xi \not\sim \eta$ - отношение строго порядка

Определение 1.1.3. $V : \Xi \to R$ - функция V сохраняет упорядочивание, если $\xi \geq \eta$, то:

$$V(\xi) \geq V(\eta)$$

Определение 1.1.4. Пусть есть набор $\mathbb{A}_j$. $B \in A$ является полным по упорядочиванию, если для любых элементов $a, b \in A$ существует элемент $\exists c \in B$, что либо $a \geq c > b$ либо $a > c \geq b$.

Теорема 1.1. *На $\Xi \leq V$ существует отношение, сохраняющее отношение, тогда и только тогда, когда в Ξ существует счетно или конечное подмножество плотное по упорядочиванию.*

Как построить функцию полезности? Построим отношение порядка на множестве товаров, строим кривые безразличия - классы эквивалентности (все элементы внутри эквивалентны между собой), они не пересекаются.

Построим прямую, единичный вектор (бисскетриса). На что нужно умножить единичный вектор, чтобы попасть в точку пересечения, и высчитываем функцию полезности.

$$V^*(\xi) = Eu(\xi) = \sum u(x_i)p_i = V(x_1)p_1 + V(x_2)p_2$$

$$\xi : x_1 \mapsto p_1, x_2 \mapsto p_2$$

Мы можем выбрать функцию полезности таким образом

1.1.3 04.09.2020

Пусть случайная величина принимает значения $x \mapsto p$ и $y \mapsto 1-p$. Введем обозначение для такой случайной величины:

$$(x, y)_p$$

Наложим некоторые ограничения:

- Тогда индивид индеферентен: $(x, y)_1 \sim x$.

  Например: пусть ξ равномерно распределен на отрезке $[0, 1]$: $\xi \sim \mathbb{U}[0, 1]$.

- $(x, y)_p \sim (y, x)_{1-p}$

- $((x, y)_p, y)_q \sim (x, y)_{pq}$

  Пример: $(1, (2, 3)_{\frac{1}{2}})_{\frac{1}{2}}$ для игры $1 \mapsto \frac{1}{2}, 2 \mapsto \frac{1}{4}, 3 \mapsto \frac{1}{4}$

Ограничения:

- $\{p \in [0, 1] : (x, y)_p \geq z\}$ - замкнутое множество

- $\{p \in [0, 1] : z \geq (x, y)_p\}$ - замкнутое множество $\forall x, y, z \in \Xi$

- $x \sim y : (x, z)_p \sim (y, z)_p$

- $\exists w, b : \forall \xi \in \Xi$ выполняется, что $w \geq x \geq b$

- $(b, w)_p \geq (b, w)_q \Leftrightarrow p > q$

Теорема 1.2. *Если Ξ и на нём введено отношение предпочтения $\geq$, то найдётся такая функция V, что*

$$V((x, y)_p) = pV(x) + (1-p)V(y)$$

$$Eu(\xi) = (x, y)_p$$

$$V(\xi) = Eu(\xi)$$

$$u(y) : R \to R, V : \Xi \to R$$

Доказательство: Хэливэриан.

Рассмотрим некоторый функционал $V((x,y)_p)$ и применим к нему некоторое преобразование:

$$f\left(V((x,y)_p)\right) = f(V(x)\cdot p + V(y)\cdot(1-p)) = f(V(x))\cdot p + f(V(y))\cdot(1-p)$$

и это линейная функция - линейное преобразование.

Пример: $u(x) = \ln(x+1)$, $\xi, f_\xi(y), Eu(\xi) = \int u(x) f_\xi(x)dx$

$u_1(x) = a\ln(x+1) + b, a > 0$

$$Eu_1(\xi) = \int a\ln(x+1) + bf_\xi(x)dx = a\int ln(x+1)f(x)dx + b\int f(x)dx = a\int u(x)f_\xi(x)dx + b$$

следовательно функционал является единственным с точностью до линейного преобразования.

1.1.4 08.09.2020

Напоминание:

$$V(\xi) = \sum p_j V(x_j)$$

и при дискретных ξ:

$$V(x_j) = u(x_j)$$

Рассмотрим некоторые свойства, которыми должна обладать функция полезности:

1. Функция начинается в нуле из-за монотонного преобразования
2. Функция полезности $u(x)$ не убывает (возрастает):

$$u'(x) > 0$$

3. Функция $u(x)$ вогнутая.

$$u(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \lambda u(x_1) + (1-\lambda)u(x_2)$$

Заметим, что если функция полезности вогнутая, то находясь в ситуации неопределенности, индивид будет согласен заплатить, чем иметь состояние неопределенности. Человек хочет иметь детерменированный выигрыш, нежели при ситуации неопределенности - это происходит из-за вогнутости функции.

- есть функция вогнута, то говорят RISK AVERSION
- если выпукла, то говорят RISK LOVING
- если функция линейна, то RISK NEUTRAL

Почитать здесь можно.

4.

$$Eu(\xi) \leq u(E(\xi))$$

Сравнивает полезность ситуации $u(w-a)$ - нет риска, чуть меньше денег, и есть риск и чуть больше денег - $Eu(w-\xi)$ и если больше, то он соглашается - страхование возможно для некоторого a и человек готов заплатить. С помощью неравенства Йенсена:

$$Eu(w-\xi) \leq u(E(w-\xi)) = u(w-E\xi)$$

$$u(w-a) \geq Eu(w-\xi) \Leftrightarrow u(w-E\xi) = u(w-a)$$

и следовательно мы сможем найти $a = E\xi$ из которого будет выполняться свойство.

Пример 1. Возьмем экспоненциальную функцию полезности:

$$u(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

При желании для любой ограниченной функции можно подобрать лотерею так, в который можно подбирать математическое ожидание, чтобы человек всегда играл.

В данном случае у нас ограниченная функция и ограниченное математическое ожидание.

Пример 2. Степенная функция полезности:

$$u(x) = x^{\alpha}, \alpha < 1$$

Пример 3. Квадратичная функция полезности:

$$u(x) = bx - cx^2 : b, c > 0, x < \frac{b}{2c}$$

Задача 1. Пусть есть инвестор с капиталом w и он может вложить деньги в 2 неколлериованных $\xi_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ и $\xi_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$.

$u(x) = 1 - e^{-\lambda x}$. ξ_1, ξ_2 - это доходность, которая выражена в процентах. В какой пропорции нужно разделить капитал, чтобы максимизировать нашу полезность.

Решение

Введём доли α и $1-\alpha$. Тогда доход инвестора будет вычисляться по формуле:

$$s = \alpha w(1+\xi_1) + (1-\alpha)w(1+\xi_2)$$

Будем максимизировать математическое ожидание от функции полезности:

$$Eu(s) = E(1 - e^{-\lambda \cdot s}) = 1 - E\left(e^{-\lambda(\alpha w(1+\xi_1)+(1-\alpha)w(1+\xi_2))}\right) \to \max_\alpha$$

Раскроем скобки и упростим выражение:

$$1 - E\left(e^{-\lambda(\alpha w(1+\xi_1)+(1-\alpha)w(1+\xi_2))}\right) = 1 - E\left(e^{-\lambda w(\alpha(1+\xi_1)+(1-\alpha)(1+\xi_2))}\right) =$$

$$= 1 - E\left(e^{-\lambda w(\alpha\xi_1+1+\xi_2-\alpha\xi_2)}\right) = 1 - e^{-\lambda w} E\left(e^{-\lambda w(\alpha\xi_1+\xi_2(1-\alpha))}\right) \to \max \Rightarrow$$

$$E\left(e^{-\lambda w(\alpha\xi_1+\xi_2(1-\alpha))}\right) \to \min$$

Так как величины неколлерированы, то:

$$Ee^{-\lambda w\alpha\xi_1} \cdot Ee^{-\lambda w\xi_2(1-\alpha)} \to \min$$

Сделаем замену $\beta = -w\lambda\alpha$ и попытаемся взять следующий интеграл

$$Ee^{-w\lambda\alpha\xi_1} = Ee^{\beta\xi_1} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\beta x_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x_1-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} dx_1$$

Известно, что производящая функция моментов для нормального распредления есть следующая величина:

$$Ee^{\beta\xi_1} = e^{\mu\beta + \frac{\beta^2\sigma_1^2}{2}}$$

Тогда преобразуем выражение:

$$Ee^{-\lambda w\alpha\xi_1} \cdot Ee^{-\lambda w\xi_2(1-\alpha)} = e^{\left(-\mu_1 w\lambda\alpha + \frac{w^2\lambda^2\alpha^2\sigma_1^2}{2} - \mu_2 w\lambda(1-\alpha) + \frac{w^2\lambda^2(1-\alpha)^2\sigma_2^2}{2}\right)} \to \min_\alpha$$

$$-w\lambda\mu_1 + w^2\lambda^2\alpha\sigma_1^2 + w\lambda\mu_2 - w^2\lambda^2(1-\alpha)\sigma_2^2 = 0$$

$$\alpha = \frac{\mu_1 - \mu_2 + w\lambda\sigma_2^2}{w\lambda\sigma_1^2 + w\lambda\sigma_2^2}$$

Пусть $\mu_1 = \mu_2 : \alpha = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$. В какой пропорции нужно разделить, чтобы минимизировать дисперсию.

$$D(w\alpha(1+\xi_1))+D(w(1-\alpha)(1+\xi_2)) = w^2\alpha^2 D\xi_1+w^2(1-\alpha)^2 D\xi_2 = w^2\alpha^2\sigma_1^2+w^2(1-\alpha)^2\sigma_2^2$$

$$2\alpha w^2\sigma_1^2 - 2w^2(1-\alpha)\sigma_2^2 = 0$$

$$\alpha = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$$

Решение, максимизирующее полезность соответствует решению, минимизирующую диспесию портфеля. Совпадения есть в случае $\mu_1 = \mu_2$. Интересно посмотреть через призму полезности.

Активы, различные портфели, ожидание и дисперсия. μ, σ - спектр доходности. Почему он определяется выпуклой фигурой.

Стандартное отклонение - выпуклая функция. Если есть возможность выбрать из различных портфелей, то мы можем сформировать любой портфель. Данное множество - плотно , сплошное (говорим про овал).

Такое множество называется эффективное множество. Набор не даёт конкректный портфель, потому что мы не понимаем в чём разница между портфелями. **Критерий выбора** - поиск точки, в которой полезность максимальная - на кривой выбирает тот портфель, который дает максимальная полезность и в этом случае будет достигаться баланс между двумя теориями.

НТ: кривые безразличия - те портфели, между которыми клиент индеферентен. В осях μ, σ и если рассмотреть одинаково полезные портфели, то они будут образовывать выпуклую кривую. И тогда решение - это точка касательной множества всех портфелей и совпадать с базовыми теорями кривых безразличия.

1.2 НТ1 Свойства функции полезности

1. Определить, какую максимальную сумму агент с капиталом 100 и функцией полезности $u(x) = 5x - 0.01x^2$ согласится заплатить, чтобы избавиться от потенциального ущерба, принимающего значения $0, 10, 20, 30$ с равными вероятностями.

Решение 1. Величина ушерба - случайная величина с данным (известным) распределением, обозначим за ξ.

Величина $E\xi = \sum_{i=1}^{4} p_i \xi_i = 15$ - ожидаемая величина ущерба в следующий промежуток времени. $u(x)$ - функция полезности от капитала, а a - величина, которую агент может заплатить, если хочет избавиться от риска.

Необходимо сравнить две величины. Первая - $E(u(w-\xi))$ - ожидаемая полезность при отказе от платы. Вторая - $u(w-a)$ - ожидаемая полезность при выплате суммы a за полный отказ от риска.

Так как $u(w)' > 0$, а $w(w)'' < 0$, то есть функция возрастает и вогнута, то по неравенству Йенсена:

$$E(u(w-\xi)) \leq u(E(w-\xi)) = u(w - E\xi)$$

Для того, чтобы найти максмальную сумму, которую агент согласится заплатить, необходимо приравнять ожидаемую полезность при отказе и ожидаемую полезность при выплате суммы a и решить полученное равенство относительно a:

$$E(u(w-\xi)) = u(w-a)$$

$$E(u(w-\xi)) = \sum_{i=1}^{4} u(w-\xi_i)p_i = \sum_{i=1}^{4} p_i(5(w-\xi_i) - 0.01 \cdot (w-\xi_i)^2) = 351.5$$

$$u(w-a) = 5(100-a) - 0.01(100-a)^2 = 351.5$$

$$a = 15.3784$$

2. Определить, при каком значении капитала агент из предыдущей задачи будет наиболее интересен страховой организации, а при каком - наименее интересен.

Решение 2. В прошлой задаче мы определились, что максимальную величину агент готов будет заплатить при выполнении равенства:

$$E(u(w - \xi)) = u(w - a)$$

Агент будет наиболее интересен компании, когда $a \to \max$ (когда выплачивается агентом максимальное количество денег) и менее интересен, когда $a \to \min$.

Идея: выразить a через w и найти максимум и минимум функции по w.

Получим квадратное уравнение относительно w:

$$0.01a^2 - a \cdot (0.02w + 5) + 0.3w - 78.5 = 0$$

$$a = -250 + w \mp \sqrt{70350 - 530w + w^2}$$

Осталось выбрать, как ограничивать u, a и w. a, наверное, не может быть меньше нуля, тогда это означает, что страховая компания должна заплатить. Тогда, в одном из решений, решая относительно w, получим, что $a_{min} = a(w_{min}) = a(261.667)$.

Дальше стоит вопрос как ограничивать u и w. Снизу есть ограничение по w: 0, так как капитал не может быть отрицтаельным. Что есть верхняя граница w? Два варианта: точка, в которой функция полезности начинает убывать, либо точка, в которой функция полезности равна нулю.

Тогда ответы, соответственно, $w_{max} = 200$ или $w_{max} = 500$

3.1 Решить первую задачу в случае, если потенциальный ущерб определяется случайной величиной с плотностью распределения $f_\xi(x) = a\sqrt{25-x^2}, x \in [0;5]$, а функция полезности есть: $u(x) = \ln x = \log_e x$ или $u(x) = \lg x = \log_{10} x$

Решение 3.

$$E(u(w-\xi)) = u(w-a)$$

$$u(w-a) = \ln(100-a)$$

$$E(u(w-\xi)) = E\left(\ln(100-\xi)\right) = \int\limits_0^5 \ln(100-x)a\sqrt{25-x^2}dx$$

Нужно взять интеграл, если нечего будет делать, $a \approx 0.05$

4. Инвестор хочет распределить свой капитал между ценной бумагой, доходность по которой определяется $\xi_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ с матемматическим ожиданием 5% и стандартным отклонением 2% и безрисковой ценной бумагой с фиксированной доходностью 4%.

Какую часть своего капитала инвестору стоит вложить в первую ценную бумагу, если его функция полезности есть $u(x) = 1 - e^{-ax}$

Решение 4. Введём доли α и $1-\alpha$. Тогда доход инвестора вычислим по формуле:

$$s = w\alpha(1+\xi_1) + 1.04 \cdot w(1-\alpha)$$

Будем максимизировать математическое ожидание от функции полезности:

$$Eu(s) = E(1-e^{-\lambda \cdot s}) = 1 - E\left(e^{-\lambda(w\alpha(1+\xi_1)+1.04\cdot w(1-\alpha))}\right) \to \max_\alpha$$

Раскроем скобки и упростим выражение:

$$1 - e^{-\lambda w 1.04} \cdot Ee^{-\lambda w\alpha(\xi_1 - 0.04)} \to \max_\alpha$$

$$Ee^{-\lambda w\alpha(\xi_1 - 0.04)} \to \min_\alpha$$

Сделаем замену $\beta = -w\lambda\alpha$ и попытаемся взять следующий интеграл

$$Ee^{-w\lambda\alpha\xi_1} = Ee^{\beta\xi_1} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\beta x_1}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x_1-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}dx_1$$

Известно, что производящая функция моментов для нормального распредления есть следующая величина:

$$Ee^{\beta\xi_1} = e^{\mu\beta + \frac{\beta^2\sigma_1^2}{2}}$$

$$Ee^{-\lambda w\alpha\xi_1} = e^{-\mu_1 w\lambda\alpha + \frac{w^2\lambda^2\alpha^2\sigma_1^2}{2}}$$

$$-\mu_1 w\lambda + w^2\alpha\lambda^2\sigma_1^2 = 0$$

$$\alpha = \frac{\mu_1}{w\lambda\sigma_1^2} = \frac{5}{w \cdot a \cdot 4}$$

5. Решить предыдущую задачу, если инвестор распределяет капитал между двумя ценными бумагами, доходности которых распределены нормально с математическими ожиданиями μ_1, μ_2, стандартными отклонениями σ_1, σ_2 и коэффициентов корреляции ρ.

$$cov(\xi, \eta) = \sqrt{D\xi \cdot D\eta} \cdot \rho(\xi, \eta)$$

$$E(\xi\eta) - E\xi\eta = \sqrt{D\xi \cdot D\eta} \cdot \rho(\xi, \eta)$$

$$E(\xi\eta) = \sqrt{D\xi \cdot D\eta} \cdot \rho(\xi, \eta) + E\xi\eta$$

$$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2$$

$$E(\xi\eta) = \sqrt{(E\xi^2 - (E\xi)^2) \cdot (E\eta^2 - (E\eta)^2)} \cdot \rho(\xi, \eta) + E\xi\eta \to \min_{\alpha}$$

Нам известно всё, кроме $E\xi^2$

1.3

Хотим понять, кто менее склонен к риску. Давайте предлагать игру с маленькими выигрышами, игра характеризуется маленькой дисперсией. Кто готов заплатить в этой игре больше, то тем меньше человек склонен к риску.

Давайте разложим правую и левую часть в ряды Тейлора в окрестности капитала $x_0 = w$

Не умоляя общности положим $E\xi = 0$. Чем коэффициент больше тем будет больше Risk Aversion. Данный коэффициент называется Эрроу-Пратт. Первая производная отрицательная, а вторая положительная.

Если коэффициент Эророу-Прата возрастает, то чем больше капитал, тем больше мы готовы к риску.

Такую экспоненциальную функцию называют Constant Avertion, Relative COnst Aversion

Каро-утилити. A

CARA

Аксиоматика задних чисел

1.4 Страховой контракт

Есть w, ξ и a:

$$Eu(w-\xi) \leqslant u(w-a)$$

Страхователь - я, страховщик - они. Что странивает для себя страховщик. $u(w_1)$ - начальное состояние, а альтернатива $Eu(w_1+a-\xi)$

$$u(w_1) \leqslant Eu(w_1+a-\xi)$$

Задача: компания будет платить только половину убытка.

Страхование эксцедента

1.5 23.09.2020

Капитал - w, риск - ξ, страховая премия - a, величина, которую вы получите при ущербе - $I(\xi)$:

$$Eu(w-\xi) \qquad E(u(w-a-(\xi-I(\xi))))$$

Если убыток большой, то остальную сумму заплатит страховая компания

Теорема Фон-Неймана-Моргенштерна

Люди в среднем выбираби чаще 2 чем 1 и 4 чем 3, но это противоречит предпосылке поведения теории, потому что если 2 и 4 лучше 1 и 3 (люди выбирают), то тогда они должны быть лучше, а вероятности однаковы.

2 Моделирование риска

Основные понятия:

2.1 Распределение индивидуального ущерба. Распределение условного и безусловного ущерба, их ожидания и дисперсии

Под распределением ущерба понимают вероятностное распределение, увязывающее частоту возникновения и размер ущерба. Это наиболее простая модель, позволяющая количественно исследовать неопределенность величины ущерба в контексте управления рисками.

Начнём с ситуации, когда во внимание принимается та информация, которая касается уже возникшего ущерба. Данная модель не учитывает: данные по объектам, по которым ущерб не возникал, неполнота сведений о возникновении ущерба.

Итого: ущерб - случайная величина. Если известна величина максимально возможного ущерба M, то распределение сосредоточено на отезке $[0; M]$.

Нас интересует статистика по тем объектам, по которым имел место ущерб, так и по тем носителям риска, по которым **его не было**.

Определение 2.1.1. Доля объектов в портфеле, которых не было, можно рассматривать как вероятность отсутствия ущерба по одному наугад выбранному риску.

Поэтому будем использовать иную случайную величину X в качестве более адекватной модели ущерба. Она будет с ненулевой вероятностью принимать 0, отражающее **отсутствие ущерба**.

Пусть Y - случайная величина размера ущерба. Введём дополнительную индикаторную величину $\mathbb{I}$:

$$\begin{cases} 1 - \text{ущерб возник} \\ 0 - \text{нет} \end{cases}$$

С помощью данной случайной величины моделируется неопределенность, связанная с возникновением ущерба - неопределенность числа неблагоприятных событий.

$$F_Y(x) = F_{\xi|\xi>0}(x) = P(\xi < x|\xi > 0) = \frac{F_X(x) - P(X=0)}{P(X>0)} = \frac{F_X(x) - p}{1-p} \quad x > 0$$

где $F_X(x)$ - распределени ущерба, реализовался он или нет.

Выразим функцию распределения ущерба:

$$F_X(x) = P(X < x) = P(X < x|X = 0) \cdot P(X = 0) + P(X < x|X > 0) \cdot P(X > 0) =$$

$$= p + F_{\xi|\xi>0}(x) \cdot (1-p) = p + F_Y(x) \cdot (1-p)$$

где $p = \lim\limits_{x \to 0+} F_X(x)$

Можно записать, как $X = I \cdot Y$

Так же можно найти плотность при $x > 0$:

$$f_X(x) = (1-p) \cdot f_Y(x)$$

$$p + (1-p) \int\limits_0^\infty f_Y(x)dx = 1$$

Вычислим распредление случайной величины $\xi = I \cdot Y$:

$$\mathbb{E}\xi = \mathbb{E}Y \cdot P(I = 1) = (1-p) \cdot \mathbb{E}Y = (1-p)\mu$$

$$\mathbb{E}\xi^2 = (1-p)EY^2 = (1-p)(DY + (EY)^2) = (1-p)(\sigma^2 + \mu^2)$$

$$\mathbb{D}\xi = (1-p)DY + (1-p)(EY)^2 - (1-p)^2(EY)^2) = (1-p)\mathbb{D}(Y) + (1-p)p(\mathbb{E}(Y))^2 =$$

$$= EIDY + DI(EY)^2 = (1-p)\sigma^2 + p(1-p)\mu^2$$

Найдем через условные математические ожидания:

$$E\xi = E(IY) = E(E(Y|I)) = E(\mu I) = (1-p)\mu$$

$$D\xi = D(IY) = E(D(Y|I)) + D(E(Y|I)) = E(\sigma^2 I) + D(\mu I) = (1-p)\sigma^2 + p(1-p)\mu^2$$

2.2 Модель индивидуального риска, функция распределения и характеристики суммарного ущерба. Преимущества и недостатки модели индивидуального риска. Подходы к оценке модели.

Совокупный ущерб - сумма случайных величин индивидуальных ущербов:

$$S_{\text{ind}} = \sum_{j=1}^{n} \xi_j$$

где n - объём портфеля. Часть слагаемых соответствующих тем рискам, по которым не было ущерба, равна нулю.

Распределение сумм случайных величин может осуществляться с помощью:

- свёртки
- производящие функции моментов

Пусть ξ, η - непрерывные случайные величины, тогда по формуле свёртки:

$$f_{\eta+\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} f_\eta(x) f_\xi(z-t)dt$$

Теперь найдем функцию распределения суммы двух непрерывных случайных величин:

$$F_{\eta+\xi}(s) = P(\eta + \xi \leqslant s) = P(\eta + \xi \leqslant s)$$

Для двух дискретных неотрицательных случайных величин мы можем воспользоваться формулой полной вероятности и записать в виде:

$$F_{\eta+\xi}(s) = \sum_{\text{по всем } y \leqslant s} P(\eta+\xi \leqslant s | \eta = y) \cdot P(\eta = y) = \sum_{\text{по всем } y \leqslant s} P(\xi \leqslant s-y | \eta = y) \cdot P(\eta = y)$$

Если ξ и η независимы, то сумма можем быть переписана:

$$F_{\xi+\eta}(s) = \sum_{\text{по всем } y \leqslant s} F_\eta(s-y) f_Y(y)$$

$$f_{\xi+\eta}(s) = \sum_{\text{по всем } y \leqslant s} f_\eta(s-y) f_Y(y)$$

Для непрерывных неотрицательных случайных величин формулы имеют вид:

$$F_{\xi+\eta}(s) = \int\limits_0^s P(\xi \leqslant s-y|\eta=y) f_\eta(y)dy$$

$$F_{\xi+\eta}(s) = \int\limits_0^s F_\xi(s-y) f_\eta(y)dy$$

$$f_{\xi+\eta}(s) = \int\limits_0^s f_\xi(s-y) f_\eta(y)dy$$

Обозначение свертки для двух функций распределения $F_\xi(x)$ и $F_\eta(x)$ - $F_\xi * F_\eta$.

Для определения распределения суммы более чем двух случайных величин можем использовать итерации процесса свёркти. Для $S = \xi_1 + \ldots + \xi_n$, где ξ_i - независимые случайные величины, F_i обозначает функцию распределения случайной величины ξ_i, а $F^{(k)}$ - функция распределения $\xi_1 + \ldots + \xi_k$, мы получим:

$$F^{(2)} = F_2 * F^{(1)} = F_2 * F_1$$

$$F^{(3)} = F_3 * F^{(2)}$$

$$F^{(4)} = F_4 * F^{(3)}$$

$$f^{(2)} = \int\limits_0^x f_1(x-y) f_2(y)dy$$

$$f_{\xi_1+\xi_2+\xi_3} = f^{(3)}(x) = \int\limits_0^x f^{(2)}(x-y) f_3(y)dy$$

Достоинством свёртки является получение точного распределения. Недостаток - больший объём вычислений.

Воспользуемся производящими функциями моментов, которая для случайной величины ξ определяется соотношением:

$$\psi_\xi(t) = \mathbb{E}e^{t\xi}$$

$$\psi_{\xi_1+\xi_2} = E\left(e^{t(\xi_1+\xi_2)}\right) = E\left(e^{t\xi_1}e^{t\xi_2}\right)$$

В случае независимости:

$$\psi_{\xi_1+\xi_2} = E\left(e^{t(\xi_1+\xi_2)}\right) = E\left(e^{t\xi_1}e^{t\xi_2}\right) = E(e^{t\xi_1}) \cdot E(e^{t\xi_2}) = \psi_{\xi_1} \cdot \psi_{\xi_2}$$

$$\psi_{\xi_1+\xi_2} = \psi_{\xi_1} \cdot \psi_{\xi_2}$$

Это свойство распространяется на сумму любого детерменировнного числа независимых случайных величин:

$$\psi_{S_{\text{ind}}}(t) = \prod_{k=1}^{n} \psi_{\xi_k}(t)$$

Ограничением данного подхода является то, что производящие функции моментов определеные не для всех типов распределений. Если одинаково распределеные, то модель индивидуального риск будет относиться к тому же классу, что и распределение каждого индивидуального ущерба. Если $n \to \infty$, то можно воспользовться асиметотическими свойствами.

Посчитаем математическое ожидание и дисперсию:

$$E(S_{ind}) = \sum_{j=1}^{n} E(\xi_j)$$

$$D(S_{ind}) = \sum_{j=1}^{n} D(\xi_j) + 2\sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^{n} \mathrm{Cov}(\xi_j, \xi_k)$$

Для независимых случайных величин:

$$E(S_{ind}) = n(1-p)\mu$$

$$D(S_{ind}) = n(1-p)\sigma^2 + np(1-p)\mu^2$$

Для неоднорожных портфелей (то есть для портфелей, имеющих различное распределение случайных величин):

$$E(\xi_j) = (1-p_j)\mu_j \quad D(\xi_j) = (1-p_j) \cdot \sigma_j^2 + p_j(1-p_j)\mu_j^2; \quad j = 1, \ldots, n$$

$$E(S_{ind}) = \sum_{j=1}^{n} (1-p_j)\mu_j$$

$$D_{S_{ind}} = \sum_{j=1}^{n} (1-p_j)\sigma_j^2 + \sum_{j=1}^{n} p_j(1-p_j)\mu_j^2$$

для независимых случайных величин.

2.3 Модель коллективного риска, функция распределения и характеристики суммарного ущерба. Преимущества и недостатки модели коллективного риска. Подходы к оценке модели.

В отличие от модели индивидуального риска, где неопределенность, связанная с размером ущерба, отражалась в специфическом виде их распределений (со скачком в нуле), в модели коллективного риска неопределенность, связанная с числом случаев возникновения ущерба, отделяется от неопределенности, вызванной размером ущерба. При этом совокупный ущерб моделируется как сумма случайного числа случайных величин:

$$S_{coll} = \sum_{k}^{N} Y_k$$

где N - случайная величина числа случае возникновения неблагоприятных событий, Y_k - случайная величина числа размера ущерба (усеченное распределение $Y_k > 0$).

Таким образом, в модели коллективного риска четко выделяются два типа неопределенностей, связанных с количеством случаев возникновения ущерба и размером ущерба. Для этой модели обычно применяют не закон больших чисел и другие асимптотические результаты (хотя это тоже возможно), а методы анализа случайных процессов. Фактически Scoll можно интерпретировать как значение случайного процесса в случайный момент времени.

Усложнение применяемого математического аппарата является очевидным недостатком указанной модели. К преимуществам следует отнести возможность разделения анализа числа неблагоприятных событий и размера ущерба, что служит реализации задач риск-менеджера в свете специфических ограничений информационного обеспечения.

Событие $\{S_{coll} < s\}$ - объединение непересекающихся событий:

$$\cup_{n=0}^{\infty}\{\sum_{k=1}^{n} Y_k < s, N = n\}$$

Поэтому:

$$P(S_{coll} < s) = \sum_{i=1}^{n} P(\sum_{k=1}^{n} Y_k < s, N = n) = \sum_{i=1}^{n} P(\sum_{k=1}^{n} Y_k < s | N = n) \cdot P(N = n)$$

$$F_{S_{coll}}(s) = \sum_{n} P(N = n) F_{Y_k}^{*n}(s)$$

где $F_{Y_k}^{*n}(s)$ - n-кратная свертка случайной величны Y_k при этом $F^{*1}(s) = F(s)$ и $F^{*0}(s) = 1, x \geqslant 1$.

Для упрощения расчетов предполагают, что случайные числа одинаково распределенные, независимые, ковариации равны нулю между любыми случайными величинами. Ограничивает применить - упрощает математические методы.

Посчитаем математическое ожидание и дисперсию:

$$E(S_{coll}) = E(\sum_{k=1}^{n} Y_k) = E(E(\sum_{k=1}^{n} Y_k | N)) = \sum_{n} \left(\sum_{k=1}^{n} Y_k \right) \cdot P(N = n) =$$

$$= \sum_{n} n E(Y_k) P(N = n) = E(Y_k) \cdot E(N)$$

$$D(S_{coll}) = (E(Y_k))^2 D(N) + D(Y_k) E(N)$$

2.4 Производящая функция коллективного риска

Производящая функция коллективного риска:

$$\psi_{S_{coll}}(t) = E(e^{tS_{coll}}) = E(E(e^{tS_{coll}} | N)) = E((\psi_{Y_k}(t))^N) = E(\exp(N \ln \psi_{Y_k}(t))) =$$

$$= \psi_N(\ln(\psi_{Y_k}(t))) = G_N(\psi_{T_k}(t))$$

2.5 Отличия моделей коллективного и индивидуального риска

Хотя предпосылки обоих подходов несколько отличаются, на интуитивном уровне различия сводятся к специфике учета в модели рисков, по которым ущерб не возник: в модели индивидуального риска они «отвечают» за скачок функции распределения, а в модели коллективного риска их игнорирование «оплачивается» рандомизацией числа неблагоприятных событий. Это делает весьма вероятным близкое соответствие результатов моделирования совокупного ущерба обоими способами.

2.6 Примеры считающих распределений. Смеси

$$\xi = p \cdot \eta + (1-p)(\eta_1 + \eta_2)$$

$$F_\xi(x) = p(\xi < x) = P(\eta < x) \cdot p + P(\eta_1 + \eta_2 < x)(1-p) = F_\eta p + F_{\eta_1+\eta_2} \cdot (1-p)$$

2.7 Домашнее задание. Моделирование рисков (I)

3. Ущерб реализуется с вероятностью 0.2, при этом в случае реализации величина ущерба определяется случайной величиной с функцией распределения $F_\xi(x) = \sqrt{\frac{x}{4}}, x \in [0;4]$. Вероятность более чем однократной реализации ущерба считается принебрежимо малой. Найти:

- безусловную функцию распределения ущерба.

  Решение: Ущерб реализуется с вероятностью $0.2 \Rightarrow P(\xi > 0) = 0.2$. Отсутствие ущерба: $p = 0.8$. Если точно известно, что ущерб был, то его функция распределения:

$$F_Y(x) = F_{\xi|\xi>0}(x) = P(\xi < x|\xi > 0) = \frac{F_X(x) - P(X = 0)}{P(X > 0)} = \frac{F_X(x) - p}{1 - p} \quad x > 0$$

  где $F_X(x)$ - распределение ущерба, реализовался он или нет. Тогда безусловная функция распределения ущерба:

$$F_X(x) = F_{\xi|\xi>0} \cdot (1 - p) + p = \sqrt{\frac{x}{4}} \cdot 0.2 + 0.8, x \in [0;4]$$

- математическое ожидание ущерба.

  Решение: найдем плотности и по формуле математического ожидания высчитаем его

$$f_X(x) = (1 - p)f_Y(x)$$

$$p + (1 - p)\int_0^\infty f_Y(x)dx = 1$$

$$f_X(x) = \frac{\partial f_X(x)}{\partial x} = \frac{0.05}{\sqrt{x}}$$

$$f_Y(x) = \frac{f_X(x)}{1 - p} = \frac{1}{4\sqrt{x}}$$

$$E(X) = \int_0^4 x \cdot f_X(x)dx = \int_0^4 0.05\sqrt{x} = 0.26$$

- дисперсию ущерба

$$D(X) = \int\limits_0^4 (x - E(X))^2 f_X(x)dx = 0.512$$

- математическое ожидание ущерба если известно, что он точно реализовался:

$$E(X) = (1-p)EY \Rightarrow E(Y) = \frac{E(X)}{1-p} = \frac{0.26}{0.2} = 1.33$$

- $\mathrm{VaR}_{95\%}$ ущерба:

$$F_X(x_\alpha) = \alpha \Rightarrow \sqrt{\frac{x}{4}} \cdot 0.2 + 0.8 = 0.95$$

$$x_\alpha = 2.25$$

- математическое ожидание ущерба, если точно известно, что оно больше двух:

$$E(X|X>2) = \frac{1}{\int\limits_2^4 f_X(x)dx} \cdot \int\limits_2^4 x f_X(x)dx = 2.94$$

4. Величина ущерба определяется случайной величиной с функцией распределения равной 0, если $x \leqslant 0$ и $1 - (10(x+1)^4)^{-1}$. Найти:

- вероятность отсутствия ущерба:

$$p = 1 - (10(0+1)^4)^{-1} = 0.9$$

- функция распределения ущерба, если известно, что он реализовался:

$$F_{\xi|\xi>0} = \frac{F_X(x) - p}{1-p} = -9 - \frac{1}{(x+1)^4}$$

- математическое ожидание ущерба, если известно, что ущерб реализовался:

$$E(X) = \int\limits_0^\infty x \cdot f_X(x) = -\frac{1}{30}$$

$$E(Y) = \frac{E(X)}{1-p} = -\frac{1}{30} \cdot 10 = -\frac{1}{3}$$

- дисперсия ущерба:

$$D(X) = \int\limits_0^{\infty} (x - E(X))^2 f_X(x) dx = -0.03$$

6. Компания подвержена двум рискам, первый из которых реализуется с вероятностью 0.2, а второй - 0.1, при этом первый риск в случае реализации приводит к ущербу, определяемому экспоненциальной случайной величиной с параметром 1, а второй - с параметром 2. Найти:

- функцию распределения суммарного ущерба компании:

$$F_\xi(x) = \frac{p_1}{p_1 + p_2} \cdot (1 - e^{-x}) + \frac{p_2}{p_1 + p_2}(1 - e^{-2x})$$

- математическое ожидание ущерба:

$$f_\xi(x) = \frac{p_1}{p_1 + p_2} \cdot e^{-x} + 2e^{-2x}\frac{p_2}{p_1 + p_2}$$

$$E(\xi) = \int\limits_0^{\infty} x \cdot f_\xi(x) dx = 0.833333$$

- дисперсию ущерба:

$$D(\xi) = \int\limits_0^{\infty} (x - E(\xi))^2 f_\xi(x) dx = 0.805556$$

8. Пусть количество реализовавшихся ущербов может принимать значения $0, 1, 2$ с вероятностями 0.7, 0.2, 0.1, при этом величина каждого ущерба определяется случайной величиной с распределением $\xi \sim N(10, 1)$.

- Найти вероятность того, что итоговый суммарного ущерба окажется меньше 11. Воспользуемся свойством, что есть $\xi \sim N_{\mu_1, \sigma_1^2}$

и $\eta \sim N_{\mu_2,\sigma_2^2}$ независимы, то $\xi + \eta \sim N_{\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2}$

$$F_S = P(S < s) = \sum_{n=0}^{2} P(N = n) F_{Y_k}^{*n}(s) =$$

$$= P(N = 0) \cdot F^{*0}(s) + P(N = 1) \cdot F^{*1}(s) + P(N = 2) \cdot F^{*2}(s) =$$

$$= 0.7 * 1 + 0.2 \cdot \Phi_\xi(11) + 0.1 \cdot F^{*2}(2)$$

- найти математическое ожидание, дисперсию и 99 процентный квантиль

$$E(S_{coll}) = E(\sum_{k=1}^{n} Y_k) = E(E(\sum_{k=1}^{n} Y_k | N)) = \sum_n \left(\sum_{k=1}^{n} Y_k \right) \cdot P(N = n) =$$

$$= \sum_n n E(Y_k) P(N = n) = E(Y_k) \cdot E(N) = 0.4 \cdot 10 = 4$$

$$D(S_{coll}) = (E(Y_k))^2 D(N) + D(Y_k) E(N) = 100 \cdot 0.44 + 1 \cdot 0.4 = 45.04$$

10. Пусть количество реализовавшихся ущербов описывается Пуассоновской случайной величной с параметром 3, а размер ущерба детерменирован и равен 1000.

- Опишите закон распредлеения суммарного ущерба:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, x \leqslant 0 \\ 1000 \cdot e^{-\lambda} \cdot \sum\limits_{j=0}^{k} \frac{\lambda^j}{j!}, k < x \leqslant k+1, k = 0, 1, 2 \end{cases}$$

2.8 Считающие распределения 05.11

Можно рассматривать случайные величины, параметры которых - тоже случайные величины. Например $\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$, где $\sigma\{1, 10\} \mapsto \{0.9, 0.1\}$.

Например, отрицательное биномиальное распределение может быть получено из пуассоновского рандомизацией параметра λ. Надо бы разобрать несколько канонических распределений. А будем обсуждать задачи одномерного моделирования.

2.9 Теория экстремальных значений

Одна из важных задач процессов управления рисками - контроль ситуаций, связанных с экстремально большими ущербами. С точки зрения количественного риск-менеджмента речь идет прежде всего об анализе пра- вого хвоста распределений ущерба, как раз и описывающего вероятности серьезных потерь. Такие меры риска, как рисковый капитал и условный рисковый капитал, концентрируются именно на данных особенностях случайных величин.

Мы обсуждали непараметрический и параметрический (подгонка теоретического расределения). Минусом непараметрического оценивания является большая чувствительность к выборочным данным. Изменение одного числа в верхней части выборки может привести к сереьезным изменениям оценки исследуемого параметра.

Параметрическое оценивание - на параметры модели влияют все элементы выборки - старшие квантили могут недооцениваться - характерно для распределения с тяжёлыми хвостами. Проблему быстрого убвыания хвоста нормального распределения - используем стбюдента и смеси нормального распределения.

Другая проблема - риски, характеризующиеся малой частотой реализации, но большими убытками. Дамба, наводнение.

Первый метод: - максимальный ушерб в течение периода фиксированной длины на основе выборки максимальных ущербов.

Второй метод: анализ ущербов, превышающих некоторый заранее выбранный поолог, на основе выборки из прошлых ущербов, превысивших порог.

2.9.1 Метод анализа распределения максимального ущерба за период

Пусть наблюдаемые данные X_i представляют выборку из ущербов за день, то максимальный дневной ущерб за неделю будет описываться случайной величиной $Y = \max\{X_1, \ldots, X_7\}$.

Если предпологать X_i независимыми одинаково распределенными случайными величинами, то функция распределения Yи X_i:

$$F_Y(x) = F_{\max\limits_i X_i}(x) = P\{\max_i\{X_i\} \leqslant x\} = (F_{X_i}(x))^n$$

Теорема 2.1. *Теорема Фишера-Типпета*

Вывод теории экстремальных значений: если удается подобрать такие последовательности b_n, a_n, что $\left(F_{X_i}\left(\frac{x-b_n}{a_n}\right)\right)^n$ - невырождено при $n \to \infty$ (не стремится к 0 или 1), то для независимых одинаково распределенных случайных величин выполняется соотношение:

$$\left(F_{X_i}\left(\frac{x-b_n}{a_n}\right)\right)^n \to H_\beta(x)$$

где $H_\beta(x)$ - обобщенное распределение экстремальных значений (Generalized Extreme Value Distribution, GEV Distribution).

Функция обобщённого распределения экстремальных значений выглядит следующим образом:

$$H_\beta(x) = \begin{cases} e^{-(1+\beta x)^{-\frac{1}{\beta}}}, \beta \neq 0 \\ e^{-e^{-x}}, \beta = 0 \end{cases}$$

где $1 + \beta x < 0$. Без нормировки будет стремиться либо к 0 либо к 1.

Если вместо рассмотрения выборки разбить её на равные периоды длительности n, выбрть из каждого максимальный ущерб и составить новую выборку из выбранных значений, то новая выборка будет хорошо описываться обобщенным распределением экстремальных значений.

GEV зависит от параметра β. При $\beta > 0$ - распределение Фреше, $\xi < 0$ - распределение Вейбулла, $\xi = 0$ - распределение Гумбеля.

Пример: пусть случайные величины $X \sim Exp(1), F_\xi(x) = 1-e^{-x}, x > 0$. В качестве последовательностей нормирующих констант возьмем $b_n = -\ln n, a_n = 1$. $Y = \max(X_1, \ldots, X_n)$:

$$F_\xi^n(x) = P\left(\frac{Y-b_n}{a_n} < x\right) = P(Y < a_n x + b_n) =$$

$$= P(X < x - \ln n)^n = (1 - e^{-x+\ln n})^n = \left(1 - \frac{e^{-x}}{n}\right)^n \to e^{-e^{-x}}$$

Если теорема Фишера-Типпета верна для $F(x)$, то $F(x)$ принадлежит к **максимальной области притяжения** $G_\xi(x)$ - MDA - maximum domain of attraction. Наиболее тяжёлые хвосты характерны для распределения Фреше ($\beta > 0$): обратное гамма-распределение, t-распределение, логгамма распределение, распределение Бёрра, распределение Парето, Коши.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{L(ax)}{L(x)} = 1, a > 0$$

Если $F(x) \in MDA(G_\xi), \beta > 0$, то $1 - F(x) = x^{-\frac{1}{\beta}} L(x)$, где $L(x)$ - некоторая медленно меняющаяся функция. $\frac{1}{\beta}$ - звостовой индекс распределения.

Распределение Гумбеля $\beta = 0$: нормальные распределения, логнормальные, гамма, хи-квадрат, гиперболические - имеют конечные моменты всех порядков.

Распределения из MDA Вейбулла $\beta < 0$ - наименьший интерес с точки зрения анализа рисков. GEV-непрерывное по β.

Недостатки максимального ущерба: потеря большого числа наблюдений выборки, предположение независимости и одинаковой расределенности, что часто не выполняется. Важность: анализ дамбы. Зная максимальный за год - можно за 100 лет - произведение функции распределений в 100 степени.

2.10 Распределение максимума из случайного числа случайных величин

Предложенный выше метод подразумевает анализ максимума из фиксирован- ного числа случайных величин, однако в некоторых приложениях интерес пред- ставляет анализ максимума из случайного числа случайных величин. Использова- ние предельной теоремы здесь не представляется корректным. Для изучения распределения подобной случайной величины удобно использовать производящую функцию вероятсностей, $\varphi_X(z) = E(z^X)$. $Y_N = \max(X_1, \ldots, X_N)$, где N определяет число реализовавшихся ущербов. В этом случае в предположении о независимости N и X_i:

$$F_{Y_N}(x) = P(Y_N < x) = \sum_{i=0}^{\infty} P(Y_N < x | N = i) P(N = i) =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} P(\max(X_1, \ldots, X_i) < x) P(N = i) =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} P(X < x)^i P(N = i) = \varphi_N(F_X(x))$$

2.11 Метод анализа распределения превышения заданного порога

Метод придлагает выбрать некоторый достаточно большой порог и будем исследовать распределение лишь ущербов, превышающих.

Пусть d - фискированный порог, $Y = X - d$, при условии $X \geqslant d$. Случайная величина определяет на сколько ущерб превысил данный уровень d.

Функция распределения Y:

$$F_Y(x) = P(X - d < x | X \geqslant d) = \frac{P(d \leqslant X < d + x)}{P(X \geqslant d)} = \frac{F_X(d+x) - F_X(x)}{1 - F_X(x)}$$

где $0 \leqslant x \leqslant x_F = \sup\{t : F(t) < 1\}$

Математическое ожидание Y - **функция среднего превышения**:

$$e(d) = E(Y) = E(X - d | X \geqslant d)$$

$$1 - F_X(x) = (1 - F_X(d))(1 - F_Y(x - d))$$

и оценка квантилей распределения X сводится к задаче оценки величины $F_X(d)$ и анализу функции распределения Y.

Теорема 2.2. *Теорема Balkema, Pickands, de Haan. Связь превышения порога с проблемой максимума:*

Если (и только если) X принадлежит к максимальной областит притяжения одного из обобщенных распределений экстремальных значений с параметром β, то можно найти такую функцию: $k(d)$:

$$\lim_{d \to x_F} \sup_{0 \leqslant x \leqslant x_F -} |F_Y(x) - W_{\beta, k(d)}(x)| = 0$$

где W - Обобщенное распределение Парето (generalized Pareto Distribution, GPD). Чья функция распределения:

$$W_{\beta,\alpha} = \begin{cases} 1 - \left(1 + \frac{\beta x}{\alpha}\right)^{-\frac{1}{\beta}}, \beta \neq 0 \\ 1 - e^{-\frac{x}{\alpha}}, \beta = 0 \end{cases}$$

- $\beta > 0$ - преобразование распределения Парето
- $\beta < 0$ - бета распределение

- $\beta = 0$ - экспоненциальное распределение.

GEV непрерывны по β.

$$GEV = 1 + \ln GPT$$

Если X экспоненциально, то и Y.

$$E(X) = \frac{\alpha}{1-\beta}$$

$$CVaR_\alpha(X) = \frac{Var_\alpha(X)}{1-\beta} + \frac{\delta}{1-\beta}$$

Метод порога - предпочтительнее - использует больше информации, не игнорировать большие ущербы, произошедшие на протяжении небольшого отрезка времени. Минусы: независимость и одинаково распределенность.

Экспоненциальное притягивается к Гумбелю.