1) باید $F_{(x)}$ و سپس $F^{-1}_{(x)}$ را بدست آوریم

$$F_x(x)=\int_{-\infty}^{x} f_x(x)\,dx \rightarrow F_x(x)=\begin{cases} \frac{x^3}{16}+a & -2\le x\le 0 \\ -\frac{e^{-2x}}{2}+b & 0\le x \\ 0 & o.w \end{cases}$$

$$F_x(-2)=0 \rightarrow \boxed{+\frac{8}{16}=a}$$

$$F_x(0)=\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}+b \rightarrow \boxed{b=1}$$

$$\rightarrow F_x(x)=\begin{cases} \frac{x^3}{16}+\frac{1}{2} & -2\le x\le 0 \;\rightarrow\; 0\le y\le \frac{1}{2} \\ 1-\frac{e^{-2x}}{2} & 0\le x \;\rightarrow\; \frac{1}{2}\le y\le 1 \\ 0 & o.w \;\rightarrow\; y=0 \end{cases}$$

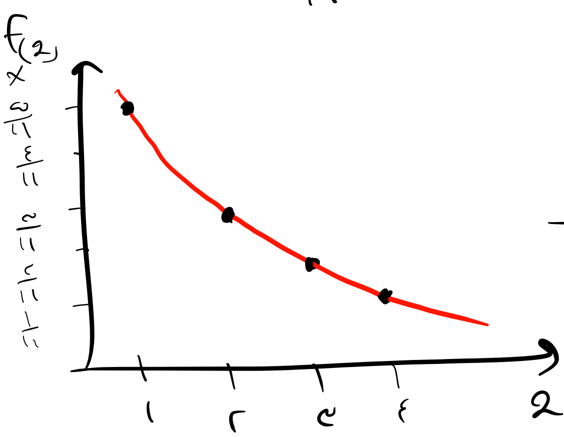
$$\rightarrow F^{-1}_x(x)=\begin{cases} \sqrt[3]{16x-8} & 0\le x\le \frac{1}{2} \\ \frac{-\ln(2-2x)}{2} & \frac{1}{2}\le x\le 1 \end{cases}$$

$$\rightarrow x_i=F^{-1}_{(R_i)}=\begin{cases} \sqrt[3]{16R_i-8} & 0\le R_i\le \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}\ln(2-2R_i) & \frac{1}{2}\le R_i\le 1 \end{cases}$$

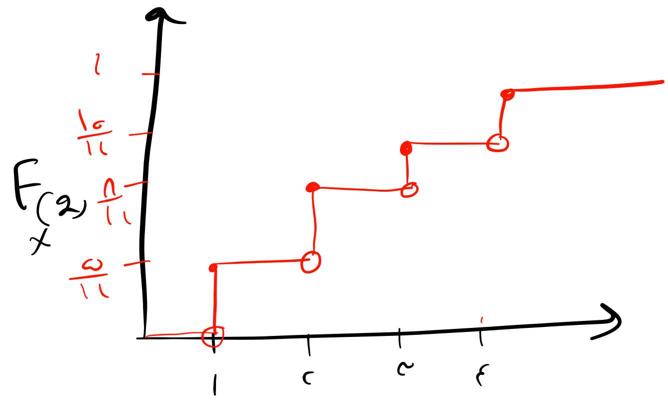
۲) الف

$P_{(x=۱)} = \frac{۵۰}{۱۱۰} = \frac{۵}{۱۱}$, $P_{(x=۲)} = \frac{۳}{۱۱}$

$P_{(x=۳)} = \frac{۲}{۱۱}$ $P_{(x=۴)} = \frac{۱}{۱۱}$



→



ب)

$$x_i = F^{-1}_{(R_i)} = \begin{cases} ۱ & ۰ \le R_i \le \frac{۵}{۱۱} \\ ۲ & \frac{۵}{۱۱} < R_i \le \frac{۸}{۱۱} \\ ۳ & \frac{۸}{۱۱} < R_i \le \frac{۱۰}{۱۱} \\ ۴ & \frac{۱۰}{۱۱} < R_i \le ۱ \end{cases}$$

$\frac{۵}{۱۱} = ۰/\overline{۴۵}$

$\frac{۸}{۱۱} = ۰/\overline{۷۲}$

$\frac{۱۰}{۱۱} = ۰/\overline{۹۰}$

→

$۰/۳ \rightarrow ۱$

$۰/۴۵ \rightarrow ۱$

$۰/۶ \rightarrow ۲$

$۰/۸ \rightarrow ۳$

$۰/۹۵ \rightarrow ۴$

۳) از این تعریف دوجمله‌ای منفی استفاده می‌کنیم استوری آزمایش مونت‌کارلو

تعداد موفقیت‌ها به k برسد (احتمال برنده شدن p است)

پس اگر $X \sim Nbinom(p, k)$ ← $P_{(X=n)} = \binom{n-1}{k-1} p^{k} (1-p)^{n-k}$

که k تعداد موفقیت و n کل آزمایش و p احتمال موفقیت است.

الگوریتم

۱- $n=0$ و $k=0$ قرار میدهیم

۲- هر بار $R \sim Unif(0,1)$ را انتخاب کرده

اگر $0 \leq R < p$ (احتمال p) ← $k{+}{+}, n{+}{+}$

اگر $p \leq R \leq 1$ (احتمال $(1-p)$) ← $n{+}{+}$

۳- اگر k به k مورد نظر رسید ← return k

و اگر نرسید ← به گام ۲ میرویم.

پیاده سازی:

$\boxed{real\_p = 0/6, \; real\_k = 3}$

$$R_i : \begin{cases} fail(F) & R_i > 0/6 \\ success(S) & R_i \leq 0/6 \end{cases}$$

1- $n=0, k=0$

2- $0/81 \rightarrow F, n=1$

3- $0/75 \rightarrow F, n=2$

4- $0/72 \rightarrow F, n=3$

5- $0/95 \rightarrow F, n=4$

6- $0/4 \rightarrow S, n=5 \quad k=1$

7- $0/83 \rightarrow F, n=6$

8- $0/4 \rightarrow S, n=7 \quad k=2$

۲- ۰/۷۸ → F , n=۸

۲- ۰/۹۵ → ۵ , n=۹ k=۳ ✓ return $\boxed{n = 9}$

پس اولین عدد تولید شده ۱۹ است.

---

۴)

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
R(i)	0.02	0.09	0.15	0.25	0.31	0.43	0.60	0.80	0.85	0.95
i/N	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
i/N - R(i)	0.08	0.11	0.15	0.15	0.19	0.17	0.1	0	0.05	0.05
R(i) - (i-1)/N	0.02	-0.01	-0.05	-0.05	-0.09	-0.07	0	0.1	0.05	0.05

→ $D^+ = ۰/۱۹$, $D^- = ۰/۱$ → $D = ۰/۱۹$

طبق جدول برای N=۱۰ $D_{۰/۰۵} = ۰/۴۱$

و چون $D < D_{۰/۰۵}$ پس نمی‌توان آن را رد کرد و H_0

رد نمی‌شود و احتمالاً از توزیع یکنواخت پیروی می‌کند

ج)

$$\hat{\alpha} = \lambda = \frac{۳۰\times۰ + ۴۵ + ۳۰ + ۲۱ + ۸ + ۵}{۱۰۰} = ۱/۰۹$$

$$P_i = \frac{e^{-\alpha}\alpha^i}{i!} \quad , \quad E_i = nP_i$$

و $\boxed{n = ۱۰۰}$

الف)

min E = ۵

1	x(i)	O(i)	E(i)	(O(i)-E(i))^2/E(i)
2	0	30	33.62165	0.390116024
3	1	45	36.6476	1.90360696
4	2	15	19.97294	1.238182225
5	3	7	7.256835	0.009089954
6	4	2	1.977488	0.000256289
7	>= 5	1	0.523489	0.433748113
8		10	9.757812	0.006011084
9			$\chi^2 =$	3.537916292
10				

این ۳ مقدار باهم مرج شوند

$\chi^2 = ۳/۵۳۷۹$ و $k = ۴$ و $\alpha = \frac{۵}{۱۰۰}$ درجه آزادی $= ۴-۱-۱ = ۲$

$s = ۱$

$$\chi^2_{۰/۰۵,۲} = ۵/۹۹ \rightarrow \chi^2 < \chi^2_{۰/۰۵,۲}$$

پس نمی‌توان H_0 را رد کرد و احتمالاً فرض H_0 درست است

و از توزیع پواسون پیروی می‌کند

ب)

1	x(i)	O(i)	E(i)	(O(i)-E(i))^2/E(i)
2	0	30	22.31302	2.648217648
3	1	45	33.46952	3.972326472
4	2	15	25.10214	4.065521157
5	3	7	12.55107	2.455120654
6	4	2	4.706652	1.556512854
7	>= 5	1	1.857594	0.395924497
8		3	6.564245	1.935309345
9			$\chi^2 =$	15.07649528

این ۲ در یکدسته می‌روند

$P_i = \frac{e^{-\alpha}\alpha^i}{i!}$, $\alpha = ۱/۵$

$E_i = n p_i$

$\min E_i = ۵$

$\chi^2 = ۱۵/۰۷۶۴$ و $k = ۵$, $s = ۰$ → درجه آزادی $= ۴$

$\chi^2_{۴,\,۰/۰۵} = ۹/۴۹$

→ $\chi^2 > \chi^2_{۰/۰۵,\,۴}$ → reject H_0 می‌شود

یعنی داده‌ها از Pois(۱/۵) پیروی ~~نمی‌کنند~~ .

---

۶) weibull :

1. Reliability analysis of electronic components: The Weibull distribution is commonly used to model the failure rate of electronic components over time. This information is important for predicting when a component may fail and planning maintenance schedules.

2. Wind speed modeling: The Weibull distribution is often used to model wind speed data, which is important for predicting the output of wind turbines and planning energy production.

درکل در جاهایی که زمان خراب شدن (TTF) و پیش‌بینی عمر چیزی برای ما مهم است توزیع weibull بسیار کاربردی است

Lognormal:

1. In finance, the returns on stocks and bonds are often assumed to follow a lognormal distribution. This is because the prices of these assets can never be negative, but they can increase by any amount.

2. In epidemiology, the number of cases of a disease in a population can be modeled using a lognormal distribution. This is because the number of cases cannot be negative, but can increase exponentially over time.

3. In engineering, the strength of materials such as steel or concrete can be modeled using a lognormal distribution. This is because the strength of these materials varies widely due to factors such as manufacturing variability and environmental conditions.

درکل بیشتر در بازار های مالی استفاده می‌شود که از دامنه مثبت آن استفاده می‌شود

بخش عملی در فایل جوپیتر پیوست شده است.