۴۰۰۱۰۴۸۳۷ محمدیحیی تابی

(۱

$$M:\ \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} b_1 & b_2 & \cdots & b_m \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_1 & & \cdots & \\ \vdots & & & \\ a_n & & & \end{bmatrix}_{n\times m} \end{array}$$

① بردار $r \in R^n$ وجود دارد
به طوری که بتوان آن را به صورت ترکیب
خطی از این بردار های ستونی نوشت

② بردار x وجود دارد که در معادله
$Mx = r$ صدق کند

$② \rightarrow ①$:

$$Mx = r \qquad \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} b_1 & b_2 & \cdots & b_m \end{array} \\ \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & & \\ b_{n1} & b_{n2} & & b_{nm} \end{bmatrix}_{n\times m} \end{array} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}_{m\times 1} = \begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix}_{n\times 1}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \cdots + b_{1m}x_m = r_1 \\ b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \cdots + b_{2m}x_m = r_2 \\ \vdots \\ b_{n1}x_1 + b_{n2}x_2 + \cdots + b_{nm}x_m = r_n \end{cases}$$

$$\downarrow \quad x_1 b_1 \qquad \downarrow \quad x_2 b_2 \qquad \downarrow \quad x_m b_m \qquad \downarrow \quad r$$

$$x_1\begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ \vdots \\ b_{n2} \end{bmatrix} + \cdots + x_m\begin{bmatrix} b_{1m} \\ \vdots \\ b_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x_1 b_1 + x_2 b_2 + x_3 b_3 + \dots + x_m b_m = v$$

پس بردار v، ترکیب خطی از $b_1, b_2, \dots, b_m$ است.

① → ②:

می‌دانیم $\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \dots + \alpha_m b_m = v$

ادعا می‌کنیم بردار $x = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix}$ جواب ما است

اثبات:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} b_1 & b_2 & \dots & b_m \end{array} \\ \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ \vdots & & & \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix}_{n \times m} \end{array} \times \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix}_{m \times 1} = \underbrace{\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \dots + \alpha_m b_m}_{\text{مطابق چیزی که در بخش قبلی اثبات کردیم}}$$

از طرفی $\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \dots + \alpha_m b_m$ همان v است پس ادعای $x = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix}$ درست است و حکم اثبات شد.

۲) الف) خطی نیست

$$x=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} \quad y=\begin{bmatrix}4\\1\\2\end{bmatrix} \quad \alpha=3 \quad \beta=1$$

$$f_{(x)}=2 \quad f_{(y)}=2 \rightarrow \alpha f_{(x)}+\beta f_{(y)}=8$$

$$\alpha x+\beta y=\begin{bmatrix}7\\7\\11\end{bmatrix} \Rightarrow f_{(\alpha x+\beta y)}=4$$

$$4\neq 8$$

ب) خطی است اگر $a=[-1,0,0,0,0,\dots,0,1]_{1\times n}$ برای بردارهای $x\in R^n$

$$f_{(x)}=a^T x=x_n-x_1$$

ج) خطی نیست

$$x=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} \quad y=\begin{bmatrix}4\\1\\2\end{bmatrix} \quad \alpha=3 \quad \beta=1$$

$$f_{(x)}=2 \quad f_{(y)}=2 \rightarrow \alpha f_{(x)}+\beta f_{(y)}=8$$

$$\alpha x+\beta y=\begin{bmatrix}7\\7\\11\end{bmatrix} \Rightarrow f_{(\alpha x+\beta y)}=7$$

$$7\neq 8$$

د) خطی است

$$a = \left[\frac{1}{n}, -\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, -\frac{1}{n} \right]_{1 \times 2n}$$

$$\Rightarrow f_{(x)} = a^T x = \frac{x_1 + x_3 + x_5 + \dots x_{2n-1}}{n} - \frac{x_2 + x_4 + \dots + x_{2n}}{n}$$

میانگین درایه های فرد منهای میانگین درایه های زوج

اگر فضای برداری $2n$ بعدی نباشد و فرد بعد داشته باشد نیز تفاوتی ندارد

و می شود:

$$a = \left[\frac{1}{n}, -\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n} \right]_{2n+1}$$

$$f_{(x)} = a^T x = \frac{x_1 + x_3 + x_5 + \dots + x_{2n+1}}{n} - \frac{x_2 + x_4 + \dots + x_{2n}}{n}$$

میانگین درایه های فرد منهای میانگین درایه های زوج

۳) آ) به طوری که α غیرصفر وجود دارد ① $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 = 0$

فقط وقتی همه $\lambda = 0$ باشد درست است ② $\lambda_1 a_2 + \lambda_2 a_3 + \lambda_3 a_4 = 0$

$$a_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} a_2 - \frac{\alpha_3}{\alpha_1} a_3 \qquad \alpha_1 \neq 0$$

پس باید نشان دهیم که α_1 نمی‌تواند صفر باشد که از برهان خلف استفاده می‌کنیم اگر $\alpha_1 = 0$ یعنی $\alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 = 0$ که اگر به فرض ② نگاه کنید $\lambda_3 = 0$ قرار دهید و $\lambda_1 a_2 + \lambda_2 a_3 = 0$ جواب های غیرصفر برای آن ها بدست می‌آید یعنی $\lambda_1 = \alpha_2$ و $\lambda_2 = \alpha_3$ پس اگر $\alpha_1 = 0$ باشد فرض ② نقض می‌شود پس $\alpha_1 \neq 0$ است.

اگر α_2 و α_3 همه صفر باشد فرض یک نقض می‌شود، چون a_3 و a_2 و a_1 مستقل خطی می‌شوند

پس

$$a_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} a_2 - \frac{\alpha_3}{\alpha_1} a_3$$

برای بخش دوم از برهان خلف فرض کنید a_4 ترکیب خطی از a_1 و a_2 و a_3 باشد

$$a_4 = b_1 a_1 + b_2 a_2 + b_3 a_3$$

$$b_1 \left(-\frac{\alpha_2}{\alpha_1} a_2 - \frac{\alpha_3}{\alpha_1} a_3 \right)$$

پس به جای a_1 ترکیب خطی از a_2 و a_3 قرار دادیم و a_4 تبدیل شد به ترکیب خطی از a_2 و a_3 که این یعنی a_2, a_3, a_4 و a_1 مستقل خطی نیست و وابسته اند که نقض ② را مشخص می کند پس نمی توان a_4 را برحسب ترکیب خطی a_1, a_2 و a_3 نوشت

ب) با برهان خلف فرض کنید مجموعه $(tu+v), \alpha_1, \dots, \alpha_r$ وابسته خطی باشد:

$$c_0(tu+v) + c_1\alpha_1 + \dots + c_r\alpha_r = 0$$

اگر $c_0 = 0$ یعنی $c_1\alpha_1 + \dots + c_r\alpha_r = 0$ که یعنی $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ وابسته خطی اند که با فرض در تناقض است پس $c_0 \neq 0$:

$$tu+v = -\frac{c_1}{c_0}\alpha_1 - \frac{c_2}{c_0}\alpha_2 - \frac{c_3}{c_0}\alpha_3 - \dots - \frac{c_r\alpha_r}{c_0}$$

از طرفی u ترکیب خطی این بردار ها بود یعنی $u = \beta_1\alpha_1 + \dots + \beta_r\alpha_r$ پس

$$tu = \beta_1 t\alpha_1 + \dots + \beta_r t\alpha_r$$

$$\Rightarrow v = \underbrace{\left(-\frac{c_1}{c_0} - \beta_1 t\right)}_{\theta_1}\alpha_1 - \dots \underbrace{\left(-\frac{c_r}{c_0} - \beta_r t\right)}_{\theta_r}\alpha_r$$

$\Rightarrow \gamma = \theta_1 \alpha_1 + \theta_2 \alpha_2 + \dots + \theta_r \alpha_r$

پس γ ترکیب خطی از $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ شد که با فرض در تناقض است ※

پس مجموعه $\{\alpha_1, \dots, \alpha_r, \gamma\}$ طبق برهان خلف اثبات شد وابسته خطی

نیست پس مستقل خطی است.

---

④ پایه برای H : واضح است که $u_1 = \frac{1}{3} u_2 + \frac{1}{3} u_3$

پس $\mathrm{span}\{u_1, u_2, u_3\} = \mathrm{span}\{u_2, u_3\}$

چون u_2 و u_3 ضریب از هم $\longrightarrow$ $\alpha_1 u_2 + \alpha_2 u_3 = 0$

نیستند $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ یعنی مجموعه (u_2, u_3) مستقل خطی است

از طرفی چون $\mathrm{span}\{u_1, u_2, u_3\} = \mathrm{span}\{u_2, u_3\}$ که پس u_2 و u_3

کل فضای H را پوشش می دهند

پس می توان u_2 و u_3 را پایه های H معرفی کرد

پایه برای K :

$a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 = 0$

$-2a_1 + 2a_2 - a_3 = 0$

$-2a_1 + 3a_2 + 4a_3 = 0$

$-a_1 + 2a_2 + 6a_3 = 0$

$3a_1 - 6a_2 - 2a_3 = 0$

$\boxed{a_2 + 5a_3 = 0}$

$16a_3 = 0 \rightarrow \boxed{a_3 = 0}$

$\boxed{a_2 = 0} \rightarrow \boxed{a_1 = 0}$

پس v_1 و v_2 و v_3 مستقل خطی اند از طرفی $\operatorname{span}(v_1, v_2, v_3)$ کل K را پوشش می‌دهد پس v_1 و v_2 و v_3 پایه‌هایی برای K هستند

پایه برای $K+H$:

$\operatorname{span}(u_1, u_2, u_3) + \operatorname{span}(v_1, v_2, v_3) = \operatorname{span}(v_1, v_2, v_3, u_1, u_2, u_3)$

پس سعی می‌کنیم مجموعه $v_1, v_2, v_3, u_1, u_2, u_3$ را به مجموعه مستقل خطی تبدیل کنیم

$u_1 = \frac{1}{2}u_2 + \frac{1}{2}u_3$

$u_2 = 2u_3 + 3v_1$

$\operatorname{span}(v_1, v_2, v_3, u_1, u_2, u_3) = \operatorname{span}(v_1, v_2, v_3, u_3)$

v_1, v_2, v_3 که مستقل خطی بودند حال باید دید آیا u_3 را می‌توان ترکیب خطی از آنها نوشت یا نه

$av_1 + bv_2 + cv_3 = u_3$

$-2a + 2b - c = 3$

$-2a + 3b + 4c = 4$

$-a + 2b + 6c = 1$

$\boxed{b + 5c = 1} \rightarrow \boxed{b = \frac{21}{16}}$

$-a + \frac{21}{8} - \frac{3}{8} = 1 \rightarrow \boxed{a = \frac{5}{4}}$

$2a - 6b - 7c = -2 \quad \boxed{16c = -1} \rightarrow \boxed{c = -\frac{1}{16}}$

$-\frac{5}{2} + \frac{63}{16} - \frac{1}{4} = 2$

$\Rightarrow -40 + 63 - 4 = 4 \Rightarrow 19 = 4$

پس a, b, c برای معادله بالا وجود ندارد پس $\boxed{v_1 \; v_2 \; v_3 \; u_3}$

مجموعه مستقل خطی است . از طرفی با u_3 و v_1 می‌توان u_2 و با u_2 و u_3

می‌توان u_1 را ساخت پس $span(v_1, v_2, v_3, u_3)$ کل فضای $K+H$

را پوشش می‌دهد

$S = \{r_1, r_2, \dots, r_k\}$ الف) ب)

$$f_{(S)} = \{f_{(r_1)}, f_{(r_2)}, \dots, f_{(r_k)}\}$$

یک set افاین است اگر هر ترکیب افاینی از نقاط عضو آن عضو همان مجموعه شود پس یک ترکیب افاین از $f_{(r_i)}$ در نظر بگیرید

$$c_1 f_{(r_1)} + c_2 f_{(r_2)} + \dots + c_k f_{(r_k)} = y$$

$$\sum c_i = 1$$

چون f تابع خطی است داریم:

$$= f(\underbrace{c_1 r_1 + c_2 r_2 + \dots + c_k r_k}_{=u}) = y$$

چون S افاین بودن هر ترکیب افاینی از

نقاطش درون S میوفتد پس

$$u \in S \Rightarrow f_{(u)} \in f_{(S)} \rightarrow \boxed{y \in f_{(S)}}$$

پس y نیز در $f_{(S)}$ است و این یعنی $f_{(S)}$ نیز یک مجموعه افاینی است

حاصل ترکیب افاینی از $r_1, \dots, r_k$

و چون $f_{(s)}$ به شکل $f: R^n \to R^m$ بود یعنی $f_{(s)}$ یک زیرمجموعه
افاین از R^m است

ب) $r_1, r_2, \dots, r_k$ را درنظر بگیرید که $f_{(r_i)} \in T$ و r_i ها عضوهای S اند. باید نشان دهیم ترکیب افاین $r_1, \dots, r_k$ درخود S میوفتد.

$$c_1 r_1 + c_2 r_2 + \dots + c_k r_k = y \quad , \quad \sum c_i = 1$$

$$f_{(c_1 r_1 + c_2 r_2 + \dots + c_k r_k)} = f_{(y)}$$

و چون f خطی است

$$= \underbrace{c_1 f_{(r_1)} + \dots + c_k f_{(r_k)}}_{\text{چون T افاین بود و عبارت بالا یک ترکیب افاین از عضوهای T است پس عبارت بالا خودش عضوی از T می‌شود}} = f_{(y)}$$

پس $f_{(y)} \in T$

y برداری در R^n است که $f_{(y)}$ در R^m عضوی از T شده است پس

y عضوی از S است و این یعنی نشان دادیم اگر $r_1, r_2, \dots, r_k$ عضو S

باشد هر ترکیب افاینی از آن نیز عضو S است که یعنی S یک مجموعه افاین
است پس S یک زیرمجموعه افاین در R^n است.

ج)

$a r_1 + b r_2 + c r_3 + d r_4 = p_1$ $\qquad a,b,c,d \geq 0$

$a+b+c+d=1$

Aug Matrix:

$$\begin{array}{cccc|c} a & b & c & d & \\ \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & -1 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 4 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{cccc|c} a & b & c & d & \\ \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -4 & -3 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & -4 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow -3b = -1$$

$\boxed{b = \frac{1}{3}}$

$\boxed{a = -\frac{1}{6}}$ ← پس $a < 0$ پس P_1 در conv S نیست

$$a r_1 + b r_2 + c r_3 + d r_4 = P_2 \qquad a, b, c, d \geq 0$$

$$a + b + c + d = 1$$

Aug Matrix:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -4 & -3 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & -6 & 0 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array} \rightarrow -6b = -2$$

$$\boxed{b = \frac{1}{3}}$$

$$\boxed{a = \frac{1}{3}}$$

$$-\frac{7}{3} + 2d = -2$$

$$\boxed{d = \frac{1}{6}}$$

$$-7 + 6d = -6$$

$$-\frac{1}{3} + c + \frac{1}{6} = 0 \rightarrow c = \frac{1}{6}$$

$$\boxed{c = \frac{1}{6}}$$

$$P_2 = \frac{1}{3} r_1 + \frac{1}{3} r_2 + \frac{1}{6} r_3 + \frac{1}{6} r_4$$

پس

$a, b, c, d \geq 0$

و $a + b + c + d = 1$

پس P_2 در conv S وجود دارد.