محمد پیام تابشی تمرین اول ۴۰۰۱۰۴۸۶۷

(۱)

$L \rightarrow lose$

$T \rightarrow Tavana$

$$P(L|T) = \frac{۳}{۱۰}$$

$$P(L|T') = \frac{۸}{۱۰}$$

$$P(T) = \frac{۴}{۱۰} \Rightarrow P(T') = 1 - P(T) = \frac{۶}{۱۰}$$

(الف)

$$P(T|L_1, L_2) = \frac{P(L_1, L_2|T) \times P(T)}{P(L_1, L_2)}$$

$$P(L_1, L_2) = P(L_1, L_2|T)\, P(T) + P(L_1, L_2|T')\, P(T')$$ احتمال کل

$$\Rightarrow P(T|L_1, L_2) = \frac{\cancel{\frac{۴}{۱۰}} \times \frac{۳}{۱۰} \times \cancel{\frac{۳}{۱۰}}}{\cancel{\frac{۴}{۱۰}} \times \frac{۳}{۱۰} \times \cancel{\frac{۳}{۱۰}} + \frac{۸}{۱۰} \times \frac{۸^{۲}}{۱۰} \times \frac{۶^{۲}}{۱۰}} = \frac{۳}{۳۵}$$

$$P(T'|L_1, L_2) = 1 - \frac{۳}{۳۵} = \frac{۳۲}{۳۵}$$

پس با توجه به داده های الف $\frac{۳}{۳۵}$ توانا و $\frac{۳۲}{۳۵}$ ناتوان هستیم

$$P(L_۳) = P(L_۳ \mid \text{توانا بودن باتوجه به الف})\, P(\text{توانا بودن باتوجه به الف}) + P(L_۳ \mid \text{ناتوان بودن با توجه به الف})\, P(\text{ناتوان بودن با توجه به الف})$$

$$= \frac{۳}{۱۵} \times \frac{۳}{۲۵} + \frac{۸}{۱۵} \times \frac{۲۲}{۲۵} = \frac{۹ + ۱۷۶}{۳۷۵} = \frac{۱۸۵}{۳۷۵} = \frac{۳۷}{۷۵}$$

ب) مثل الف احتمال T و T' را باتوجه به داده‌های مثله بدست میاوریم

$$P(T \mid ب) = \frac{P(ب \mid T)\, P(T)}{P(ب)}$$

$$P(ب) = P(ب \mid T)\, P_T + P(ب \mid T')\, P_{T'}$$

Lose win or win Lose

$$\Rightarrow P(T \mid ب) = \frac{\left(\frac{۳}{۱۵} \times \frac{۷}{۱۵} + \frac{۷}{۱۵} \times \frac{۳}{۱۵}\right) \times \frac{۴}{۱۵}}{\left(\frac{۳}{۱۵} \times \frac{۷}{۱۵} + \frac{۷}{۱۵} \times \frac{۳}{۱۵}\right) \times \frac{۴}{۱۵} + \left(\frac{۸}{۱۵} \times \frac{۲}{۱۵} + \frac{۲}{۱۵} \times \frac{۸}{۱۵}\right) \times \frac{۶}{۱۵}}$$

Lose win win Lose Lose win Lose win

$$\Rightarrow P(T \mid ب) = \frac{۳ \times ۷ \times \cancel{۴}}{۳ \times ۷ \times \cancel{۴} + \cancel{۸}^{۲} \times ۲ \times ۶} = \frac{۷}{۱۵}$$

$$و \quad P(T' \mid ب) = \frac{۸}{۱۵}$$

$$P(L_2) = P(L_2 \mid \text{توانا بودن با توجه به الف})\,P(\text{توانا بودن با توجه به الف}) + P(L_2 \mid \text{ناتوان بودن با توجه به الف})\,P(\text{ناتوان بودن با توجه به الف})$$

$$= \frac{7}{15} \times \frac{3}{10} + \frac{8}{15} \times \frac{8}{10} = \frac{85}{150} = \frac{17}{30}$$

ج)

$$P(T \mid ج) = \frac{P(ج \mid T) \times P(T)}{P(ج)}$$

$$P(ج) = P(ج \mid T)\,P(T) + P(ج \mid T')\,P(T')$$

$$\Rightarrow P(T \mid ج) = \frac{\frac{7}{10} \times \frac{7}{10} \times \frac{4}{10}}{\frac{7}{10} \times \frac{7}{10} \times \frac{4}{10} + \frac{2}{10} \times \frac{2}{10} \times \frac{6}{10}} = \frac{49}{55}$$

پس به احتمال $\frac{49}{55}$ توانا صحیح و به احتمال $\frac{6}{55}$ ناتوان صحیح

$$P(L) = P(L \mid \text{توانا بودن با توجه به ج}) + P\,L \mid \text{توانا نبودن با توجه به ج})$$

$$= \frac{49}{55} \times \frac{3}{10} + \frac{6}{55} \times \frac{8}{10} = \frac{39}{110}$$

۳)

$$f_{(n,r)} = \binom{n}{r} \times D_{(n-r)}$$

$D_{(2)}$ پریش 2 است یعنی: 2 شی به طوری که هیچکدام جای خودش نباشه و D_2 را با شمول و عدم شمول حساب می کنیم

$$D_n = n! - \binom{n}{1}(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! - \binom{n}{3}(n-3)! + \cdots$$

$$D_n = n! - \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} - \frac{n!}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{n!}{n!}$$

$$D_n = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right)$$

$$\Rightarrow f_{(n,r)} = \binom{n}{r} \times n! \times \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right)$$

$$\Rightarrow h = \frac{f_{(n,r)}}{n!} = \binom{n}{r} \times \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} h = \lim_{n\to\infty} \binom{n}{r} \times \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n-r)!\, r!} \times \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right)$$

$$= \frac{1}{r!} \times \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right)$$

$$, \quad e^{x} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

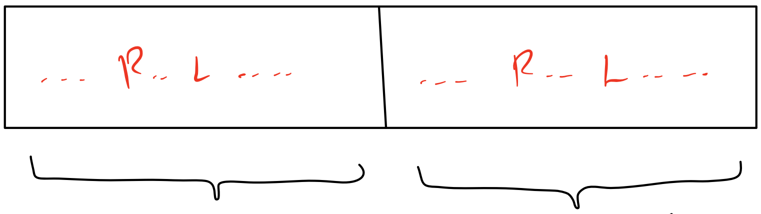
$$\Rightarrow e^{-1} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right) = \frac{1}{e}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{f(n,r)}{n!} = \frac{1}{e\, r!}$$

۳) مسئله را به این شکل ببینید که متحرک اول مسیرش را می رود و متحرک دوم همان مسیر را برمی‌گردد تا به صفر برسد یعنی اول دنباله مسیر متحرک اول را می نویسیم بعد برعکس دنباله متحرک دوم را می‌نویسیم (برعکس : $L \leftrightarrow R$ و $D \leftrightarrow U$)

الف) دنباله ای به طول $2N$ از R و L ←



N حرکت اول — N حرکت دوم

می‌دانیم تعداد R و L در این دنباله برابر است چون از صفر شروع کردیم و دوباره به صفر رسیدیم پس N تا R و N تا L داریم که به شکل $\binom{2N}{N}$ آن ها انتخاب می‌کنیم دنباله مورد نظر را می نویسیم و از طرفی می‌دانیم احتمال هر R یا L $\frac{1}{2}$ است پس احتمال رخ دادن این دنباله $\left(\frac{1}{2}\right)^{2N}$ است که احتمال رخ دادن کل دنباله های به این شکل می‌شود

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{2N} \times \binom{2N}{N}$$

فقط دقت کنید بعد از تشکیل دنباله حروف نیمه ی دوم دنباله که مربوط به متحرک دوم هستند را باید برعکس کنیم.

ب) مثل مورد الف دنباله ای از RLUD تشکیل می دهیم فقط دقت کنید حروف حرکت دوم را برعکس بزارید.

$$\underbrace{\boxed{\dots R \dots L \dots D \dots U}}_{N\ \text{حرکت اول}}\ \underbrace{\boxed{\dots R \dots L \dots D \dots U}}_{N\ \text{حرکت دوم}}$$

← دنباله ای به طول $2N$ از R و L و U و D

تعریف می کنیم که به جای هر R یا U ، $\nearrow$ قرار دهیم و به جای هر L یا D ، $\swarrow$ قرار دهیم

$$\underbrace{\boxed{\dots \nearrow \dots \swarrow \dots}}_{N\ \text{حرکت اول}}\ \underbrace{\boxed{\dots \nearrow \dots \swarrow \dots}}_{N\ \text{حرکت دوم}}$$

← دنباله ای به طول $2N$ از $\nearrow$ و $\swarrow$

در دنباله قبلی R ها با L ها و U ها با D ها برابر بودند پس در این دنباله هم جمع R و U با جمع L و D برابر است یعنی N تا $\nearrow$ و N تا $\swarrow$ داریم که تعداد جایگشت های آن می شود $\binom{2N}{N}$

حالا باید بررسی کنیم $\nearrow$ و $\swarrow$ چه تعدادی R و L و U و D دارند و باید حواسمان باشد تعداد $L = R$ و $U = D$ است

تعداد حالات

$\nearrow$			$\swarrow$			
R	U		L	D		
0	N	و	0	N	$\rightarrow$	$\binom{N}{0} \times \binom{N}{0}$
1	$N-1$	و	1	$N-1$	$\rightarrow$	$\binom{N}{1} \times \binom{N}{1}$
$\vdots$	$\vdots$	و	$\vdots$	$\vdots$		
$\vdots$	$\vdots$	و	$\vdots$	$\vdots$		
N	0	و	N	0	$\rightarrow$	$\binom{N}{N} \times \binom{N}{N}$

$$\text{تعداد حالات} = \sum_{i=0}^{N} \binom{N}{i}^2 = \sum_{i=0}^{N} \binom{N}{i}\binom{N}{N-i} = \binom{2N}{N}$$

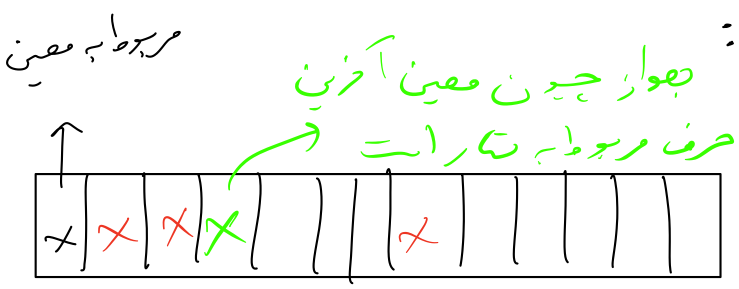
حال با $\binom{2N}{N} \times \binom{2N}{N}$ حالت توانستیم این دنباله را تشکیل دهیم احتمال

هر رخداد L و D و R و U هم $\frac{1}{4}$ هست پس جواب آخر می‌شود :

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{2N} \times \binom{2N}{N}^2$$

۴) می‌دانیم حرف آخری که خارج می‌شود مربوط به نفر آخر است و از این ایده استفاده می‌کنیم:

احتمال بردن گوگوش را حساب می‌کنیم:



گوگوش - ستار - معین:

$$\binom{12}{3}\times\binom{8}{3}\times\binom{5}{5}\times\underbrace{4!\times 4!}_{\text{جای ستار و معین}}\times\underbrace{\frac{5!}{3!\times 2!}}_{\text{جای گوگوش}}$$

۳ حرف دیگر معین — ۳ حرف دیگر ستار — ۵ حرف گوگوش — جای ستار و معین — جای گوگوش

گوگوش - معین - ستار: چون کلیه ستار و معین فرقی ندارد همان مقدار بالا می‌شود

$$\binom{12}{3}\times\binom{8}{3}\times\binom{5}{5}\times\underbrace{4!\times 4!}_{\text{جای ستار و معین}}\times\underbrace{\frac{5!}{3!\times 2!}}_{\text{جای گوگوش}}$$

۳ حرف دیگر ستار — ۳ حرف دیگر معین — ۵ حرف گوگوش — جای ستار و معین — جای گوگوش

حالات کل: $\frac{13!}{2!}$

$$\Rightarrow P(\text{گوگوش}) = \frac{2\times\binom{12}{3}\times\binom{8}{3}\times 4!\times 4!\times\frac{5!}{\cancel{2!}\,3!}}{\frac{13!}{\cancel{2!}\times 3!}}$$

$$= \frac{9\times 10\times 11\times 12\times 8\times 7\times 6\times 24\times 24}{6\times 2\times 13\times 12\times 11\times 10\times 9\times 8\times 7\times 6\times 5\times 4} = \frac{32}{9\times 13} = \frac{32}{117}$$

چون احتمال بردن قمار و معین یک جزء است (هر ۳ حرف نیز تکراری دارند
و با هم تفاوتی ندارند)

$$P_{(\text{برد})} + P_{(\text{معین})} + P_{(\text{گوگوی})} = ۱$$

$$\Rightarrow P_{(\text{قمار})} = \left(۱ - \frac{۳۲}{۱۱۷}\right) \times \frac{۱}{۲} = \boxed{\frac{۸۵}{۲۳۴}}$$

---

۵) الف) ابتدا فرض کنید دنباله E_n صعودی باشد

F_n را تعریف می‌کنیم:

$$F_{(1)} = E_1$$

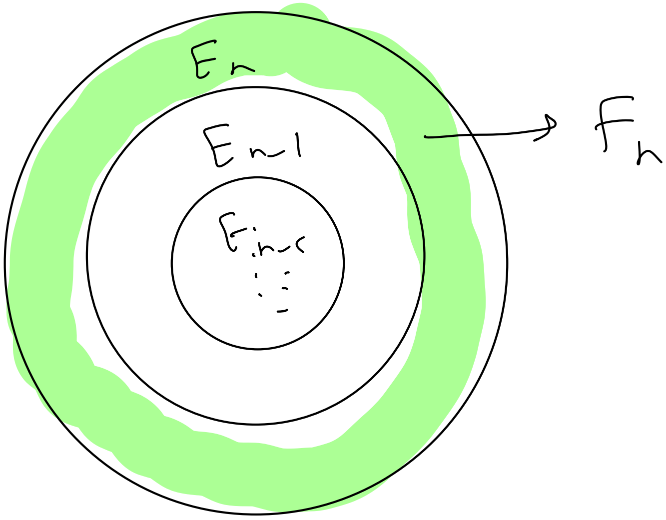
$$F_n = E_n \underbrace{\left[\bigcup_{i=1}^{n-1} E_i\right]^c}_{} = E_n E_{n-1}^c \qquad n > 1$$

چون پیشامدها صعودی هستند برابر E_{n-1} می‌شود

A^c مجموعه متمم A و AB همان $A \cap B$ است

در اصل F_n شامل نقاطی از E_n است که در هیچ یک از E_i $(i<n)$ ها وجود ندارد و واضحاً مشخص است که به ازای $F_i F_j = \emptyset$ $(i \neq j)$ یعنی F_n ها دو به دو ناسازگار هستند به طوری که برای هر $n \geq 1$:

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \quad \text{و} \quad \bigcup_{i=1}^{n} F_i = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$$



$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = P\left(\lim_{n\to\infty} \bigcup_{i=1}^{n} E_i\right)$$

$$= P\left(\lim_{n\to\infty} E_n\right)$$

چون دنباله‌ها صعودی است :

$$\bigcup_{i=1}^{n} E_i = E_n$$

$$P\left(\lim_{n\to\infty} E_n\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} P(F_i)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} P(F_i)$$

$$= \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{i=1}^{n} F_i\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} P(E_n)$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} P(E_n) = P\left(\lim_{n\to\infty} E_n\right)$$

حال اگر E_n دنباله نزولی باشد آنگاه E_n^c یک دنباله صعودی است بنابراین:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i^c\right) = \lim_{n\to\infty} P(E_n^c)$$ طبق رابطه قبل که اثبات کردیم

اما چون $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i^c = \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i\right)^c$ نتیجه می‌دهد:

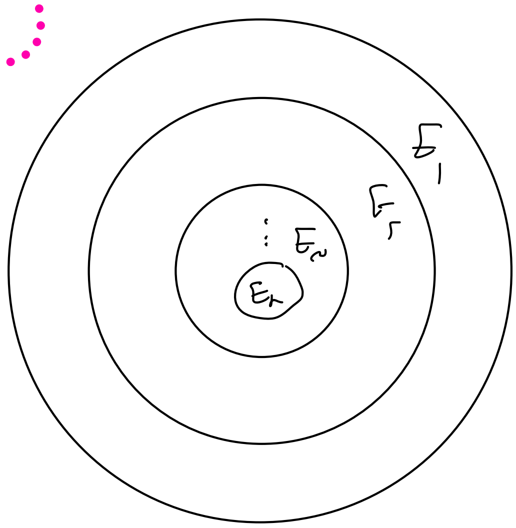
$$P\left(\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i\right)^c\right) = \lim_{n\to\infty} P(E_n^c)$$

$$1 - P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \lim_{n\to\infty}\left[1 - P(E_n)\right] = 1 - \lim_{n\to\infty} P(E_n)$$

$$\Rightarrow \boxed{P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \lim_{n\to\infty} P(E_n)}$$

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i = \lim_{n\to\infty} \bigcap_{i=1}^{n} E_i = \lim_{n\to\infty} E_n$$

چون E_n نزولی است



$$\Rightarrow \boxed{P\left(\lim_{n\to\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(E_n)}$$

هم برای E_n نزولی هم صعودی اثبات شد.

ب) فرض: $\sum_{n=1}^{\infty} P(C_{n+1}-C_n) < \infty$ $\qquad \lim_{n\to\infty} P(C_n)=0$

ادعا می‌کنیم که: $\exists n_0 \ \forall n>n_0: \ P(C_{n+1}-C_n)=0$

اثبات:

2) If $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ is a sequence of non-negative real numbers such that $\sum_{i=1}^{\infty} x_i < \infty$, then $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=n}^{\infty} x_i = 0$.

The second fact is proven as follows: For all positive integers n we have:

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i = \sum_{i=1}^{n-1} x_i + \sum_{i=n}^{\infty} x_i$$

Taking a limit as $n \to \infty$ gives:

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i = \sum_{i=1}^{\infty} x_i + \lim_{n\to\infty}\sum_{i=n}^{\infty} x_i \tag{5}$$

Now, the equation $\infty = \infty + y$ is true for all $y \in \mathbb{R}$ (we cannot cancel ∞ from both sides to conclude $y = 0$). However, if $\sum_{i=1}^{\infty} x_i < \infty$, we cancel it from both sides of (5) to conclude:

$$0 = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=n}^{\infty} x_i$$

یعنی $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=n}^{\infty} P(C_{n+1}-C_n) = 0$ که یعنی از یک جایی به بعد جمع دنباله‌ها صفر است که چون طبق اصول احتمال $P \geq 0$ پس از یک جایی به بعد خود دنباله‌های $C_{n+1}-C_n$ صفر می‌شوند این ادعا را ★ می‌نامیم.

B_n را تعریف می‌کنیم: $B_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} C_k$

$$P\left(\bigcap_{n=0}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} C_k\right) = P\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} B_n\right)$$

تعریف کنید: $A_i = \bigcap_{n=0}^{i} B_n$ و $= P\left(\lim_{i\to\infty}\bigcap_{n=0}^{i} B_n\right)$

A_i یک دنباله نزولی است.

$$= P\left(\lim_{i\to\infty} A_i\right)$$

که طبق بخش الف:

$$= \lim_{i\to\infty} P(A_i)$$

$$= \lim_{i\to\infty} P\left(\bigcap_{n=0}^{i} B_n\right) \quad \text{و} \quad B_0 \subset B_1 \subset B_2 \subset \dots \subset B_i$$

$$= \lim_{i\to\infty} P(B_i)$$

$$= \lim_{i\to\infty} P\left(\bigcup_{k=i}^{\infty} C_k\right)$$

D_J را تعریف کنیم: $D_J = \bigcup_{k=i}^{J} C_k$ و $\bigcup_{k=i}^{\infty} C_k = \lim_{J\to\infty}\left(\bigcup_{k=1}^{J} C_k\right)$

D_J دنباله افزایشی است

$$\Rightarrow \bigcup_{k=i}^{\infty} C_k = \lim_{J\to\infty} D_J$$

$$\lim_{i\to\infty} P\left(\bigcup_{k=i}^{\infty} C_k\right) = \lim_{i\to\infty} P\left(\lim_{J\to\infty} D_J\right)$$

D_J صعودی است پس:

$$= \lim_{i\to\infty} \lim_{J\to\infty} P(D_J)$$

$$= \lim_{i\to\infty} \lim_{J\to\infty} P\left(\bigcup_{k=i}^{J} C_k \right)$$

$$\bigcup_{k=i}^{J} C_k = C_i \cup (C_{i+1} - C_i) \cup (C_{i+2} - C_{i+1}) \cup \dots \cup (C_J - C_{J-1})$$

$$\to P\left(\bigcup_{k=i}^{J} C_k \right) \leq P(C_i) + \sum_{k=i}^{J-1} P(C_{k+1} - C_k)$$

طبق فرض صفر است

$$\Rightarrow \lim_{i\to\infty} \lim_{J\to\infty} P\left(\bigcup_{k=i}^{J} C_k \right) \leq \cancel{\overset{0}{\lim_{i\to\infty}} P(C_i)} + \cancel{\lim_{i\to\infty} \lim_{J\to\infty} \sum_{k=i}^{J-1} P}(C_{k+1} - C_k)$$

طبق $\star$ برابر صفر است

$$\Rightarrow \lim_{i\to\infty} \lim_{J\to\infty} P\left(\bigcup_{k=i}^{J} C_k \right) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{P\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} C_k \right) = 0}$$

۶) می خواهیم $\frac{n(n+1)}{2} = \binom{n+1}{2}$ عدد را به شکل

$$\begin{array}{c}1\\2\\3\\4\\\vdots\\n\end{array}$$

عدد بنویسیم

به طوری که $m_1 < \dots < m_{n-1} < m_n$

مجموعه اعداد A را درنظر بگیرید که $\binom{n+1}{2}$ عضو دارد. بزرگترین عدد در A قطعاً در سطر n ام حضور دارد. برای شمردن حالت های ممکن درنظرم T_n بزرگترین عدد مجموعه را برمی داریم $n-1$ عدد دلخواه دیگر نیز برمی داریم به $n!$ حالت این اعداد را در سطر n ام قرار می دهیم سپس T_{n-1} را حل می کنیم:

$$T_n = \binom{\binom{n+1}{2} - 1}{n-1} \times n! \times T_{(n-1)}$$

انتخاب $n-1$ عضو دیگر به جز بزرگترین عضو A

ادامه سوال حل یک تابع بازگشتی است:

$$T_n = \binom{\frac{n^2+n-2}{2}}{n-1} \times n! \times T_{(n-1)}$$

$$T_n = \frac{\left(\frac{n^2+n-2}{2}\right)!}{(n-1)! \times \left(\frac{n^2-n}{2}\right)!} \times n! \times T_{(n-1)}$$

$$T_n = \frac{\left(\frac{(n+2)(n-1)}{2}\right)! \times n \times T_{(n-1)}}{\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)!}$$

فرض کنید $g_{(n)} = \frac{\left(\frac{(n+2)(n-1)}{2}\right)! \times n}{\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)!}$ و $T_n = g_n \times T_{n-1}$

$$T_n = g_n \times g_{n-1} \times T_{n-2}$$

$$T_n = g_n \times g_{n-1} \times g_{n-2} \times T_{n-3}$$

$$\vdots$$

$T_n = g_n \times g_{n-1} \times \cdots \times g_{(2)} \times T_{(1)}$ و $T_1 \rightarrow$ حالت چیدن یک عدد که می‌شود یک

$$\Rightarrow T_n = g_n \times g_{n-1} \times \cdots \times g_{(2)}$$

$$g_{(٢)} = \frac{٢! \times ٢}{١!}$$

$$g_{(٣)} = \frac{٥! \times ٣}{٣!}$$

$$g_{(٤)} = \frac{٩! \times ٤}{٦!}$$

$$g_{(٥)} = \frac{١٤! \times ٥}{١٠!}$$

$$\vdots$$

$$g_{(n)} = \frac{\left(\frac{(n+٢)(n-١)}{٢}\right)! \times n}{\left(\frac{n(n-١)}{٢}\right)!}$$

$$g_{٢} \times g_{٣} \times g_{٤} \times \cdots \cdots \times g_{n} = ١ \times ٢ \times ٣ \times ٤ \times \cdots \times n \times$$

$$\times \frac{\cancel{٢!}}{١!} \times \frac{\cancel{٥!}}{\cancel{٣!}} \times \frac{\cancel{٩!}}{\cancel{٦!}} \times \frac{\cancel{١٤!}}{\cancel{١٠!}} \times \frac{\cancel{٢٠!}}{\cancel{١٥!}} \times \cdots \times \frac{\left(\frac{(n+٢)(n-١)}{٢}\right)!}{\cancel{\left(\frac{n(n-١)}{٢}\right)!}}$$

$$٣ \quad ٦ \quad ١٠ \quad ١٥ \quad \frac{n(n-١)}{٢}$$

$$۱ \times ۳ \times ۶ \times ۱۰ \times ۱۵ \times \cdots \times \frac{n(n-۱)}{۲}$$

$$= \binom{۲}{۲} \times \binom{۳}{۲}\binom{۴}{۲} \times \binom{۵}{۲} \times \binom{۶}{۲} \times \cdots \times \binom{n}{۲}$$

$$= \frac{۱ \times ۲}{۲} \times \frac{۲ \times ۳}{۲} \times \frac{۳ \times ۴}{۲} \times \cdots \times \frac{(n-۱) \times n}{۲} = \frac{(n-۱)! \times n!}{۲^{n-۱}}$$

$$\Rightarrow g_۲ \times g_۳ \times g_۴ \times \cdots \times g_n = n! \times \frac{\left(\frac{n^۲+n-۲}{۲}\right)!}{\frac{(n-۱)!\, n!}{۲^{n-۱}}}$$

$$= \frac{۲^{n-۱} \times \left(\frac{n^۲+n}{۲} - ۱\right)!}{(n-۱)!}$$

$$\Rightarrow T_n = \frac{۲^{n-۱} \times \left(\frac{n^۲+n}{۲} - ۱\right)!}{(n-۱)!}$$

حالت کلی چیدن: $\left(\frac{n(n+۱)}{۲}\right)!$

$$\Rightarrow P_{(T_n)} = \frac{\frac{۲^{n-۱} \times \left(\frac{n^۲+n}{۲} - ۱\right)!}{(n-۱)!}}{\left(\frac{n^۲+n}{۲}\right)!} = \frac{۲^{n-۱}}{(n-۱)!\left(\frac{n^۲+n}{۲}\right)}$$

$$P(T_n) = \frac{2^n}{(n+1)!}$$

۷) اثبات می‌کنیم که:

$$\sum_i N_i 2^{n-i} \le 2^n$$

n را برابر با طول بزرگترین رشته ممکن درنظر بگیرید.

2^n می‌شود کل تعداد رشته‌های ورودی ممکن به طول n

$N_i 2^{n-i}$ معادل رشته‌ای است که i بیت اولش از N_i آمده باشد

n-i بیت بعدی را به دلخواه 0 یا 1 قرار داده‌ایم

حال ادعا می‌کنیم: $i \neq j \Rightarrow N_i 2^{n-i} \neq N_j 2^{n-j}$

اثبات: فرض کنید $N_i 2^{n-i} = N_j 2^{n-j}$

if $i < j$:
N_i پیشوند N_j است که نقض کننده فرض سوال است

if $i > j$:
N_j پیشوند N_i است که نقض کننده فرض سوال است

if $i = j$:
$N_i = N_j$ که نقض کننده فرض است

پس $\sum N_i 2^{n-i}$ می‌شود کل دنباله‌های به طول n که هیچ ۲ تای از آنها یکی نیستند که واضحاً یعنی $\sum_i N_i 2^{n-i} \le 2^n$ پس ادعا را اثبات کردیم

$$\sum_i N_i 2^{n-i} \le 2^n$$

در $$\boxed{\sum_i \frac{N_i}{2^i} \le 1}$$