محمد پیام تابش ۴۰۰۱۰۴۸۹۷ تمرین ۵

۱)

$$X_i \begin{cases} 1 & p = \frac{1}{6} \\ 0 & p = \frac{5}{6} \end{cases}$$

1: تاس در مرحله i ام ۴ بیاید

0: تاس در مرحله i ام ۴ نیاید

$$\mu = E[X_i] = \frac{1}{6} \quad \text{و} \quad \sigma^2 = p(1-p) = \frac{5}{36}$$

$$X = \sum_{i=1}^{500} X_i$$

متغیر تصادفی X توزیعی از تعداد بارهایی که ۴ آمده است، است.

طبق حد مرکزی:

$$Z = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

$$\Rightarrow Z = \frac{X - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

$$P\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} \le Z \le z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} \le \frac{X - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \le z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(n\mu - \sigma\sqrt{n}\, z_{\frac{\alpha}{2}} \le X \le n\mu + \sigma\sqrt{n}\, z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

پس به احتمال $1-\alpha$ ، تعداد بار هایی که ۶ آمده در بازه زیر قرار دارد:

$$\left[n\mu - \sigma\sqrt{n}\, z_{\frac{\alpha}{2}} \text{ و } n\mu + \sigma\sqrt{n}\, z_{\frac{\alpha}{2}} \right]$$

$$\alpha = \frac{۱}{۲۰}$$

$$z_{\frac{\alpha}{2}} = \Phi^{-1}_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} = \Phi^{-1}_{\left(\frac{۳۹}{۴۰}\right)} \sim ۱/۹۶$$

$$n = ۵۰۰$$

$$\mu = \frac{۱}{۶}$$

$$\sigma^2 = \frac{۵}{۳۶} \rightarrow \sigma = \frac{\sqrt{۵}}{۶}$$

$$n\mu = ۸۳/\bar{۳}$$

$$\sigma\sqrt{n}\, z_{\frac{\alpha}{2}} = ۱۶/\bar{۳}$$

$$\rightarrow \boxed{x \text{ in } [۶۷ , ۹۹/\bar{۶}]}$$

به احتمال ۹۵٪

۲)

$$x_1, \dots, x_n \sim unif(0, \theta)$$

الف)

$$f_x(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} & 0 < x < \theta \\ 0 & o.w \end{cases}$$

واضحاً هر x که آمده بین θ و ۰ است پس قطعاً :

$$0 \leq \min(x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ و } \max(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq \theta$$

تخمین گر MLE به دست میاوریم :

$$L(x_1, x_2 \dots, x_n | \theta) =$$

$$P(x_1 x_2 x_3 \dots x_n | \theta) = P(x_1|\theta) P(x_2|\theta) \dots P(x_n|\theta)$$

$$= \left(\frac{1}{\theta}\right)^n$$

باید این احتمال را بیشینه کنیم پس کوچکترین θ ممکن جواب است

$$\rightarrow MLE_\theta = \max(x_1, \dots, x_n)$$

ب)

$$U = \max(x_1, \dots, x_n) \qquad 0 \leq u \leq \theta$$

$$F_U(u) = P(U \leq u) = P(x_1 \leq u) P(x_2 \leq u) \dots P(x_n \leq u)$$

$$= F^{n}_{X(u)} = \left(\frac{u}{\theta}\right)^{n}$$

$$\rightarrow f_{U}(u) = \frac{n u^{n-1}}{\theta^{n}} \qquad 0 \le u \le \theta$$

$$E_{[U]} = \int_{0}^{\theta} n \frac{u^{n}}{\theta^{n}} \, du$$

$$= \frac{n}{\theta^{n}} \times \left.\frac{u^{n+1}}{n+1}\right|_{0}^{\theta} = \frac{n}{n+1} \times \theta$$

$$\rightarrow E_{[MLE_{\hat{\theta}}]} = \frac{n}{n+1} \times \theta$$

$$\rightarrow Bias_{(MLE_{\hat{\theta}})} = \frac{-1}{n+1} \times \theta$$

پس این تخمین گر Bias است

۳)

$$x_1, x_2, \dots, x_n \sim \overset{?}{D}(\mu, \sigma^2)$$

$$\bar{X} = \left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right)^2 \rightarrow$$ حدس از آسمان

$$E[\bar{X}] = \frac{1}{n^2} \times E\left[\sum_{i \neq j} x_i x_j + \sum_{i=1}^{n} x_i^2\right]$$

$$= \frac{1}{n^2} \times \left(\sum_{i \neq j} E[x_i] E[x_j] + \sum_{i=1}^{n} E[x_i^2]\right)$$

$$= \frac{1}{n^2} \left(\binom{n}{2} \times 2 \times \mu^2 + n \times (\mu^2 + \sigma^2)\right)$$

$$= \frac{1}{n} \left((n-1)\mu^2 + \mu^2 + \sigma^2\right)$$

$$= \mu^2 + \frac{\sigma^2}{n} \rightarrow E\left[\bar{X} - \frac{\sigma^2}{n}\right] = \mu^2$$

پس $\widehat{\mu^2} = \bar{x} - \dfrac{\sigma^2}{n} = \dfrac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{n^2} - \dfrac{\sigma^2}{n}$

یک تخمین گر unbias برای μ^2 است.

---

۴) A: از ۶ تا ۲ تا شی قبلا علامت گذاشته

$$L(A|n) = P(A|n) = \frac{\binom{n}{3} \times \binom{n-3}{4}\binom{3}{2}}{\binom{n}{3} \times \binom{n}{6}} \qquad \boxed{n \geq 7}$$

$$= \frac{3 \times \cancel{(n-3)}\cancel{(n-4)}\cancel{(n-5)}(n-6) \times 720}{24 \times n \times (n-1)(n-2)\cancel{(n-3)}\cancel{(n-4)}\cancel{(n-5)}}$$

$$= \frac{90(n-6)}{n(n-1)(n-2)} \xrightarrow{\text{۹۰ تاثیر ندارد}} P = \frac{n-6}{n(n-1)(n-2)}$$

$$\frac{dp}{dn} = \frac{n(n-1)(n-2) - (3n^2 - 6n + 2)(n-6)}{n^2(n-1)^2(n-2)^2} = 0$$

$$\rightarrow \quad n^3 - 3n^2 + 2n = 3n^3 - 24n^2 + 38n - 12$$

$$\rightarrow \quad 2n^3 - 21n^2 + 36n - 12 = 0$$

$\rightarrow n_1 = ۰/۴۳۳ , n_2 = ۱۱/۳۰۲ , n_3 = ۸/۴۵۶$

but $n \geq ۷$

$\rightarrow n = ۸/۴۵۶$

$n \in \mathbb{Z}$

$\rightarrow$ check $L(A|n=۸) , L(A|n=۹)$

$$L(A|n=۸) = \frac{۹۰ \times ۲}{۸ \times ۷ \times ۱} = \frac{۱۵}{۲۸}$$

$$L(A|n=۹) = \frac{۹۰ \times ۳}{۹ \times ۸ \times ۷} = \frac{۱۵}{۲۸}$$

پس $L(A|n)$ در $n=۸$ و $n=۹$ مساوی و بیشینه می‌شود.

$n=۸$ یا $n=۹$

پس با این داده‌های خیلی کم بهترین تخمین $n=۸$ یا $n=۹$ است

اما خب چون آماره خیلی کوچیکی داشتیم اصلاً تخمین خوبی نیست.

(ω

$\hat{\eta} \rightarrow$ unbias

$$\rightarrow E_{[\hat{\eta}]} = \eta$$

$$\rightarrow \alpha_1 E_{[x_1]} + \alpha_2 E_{[x_2]} + \dots + \alpha_n E_{[x_n]} = \eta$$

$$E_{[x]} = E_{[\eta + \varepsilon]} = \eta$$

$$\rightarrow \boxed{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 1}$$

و $\hat{\eta} \rightarrow$ کمترین واریانس را دارد

$$var_{(x_i)} = var_{(\eta + \varepsilon_i)} = \sigma_i^2$$

$$Var_{(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n)} =$$ x ها مستقل اند

$$\alpha_1^2 \, var_{(x_1)} + \alpha_2^2 \, var_{(x_2)} + \dots + \alpha_n^2 \, var_{(x_n)} =$$

$$Var = \alpha_1^2 \sigma_1^2 + \alpha_2^2 \sigma_2^2 + \dots + \alpha_n^2 \sigma_n^2$$

var را کمینه می کنیم (با استفاده از ضرایب لاگرانژ)

$$F(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \alpha_1^2 \sigma_1^2 + \dots + \alpha_n^2 \sigma_n^2 + \lambda(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n - 1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = 0 \rightarrow \boxed{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 1}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha_k} = 2\alpha_k \sigma_k^2 + \lambda = 0 \rightarrow \alpha_k = \frac{-\lambda}{2\sigma_k^2}$$

$$\rightarrow \frac{-\lambda}{2}\left(\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2} + \dots + \frac{1}{\sigma_n^2}\right) = 1$$

$$\rightarrow \lambda = \frac{-2}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sigma_k^2}}$$

$$\rightarrow \boxed{\alpha_k = \frac{1}{\sigma_k^2 \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_i^2}\right)}}$$