تمرین سوم جبرخطی — محمد پیام تابنی - ۴۰۰۱۰۴۸۶۷

(۱

$$A^TA = AA \to (A^TA)^T = (AA)^T \to AA^T = A^TA^T$$

(آ

$$tr\left((A-A^T)^T(A-A^T)\right) = tr\left((A^T-A)(A-A^T)\right)$$

$$= tr\left(\underbrace{A^TA}_{AA} - A^TA^T - AA + \underbrace{AA^T}_{A^TA^T}\right) = tr(0) = 0$$

(ب

فرض کنید $A - A^T = B$ اثبات خواهیم کرد B ماتریس صفر است:

$$B = [b_1 | b_2 | \dots | b_n] \quad و \quad B^T = \begin{bmatrix} b_1^T \\ b_2^T \\ \vdots \\ b_n^T \end{bmatrix}$$

طبق الف:

$$tr(B^TB) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} b_i^T b_i = \sum_{i=1}^{n} \|b_i\|^2 = 0$$

جمع تعدادی عدد مثبت صفر شود پس همگی صفراند $\Longrightarrow \forall i: \|b_i\| = 0$

پس $\forall i: b_i = 0$ که یعنی $\underline{B = 0}$ پس:

$$A - A^T = 0 \Rightarrow A = A^T$$

۲) ابتدا نشان میدهیم تمام $\sin(nx)$ و $\sin(mx)$ ها برهم عمودند.

$$\forall\, n,m \in \mathbb{N},\ n \neq m:\ \langle \sin(nx), \sin(mx) \rangle$$

$$= \int_0^{\pi} \sin(nx)\sin(mx)\,dx$$

$$, \sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right)$$

$$\Rightarrow \langle \sin(nx), \sin(mx) \rangle = \int_0^{\pi} \frac{1}{2}\left[\cos((n-m)x) - \cos((n+m)x)\right] dx$$

$$= \frac{1}{2} \times \int_0^{\pi} \cos((n-m)x)\,dx - \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos((n+m)x)\,dx$$

$$(n-m)x = u, \quad (n+m)x = r$$

$$= \frac{1}{2} \times \int_0^{(n-m)\pi} \frac{\cos u}{n-m}\,du - \frac{1}{2}\int_0^{(n+m)\pi} \frac{\cos r}{n+m}\,dr$$

$$= \frac{1}{2(n-m)} \times \sin u \Big|_0^{(n-m)\pi} - \frac{1}{2(n+m)} \times \sin r \Big|_0^{(n+m)\pi}$$

$$= 0 - 0 = 0 \Rightarrow \forall\, m,n \in \mathbb{N},\ m \neq n \rightarrow \langle \sin(nx), \sin(mx) \rangle = 0$$

حالا حساب می‌کنیم که اندازه‌ی هرکدام از این $\sin(nx)$ ها چقدر است

$$\|\sin(nx)\|^2 = \langle \sin(nx), \sin(nx) \rangle$$

$$= \int_0^{\pi} \sin^2(nx)\, dx \overset{\boxed{nx=u}}{=} \int_0^{n\pi} \frac{\sin^2(u)}{n}\, du$$

$$= \int_0^{n\pi} \frac{1-\cos(2u)}{2n}\, du = \frac{1}{n}\left(\frac{u}{2}\Big|_0^{n\pi} - \underbrace{\cancel{\frac{\sin(2u)}{4}}\Big|_0^{n\pi}}_{=0} \right)$$

$$= \frac{n\pi}{2n} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{\|\sin(nx)\| = \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}}$$

آ) طبق صحبت‌هایی که شد اگر تمام $n \in N$ را در نظر بگیریم

$\frac{\sqrt{2}\sin(nx)}{\sqrt{\pi}}$ ها هرکدام یک پایه هستند چون اولاً اثبات کردیم که

ضرب داخلی هرکدام آن‌ها صفر است پس برهم عمود اند و یعنی مستقل خطی‌اند ازطرفی

واضح است که از آن‌ها تمام عضوهای F ساخته می‌شود یا درواقع F را

span می‌کنند و درآخر طول هرکدام از این $\frac{\sqrt{2}\sin(nx)}{\sqrt{\pi}}$ ها برابر یک است

پس این پایه‌ها یکه اند اما اگر با الگوریتم گرام اشمیت مسئله را بررسی کنیم:

$$a_1 = \sin(x) \qquad q_1 = \frac{\sin(x)}{\|\sin(x)\|} = \frac{\sqrt{2}\sin(x)}{\sqrt{\pi}}$$

$a_2 = \sin(2x) \qquad \tilde{q}_2 = a_2 - \underbrace{\langle q_1, a_2 \rangle}_{=0} q_1 \Rightarrow$

$$q_2 = \frac{\sin(2x)}{\|\sin(2x)\|} = \frac{\sqrt{2}\,\sin(2x)}{\sqrt{\pi}}$$

و $\vdots$

تمام ضرب داخلی ها صفر می‌شود

و $a_k = \sin(kx) \qquad \tilde{q}_k = a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle q_i, a_k \rangle q_i$

$$\Rightarrow \quad q_k = \frac{\tilde{q}_k}{\|\tilde{q}_k\|} = \frac{\sin(kx)}{\|\sin(kx)\|} = \frac{\sqrt{2}\,\sin(kx)}{\sqrt{\pi}}$$

پس طبق این الگوریتم نیز تمام $\frac{\sqrt{2}\,\sin(kx)}{\sqrt{\pi}}$ ها که پایه های این فضا هستند ساخته می‌شود.

ب) با ضرب داخلی کردن ax را برحسب پایه های یکه می‌نویسیم:

$$\left\langle ax, \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\sin kx \right\rangle = \int_0^{\pi} a\sqrt{\frac{2}{\pi}}\; x\sin(kx)\, dx$$

$$= a\sqrt{\frac{2}{\pi}} \times \int_0^{\pi} x\sin(kx)\, dx$$

$kx = u$

$$= a\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{k\pi} \frac{u}{k^2}\sin(u)\, du = \frac{a}{k^2}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{k\pi} u\sin u\, du$$

$$= \frac{a}{k^2}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \times (\sin u - u\cos u)\Big|_0^{k\pi}$$

$$= \frac{a}{k^2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\sin(k\pi) - (k\pi)\cos(k\pi)\right)$$

$$= \begin{cases} k = \text{زوج} \longrightarrow \dfrac{a}{k^2}\sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \times (-k\pi) = -\dfrac{a\sqrt{2\pi}}{k} \\[2ex] k = \text{فرد} \longrightarrow \dfrac{a}{k^2}\sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \times (k\pi) = \dfrac{a\sqrt{2\pi}}{k} \end{cases}$$

$$\Rightarrow ax = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \underbrace{\frac{a\sqrt{2\pi}}{k}}_{\text{ضریب آن پایه}} \times \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\sin(kx)}_{\text{پایه یکه عمود}}$$

$$ax = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{2a}{k}\sin(kx)$$

ج) مثل بخش ب عمل می‌کنیم:

$$\left\langle e^{tx}, \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(kx) \right\rangle = \int_0^{\pi} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, e^{tx}\sin kx \, dx$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\pi} e^{tx}\sin kx \, dx$$

انتگرال جزء به جزء می‌زنیم:

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \times \frac{e^{tx}\left(t\sin(kx) - k\cos(kx)\right)}{k^2+t^2}\Bigg|_0^{\pi}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \times \frac{k\left(1 - e^{t\pi}\cos(k\pi)\right)}{k^2+t^2}$$

$$\Rightarrow \; = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \times \frac{k\left(1 + (-1)^{k+1} e^{t\pi}\right)}{k^2+t^2}$$

$$\Rightarrow e^{tx} = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{n\left(1+(-1)^{n+1}e^{t\pi}\right)}{n^2+t^2}}_{\text{ضرایب}} \times \underbrace{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(nx)}_{\text{پایه}}$$

$$\rightarrow e^{tx} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi}\, \frac{\left(n + (-1)^{n+1} n e^{t\pi}\right)}{n^2+t^2} \sin(nx)$$

۳) آ) ادعا می‌کنیم که

$$\boxed{A^k = \lambda^{k-1}\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ k & \lambda\end{bmatrix}}$$

پس با استقرا ثابت می‌کنیم :

$$A^1 = \begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 1 & \lambda\end{bmatrix}$$

پایه استقرا ⟸ ✓

$$A^{k-1} = \lambda^{k-2}\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ k-1 & \lambda\end{bmatrix} \rightarrow$$ فرض استقرا

$$A^k = A\,A^{k-1} = \lambda^{k-2}\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 1 & \lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ k-1 & \lambda\end{bmatrix} = \lambda^{k-2}\begin{bmatrix}\lambda^2 & 0\\ k\lambda & \lambda^2\end{bmatrix}$$

$$= \lambda^{k-1}\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ k & \lambda\end{bmatrix}$$

پس حکم استقرا ثابت شد

ب)

$$B_n = \sum_{i=1}^{n} \boxed{\frac{A^i}{i!}} \rightarrow = C_i$$

$$\text{و}\quad A^i = \lambda^{i-1}\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ i & \lambda\end{bmatrix} \quad \text{و}\quad C_i = \begin{bmatrix}\frac{\lambda^i}{i!} & 0\\ \frac{\lambda^{i-1}}{(i-1)!} & \frac{\lambda^i}{i!}\end{bmatrix}$$

$$, B_n = \sum_{i=1}^{n} C_i$$

$$B_\infty = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} C_i = \sum_{i=1}^{\infty} C_i$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \begin{bmatrix} \frac{\lambda^i}{i!} & 0 \\ \frac{\lambda^{i-1}}{(i-1)!} & \frac{\lambda^i}{i!} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} & 0 \\ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda^{i-1}}{(i-1)!} & \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} & 0 \\ \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} & \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} \end{bmatrix}$$

$$e^{x} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} \leftarrow$$ و طبق بسط تیلور

$$\rightarrow e^{x} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^i}{i!} + 1 \rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^i}{i!} = e^{x} - 1$$

$$\Rightarrow B_\infty = \begin{bmatrix} e^{\lambda} - 1 & 0 \\ e^{\lambda} & e^{\lambda} - 1 \end{bmatrix}$$

٤) می دانیم که

در یک convexset

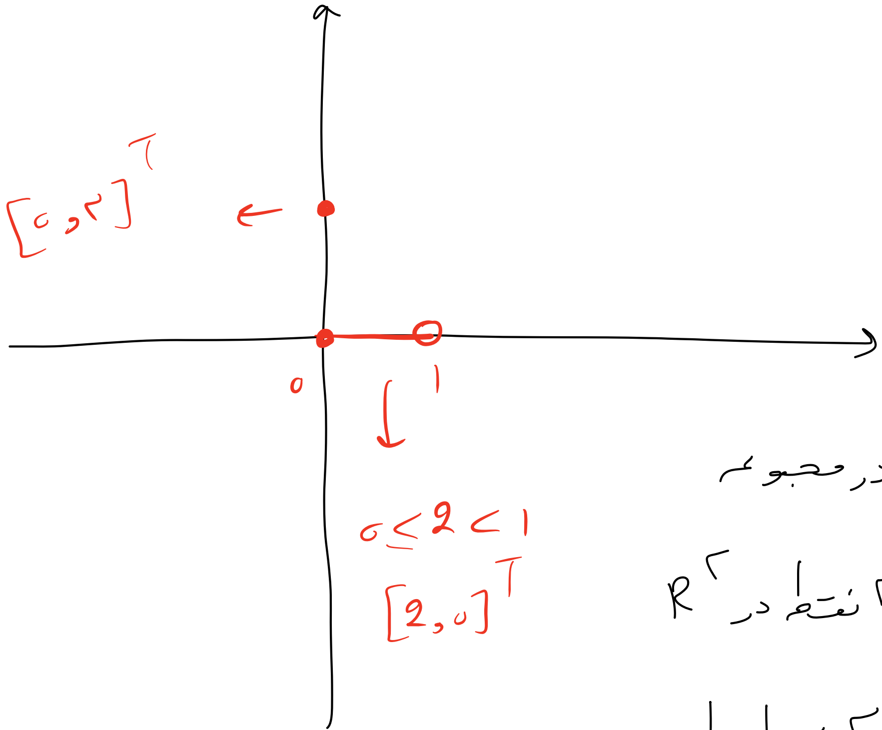
هر ۲ نقطه‌ای را که بگیریم

ترکیب convex آن دو نیز در مجموعه

است و ترکیب convex ۲ نقطه در R^2

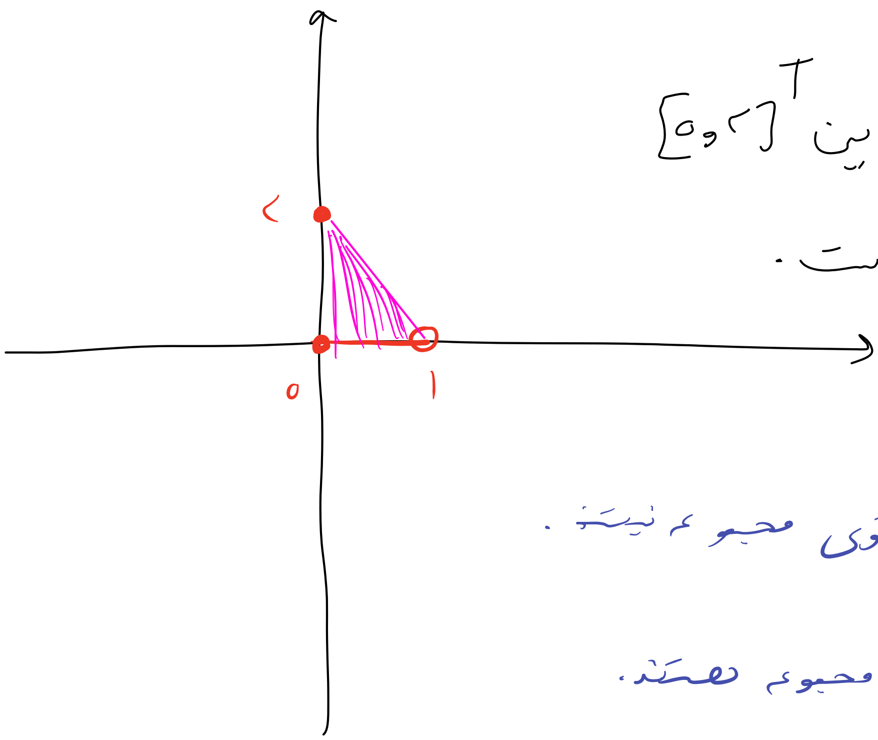
می‌شود پاره خطی که این ۲ نقطه را به هم

وصل می‌کند پس convex set به شکل زیر می‌شود:



که شامل تمام پاره خط‌های وصل بین $[0,2]^T$

و تمام نقاط روی $0 \le z < 1$ است.



دقت کنید نقاط بین $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}$ توی مجموعه نیستند.

اما نقاط بین $\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}$ در مجموعه هستند.

ب) در مرز نه فاصله از a بیشتر است نه از b پس در این مرز فاصله نقاط از a برابر فاصله از b است پس به دنبال این نقاط می‌گردیم:

نقطه x را فرض کنید:

$$\|x-a\| = \|x-b\|$$

$$\Rightarrow \|x-a\|^2 = \|x-b\|^2$$

$$\Rightarrow \langle (x-a)\cdot(x-a)\rangle = \langle (x-b)\cdot(x-b)\rangle$$

$$\Rightarrow \cancel{\langle x\cdot x\rangle} + \langle a\cdot a\rangle - 2\langle x\cdot a\rangle = \cancel{\langle x\cdot x\rangle} + \langle b\cdot b\rangle - 2\langle x\cdot b\rangle$$

$$\Rightarrow 2\left(\langle x\cdot b\rangle - \langle x\cdot a\rangle\right) = \|b\|^2 - \|a\|^2$$

$$\Rightarrow 2\langle x\cdot (b-a)\rangle = \|b\|^2 - \|a\|^2$$

$$\rightarrow \langle x\cdot(b-a)\rangle = \frac{\|b\|^2 - \|a\|^2}{2}$$

→ این یک معادله صفحه است. چرا؟

$$\langle x\cdot a\rangle = b \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3 + \dots + x_na_n = b$$

→ یک معادله صفحه است

$$x = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

مثلاً در $\mathbb{R}^3$ معادله صفحه این شکلی است:

$$x(b_1-a_1) + y(b_2-a_2) + z(b_3-a_3) = \frac{\|b\|^2 - \|a\|^2}{2}$$

حال فضا را به ۲ زیرفضای A و B تقسیم می‌کنیم فرض کنید $a\in A$ و $b\in B$ باشد و صفحه‌ای که بدست آوردیم مرز A و B است.

ثابت می‌کنیم اگر $x\in A$ آنگاه $\|x-a\|<\|x-b\|$:

فرض کنید خط گذرنده از x و b صفحه مرز را در u قطع کند:

$\|x-b\|=\|x-u\|+\|u-b\| \rightarrow$ چون هر سه در یک راستا اند

$\|x-a\|<\|x-u\|+\|u-a\| \rightarrow$ نامساوی مثلث

و $\|u-a\|=\|u-b\| \rightarrow$ در بخش قبل ثابت کردیم

$\Rightarrow \|x-a\|<\|x-b\|$

و به همین ترتیب اگر $x\in B$ هم برعکس حساب می‌شود

پس فضا به ۲ زیرفضای A,B و صفحه مرز مورد نیاز با ویژگی‌های ذکر شده تقسیم شد.

۴) ماتریس استاندارد T را A فرض کنید

ابتدا نشان می دهیم که یک متعامد بودن ماتریس A به این معنی است که $A^TA=I$ برقرار باشد.

$$A=\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} r_1 & r_2 & r_3\ \cdots & r_n \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \end{array} \qquad A^T=\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \to r_1 \\ \to r_2 \\ \to r_3 \\ \vdots \\ \to r_n \end{array} \end{array}$$

ستون های ماتریس A را هم r_1 تا r_n درنظر بگیرید

$$A^TA=\begin{bmatrix} \langle r_1,r_1\rangle & \langle r_1,r_2\rangle & \langle r_1,r_3\rangle, \cdots & \langle r_1,r_n\rangle \\ \langle r_2,r_1\rangle & \langle r_2,r_2\rangle & \cdots & \langle r_2,r_n\rangle \\ \vdots & & & \vdots \\ \langle r_n,r_1\rangle & \cdots & \cdots & \langle r_n,r_n\rangle \end{bmatrix}$$

$$A^TA=I \to \forall k\in N: \langle r_k,r_k\rangle=1 \to \|r_k\|=1$$

$$\text{و}\ \forall i,j\in N,\ i\neq j: \langle r_i,r_j\rangle=0$$

پس هم اندازه هرکدام از ستون ها یک است و هم ضرب هر ۲ ستون صفر می‌شود که یعنی برهم عمودند پس اگر $A^TA=I$ باشد ماتریس A یک متعامد است

و واضح است اگر هم A یک متعامد باشد طبق ضربی که کردیم A^TA می‌شود I

تعریف : ماتریس A یک متعامد است $\iff A^T A = I$

حالا مسئله را حل می‌کنیم :

فرض : $A^T A = I$ (A یک متعامد است)

حکم : $T(u) \cdot T(v) = u \cdot v$

$$A^T A = I$$

$$\to u^T A^T A = u^T$$

$$\to u^T A^T A v = u^T v$$

$$\to (Au)^T A v = (u)^T v$$

$$\to \langle Au \cdot Av \rangle = \langle u , v \rangle$$

$$\to \langle T(u) \cdot T(v) \rangle = \langle u , v \rangle$$

حالا بخش دوم اثبات :

فرض : $T(u) \cdot T(v) = u \cdot v$

حکم : $A^T A = I$ (A یک متعامد است)

$$A^T A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & & & \vdots \\ a_{13} & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} r_1 & r_2 & r_3 & \quad r_n \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \quad \uparrow \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \end{array}$$

$$= \begin{bmatrix} r_1 \cdot r_1 & r_1 \cdot r_2 & r_1 \cdot r_3 & \cdots & r_1 \cdot r_n \\ r_2 \cdot r_1 & r_2 \cdot r_2 & \cdots & & r_2 \cdot r_n \\ \vdots & & & & \vdots \\ r_n \cdot r_1 & \cdots & \cdots & \cdots & r_n \cdot r_n \end{bmatrix} \qquad r_k = \begin{bmatrix} a_{k1} \\ a_{k2} \\ a_{k3} \\ \vdots \\ a_{kn} \end{bmatrix}$$

می‌دانیم : $\boxed{a_{ij} = e_i^T A e_j}$ ؟ چون :

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix}}_{e_i^T} \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}_{e_j}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = a_{ij} \checkmark$$

حال به اثبات می پردازیم :

$T_u \cdot T_v = uv$

$\rightarrow \langle Au, Av \rangle = \langle u, v \rangle$

$\rightarrow (Au)^T A v = u^T v$

$\rightarrow u^T A^T A v = u^T v$

چون برای هر u و v معادله برقرار است

حال $u = e_i$, $v = e_j$ فرض کنید : $1 \le i, j \le n$

$\rightarrow e_i^T (A^T A) e_j = e_i^T e_j$

$\rightarrow r_i \cdot r_j = e_i^T e_j$

$$A^T A = \begin{bmatrix} r_1 \cdot r_1 & r_1 \cdot r_2 & r_1 \cdot r_3 & \cdots & r_1 \cdot r_n \\ r_2 \cdot r_1 & r_2 \cdot r_2 & \cdots & & r_2 \cdot r_n \\ \vdots & & & & \vdots \\ r_n \cdot r_1 & \cdots & & & r_n \cdot r_n \end{bmatrix} \qquad r_k = \begin{bmatrix} a_{k1} \\ a_{k2} \\ a_{k3} \\ \vdots \\ a_{kn} \end{bmatrix}$$

و $a_{ij} = e_i^T A e_j$

$\rightarrow$ if $i = j \rightarrow r_i \cdot r_i = 1 \rightarrow \|r_i\|^2 = 1 \rightarrow \|r_i\| = 1$

if $i \neq j \rightarrow \langle r_i, r_j \rangle = 0 \rightarrow r_i \perp r_j$

پس اندازه تمام ستون ها (r_k) یک هست و ضرب داخلی هر ستون دلخواه متفاوت صفر می شود که یعنی همه ستون ها بر هم عمودند

پس ماتریس $A = [r_1, r_2, \ldots, r_n]$ یک ماتریس یکه متعامد است

۷

$$AX - XA = I_n$$

از ۲ طرف معادله trace میگیریم

$$\to tr(AX - XA) = tr(I_n)$$

$$\Rightarrow tr(AX) - tr(XA) = n$$ و $tr(AX) = tr(XA)$

$$\Rightarrow 0 = n \to$$

پس معادله داده شده هیچوقت درست نیست و این معادله جوابی ندارد.

۸) ماتریس استاندارد تبدیل $T_{(x)}$ را A فرض کنید.

فرض: $T_{(x)} \perp x$

حکم: $A^T = -A$ (A پاد متقارن است)

اثبات: $T_{(x)} \perp x \rightarrow Ax \perp x \rightarrow \langle x . Ax \rangle = 0$

$$\Rightarrow x^T A x = 0$$

چون معادله بالا به ازای هر x صحیح است فرض کنید $x = e_i$

و $1 \leq i \leq n$ یعنی $x = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$

$$e_i^T A e_i = 0$$

$$\Rightarrow \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix}}^{e_i^T} \overbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}^{A} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{a_{ii} = 0}$$

پس به ازای هر $1 \le i \le n$ در ماتریس $A_{n\times n}$ ، $a_{ii}=0$ است یعنی

تمام قطر اصلی A برابر صفر هستند.

حالا فرض کنید $x = e_i + e_j$ و $1 \le i, j \le n$ و $i \neq j$

$$x^T A x = 0$$

$$\rightarrow (e_i + e_j)^T A (e_i + e_j) = 0$$

$$\rightarrow (e_i^T + e_j^T) A (e_i + e_j) = 0$$

$$\rightarrow (e_i^T A + e_j^T A)(e_i + e_j) = 0$$

$$\rightarrow \underbrace{e_i^T A e_i}_{= a_{ii} = 0} + \underbrace{e_i^T A e_j}_{= a_{ij}} + \underbrace{e_j^T A e_i}_{= a_{ji}} + \underbrace{e_j^T A e_j}_{= a_{jj} = 0}$$

$$\Rightarrow a_{ij} + a_{ji} = 0 \longrightarrow \boxed{a_{ij} = -a_{ji}}$$

پس ماتریس A ویژگی پاد متقارن بودن یعنی $a_{ii} = 0$ و $a_{ji} = -a_{ij}$
را دارد که یعنی A پاد متقارن است.

ب . ن : چرا $a_{ij} = e_i^T A e_j$ ؟ چون :

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix}}_{e_i^T} \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}_{e_j}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= a_{ij} \checkmark$$

حالا طرف دیگر قضیه :

فرض : $A^T = -A$ (A پاد متقارن است)

حکم : $T_{(2)} \perp 2$

$$A^T = -A \rightarrow A^T + A = 0 \rightarrow 2^T (A^T + A) = 0$$

$$\Rightarrow \quad x^T (A^T + A) x = 0$$

$$\Rightarrow \quad x^T A^T x + x^T A x = 0$$

$$\Rightarrow \quad (Ax)^T x + (x)^T A x = 0$$

$$\Rightarrow \quad \langle Ax . x \rangle + \langle x . Ax \rangle = 0$$

$$\rightarrow \quad \langle T_{(x)} . x \rangle + \langle x . T_{(x)} \rangle = 0$$

$$9 \; \langle a . b \rangle = \langle b . a \rangle$$

$$\rightarrow \quad \langle T_x . x \rangle + \langle T_x . x \rangle = 0$$

$$\rightarrow \quad \langle T_x . x \rangle = 0$$

$$\rightarrow \quad T_{(x)} \perp x$$