# Измерение риска

## Домашнее задание

# 1

In[ ]:=
```
𝒟 = EmpiricalDistribution[{0.1, 0.2, 0.4, 0.2, 0.07, 0.03} → {0, 1, 2, 5, 10, 50}];
Quantile[𝒟, {0.9, 0.95}]
```

Out[ ]= {5, 10}

# 2

### Плотности

In[ ]:= $D\left[\frac{1}{1+e^{-x}}, x\right]$

$D\left[1-\frac{16}{x^2}, x\right]$

Out[ ]= $\frac{e^{-x}}{\left(1+e^{-x}\right)^2}$

Out[ ]= $\frac{32}{x^3}$

### Ожидание

In[ ]:= $\mu1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\left(1+e^{-x}\right)^2} x \, dx$

$\mu2 = \int_{2}^{+\infty} \frac{32}{x^3} x \, dx$

Out[ ]= 0

Out[ ]= 16

### Дисперсия

In[∘]:= $\int_{-\infty}^{0} \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} (x-\mu 1)^2 \, dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} (x-\mu 1)^2 \, dx$

$\frac{32}{x^3} (x-\mu 2)^2$ // Apart

$\int_{2}^{+\infty} \% \, dx$

Out[∘]= $\frac{\pi^2}{3}$

Out[∘]= $\frac{8192}{x^3} - \frac{1024}{x^2} + \frac{32}{x}$

Integrate: Integral of $\frac{8192}{x^3} - \frac{1024}{x^2} + \frac{32}{x}$ does not converge on {2, ∞}.

Out[∘]= $\int_{2}^{\infty} \left( \frac{8192}{x^3} - \frac{1024}{x^2} + \frac{32}{x} \right) dx$

Положительная полудисперсия

In[∘]:= $\int_{0}^{+\infty} \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} (x-\mu 1)^2 \, dx$

Out[∘]= $\frac{\pi^2}{6}$

Отрицательная полудисперсия

In[∘]:= $\int_{-\infty}^{0} \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} (x-\mu 1)^2 \, dx$

Out[∘]= $\frac{\pi^2}{6}$

$\mathrm{VaR}_{0.9}$

In[∘]:= Solve$\left[\frac{1}{1+e^{-\alpha}} == \frac{9}{10}, \alpha, \mathbb{R}\right]$ // N

Solve$\left[1 - \frac{16}{\alpha^2} == \frac{9}{10} \ \&\& \ \alpha > 2, \alpha, \mathbb{R}\right]$ // N

Out[∘]= {{α → 2.19722}}

Out[∘]= {{α → 12.6491}}

# 3

Надо решить уравнение относительно $z$

$$F_{\xi+\eta}(z) = 0.99$$

$$\int_{-\infty}^{z} \int_{-\infty}^{z-x} f_{\xi,\eta}(x, y) \, dy \, dx = 0.99$$

Решать будем численно

```
In[]:= F = Function[z,
         NIntegrate[PDF[MultinormalDistribution[{3, 5}, {{4, 0.6}, {0.6, 1}}], {x, y}],
          {x, -100, z}, {y, -100, z - x}]];
       Quiet@F[8]
       Quiet@F[16]
Out[]= 0.5
Out[]= 0.999343
```

```
In[]:= {a, b} = {8, 16}; ε = 10^-6.;
       Quiet@While[b - a > ε, c = Mean[{a, b}];
         If[Abs[F[c - ε] - 0.99] < Abs[F[c + ε] - 0.99], b = c - ε, a = c + ε]];
       z = Mean[{a, b}]
Out[]= 13.7926
```

# 4

Задача оптимизации

$$\mathrm{VaR}_\alpha(w) = F^{-1}_{w\,\xi+(1-w)\,\eta}(\alpha) \longrightarrow \min$$

Так уж и быть, выпишем $F_{w\,\xi+(1-w)\,\eta}(z)$

$$w\,x + (1-w)\,y = z$$

$$y = \frac{z - w\,x}{1 - w}$$

$$F_{w\,\xi+(1-w)\,\eta}(z) = \int_{-\infty}^{z}\int_{-\infty}^{\frac{z-w\,x}{1-w}} f_{\xi,\eta}(x, y)\,dy\,dx$$

Можно было бы решить численно, но мы же поняли, как решать задачу, правда...

# 5

```
In[]:= Table[<|"dist" → dist, "α" → α, "q" → Quantile[dist, α]|>, {dist,
          {NormalDistribution[], StudentTDistribution[10], LogNormalDistribution[0, 1]}},
         {α, {0.99, 0.995}}] // Flatten // Column
Out[]= <|dist → NormalDistribution[0, 1], α → 0.99, q → 2.32635|>
       <|dist → NormalDistribution[0, 1], α → 0.995, q → 2.57583|>
       <|dist → StudentTDistribution[10], α → 0.99, q → 2.76377|>
       <|dist → StudentTDistribution[10], α → 0.995, q → 3.16927|>
       <|dist → LogNormalDistribution[0, 1], α → 0.99, q → 10.2405|>
       <|dist → LogNormalDistribution[0, 1], α → 0.995, q → 13.1422|>
```

# 7

```
In[]:= SeedRandom[42]
       sample = RandomVariate[NormalDistribution[0, 1], 200];
```

## Теоретические квантили 0.9, 0.95, 0.99

```
In[•]:= true = Quantile[NormalDistribution[0, 1], {0.9, 0.95, 0.99}]
Out[•]= {1.28155, 1.64485, 2.32635}
```

## Параметрические оценки

```
In[•]:= Clear[μ, σ]
        EstimatedDistribution[sample, NormalDistribution[μ, σ]]
        Quantile[%, {0.9, 0.95, 0.99}]
        Mean[(% - true)^2] (*Среднеквадратичная ошибка*)
Out[•]= NormalDistribution[-0.0138023, 0.948044]
Out[•]= {1.20117, 1.54559, 2.19168}
Out[•]= 0.0114835
```

## Непараметрические оценки

```
In[•]:= Quantile[sample, {0.9, 0.95, 0.99}]
        Mean[(% - true)^2] (*Среднеквадратичная ошибка*)
Out[•]= {1.11976, 1.47793, 2.29471}
Out[•]= 0.0183466
```