

## Сравнение средних. Сравнение центров распределений.

- *Центр распределения* - то одно единственное число, которое описывало, характеризовало бы выборку.
- В качестве центра чаще всего используют
  - среднее арифметическое,
  - медиану
  - усеченное среднее.
  - Среднее усечённое представляет собой статистическую меру центральной тенденции, рассчитанную как среднее значение для имеющегося набора данных, из которого исключены  $k\%$  наибольших и  $k\%$  наименьших значений. Как правило, процент удаляемых значений устанавливается в диапазоне от  $5\%$  до  $25\%$ .

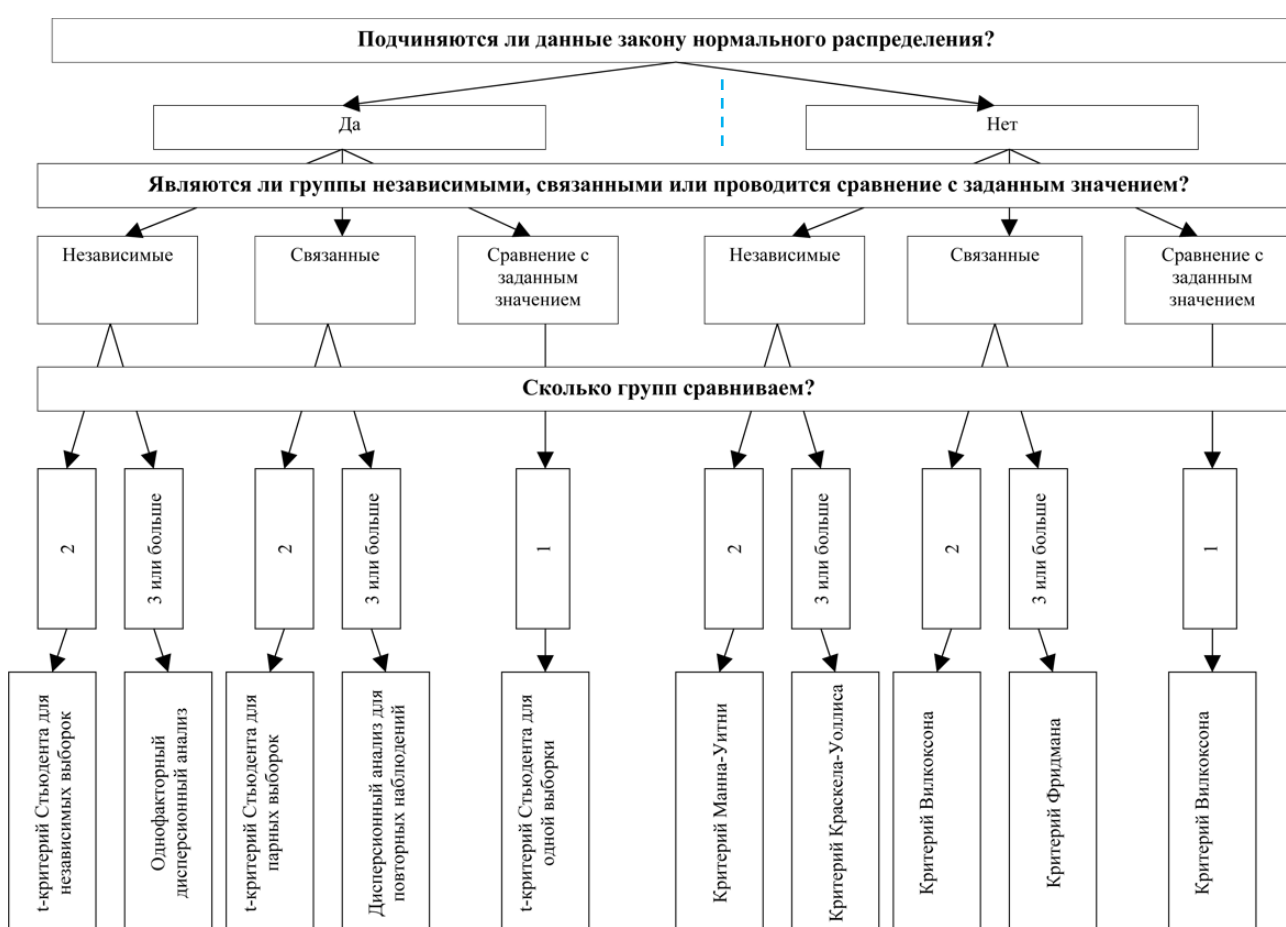
## Статистические гипотезы.

1. Гипотезы согласия.
2. Гипотезы независимости (гипотезы различия).

Алгоритм выбора статистического критерия для анализа количественных данных.

Параметрические

непараметрические



Источник. ВЫБОР СТАТИСТИЧЕСКОГО КРИТЕРИЯ ДЛЯ ПРОВЕРКИ ГИПОТЕЗ. А. М. Гржибовский, Экология человека 2008.11.

| Количество выборок<br>(градаций $X$ ) |             | Две выборки                                     |   | Больше двух выборок       |  |
|---------------------------------------|-------------|---|---|---------------------------|--|
| Зависимость выборок                   |             | Независимые                                     | Зависимые                                     | Независимые               | Зависимые                                    |
| Признак $Y$                           | метрический | Параметрические методы сравнения                |   |                           |  |
|                                       |             | $t$ -Стьюдента,<br>для независи-<br>мых выборок | $t$ -Стьюдента,<br>для зависи-<br>мых выборок | ANOVA                     | ANOVA,<br>с повторны-<br>ми измере-<br>ниями |
|                                       | ранговый    | Непараметрические методы сравнения              |   |                           |  |
|                                       |             | $U$ -Манна-Уит-<br>ни, критерий<br>серий        | $T$ -Вилкоксо-<br>на, критерий<br>знаков      | $H$ -Краскала-<br>Уоллеса | $\chi^2$ -Фрид-<br>мана                      |

## Проверка статистической гипотезы

1. Подготовить данные
2. Выбрать статистический критерий
3. Выдвинуть гипотезу  $H_0$ 
  - а. О законе распределения
  - б. Об отсутствии различий между средними значениями признаков выборок или групп.
4. Выбрать уровень статистической значимости  $\alpha$ , например для  $\alpha = 0,05$ .
5. Определить экспериментальное значение статистического критерия (статистика) по формуле.
6. По таблице критических значений критерия для избранного уровня статистической значимости, например для  $\alpha = 0,05$ , определить критическое значение критерия.
  - а. С помощью критического значения
  - б. С помощью p-value (p-значение, *наблюдаемый* уровню значимости).
    - i. Если  $p\text{-value} \geq \alpha$ ,  $H_0$  не отклоняется
    - ii. Если  $p\text{-value} < \alpha$ ,  $H_0$  отклоняется.

### 1. Гипотезы согласия.

**Подчиняются ли данные закону нормального распределения?**

Если подчиняются – используем параметрические критерии,

Если не подчиняются – используем непараметрические критерии.

**Проверка гипотезы:**

- Эмпирически
- Графически
- С помощью статистических критериев

**А) Описательные статистики (эмпирический подход)**

При нормальном распределении, которое симметрично, значения медианы и среднего арифметического будут одинаковы, а значения асимметрии и эксцесса равны нулю. Если средняя арифметическая больше медианы, а коэффициент **асимметрии**  $> 0$ , то распределение имеет правостороннюю асимметрию (скошено вправо). При левосторонней асимметрии средняя арифметическая меньше медианы, а коэффициент асимметрии  $< 0$ . По величине коэффициента **эксцесса** говорят об островершинном ( $Kurtosis > 0$ ) или плосковершинном ( $Kurtosis < 0$ ) распределении.

## Б) Графики (графический подход)

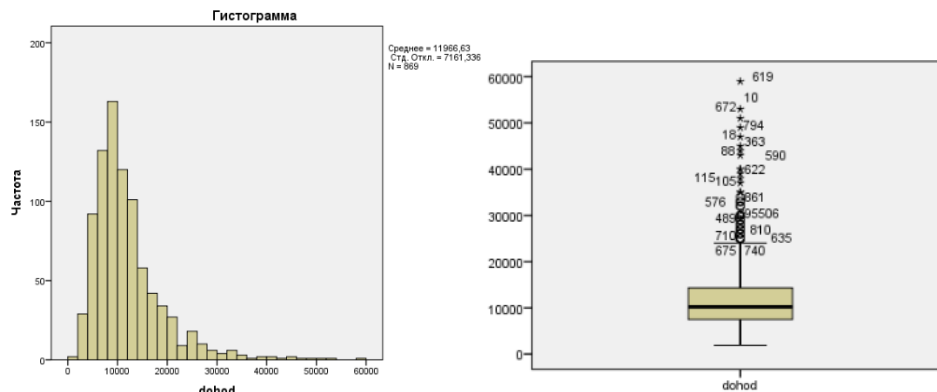


Рис. Гистограмма переменной

## В) Статистические критерии

Проверка распределения с помощью статистических критериев.

- Критерий Шапиро-Уилка (Shapiro–Wilk)
- Критерий Колмогорова-Смирнова (Kolmogorov-Smirnov)
- Критерий согласия Пирсона хи-квадрат

Если число наблюдений меньше 60, рекомендуется использовать критерий Шапиро-Уилка, если больше 60, то критерий Колмогорова-Смирнова

**Замечание.** Колмогоров–Смирнов – весьма требовательный к объёму данных критерий, который начинает адекватно работать на выборке в районе 80. Чем меньше выборка – тем труднее ему углядеть что-нибудь. На выборках в 20-40 человек, которые часто бывают в студенческих работах, критерий Колмогорова-Смирнова практически всегда будет заявлять «Я не смог увидеть никаких различий», каким бы перекошенным не являлось Ваше распределение.

Если же выборка составляет около 20 – здесь просто нет и не может быть нормальности. Никогда. Сразу обращайтесь к непараметрической статистике.

Шапиро–Уилк – эффективный метод проверки «нормальности» распределения. Рекомендуют его использовать для небольших, средних выборок,  $< 100$ .

## Статистические гипотезы в WM

--- **СТАТИСТИЧЕСКИЕ ГИПОТЕЗЫ** (Гипотезы согласия)

`KolmogorovSmirnovTest[ddata, NormalDistribution[a, sigma], "TestDataTable"]`

|                    | Statistic | P-Value  |
|--------------------|-----------|----------|
| Kolmogorov-Smirnov | 0.0594791 | 0.549266 |

`PearsonChiSquareTest[ddata, NormalDistribution[a, sigma], "TestDataTable"]`

|                  | Statistic | P-Value  |
|------------------|-----------|----------|
| Pearson $\chi^2$ | 13.4023   | 0.571255 |

`ShapiroWilkTest[ddata, "TestDataTable"]`

|              | Statistic | P-Value  |
|--------------|-----------|----------|
| Shapiro-Wilk | 0.986552  | 0.094297 |

## 2. Гипотезы независимости (гипотезы различия). Гипотезы сравнения

1) Ввод данных, проверка шкалы!

2) Выбрать критерий, для этого нужно ответить на **три вопроса**. Выбор критерия **ОБОСНОВАТЬ!**

а. Распределение «нормальное», близкое к нормальному/не является нормальным

б. Зависимые/Независимые (выборки), парные/непарные

В случае *парных* выборок имеются пары наблюдений (измерений) одного и того же объекта. Например, до и после «воздействия».

В случае *независимых выборок* каждое наблюдение соответствует отдельному объекту, т.е. измеряются признаки для разных групп.

с. Число выборок

3) Проверить гипотезу о «нормальности» распределения.

Если подчиняются – используем параметрические критерии,

Если не подчиняются – используем непараметрические критерии.

4) Сформулировать гипотезу  $H_0$

Например, сравнение средних:

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2$$

$$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$$

5) Проверить выдвинутую гипотезу

6) Сформулировать **ВЫВОД**.

## Статистические гипотезы в WM

----- **Hypothesis Tests** (гипотезы сравнения)

### Location Tests

**LocationTest** — test means or mean differences of one or two datasets

**LocationEquivalenceTest** — compare means or medians of two or more datasets

**MannWhitneyTest** · **PairedTTest** · **PairedZTest** · **SignTest** · **SignedRankTest** · **TTest** · **ZTest**

### Location Tests

**PairedZTest**[{**data1**, **data2**}]

**ZTest**[{**data1**, **data2**}]

**PairedTTest**[{**data1**, **data2**}]

**TTest**[{**data1**, **data2**}]

**MannWhitneyTest** 2 **выборки**, **не зависящие**, **отличается от нормального** (**Манна – Уитни**)

**SignTest** 2 **выборки**, **зависящие**, **отличается от нормального** (**Тест знаков**)

----- **Hypothesis Tests** (гипотезы сравнения)

### Location Tests

**LocationTest** — test means or mean differences of one or two datasets

**LocationEquivalenceTest** — compare means or medians of two or more datasets

**MannWhitneyTest** · **PairedTTest** · **PairedZTest** · **SignTest** · **SignedRankTest** · **TTest** · **ZTest**

### Location Tests

**PairedZTest**[{**data1**, **data2**}]

**ZTest**[{**data1**, **data2**}]

**PairedTTest**[{**data1**, **data2**}]

**TTest**[{**data1**, **data2**}]

**MannWhitneyTest** 2 **выборки**, **не зависящие**, **отличается от нормального** (**Манна – Уитни**)

**SignTest** 2 **выборки**, **зависящие**, **отличается от нормального** (**Тест знаков**)

**LocationEquivalenceTest**[{**r1**, **r2**, **r3**, **r4**}, {"TestDataTable", **All**}]

|                  | Statistic | P- Value  |
|------------------|-----------|-----------|
| Complete Block F | 3.44186   | 0.0388801 |
| Friedman Rank    | 3.38144   | 0.0410124 |
| Kruskal- Wallis  | 6.12694   | 0.0978583 |
| K- Sample T      | 3.19601   | 0.0415405 |

## Пример

Таблица 1. Описание переменных (файл ex01.sav)

| №  | Имя      | Название                           | Тип | Диапазон   |
|----|----------|------------------------------------|-----|--|
| 1  | №        |                                    | ном | 1–100  |
| 2  | пол      |                                    | ном | 1 – жен, 2 – муж   |
| 3  | класс    |                                    | ном | 1– А, 2 – Б, 3 - В   |
| 4  | вуз      | Предполагаемый для поступления ВУЗ | ном | 1 — гуманитарный; 2 — экономический; 3 — технический; 4 — естественнонаучный |
| 5  | хобби    | Внешкольные увлечения              | ном | 1 — спорт; 2 — компьютер; 3 — искусство                                      |
| 6  | тест1    | Счет в уме                         | кол | 1 – 20   |
| 7  | тест2    | Числовые ряды                      | кол | 1 – 20   |
| 8  | тест3    | Словарный запас                    | кол | 1 – 20   |
| 9  | тест4    | Осведомленность                    | кол | 1 – 20   |
| 10 | тест5    | Кратковременная вербальная память  | кол | 1 – 20   |
| 11 | отметка1 | Средний балл отметок за 10-й класс | кол | 3–5  |
| 12 | отметка2 | Средний балл отметок за 11-й класс | кол | 3–5  |

## Параметрические методы сравнения (критерии).

Уровень значимости !

Критерий t-Стьюдента

- **для 2-х независимых выборок;**
  1. Сравнить успеваемость девушек и юношей (переменная «отметка1»).
- **для 2-х зависимых выборок.**
  2. Сравнить отметки учащихся в 10-х и 11-х классах (отметка 1 и отметка2).

## Непараметрические методы сравнения критерии.

### Анализ -> Непараметрические методы

- **Две независимые выборки. U-критерий Манна–Уитни.**

Сравнение двух независимых выборок (критерий Манна — Уитни) позволяет установить различия между двумя независимыми выборками по уровню выраженности порядковой переменной.

3. Сравнить успеваемость девушек и юношей (переменная «отметка1»).
- **Несколько независимых выборок. Критерий Н-Краскела-Уоллеса.**
    4. Сравнить успеваемость в различных классах (переменная «отметка1»).
    5. Сравнить три группы учащихся, различающихся внешкольными увлечениями (переменная хобби) и успеваемостью в выпускном классе (переменная отметка2).
  - **Две зависимые (связные) выборки. Т-критерий Вилкоксона, критерий знаков**

Сравнение двух связанных (зависимых) выборок может проводиться по двум критериям. Критерий знаков основан на подсчете числа отрицательных и положительных разностей между повторными измерениями; критерий Уилкоксона в дополнение к знакам разностей учитывает их величину.

6. Сравните результаты учащихся по результатам теста2 и теста 4. Примените критерий знаков и критерий Вилкоксона.

- **Несколько зависимых выборок. Хи-квадрат Фридмана.**

Позволяет проверять гипотезы о различии более двух зависимых выборок (повторных измерений) по уровню выраженности изучаемой переменной.

## 2. Варианты статистического анализа и соответствующие функции R

|                               |                   |             | одна группа | две группы: различия                               | две группы: связи     | три и более групп: связи   | три и более групп: общая картина  |
|-------------------------------|-------------------|-------------|-------------|--|-----------------------|--|---|
| количественные                | параметрические   | независимые | summary     | <code>t.test</code>                                | <code>cor.test</code> | <code>oneway.test,</code><br><code>pairwise.t.test,</code><br><code>anova, aov, lm,</code><br><code>glm</code> | <code>lda, manova</code>  |
|                               |                   | зависимые   |             | <code>t.test(..., paired=TRUE)</code>              |                       | Аноva с повторениями   |   |
|                               | непараметрические | независимые |             | <code>wilcox.test</code>                           | <code>cor.test</code> | <code>kruskal.test</code>  | <code>pca, tree,</code><br><code>cor, dist,</code><br><code>hclust,</code><br><code>isoMDS,</code><br><code>cmdscale</code> |
|                               |                   | зависимые   |             | <code>wilcox.test(..., paired=TRUE)</code>         |                       | <code>fridman.test</code>  |   |
| категориальные или порядковые | непараметрические | независимые |             | <code>chisq.test,</code><br><code>prop.test</code> | <code>cor.test</code> | <code>chisq.test</code>  | <code>cor, dist,</code><br><code>hclust,</code><br><code>isoMDS</code>  |
|                               |                   | зависимые   |             | <code>mcnemar.test</code>                          |                       | NA   |   |