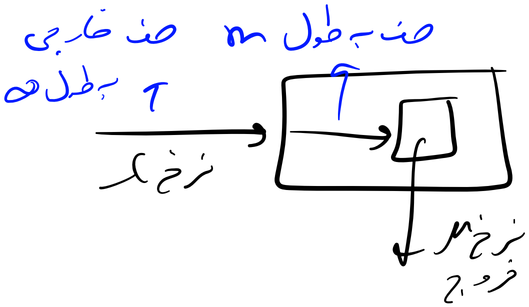
محمد پیام تابش - ۴۰۰۱۰۴۸۶۷

تمرین سوم شبیه سازی

۱) صف $M/M/1/\infty/\infty$ است که



که m ظرفیت تک یا همان طول صف داخلی است.

الف)

$$P(L_{(t)} > m) = \sum_{i=m+1}^{\infty} P(L_{(t)} = i) = \sum_{i=m+1}^{\infty} P_i$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} \quad , \quad P_n = (1-\rho)\rho^n \longrightarrow$$ صفحه ۱۴۴ اسلایدها

$$\rightarrow P(L_{(t)} > m) = (1-\rho)\rho^{m+1}\sum_{i=0}^{\infty}\rho^i = \cancel{(1-\rho)}\,\rho^{m+1} \times \frac{1}{\cancel{1-\rho}} = \rho^{m+1}$$

$$\longrightarrow \boxed{= \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{m+1}}$$

ب)

$$P(L_{(t)}>0) = 1 - P_0 = 1-(1-\rho) = \rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

ج)

$$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)}$$

د) با استفاده از الف فرض کنید

$$\gamma = 1-\rho^{m+1} \rightarrow m+1 = \log_\rho(1-\gamma)$$

$$\rightarrow \boxed{m = \log_\rho(1-\gamma) - 1} \quad \text{و} \quad \rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

حاصل معادله است و ceil آن مورد نظر است.

ج)

$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{۵}{۶}$ ✓ $\qquad L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = ۵$ ✓

$w = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{۱۰}$ ✓

---

۲) الف) $\mu = ۶$ و $\lambda = ۱۰$

$c = ۲$

$\rho = \frac{\lambda}{c\mu} = \frac{۵}{۶}$ ✓

ب) ابتدا P_0 را بدست می‌آوریم

$$\rho = \lambda / c\mu, \qquad P_0 = \left\{ \left[\sum_{n=0}^{c-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} \right] + \left[\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c \left(\frac{1}{c!}\right) \left(\frac{c\mu}{c\mu - \lambda}\right) \right] \right\}^{-1}$$

$$L = c\rho + \frac{(c\rho)^{c+1} P_0}{c(c!)(1-\rho)^2} = c\rho + \frac{\rho\, P\big(L(\infty) \ge c\big)}{1-\rho}, \qquad w = \frac{L}{\lambda}$$

$$P_0=\left\{\left(\sum_{n=0}^{۱}\frac{\left(\frac{۵}{۳}\right)^n}{n!}\right)+\left(\frac{۵}{۳}\right)^{۲}\left(\frac{۱}{۲!}\right)(۶)\right\}^{-۱}=\left(۱+\frac{۵}{۳}+\frac{۲۵}{\cancel{۹}_{۳}}\times\frac{۱}{\cancel{۲}}\times\cancel{۶}^{۳}\right)^{-۱}$$

$$=\left(\frac{۳۳}{۳}\right)^{-۱}=\frac{۱}{۱۱}$$

$$P(L(\infty)\geq c)=\frac{(c\rho)^{c+1}\,P_0}{c\,c!\,(1-\rho)\,\rho}=\frac{\left(\frac{۵}{۳}\right)^{۳}\frac{۱}{۱۱}}{\frac{۵}{۹}}$$

$$=\frac{۲۵}{۳}\times\frac{۱}{۱۱}=\frac{۲۵}{۳۳}\sim ۰/۷۵$$

ج

$$L=\frac{۵}{۳}+\frac{\frac{۵}{\cancel{۶}}\times\frac{۲۵}{۳۳}}{\frac{۱}{\cancel{۶}}}=\frac{۳۶\times ۵}{۳۳}=\frac{۱۲\times ۵}{۱۱}=\frac{۶۰}{۱۱}\sim ۵/۴۵$$

۳

$$L_Q = L - \frac{\lambda}{\mu} = \frac{(c\rho)^{c+1} P_0}{c\, c!\, (1-\rho)^{۲}}$$

$\rho = \lambda / c\mu,$ $\quad P_0 = \left\{ \left[\sum_{n=0}^{c-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} \right] + \left[\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c \left(\frac{1}{c!}\right) \left(\frac{c\mu}{c\mu - \lambda}\right) \right] \right\}^{-1}$

$L_Q =$ [redacted] $\frac{(c\rho)^{c+1} P_0}{c(c!)(1-\rho)^2} =$ [redacted] $\frac{\rho\, P\left(L(\infty) \geq c\right)}{1-\rho},$ $\qquad w = \frac{L}{\lambda}$

در ادامه همین روابط را محاسبه می کنیم :

الف) همین حالت

1

$$P_0 = \left(\left(\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\left(\frac{l}{m}\right)^n}{n!}\right) + \left(\left(\frac{l}{m}\right)^c \cdot \frac{1}{c!} \cdot \frac{cm}{cm-l}\right)\right)^{-1}$$

$P_0 = 0.0561797752809$

2

$l = 12$ λ

−10 12

3

$m = 5$ μ

−10 10

4

$c = 3$ c

−10 10

5

$$R = \frac{l}{cm}$$

ρ

$R = \frac{4}{5}$

6

$$L = \frac{\left((c \cdot R)^{(c+1)} \cdot P_0\right)}{c \cdot c! \cdot (1-R)^2}$$

Lq

$L = 2.58876404494$

7

$C = L \cdot 0.001 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600$

cost

$\boxed{C = 81639.2629213}$

هزینه ی الان

این حالت

8

ب) تقویت سرور $\mu = ۶$ $-۵۰,۰۰۰ \$$

1
$$P_0 = \left(\left(\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\left(\frac{l}{m}\right)^n}{n!} \right) + \left(\left(\frac{l}{m}\right)^c \cdot \frac{1}{c!} \cdot \frac{cm}{cm-l} \right) \right)^{-1}$$

$P_0 = 0.111111111111$

2
$l = 12$ λ

−10 … 12

3
$m = 6$ μ

−10 … 10

4
$c = 3$ c

−10 … 10

5
$$R = \frac{l}{cm}$$

ρ

$R = \frac{2}{3}$

6
$$L = \frac{\left((c \cdot R)^{(c+1)} \cdot P_0\right)}{c \cdot c! \cdot (1-R)^2}$$

L_q

$L = 0.888888888889$

7
$C = L \cdot 0.001 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600 + 50000$

Cost هزینه اضافی

$C = \boxed{78032}$

هزینه سالانه
با تقویت سرور

ج) خرید سرور جدید :

$-70{,}000\$$

1

$$P_0 = \left(\left(\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\left(\frac{l}{m}\right)^n}{n!} \right) + \left(\left(\frac{l}{m}\right)^c \cdot \frac{1}{c!} \cdot \frac{cm}{cm-l} \right) \right)^{-1}$$

$P_0 = 0.0830564784053$

2

$l = 12$ λ

−10 12

3

$m = 5$ μ

−10 10

4

$c = 4$ c

−10 10

5

$R = \frac{l}{cm}$ ρ

$R = \frac{3}{5}$

6

$$L = \frac{\left((c \cdot R)^{(c+1)} \cdot P_0\right)}{c \cdot c! \cdot (1-R)^2}$$

L_q

$L = 0.430564784053$

7

$C = L \cdot 0.001 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600 + \underline{70000}$

Cost

هزینه سرور جدید

$\boxed{C = 83578.2910299}$

هزینه نهایی

در حالت خرید

سرور

پس عادی : ۸۱٫۶۳۹ | تقویت سرور ۷۸٫۰۴۲ | افزایش سرور ۸۳٫۵۷۸

پس تقویت سرور بهترین کار ممکن است

---

۴) الف) ابتدا یک x_0 بین $[0, m-1]$ برمی‌گزینیم که seed نام دارد.

(می‌توان $x_0 = x_0 \% m$ آن را در این بازه آورد.)

سپس دنباله ای به شکل $X_{i+1} = (aX_i + c) \bmod m$ می‌سازیم

که m و a و c و x_0 (seed) پارامترهای ما هستند در آخر

حال چون باید اعداد به $[0,1]$ مپ شوند خروجی $R_i = \frac{x_i}{m}$ داده می‌شود

ب) این الگوریتم دنباله‌ای از اعداد را تولید می‌کند که از جایی به بعد تکراری می‌شود و random-number-streams بخشی از این دنباله است که با یک x_0 خاص تولید می‌شود (واضحا اگر x_0 را داشته باشیم تمام اعداد بعدی را خواهیم داشت و تا جایی که عدد تکراری تولید شود دنباله پیش می‌رود)

طبق اسلاید:

- A random-number stream:
  - Refers to **separated sequences** from a general sequence $\{X_0, X_1, X_2, \ldots, X_P\}$, starting from a specific seed taken from this sequence, and ending to another number
  - Every stream could be considered as an output for separate generators
    - They follow the essential specifications for random numbers if their main generator supports them, i.e., uniformity and independence

ج) اگر $c \neq 0$:

Period را با P نشان دادیم

$m = 2^b$, $\gcd(c, m) = 1$

$a = 4k+1$

$\longrightarrow$ $\boxed{P = m = 2^b}$

اگر $c = 0$: m عدد اول باشد

$a^k \overset{m}{\equiv} 1$ k کمترین صحیح مثبت ممکن .

میشود اثبات کرد که

$\boxed{P = m - 1 = k}$

منابع این بخش : ۲

Maximum Period (2)

- Assume $c \neq 0$:
  - In this case, LCM is called as **Mixed Congruential Method**
    - If m is power of 2 (2^b), and c is prime to m (their gcd is 1)
    - And if $a = 1 + 4k$ ($k \in \{0,1,2,\dots\}$)
    - Then, period of this algorithm is: $\boxed{\boldsymbol{P = m = 2^b}}$
- Assume $c = 0$:
  - In this case, LCM is called as **Multiplicative Congruential Method**
    - If X_0 is odd, and m is power of 2 (2^b)
    - And a could be written in either of following formats:
      - $a = 3 + 8k$ or $a = 5 + 8k$ ($k \in \{0,1,2,\dots\}$)
    - Then, period of this algorithm is: $\boxed{\boldsymbol{P = m/4 = 2^{b-2}}}$
  - If m is a prime number, and a comes with a specification that $a^k - 1 \bmod \mathrm{m} = 0$ (k must be the minimum possible value)
    - We can proof that $k = m - 1$, and the period is: $\boxed{\boldsymbol{P = k = m - 1}}$

۵) مزیت : ۱) محاسبه سریع و آسان ۲) چون الگوریتم قطعی است می‌توان داشتن هر
پارامتر اولیه آن را دوباره ساخت و نیاز به ذخیره کل دنباله نیست
۳) پیاده سازی آسان

معایب : ۱) اعداد واقعا random نیستند ۲) پارامترها بسیار حساس اند
و به ازای ورودی های بد خروجی های خیلی بدی خواهند داد ۳) تعداد اعداد
ساخته شده توسط LCG ها نیز محدود است. ۴) با لو رفتن پارامترها تمام
دنباله به دست می‌آید. ۵) برای اینکه دامنه خیلی بزرگی از اعداد را پوشا باشد باید
روی پارامترها تحقیقات انجام داد.