Планирование расписаний и управление доходами

Александр Широков ПМ-1701

Преподаватель:

Васильев Юрий Михайлович

Санкт-Петербург
2020 г., 7 семестр

Список литературы

[1]

Содержание

1 02.09.2020

1.1 Задача из авиакомпании Россия

В задачах планирования авиаперелетов:

- расписание судов
- маршутизация
- построение графика полета летного состава

Мы поговорим о построении графика полета летного состава. Зарплата бортпроводника зависит от навыков и от некоторыз других факторов, но значительная часть денег тратилась на штрафы, которые выплачивались в пользу бортпроводников, потому что есть *приказ*, о котором бортпроводник не может проводить в воздухе больше определенного времени в воздухе.

Расписание в авиакомпании Россия делалось вручную и компания тратила много денег на выплаты бортпроводникам. OpenSky - программное обеспечение для обслуживания бортпроводников, но оно использовалось.

Множество борпроводников разбито на 4 подмножеств с примерно одинаковыми характеристиками. Каждое подмножество называется **книга**.

Рейс - перелет из Петербурга в Москву, а **связка** - перелет из Петербурга в Мосвку и обратно.

Множесто связок разбивалось на 4 подмножества.

После этого соединяется первая книга и первый рейс и получается **рабочий стол**. Каждый рабочий стол можно описать характеристиками какими-то. С каждым рабочим столом работает один эксперт и все оказываются без перегрузов.

Задача: необходимо так разбить связки на подмножества, чтобы характеристики рабочих столов были примерно одинаковы.

1.1.1 BiWay (ToWay) Number Partitional Problem

Дано n натуральных чисел и мультимножество (элементы могут повторяться) S, которое описывает этот набор n. Нам необходимо разбить подмножество $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$ на два подмножества, каждое подмножество характерирузет сумму чисел, чтобы минимизировать максимальную сумму чисел в подмножестве.

Greedy alghorytm

1. Отсортировать S в порядке убывания
2. На каждом шаге мы последовательно распределяем в две группы, кладём в группу с текущей наименьшей суммой. Если сумма одинакова, то кладем случайно.

Complete Greedy Alghorytm

1. Сортируем мультимножество в порядке убывания (распределяем большие числа и добиваем маленькими)
2. Данный алгоритм исследует бинарное дерево, где каждому уровень - число из сортированного мультимножества, в каждой вершине - ветвление. В левой ветке - кладем в группу с наименьшей суммой, а в правой ветке - с наибольшей.

Правила, позволяющие сократить размер нашего дерева:

- Если сумма чисел в подмножествах равна, то мы кладем число только в одно подмножество
- Если оставшиеся распределенные числа не превосходят разницу между подмножествами, то мы кладем эти числа в группу с наименьшей суммой.

Домашнее задание: реализация алгоритма, причем настрока алгоритма в трех вариантах:

- Исследует полное дерево решений и находит ответ;
- Алгоритм работает заданное число секунд и возвращает наилучший найденный результат за t время (рекурсивная функция(оставшиеся числа, подмножества 1, подмножества 2))
- Первое найденное решение (первый лист, который мы нашли).

Алгоритм Кармаркара-Карпа (эвристический)

1. Сортируем мультимножество в порядке убывания (распределяем большие числа и добиваем маленькими)
2. Два наибольших числа заменяется на их разницу и кладём эту разницу в список с сортировкой и опять пересортировываем - кладем числа в два разных подмножества (интерпретация).
3. Так делаем, пока не получим одно число: разницу межде максимальным и минимальным подмножеством
4. Восстанавливаем

Пример:

$$\{16, 15, 12, 10, 5, 1\} \mapsto \{12, 10, 5, 1, 1\} \mapsto \{5, 2, 1, 1\} \mapsto \{3, 1, 1\} \mapsto \{2, 1\} \mapsto \{1\}$$

Compete алгоритм Кармакара-Карпа

1. Сортируем мультимножество в порядке убывания (распределяем большие числа и добиваем маленькими)
2. Исследуем бинарное дерево в глубину, исследуя левую ветку

Домашнее задание: реализовать алгоритм для решения.

1.1.2 MultiWay (ToWay) Number Partitional Problem

Дано n натуральных чисел и мультимножество (элементы могут повторяться) S, которое описывает этот набор n. Нам необходимо разбить подмножество $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$ на K подмножества, каждое подмножество характерирузет сумму чисел, чтобы минимизировать:

1. минимизация максимальной суммы
2. максимизация минимальной суммой
3. минимизация разности между наибольшей и наименьшей суммой в подмножествах
4. идеальная сумма - $\frac{S}{K}$ - минимизировать отклонения идеальной суммы

$$X_{i,j} = \begin{cases} 1, \text{if } S_i \text{ in } j \quad S_j \\ 0 \end{cases}$$

$$Z - W \to \min$$
$$\sum_{j=1}^{k} X_{s,j} = 1 \quad \forall s \in S$$

Z - наибольшая сумма через x, а W - наименьшую сумму через подмножества

$$Z \geq \sum_{i=1}^{n} s_i X_{i,j} \quad \forall j \in \{1, \ldots, k\}$$
$$W \leq \sum_{i=1}^{n} s_i X_{i,j} \quad \forall j \in \{1, \ldots, k\}$$
$$X_{i,j} \in \{0, 1\}, \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}, \forall j \in \{1, \ldots, k\}$$

Жадный алгоритм

$L_j(S_1, S_2, \ldots, S_k, S_i)$

данная функция возвращает значение целевой функции, если мы положим число S_i в j-е подмножество.

На каждом шаге алгоритма мы ищем такое $j \in \{1, \ldots, k\}$ такое, что значение целевой функции $gr = argminL_j$ и так до тех пор пока мы не распределим все наши числа из отсортированного подмножества.

$$S_{gr} = S_{gr} \cup \{S_i\}$$

Программирование:

c - список неизвестных, m - коэффициенты при ограничениях, $\{\{const\}, \{type\}\}$. Если 0, то равенство, если 1, то $\geq$, если -1, то $\leq$. 4-ый аргумент - интервалы, в которых могут применять значения неизвестные - $lbound, ubound$. Последний - какому множеству чисел принадлежит тип.

Домашнее задание: минимизация сумма отклонения по модулю от идеального разбиения и реализация.

$$\overline{y} = \frac{\sum S}{K}$$

$$\sum_{i=1}^{k} |y_i - \overline{y}|$$

Линеаризация

- Линеаризация модуля в ограничениях

$$|X| \leq b(X = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i, b \geq 0)$$

$$\begin{cases} x \leq b \\ x \geq -b \end{cases}$$

- Допустимые значения

$$x = 0 \text{ или } 0 \leq X \leq b, a > 0$$

$$y = \begin{cases} 0, x = 0 \\ 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq ay \\ x \leq by \\ y \in \{0, 1\} \end{cases}$$

- Условие ИЛИ

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i \to \min$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{1,i} x_i \leq b_1 + M_1 y$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{2,i} x_i \leq b_2 + M_2(1 - y) \quad y \in \{0, 1\}$$

- Модуль со знаком $\geq$
- IF

$$\text{if} \quad \sum_{i=1}^{n} a_{1,i} x_i \leq b_1 \to \sum_{i=1}^{n} a_{1,i} x_i \geq b_1 + \varepsilon$$

$$\text{then} \quad \sum_{i=1}^{n} a_{2,i} x_i \leq b_2$$

и мы превратили в третий пункт

$$y \in \{0,1\}$$

- Умножение бинарных переменных

$$\ldots + x_1 \cdot x_2 + \ldots \leq b$$

$$x_1, x_2 \in \{0,1\}$$

$$y \in \{0,1\}$$

$$y \leq x_1$$

$$y \leq x_2$$

$$y \geq x_1 + x_2 - 1$$

x_1	1	0	0	0
x_2	1	0	1	0
y	1	0	0	0

Линеаризация

1.2 Multi Dimensional Multi Way NPP

Будем заниматься векторами. Минимизация максимальной разности по координатам между подмножествами.

$$1 : (a_1, a_2, a_3)$$

$$2 : (b_1, b_2, b_3)$$

$$3 : (c_1, c_2, c_3)$$

$$\max(|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|, |a_3 - b_3|) \to \min$$

Пусть NC - размерность вектора, NV - количество векторов, NK - число групп.

Множество:

$$S = \{s_i | s_i = (s_{i,2}, s_{i,2}, \ldots, s_{i,NC})\}, i \in \{1, \ldots, NV\}$$

Неизвестные:

$$x_{s,k} = \begin{cases} 1, -s \in NK \\ 0 \end{cases}$$

Введем дополнительную переменную $y_{c,k}$ - сумма векторов из подмножества k по координате c:

$$\max |y_{c,k_1} - y_{c,k_2}| \to \min$$

$$k_1, k_2 \in \{1, \dots, NK\}$$

$$c \in \{1, \dots, NC\}$$

Нам нужно найти группу k_1, k_2 и c дают разницу по модулю между соответствующими c.

Так мы делаем для:

1. $$\sigma \geq y_{c,k_1} - y_{c,k_2} \quad \forall k_1, k_2 \in \{1, \dots, NK\}, k_1 < k_2$$
$$\sigma \geq -y_{c,k_1} + y_{c,k_2} \quad \forall k_1, k_2 \in \{1, \dots, NK\}, k_1 < k_2$$
$$\sigma \to \min$$

2. $$\sum_{k=1}^{NK} x_{s,k} = 1, \qquad \forall s \in S$$

3. $$y_{c,k} = \sum_{s \in S} S_c \cdot x_{s,k} \forall c \in \{1, \dots, NC\}, k \in \{1, \dots, NK\}$$
$$x_{s,k} \in \{0, 1\} \forall s \in S, \forall k \in \{1, \dots, NK\}$$

Всего незивестынх: $NV * NK + 1$

1.3 Рассмотрим взвешенную сумму средних квадратов отклонений

$$\sum_{k=1}^{NK} \sum_{c=1}^{NC} w_c \left(1 - \frac{y_{c,k}}{\hat{y}_c}\right)^2 \to \min$$

$\hat{y_c}$ - суммируем покоординатно c и делим на NK - идеальное значение по характеристике c в подмножестве.

Чем больше w_c, тем больше значит тебя критерий равномерности - тем больше равны координатым векторов.

Такая запись нелинейна по y, то на дом будет модуль.

1-е ограничение нужно заменить на связь сигм с дельтами.

Усложним еще задачу.

1.4 Критерий равномерности

1. Общее число ночных связок
2. Среднее рабочее время на бортпроводника - берем подмножество связок, попавших на рабочий стол - суммируем время.

Можем обобщить: что каждый вектор $S_{i,c,k}$ имеет разные координаты для разных подгрупп.

Приращение по характеристике c при добавлении i в k подгруппе.

1.5 Minimize Differencse

Входные данные:

1. S - множество векторов
2. NV - мощность множества S
3. NC - размерность вектора $s \in S$, то есть каждый вектор описывается NC числовыми координатами

$$C = \{1, \ldots, NC\}$$

Множество S задаётся следующим образом:

$$S = \{s_{i,1}, s_{i,2}, \ldots, s_{i,NC}\} \quad \forall i \in \{1, \ldots, NV\}$$

4. NK - число групп:

$$K = \{1, \ldots, NK\}$$

Дополнение к входным данным:

- Введём дополнительную переменную $y_{c,k}$ - суммарное значение координаты $c \in C$ для группы $k \in K$.

Задача: необходимо распределить векторы из S по NK группам, причём каждый вектор должен быть представлен в единственной группе.

Целевая функция: минимизация максимальной разницы по модулю между двумя группами по координате среди всех координат и всех групп:

$$\max_{\substack{k_1,k_2 \in K \\ c \in C}} |y_{c,k_1} - y_{c,k_2}| \to \min$$

Пояснение: необходимо найти две группы k_1 и k_2 и такую координату c, которые бы минимизировали максимальную разность.

Ограничения:

1. Каждый вектор должен находиться строго в одной из групп:

$$\sum_{k=1}^{NK} x_{s,k} = 1 : \forall s \in S$$

$$x_{s,k} \in \{0,1\}$$

2. Сумма по каждой координате в каждой группе:

$$y_{c,k} = \sum_{s \in S} s_c \cdot x_{s,k} : \forall c \in C\ \forall k \in K$$

3. Введём переменную σ, являющуюся максимальную разность по координате в группах. Её необходимо минимизировать:

$$\sigma \to \min$$

   Введём ограничение, связывающую σ и исходную целевую функцию:

$$|y_{c,k_1} - y_{c,k_2}| \leq \sigma : \forall k_1, k_2 \in K\ \forall c \in C\ k_1 < k_2$$

   Модуль расскрывается через два неравенства:

$$y_{c,k_1} - y_{c,k_2} - \sigma \leq 0$$

$$-y_{c,k_1} + y_{c,k_2} - \sigma \leq 0$$

Всего в задаче $NV \cdot NK + 1$ переменных.

1.6 Weighted Minimize

Входные данные:

1. S - множество векторов

2. NV - мощность множества S

3. NC - размерность вектора $s \in S$, то есть каждый вектор описывается NC числовыми координатами

$$C = \{1, \ldots, NC\}$$

Множество S задаётся следующим образом:

$$S = \{s_{i,1}, s_{i,2}, \ldots, s_{i,NC}\} \quad \forall i \in \{1, \ldots, NV\}$$

4. NK - число групп:

$$K = \{1, \ldots, NK\}$$

Дополнение к входным данным:

- Введём дополнительную переменную $y_{c,k}$ - суммарное значение координаты $c \in C$ для группы $k \in K$.

- Введём дополнительные идеальные константные значения следующим образом:

$$\hat{y}_c = \frac{\sum\limits_{i=1}^{NV} s_{i,c}}{NK} : \forall c \in C$$

- Введём константы весов, отвечающие за значимость уравнивания по определенной координате - чем больше значение веса, тем важнее уравнивать множество по данной координате:

$$W = \{w_1, \ldots, w_{NC}\}$$

Целевая функция: минимизация взвешенной (W) суммы модулей относительных отклонений $y_{c,k}$ от $\hat{y}_c$ по каждой из координат для каждой группы с учётом весов W:

$$\sum_{c=1}^{NC} w_c \cdot \sum_{k=1}^{NK} \left| 1 - \frac{y_{c,k}}{\hat{y}_c} \right| \to \min$$

Ограничения:

1. Каждый вектор должен находиться строго в одной из групп:

$$\sum_{k=1}^{NK} x_{s,k} = 1 : \forall s \in S$$

$$x_{s,k} \in \{0, 1\}$$

2. Сумма по каждой координате в каждой группе:

$$y_{c,k} = \sum_{s \in S} s_c \cdot x_{s,k} : \forall c \in C \ \forall k \in K$$

3. Введём $NC \cdot NK$ переменных $\sigma[c, k]$, являющуюся верхней границей максимальной величины отклонения. Будем минимизировать сумму всех этих переменных:

$$\sum_{c=1}^{NC} w_c \cdot \sum_{k=1}^{NK} \sigma[c, k] \to \min$$

Введём следующие ограничения для относительных отклонений:

$$\left| 1 - \frac{y_{c,k}}{\hat{y}_c} \right| \leq \sigma[c, k] : \forall c \in C \ \forall k \in K$$

Модуль расскрывается через два неравенства:

$$1 - \frac{y_{c,k}}{\hat{y}_c} - \sigma[c, k] \leq 0$$

$$-1 + \frac{y_{c,k}}{\hat{y}_c} - \sigma[c, k] \leq 0$$

Всего в задаче $NV \cdot NK + NC \cdot NK = NK(NV + NC)$ переменных.

1.7 Weighted Choose Minimize

Входные данные:

1. S - множество векторов
2. NV - мощность множества S
3. NC - размерность вектора $s \in S$, то есть каждый вектор описывается NC числовыми координатами

$$C = \{1, \dots, NC\}$$

4. NK - число групп:

$$K = \{1, \dots, NK\}$$

Координаты векторов могут отличаться в зависимости от попадания в подмножество, поэтому множество S задаётся следующим образом:

$$S = \{s_{i,k,1}, s_{i,k,2}, \dots, s_{i,k,NC}\} \quad \forall i \in \{1, \dots, NV\} \quad \forall k \in K$$

Дополнение к входным данным:

- Введём дополнительную переменную $y_{c,k}$ - суммарное значение координаты $c \in C$ для группы $k \in K$.
- Введём дополнительные идеальные константные значения следующим образом:

$$\hat{y}_{c,k} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{NV} s_{i,k,c}}{NK} : \forall c \in C \; \forall k \in K$$

- Введём константы весов, отвечающие за значимость уравнивания по определенной координате - чем больше значение веса, тем важнее уравнивать множество по данной координате:

$$W = \{w_1, \dots, w_{NC}\}$$

Целевая функция: минимизация взвешенной (W) суммы модулей относительных отклонений $y_{c,k}$ от $\hat{y}_{c,k}$ по каждой из координат для каждой группы с учётом весов W:

$$\sum_{c=1}^{NC} w_c \cdot \sum_{k=1}^{NK} \left| 1 - \frac{y_{c,k}}{\hat{y}_{c,k}} \right| \to \min$$

Ограничения:

1. Каждый вектор должен находиться строго в одной из групп и вектор из группы возможных векторов в зависимости от номера группы должен быть тоже один.

$$\sum_{i=1}^{NK}\sum_{k=1}^{NK} x_{s,i,k} = 1 : \forall s \in S$$

$$x_{s,i,k} \in \{0,1\}$$

   Количество переменных: $NV \cdot NK^2$

2. Сумма по каждой координате в каждой группе:

$$y_{c,k} = \sum_{i=1}^{NK}\sum_{s\in S} s_{i,c} \cdot x_{s,i,k} : \forall c \in C \ \forall k \in K$$

3. Введём $NC \cdot NK$ переменных $\sigma[c,k]$, являющуюся верхней границей максимальной величины отклонения. Будем минимизировать сумму всех этих переменных:

$$\sum_{c=1}^{NC} w_c \cdot \sum_{k=1}^{NK} \sigma[c,k] \to \min$$

   Введём следующие ограничения для относительных отклонений:

$$\left|1 - \frac{y_{c,k}}{\hat{y}_{c,k}}\right| \leq \sigma[c,k] : \forall c \in C \ \forall k \in K$$

   Модуль расскрывается через два неравенства:

$$1 - \frac{y_{c,k}}{\hat{y}_{c,k}} - \sigma[c,k] \leq 0$$

$$-1 + \frac{y_{c,k}}{\hat{y}_{c,k}} - \sigma[c,k] \leq 0$$

   Всего в задаче $NV \cdot NK^2 + NC \cdot NK = NK \cdot (NV \cdot NK + NC)$ переменных.