تمرین ششم   محمد پیام تابش ٤٠٠١٠٤٨٦٧

١) حل با استفاده از توزیع نرمال
(که البته تو کوئرا گفتن توزیع T بزنیم
پس این نمره را کلاً ignore کنید)

$$x_i = 10, 8, 7, 5$$

$$\bar{x} = \frac{10+8+7+5}{4} = 7/5$$

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum (x_i-\bar{x})^2 = \frac{13}{3}$$

$$\frac{\bar{x}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$$

$$\rightarrow \mu : \left[\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n}} , \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n}}\right]$$

$$\mu : \left[7/5 - \frac{1/96 \times \sqrt{\frac{13}{3}}}{2} , 7/5 + \frac{1/96\sqrt{\frac{13}{3}}}{2}\right]$$

$$\boxed{\mu : [5/5 , 9/5]}$$

پس میانگین درس خوندن معمولی آدما روزانه بین ٥/٥ و ٩/٥ ساعت است
با احتمال $1-\alpha = 95\%$

ب)

H_0: ساده بوده → $\mu = 4$

H_1: ساده نبوده → $\mu \neq 4$

خب ۴ ساعت در بازه $[5.5, 9.5]$ نیست پس ساده بودن

امتحان را رد می‌کنیم.

حل درست با T-test:

$x_i = 10, 8, 7, 5$

$$\bar{x} = \frac{10+8+7+5}{4} = 7.5$$

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum (x_i - \bar{x})^2 = \frac{13}{3}$$

$$\frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \sim T_{(n-1)} \quad , \quad t^{(3)}_{\frac{1}{40}} \simeq 3.18$$

$$\rightarrow \mu : \left[\bar{x} - t^{(n-1)}_{\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} \, , \, \bar{x} + t^{(n-1)}_{\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} \right]$$

$$\mu : \left[7.5 - \frac{3.18 \times \sqrt{\frac{13}{3}}}{2} \, , \, 7.5 + \frac{3.18 \times \sqrt{\frac{13}{3}}}{2} \right]$$

$$\boxed{\mu : [\,۴/۱۹ \text{ و } ۱۰/۸\,]}$$

پس میانگین درس خوندن معتادان روزانه بین ~~۹ و ۵~~ ساعت است

۴/۱۹ و ۱۰/۸

با احتمال ۹۵٪ = $1-\alpha$

ب)

H_0: ساده بود ← $\mu = ۴$

H_1: ساده نبود ← $\mu \neq ۴$

خب ۴ ساعت در بازه [۴/۱۹ , ۱۰/۸] نیست پس ساده بودن امتحان را رد می‌کنیم.

۲) الف)

$$X_i = \begin{cases} 1 & p \\ 0 & 1-p \end{cases} \qquad E_{[X_i]} = p$$

$$X = \Sigma X_i \qquad Var_{[X_i]} = p(1-p)$$

$$Z = \frac{X - np}{\sqrt{n\,p(1-p)}} \sim N(0,1)$$ قضیه حد مرکزی

$$P\left(-Z_{\frac{\alpha}{۲}} \leq Z \leq Z_{\frac{\alpha}{۲}}\right) = 1-\alpha \qquad \alpha = \frac{1}{۲۰}$$

$$\rightarrow P\left(np - Z_{\frac{\alpha}{۲}}\sqrt{n\,p(1-p)} \leq X \leq np + Z_{\frac{\alpha}{۲}}\sqrt{n\,p(1-p)}\right) = 1-\alpha$$

$\rightarrow$ if $H_0: p = \frac{1}{۲}$ $\qquad \alpha = \frac{1}{۲۰}\,,\ Z_{\frac{1}{۴۰}} = ۱/۹۶$

$$\rightarrow P\left(\frac{n}{۲} - \frac{۱/۹۶\sqrt{n}}{۲} \leq X \leq \frac{n}{۲} + \frac{۱/۹۶\sqrt{n}}{۲}\right) = ۹۵\%$$

$n = ۸۱$

$$\rightarrow P\left(۴۰/۵ - ۸/۸۲ \leq X \leq ۴۰/۵ + ۸/۸۲\right) = ۹۵\%$$

پس اگر X بین (۳۱/۶۸ و ۴۹/۳۲) قرار بگیرد H_0 را قبول می‌کنیم

واگر خارج از آن باشد H_0 را رد و H_1 را قبول می‌کنیم

$x=27$ خارج از این بازه است پس فرض سالم بودن سکه را رد می‌کنیم.

ب) از الف داریم:

$$P\left(\frac{n}{2}-\frac{1/96\sqrt{n}}{2}\leq x\leq \frac{n}{2}+\frac{1/96\sqrt{n}}{2}\right)=95\%$$

$$P\left(8-1/96\times 2\leq x\leq 8+1/96\times 2\right)=95\%$$

پس اگر H_0 برقرار باشد به احتمال ۹۵٪ x در بازه:

$[4/08\,,\,11/92]$ قرار می‌گیرد در واقع اگر k در بازه مورد

نظر باشد H_0 را رد نمی‌کنیم و اگر خارج آن باشد H_0 را رد می‌کنیم

$$k_1=4/08\ ,\ k_2=11/92$$

البته واضح تعداد شیر آمدن عدد صحیح است پس

$$\boxed{5\leq k\leq 11}$$

ج)

الف) $\frac{۷}{۱۰} \times ۵ = ۳/۵$

$H_0 : \mu \geq ۳/۵$

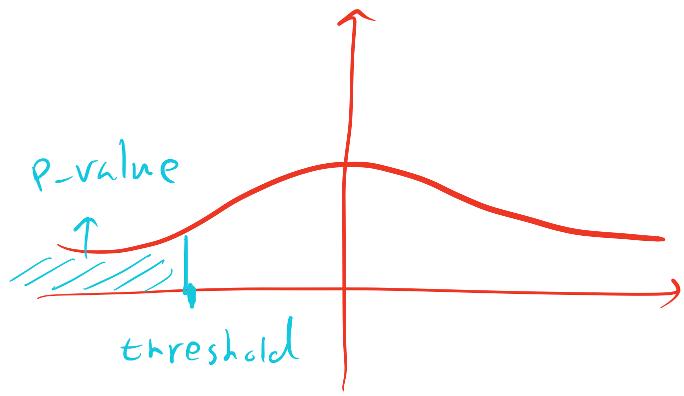
$H_1 : \mu < ۳/۵$

$\mu_0 = ۳/۵$

ب)

$$\bar{x} = \frac{۱۴۰ + ۲۰۰ + ۹۰۰ + ۱۲۸۰ + ۷۰۰}{۱۰۰۰} = ۳/۲۲$$

$$W = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$



$$s^2 = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 \right) = ۱/۴۹$$

$$\rightarrow W = \frac{۳/۲۲ - ۳/۵}{۰/۰۳۸۶۴} = -۷/۲۴$$

$$W \sim T_{(999)}$$

$$\text{P-value} = P(t_{(n-1)} \leq W) = \int_{-\infty}^{-۷/۲۴} f_{t_{(n-1)}}(t)\, dt$$

$$= ۴/۴۷ \times ۱۰^{-۱۳}$$

ج

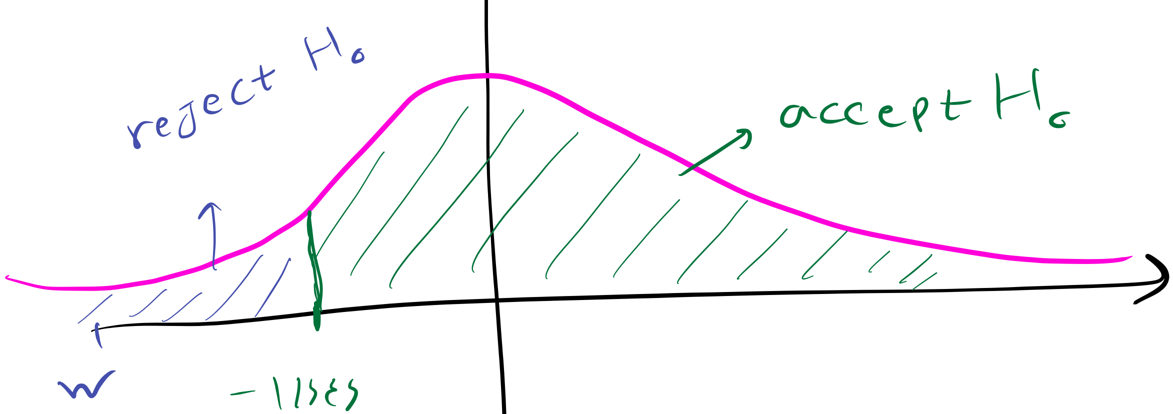
$$t_{(n-1)\,\alpha} = t_{(999)\,\frac{1}{20}} = ۱/۶۴۵$$

if $-t < w \rightarrow$ accept H_0

if $-t > w \rightarrow$ reject H_0

$-۱/۶۴۵ > -۷/۲۰ \rightarrow$ reject H_0

ادعای استاد دروغ است



البته به خاطر P_valve بزرگی ترطرفی

می‌شود این H_0 را رد کرد.

(۴

$X \sim bern(p)$ $\mu_0 = ۰/۱$

$\bar{X} = \dfrac{x_1 + \cdots + x_۵}{۵}$

$H_0: \mu = \mu_0$

$H_1: \mu \neq \mu_0$

(الف

$P(\text{reject } H_0 \mid H_0) =$

$P\left(\bar{X} > \frac{۲}{۱۰} \mid \mu = \frac{۱}{۱۰}\right) =$

$P = \left(x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ + x_۵ > ۱ \mid \mu = \frac{۱}{۱۰}\right)$

$P(\Sigma x_i = ۰) = (۱-\mu)^۵$, $P(\Sigma x_i = ۱) = ۵\mu(۱-\mu)^۴$

$\rightarrow P(\text{reject } H_0 \mid H_0) = ۱ - (۱-\mu)^۵ - ۵\mu(۱-\mu)^۴ \mid \mu = \frac{۱}{۱۰}$

$= ۱ - \left(\frac{۹}{۱۰}\right)^۵ - \frac{۱}{۲}\left(\frac{۹}{۱۰}\right)^۴ = ۰/۰۸۱۴۶$

$\rightarrow \boxed{P(\text{reject } H_0 \mid H_0) = ۰/۰۸۱۴۶ = \alpha}$

ب)

$$P(\text{reject } H_0 \mid \mu = \tfrac{2}{10})$$

$$= 1 - \left(\frac{8}{10}\right)^5 - \left(\frac{8}{10}\right)^4 = \boxed{0/26272}$$

ج)

equal sample size and variance so:

$$\text{Let } t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{S_1^2 + S_2^2}{n}}} \qquad t \sim T_{(2n-2)}$$

H_0: نمرات ترم مجازی و حضوری تفاوتی ندارد $\rightarrow$ μ_1 و μ_2 به هم نزدیکند

H_1: نمرات ترم مجازی و حضوری تفاوت ماهیتی دارد $\rightarrow$ μ_1, μ_2 اختلاف زیادی دارند

اگر t از حد معیاری ($t_{(2n-2)}^{\frac{\alpha}{2}}$) بیشتر شود یعنی $\mu_2 > \mu_1$ و

اگر t از حد معیاری ($-t_{(2n-2)}^{\frac{\alpha}{2}}$) کمتر شود یعنی $\mu_2 < \mu_1$ که

این نواحی باید H_0 را رد کرد پس این آزمون ۲ طرفه است

$X_1 = \{۱۳, ۱۸, ۱۵, ۱۴, ۱۵, ۱۲, ۱۴, ۱۷\}$

$\overline{X}_1 = ۱۴/۷۵$

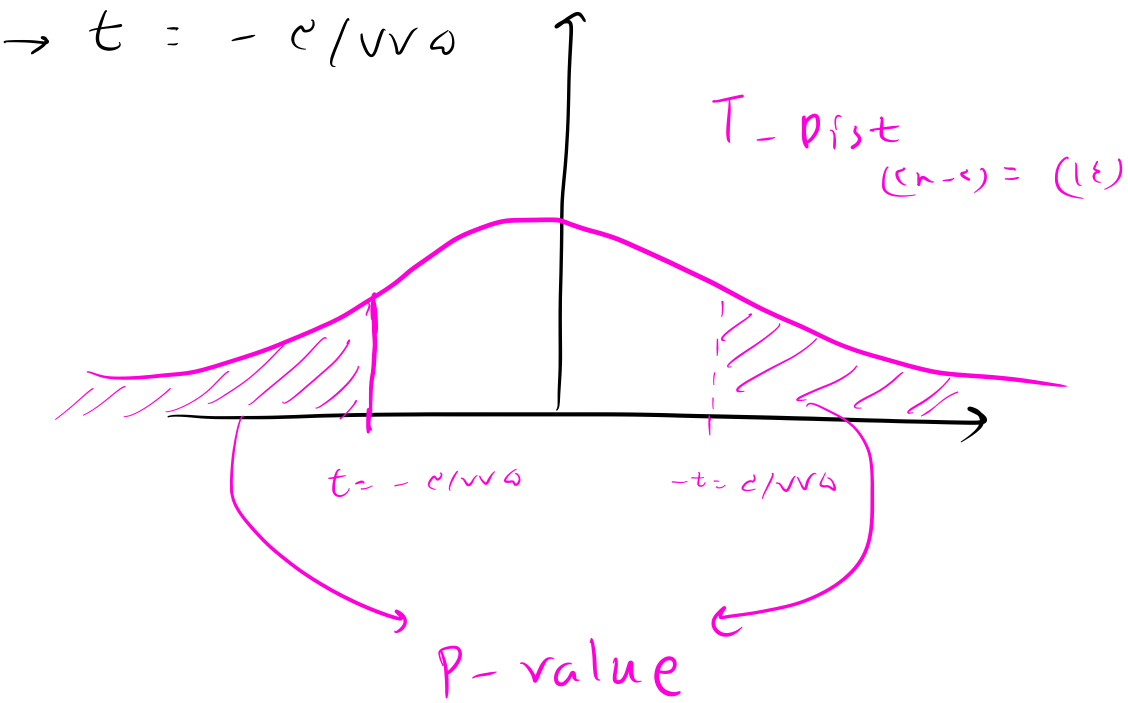
$S_1^2 = ۳/۹۲۸$

$X_2 = \{۱۸, ۲۰, ۱۷, ۱۹, ۱۸, ۱۶, ۱۸, ۱۷\}$

$\overline{X}_2 = ۱۷/۸۷۵$

$S_2^2 = ۱/۵۵۳۶$

$\rightarrow t = -۳/۷۷۵$



$$P\text{-value} = ۲ \times \underbrace{pt(-۳/۷۷۵, ۱۴)}_{\text{R کد}} = ۰/۰۰۲۰۵$$

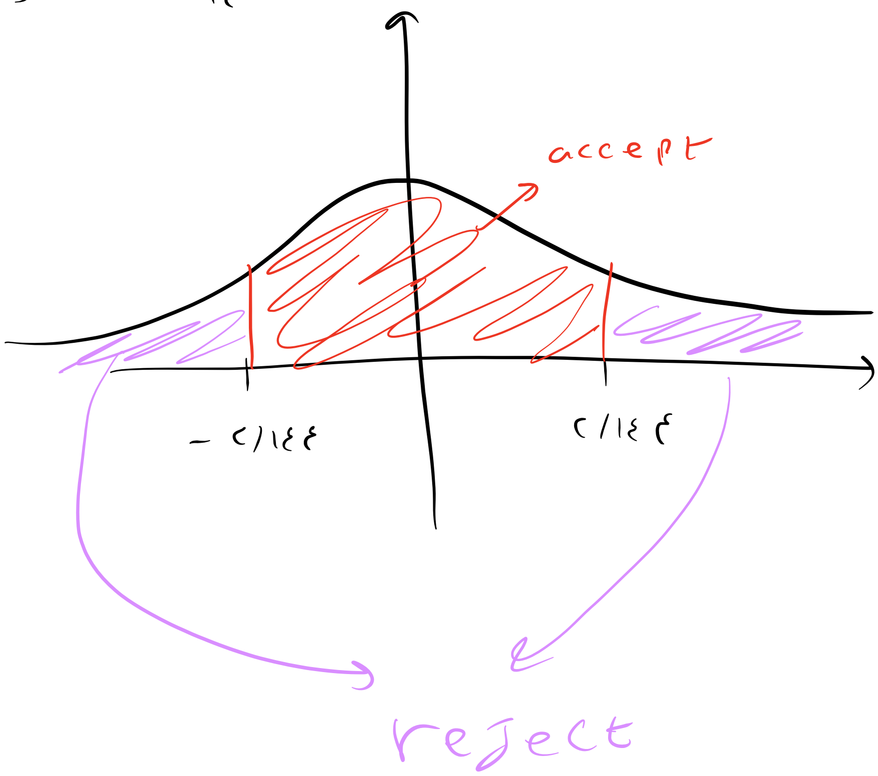
پس $p\_value = ۰/۰۰۲۰۵$ که مقدار بسیار کمی است .

p value < ۰/۰۲۵ → **Reject H_0**

یا راه دیگر :

$t_{(14)}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = t_{14}\left(\frac{1}{40}\right) = ۲/۱۴۴$

یعنی :



و خب t = -۳/۷۷۵ در بازه reject قرار دارد .

۴) از chi-square استفاده می‌کنیم :

	۳	۲	۱	۰
observed	۳	۱۵	۳۵	۴۷
expected	۰/۴۶۳	۶/۹۴	۳۴/۷۲	۵۷/۸۷

value probability

$$X \begin{cases} ۰ & \left(\frac{۵}{۶}\right)^{۳} \\ ۱ & ۳ \times \frac{۱}{۶}\left(\frac{۵}{۶}\right)^{۲} \\ ۲ & ۳ \times \frac{۱}{۶}^{۲} \frac{۵}{۶} \\ ۳ & \left(\frac{۱}{۶}\right)^{۳} \end{cases}$$

$$۱۰۰ \times \left(\frac{۵}{۶}\right)^{۳} = ۵۷/۸۷$$

$$۱۰۰ \times \frac{۵^{۲}}{۶^{۳}} \times ۳ = ۳۴/۷۲$$

$$۱۰۰ \times ۳ \times \frac{۱}{۶}^{۲} \times \frac{۵}{۶} = ۶/۹۴$$

$$۱۰۰ \times \frac{۱}{۶}^{۳} = ۰/۴۶۳$$

$$X^{۲} = \sum_{i=۰}^{۳} \frac{\left(\text{observed}_i - E[x_i]\right)^{۲}}{E[x_i]} = ۲۵/۳$$

$$X^{۲} \sim \chi^{۲}_{(۳)}$$

$$\rightarrow \text{P-value} = ۱ - \text{CDF}_{\chi^{۲}(۳)}(۲۵/۳) = ۱/۳۵ \times ۱۰^{-۵}$$

که p-value خیلی کمی است پس فرض عادلانه بودن رد می‌شود.