Страхование и актуарная математика

Test 2 Try 1 17.12.2020

Преподаватель:

Радионов Андрей Владимирович

Александр Широков, ПМ-1701
Санкт-Петербург
2020 г., 7 семестр

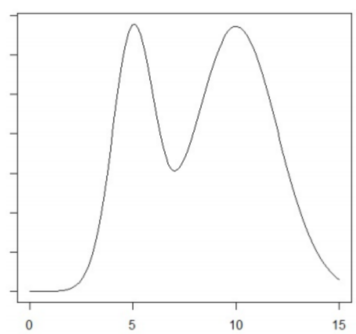
1. В модели коллективного риска, где количество убытков определяется Пуассоновской случайной величиной, функция распределения суммарного ущерба в точке ноль:

   (a) делает скачок;
   (b) непрерывна;
   (c) не определена;
   (d) ни одно из вышеперечисленных утверждений не является всегда верным.

   Решение:

   в модели индвидуального риска она точно делает скачок. Здесь мне кажется, зависит от производящей функции моментов ущерба, поэтому отвечу, что d.

2. Рассматривается модель, в которой с вероятностью p реализуется один ущерб, а с вероятностью $(1-p)$ два ущерба. Ущербы независимы и определяются нормальными случайными величинами с ожиданием 5 и дисперсией 1. Плотность распределения общего убытка приведена на рисунке. Тогда:



   (a) $p > 0.5$;
   (b) $p < 0.5$;
   (c) $p = 0.5$;
   (d) ни одно из вышеперечисленных утверждений не является всегда верным.

   Ответ: $p < 0.5$. Общая плотность имеет вид p умноженное на плотность нормальной величины с параметрами $N(5, 1) + (1-p)$ умноженное на плотность суммы случайных величин, которая для нормальных распределений равна $N(5+5, 1^2+1^2) = N(10, 2)$. Тяжело даются пока такие задания.

3. Рассматривается источник риска, ущерб по которому возникает с вероятностью 0.1. В случае возникновения размер ущерба определяется случайной величиной с плотоностью $f_\xi(x) = ax^2$, $x \in [0; 10]$. В противном случае ущерб равен нолю. Найти функцию распределения ущерба и дисперсию ущерба.

   Решение:

   Вероятность отсутствия ущерба $p = 0.9$. Найдём плотность распределения ущерба:

   $$f_\eta(x) = (1-p)f_\xi(x) = 0.1 \cdot ax^2, x \ \in [0; 10]$$

   Из этого выражения мы можем найти математическое ожидание ущерба:

   $$E(\eta) = \int\limits_0^{10} 0.1 \cdot ax^2 \,\mathrm{dx} = 33.33 \cdot a$$

   И теперь найдём дисперсию ущерба:

   $$D(\eta) = \int\limits_0^{10} (x - E(\eta))^2 \,\mathrm{dx} = \int\limits_0^{10} (x - 33.33 \cdot a)^2 \,\mathrm{dx} = 11111a^2 - 3333.33a + 333.333$$

   Найдем функцию распределения из следующих формул:

   $$F_\xi(x) = \frac{F_\eta(x) - p}{1-p}$$

   $$F_\eta(x) = F_\xi(x) \cdot (1-p) + p = a \cdot \frac{x^3}{3} \cdot 0.1 + 0.9 = 0.3ax^3 + 0.9 \quad \blacksquare$$

4. Рассматривается модель коллективного риска $S_{coll} = \sum\limits_{i=1}^{N} \xi_i$, где производящая функция вероятностей числа убытков есть $\phi(z) = \left(\frac{0.5z}{1-0.5z}\right)^5$, а производящая функция моментов ξ_i есть $\psi_{\xi_i}(t) = (1-2t)^{-2.5}$. Найти $P(N=0)$, $P(N=1)$, $E\xi_i$, DS_{coll}.

   Решение:

Найдём производящую функцию моментов коллективного риска:

$$\psi_{S_{coll}} = \phi_N\left(\psi_{\xi_i}(t)\right)$$

не стал подставлять одно в другое.

Чтобы найти математическое ожидание (а затем и диспесию по производящей функции моментов), возьмём производную по t и подставим 0 в нее. Все действия посчитаны в Wolfram.

$$E\xi_i = \psi_{\xi_i}(t)'_{t=0} = 5$$

$$E\xi_i^2 = \psi_{\xi_i}(t)''_{t=0} = 35$$

$$D\xi_i = E\xi_i^2 - (E\xi_i)^2 = 35 - 25 = 10$$

$$D(S_{coll}) = (E(\xi_i))^2 \cdot D(N) + D(\xi_i) \cdot E(N)$$

Здесь мы уже знаем все характеристики, связанные с убытком, поэтому нам необходимы характеристики случайной величины, отвечающей за убыток. Из производящей функции вероятностей найдем следующие величины:

$$P(N = 0) = \frac{\phi^{(0)}(0)}{0!} = 0$$

$$P(N = 1) = \frac{\phi^{(1)}(0)}{1!} = 0$$

Чтобы найти дисперсию и математическое ожидание N получим производящую функцию моментов из производящей функции вероятности, подставим e^t в производящую функцию моментов:

$$\psi_N(t) = \left(\frac{0.5 \cdot e^t}{1 - 0.5 \cdot e^t}\right)^5$$

Найдем математические ожидания и дисперсию и из него дисперсию коллективного риска:

$$E(N) = \psi_N(t)'_{t=0} = 10$$

$$E(N^2) = \psi_N(t)''_{t=0} = 110$$

$$D(N) = 10$$

$$D(S_{coll}) = (E(\xi_i))^2 \cdot D(N) + D(\xi_i) \cdot E(N) = 25 \cdot 10 + 10 \cdot 10 = 350 \ \blacksquare$$

5. Выберите верные утверждения:

   (a) если обе компоненты вектора возвести в квадрат, соответствующая ему копула не изменится;
   (b) если обе компоненты вектора возвести в куб, соответствующая ему копула не изменится;
   (c) если обе компоненты вектора возвести в квадрат, соответствующая ему копула может не изменится, но может и измениться;
   (d) если обе компоненты вектора возвести в куб, соответствующая ему копула может не изменится, но может и измениться.

   Ответ: отвечу, что верным являются ответы c и d. Похоже на правду :(.

6. Найти копулу и маргинальные распределения для вектора с совместной функцией распределения $F(x_1, x_2) = \dfrac{x_2^2\sqrt{x_1}/4}{\sqrt{x_1} + x_2^2/4 - x_2^2\sqrt{x_1}/4}, x_1 \in [0;1], x_2 \in [0;2]$.

   Решение:

$$F_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = C(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2))$$

Сначала найдем маргинальные распределения по следующим формулам:

$$F_{X_1}(x1) = F_{X_1,X_2}(x_1, x_2 \to \infty) = \frac{\sqrt{x_1}}{1 - \sqrt{x_1}}$$

$$F_{X_2}(x_2) = F_{X_1,X_2}(x_1 \to \infty, x_2) = \frac{x_2^2}{4 - x_2^2}$$

Теперь необходимо найти копулу. Чуть перезапишем функцию начальную:

$$F(x_1, x_2) = \frac{1}{\frac{4}{x_2^2} + \frac{1}{\sqrt{x_1}} - 1}$$

Теперь выразим $\sqrt{x_1}$ и x_2^2 через маргинальные функции распределения:

$$\sqrt{x_1} = \frac{F_{X_1}(x_1)}{1 + F_{X_1}(x_1)}$$

$$x_2^2 = \frac{4 \cdot F_{X_2}(x_2)}{1 + F_{X_2}(x_2)}$$

Тогда, обозначая наши маргинальные распределения за u_1 и u_2 получим формулу копулы:

$$C(u_1, u_2) = \frac{1}{\frac{4}{\frac{4 \cdot u_2}{1+u_2}} + \frac{1}{\frac{u_1}{1+u_1}} - 1} \qquad \blacksquare$$

7. Рассматривается двумерный вектор ζ, ξ с копулой $C(u_1, u_2)$. Найти копулу для вектора $(\vartheta, -\zeta)$.

   Решение:

   Наверное, имелось ввиду вектора $(\xi, -\theta)$. Так как у нас равномерные распределения на гиперкубе в общем случае $[0, 1]^n$, то добавление минуса делает наши распределения на $[0, -1]$. Поэтому в копуле перед u_2 необходимо поставить знак минус в этой функции, тогда равномерность на $0, 1$ сохранится. Либо тут задача с подвохом, но странно.$\blacksquare$

8. Выберите верные утверждения:

   (a) максимум из трёх независимых, одинаково распределенных экспоненциальных случайных величин имеет распределение Гумбеля;

   (b) максимум из трёх независимых, одинаково распределенных экспоненциальных случайных величин имеет распределение Вейбулла;

   (c) максимум из трёх независимых, одинаково распределенных экспоненциальных случайных величин имеет распределение Фреше;

   (d) ни одно из вышеперечисленных утверждений не является верным.

   Решение:

   Ответ: Мне кажется, что можно доказать, что верный только первый вариант (если останется время, я это сделаю). Вкратце: когда мы запишем функцию распределения в n-ой степени получим, что при определённо выбранных константах a_n и b_n сходится к $e^{e^{-x}}$, что является распределением Гумбеля. $\blacksquare$

9. Рассматривается случайная величина $Z = \max(X, Y)$, случайные величины X, Y независимы. Объясните, как класс предельного распределения для Z будет зависеть от классов пределельных распределений для X и для Y.

   Решение:

   У нас есть две независимые случайные величины, следовательно мы можем найти совместную функцию распределения, как произведение соответствующих функций распределения. Так как у нас распределение $Z = \max(X, Y)$, то мы можем найти и функцию этого распределения - $F_Z(x) = (F_X(x) \cdot F_Y(x))^2$. Что мы можем сказать про классы. Если экспоненциальное распределение, то из предыдущего задания предельное распределение - к Гумбелю, максимум из случайных величин с распределением Фреше - к Фреше. Задачка из дз была тоже: проверить, что предельным распределнием к max из независимых случайных величин Вейбулла стремится к Вейбуллу. При одинаковых классах мы однозначно можем сказать, к какому классу принадлежит, при разных мы особо не проверяли, как мне кажется - предположу, что нужно аналитически проверять. ■

10. Объясните, какие подходы можно использовать для оценки поведения хвостов распределений с помощью теории экстремальных значений.

    Решение:

    Первый подход заключается в самом определении "тяжёлого хвоста это означает, что плотность распределения стремится к оси абцисс медленнее, чем плотность экспоненциального распределения. Поэтому для оценки поведения хвоста в принципе мы можем находить следующий предел:

    $$\lim_{x \to \infty} \frac{f_\xi(x)}{f_\eta(x)}$$

    где $f_\eta(x)$ является плотностью экспоненциального распределения. Если предел стремится к нулю то хвост распределение с плотностью $f_\xi(x)$ убывает быстрее, чем у экспоненциального - не особо тяжёлый. Если к бесконечности - хвост убывает медленее экспоненциального - тяжёлый.

    Оценку правого хвоста можно производить, например, параметрически (чем мы занимались в первой половине семестра, оценивая квантилями), но такой подход не очень выгоден - на "подгону параметра распределения"влияют все элементы выборки и старшие квантили с маленькой вероятностью возникновения большого ущерба могут недооцениваться (пример с дамбой).

Методы, которые были предложены: будем оценивать максимальный ущерб в течение некотора периода на основе выборки из максимальных ущербов. По теореме Фишера-Типпета мы можем понять к какой максимальной области притяжения пренадлежит распределение и понять, насколько тяжёлый хвост (при $\beta > 0$ самые тяжёлые хвосты - распределение Фреше). Хвост можно оценивать и из предела $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{L(ax)}{L(x)} = 1, a > 0$, где $L(x)$ - медленно меняющаяся функция. Но при этом методе мы много теряем информации - очень много выбрасываем элементов выборки.

Второй подход: выбрать некоторый достаточно большой порог и исследовать распределение ущербов превышающих их. Оценивать поведение хвоста можно по функции распределения за порогом:

$$F_\xi(x) = \frac{F_\eta(d+x) - F_\eta(d)}{1 - F_\eta(d)}$$

где d - порог, так и по теореме Balkema-Pickands (извиняюсь). $\blacksquare$.