Страхование и актуарная математика

Александр Широков ПМ-1701

Преподаватель:

Радионов Андрей Владимирович

Санкт-Петербург
2020 г., 7 семестр

Список литературы

[1]

Содержание

1 Конспекты лекций **2**

1.1 Микроэкономические основы страхования 2

1.1.1 01.09.2020 2

1.1.2 03.09.2020 2

1.1.3 04.09.2020 4

1.1.4 08.09.2020 5

1 Конспекты лекций

1.1 Микроэкономические основы страхования

1.1.1 01.09.2020

Страхование вклада - если у банка возникают проблемы, то нам возвращают деньги банк в некоторой границе. Страхование - выход США из великой депрессии. Застраховать в принципе можно все что угодно.

1.1.2 03.09.2020

В ситуациях неопределенностей человек принимает решение не на основании математического ожидания $E\xi$, а на основании математического ожидания некоторой функции полезности $Eu(\xi)$, где u - некая функция полезности. За w - обозначим капитал, а за a - плата за риск, ξ - потенциальные убытки. Тогда ситуация будет описываться:

$$Eu(w-\xi) \quad u(w-a)$$

Пусть $W = 100$ и случайая величина убытков принимает следующие значения: 0 с вероятностью 0.9,1 с вероятностью 0.05,20 с вероятностью 0.05. Функция полезности - $u(x) = \ln(x+1)$. Математическое ожидание убытка $E\xi = 0.55$. Приходит банк и говорит продать за 60.

$w-\xi$ - начальное состояние, $w-a$ - возможное состояние, сравнение полезностей

Посчитаем:

$$Eu(w-\xi) = E\ln(100-\xi+1) = \ln(101-0+1)\cdot 0.9+\ln(100-1+1)\cdot 0.05+\ln(100-10+1)\cdot 0.05 = 4.60941$$

$$E\ln(100+1-0.55) = 4.60966$$

Есть $W, u(\xi), \xi, f_\xi(x)$:

$$E\left(u(W-\xi)\right) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} u(W-x)f_\xi(x)dx$$

Вместо бесконечностей используются границы интегрирования.

$$\Delta u = \frac{\Delta W}{W} \qquad du = \frac{dW}{W} \qquad u = \ln W$$

Определение 1.1.1. Пусть есть набор случайных величин ξ и будем задавать предпочтение подобным образом $\xi \geq \eta$ - предпочтение нестрого отношение, если существуют какие-то пары, которые находятся в бинарном отношении.

Мы будем говорить про свойства отношений:

1. Пиолнота: $\xi \geq \eta$ или $\eta \geq \xi$
2. Транзитивность: $\xi \geq \eta, \eta \geq \varepsilon \Rightarrow \xi \geq \varepsilon$
3. Из первого следует рефлексиновть

Будем говорить, что данное бинарное отношение является отношением *эквивалентности* - рефлексивно, транзитивно, симметрично.

Определение 1.1.2. Будем говорить, что $\xi \geq \eta$ и $\xi \not\sim \eta$ - отношение строго порядка

Определение 1.1.3. $V : \Xi \to R$ - функция V сохраняет упорядочивание, если $\xi \geq \eta$, то:

$$V(\xi) \geq V(\eta)$$

Определение 1.1.4. Пусть есть набор $\mathbb{A}_j$. $B \in A$ является полным по упорядочиванию, если для любых элементов $a, b \in A$ существует элемент $\exists c \in B$, что либо $a \geq c > b$ либо $a > c \geq b$.

Теорема 1.1. *На $\Xi \leq V$ существует отношение, сохраняющее отношение, тогда и только тогда, когда в Ξ существует счетно или конечное подмножество плотное по упорядочиванию.*

Как построить функцию полезности? Построим отношение порядка на множестве товаров, строим кривые безразличия - классы эквивалентности (все элементы внутри эквивалентны между собой), они не пересекаются.

Построим прямую, единичный вектор (бисскетриса). На что нужно умножить единичный вектор, чтобы попасть в точку пересечения, и высчитываем функцию полезности.

$$V^*(\xi) = Eu(\xi) = \sum u(x_i)p_i = V(x_1)p_1 + V(x_2)p_2$$

$$\xi : x_1 \mapsto p_1, x_2 \mapsto p_2$$

Мы можем выбрать функцию полезности таким образом

1.1.3 04.09.2020

Пусть случайная величина принимает значения $x \mapsto p$ и $y \mapsto 1-p$. Введем обозначение для такой случайной величины:

$$(x, y)_p$$

Наложим некоторые ограничения:

- Тогда индивид индеферентен: $(x, y)_1 \sim x$.

  Например: пусть ξ равномерно распределен на отрезке $[0, 1]$: $\xi \sim \mathbb{U}[0, 1]$.

- $(x, y)_p \sim (y, x)_{1-p}$

- $((x, y)_p, y)_q \sim (x, y)_{pq}$

  Пример: $(1, (2, 3)_{\frac{1}{2}})_{\frac{1}{2}}$ для игры $1 \mapsto \frac{1}{2}, 2 \mapsto \frac{1}{4}, 3 \mapsto \frac{1}{4}$

Ограничения:

- $\{p \in [0, 1] : (x, y)_p \geq z\}$ - замкнутое множество

- $\{p \in [0, 1] : z \geq (x, y)_p\}$ - замкнутое множество $\forall x, y, z \in \Xi$

- $x \sim y : (x, z)_p \sim (y, z)_p$

- $\exists w, b : \forall \xi \in \Xi$ выполняется, что $w \geq x \geq b$

- $(b, w)_p \geq (b, w)_q \Leftrightarrow p > q$

Теорема 1.2. *Если Ξ и на нём введено отношение предпочтения $\geq$, то найдётся такая функция V, что*

$$V((x, y)_p) = pV(x) + (1-p)V(y)$$

$$Eu(\xi) = (x, y)_p$$

$$V(\xi) = Eu(\xi)$$

$$u(y) : R \to R, V : \Xi \to R$$

Доказательство: Хэливэриан.

Рассмотрим некоторый функционал $V((x,y)_p)$ и применим к нему некоторое преобразование:

$$f\left(V((x,y)_p)\right) = f(V(x)\cdot p + V(y)\cdot(1-p)) = f(V(x))\cdot p + f(V(y))\cdot(1-p)$$

и это линейная функция - линейное преобразование.

Пример: $u(x) = \ln(x+1)$, $\xi, f_\xi(y), Eu(\xi) = \int u(x) f_\xi(x)dx$

$u_1(x) = a\ln(x+1) + b, a > 0$

$$Eu_1(\xi) = \int a\ln(x+1) + bf_\xi(x)dx = a\int ln(x+1)f(x)dx + b\int f(x)dx = a\int u(x)f_\xi(x)dx + b$$

следовательно функционал является единственным с точностью до линейного преобразования.

1.1.4 08.09.2020

Напоминание:

$$V(\xi) = \sum p_j V(x_j)$$

и при дискретных ξ:

$$V(x_j) = u(x_j)$$

Рассмотрим некоторые свойства, которыми должна обладать функция полезности:

1. Функция начинается в нуле из-за монотонного преобразования
2. Функция полезности $u(x)$ не убывает (возрастает):

$$u'(x) > 0$$

3. Функция $u(x)$ вогнутая.

$$u(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \lambda u(x_1) + (1-\lambda)u(x_2)$$

Заметим, что если функция полезности вогнутая, то находясь в ситуации неопределенности, индивид будет согласен заплатить, чем иметь состояние неопределенности. Человек хочет иметь детерменированный выигрыш, нежели при ситуации неопределенности - это происходит из-за вогнутости функции.

- есть функция вогнута, то говорят RISK AVERSION
- если выпукла, то говорят RISK LOVING
- если функция линейна, то RISK NEUTRAL

Почитать здесь можно.

4.
$$Eu(\xi) \leq u(E(\xi))$$

Сравнивает полезность ситуации $u(w-a)$ - нет риска, чуть меньше денег, и есть риск и чуть больше денег - $Eu(w-\xi)$ и если больше, то он соглашается - страхование возможно для некоторого a и человек готов заплатить. С помощью неравенства Йенсена:

$$Eu(w-\xi) \leq u(E(w-\xi)) = u(w - E\xi)$$

$$u(w-a) \geq Eu(w-\xi) \Leftrightarrow u(w-E\xi) = u(w-a)$$

и следовательно мы сможем найти $a = E\xi$ из которого будет выполняться свойство.

Пример 1. Возьмем экспоненциальную функцию полезности:

$$u(x) = 1 - e^{ux}$$

. При желании для любой ограниченной функции можно подобрать лотерею так, в котороый можно подбирать математическое ожидание, чтобы человек всегда играл.

В данном случае у нас ограниченная функция и ограниченное математическое ожидание.

Пример 2. Степенная функция полезности:

$$u(x) = x^{\alpha}, \alpha < 1$$

Пример 3. Квадратичная функция полезности:

$$u(x) = bx - cx^2 : b, c > 0, x < \frac{b}{2c}$$

ЗАДАЧА 1. Пусть есть инвестор с капиталом w и он может вложить деньги в 2 неколлериованных $\xi_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ и $\xi_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$.

$u(x) = 1 - e^{ax}$. ξ_1, ξ_2 - это доходность, которая выражена в процентах. В какой пропорции нужно разделить капитал, чтобы максимизировать нашу полезность.

Решение

Введём доли α и $1-\alpha$. Тогда доход будет:

$$s = \alpha w(1+\xi_1) + (1-\alpha)w(1+\xi_2)$$

и нам нужно максимизировать математическое ожидание от функции полезности

$$Eu(s) \to \max = E(1-e^{\alpha}) = 1 - e^{-wa} E e^{-wa(\alpha\xi_1 + (1-\alpha)\xi_2)}$$

Будем минимизировать величину:

$$Ee^{-wa(\alpha\xi_1+(1-\alpha)\xi_2)} = Ee^{-wa\alpha\xi_1} \cdot Ee^{-wa(1-\alpha)\xi_2} \to \min$$

$$Ee^{-wa\alpha\xi_1} = Ee^{\beta\xi_1} = \int e^{\beta x_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} dx$$

По производящей функции моментов:

$$e^{\mu\beta + \frac{\beta^2\sigma_1^2}{2}} = e^{\left(-\mu_1 wa\alpha + \frac{w^2a^2\alpha^2\sigma_1^2}{2} - \mu_2 wa(1-\alpha) + \frac{w^2a^2(1-\alpha)^2\sigma_2^2}{2}\right)} \min \alpha$$

$$-wa\mu_1 + w^2a^2\alpha\sigma_1^2 + wa\mu_2 - w^2a^2(1-\alpha)\sigma_2^2 = 0$$

$$\alpha = \frac{\mu_1 - \mu_2 + wa\sigma_2^2}{wa\sigma_1^2 + wa\sigma_2^2}$$

Пусть $\mu_1 = \mu_2 : \alpha = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$. В какой пропорции нужно разделить, чтобы минимизировать дисперсию.

$$D(w\alpha(1+\xi_1)) + D(w(1-\alpha)(1+\xi_2)) = w^2\alpha^2 D\xi_1 + w^2(1-\alpha)^2 D\xi_2 = w^2\alpha^2\sigma_1^2 + w^2(1-\alpha)^2\sigma_2^2$$

$$2\alpha w^2\sigma_1^2 - 2w^2(1-\alpha)\sigma_2^2 = 0$$

$$\alpha = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$$

Решение, максимизирующее полезность соответствует решению, минимизирующую диспесию портфеля. Совпадения есть в случае $\mu_1 = \mu_2$. Интересно посмотреть через призму полезности.

Активы, различные портфели, ожидание и дисперсия. μ, σ - спектр доходности. Почему он определяется выпуклой фигурой.

Стандартное отклонение - выпуклая функция. Если есть возможность выбрать из различных портфелей, то мы можем сформировать любой портфель. Данное множество - плотно , сплошное (говорим про овал).

Такое множество называется ЭФФЕКТИВНОЕ МНОЖЕСТВО. Набор не даёт конкректный портфель, потому что мы не понимаем в чём разница между портфелями. **Критерий выбора** - поиск точки, в которой полезность максимальная - на кривой выбирает тот портфель, который дает максимальная полезность и в этом случае будет достигаться баланс между двумя теориями.

НТ: кривые безразличия - те портфели, между которыми клиент индеферентен. В осях μ, σ и если рассмотреть одинаково полезные портфели, то они будут образовывать выпуклую кривую. И тогда решение - это точка касательной множества всех портфелей и совпадать с базовыми теорями кривых безразличия.