۴۰۰۱۰۴۸۶۷ تمرین ۵ جبر خطی محمدپیام تابشی

۱)

$$\underset{n\times m}{A} = \underset{n\times n}{U}\,\underset{n\times m}{\Sigma}\,\underset{m\times m}{V^T} \qquad U = \begin{bmatrix} | & & | \\ u_1 & \cdots & u_n \\ | & & | \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_m \\ | & & | \end{bmatrix}$$

که U ماتریس بردارهای ویژه‌ی AA^T و V ماتریس بردارهای ویژه‌ی A^TA است که می‌دانیم U و V ماتریس‌های orthogonal (یا unitary) اند چون AA^T , A^TA هر دو متقارن اند و نتیجه می‌دهد بردارهای ویژه عمود بر هم دارند از طرفی هر کدام را تقسیم بر اندازه آن می‌کنیم تا ماتریس U و V orthogonal (یا unitary) شوند یعنی ستون‌های یکه متعامد دارند ←

$$U^TU = UU^T = I \quad \text{و} \quad V^TV = VV^T = I$$

$$U^*U = UU^* = I \quad \text{یا} \quad V^*V = VV^* = I$$

خب تا اینجا که تعریف SVD بود.

$$AV = U\Sigma \underbrace{V^TV}_{I} = U\Sigma$$

$$\rightarrow A\begin{bmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_m \\ | & | & & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ u_1 & u_2 & \cdots & u_n \\ | & | & & | \end{bmatrix} \underset{n\times m}{\left[\begin{array}{ccc|c} \sigma_1 & & & \\ & \sigma_2 & & 0 \\ & & \ddots \; \sigma_r & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array}\right]}$$

$$\rightarrow Av_i = u_i\sigma_i \quad \text{و} \quad \sigma_i = 0 \ \text{ if } \ i > r$$

$$\boxed{\rightarrow Av_i = \begin{cases} \sigma_i u_i & i = 1, 2, \dots, r \\ 0 & i = r+1, \dots, m \end{cases}}$$

البته اگر موارد اسلایدها را درنظر بگیریم خیلی ساده ترمی داشتیم که

$$A = \sum_{i=1}^{r} u_i \, \sigma_i \, v_i^T$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} v_i^T v_j = 1 & i = j \\ v_i^T v_j = 0 & i \neq j \end{array}}$$

$$\rightarrow A v_j = \sum_{i}^{r} u_i \, \sigma_i \, v_i^T v_j = u_i \, \sigma_i$$

$$\boxed{\rightarrow A v_i = \begin{cases} \sigma_i u_i & i = 1, 2, \dots, r \\ 0 & i = r+1, \dots, m \end{cases}}$$

تجزیه تحلیل

$$A = U \Sigma V^T \rightarrow A^T = V \Sigma^T U^T$$

$$\rightarrow \underline{A^T = V \Sigma^T U^T}$$

$$\rightarrow A^T U = V \Sigma^T \underbrace{U^T U}_{= I} = V \Sigma^T$$

$$\rightarrow \underset{m\times n}{A^T} \underset{n\times n}{\begin{bmatrix} | & & | \\ u_1 & \cdots & u_n \\ | & & | \end{bmatrix}} = \underset{m\times m}{\begin{bmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_m \\ | & & | \end{bmatrix}} \underset{m\times n}{\left[\begin{array}{ccc|c} \sigma_1 & & & \\ & \sigma_2 & & 0 \\ & & \ddots \; \sigma_r & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array}\right]}$$

$$\rightarrow A^T u_i = v_i \, \sigma_i \qquad , \; \sigma_i = 0 \text{ if } i > r$$

$$\rightarrow \boxed{A^T u_i = \begin{cases} \sigma_i v_i & i = 1, 2, \dots, r \\ 0 & i = r+1, \dots, n \end{cases}}$$

بازمی شه گفت که

$$A = \sum_{i=1}^{r} u_i \sigma_i v_i^T \rightarrow A^T = \sum_{i=1}^{r} v_i \sigma_i u_i^T$$

$$\rightarrow A^T u_j = \sum_{i=1}^{r} v_i \sigma_i u_i^T u_j = \underline{v_i \sigma_i}$$

$$\rightarrow \boxed{A^T u_i = \begin{cases} \sigma_i v_i & i = 1, 2, \dots, r \\ 0 & i = r+1, \dots, n \end{cases}}$$

۴) فرض کنید λ مقدار ویژه ی TS باشد .

$\rightarrow (TS)v = \lambda v$ → λ مقدار ویژه و v بردار ویژه

$\lambda S v = S(\lambda v)$

$\rightarrow \lambda S v = S T S v$

$\rightarrow \lambda (Sv) = ST(Sv) \xrightarrow{Sv=u} ST u = \lambda u$

پس u بردار ویژه ی ST و λ مقدار ویژه ST است .

پس هر مقدار ویژه ی TS ، مقدار ویژه ی ST است پس $\boxed{\sigma_{TS} \subseteq \sigma_{ST}}$

به همین ترتیب فرض کنید λ مقدار ویژه ST باشد

$\rightarrow ST v = \lambda v$

$\lambda T v = T(\lambda v)$

$\rightarrow \lambda T v = T S T v$

$\rightarrow \lambda (Tv) = TS(Tv) \xrightarrow{Tv=u} TS u = \lambda u$

پس u بردار ویژه و λ مقدار ویژه TS است

پس هر مقدار ویژه ST ، مقدار ویژه TS است پس $\boxed{\sigma_{ST} \subseteq \sigma_{TS}}$

$\rightarrow \boxed{\sigma_{ST} = \sigma_{TS}} \rightarrow$ پس ST و TS مقدار ویژه های یکسانی دارند

۳)

آ)

$$A = \begin{bmatrix} ۹ & ۰ & ۳ \\ ۰ & ۴ & ۴ \\ ۳ & ۴ & ۶ \end{bmatrix}, \quad A \text{ posotive\_ defenite}$$

So : $A = R^T R$

if R = upper triangle with posotive diagonal

$$A = \begin{bmatrix} R_{۱۱} & ۰ & ۰ \\ R_{۱۲} & R_{۲۲} & ۰ \\ R_{۱۳} & R_{۲۳} & R_{۳۳} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{۱۱} & R_{۱۲} & R_{۱۳} \\ ۰ & R_{۲۲} & R_{۲۳} \\ ۰ & ۰ & R_{۳۳} \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow A = \begin{bmatrix} R_{۱۱}^۲ & & \text{(symmetric)} \\ R_{۱۲}R_{۱۱} & R_{۱۲}^۲ + R_{۲۲}^۲ & \\ R_{۱۳}R_{۱۱} & R_{۱۲}R_{۱۳} + R_{۲۲}R_{۲۳} & R_{۱۳}^۲ + R_{۲۳}^۲ + R_{۳۳}^۲ \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow R_{۱۱} = ۳, \quad R_{۱۲} = ۰, \quad R_{۱۳} = ۱, \quad R_{۲۲} = ۲, \quad R_{۲۳} = ۲, \quad R_{۳۳} = ۱$$

$$\rightarrow R = \begin{bmatrix} ۳ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۲ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \rightarrow A = \underbrace{\begin{bmatrix} ۳ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۱ & ۲ & ۱ \end{bmatrix}}_{R^T} \times \underbrace{\begin{bmatrix} ۳ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۲ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}}_{R}$$

$$Ax = b, \quad b = \begin{bmatrix} ۱۲ \\ ۱۲ \\ ۱۷ \end{bmatrix}$$

ب)

$$R^T \underbrace{Rx}_{y} = b \rightarrow R^T y = b$$

$$\begin{bmatrix} ۳ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۱ & ۲ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_۱ \\ y_۲ \\ y_۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱۲ \\ ۱۲ \\ ۱۷ \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow y_۱ = ۴ \,,\, y_۲ = ۶ \,,\, y_۳ = ۱ \rightarrow y = \begin{bmatrix} ۴ \\ ۶ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

و $Rx = y$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} ۳ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۲ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴ \\ ۶ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow x_۳ = ۱ \,,\, x_۲ = ۲ \,,\, x_۱ = ۱$$

$$\rightarrow \boxed{x = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \\ ۱ \end{bmatrix}}$$

$$r \in \mathbb{R}^n, \quad r^T r = \|r\|^2 \neq 0 \to r \neq 0$$

$$\alpha = \frac{2}{r^T r}, \quad A = I - \alpha r r^T, \quad r^T r = \frac{2}{\alpha}$$

$$A^2 = (I - \alpha r r^T)(I - \alpha r r^T)$$

$$= I - 2\alpha r r^T + \alpha^2 r \underbrace{r^T r}_{=\frac{2}{\alpha}} r^T = I - 2\alpha r r^T + 2\alpha r r^T$$

$$= I \to A^2 = I \to \boxed{A = A^{-1}}$$