محمد پیام تابشی ۴۰۰۱۰۴۸۳۷ تمرین دوم شبیه سازی

① زمان را به بازه زمانی به طول x به طوری که نرخ رویداد ۳ و به زمان

$10-x$ به طوری که نرخ رویداد ۲ باشد فرض کنید

$P_1 \sim pois(3x)$ و $P_2 \sim pois(20-2x)$

$P = P_1 + P_2 \sim pois(20+x)$ چرا؟

این سوال اصلاحیه دارد در آخر این pdf قرار دارد

و اینجا پارامتر متغیر سی را به اشتباه $\frac{1}{3}$ گرفتم پس جواب درست در اصلاحیه آخر pdf هست

$$P(P_1+P_2=n) = \sum_{k=0}^{n} P(P_1=k) \times P(P_2=n-k)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} e^{-3x}\frac{3x^k}{k!} \times \frac{e^{-(20-2x)}(20-2x)^{n-k}}{(20-2x)!} = \frac{e^{-(20+x)}}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}(20-2x)^{n-k} \times 3x^k$$

$$= \frac{e^{-(۲۵+x)}}{n!}(۲۵+x)^n = P_{(P=n)}$$

$$\rightarrow P_{(N=n \mid X=x)} = \frac{e^{-(۲۵+x)}(۲۵+x)^n}{n!}$$

$$, X \sim Gamma(۲,۳) \rightarrow \underbrace{\beta=۲}_{\text{پارامتر شکل}} , \underbrace{\alpha=۳}_{\text{پارامتر مقیاس}}$$

Let $\underline{P_1 \sim Pois(x)}$, $\underline{P_۲ \sim Pois(۲۵)}$

$$P_{(P_1+P_۲=n)} = P_{(P=n)} \longrightarrow$$ مثل قبل اثبات می‌شود

$$\rightarrow P_{(P=n)} = \sum_{k=0}^{n} P_{(P_1=k)} \times P_{(P_2=n-k)}$$

$P_{(P_2=n-k)}$ به راحتی حساب می‌شود و چالش اصلی $P_{(P_1=k)}$ است

که به روش زیر به دست می‌آید:

چالش: $N \sim Pois(\theta)$ and $\theta \sim Gamma(\beta, \alpha)$

α شکل

β مقیاس

$$P(N=n) = ?$$

$$(15)\qquad P(N=n|\Theta=\theta)=\frac{e^{-\theta}\,\theta^n}{n!}\qquad\qquad n=0,1,2,\cdots$$

Suppose that Θ has a Gamma distribution with ~~scale~~ rate parameter α and shape parameter β. The following is the probability density function of Θ.

$$(16)\qquad g(\theta)=\frac{\alpha^\beta}{\Gamma(\beta)}\theta^{\beta-1}e^{-\alpha\theta}\qquad\qquad \theta>0$$

Then the joint density of N and Θ is:

$$(17)\qquad P(N=n|\Theta=\theta)\;g(\theta)=\frac{e^{-\theta}\,\theta^n}{n!}\;\frac{\alpha^\beta}{\Gamma(\beta)}\theta^{\beta-1}e^{-\alpha\theta}$$

The unconditional distribution of N is obtained by summing out θ in (17).

$$
\begin{aligned}
(18)\qquad P(N=n)&=\int_0^\infty P(N=n|\Theta=\theta)\;g(\theta)\;d\theta\\
&=\int_0^\infty \frac{e^{-\theta}\,\theta^n}{n!}\;\frac{\alpha^\beta}{\Gamma(\beta)}\;\theta^{\beta-1}\;e^{-\alpha\theta}\;d\theta\\
&=\int_0^\infty \frac{\alpha^\beta}{n!\;\Gamma(\beta)}\;\theta^{n+\beta-1}\;e^{-(\alpha+1)\theta}d\theta\\
&=\frac{\alpha^\beta}{n!\;\Gamma(\beta)}\;\frac{\Gamma(n+\beta)}{(\alpha+1)^{n+\beta}}\int_0^\infty \frac{(\alpha+1)^{n+\beta}}{\Gamma(n+\beta)}\theta^{n+\beta-1}\;e^{-(\alpha+1)\theta}d\theta\\
&=\frac{\alpha^\beta}{n!\;\Gamma(\beta)}\;\frac{\Gamma(n+\beta)}{(\alpha+1)^{n+\beta}}\\
&=\frac{\Gamma(n+\beta)}{\Gamma(n+1)\;\Gamma(\beta)}\left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^\beta\left(\frac{1}{\alpha+1}\right)^n\\
&=\binom{n+\beta-1}{n}\left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^\beta\left(\frac{1}{\alpha+1}\right)^n\qquad\qquad n=0,1,2,\cdots
\end{aligned}
$$

$$P_1 \sim Pois(x), \quad P_2 \sim Pois(20)$$

به اشتباه به جای $\frac{1}{5}$ ، ۵ گذاشتم و در اصلاحیه درست کردم

$$\hookrightarrow x \sim Gamma(\underbrace{2}_{\beta}, \underbrace{5}_{\alpha})$$

$$P(P_1 = n) = \binom{n+1}{n} \left(\frac{5}{6}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right)^n = \frac{(n+1) \times 25}{6^{n+2}}$$

$$P(P = 5) = P(P_1 + P_2 = 5) = \sum_{k=0}^{n} P(P_1 = k) \times P(P_2 = n-k)$$

$$= \sum_{k=0}^{5} \frac{(k+1) \times 25}{6^{k+2}} \times \frac{e^{-20} \times 20^{(5-k)}}{(5-k)!} = \frac{25}{36} \times 20^5 \times e^{-20} \sum_{k=0}^{5} \frac{(k+1)}{(120)^k} \times \frac{1}{(5-k)!}$$

$$= \underline{0/0000415127566549}$$

که البته این راه که به جواب تقریبی $4/15\times10^{-5}$ می رسد یک ایراد دارد

اینکه شرط $x<10$ را در نظر نگرفته است و در راه دوم این مشکل را برطرف کردم

راه دوم :

$P \sim Pois(20+x)$

$$P_{(N=n|X=x)} = \frac{e^{-(20+x)}(20+x)^{n}}{n!}$$

این پارامتر rate است و در واقع

باید $\frac{1}{5}$ باشد که در اصلاحیه درست شده است

$$X \sim Gamma(2,5) \to \underbrace{\beta=2}_{\text{پارامتر شکل}} , \underbrace{\alpha=5}_{\text{پارامتر مقیاس}}$$

$$P_{(N=n)} = \int_0^{10} P_{(N=n|X=x)} \times P_{(X=x)}\, dx$$

$$= \int_{۰}^{۱۰} \frac{e^{-(۲۰+x)}}{n!} (۲۰+x)^{n} \times \frac{\alpha^{\beta} x^{\beta-۱}}{\Gamma(\beta)} e^{-\alpha x} \, dx$$

$$= \frac{\alpha^{\beta}}{n! \times \Gamma(\beta)} \int_{۰}^{۱۰} e^{-(۲۰+x)} \times (۲۰+x)^{n} \times x^{\beta-۱} \times e^{-\alpha x} \, dx$$

$\alpha = ۵ \quad \beta = ۲ \quad n = ۵$

$$= \frac{۲۵}{۱۲۰} \int_{۰}^{۱۰} \frac{(x+۲۰)^{۵} \, x}{e^{(۶x+۲۰)}} \, dx = \boxed{۰/۰۰۰۰۴۱۵۱۵}$$

که این جواب درست و قطعی است

$$\left(\int_0^{10} \frac{(x+20)^5\, x}{e^{6x+20}}\, dx\right) \times \frac{25}{120}$$

Definite integral

More digits

$$\frac{5 \int_0^{10} e^{-20-6x}\, x\,(20+x)^5\, dx}{24} = \frac{25\,(37\,588\,901\, e^{60} - 16\,471\,200\,761)}{46\,656\, e^{80}} \approx 0.000041515$$

Result

دلیل اینکه دو جواب بسیار نزدیک اند این است که $P(X>10)$

در توزیع گامای گفته شده بسیار عدد کوچکی است و احتمالات ناحیش

اینجا، نشان که اگر این فرض را در حل درنظر نگیریم.

در واقع ورود خطای روش اول حدود 10^{-4} است که واضحا قابل چشم

پوشی است.

۲

$X \sim exp(\lambda_{(t)}) \quad \lambda_{(t)} = \frac{1}{500} + \frac{9}{500} I_{(t)}$

$I_{(t)} = \underline{t \bmod 100 < 5}$

$$P_{(X<50)} = \underbrace{P_{(0<X<5)}}_{\substack{\downarrow \\ X_1 \sim exp\left(\frac{1}{50}\right)}} + \underbrace{P_{(5<X<50)}}_{\substack{\downarrow \\ X_2 \sim exp\left(\frac{1}{500}\right)}}$$

$$P_{(0<X<5)} = F_{X_1}(5) = 1 - e^{-\frac{5}{50}} = \boxed{1 - e^{-\frac{1}{10}}}$$

پس با $p = 1 - e^{-\frac{1}{10}}$ در ۵ ساعت اول خراب می‌شود و با $p = e^{-\frac{1}{10}}$

همچنان سالم مانده $\leftarrow$ $P_{(5<X)} = e^{-\frac{1}{10}}$

$$\underline{P_{(5<X<50 \mid 5<X)} = F_{X_2}(45) = 1 - e^{-\frac{9}{100}}}$$

$$\rightarrow \underbrace{P_{(\omega < x < \omega_0,\ \omega < x)}}_{P_{(\omega < x)}} = 1 - e^{-\frac{9}{100}}$$

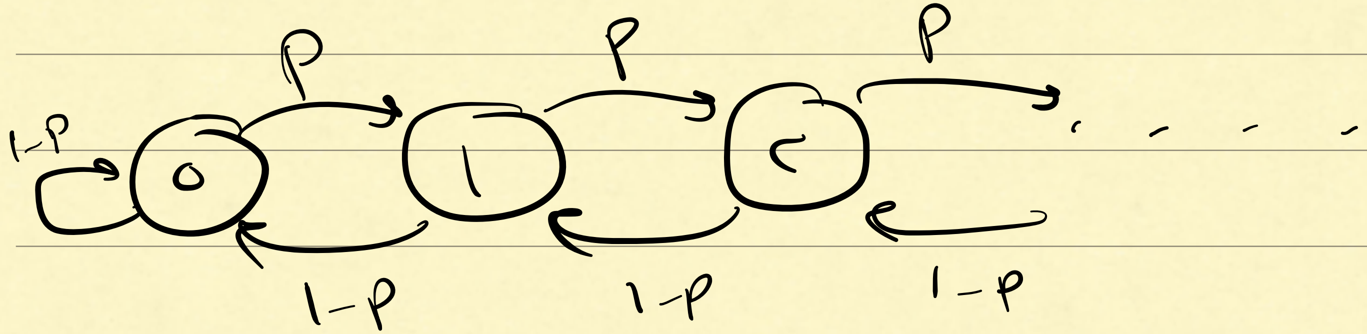
$$\rightarrow P_{(\omega < x < \omega_0)} = e^{-\frac{1}{10}}\left(1 - e^{-\frac{9}{100}}\right)$$

$$\rightarrow P_{(x < \omega_0)} = 1 - e^{-\frac{1}{10}} + e^{-\frac{1}{10}}\left(1 - e^{-\frac{9}{100}}\right)$$

$$= 1 - e^{-\frac{1}{10}} + e^{-\frac{1}{10}} - e^{-\frac{19}{100}} = \boxed{1 - e^{-\frac{19}{100}}}$$

$$\rightarrow P_{(x < \omega_0)} \sim \text{o/lve}$$

۳) الف)



فرض کنید در steady state هستیم واضح است که :

$$x_0 = (1-p)\,x_0 + (1-p)\,x_1 \longrightarrow$$

یا در صفر بوده‌ایم و به خودش رفته‌ایم

یا در یک بوده‌ایم و به صفر رفته‌ایم

$$\hookrightarrow \boxed{x_1 = \frac{p}{1-p}\,x_0}$$

$$x_1 = x_0\,p + x_2(1-p) \rightarrow x_1 = (1-p)x_1 + (1-p)x_2 \rightarrow \boxed{x_2 = \frac{p}{1-p}\,x_1}$$

به طور مشابه با استقرا می‌توان نشان داد که :

$$x_i = \frac{p}{1-p}\,x_{i-1}$$

Let $\alpha = \frac{p}{1-p} \rightarrow x_i = \alpha x_{i-1} \rightarrow \boxed{x_i = \alpha^i x_0}$

if $0 < p < \frac{1}{2} \rightarrow 0 < \alpha < 1$:

ب

$\sum_{i=0}^{\infty} x_i = 1 \longrightarrow$ بالاخره در یکی از حالات هستیم

$\rightarrow$ سری هندسی

$\rightarrow x_0 \sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i = 1 \longrightarrow \frac{x_0}{1-\alpha} = 1 \rightarrow \underline{x_0 = 1-\alpha}$

$\rightarrow \boxed{x_i = (1-\alpha)\alpha^i}$, $\boxed{\alpha = \frac{p}{1-p}}$

ج)

if $\frac{1}{2} < p < 1 \longrightarrow 1 < \alpha$

$$1 = \sum_{i=0}^{\infty} x_i \longrightarrow \underbrace{x_0 \sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i}_{=\infty} = 1$$

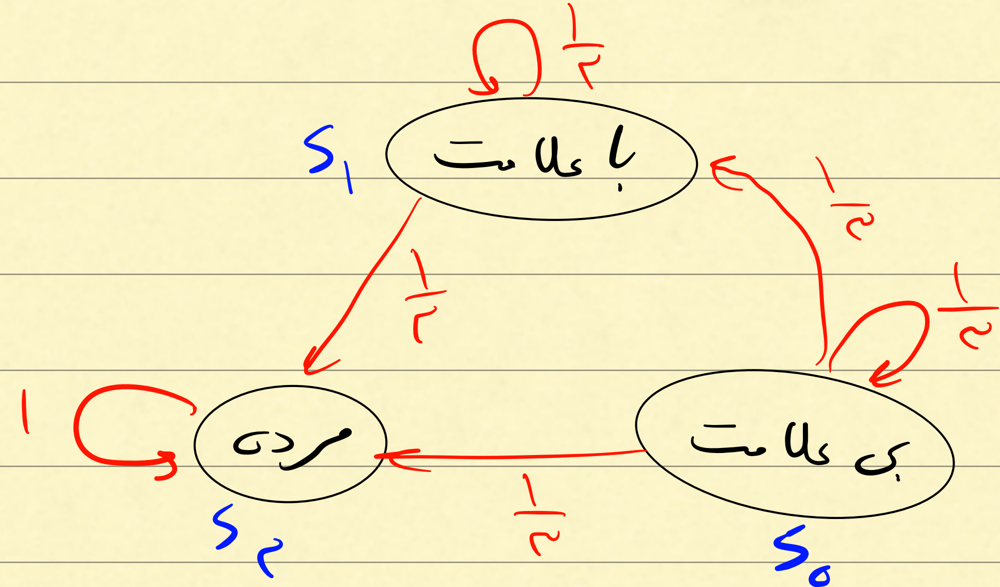
پس نمی‌تواند در steady state تعریف شود

دقت کنید اگر x_0 صفر باشد به تناقض می‌خوریم اگر هم صفر نباشد باز چون

$1 < \alpha$ است به تناقض می‌رسیم و این یعنی همه حالات گذرا هستند

و خواهیم داشت :

برای هر i و j : $\lim_{n\to\infty} P(X_n = j \mid X_0 = i) = 0$



$$
P = \begin{array}{c} \\ S_0 \\ S_1 \\ S_2 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} S_0 & S_1 & S_2 \end{array} \\
\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

(Absorbing)

حالت مرده ۰ جاذب است چون

با احتمال 1 در خودش می ماند و

هرگز از آن state خارج نمی شویم

(یعنی $P_{22} = 1$) ← اگر P^n را حساب کنیم هم P_{ij} به صفر میل می کند

ولی P_{22} ← باقی می ماند که یعنی اگر بی شمار مرحله بگذرد قطعا در مرحله ۲ هستیم

یعنی حتما می میریم

t_1: را فرض کنید تعداد حرکت های باقی مانده تا رسیدن به s_2

امید ریاضی

$t_2 = 0$ $\quad$ $t_0 = ?$

$$t_0 = 1 + \frac{1}{3} t_2 + \frac{1}{3} t_0 + \frac{1}{3} t_1$$

$$t_1 = 1 + \frac{1}{2} t_1 + \frac{1}{2} t_2$$

$$2 t_0 = 3 + t_1$$

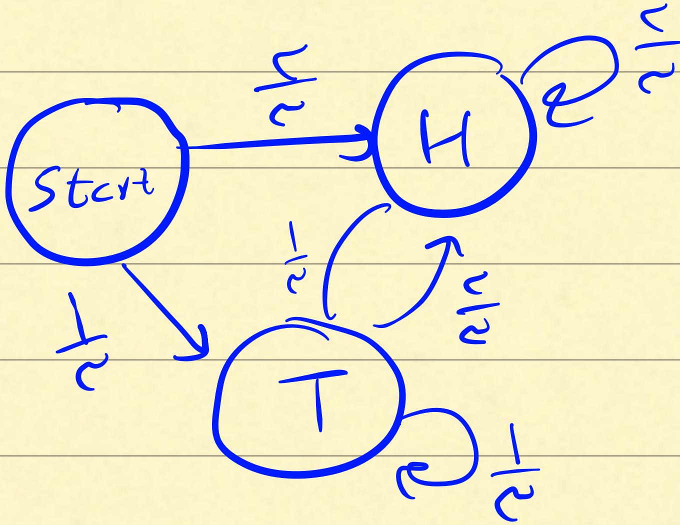
$$t_1 = 2$$

$$\boxed{t_0 = 2/5}$$

پس به ۲/۵ حرکت لازم است

۵) دید اول :

مسئله را با ۲ دیدگاه حل کردیم که دومی ساده‌تر است



$P_H = \frac{۲}{۳}$ H ⟷ خط

$P_T = \frac{۱}{۳}$ T ⟷ شیر

تعداد دفعات پرتاب تا دیدن $X \sim HTH$

$$E[X|HT] = \frac{۲}{۳} \times 1 + \frac{۱}{۳}\left(1 + E[X|TT]\right) = a$$

$$E[X|TT] = \frac{۲}{۳}\left(1 + E[X|TH]\right) + \frac{۱}{۳}\left(1 + E[X|TT]\right) = b$$

$$E[X|TH] = \frac{۲}{۳}\left(1 + E[X|HH]\right) + \frac{۱}{۳}\left(1 + E[X|HT]\right) = c$$

$$E_{[x|HH]} = \frac{۲}{۳}\left(۱ + E_{[x|HH]}\right) + \frac{۱}{۳}\left(۱ + E_{[x|HT]}\right) = c$$

$$\rightarrow \quad a = \frac{۲}{۳} + \frac{۱+b}{۳} \rightarrow \boxed{۳a - ۳ = b}$$

$$b = \frac{۲}{۳}(۱+c) + \frac{۱}{۳}(۱+b) \rightarrow \boxed{۲b = ۲c + ۳}$$

$$c = \frac{۲}{۳}(۱+c) + \frac{۱}{۳}(۱+a) \rightarrow \boxed{c = a + ۳}$$

$$\boxed{a = \frac{۱۵}{۴} \qquad b = \frac{۳۳}{۴} \qquad c = \frac{۲۷}{۴}}$$

$$E_{[x]} = ۲ + \frac{۲}{۹}\left(E_{[x|HT]} + E_{[x|TH]}\right) + \frac{۱}{۹}E_{[x|TT]} + \frac{۴}{۹}E_{[x|HH]}$$

$$= ۲ + \frac{۲}{۹}(a+c) + \frac{b}{۹} + \frac{۴}{۹}c$$

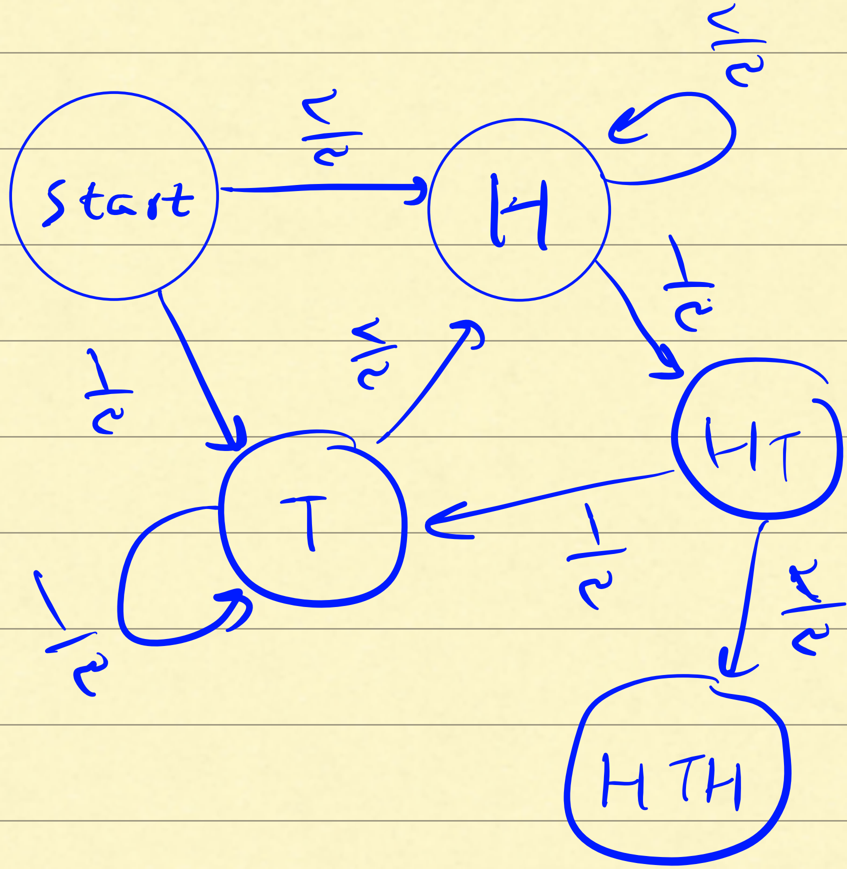
$$= ۲ + \frac{۱}{\cancel{۹}_{۳}}\left(\cancel{۲۱}^{۷} + \frac{\cancel{۳۳}^{۱۱}}{۴} + \cancel{۲۷}^{۹}\right) = ۲ + \frac{۷۵}{۱۲} = ۲ + \frac{۲۵}{۴} = ۸/۲۵$$

دیدِ دوم :

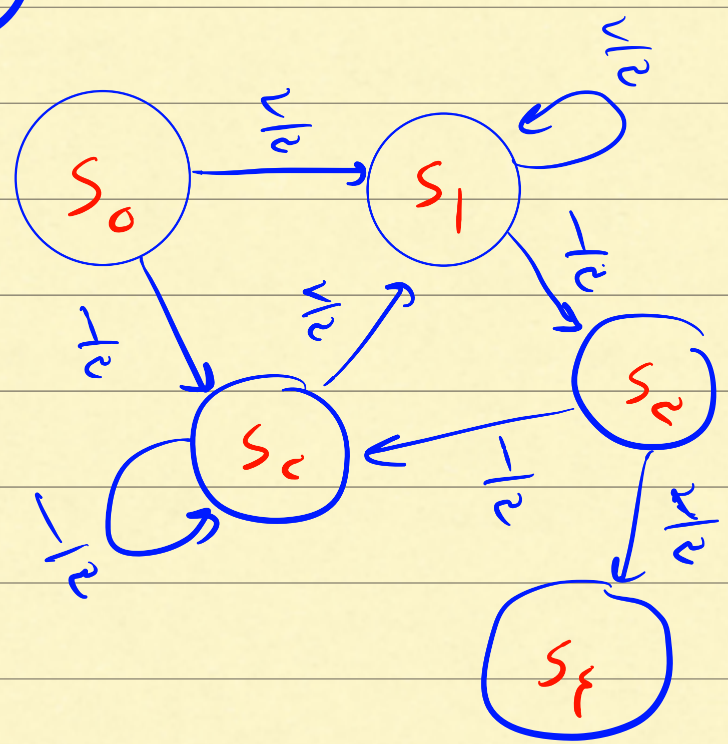
هدف ← HTH

$P_H = \frac{۲}{۳}$ H ⟷ خط

$P_T = \frac{۱}{۳}$ T ⟷ شیر



که فرض کنید :



t_i را فرض کنید تعداد حرکت های باقی مانده تا رسیدن به $S_۴$

$\underbrace{\text{کنید}}_{\text{امید ریاضی}}$

$$\boxed{t_۰ = ?}$$

$$t_۴ = ۰$$

$$t_۳ = ۱ + \frac{۲}{۳} t_۴ + \frac{t_۲}{۳} \rightarrow ۳t_۳ = ۳ + t_۲$$

$$t_۲ = ۱ + \frac{۲}{۳} t_۱ + \frac{۱}{۳} t_۲ \rightarrow ۳t_۲ = ۳ + ۲t_۱$$

$$t_۱ = ۱ + \frac{۲}{۳} t_۱ + \frac{۱}{۳} t_۳ \rightarrow t_۱ = ۳ + t_۳$$

$$t_۳ = \frac{۱۵}{۴} \qquad t_۱ = \frac{۲۷}{۴} \qquad t_۲ = \frac{۳۳}{۴}$$

$$t_۰ = ۱ + \frac{۲}{۳} t_۱ + \frac{۱}{۳} t_۲ \rightarrow ۳t_۰ = ۳ + ۲t_۱ + t_۲$$

$$\rightarrow ۳t_۰ = ۳ + \frac{۵۴}{۴} + \frac{۳۳}{۴} \rightarrow \boxed{t_۰ = ۸/۲۵}$$

Parameters	• $k > 0$ shape • $\theta > 0$ scale	• $\alpha > 0$ shape • $\beta > 0$ rate
Support	$x \in (0, \infty)$	$x \in (0, \infty)$
PDF	$f(x) = \frac{1}{\Gamma(k)\theta^k} x^{k-1} e^{-\frac{x}{\theta}}$	$f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}$
CDF	$F(x) = \frac{1}{\Gamma(k)} \gamma\left(k, \frac{x}{\theta}\right)$	$F(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \gamma(\alpha, \beta x)$

اصلاحیه ۱ :

من سوال را طبق shape-rate حل کردم یعنی $\beta = ۲ , \alpha = ۵$

که غلط

گرفتم یعنی rate parameter = ۵ و shape parameter = ۲ است

اما در ادامه به حالتی که shape-scale است کار کردم یعنی $\beta = ۲ , \alpha = \frac{1}{۵}$

در واقع

که scale parameter = ۵ و shape parameter = ۲ حالت درست

که چون $\text{rate parameter} = \frac{1}{\text{rate parameter}}$ یعنی کافی است

همان مثال را صرفا با استناد $\alpha = \frac{1}{۵}$ حل کنیم در ادامه داریم :

☆ مطالب را از بالا کپی کردم و حجم زیادی تکراری است ☆

۱) زمان را به بازه زمانی به طول x به طوری که نرخ رویداد ۳ و به زمان $10-x$ به طوری که نرخ رویداد ۲ باشد فرض کنید

$P_1 \sim pois(3x)$ و $P_2 \sim pois(20-2x)$

$P = P_1 + P_2 \sim pois(20+x)$ چرا؟

$$P(P_1+P_2=n) = \sum_{k=0}^{n} P(P_1=k) \times P(P_2=n-k)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} e^{-3x}\frac{3x^k}{k!} \times \frac{e^{-(20-2x)}(20-2x)^{n-k}}{(20-2x)!} = \frac{e^{-(20+x)}}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(x-k)!}(20-2x)^{n-k} \times 3x^k$$

$$= \frac{e^{-(20+x)}}{n!} (20+x)^n = P(P=n)$$

$$\rightarrow P(N=n \mid X=x) = \frac{e^{-(20+x)} (20+x)^n}{n!}$$

و $X \sim \text{Gamma}(2, 5) \rightarrow \underbrace{\beta = 2}_{\text{پارامتر شکل}}$, $\underbrace{\alpha = \frac{1}{5}}_{\text{rate پارامتر}}$

Let $\underline{P_1 \sim \text{Pois}(x)}$, $\underline{P_2 \sim \text{Pois}(20)}$

$P(P_1 + P_2 = n) = P(P=n) \longrightarrow$ مثل قبل اثبات می‌شود

$$\rightarrow P_{(P=n)} = \sum_{k=0}^{n} P_{(P_1=k)} \times P_{(P_2=n-k)}$$

$P_{(P_2=n-k)}$ به راحتی حساب می‌شود و چالش اصلی $P_{(P_1=k)}$ است

که به روش زیر به دست می‌آید:

چالش: $N \sim Pois(\theta)$ and $\theta \sim Gamma(\underset{\text{شکل}}{\underset{\alpha}{\beta}}, \underset{\text{مقیاس}}{\underset{\beta}{\alpha}})$

$$P(N=n) = \int_{0}$$

$$(15) \qquad P(N = n|\Theta = \theta) = \frac{e^{-\theta}\ \theta^n}{n!} \qquad\qquad n = 0, 1, 2, \cdots$$

Suppose that Θ has a Gamma distribution with rate ~~scale~~ parameter α and shape parameter β. The following is the probability density function of Θ.

$$(16) \qquad g(\theta) = \frac{\alpha^\beta}{\Gamma(\beta)} \theta^{\beta-1} e^{-\alpha\theta} \qquad\qquad \theta > 0$$

Scale parameter $= \dfrac{1}{\text{rate parameter}}$

Then the joint density of N and Θ is:

$$(17) \qquad P(N = n|\Theta = \theta)\ g(\theta) = \frac{e^{-\theta}\ \theta^n}{n!}\ \frac{\alpha^\beta}{\Gamma(\beta)} \theta^{\beta-1} e^{-\alpha\theta}$$

The unconditional distribution of N is obtained by summing out θ in (17).

$$\begin{aligned}
(18) \qquad P(N = n) &= \int_0^\infty P(N = n|\Theta = \theta)\ g(\theta)\ d\theta \\
&= \int_0^\infty \frac{e^{-\theta}\ \theta^n}{n!}\ \frac{\alpha^\beta}{\Gamma(\beta)}\ \theta^{\beta-1}\ e^{-\alpha\theta}\ d\theta \\
&= \int_0^\infty \frac{\alpha^\beta}{n!\ \Gamma(\beta)}\ \theta^{n+\beta-1}\ e^{-(\alpha+1)\theta} d\theta \\
&= \frac{\alpha^\beta}{n!\ \Gamma(\beta)}\ \frac{\Gamma(n+\beta)}{(\alpha+1)^{n+\beta}} \int_0^\infty \frac{(\alpha+1)^{n+\beta}}{\Gamma(n+\beta)} \theta^{n+\beta-1}\ e^{-(\alpha+1)\theta} d\theta \\
&= \frac{\alpha^\beta}{n!\ \Gamma(\beta)}\ \frac{\Gamma(n+\beta)}{(\alpha+1)^{n+\beta}} \\
&= \frac{\Gamma(n+\beta)}{\Gamma(n+1)\ \Gamma(\beta)} \left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^\beta \left(\frac{1}{\alpha+1}\right)^n \\
&= \binom{n+\beta-1}{n} \left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^\beta \left(\frac{1}{\alpha+1}\right)^n \qquad\qquad n = 0, 1, 2, \cdots
\end{aligned}$$

$$P_1 \sim \mathrm{Pois}(x), \quad P_c \sim \mathrm{Pois}(۲۰)$$

$$\hookrightarrow x \sim \mathrm{Gamma}(\underset{B}{۲}, \tfrac{1}{۵}) \longrightarrow \alpha$$

$$P(P_1 = n) = \binom{n+1}{n}\left(\frac{1}{۶}\right)^{۲}\left(\frac{۵}{۶}\right)^{n} = \frac{(n+1) \times ۵^{n}}{۶^{n+۲}}$$

$$P(P = ۵) = P(P_1 + P_c = ۵) = \sum_{k=0}^{n} P(P_1 = k) \times P(P_c = n-k)$$

$$= \sum_{k=0}^{۵} \frac{(k+1) \times ۵^{k}}{۶^{k+۲}} \times \frac{e^{-۲۰} \times ۲۰^{(۵-k)}}{(۵-k)!} = \frac{1}{۳۶} \times ۲۰^{۵} \times e^{-۲۰} \sum_{k=0}^{۵} \frac{(k+1)}{(۵-k)!} \times \frac{1}{۲۰^{k}} \times \left(\frac{۵}{۶}\right)^{k}$$

$$= \underline{۰/۰۰۰۰۰۲۳۵۱۳۸۴۴۳۸۳۰۴}$$

که البته این راه که به جواب تقریبی $۲/۳۵ \times ۱۰^{-۶}$ می‌رسد یک ایراد دارد

اینکه شرط $x<10$ را در نظر نگرفته است و در راه دوم این مشکل را برطرف کردم

راه دوم:

$P \sim \text{Pois}(20+x)$

$$P_{(N=n \mid X=x)} = \frac{e^{-(20+x)}\,(20+x)^{n}}{n!}$$

$$X \sim \text{Gamma}(2,5) \rightarrow \underbrace{\beta = 2}_{\text{پارامتر شکل}} , \underbrace{\alpha = \frac{1}{5}}_{\text{rate پارامتر}}$$

$$P_{(N=n)} = \int_{0}^{10} P_{(N=n \mid X=x)} \times P_{(X=x)} \, dx$$

$$= \int_0^{10} \frac{e^{-(20+x)}}{n!}(20+x)^n \times \frac{\alpha^\beta x^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} e^{-\alpha x}\, dx$$

$$= \frac{\alpha^\beta}{n! \times \Gamma(\beta)} \int_0^{10} e^{-(20+x)} \times (20+x)^n \times x^{\beta-1} \times e^{-\alpha x}\, dx$$

$$\alpha = \frac{1}{5} \quad \beta = 2 \quad n = 5$$

$$= \frac{1}{120 \times 25} \int_0^{10} \frac{(x+20)^5 x}{e^{(\frac{1}{5}x + 20)}}\, dx = \boxed{\underline{0/00000023503}}$$

که این جواب درست و قطعی است

Input

$$\frac{1}{25\times 120}\int_0^{10}\frac{(x+20)^5\,x}{e^{6/5\,x+20}}\,dx$$

Definite integral

More digits | Step-by-step solution

$$\frac{\int_0^{10} e^{-20-(6\,x)/5}\,x\,(20+x)^5\,dx}{3000}=\frac{625\,(28\,387\,e^{12}-2\,127\,199)}{15\,552\,e^{32}}\approx 2.3503\times 10^{-6}$$

دلیل اینکه دو جواب بسیار نزدیک اند این است که $P_{(x>10)}$

در توزیع‌های گفته شده بسیار عدد کوچکی است و اختلاف ناچیز

ایجاد می‌کند اگر این فرض را در حل درنظر نگیریم.

در واقع ورود خطای روش اول حدود 10^{-6} است که واضحا قابل چشم

پوشی است.