① $u_1 \in U$ را فرض کنید به طوری که $Su_1 \neq 0$ باشد

از طرفی $u_2 \in U'$ را فرض کنید می‌دانیم که $\underline{u_1+u_2 \in U'}$

چون اگر $u_1+u_2 \in U'$ باشد چون $u_1 \in U$ است پس $u_2 \in U$ است که با فرض $u_2 \in U'$ در تناقض است.

اگر T یک تبدیل خطی باشد پس

$$T(u_1+u_2) = T(u_1) + T(u_2)$$

$$T(u_1+u_2) = 0 \quad (u_1+u_2 \in U')$$

$$T(u_1) = Su_1 \neq 0$$

$$T(u_2) = 0 \quad (u_2 \in U')$$

$$\Rightarrow T(u_1+u_2) \neq T(u_1) + T(u_2)$$

پس T نمی‌تواند یک ترکیب خطی باشد و سوال با برهان خلف اثبات شد

۲) ابتدا ادعا می‌کنیم که اگر $rank(A)=1$ پس ماتریس A را می‌توان به شکل حاصل ضرب ۲ بردار نوشت:

طبق تعریف rank یعنی تعداد ستون (سطر) های مستقل خطی یک ماتریس که وقتی $rank=1$ شود یعنی یک ستون (سطر) مستقل خطی است و باقی ستون (سطر) ها ترکیب خطی از این ستون (سطر) هستند پس:

$$\forall u \in \mathbb{R}^n : Au = kr \quad \text{for some fixed } r \in \mathbb{R}^n$$

$$A = \begin{bmatrix} | & | & | & & | \\ w_1 r & w_2 r & w_3 r & \cdots & w_n r \\ | & | & | & & | \end{bmatrix} = r w^T$$

پس A را می‌توان به شکل ضرب ۲ بردار r و w نوشت.

$$A = r w^T = \begin{bmatrix} w_1 r_1 & w_1 r_2 & \cdots & w_1 r_n \\ w_2 r_1 & w_2 r_2 & & \vdots \\ \vdots & & w_3 r_3 & \vdots \\ & & \ddots & \\ w_n r_1 & \cdots & & w_n r_n \end{bmatrix}$$

$$tr_{(A)} = \sum_{i=1}^{n} w_i v_i = 0$$

$$\rightarrow w^T v = \langle w \cdot v \rangle = 0$$

$$, A^۲ = A \times A = v w^T v w^T = v (w^T v) w^T =$$

$$v \times 0 \times w^T = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{A^۲ = 0}$$

$$\Rightarrow \forall k \geq ۲ : A^k = 0$$

---

۳) الف) ماتریس جایگشت به این شکل است

$$P = \begin{bmatrix} — & e_{1x}^T & — \\ — & e_{2x}^T & — \\ & \vdots & \\ — & e_{nx}^T & — \end{bmatrix} \quad e_{ix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

عنصر i ام یک است و بقیه صفر اند.

$$P^T = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ e_{1x} & e_{2x} & \cdots & e_{nx} \\ | & | & & | \end{bmatrix}$$

و چون

$$PP^T = \begin{bmatrix} e_{1x} e_{1x}^T & \cdots & & \cdots \\ \vdots & e_{2x} e_{2x}^T & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & e_{nx} e_{nx}^T \end{bmatrix}$$

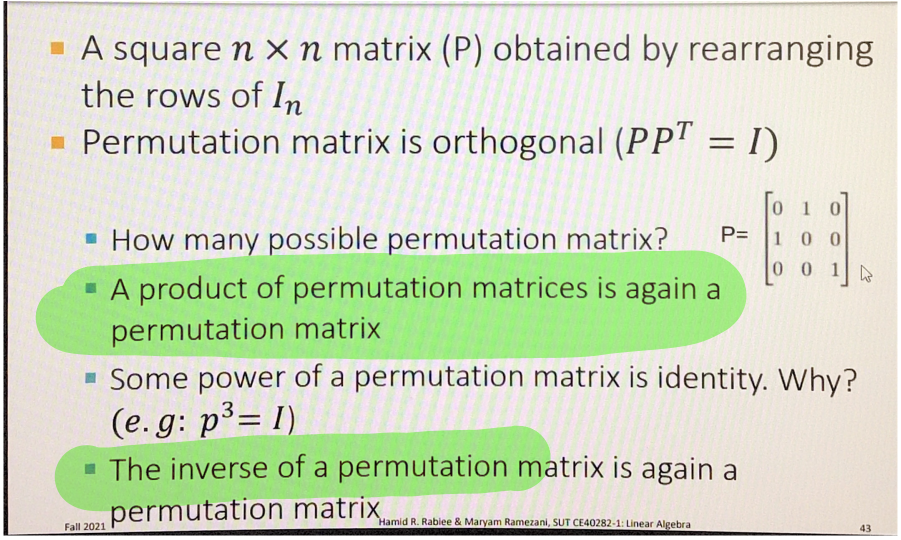
$$PP^T_{(i,J)} = \{ e_{ix} e_{Jx}^T \} \rightarrow$$

خونه iJ ام ماتریس PP^T برابر $e_{ix} e_{Jx}^T$ است

$$\Rightarrow PP^T = \begin{cases} 1 & i = J \\ 0 & i \neq J \end{cases}$$

$$\Rightarrow PP^T = I \rightarrow \boxed{P^T P = PP^T = I}$$

ب) اگر $P = \begin{bmatrix} — e_{1x}^T — \\ — e_{2x}^T — \\ \vdots \\ — e_{nx}^T — \end{bmatrix}$ باشد هر سطر و هر ستون دقیقا یک خانه یک دارد و باقی خانه‌ها صفر هستند پس یعنی ستون‌های P نیز جایگشتی از ستون‌های $I_{n\times n}$ هستند که یعنی در سطرهای P^T نیز یک جایگشت از سطرهای $I^T = I$ هستند که یعنی P^T یک ماتریس جایگشت است.



ج)

می دانیم برای $I_{n\times n}$ ، $n!$ تا ماتریس جایگشت داریم

یعنی تعدادی محدود

از طرفی طبق اصل ضرب دو ماتریس جایگشت یک ماتریس جایگشت جدید می‌دهد.

اگر توان های P را از P^1 و P^2 و ... و $P^{n!}$ و $P^{n!+1}$ بنویسیم

چون در کل $n!$ ماتریس جایگشت داریم و اینجا $n!+1$ ماتریس جایگشت داریم طبق اصل لانه کبوتری $\forall x,y : P^x = P^y$.

$x < y$ $\qquad 1 \le x < y \le n!+1$

$P^x = P^y \Rightarrow P^x = P^{y-x} \times P^x$ (P^x ماتریس جایگشت است طبق اصل بالا وارون پذیر است)

$\Rightarrow \boxed{P^{y-x} = I} \rightarrow \boxed{\forall k : P^k = I}$

۴) الف) فرض کنید $C = A - B$

$\to B + C = A$, $rank(B) = 1 \to$ چون همه درایه‌ها برابرند فقط یک ستون مستقل خطی داریم.

می‌دانیم:

$$\boxed{rank(A+B) \le rank(A) + rank(B)}$$

$$\to rank(B+C) \le \underbrace{rank(B)}_{=1} + rank(C)$$

$$\to rank(A) \le 1 + rank(A-B)$$

$$\to \boxed{Rank(A) - 1 \le Rank(A-B)}$$

ب)

$$Rank(A+B) = dim(colspace(A+B))$$

$$\le dim(colspace(A) + colspace(B))$$

چون $colspace(A+B)$ زیرفضای $colspace(A)+colspace(B)$ هست چون

با بردارهای $colspace(A)+colspace(B)$ می‌توان $colspace(A+B)$ را span کرد

$$= dim(colspace(A)) + dim(colspace(B)) - dim(C_{(A)} \cap C_{(B)})$$

جهت تشکیل بودن $C_{(A)}$ منظور همان Colspace(A) هست .

$$= Rank(A) + Rank(B) - dim(C_{(A)} \cap C_{(B)})$$

$$\rightarrow \boxed{Rank(A+B) \leq Rank(A) + Rank(B) - dim(C_{(A)} \cap C_{(B)})}$$

و

$$C_{(AB)} \subseteq C_{(A)} \cap C_{(B)}$$

اثبات :

$$C_{(AB)} \subseteq C_{(A)}$$

$$\forall z: z \in C_{(AB)} \rightarrow z = ABx \qquad x \in R^n$$

$$y \in C_{(B)} \leftarrow y = Bx \qquad x \in R^n$$

$$z = ABx = Ay \rightarrow z \in C_{(A)}$$

پس به ازای هر عضو $z \in C_{(AB)}$ قطعاً $z \in C_{(A)}$ هم هست

و به همین ترتیب $z \in C_{(B)}$ هم هست $\leftarrow$

$$C_{(AB)} \subseteq C_{(A)} \cap C_{(B)}$$

$$\rightarrow \underbrace{\dim\left(C_{(AB)}\right)}_{\mathrm{Rank}(AB)} \leq \dim\left(C_{(A)} \cap C_{B}\right)$$

$$\boxed{\mathrm{Rank}(A+B) \leq \mathrm{Rank}(A) + \mathrm{Rank}(B) - \dim\left(C_{(A)} \cap C_{(B)}\right)} \,,$$

$$\rightarrow \mathrm{Rank}(A+B) + \dim\left(C_A \cap C_B\right) \leq \mathrm{Rank}(A) + \mathrm{Rank}(B)$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathrm{Rank}(A+B) + \mathrm{Rank}(AB) \leq \mathrm{Rank}(A) + \mathrm{Rank}(B)}$$

ج) ابتدا اثبات می‌کنیم که:

$$\mathrm{Dim}(\mathrm{Nullspace}(A)+\mathrm{Nullspace}(A^T))=n$$

هر عضوی از $\mathrm{Nullspace}(A^T)$ بر تمام فضای ستونی A عمود است و برعکس

$$\mathrm{Colspace}(A)^{\perp}=\mathrm{Nullspace}(A^T)$$

و همچنین

$$\forall x\in \mathbb{R}^n: x=a+b \;\Big|\; a\in \mathrm{colspace}(A)$$

و $b\in \mathrm{nullspace}(A^T)$

از طرفی عضو دلخواه x را در نظر بگیرید:

$$\forall x\in \mathrm{Colspace}(A)\rightarrow \exists z: Az=x$$

$$\rightarrow A^2 z = Ax \quad \text{و}\; A^2=0 \rightarrow 0=Ax$$

$$\rightarrow x\in \mathrm{kernell}(A)$$

$$\rightarrow \mathrm{Colspace}(A)\leq \mathrm{Nullspace}(A)$$

پس:

$$\forall x\in \mathbb{R}^n: x=a+b \;\Big|\; a\in \mathrm{Nullspace}(A),\; b\in \mathrm{Nullspace}(A^T)$$

پس ثابت می‌شود که:

$$\mathrm{Dim}(\mathbb{R}^n) = \mathrm{Dim}(\mathrm{Nullspace}(A) + \mathrm{Null\ space}(A^T))$$

$$\rightarrow \mathrm{Dim}(\mathrm{Nullspace}(A) + \mathrm{Null\ space}(A^T)) = n$$

$$\rightarrow \mathrm{Nullity}(A) + \mathrm{Nullity}(A^T) - \mathrm{Dim}(\mathrm{Nullspace}(A) \cap \mathrm{Nullspace}(A^T)) = n$$

و $\mathrm{Nullity}(A) = \mathrm{Nullity}(A^T)$

$$\rightarrow \boxed{\mathrm{Dim}(\mathrm{Nullspace}(A) \cap \mathrm{Nullspace}(A^T)) = 2\,\mathrm{Nullity}(A) - n}$$

حال اثبات می‌کنیم که $\mathrm{kern}(A+A^T) = \mathrm{kern}(A) \cap \mathrm{kern}(A^T)$

۲ بردار Ax و A^Tx را فرض کنید:

$$\langle A^Tx, Ax \rangle = x^T A A x = x^T A^2 x = 0$$

$\underline{A^2 = 0}$

$$\rightarrow \boxed{A^Tx \perp Ax}$$

$$\forall x \in \mathrm{kern}(A + A^T)$$

چون $Ax + A^Tx = 0 \rightarrow A^Tx = -Ax \rightarrow Ax \perp A^Tx$

پس فقط وقتی این تساوی درست است که $\underbrace{Ax = 0}_{\mathrm{Nullspase}(A)}$ و $\underbrace{A^Tx = 0}_{\mathrm{Nullspace}(A^T)}$

$$\rightarrow x \in \mathrm{kern}(A) \text{ و } x \in \mathrm{kern}(A^T)$$

$$\forall z \in \ker(A),\ z \in \ker(A^T)$$

$$\rightarrow Az = 0,\ A^T z = 0$$

$$\rightarrow (A + A^T) z = 0$$

$$\rightarrow z \in \ker(A + A^T)$$

پس :

$$\text{null space}(A + A^T) = \text{null space}(A^T) \cap \text{null space}(A)$$

$$\boxed{\dim(\text{nullspace}(A) \cap \text{Nullspace}(A^T)) = 2\,\text{Nullity}(A) - n}$$

$$\rightarrow \dim(\text{nullspace}(A + A^T)) = 2\,\text{Nullity}(A) - n$$

$$\rightarrow \text{Nullity}(A + A^T) = 2\,\text{Nullity}(A) - n$$

$$\rightarrow n - \text{Rank}(A + A^T) = 2n - 2\,\text{Rank}(A) - n$$

$$\rightarrow \text{Rank}(A + A^T) = 2\,\text{Rank}(A)$$

۵) $A_{m\times n}$ اثبات می کنیم $\mathrm{kern}(QA) = \mathrm{kern}(A)$

kern منظورمان Null space یا kernel است.

$\forall x \in \mathrm{kern}(QA) \rightarrow QAx = 0$ و Q چون تمام رنک است پس وارون پذیر است.

$\rightarrow Q^{-1}QAx = 0 \rightarrow Ax = 0$

$\rightarrow x \in \mathrm{kern}(A)$

و $\forall x \in \mathrm{kern}(A) \rightarrow Ax = 0 \rightarrow QAx = 0 \rightarrow x \in \mathrm{kern}(QA)$

پس $\mathrm{kern}(A) = \mathrm{kern}(QA)$ $\rightarrow$ $\boxed{\mathrm{Nullity}(QA) = \mathrm{nullity}(A)}$

و $QA_{m\times n}$ و $A_{m\times n}$

و $n = \mathrm{Rank}(A_{n\times r}) + \mathrm{nullity}(A_{n\times n})$

$\rightarrow \mathrm{Rank}(A) = \mathrm{Rank}(QA)$

بخش دوم، مثل قبل اثبات می کنیم که $\mathrm{kern}(A^T) = \mathrm{kern}(P^T A^T)$

$\forall x \in \mathrm{kern}(A^T) \rightarrow A^T x = 0 \rightarrow P^T A^T x = 0 \rightarrow x \in P^T A^T$

$\forall x \in \operatorname{kern}(P^T A^T) \to P^T A^T x = 0$ و

P فول رنک است پس P^T هم فول رنک است پس P^T وارون پذیر است.

$\to P^{-T} P^T A^T x = 0 \to A^T x = 0$

$\to x \in \operatorname{kern}(A^T)$

$\to \operatorname{kern}(A^T) = \operatorname{kern}(P^T A^T)$

$\to \operatorname{nullity}(A^T) = \operatorname{nullity}(P^T A^T)$

$\to \operatorname{rank}(A^T) = \operatorname{rank}(P^T A^T)$ و $\operatorname{rank}(A^T) = \operatorname{rank}(A)$

$\to \operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(PA)$

$$\longrightarrow \boxed{\operatorname{Rank}(QA) = \operatorname{Rank}(A) = \operatorname{Rank}(PA)}$$

۵) الف) $A_{m\times n}$

بخش اول

$$X = \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ -A^T & I_n \end{bmatrix} \qquad X^{-1} = \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ A^T & I_n \end{bmatrix}$$

$$X^T = \begin{bmatrix} I_m & -A \\ 0 & I_n \end{bmatrix} \qquad X^{-T} = \begin{bmatrix} I_m & A \\ 0 & I_n \end{bmatrix}$$

$$XX^T = \begin{bmatrix} I_m & -A \\ -A^T & A^TA + I_n \end{bmatrix} \rightarrow X + X^T - XX^T = \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & I_n - A^TA \end{bmatrix}$$

$$XBX^T = X + X^T - XX^T$$

$$\rightarrow BX^T = I + X^{-1}X^T - X^T$$

$$\rightarrow B = X^{-T} + X^{-1} - I \rightarrow \boxed{B = \begin{bmatrix} I_m & A \\ A^T & I_n \end{bmatrix}}$$

بخش دوم

$$X = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -A & I_m \end{bmatrix} \quad X^{-1} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ A & I_m \end{bmatrix}$$

$$X^T = \begin{bmatrix} I_n & -A^T \\ 0 & I_m \end{bmatrix} \quad X^{-T} = \begin{bmatrix} I_n & A^T \\ 0 & I_m \end{bmatrix}$$

$$XX^T = \begin{bmatrix} I_n & -A^T \\ -A & AA^T + I_m \end{bmatrix} \rightarrow X + X^T - XX^T = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n - AA^A \end{bmatrix}$$

$$X C X^T = X + X^T - XX^T$$

$$\rightarrow C X^T = I + X^{-1} X^T - X^T$$

$$\rightarrow C = X^{-T} + X^{-1} - I \rightarrow \quad = \boxed{\begin{bmatrix} I_n & A^T \\ A & I_m \end{bmatrix}}$$

ب) ابتدا اثبات می‌کنیم که :

$$\text{Nullity}(I_n - AA^T) = \text{Nullity}(I_n - A^T A) :$$

$$(I_n - AA^T)x = 0 \Longrightarrow \underline{x = AA^T x} \rightarrow$$ فضای برداری U

$$(I_n - A^T A)x = 0 \rightarrow \underline{x = A^T A x} \rightarrow$$ فضای برداری V

$$x_1 \in U \rightarrow x_1 = AA^T x_1 \rightarrow A^T x_1 = A^T A A^T x_1$$

$$\underline{A^T x_1 = x_2} \rightarrow \boxed{x_2 = A^T A x_2}$$

پس به‌ازای هر x_1 در U وجود دارد x_2 متناظری در V به شکل

$$\underline{x_2 = A^T x_1}$$

این یک تبدیل یک به یک است چون :

$$A^T x = A^T y \quad (x, y \in U, (A^T x, A^T y) \in V)$$

$$\hookrightarrow AA^T x = AA^T y \text{ و } \underbrace{AA^T x = x, \ AA^T y = y}_{\text{طبق تعریف فضای برداری } U}$$

$$\hookrightarrow x = y$$

پس تبدیل خطی یک به یک از U به V داریم یعنی :

$\dim(V) \geq \dim(U)$

حال ترکیب خطی یک به یکی از V به U معرفی می‌کنیم:

$x = A^T A x \qquad x \in V$

$(Ax) = A A^T (Ax)$

$\rightarrow y = Ax \rightarrow y = A A^T y \qquad y \in U$

اثبات می‌کنیم که $y = Ax$ ترکیب خطی یک به یک است

$y_1 = y_2 \rightarrow A x_1 = A x_2 \rightarrow A^T A x_1 = A^T A x_2$

و $\underline{A^T A x = x \quad x \in V} \rightarrow x_1 = x_2$

پس ترکیب خطی یک به یک از V به U داریم:

$\dim(U) \geq \dim(V)$

اثبات کردیم که U و V که null spase
های ما بودند دارای Dimension یکسان
باشد

$\rightarrow \dim(U) = \dim(V)$

$\rightarrow \text{Nullity}(I_m - AA^T) = \text{Nullity}(I_n - A^T A)$

و $\text{Nullity}(A_{n\times n}) + \text{Rank}(A_{n\times n}) = n$

$\rightarrow \text{Rank}(I_m - AA^T) + \text{Nullity}(I_m - AA^T)$

$- \text{Rank}(I_n - A^TA) - \text{nullity}(I_n - A^TA)$

$= m - n$

$\rightarrow \boxed{\text{Rank}(I_m - AA^T) - \text{Rank}(I_n - A^TA) = m - n}$

۶)

$$T_2 \circ T_1 = T_2(T_1(x)) = T_2\left(\begin{bmatrix} e_1^T x \\ (e_2+e_3)^T x\end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} -(e_2+e_3)^T x \\ e_1^T x\end{bmatrix} \qquad x\in R^3 \Rightarrow x = \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} -(x_2+x_3) \\ x_1\end{bmatrix}$$

پس اگر ماتریس تبدیل $T_2 \circ T_1$ را A فرض کنیم داریم:

$$x\in R^3$$

$$A = \begin{bmatrix}0&-1&-1\\1&0&0\end{bmatrix} \quad \text{و} \quad T_2\circ T_1(x) = Ax = \begin{bmatrix}-x_2-x_3\\x_1\end{bmatrix}$$

الف) این تبدیل یک تبدیل پوشا است چون کل فضای R^2 را می‌پوشاند

به طوری که

$$\forall u\in R^2: u=\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix} \to x = \begin{bmatrix}u_2\\-u_1\\0\end{bmatrix}$$

$\rightarrow T_2 \circ T_1(x) = Ax = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ ✓

ب) خیر واضحا یک به یک نیست به دلیل اینکه ماتریس تبدیل A ، wide matrix

است و واضحا نمی‌توان R^3 را به طور یک به یک به R^2 مپ کرد و اما

مثال:

$$x_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow Ax_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$x_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow Ax_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$Ax_2 = Ax_1$ و $x_1 \neq x_2 \Rightarrow$ این تبدیل onetoone

نیست.