محمد پیام تابنی   ۴۰۰۱۰۴۸۵۷   تمرین دوم آمار

۱ـ

$$f_{(x)} = c e^{-|x|} \qquad -\infty < x < \infty$$

الف)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{(x)}\, dx = 1 \Rightarrow \int_{-\infty}^{0} c e^{x} + \int_{0}^{\infty} c e^{-x} = 1$$

$$\Rightarrow c e^{x} \Big|_{-\infty}^{0} + -c e^{-x} \Big|_{0}^{\infty} = 1$$

$$\Rightarrow c + c = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{2}$$

ب)

$$E_{(x^{2n+1})} = \int_{-\infty}^{\infty} x^{2n+1} \times f_{(x)}\, dx$$

$$= c\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{x^{2n+1} e^{-|x|}}_{g_{(x)}}\, dx = c\int_{-\infty}^{\infty} g_{(x)}\, dx$$

$$g_{(x)} = -g_{(-x)} \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} g_{(x)}\, dx = 0$$

$$\Rightarrow E_{(x^{2n+1})} = 0$$

$$E(X^{2n}) = c\int_{-\infty}^{\infty} z^{2n} e^{-|z|}\, dz$$

$$= c \times \left(\int_{-\infty}^{0} \underbrace{z^{2n} e^{z}}_{g(z)}\, dz + \int_{0}^{\infty} \underbrace{z^{2n} e^{-z}}_{h(z)}\, dz \right)$$

$$g(z) = h(-z) \Rightarrow \int_{-\infty}^{0} g(z)\, dz = \int_{0}^{\infty} h(z)\, dz$$

$$\Rightarrow E(X^{2n}) = 2c \times \int_{-\infty}^{0} z^{2n} e^{z}\, dz \quad , \quad c = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow E(X^{2n}) = \int_{-\infty}^{0} z^{2n} e^{z}\, dz$$

انتگرال جزء به جزء

$$= \underbrace{\underbrace{z^{2n} e^{z}}_{T(z)} \Big|_{-\infty}^{0}}_{=0} - \int_{-\infty}^{0} 2n\, z^{2n-1} e^{z}\, dz$$

$T(0) = 0$

$\lim_{z \to -\infty} T(z) = 0$

$$\Rightarrow E(X^{2n}) = -2n \int_{-\infty}^{0} z^{2n-1} e^{z}\, dz$$

$$\Rightarrow E_{(x^{2n})} = -2n\left(\underbrace{z^{2n-1} e^{z} \Big|_{-\infty}^{0}}_{=0} - \int_{-\infty}^{0} (2n-1)\, z^{2n-2} e^{z}\, dz \right)$$

$$\Rightarrow E_{(x^{2n})} = (2n)(2n-1) \int_{-\infty}^{0} z^{2n-2} e^{z}\, dz$$

$$E_{(x^{2n-2})} = \int_{-\infty}^{0} z^{2n-2} e^{z}\, dz \leftarrow \boxed{E_{(x^{2n})} = \int_{-\infty}^{0} z^{2n} e^{z}\, dz} ,$$

$$\Rightarrow E_{(x^{2n})} = 2n(2n-1)\, E\left(x^{2n-2}\right)$$

$$E_{(x^{2n-2})} = (2n-2)(2n-3)\, E_{(x^{2n-4})}$$

$$\vdots$$

$$E_{(x^{2})} = 2 \times 1 \times \underbrace{E_{(1)}}_{=1}$$

$$\Rightarrow E_{(x^{2n})} = 2n \times (2n-1) \times (2n-2) \times \dots \times 2 \times 1$$

$$\Rightarrow E_{(x^{2n})} = (2n)!$$

۲) متغیر تصادفی X را تعداد بلیط های خریداری شده برای برنده شدن باشد

$0 \leq X \leq m$

$m = 1,000,000$

n تا از m تا بلیط برنده است

$n = 100$

$$P_{(X=0)} = 0$$

$$P_{(X=1)} = 1 - \frac{\binom{m-n}{1}}{\binom{m}{1}}$$

$\vdots$

$$P_{(X=i)} = 1 - \frac{\binom{m-n}{i}}{\binom{m}{i}}$$

$\vdots$

$$P_{(X=m-n)} = 1 - \frac{1}{\binom{m}{m-n}}$$

$\vdots$

$$P_{(X=m-n+1)} = 1$$

$\vdots$

$$P_{(X=m)} = 1$$

الف)

$$P_{(X=100)} = 1 - \frac{\binom{10^6-100}{100}}{\binom{10^6}{100}} \simeq 1 - 0/9900488۴$$

$\simeq 0/01 \rightarrow 1\%$

ب)

$$P_{(X=2)} \geqslant \frac{95}{100} \Rightarrow 1 - \frac{\binom{m-n}{2}}{\binom{m}{2}} \geqslant \frac{19}{20}$$

$$\Rightarrow \frac{\binom{m-n}{2}}{\binom{m}{2}} \leq \frac{1}{20} \Rightarrow \frac{\binom{10^6-100}{x}}{\binom{10^6}{2}} \leq \frac{1}{20}$$

برای محاسبه ۲ از کد زیر استفاده می‌کنیم:

```
x = 0
Probability_x = 0
while Probability_x < (19 / 20):
    x += 1
    Probability_x = 1 - ncr(1000000 - 100, x) / ncr(1000000, x)
    print(x, Probability_x)
print(x - 1)
```

x	$P_{(x)}$
29503	0.9499557290534529
29504	0.9499608856145703
29505	0.9499660416496684
29506	0.9499711971588003
29507	0.9499763521420193
29508	0.9499815065993783
29509	0.9499866605309306
29510	0.9499918139367293
29511	0.9499969668168273
29512	0.9500021191712777

همانطور که دیدیم اگر $x \geq 29512$ باشد

احتمال برنده شدن بالای ۹۵٪ می‌شود

پس $\boxed{x \geq 29512}$

مورد الف و ب را به طور دقیق بدست آوردیم اما طبق صحبت دوستان در Quera

در این سوال احتمال برنده شدن هر بلیط که می‌گیریم ثابت است یعنی از تغییرات آن

صرف نظر شود پس می‌توان این سوال را یک توزیع هندسی دانست با

$P = \frac{100}{10^6} = 10^{-4}$ $\qquad P_{(x=k)} = (1-p)^{k-1} p$

در اصل وقتی بلیط ۵۰۰ را میخریم با وقتی که بلیط اول را میخریم احتمال برنده بودن

یکسان نیست اما در این سوال چون معقول و ایده‌آل است آن‌ها را از هم مستقل می‌گیریم و

احتمال هر بلیط را 10^{-4} می‌گیریم با این حال (این تقریب توزیع برای حل قسمت ج کاراست)

الف) احتمال برنده نشدن را حساب کنید: $(1-p)^{100}$

پس جواب می‌شود $1-(1-p)^{100}$

$$1-(1-p)^{100} = 1-(1-10^{-4})^{100}$$

$$= \sim 0/009950 \to \boxed{0/995\,\%}$$

→ جواب دقیق تر ۱٪ بود که خطای نسبتا کمی است

ب) یعنی چند تا بلیط بخریم تا با احتمال حداکثر ۵٪ بازنده باشیم:

$$(1-p)^k \leq \frac{1}{20} \Rightarrow (1-10^{-6})^k \leq \frac{1}{20}$$

$$\Rightarrow k \geq ۲۹۹۵۷$$

پس اگر حداقل ۲۹۹۵۷ بلیط بخرم به احتمال بالای ۹۵٪ برنده‌ام

مقدار دقیق که بود ۲۹۵۷۲ نیز بیاریم این عدد نزدیک است پس اینکه این سوال را توزیع هندسی بگیریم تقریب خوبی است چون بلیط خریدن را می‌توان تقریبا مستقل فرض کرد

ج)

$$P\{X=k\} = (1-p)^{k-1} p$$

$$E[X] = \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1} p = \sum_{k=1}^{\infty} (k-1+1)(1-p)^{k-1} p$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (k-1)(1-p)^{k-1} p + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1} p}_{= p\sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^{k-1} = \frac{p}{1-(1-p)} = \frac{p}{p} = 1}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (k-1)(1-p)^{k-1} p + 1 = (1-p)\sum_{k=1}^{\infty} (k-1)(1-p)^{k-2} p + 1$$

$$= (1-p)\underbrace{\sum_{j=1}^{\infty} j(1-p)^{j-1}p}_{E[x_i]} + 1 \Rightarrow E[x] = (1-p)E_{x_i} + 1$$

$$\Rightarrow \boxed{E[x] = \frac{1}{p}}$$

$$E_x = \frac{1}{p} \quad , \quad p = 10^{-4} \Rightarrow E[x] = 10^4 = 10,000$$

یعنی با تقریبی که زدیم با خرید 10^4 بلیط می‌توان برنده مسابقه بود

اگر هم به طور دقیق حساب کنیم با خرید 10^4 بلیط با احتمال ۶۳/۲٪ ما برنده خواهیم بود.

دقت کنید اگر تقریب نمی‌زدیم بخش ج قابل حل به سادگی نبود.

۳)

$$X \sim N(۳,۹) \rightarrow \mu = ۳ \,,\, \sigma^{۲} = ۹$$

$$Z = \frac{X-۳}{۳} \rightarrow \mu = ۰ \,,\, \sigma^{۲} = ۱ \rightarrow Z \sim N(۰,۱)$$

الف)

$$P(X > ۲) = ? \qquad X = ۳Z + ۳$$

$$\Rightarrow = P(۳Z + ۳ > ۲) = P\left(Z > -\frac{۱}{۳}\right)$$

$$= ۱ - P\left(Z \leq -\frac{۱}{۳}\right) = ۱ - \Phi\left(-\frac{۱}{۳}\right) = \Phi\left(\frac{۱}{۳}\right) \sim ۰/۶۳$$

ب)

$$P(-۱ < Y < ۳) = P(-۱ < ۵ - X < ۳)$$

$$= P(۲ < X < ۶) = P(۲ < ۳Z + ۳ < ۶)$$

$$= P\left(-\frac{۱}{۳} < Z < ۱\right) = \Phi(۱) - \Phi\left(-\frac{۱}{۳}\right)$$

$$\sim ۰/۸۴ - ۰/۳۷ = ۰/۴۷$$

ج)

$$P(X > ۴ \mid Y < ۲)$$

$$= P(X > \varepsilon \mid X > \sigma)$$

$$= \frac{P(X > \varepsilon \cap X > \sigma)}{P(X > \sigma)} = \frac{P(X > \varepsilon)}{P(X > \sigma)}$$

$$= \frac{P(\sigma Z + \sigma > \varepsilon)}{P(\sigma Z + \sigma > \sigma)} = \frac{P\left(Z > \frac{1}{\sigma}\right)}{P(Z > 0)} = \frac{1 - \Phi\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{1 - \Phi(0)}$$

$$= \frac{\Phi\left(-\frac{1}{\sigma}\right)}{\frac{1}{2}} = 2\,\Phi\left(-\frac{1}{\sigma}\right) \sim 2\times \text{dev} = \sigma / \sqrt{\varepsilon}$$

۴) توزیع پوآسون با نرخ λ در واحد زمان :

$$P_{\{X=k\}} = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{k}}{k!}$$

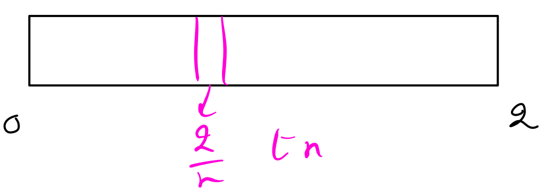
الف) واحد زمان ۲ برابر شده پس $\lambda' = 2\lambda \longrightarrow \boxed{\lambda' = 4}$

$$P_{(X\geq 3)} = 1-\left(f_X(0)+f_X(1)+f_X(2)\right)$$

$$\boxed{f_X(x) = \frac{e^{-4}\times 4^{x}}{x!}}$$

$$P_{(X\geq 3)} = 1-\left(e^{-4}+4e^{-4}+8e^{-4}\right) = 1-13e^{-4} \simeq ۰/۷۶۱۸۹$$

ب) از توزیع نمایی پیروی می‌کند که آن را اثبات می‌کنیم :



فرض کنید از زمان صفر تا x زلزله ای رخ نشده

$[0,x]$ را به n بازه به طول $\frac{x}{n}$ تقسیم کنید

تعداد متوسط رخداد زلزله در واحد زمان λ است پس

تعداد متوسط رخداد زلزله در x می‌شود λx و در بازه زمانی $\frac{x}{n}$ می‌شود $\frac{\lambda x}{n}$ زلزله

پس احتمال زلزله نیامدن می‌شود $\left(1-\frac{\lambda x}{n}\right)$ که در n بازه مستقل از هم اتفاق افتاده پس :

Y را فرض کنید زمان اولین زمین‌لرزه باشد :

$$P_{(Y>x)} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda x}{n}\right)^{n} = e^{-\lambda x}$$

$$\Rightarrow P_{(y \le x)} = 1 - e^{-\lambda x}$$

زلزله آمدن تا

زمان x

$$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x} \xrightarrow{\text{مشتق}} f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

$$\boxed{\lambda = 2} \Rightarrow \boxed{f_X(x) = 2e^{-2x}} \qquad \boxed{X \sim \exp(2)}$$

برای $x \geq 0$

$$X \sim \exp(\lambda) \to f_X(z) \begin{cases} \lambda e^{-\lambda z} & z \geq 0 \\ 0 & z < 0 \end{cases} , \quad F_X(z) = 1 - e^{-\lambda z}$$ (a

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} f_Y(z)\, dz = P(Y \leq y)$$

$$1 - F_Y(y) = \int_{y}^{\infty} f_Y(z)\, dz = P(Y > y)$$

$$, \quad Y = \min\left(X, \frac{\lambda}{r}\right)$$

$$\Rightarrow 1 - F_Y(y) = P\left(y < X \cap y < \frac{\lambda}{r}\right)$$

if $y \geq \frac{\lambda}{r} \Rightarrow 1 - F_Y(y) = 0 \longrightarrow \boxed{F_Y(y) = 1}$

if $y < \frac{\lambda}{r} \Rightarrow 1 - F_Y(y) = P(y < X) = 1 - P(y \geq X)$

$$= 1 - F_X(y)$$

$$\Rightarrow 1 - F_Y(y) = 1 - \left(1 - e^{-\lambda y}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{F_Y(y) = 1 - e^{-\lambda y}}$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 1 & y \geq \frac{\lambda}{r} \\ 1 - e^{-\lambda y} & y < \frac{\lambda}{r} \end{cases}$$

(۴)

تعداد بررسی‌های لازم برای خروج از حالت اول = X_1 $\quad 2^1 \quad$ حالت اول

تعداد بررسی‌های لازم برای خروج از حالت دوم = X_2 $\quad 2^2 \quad$ حالت دوم

$\vdots$

تعداد بررسی‌های لازم برای خروج از حالت n ام = X_n $\quad 2^n \quad$ حالت n ام

می‌دانیم اگر تعداد حالات بررسی برای شروع از یک و خروج از n = X برای این‌که از حالت اول خارج شویم

و از حالت دوم خارج شویم و ... و از حالت n ام خارج شویم یعنی:

$$X = X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_n$$

$$E[X] = E[X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_n]$$

ویژگی امید ریاضی

$$= E[X_1] + E[X_2] + \cdots + E[X_n]$$

X_i ها همگی یک توزیع هندسی با احتمال $p = \frac{1}{2^i}$ هستند

چون در هر مرحله مستقلاً از مرحله قبل مسیر انتخاب می‌شود تا زمانی که موفقیت حاصل شود

$$P\{X_i = k\} = (1-p)^{k-1} p$$

$$E[X_i] = \frac{1}{p}$$ → چون از این استفاده می‌کنیم آن را اثبات می‌کنیم:

$$E[X_i] = \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1} p = \sum_{k=1}^{\infty} (k-1+1)(1-p)^{k-1} p$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (k-1)(1-p)^{k-1} p + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1} p}_{= p\sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^{k-1} = \frac{p}{1-(1-p)} = \frac{p}{p} = 1}$$

اثبات: $\sum P_{[x_i = k]} = 1$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (k-1)(1-p)^{k-1} p + 1 = (1-p)\sum_{k=1}^{\infty} (k-1)(1-p)^{k-2} p + 1$$

$$= (1-p)\underbrace{\sum_{J=1}^{\infty} J(1-p)^{J-1} p}_{E[X_i]} + 1 \Rightarrow E[X_i] = (1-p)E_{X_i} + 1$$

$$\Rightarrow \boxed{E[X_i] = \frac{1}{p}}$$

پس:

$$E[X_i] = \frac{1}{\frac{1}{2^i}} = 2^i$$ → منطقی است یعنی اگر i متغیر داریم میانگین با 2^i بار بررسی مسیر درست پیدا می‌شود

$$\Rightarrow E[X] = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n$$

$$\Rightarrow \boxed{E[X] = 2^{n+1} - 2}$$

مشخصاً در این حل از حالت n ام هم خارج شویم، اگر منظور سوال این است که به

مرحله n ام برسیم ولی خارج نشویم جواب می‌شود $2^n - 2$.