La paradoja de Aquiles y la Tortuga

Autor: Alba Puelles López
Correo: alba.puelles@um.es
Grupo: 1.1
Profesor: Alberto Ruiz García

Índice

1. Introducción

En este documento presentaremos una paradoja que intenta contradecir el siguiente hecho: un corredor veloz alcanzará a uno lento aunque le dé ventaja.

Definiremos y desmostraremos la Paradoja de Aquiles desde un punto de vista matemático porque como bien sabemos, mirándolo desde la física (un corredor muy rápido puede adelantar a uno más lento aunque le de ventaja) o hipotetizando algunas situaciones que pudieran pasar como que el corredor lento se quedara sin aliento y abandonara la carrera, el rápido sí que podría ganar la carrera. Análogamente, también sabemos que el corredor lento podría ganar la carrera si al corredor rápido le sucediese algún contratiempo.

También definiremos y demostraremos su contraparadoja, que dice que el corredor veloz tiene que conseguir alcanzar en algún punto al lento.

2. Definición del problema

Aquiles, conocido como "el de los pies ligeros" debido a que se le consideraba el hombre más veloz, decide participar en una carrera contra una tortuga. Debido a que Aquiles es mucho más rápido, siendo capaz de recorrer 100 m. en 10 segundos, decide darle una gran ventaja inicial de 100 metros a la tortuga que es diez veces más lenta que él.

3. Demostración

Al comienzo de la carrera, Aquiles recorre en poco tiempo los 100 m. de ventaja que le había dejado a la tortuga, pero al llegar descubre que la tortuga ya no está, sino que ha avanzado, más lentamente, 10 m. más.

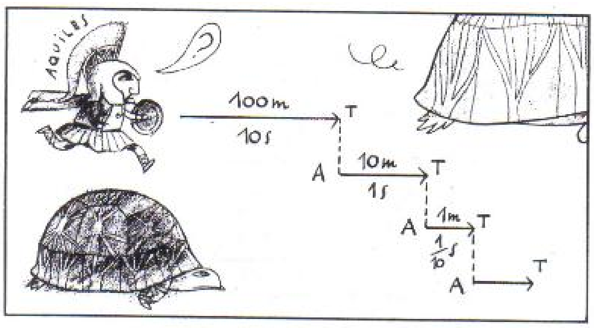

Figura 1: Aquiles y la Tortuga

Muy decidido y con ánimo, sigue corriendo, pero al alcanzar los 10m. que había avanzado la tortuga, ésta ha avanzado 0'1 m. más. De esta manera, Aquiles nunca consigue ganar la carrera, ya que la tortuga siempre estará por delante de él.

A continuación se muestran las distancias recorridas por cada uno de ellos. Podemos comprobar que las distancias recorridas por ambos personajes representan series geométricas.

Tomando como referencia la distancia recorrida por la tortuga obtenemos:

$$Tortuga = 100 + 10 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + ... = 10 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{10})^n \tag{1}$$

	Pos. Aquiles (m.)	**Pos Tortuga (m.)**	**Ventaja (m.)**	**T (s.)**
Salida	0	100	100	0
1ª etapa	100	100 + 10 = 110	10	10
2ª etapa	100 + 10 = 110	110 + 1 = 111	1	10 + 1 = 11
3ª etapa	10 + 1 = 111	111 + 0'1 = 111'1	0'1	11 + 0'1 = 11'1
...	...	...	...	...

Cuadro 1: Tabla de recorrido

Como podemos observar, la Tortuga siempre lleva una pequeña ventaja sobre Aquiles, pero, ¿es ésto cierto?, ¿qué pasa cuando la distancia que recorre cada uno tiende a infinito?, En la siguiente sección veremos que los dos corredores tienen que cruzarse en un mismo punto del recorrido.

4. Demostración de la falsedad de la hipótesis

Es evidente pensar, como hemos comentado en la introducción del trabajo, que Aquiles debería de alcanzar en algún punto a la tortuga y que por lo tanto, algo había en aquella idea que no funcionaba.

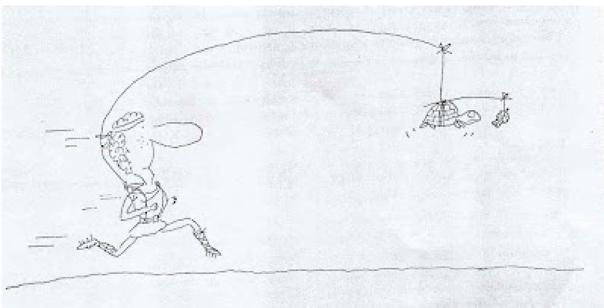

Figura 2: Aquiles y la Tortuga

No fue hasta 24 siglos después de haber sido razonada la paradoja que, gracias a la teoría de límites, se encontró el fallo que escondía, y es que la suposición de que infinitos trayectos deben sumar una distancia infinita en un tiempo infinito no es correcta. Sabiendo ésto, cabe preguntarse lo siguiente, ¿podemos encontrar un valor L para el cuál la siguiente expresión converja?:

$$\lim_{n\to\infty} 10 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{10})^n = L \tag{2}$$

Partiendo de la serie anterior obtenemos la siguiente expresión:

$$\lim_{n\to\infty} a \cdot \frac{(1-r^n)}{1-r} \tag{3}$$

Sabemos que el límite cuando -1 < r < 1 es igual a 0 y en nuestro caso, r se encuentra en dicho intervalo (r = $\frac{1}{10}$). Además, sabemos que a = 100. Por tanto,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-r} = \frac{100}{1-\frac{1}{10}} = 111{,}11 \tag{4}$$

Hemos comprobado que la serie converge y que, por lo tanto, la hipótesis de Zenón era falsa, teniendo que alcanzar Aquiles a la Tortuga a los 111.11 m.

En la siguiente gráfica podemos comprobar, como efectivamente, el límite de la sucesión tiende a 111.11:

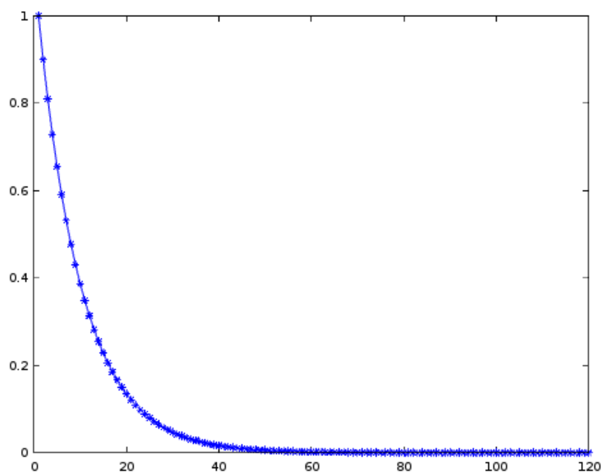

Figura 3: Sucesión geométrica

Referencias

[1] https://es.wikipedia.org/wiki/Paradojas_de_Zenon

[2] http://www.catedu.es/matematicas_mundo/HISTORIA/historia_Zenon.htm

[3] http://entremateymaticas.blogspot.com.es/2012/09/y-despues-de-dos-mil-anos.html