

# La paradoja de Aquiles y la Tortuga

**Autor:** Alba Puelles López  
**Correo:** alba.puelles@um.es  
**Grupo:** 1.1  
**Profesor:** Alberto Ruiz García

# Índice

1. Introducción	3
2. Definición del problema	3
3. Demostración	3
4. Demostración de la falsedad de la hipótesis	4
5. Opinión personal	6

# 1. Introducción

En este documento presentaremos una de las paradojas de Zenón de Elea, que fue un filósofo griego nacido en Elea perteneciente a la escuela eleática (c. 490-430 a. C.).

Definiremos y desmostraremos la Paradoja de Aquiles y la Tortuga, que intenta contradecir matemáticamente el siguiente hecho: un corredor veloz alcanzará a uno lento aunque le dé ventaja.

También definiremos y demostraremos el fallo que había en la paradoja y cuál fue su solución matemática, que surgió siglos después.

## 2. Definición del problema

Aquiles, conocido como “el de los pies ligeros” debido a que se le consideraba el hombre más veloz, decide participar en una carrera contra una tortuga. Debido a que Aquiles es mucho más rápido, siendo capaz de recorrer 100 m. en 10 segundos, decide darle una gran ventaja inicial de 100 metros a la tortuga que es diez veces más lenta que él.

## 3. Demostración

Al comienzo de la carrera, Aquiles recorre en poco tiempo los 100 m. de ventaja que le había dejado a la tortuga, pero al llegar descubre que la tortuga ya no está, sino que ha avanzado, más lentamente, 10 m. más.

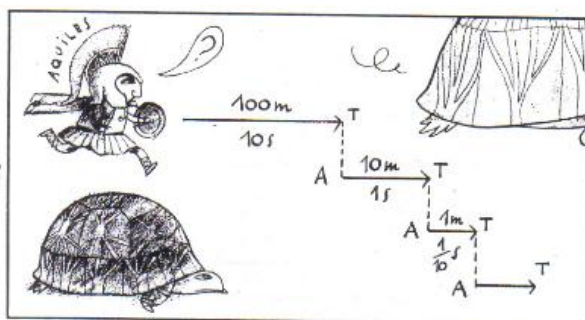


Figura 1: Aquiles y la Tortuga

Muy decidido y con ánimo, sigue corriendo, pero al alcanzar los 10m. que había avanzado la tortuga, ésta ha avanzado 0'1 m. más. De esta manera, Aquiles nunca consigue ganar la carrera, ya que la tortuga siempre estará por delante de él.

A continuación se muestran las distancias recorridas por cada uno de ellos. Podemos comprobar que las distancias recorridas por ambos personajes representan series geométricas.

Tomando como referencia la distancia recorrida por la tortuga obtenemos:

$$Tortuga = 100 + 10 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \dots = 10 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n \quad (1)$$

	Pos. Aquiles (m.)	Pos Tortuga (m.)	Ventaja (m.)	T (s.)
<b>Salida</b>	0	100	100	0
<b>1ª etapa</b>	100	$100 + 10 = 110$	10	10
<b>2ª etapa</b>	$100 + 10 = 110$	$110 + 1 = 111$	1	$10 + 1 = 11$
<b>3ª etapa</b>	$10 + 1 = 111$	$111 + 0'1 = 111'1$	0'1	$11 + 0'1 = 11'1$
...	...	...	...	...

Cuadro 1: Tabla de recorrido

Como podemos observar, la Tortuga siempre lleva una pequeña ventaja sobre Aquiles, pero, ¿es ésto cierto?, ¿qué pasa cuando la distancia que recorre cada uno tiende a infinito?, En la siguiente sección veremos que los dos corredores tienen que cruzarse en algún punto del recorrido.

## 4. Demostración de la falsedad de la hipótesis

Es evidente pensar, como hemos comentado en la introducción del trabajo, que Aquiles debería de alcanzar en algún punto a la tortuga y que por lo tanto, algo había en la hipótesis de Zenón que no funcionaba.

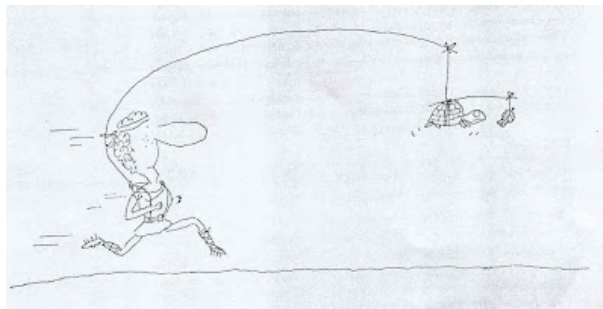


Figura 2: Aquiles y la Tortuga

No fue hasta 24 siglos después de haber sido razonada la paradoja que, gracias a la teoría de límites, se encontró el fallo que escondía, y es que la suposición de que infinitos trayectos deben sumar una distancia infinita en un tiempo infinito no es correcta. Sabiendo ésto, cabe preguntarse lo siguiente, ¿podemos encontrar un valor  $L$  para el cuál la siguiente expresión converja?:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 10 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n = L \quad (2)$$

Partiendo de la serie anterior obtenemos la siguiente expresión:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a \cdot \frac{(1 - r^n)}{1 - r} \quad (3)$$

Sabemos que el límite cuando  $-1 < r < 1$  es igual a 0 y en nuestro caso,  $r$  se encuentra en dicho intervalo ( $r = \frac{1}{10}$ ). Además, sabemos que  $a = 100$ . Por tanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a \cdot \frac{(1 - r^n)}{1 - r} = \frac{a}{1 - r} = \frac{100}{1 - \frac{1}{10}} = 111,11 \quad (4)$$

Hemos comprobado que la serie converge y que, por lo tanto, la hipótesis de Zenón era falsa, teniendo que alcanzar Aquiles a la Tortuga a los 111.11 m.

En la siguiente gráfica podemos comprobar, como efectivamente, la serie converge:

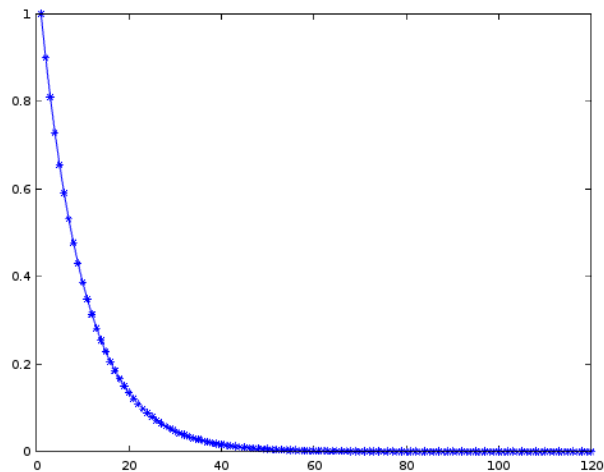


Figura 3: Serie geométrica

## 5. Opinión personal

La realización de este trabajo ha sido muy positiva para mí, ya que he podido aplicar lo visto en clase sobre Git, Latex y Octave, que en mi opinión me será muy útil en un futuro. He elegido este trabajo porque, a parte de que podía aplicar en él todo lo aprendido en la asignatura, me encantan las matemáticas y, en especial, las paradojas me interesan muchísimo, ya que me hacen pensar un montón. Además, este trabajo ha sido muy positivo porque me ha ayudado a repasar algunos conceptos matemáticos importantes que tenía algo olvidados.

## Referencias

- [1] [https://es.wikipedia.org/wiki/Paradojas\\_de\\_Zenon](https://es.wikipedia.org/wiki/Paradojas_de_Zenon)
- [2] [https://es.wikipedia.org/wiki/Zenon\\_de\\_Elea](https://es.wikipedia.org/wiki/Zenon_de_Elea)
- [3] [http://www.catedu.es/matematicas\\_mundo/HISTORIA/historia\\_Zenon.htm](http://www.catedu.es/matematicas_mundo/HISTORIA/historia_Zenon.htm)
- [4] <http://entremateymaticas.blogspot.com.es/2012/09/y-despues-de-dos-mil-anos.html>