محمد پیام تائبی - ۴۰۰۱۰۴۸۵۷ تمرین اول تئوری جبرخطی

۱)

A **subspace** of $\mathbb{R}^n$ is any set H in $\mathbb{R}^n$ that has three properties:

a. The zero vector is in H.

b. For each $\mathbf{u}$ and $\mathbf{v}$ in H, the sum $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ is in H.

c. For each $\mathbf{u}$ in H and each scalar c, the vector $c\mathbf{u}$ is in H.

آ) خب چون $(1,0,1,0,1,0,\dots)$ و $(0,1,0,1,0,1,\dots)$

را اگر جمع کنیم می‌شود $(1,1,1,\dots)$ که خارج از مجموعه اولیه است

ب) خب چون هر دنباله کاهشی اگر در یک اسکالر منفی ضرب شود خارج

مجموعه اولیه می‌افتد

ج) هست چون بردار صفر را دارد و اگر u و v را فرض کنیم به طوری

که دنباله u به L_1 و دنباله v به L_2 همگرا باشد، دنباله $u+v$ به L_1+L_2

همگرا خواهد بود که شرط b را رعایت می‌کند همچنین اگر u به L همگرا باشد

cu نیز به Lc همگرا است که شرط c را نیز رعایت می‌کند

یا به صورتی یعنی:

$$\lim_{n\to\infty} u = L_1 \,,\; \lim_{n\to\infty} v = L_2$$

$$\lim_{n\to\infty} u = L \Rightarrow \lim_{n\to\infty} cu = Lc$$

$$\lim_{n\to\infty} u+v = L_1+L_2$$

و

د) دنباله (...,0,0,0) را که دارد ✓

$u: a, a+b, a+2b, a+3b, \ldots$

$v: c, c+d, c+2d, c+3d, \ldots$

$u+v: a+c, a+c+(b+d), a+c+2(b+d), a+c+3(b+d), \ldots$

که $u+v$ خودش دنباله حسابی است به شکل $(u+v)_0 = u_0 + v_0 = a+c$

و قدر نسبت $u+v$ برابر جمع قدر نسبت u و v است.

به شکل ریاضی:

$t_1, t_2, t_3, t_4, \ldots \quad \forall i: t_i - t_{i-1} = d_1$

$u_1, u_2, u_3, u_4, \ldots \quad u_i - u_{i-1} = d_2$

$u_1+t_1, u_2+t_2, \ldots \quad (u_i+t_i)-(u_{i-1}+t_{i-1}) = d_1+d_2$

ضرب اسکالر نیز مشکلی در دنباله ایجاد نمی‌کند

$t_1, t_2, t_3, \ldots \quad \forall i: t_i - t_{i-1} = d$

$ct_1, ct_2, ct_3, \ldots \Rightarrow ct_i - ct_{i-1} = c(t_i - t_{i-1}) = cd$

پس یک subspace هست.

ه) نیست مثلاً

$(2, 4, 8, 16, 32, \ldots, 2^n) \text{ و } (3, 9, 27, 81, \ldots, 3^n)$

اگر جمع را بنویسیم:

$\rightarrow (5, 13, 35, 97, \ldots, 2^n+3^n)$

واضح است که

$$\frac{13}{5} \neq \frac{35}{13}$$

- Definition: $U + W$ is called a **direct sum**, if any element in $U + W$ can been written uniquely as $\mathbf{u} + w$ where $\mathbf{u} \in U$ and $w \in W$
(Notation: $U \oplus W$)

طبق تعریف جمع مستقیم باید هر عضو به شکل یونیک از جمع زیرفضاها باشد.

$u_1 = (x_1, y_1, 0) \quad u_2 = (0, 0, z_2) \quad u_3 = (0, y_3, y_3)$

$$u_1 + u_2 + u_3 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 + y_3 \\ z_2 + y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

حال با یک مثال ساده یونیک بودن حاصل جمع را رد می‌کنیم

$u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$u_1 + u_2 + u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$u_1 + u_2 + u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

پس $U_1 + U_2 + U_3$ یک دایرکت سام نیست.

۳) آ)

$A=\{(x,y) \mid x,y\in\mathbb{Z}\}$

$\forall\, v,u\in A:\quad u=\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix},\quad v=\begin{bmatrix}x_2\\y_2\end{bmatrix}\qquad u+v=\begin{bmatrix}x_1+x_2\\y_1+y_2\end{bmatrix}\to$ عضو $\mathbb{Z}$

و $u-v=\begin{bmatrix}x_1-x_2\\y_1-y_2\end{bmatrix}\to$ عضو $\mathbb{Z}$

پس هم $u+v$ و $u-v$ داخل A هستند

اما بدیهی است با ضرب یک عدد غیر صحیح در یک عضو A می‌تواند خارج A بیوفتد

مثلاً: $\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ و $\frac{1}{2}$: $\quad \frac{1}{2}\times\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\1\end{bmatrix}$

ب)

$A=\left\{\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} \,\middle|\, \frac{x}{y}\in P\right\}+\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ که P منظور اعداد اول است

(عضو $\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ را برای صفر نشدن مخرج دستی اضافه کردیم به مجموعه)

بسته بودن ضرب اسکالر:

$u=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\qquad cu=\begin{bmatrix}cx\\cy\end{bmatrix},\quad \frac{cx}{cy}=\frac{x}{y}$

$\downarrow$

$\frac{x}{y}\in P \qquad\qquad \frac{x}{y}\in P\Rightarrow\frac{cx}{cy}\in P$

بسته نبودن روی جمع و تفریق:

$u=\begin{bmatrix}7\\1\end{bmatrix}\in A:\ \frac{7}{1}=7\in P$

$v=\begin{bmatrix}9\\3\end{bmatrix}\in A:\ \frac{9}{3}=3\in P$

$u+v=\begin{bmatrix}16\\4\end{bmatrix}$ و $\frac{16}{4}=4 \notin P$

پس $u+v$ داخل A نیست یعنی جمع روی A بسته نیست

ج) آ) ابتدا ضرب اسکالر را بررسی کنیم:

$\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix} \;\Big|\; a^2+b^2+c^2=k$

$\begin{bmatrix}ta\\tb\\tc\end{bmatrix} \;\Big|\; t^2(a^2+b^2+c^2)=k \rightarrow t^2k=k$

از همینجا چون t هر عدد دلخواهی است نتیجه می‌شود فقط $k=0$ جواب است

که زیر فضای تک عضوی $\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$ را شامل می‌شود

ب) به ازای ضرب اسکالر شروع می‌کنیم:

$u=\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix} \qquad tu=\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}$

$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$

$a+b+c=k \qquad t(a+b+c)=k \Rightarrow kt=k$

مثال قبل چون t متغیر متفاوتی است $\boxed{k=0}$ که دوباره مجموعه تک عضوی $\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$

که یک subspace است را شامل می‌شود

(آ) (ی)

A ring R is a set together with two binary operations + and *, satisfying the following properties:

1. (R,+) is a commutative group
2. * is associative
3. The distributive laws hold in R:
(Multiplication is distributive over addition)

$$(a + b) * c = (a * c) + (b * c)$$

$$a * (b + c) = (a * b) + (a * c)$$

اول باید چک کنیم که F با + یک گروه شرکت پذیر هست یا نه؟

1. ♦ is associative شرکت پذیری

$\forall a,b,c \in S \rightarrow (a \Diamond b) \Diamond c = a \Diamond (b \Diamond c)$

2. (Identity) There exists an element $e \in S$ such that:

$e \blacklozenge a = a \blacklozenge e = a$, for all $a \in S$

3. (Inverses) For every $a \in S$ there is $b \in S$ such that: $a \blacklozenge b = b \blacklozenge a = e$

خواص گروه:

طبق صورت سوال شرکت پذیری را داریم. عضو ۰ همان Identity است

و هر عضو نیز معکوس خودش است ($a+a=0$ و $b+b=0$ و ...)

از طرفی چون جدول به قطر اصلی قرینه است خاصیت جابجایی داریم

یعنی $a+b=b+a$ پس F یک حلقه (Ring) است.

Fields $\forall\, a, b, c \in F$

Properties	Binary Operations	
	Addition (+)	Multiplication (.)
Closure (بسته بودن)	$\exists a + b \in F$	$\exists a.b \in F$
Associative (شرکت‌پذیری)	$a + (b + c) = (a + b) + c$	$a.(b.c) = (a.b).c$
Commutative (جابه‌جایی‌پذیری)	$a + b = b + a$	$a.b = b.a$
Existence of identity $e \in F$	$a + e = a = e + a$	$a.e = a = e.a$
Existence of inverse: For each a in F there must exist b_1 in F	$a + b_1 = e = b_1 + a$	$a.b_1 = e = b_1.a$ For any nonzero a
Multiplication is distributive over addition $a.(b + c) = a.b + a.c$ $(a + b).c = a.c + b.c$		

ب

ویژگی های Field را چک می کنیم:

F نسبت به جمع بسته است ✓

// // // // شرکت پذیری دارد ✓

// // // // جابه جایی دارد ✓

// // // // Identity, Inverse دارد ✓

این ها را در الف اثبات کردم

F نسبت به ضرب بسته است؟ طبق جدول بله

// // // // شرکت پذیری دارد؟ طبق صورت سوال بله

// // // // // جابه جایی پذیری دارد؟ طبق قرینه بودن جدول نسبت به قطر اصلی بله

// // // // // // identity دارد؟ بله عضو e Identity است.

// // // // // به جز $\{0\}$ inverse دارد؟ بله e inverse است

$F-\{0\}=\{e,a,b\}$ و $a\cdot b=e$ به طوری که

$e\cdot e=e$

خاصیت توزیع پذیری هم که طبق صورت سوال داریم.

پس F یک Field یا میدان است

---

۴)

$P_{(x)}=ax^3+bx^2+cx+d$

$P'_{(x)}=3ax^2+2bx+c$

$\boxed{a+b+c+d=1}$

$\boxed{3a+2b+c+0d=5}$

$\boxed{-a+b-c+d=3}$

$\boxed{3a-2b+c+0d=1}$

$$\rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 5 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right] \end{array}$$

$r_3=r_3+r_1$

$r_4=r_2-r_4$

$$\rightarrow \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & \\ \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & +1 & +2 & +3 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right] \qquad r_2 = -r_2 + 3r_1$$

$$\rightarrow \begin{array}{ccccc} a & c & d & b & \\ \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right]$$

swap b, c

swap b, d

$\Rightarrow 4b = 4 \Rightarrow \boxed{b = 1}$

$2d + 2b = 4 \Rightarrow \boxed{d = 1}$

$2c + 3d + b = -2 \Rightarrow \boxed{c = -3}$

$a + c + d + b = 1 \Rightarrow \boxed{a = 2}$

$\Rightarrow P_{(x)} = 2x^3 + x^2 - 3x + 1$