

ÜNİTE - III

KOORDİNAT DÜZLEMİ - DOĞRU VE PARABOL DENKLEMİ

ARA SINAV ÇIKABİLECEK SORU ADEDİ: 3-4 Sorudur

FINAL/BÜTÜNLEME ÇIKABİLECEK SORU ADEDİ: 1-2 Sorudur

ÜNİTE İÇERİĞİ

Bu ünite de sıralı ikili, kartezyen çarpım, dik koordinat düzlemi, grafik bilgisi, grafikler; doğru ve parabol ile I.ve II. Dereceden bir ve iki bilinmeyenli eşitsizlikler ve grafikleri öğreneceksiniz.

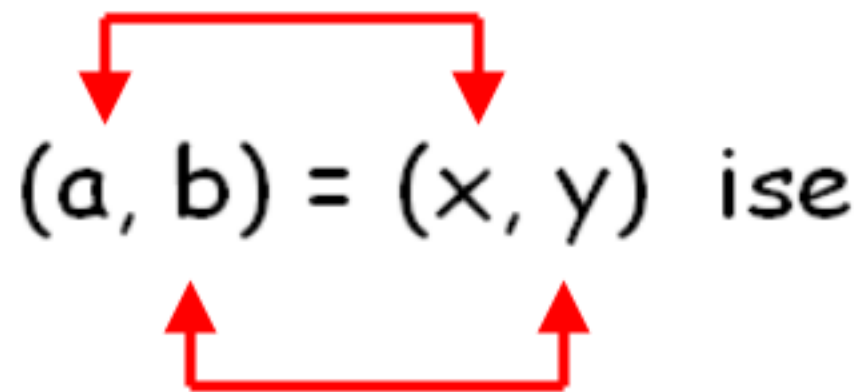
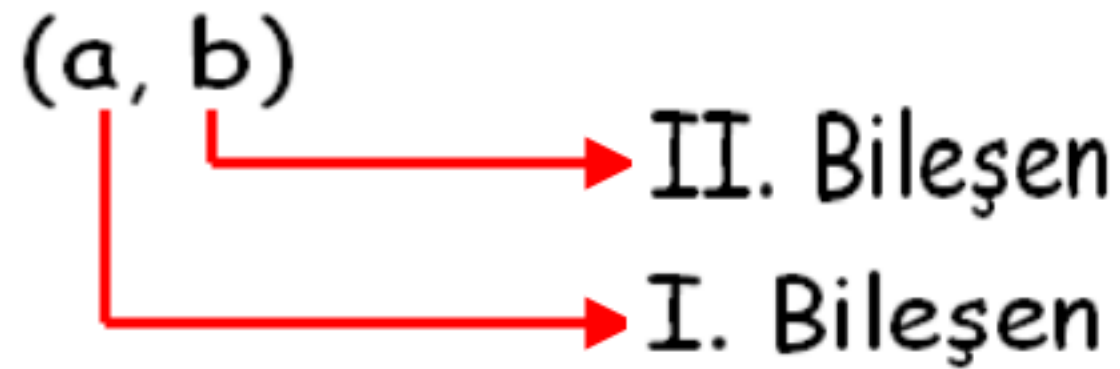
SIRALI İKİLİ

İki nesnenin belli bir öncelik sırasına göre düzenlenip tek bir nesne gibi düşünülmesine, elde edilen yeni nesneye **Sıralı İkili** denir.

$a \in R$ ve $b \in R$ olmak üzere,

$$(a, b) \neq (b, a)$$

(a, b) sıralı ikilidir



$$a = x \quad \text{ve} \quad b = y$$

$(x, y) = (3, 4)$ ise $x = 3$ ve $y = 4$ 'tür.

$(2x - 1, y + 5) = (7, 5)$ ise $(x, y) = (4, 0)$

$$2x - 1 = 7 \quad \text{ve} \quad y + 5 = 5$$

$$2x = 7 + 1 \quad y = 5 - 5$$

$$2x = 8 \quad y = 0$$

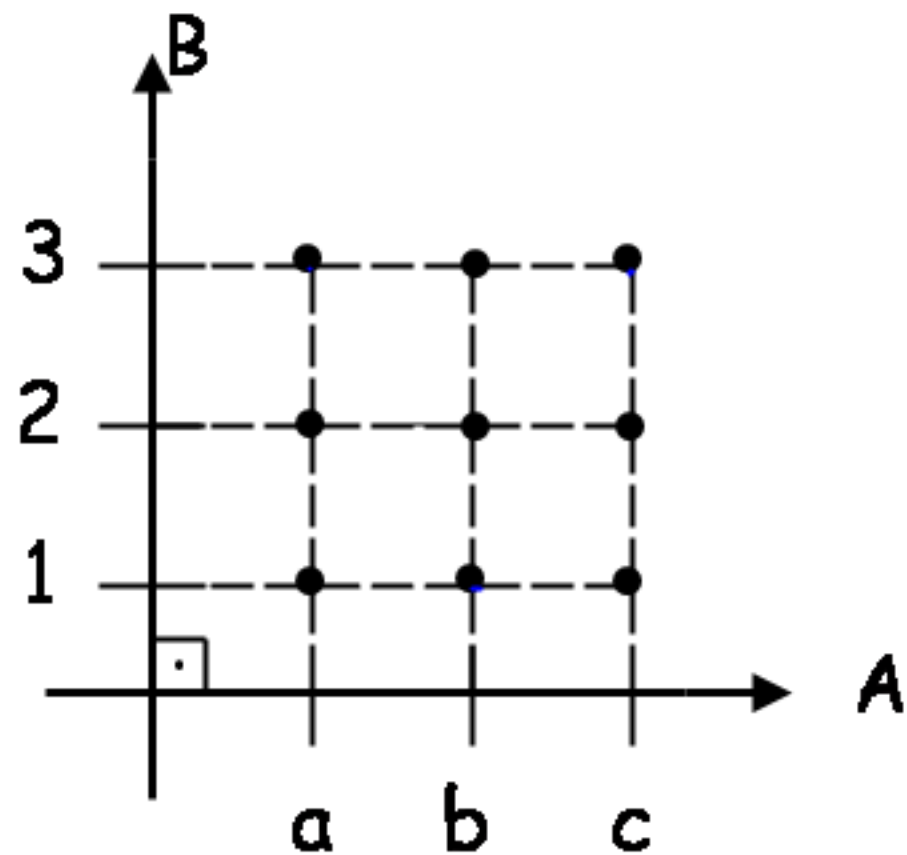
$$x = 4$$

KARTEZYEN ÇARPIM

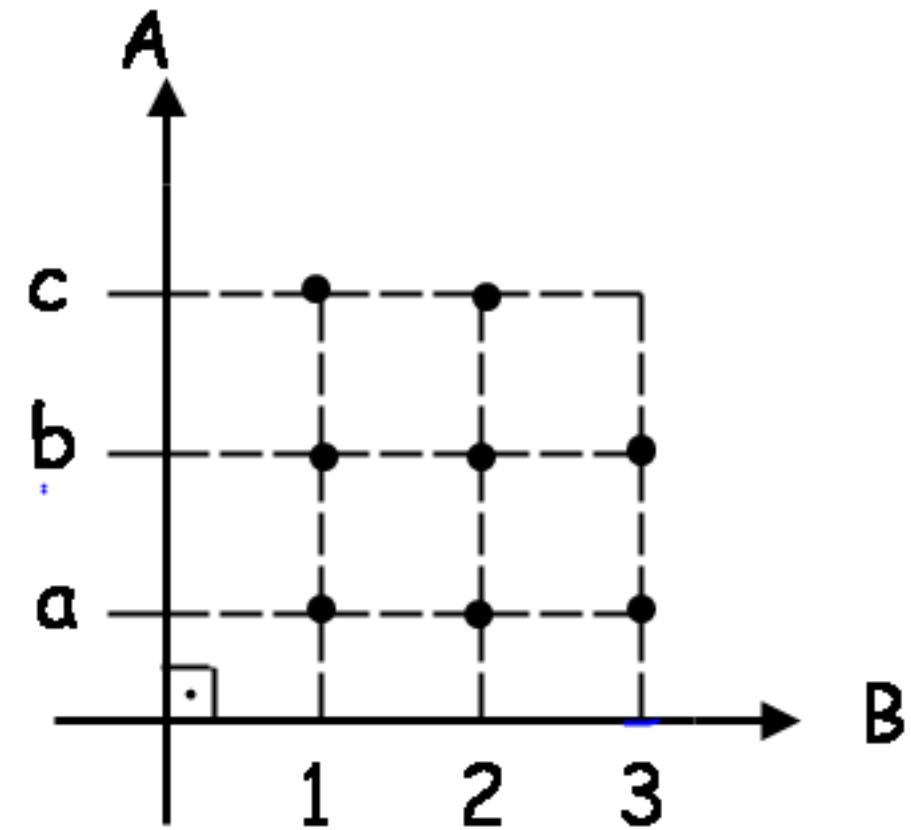
A ve B boş olmayan herhangi iki küme olmak üzere birinci bileşeni A kümesinden, ikinci bileşeni B kümesinden alınarak elde edilen tüm sıralı ikililerin kümesine A ile B'nin **Kartezyen Çarpımı** denir.

$A \times B = \{ (x, y : x \in A, y \in B) \}$ olmalıdır

$A = \{a, b, c\}$ ve $B = \{1, 2, 3\}$



$A \times B$



$B \times A$

$$A \times B \neq B \times A$$

$$A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3), (c, 1), (c, 2), (c, 3)\}$$

$$B \times A = \{(1, a), (2, a), (3, a), (1, b), (2, b), (3, b), (1, c), (2, c), (3, c)\}$$

KARTEZYEN ÇARPIMININ ÖZELLİKLERİ

$$1) \underbrace{A \times A \times A \times A \cdots A \times A \times A \times A}_{n \text{ tane}} = A^n$$

$$2) A \times A = A^2$$

$$3) R \times R = R^2$$

$$4) S(A \times B) = S(B \times A) = S(A) \cdot S(B)$$

$$5) A \times (B \times C) = (A \times C) \times B$$

$$6) A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

$$7) A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

$$8) (B \cap C) \times A = (B \times A) \cap (C \times A)$$

$$9) (B \cup C) \times A = (B \times A) \cup (C \times A)$$

BAĞINTI

TANIM

A ve B boş olmayan herhangi iki küme olmak üzere $A \times B$ -nin β gibi herhangi bir alt kümesine A dan B 'ye **Bağinti** denir.

$$\beta = \{(x, y) \mid (x, y) \in (A \times B)\} \text{ Bağintıdır. } (\beta)$$

$$\beta^{-1} = \{(y, x) \mid (y, x) \in (B \times A)\} \text{ Ters Bağintıdır. } (\beta^{-1})$$

$A = \{1, 2, 3\}$ ve $B = \{a, b\}$ olmak üzere,

$$\beta = A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$$

NOT

$$\beta_1 = \{(1, a)\}$$

$$\beta_2 = \{(1, b), (3, b), (1, a)\}$$

Ters bağıntıdır.

$$\beta^{-1} = B \times A = \{(a, 1), (b, 1), (a, 2), (b, 2), (a, 3), (b, 3)\}$$

•
•
•
•
•

DİK KOORDİNAT SİSTEMİ

Birbirine dik Ox ve Oy doğrularının oluşturduğu sisteme **Dik Koordinat Sistemi** denir.

+ Ox eksen (yatay eksen) apsisler eksenidir.

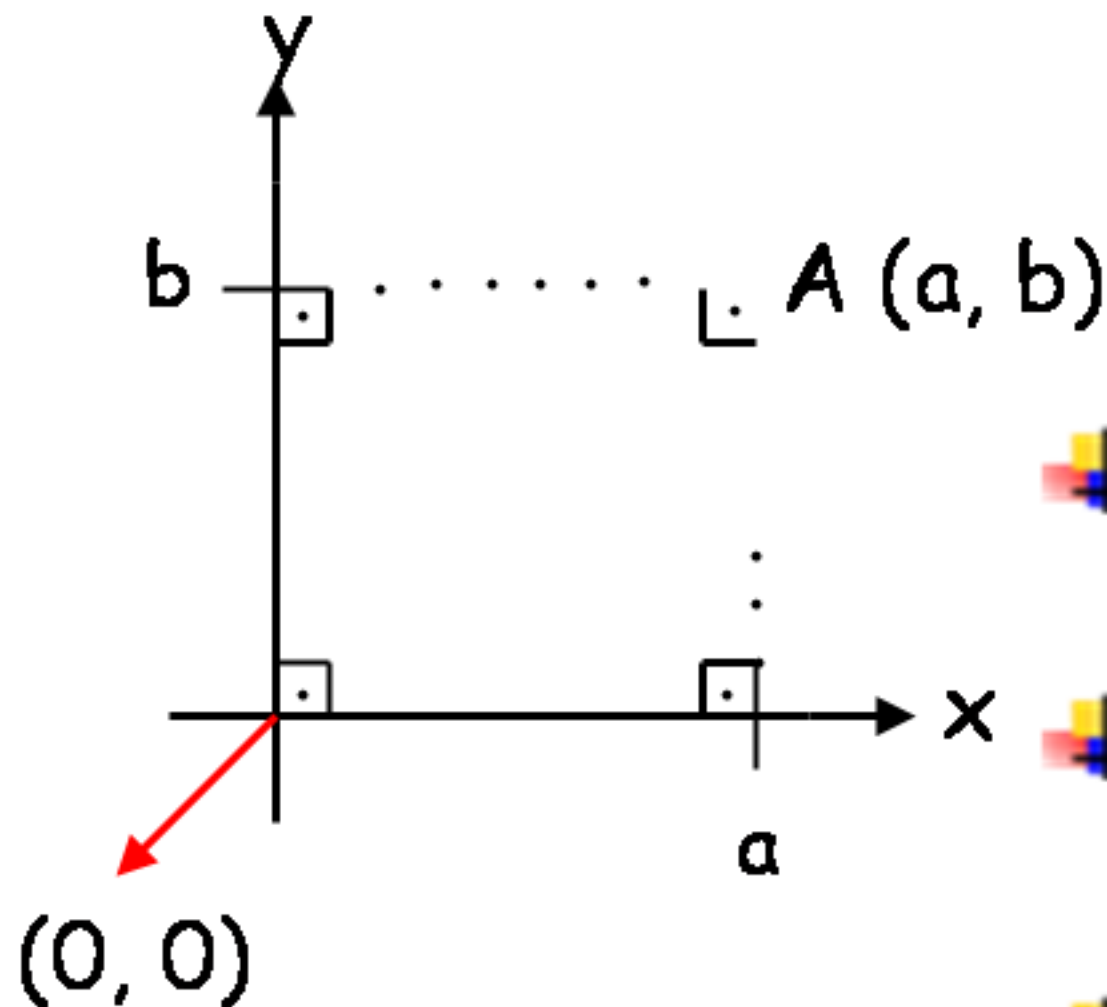
+ Oy eksen (düşey eksen) ordinatlar eksenidir.

+ $(0, 0)$ noktasına **Orjin** denir.



Dik koordinat düzleminde her noktayı (x, y) biçiminde sıralı ikili ile ifade edilir.

$$a \in \mathbb{R} \text{ ve } b \in \mathbb{R}$$



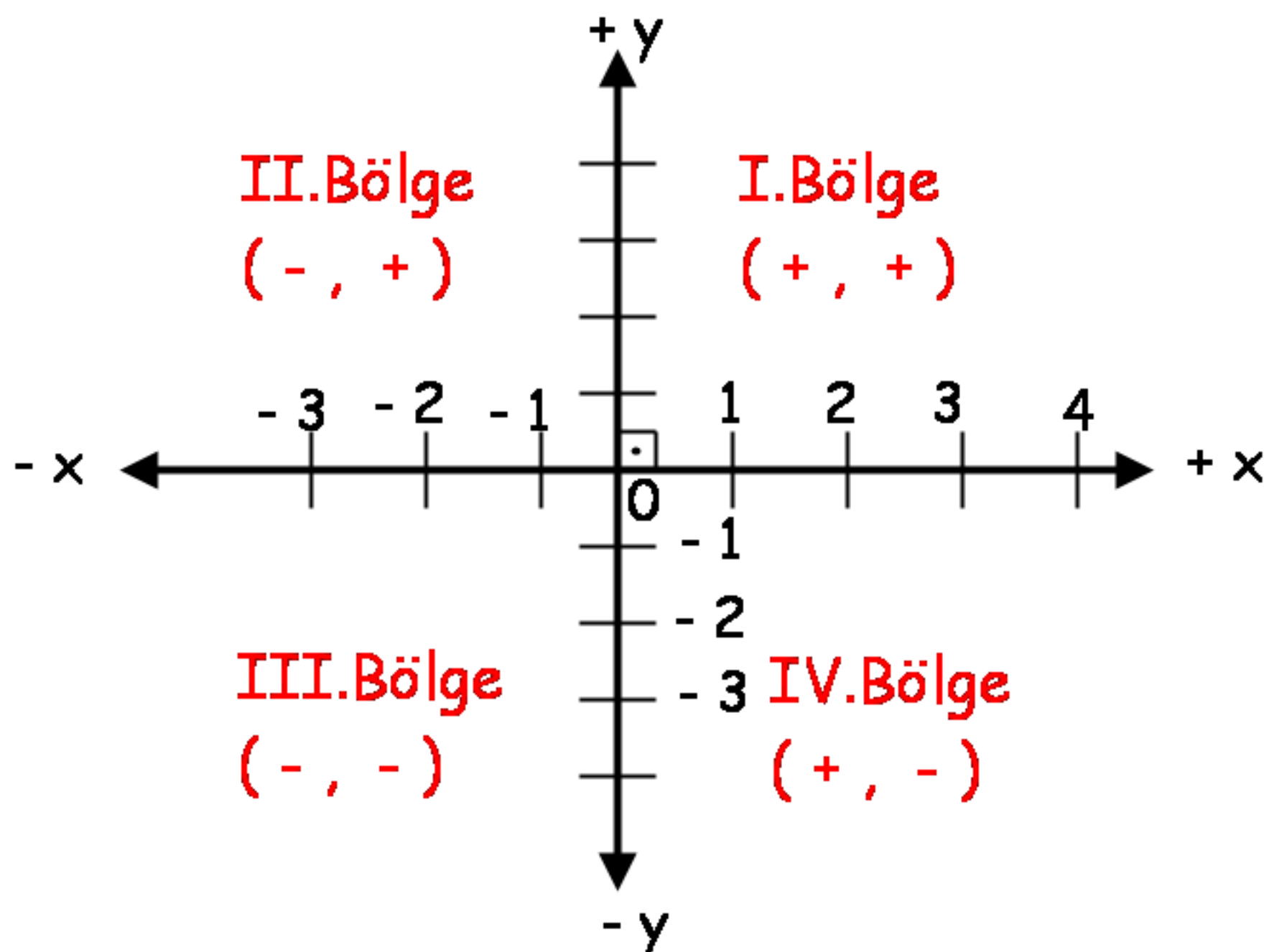
a reel sayısı x eksenindedir.



b reel sayısı y eksenindedir.



$A(a, b)$ A noktasının koordinatlarıdır.



✚ Analitik düzlem dört bölgeden oluşmuştur.

✚ Bu bölgelerdeki noktaların koordinatlarının işaretleri şekilde gibidir.

NOT

x eksenini Reel sayı eksenini, y eksenini Reel sayı olarak düşünürsek koordinat eksenlerimiz $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$

DİK KOORDİNAT SİSTEMİNDE GRAFİK ÇİZİMİ

Düzlemde grafik çizimi için;

- + Yeterli sayıda çözümü olan sıralı ikiliyi elde etmek gerekir
- + Koordinat noktalarını birleştiren çizgiye **grafik** adı verilir.
- + x ve y eksenini kestiği noktalara dikkat edilir.
- + Bir grafiğin x eksenini kestiği noktayı bulmak için y sayısı yerine sıfır (0) sayısı yazılır. x sayısı bulunur.
- + Bir grafiğin y eksenini kestiği noktayı bulmak için x sayısı yerine sıfır (0) sayısı yazılır. y sayısı bulunur.

$y = 2x - 3$ doğru denkleminin grafiğini dik koordinat sisteminde gösteriniz ?

$$y = 2x - 3$$

$y = 0$ için

$$0 = 2x - 3$$

$$2x = 3$$

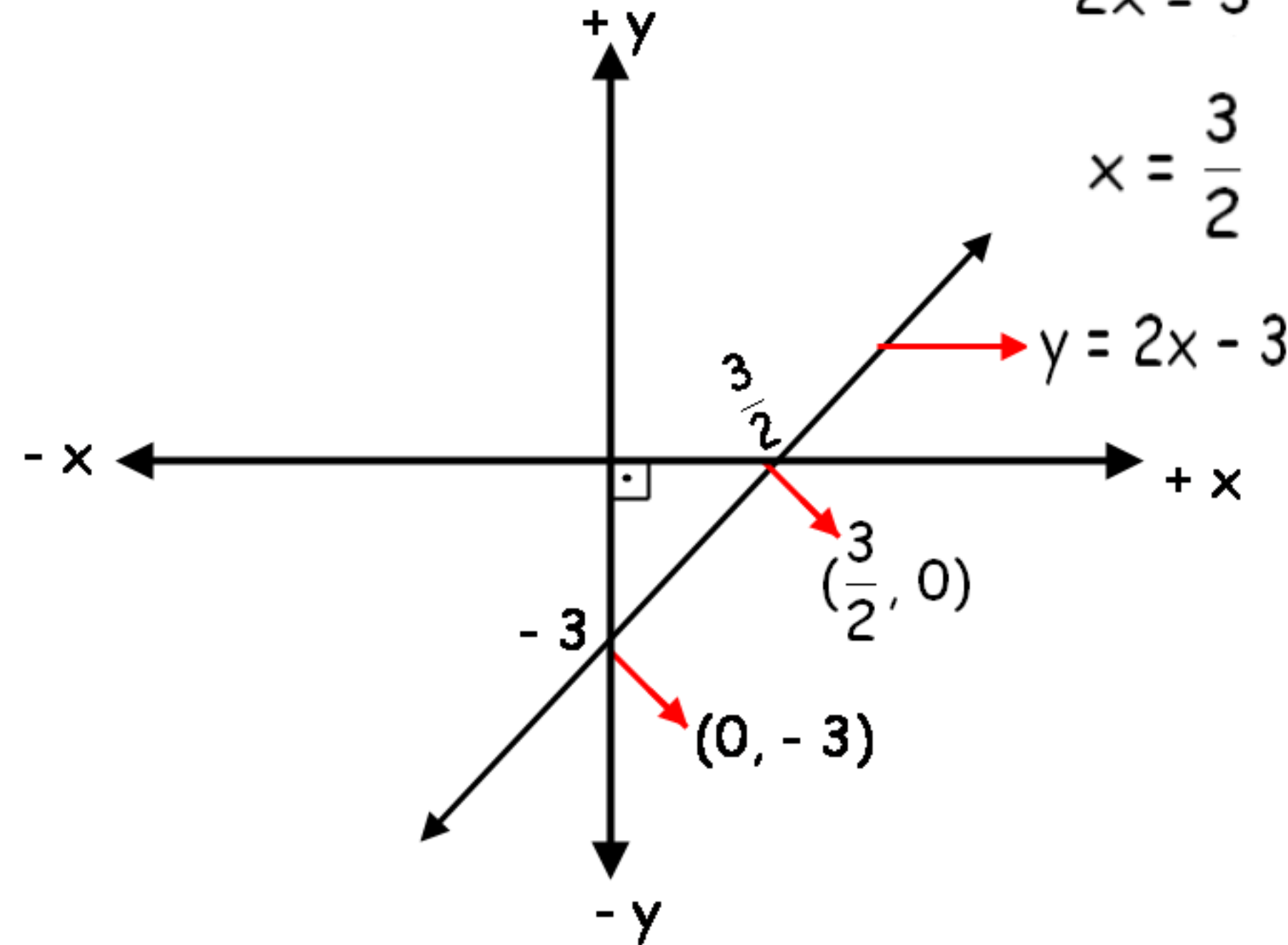
$$x = \frac{3}{2}$$

$x = 0$

$$y = 2(0) - 3$$

$$y = 0 - 3$$

$$y = -3$$



SİMETRİKLER

A (x, y) noktasının simetrikleri;

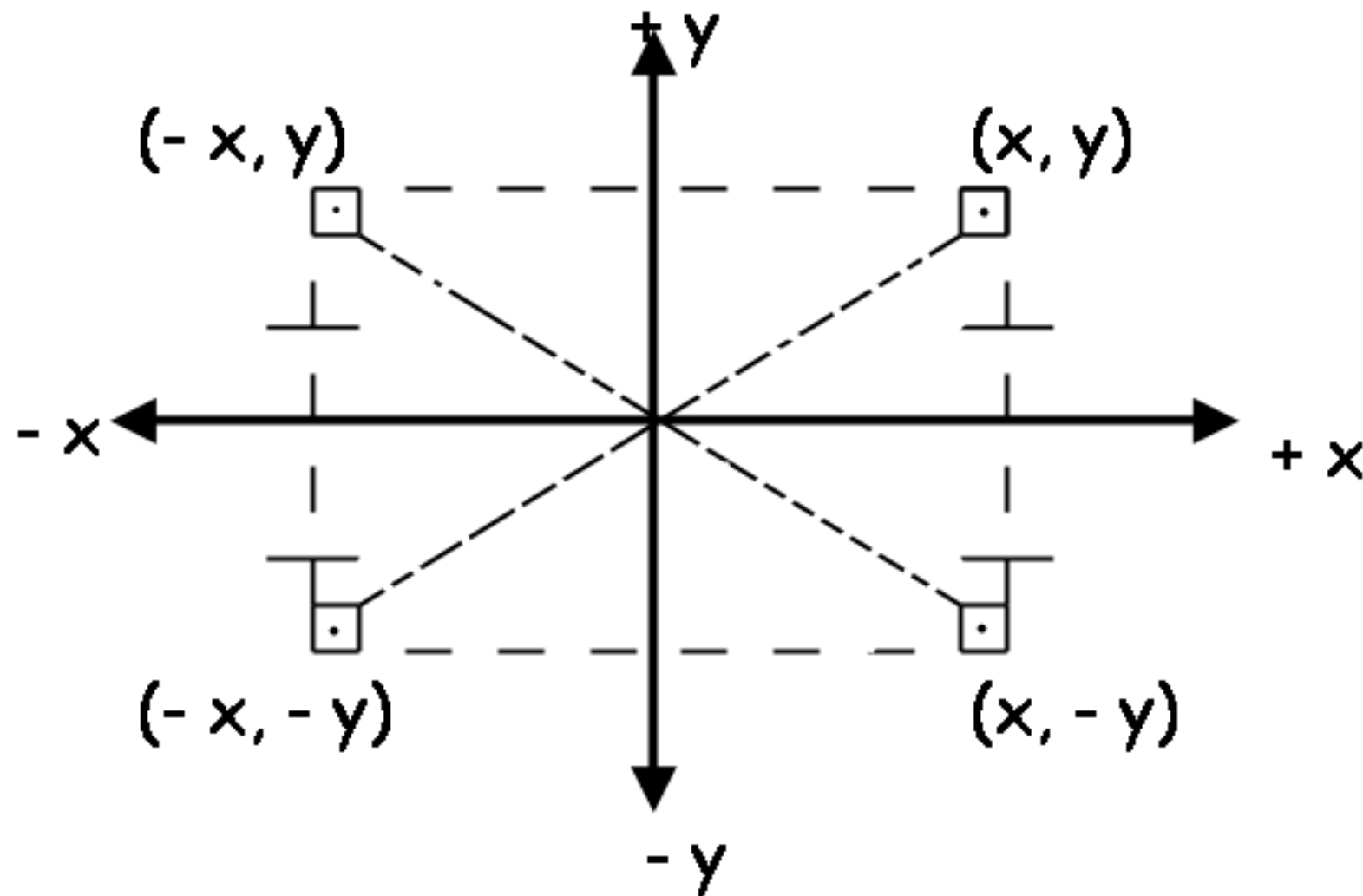
- 1) x eksenine göre simetriği, y yerine $-y$ yazılır.
 $(x, -y)$ olur.
- 2) y eksenine göre simetriği, x yerine $-x$ yazılır.
 $(-x, y)$ olur.
- 3) $(0, 0)$ orjin (başlangıç) noktasına göre simetriği x yerine $-x$, y yerine $-y$ yazılır.
 $(-x, -y)$
- 4) I. Açıortay doğrusuna ($y = x$ doğrusuna) göre simetriği, x ve y yer değiştirir.
 (y, x)

5) II. Açıortay doğrusuna ($y = -x$ doğrusuna) göre simetriği,
 x ve y yer ve işaret değiştirir.

$$(-y, -x)$$

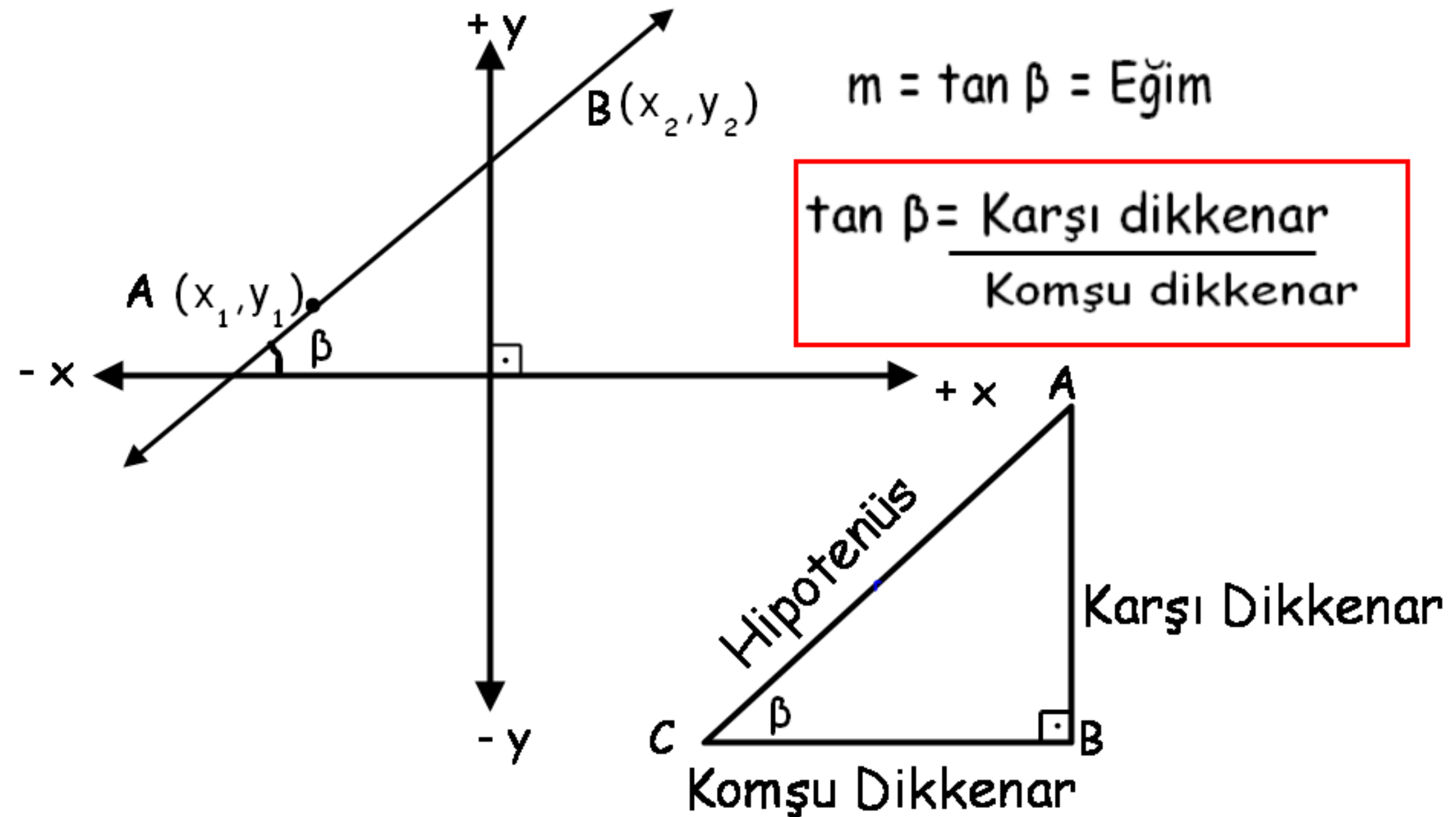
6) $x = a$ doğrusuna göre simetriği $(2a - x, y)$

7) $y = b$ doğrusuna göre simetriği $(x, 2b - y)$



BİR DOĞRUNUN EĞİMİ

Bir doğrunun Ox eksenine pozitif yönde açının tanjantına doğrunun eğimi denir. m ile gösterilir.



İKİ NOKTASI BİLİNEREN DOĞRUNUN EĞİMİ

Doğrunun üzerindeki iki nokta $A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ ise;

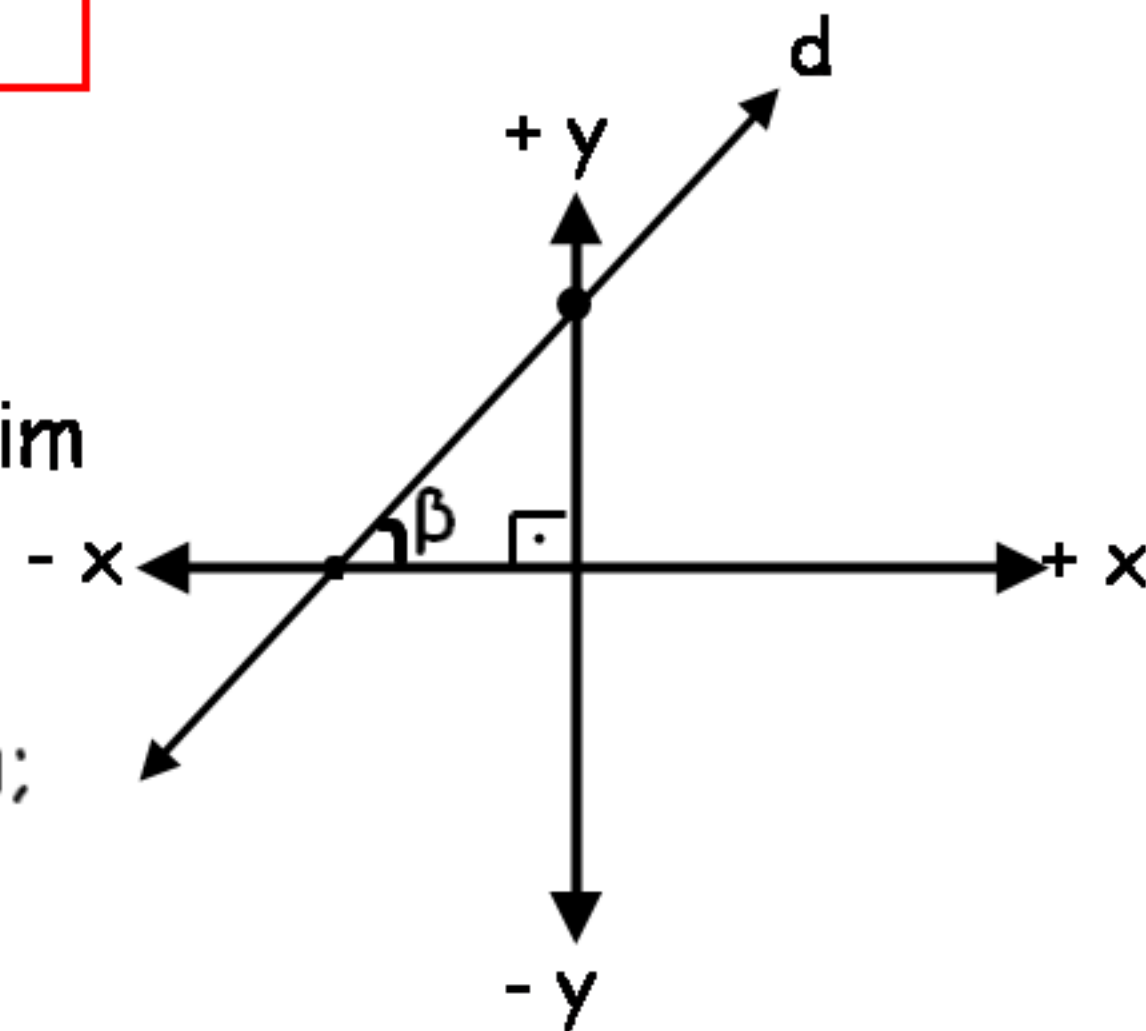
$$\text{Eğim} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

+ Eğimi bilinen doğru $y = mx + n$

→ Eğim

+ Eğimi $m = \tan \beta$ olan bir doğru;

$$ax + by + c = 0 \quad m = -\frac{a}{b}$$



NOT

$0^\circ < \beta < 90^\circ$ ise $m > 0$ artandır.

$90^\circ < \beta < 180^\circ$ ise $m < 0$ azalandır.

İKİ NOKTA ARASI UZAKLIK

$A (x_1, y_1)$ ve $B (x_2, y_2)$ noktaları arasındaki uzaklık;

$$|AB| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

BİR DOĞRU PARÇASININ ORTA NOKTASI

Uç noktaları $A (x_1, y_1)$ ve $B (x_2, y_2)$ olan doğru parçasının orta noktası $C (a, b)$ ise;

$$a = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$b = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

EĞİMİ VE ÜZERİNDEKİ BİR NOKTASI BİLİLEN DOĞRU

Eğim = m ve $A(x_1, y_1)$ noktasından geçiyorsa;

$$\text{Doğrunun denklemi} = y - y_1 = m(x - x_1)$$

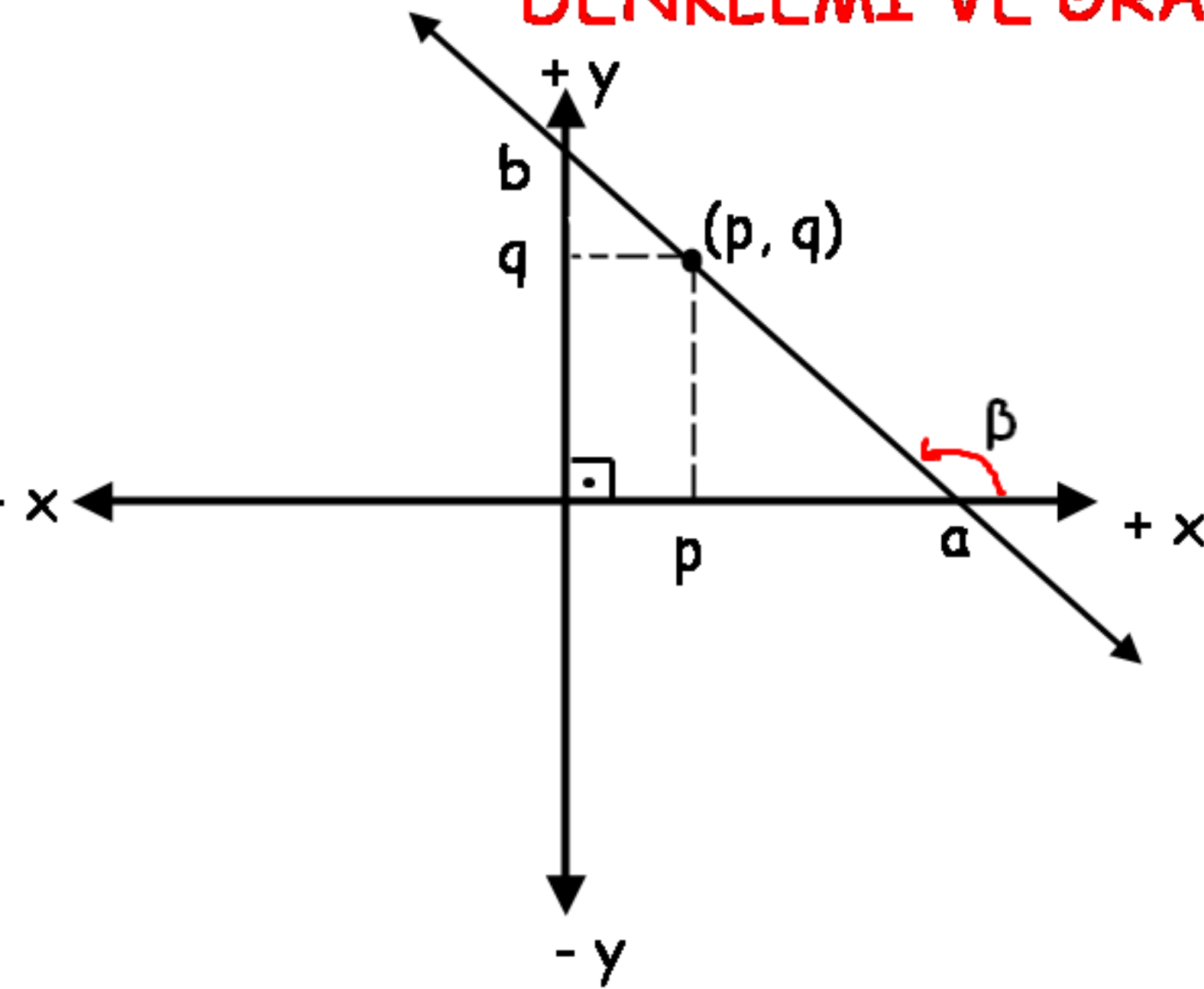
ÜZERİNDEKİ İKİ NOKTASI BİLİLEN DOĞRU DENKLEMİ

Doğrunun üzerindeki noktalar $A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ ise;

$$\text{Eğim} = m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \text{ ile bulunur.}$$

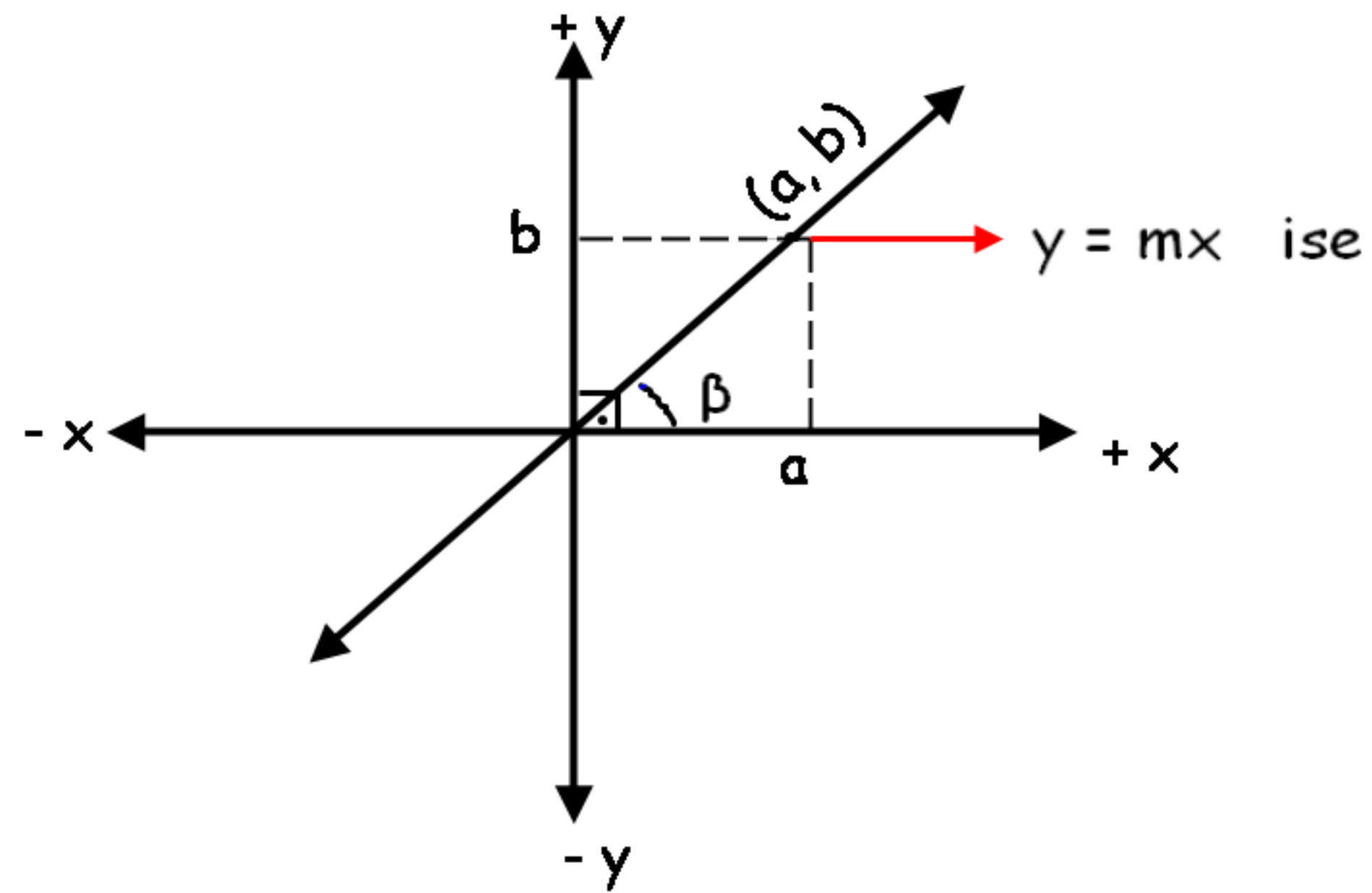
$$\text{Doğrunun Denklemi} = y - y_1 = m(x - x_1)$$

EKSENLERİ KESTİĞİ NOKTALARI BİLİNEN DOĞRU DENKLEMİ VE GRAFİKLERİ

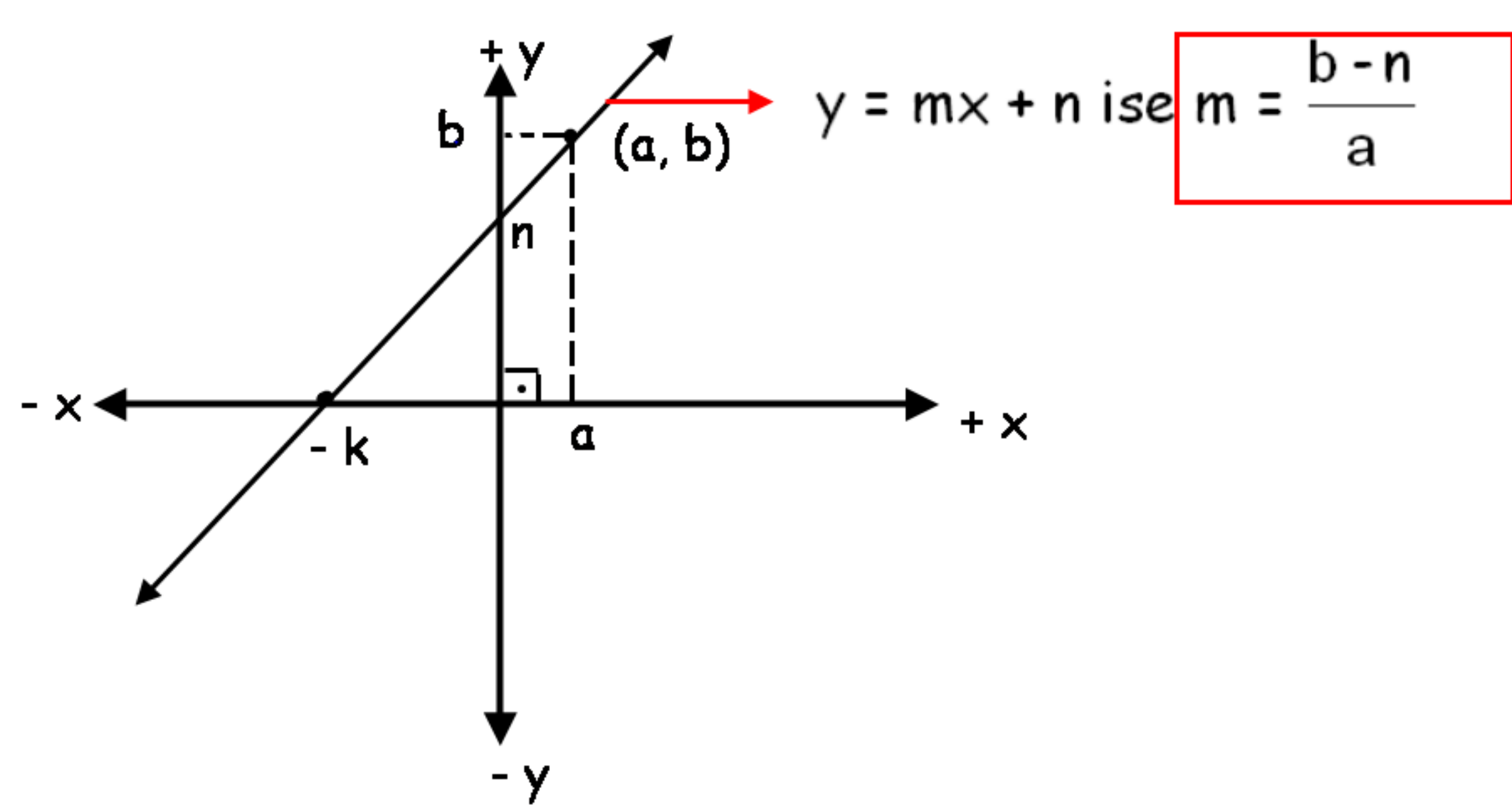


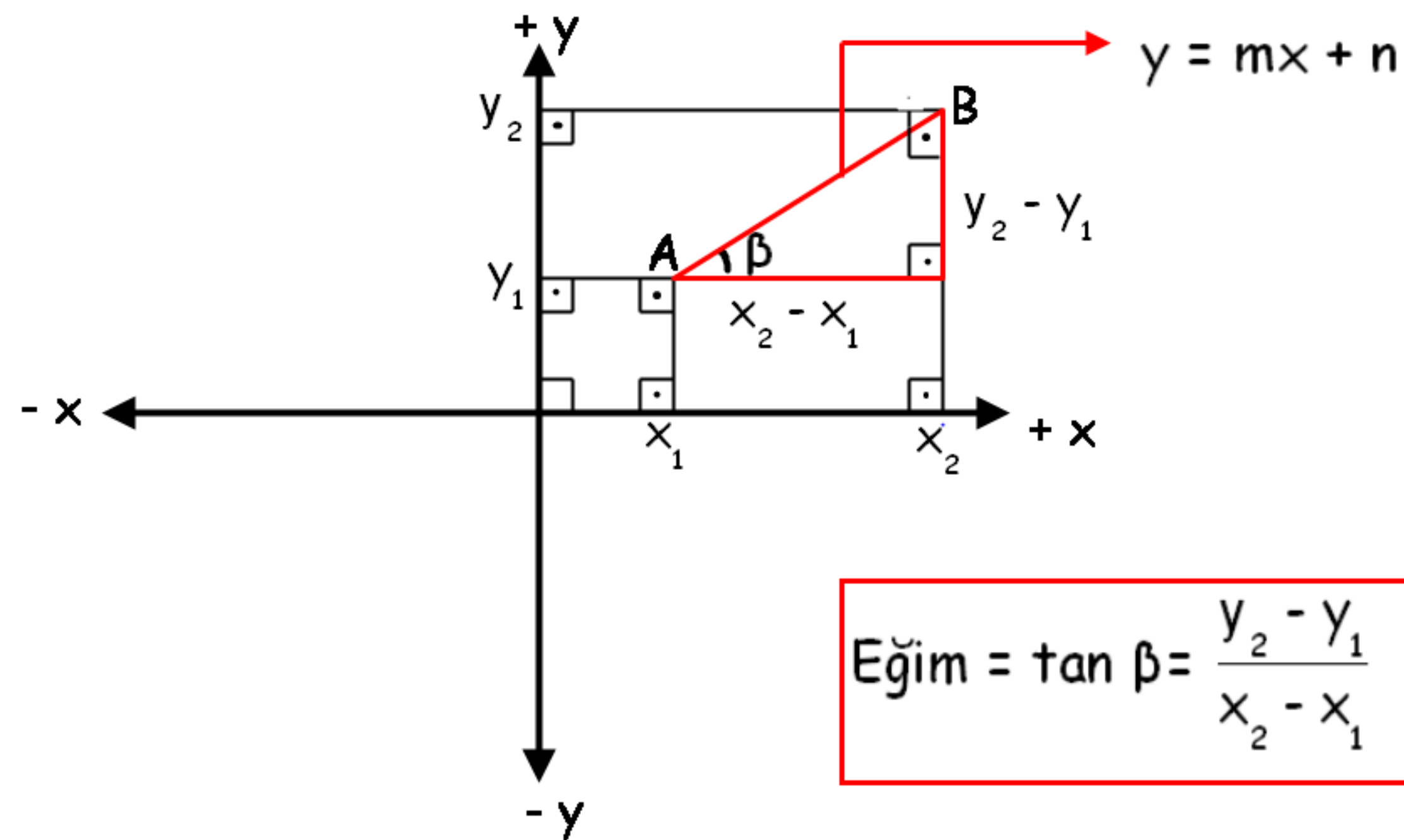
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

$$m = -\frac{b}{a}$$

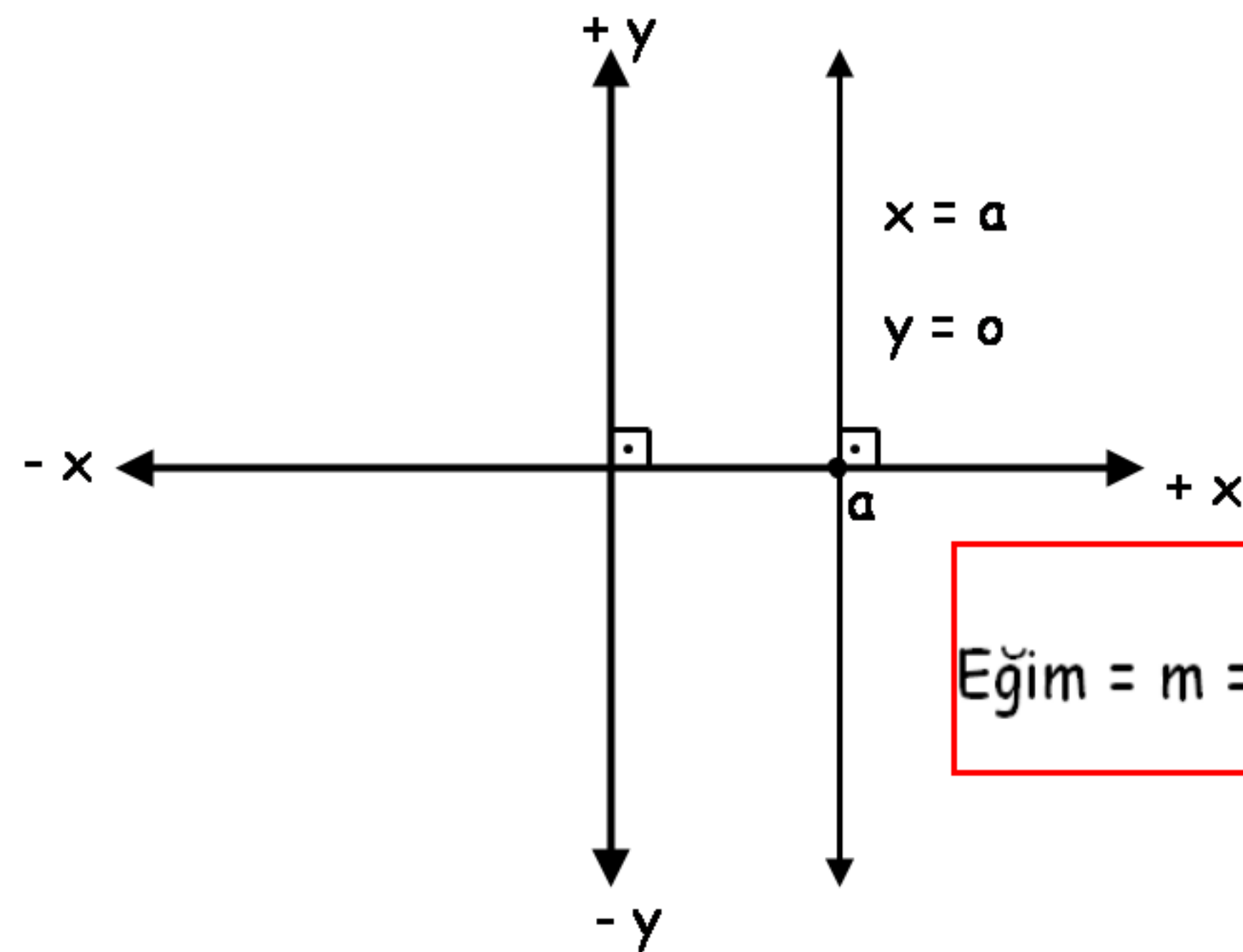


ise $m = \frac{b}{a}$



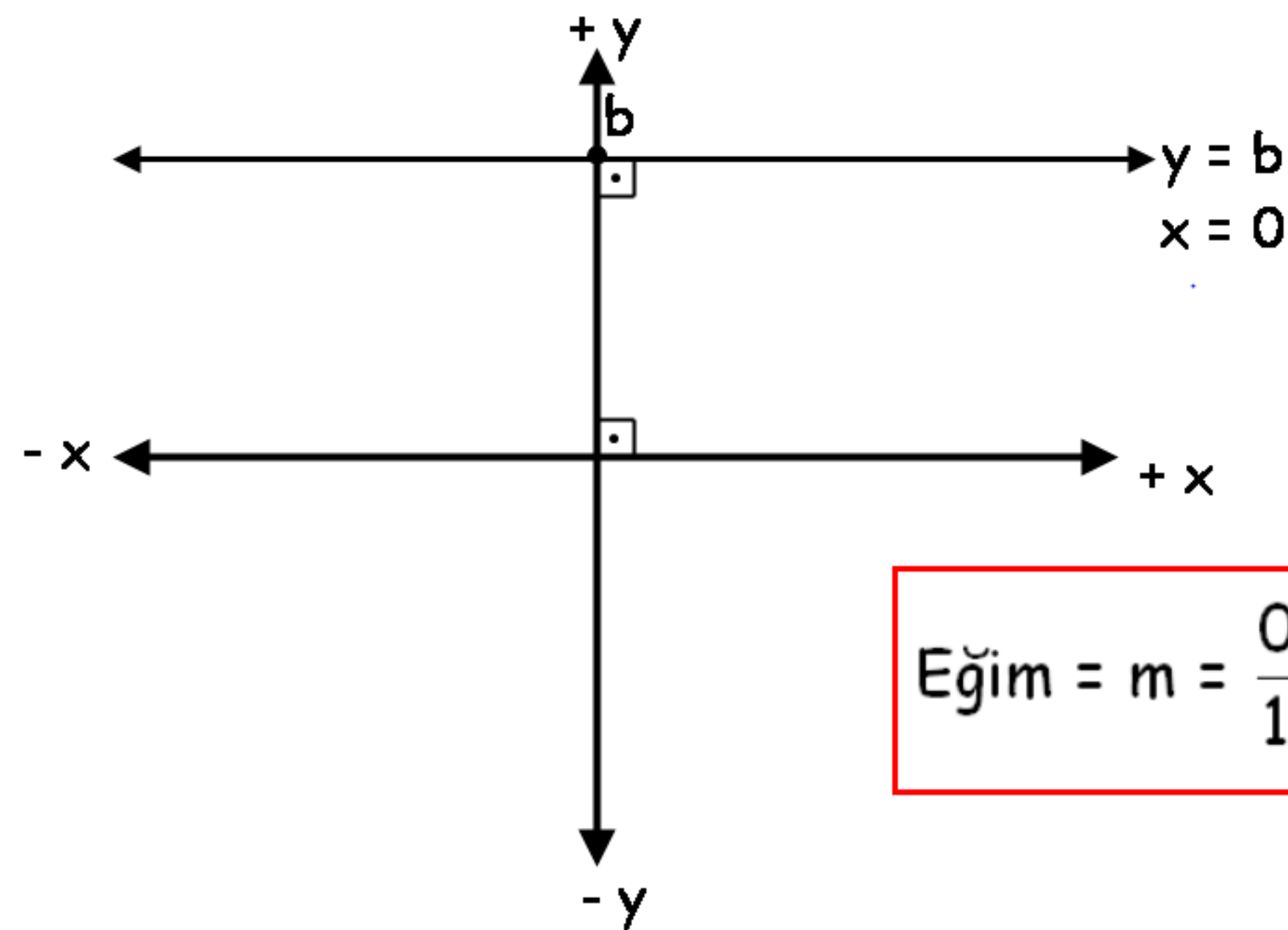


$$\text{Eğim} = \tan \beta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



Eğim = $m = \frac{1}{0} = \text{tanımsızdır.}$

$x = a$ doğrusu x eksenine dik, y eksenine paraleldir.

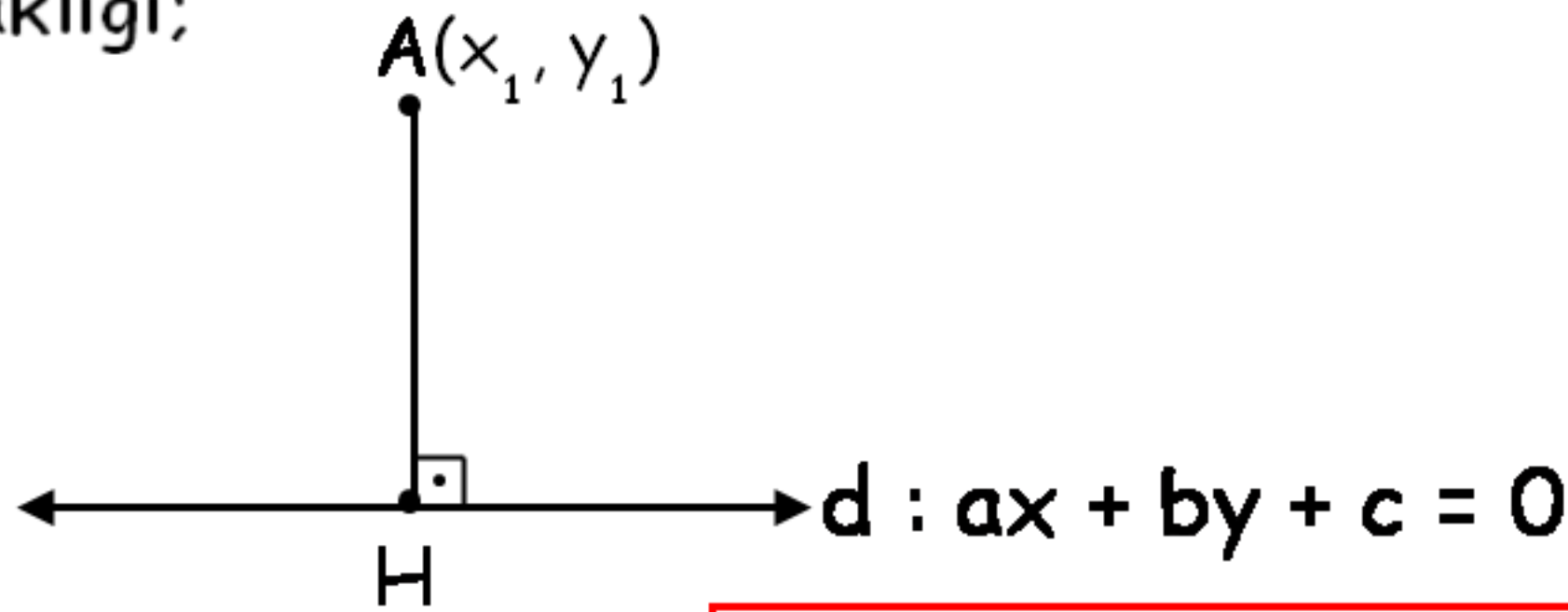


$$\text{Eğim} = m = \frac{0}{1} = 0 \text{ 'dır.}$$

$y = b$ doğrusu y eksenine dik, x eksenine paraleldir.

BİR NOKTANIN BİR DOĞRUYA UZAKLIĞI

$A(x_1, y_1)$ noktasının $ax + by + c = 0$ doğrusuna olan uzaklığı;



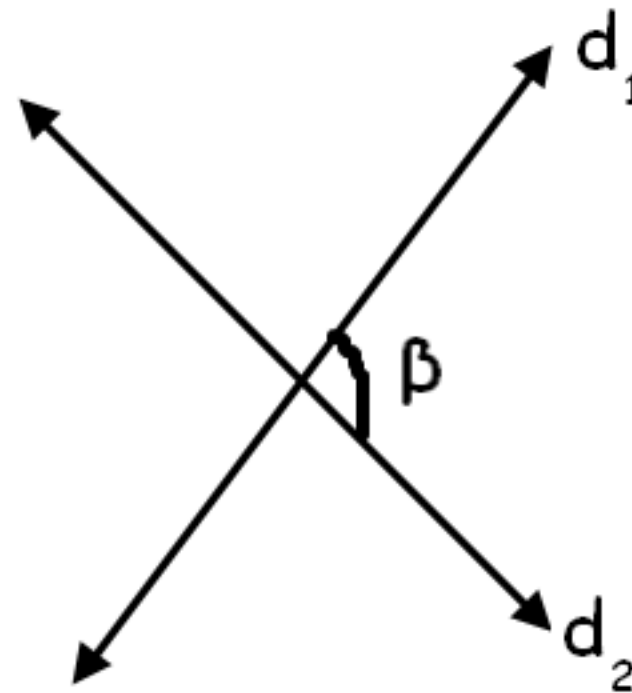
$$|AH| = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

İKİ DOĞRUNUN ARASINDAKİ AÇI

$$d_1 : y = m_1 x + n_1$$

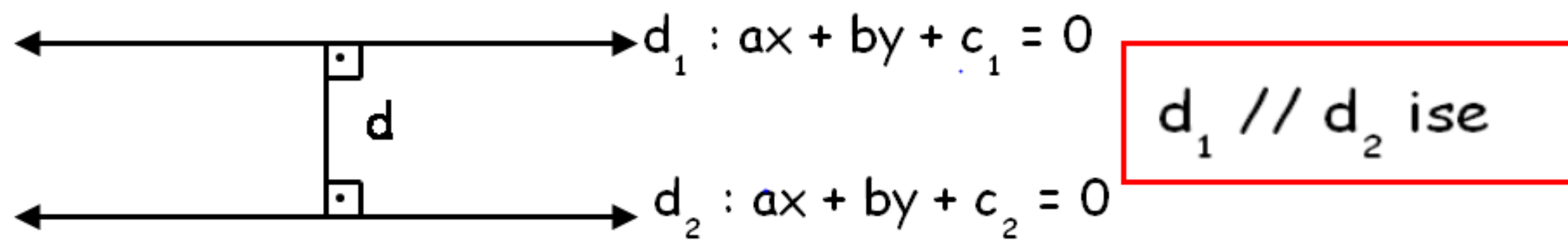
$$d_2 : y = m_2 x + n_2$$

doğruları arasındaki açı β olsun.



$$\tan \beta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2}$$

PARALEL İKİ DOĞRU ARASINDAKİ UZAKLIK



Birbirine paralel olan doğruların eğimleri birbirine eşittir.

$$m_1 = m_2 = -\frac{a}{b}$$

Paralel doğruları arasındaki uzaklık d ise;

$$d = \frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$d_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

$$d_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

doğruları için

+ d_1 doğrusu d_2 doğrusuna paralel ise eğimleri eşittir.

$$d_1 // d_2$$

$$m_1 = m_2$$

paraleldir.

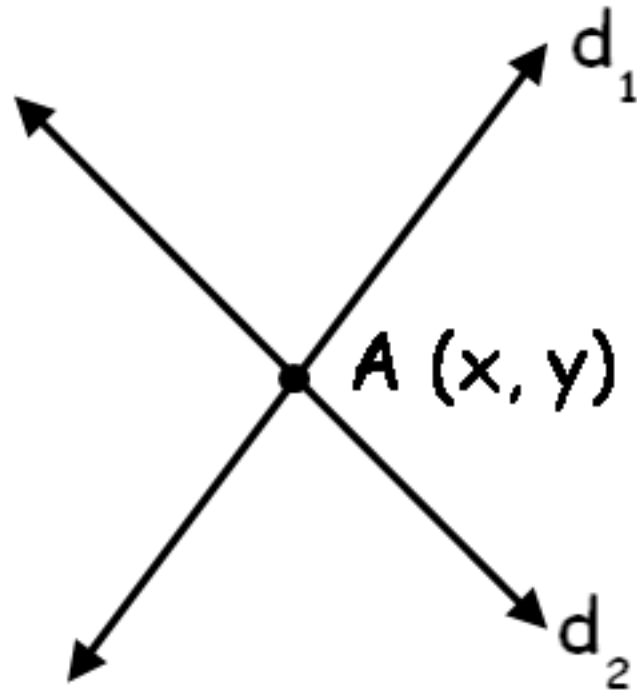
+ d_1 doğrusu d_2 doğrusuna dik ise eğimlerinin çarpımı - 1'e eşittir.

$$d_1 \perp d_2$$

$$m_1 \cdot m_2 = -1$$

diktir.

 d_1 doğrusu d_2 doğrusunu bir noktada kesiyorsa;



NOT

x veya y 'yi bulmak için birinci dereceden denklem sistemlerinin çözüm metodları kullanılır.

UYARI

Bir noktada kesişen iki doğrunun eğimleri birbirinden farklıdır.

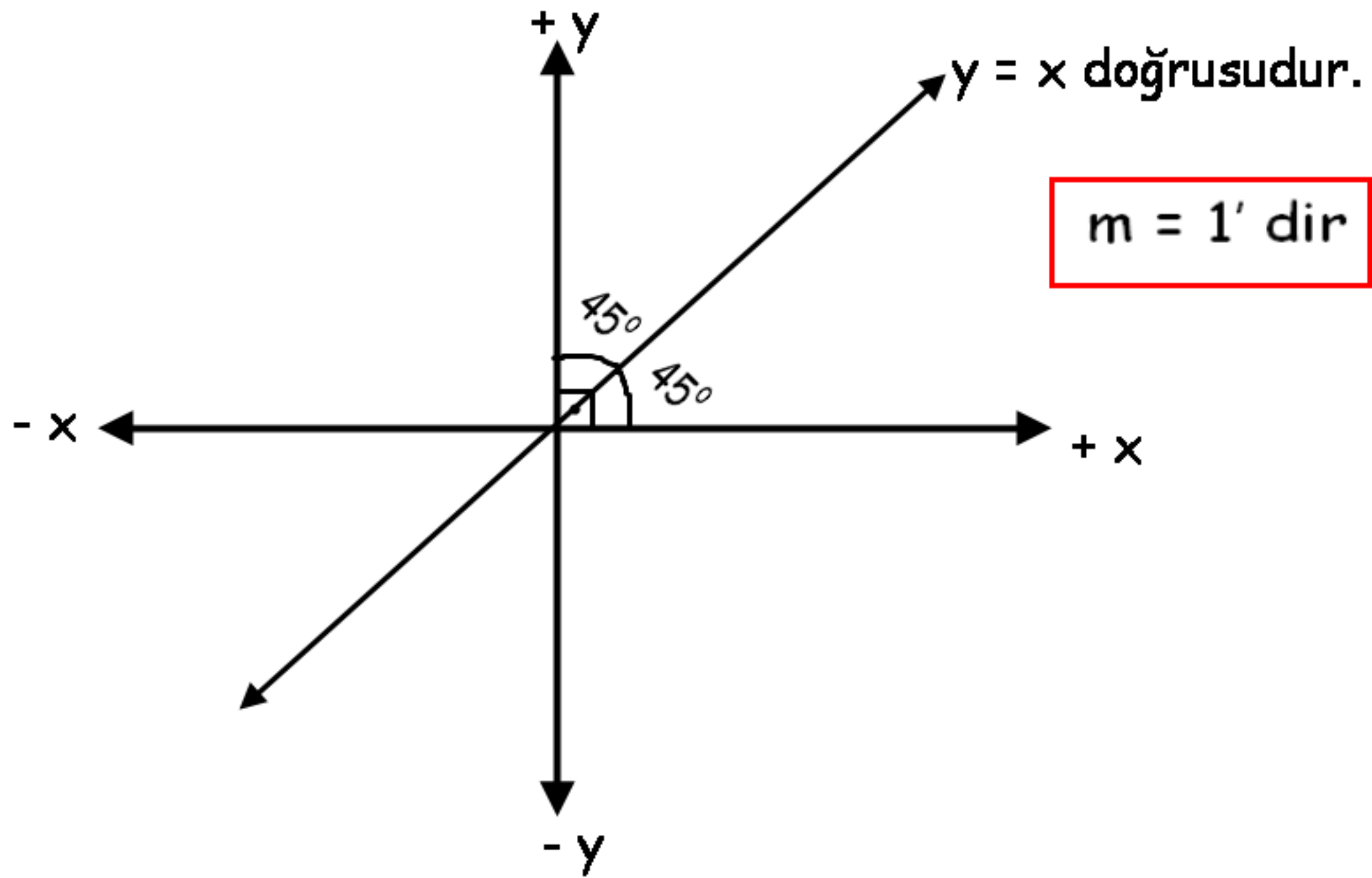
DOĞRU DEMETİ

Bir noktadan geçen sonsuz sayıda oluşan doğruların oluşturduğu kümeye doğru demeti denir.

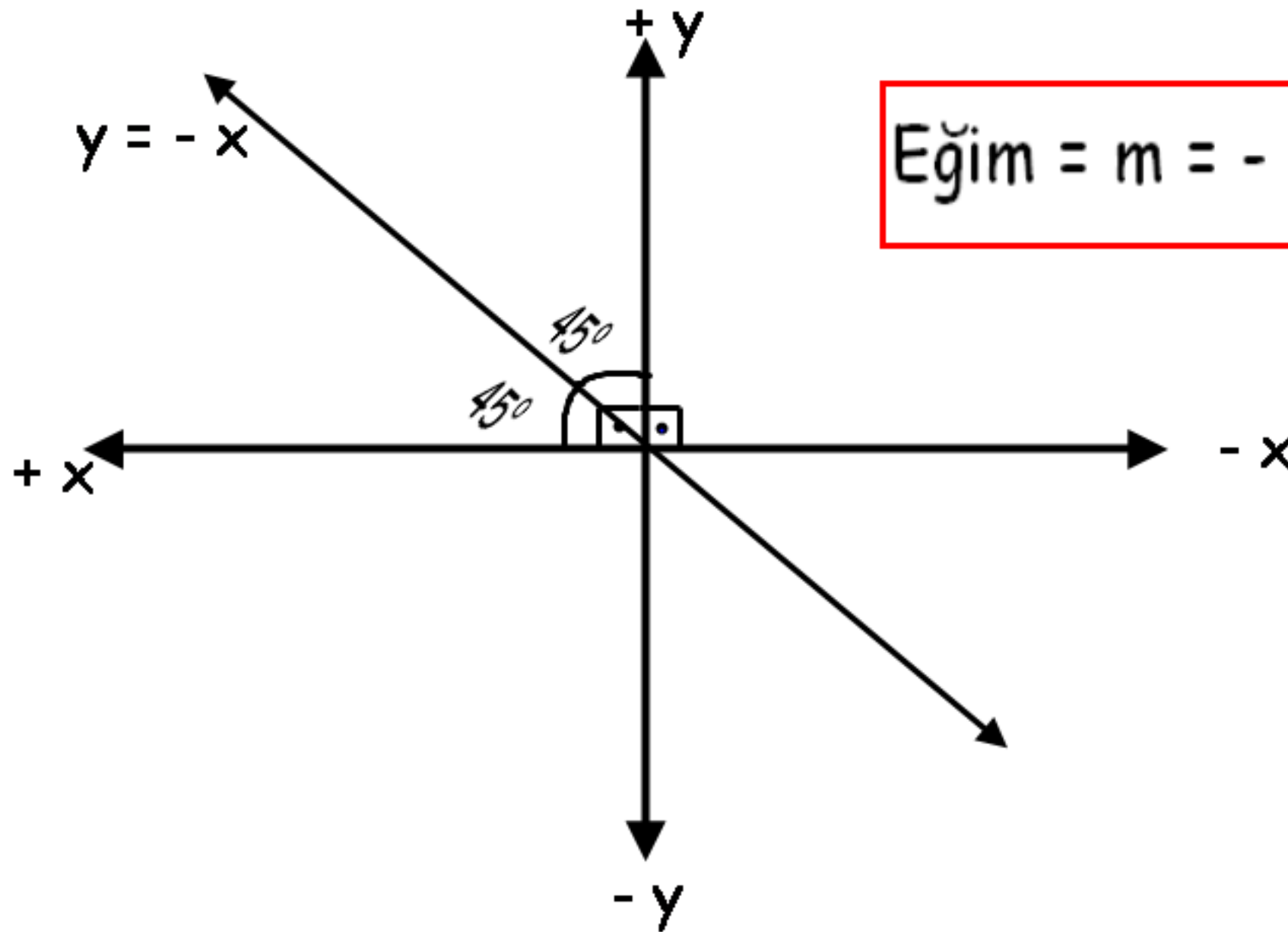
A (x_1, y_1) noktasından geçen doğruların genel denklemi;

$$y - y_1 = m (x - x_1) \text{ şeklindedir.}$$

I. AÇIORTAY DOĞRUSU



II. AÇIORTAY DOĞRUSU



Eğim = $m = -1$ dir

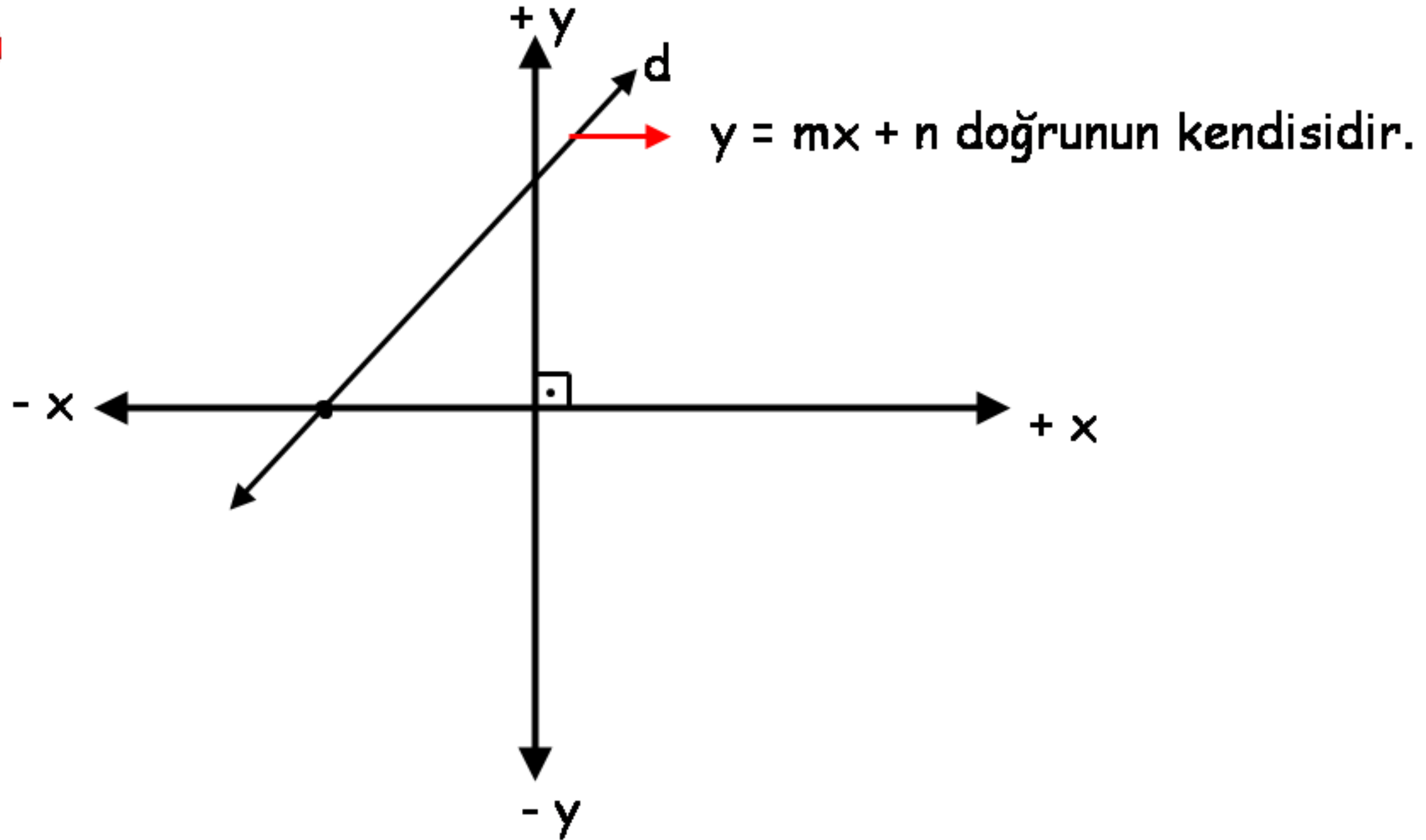
NOT

$d_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ve $d_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$ doğruları
çakışık ise;

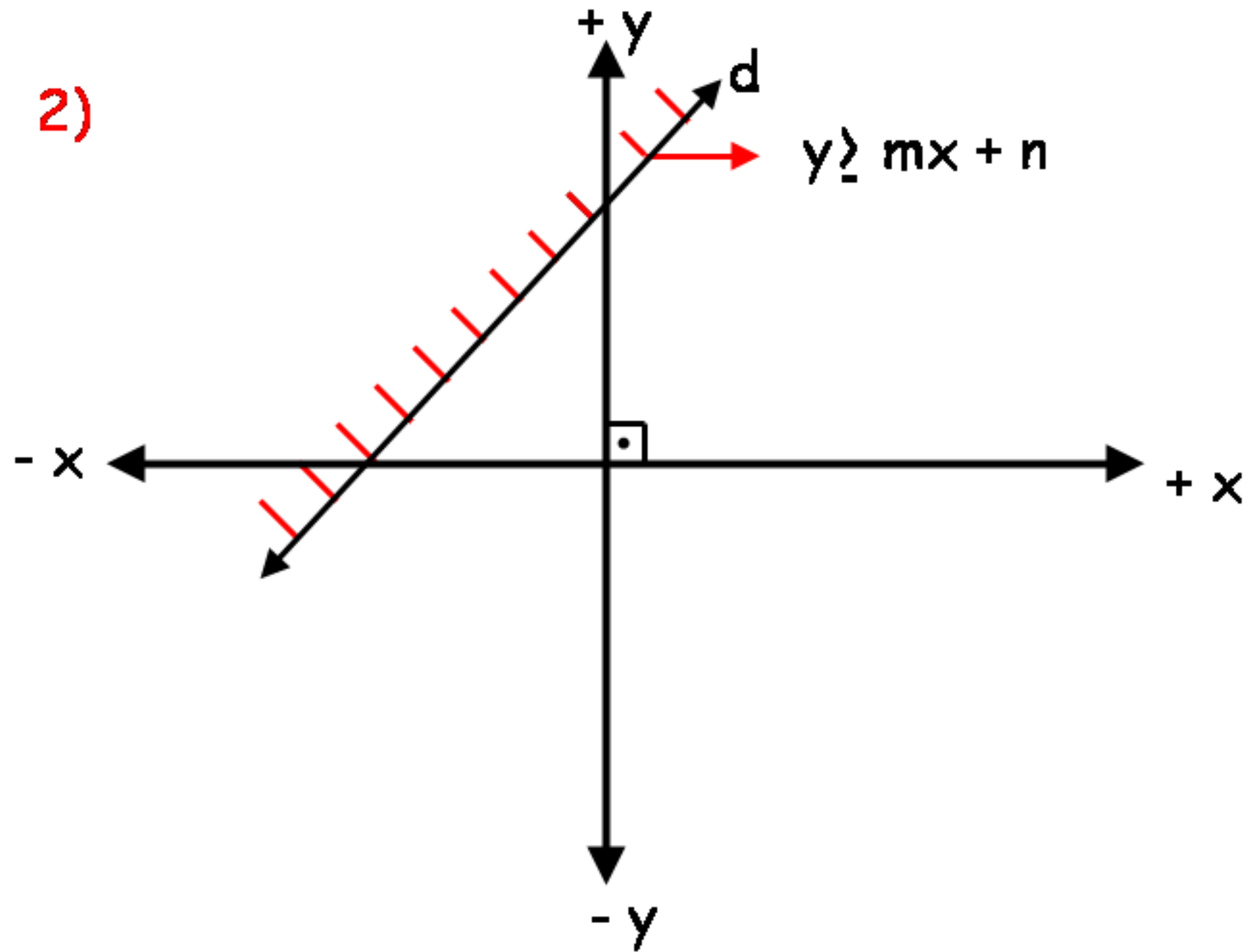
$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

BİR VE İKİ BİLİNMEYENLİ BİRİNCİ DERECE DEN EŞİTSİZLİKLER

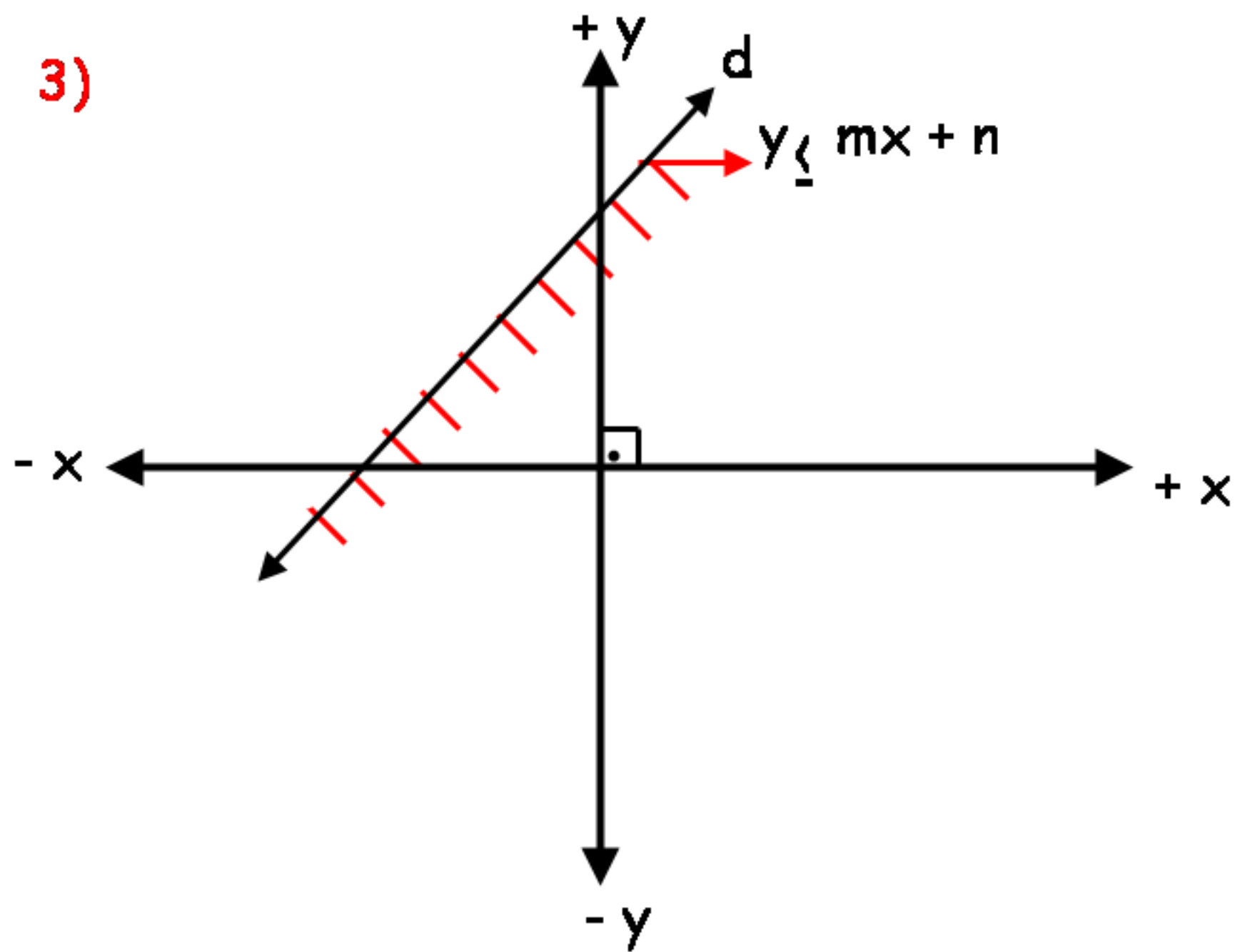
1)



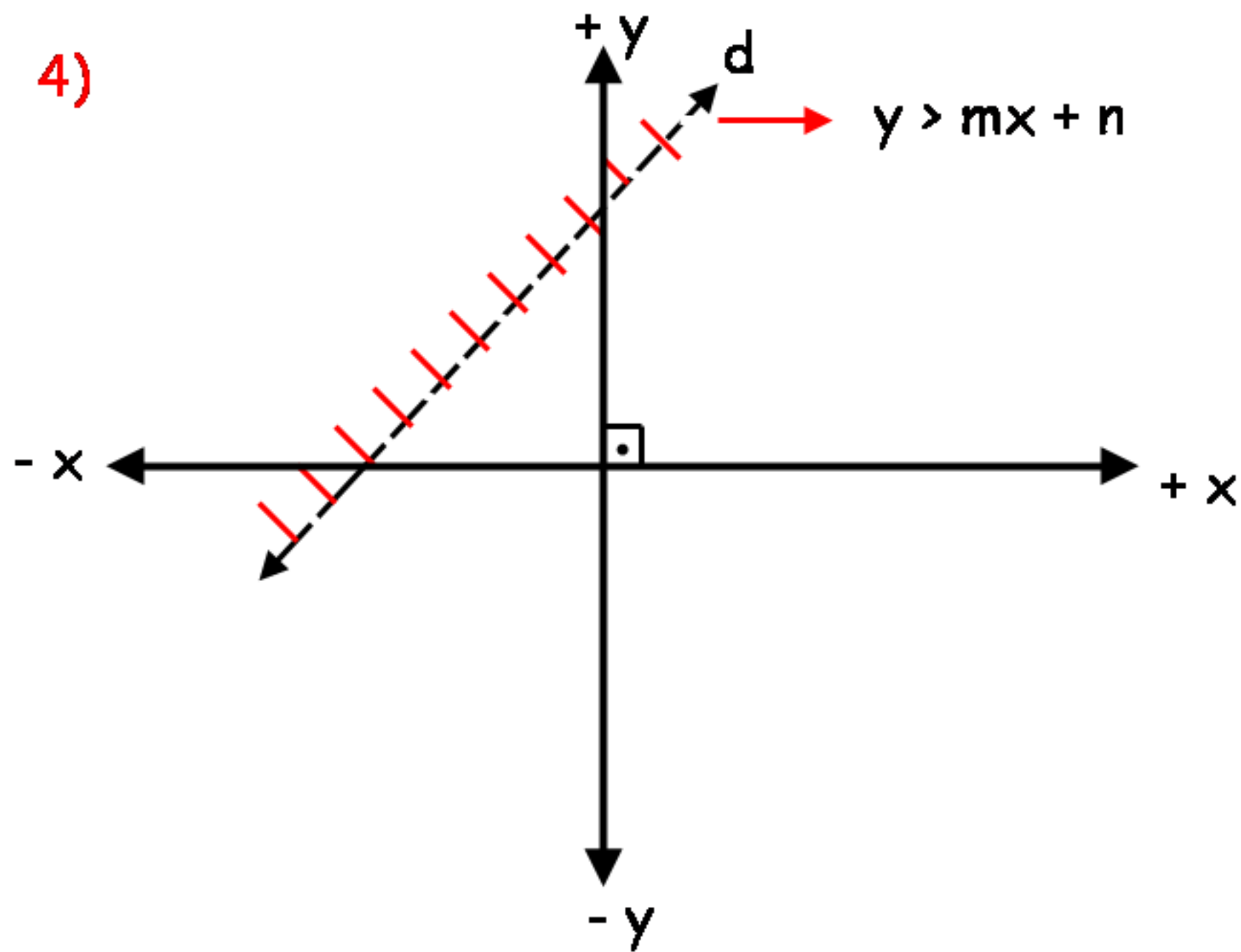
2)



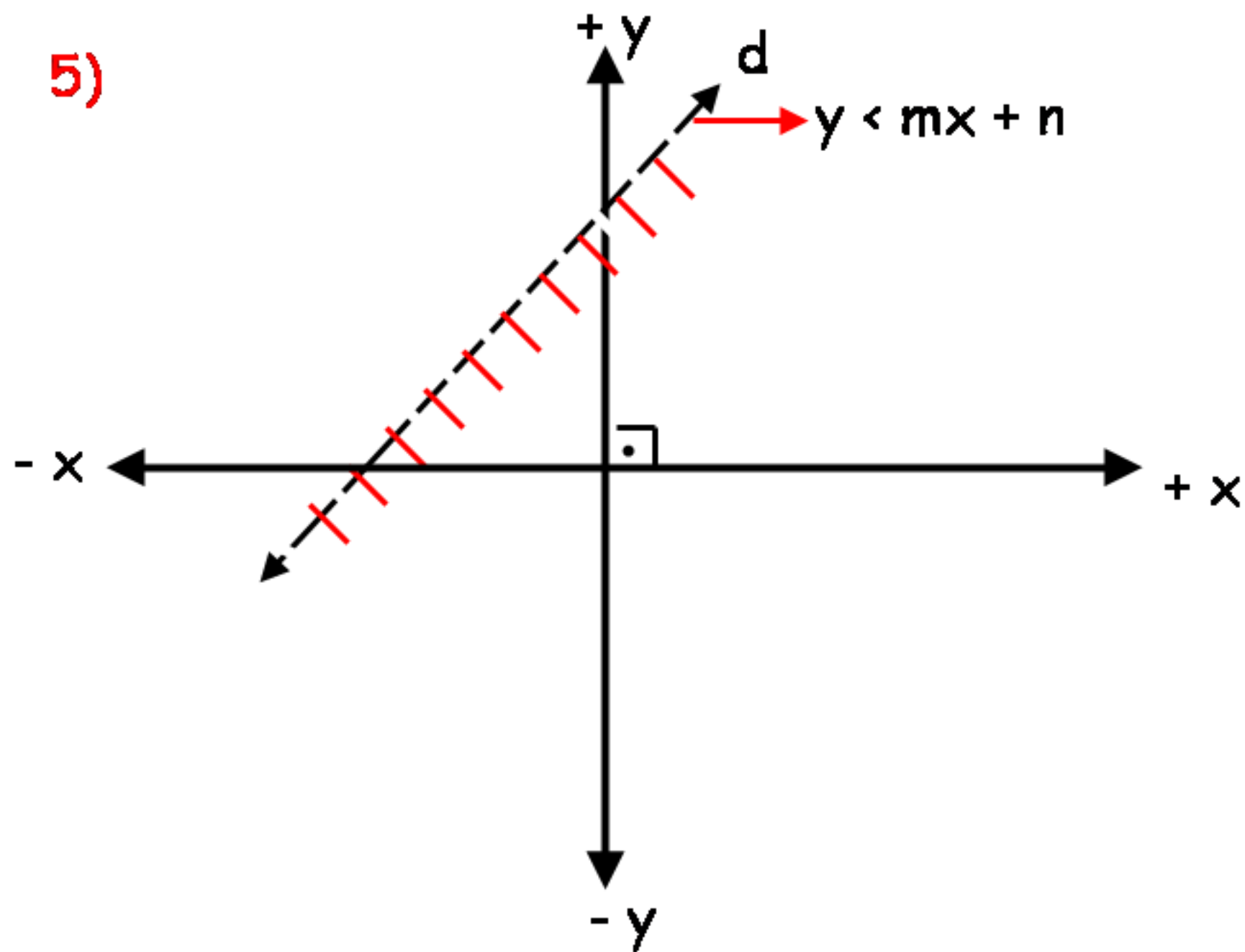
3)



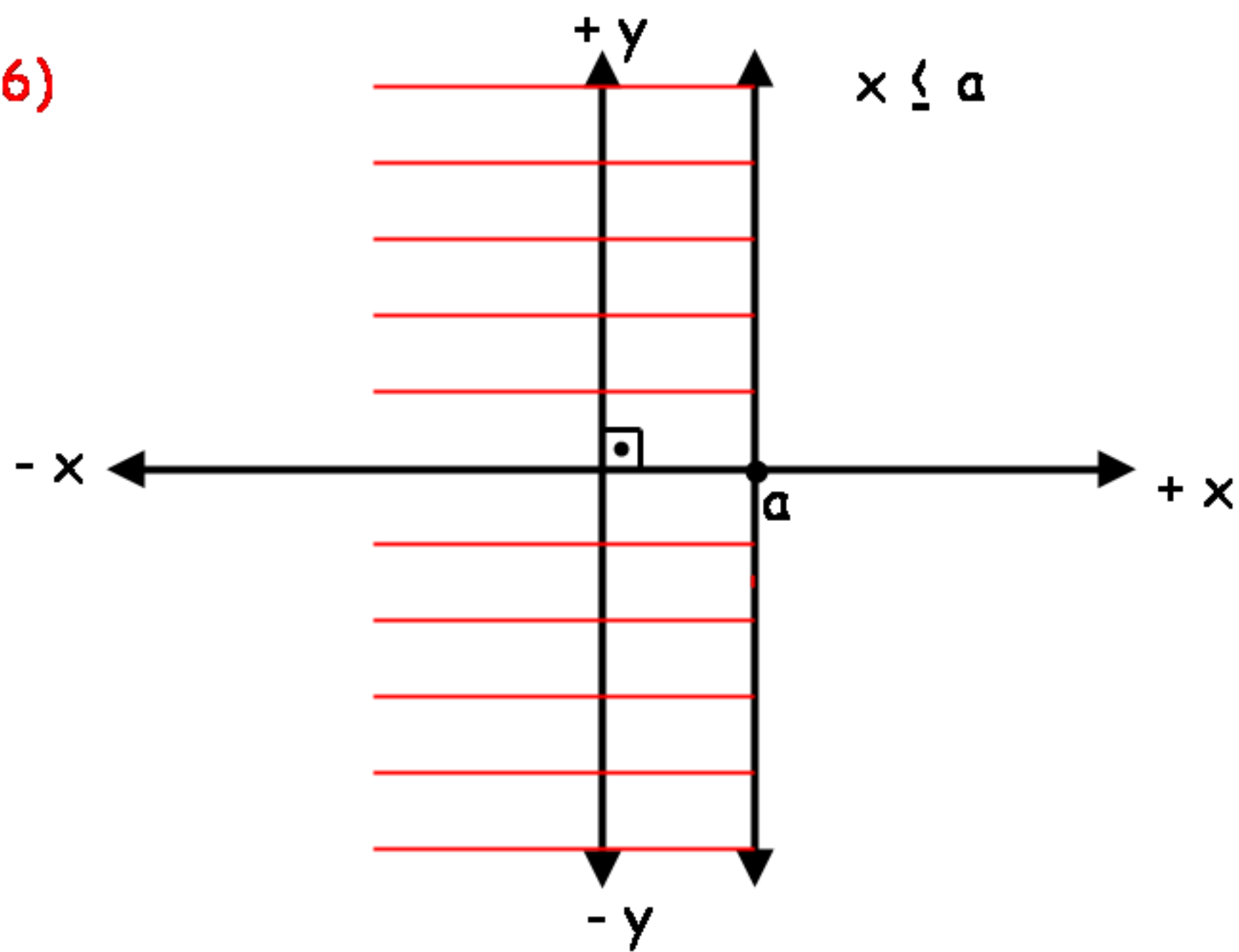
4)



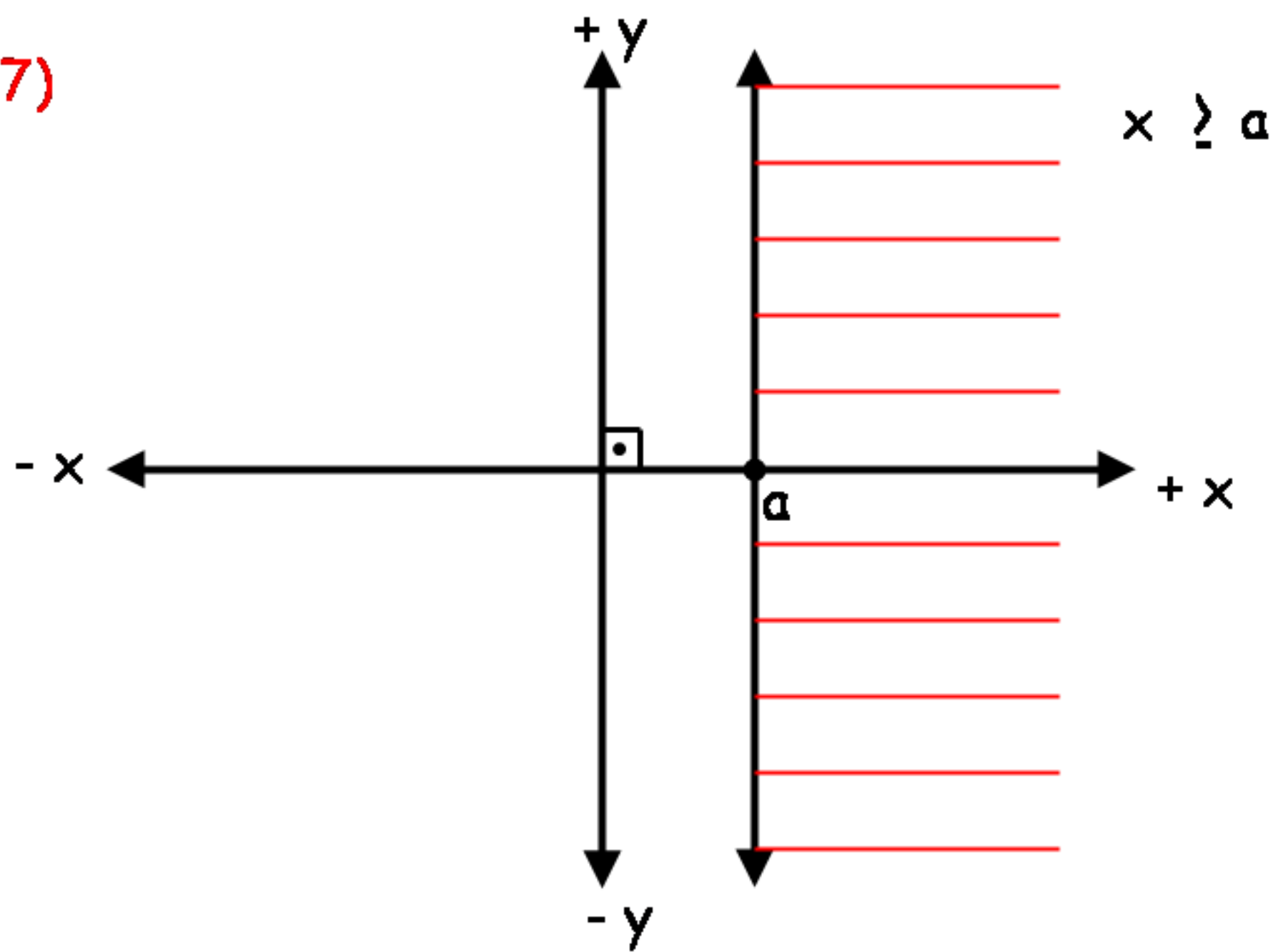
5)



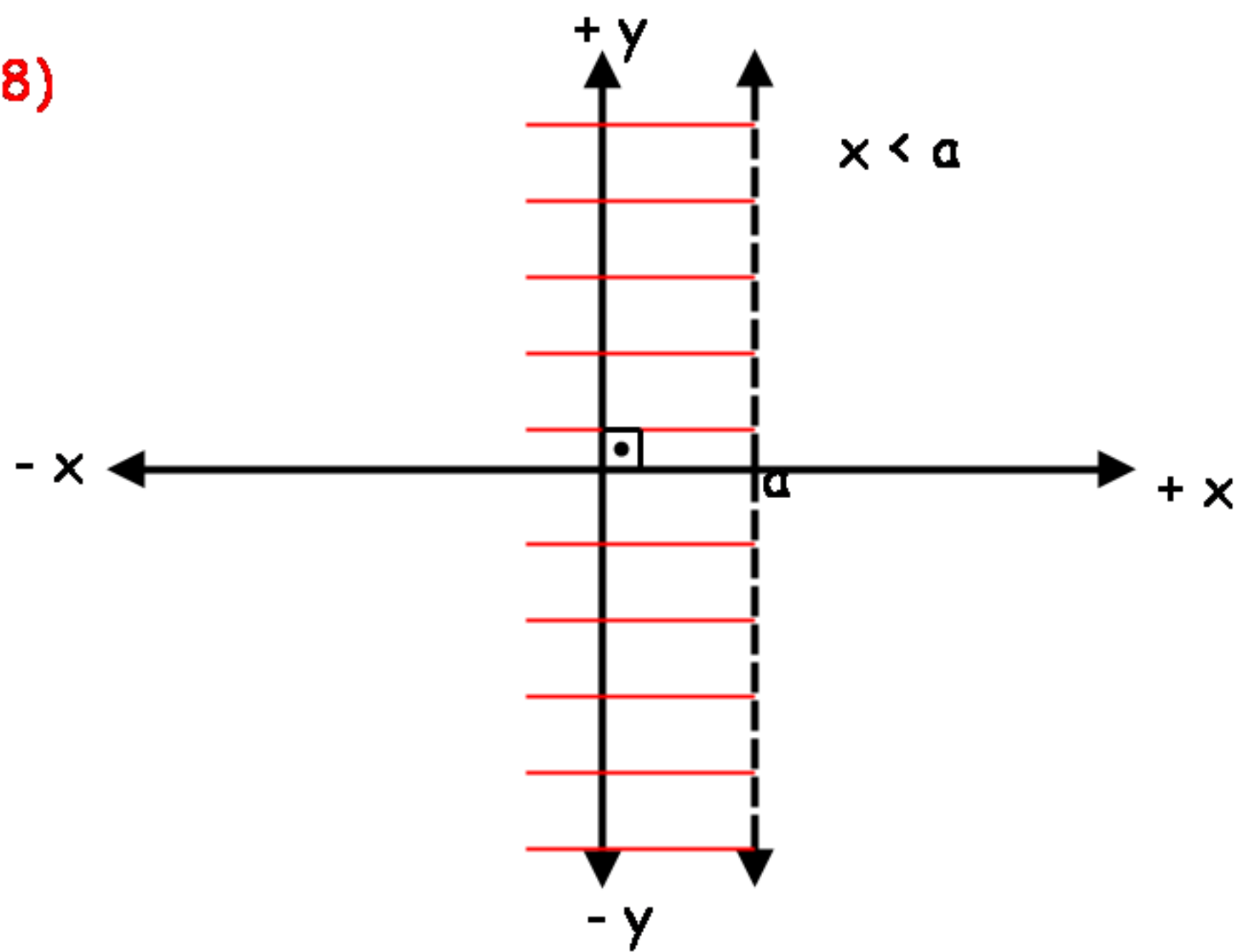
6)



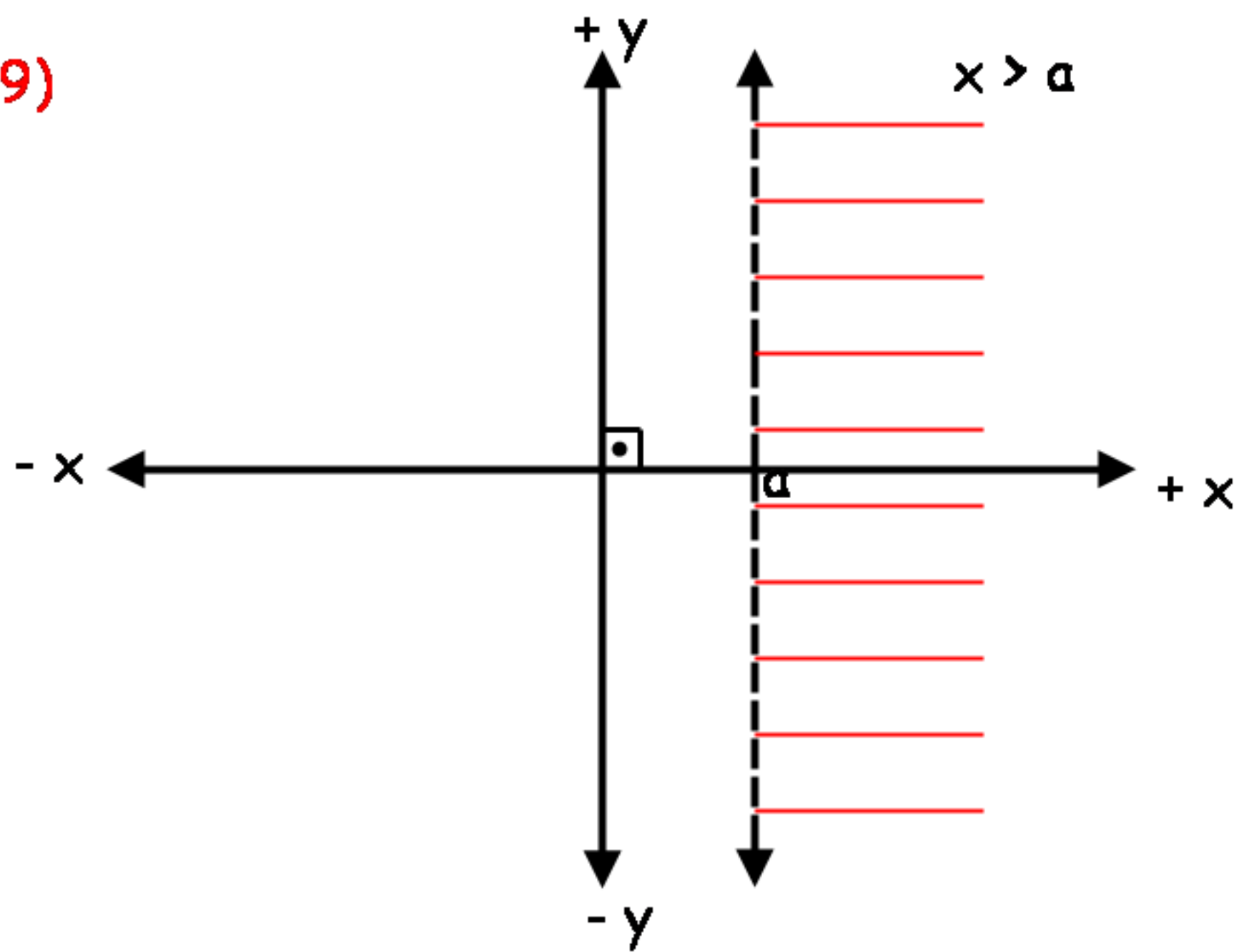
7)



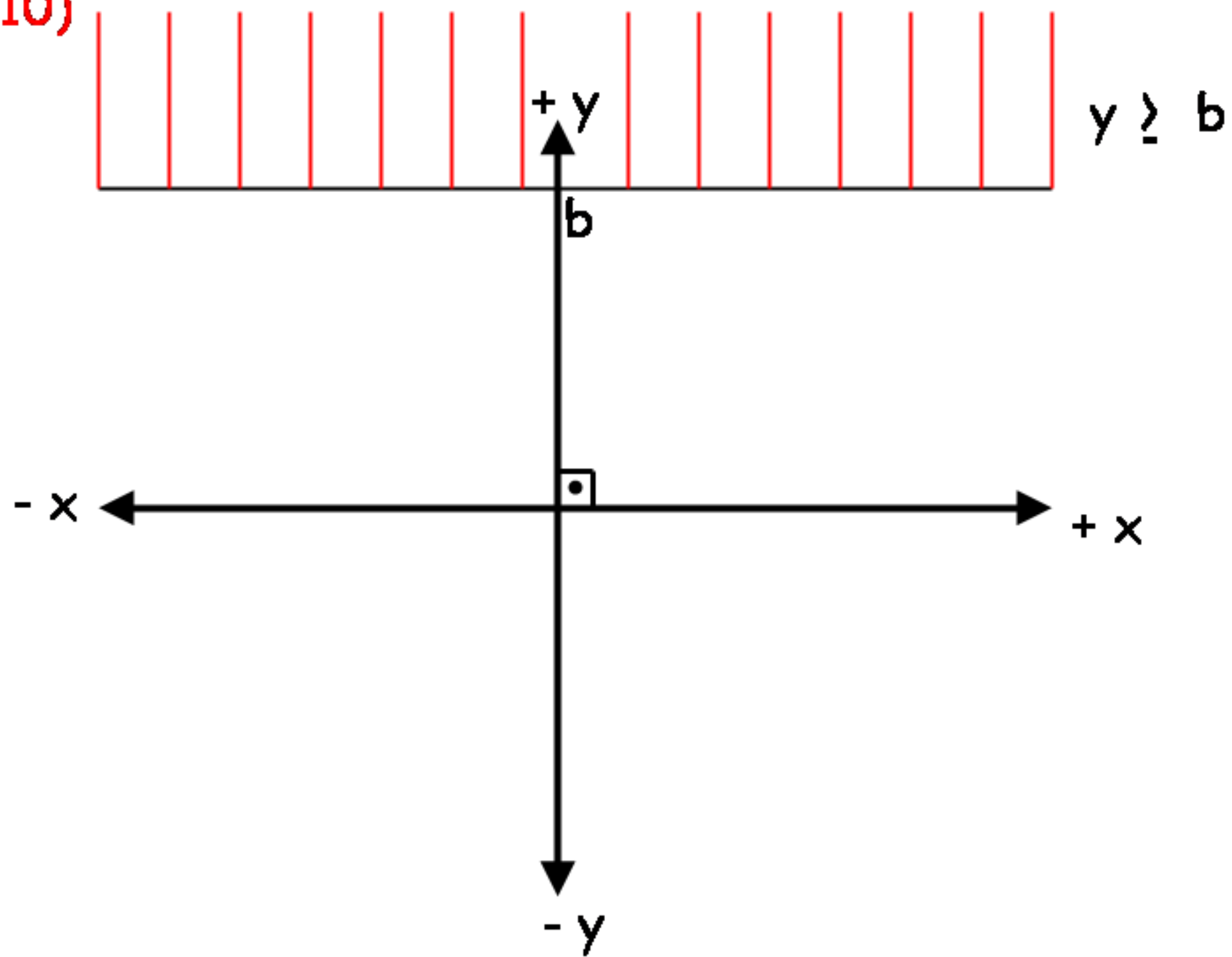
8)



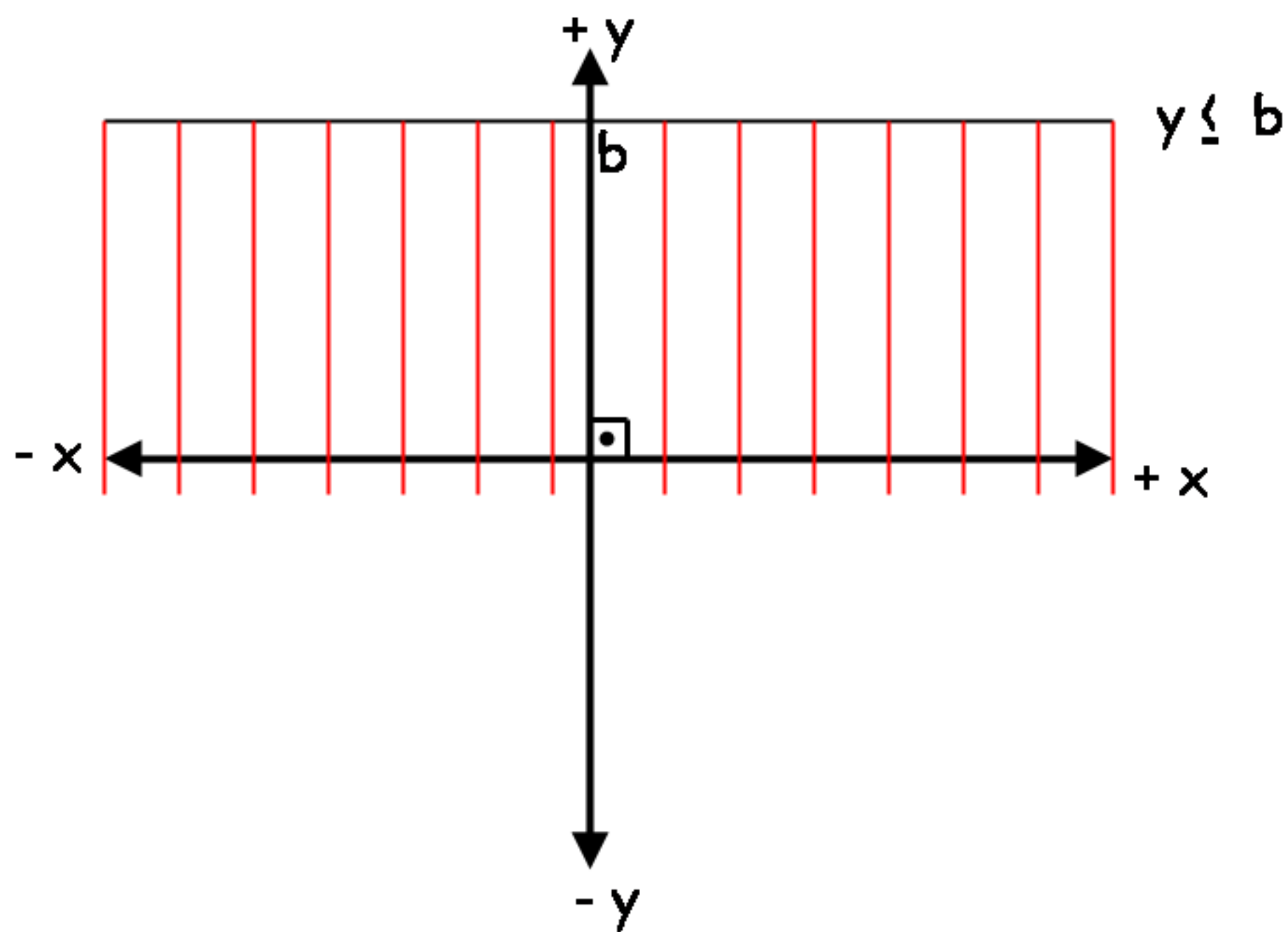
9)



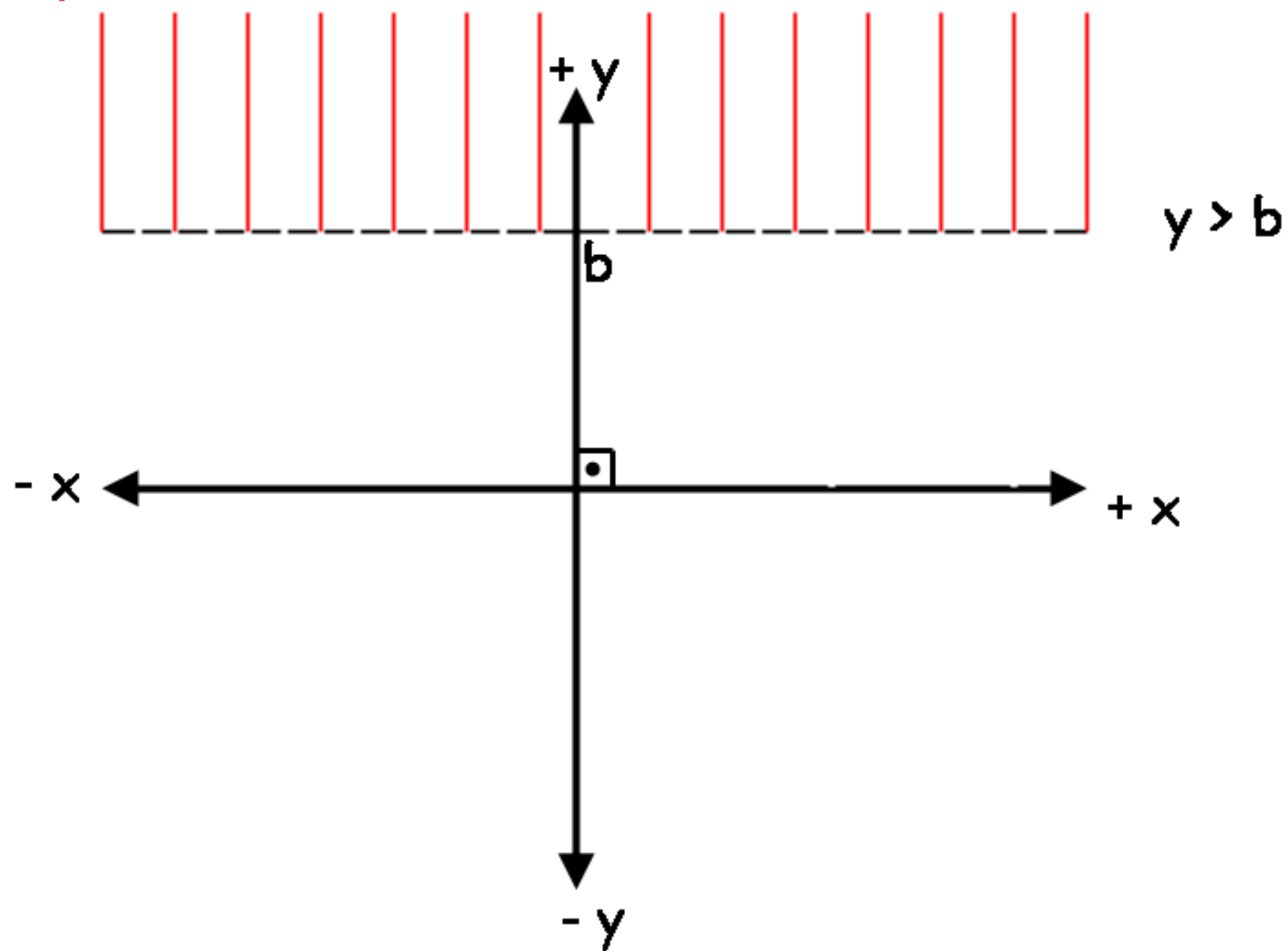
10)



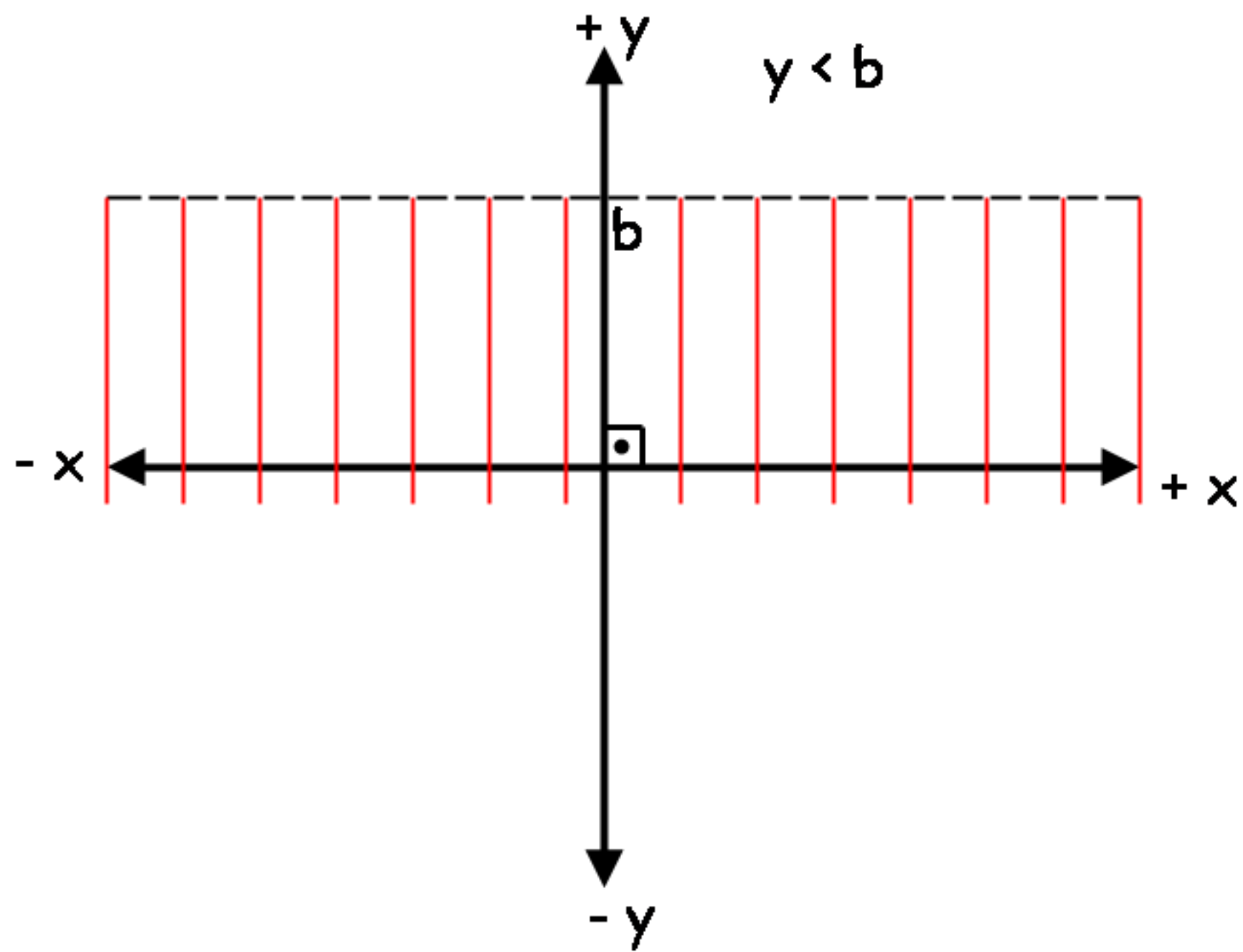
11)



12)



13)



PARABOL

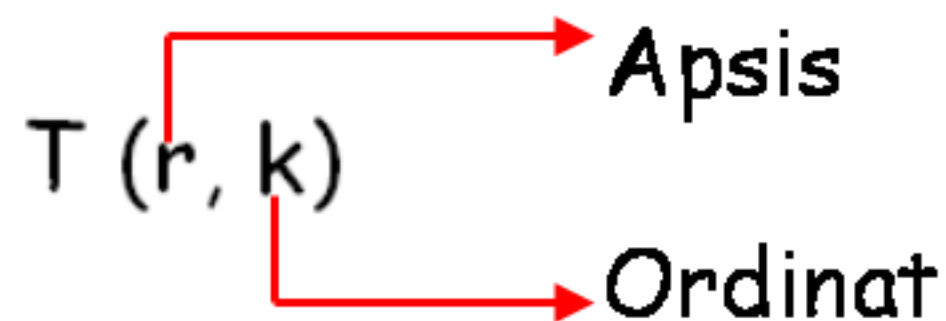
TANIM

$y = f(x) = ax^2 + bx + c$ şeklinde tanımlanan ikinci dereceden bir bilinmeyenli fonsiyonun grafiğine **Parabol** denir.

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

NOT

Parabolün tepe noktası $T(r, k)$ noktası ise;

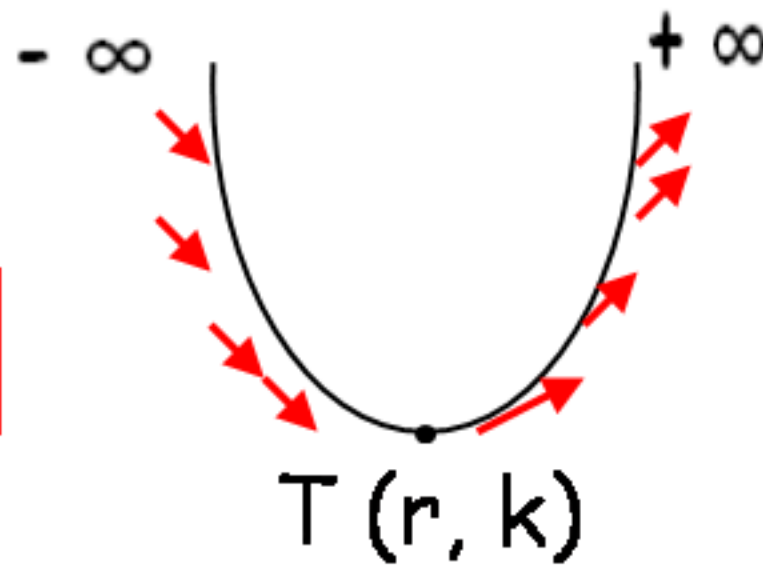


$$r = -\frac{b}{2a}$$

$$k = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

UYARI

+ $y = ax^2 + bx + c$ parabolü için ;



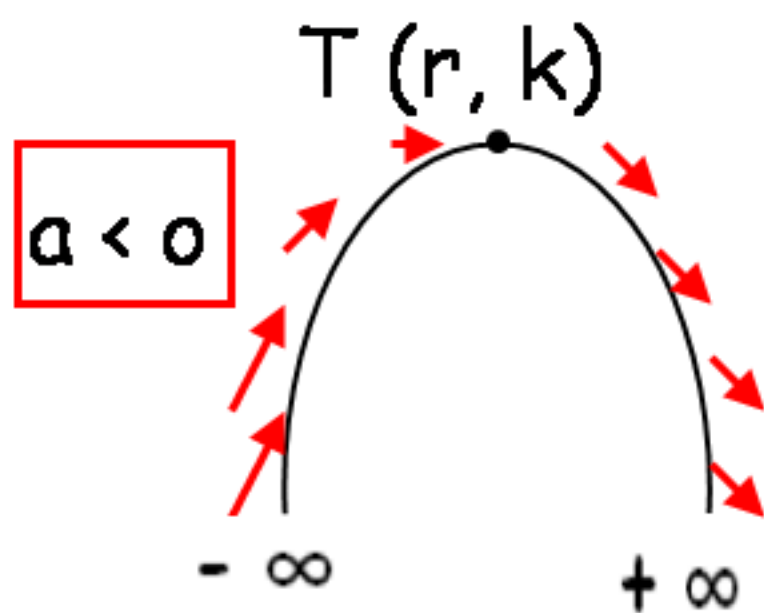
$$a > 0$$

Tepe noktası minimum noktasıdır.

Artandır

$(-\infty, r)$ aralığı azalandır.

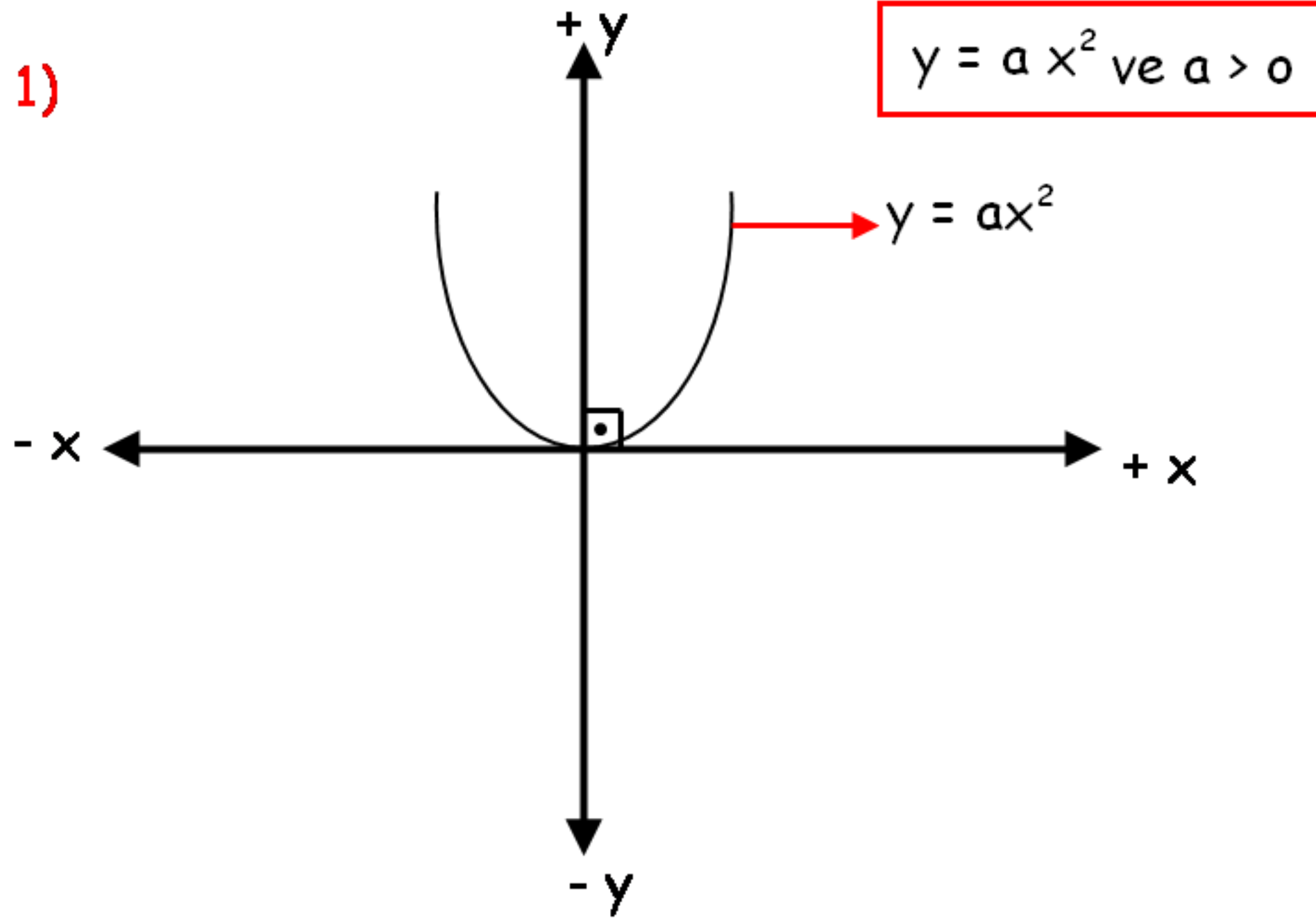
(r, ∞) aralığı artandır.



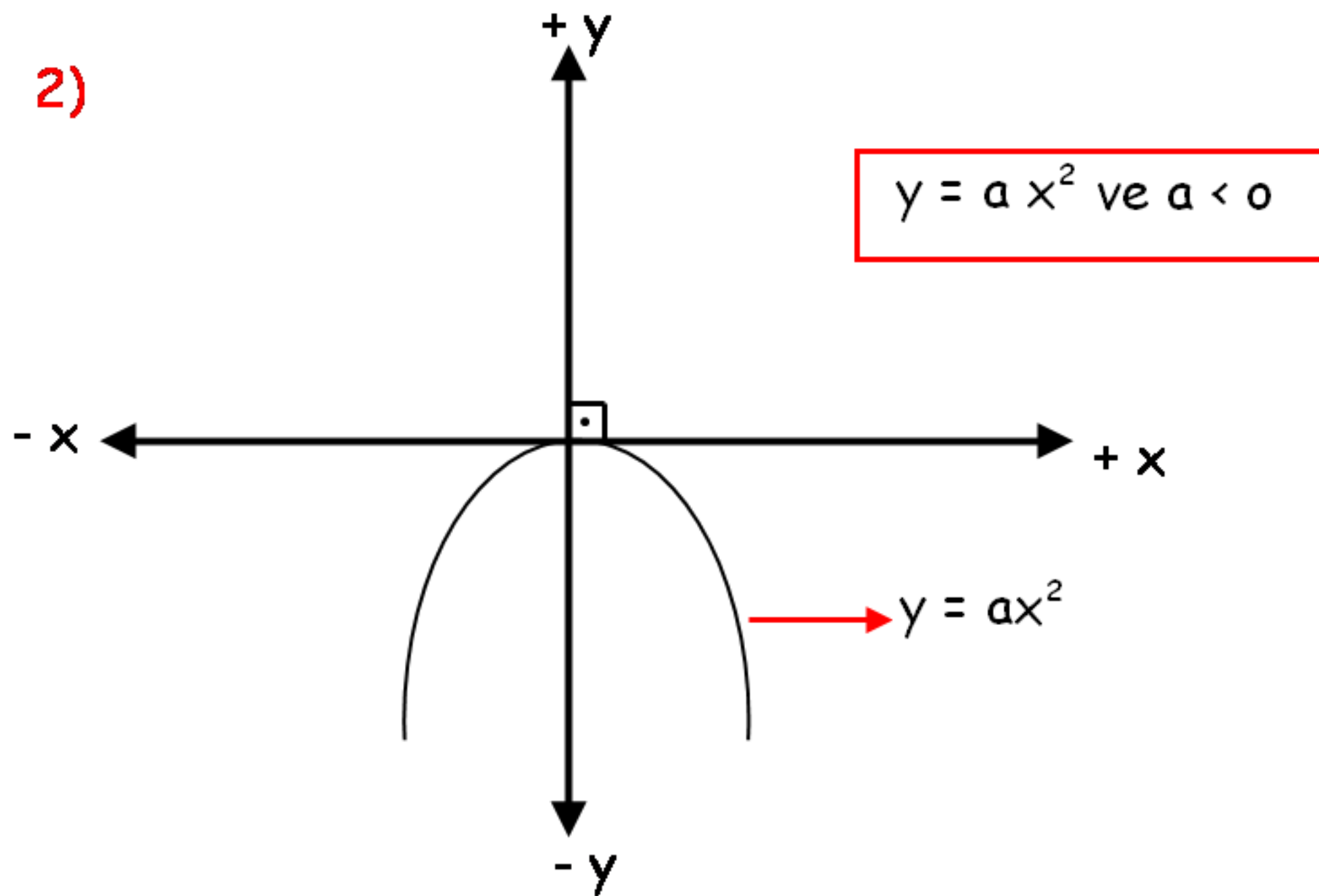
- Tepe noktası maximum noktasıdır.
- Azalandır.
- $(-\infty, r)$ aralığı artandır.
- $(r, +\infty)$ aralığı azalandır.

PARABOL İLE GRAFİK ÇİZİMİ

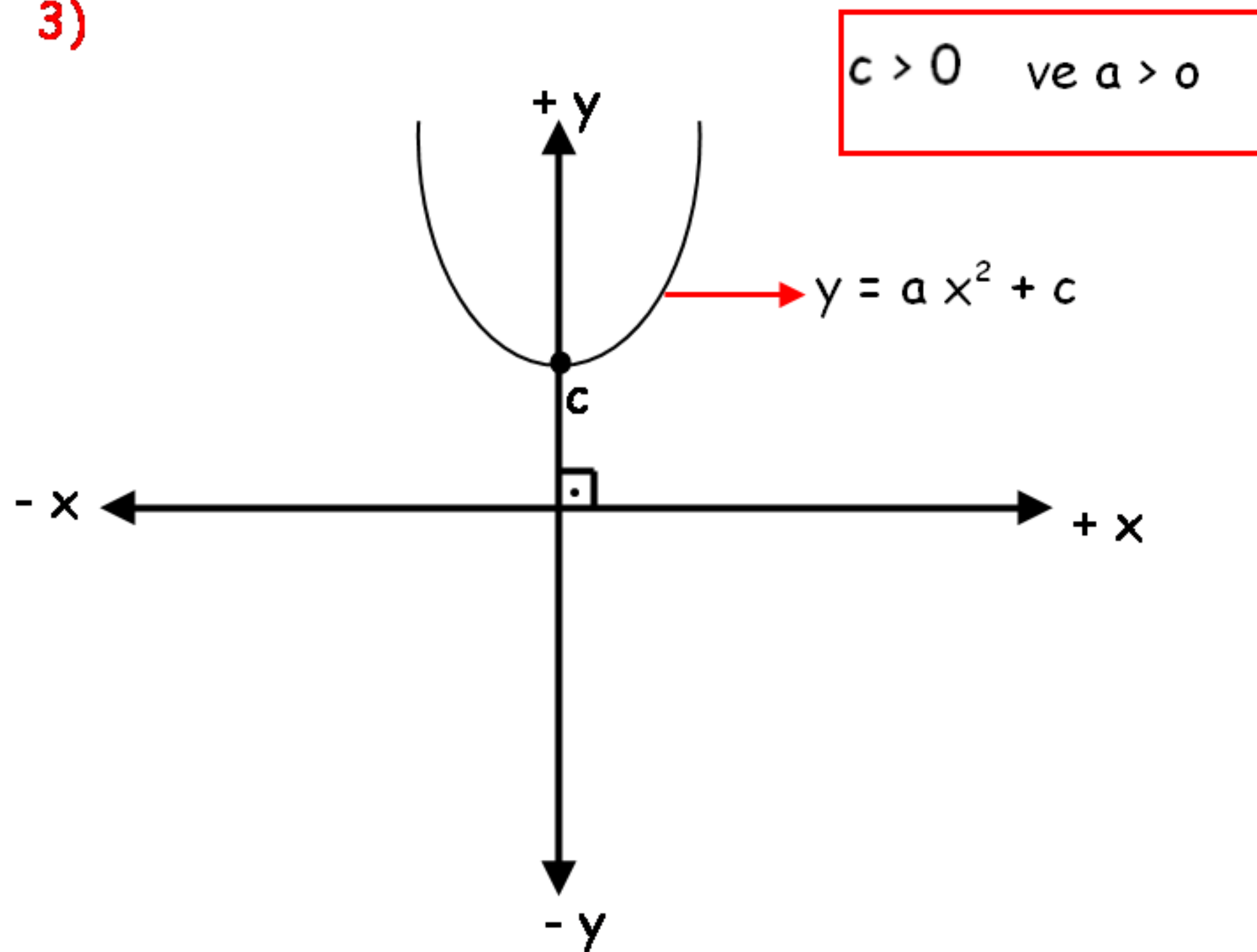
1)



2)

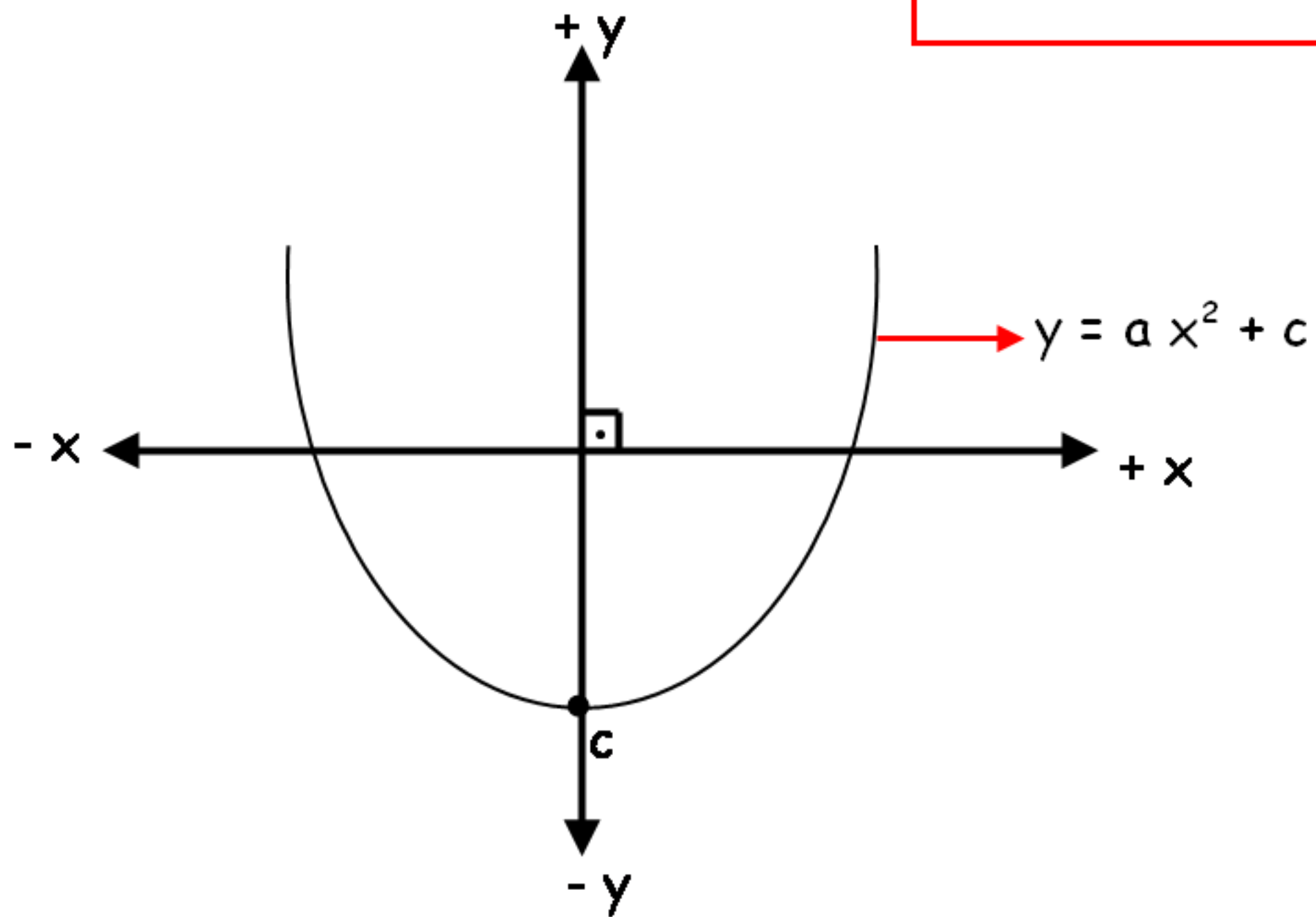


3)

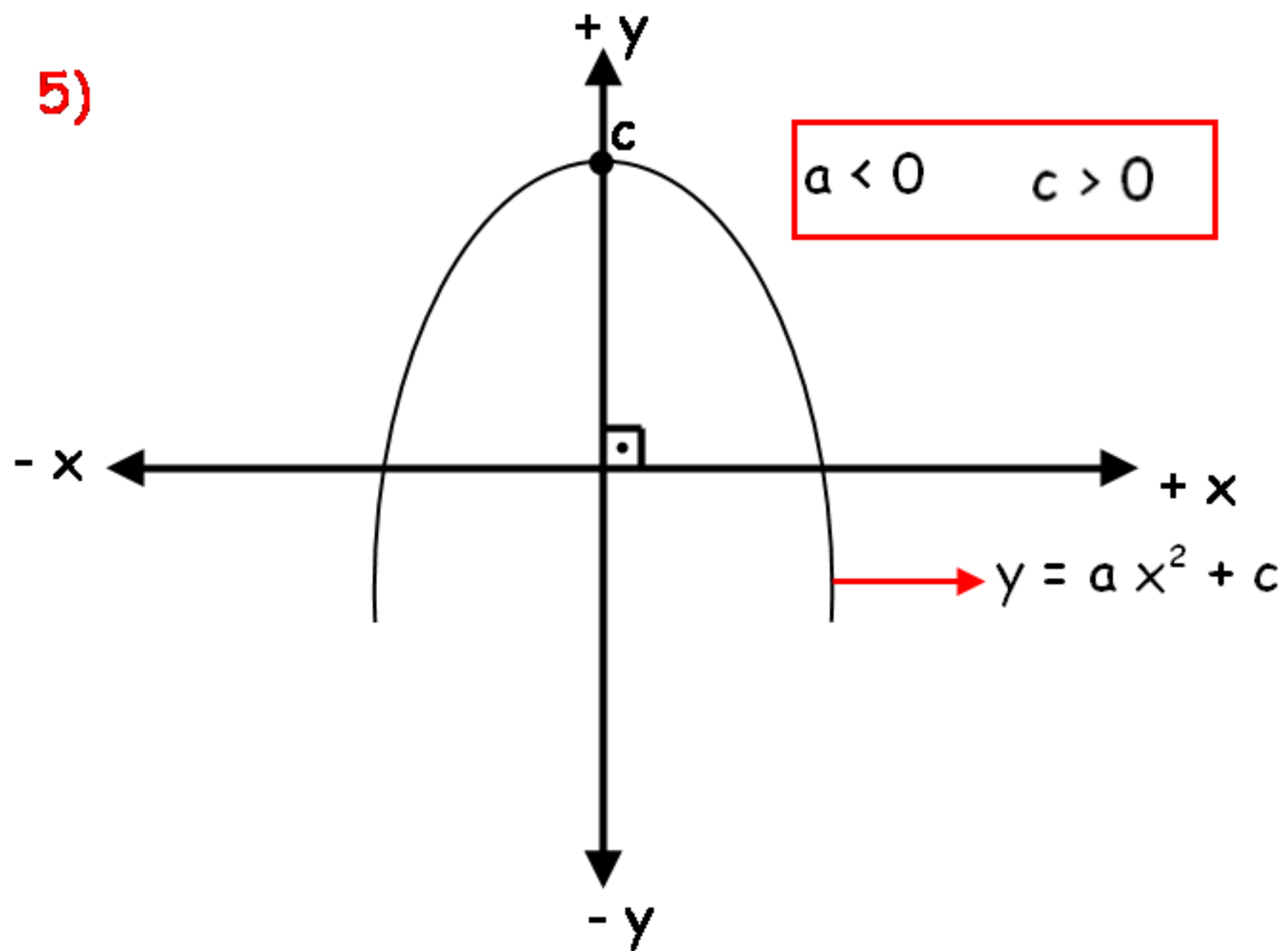


4)

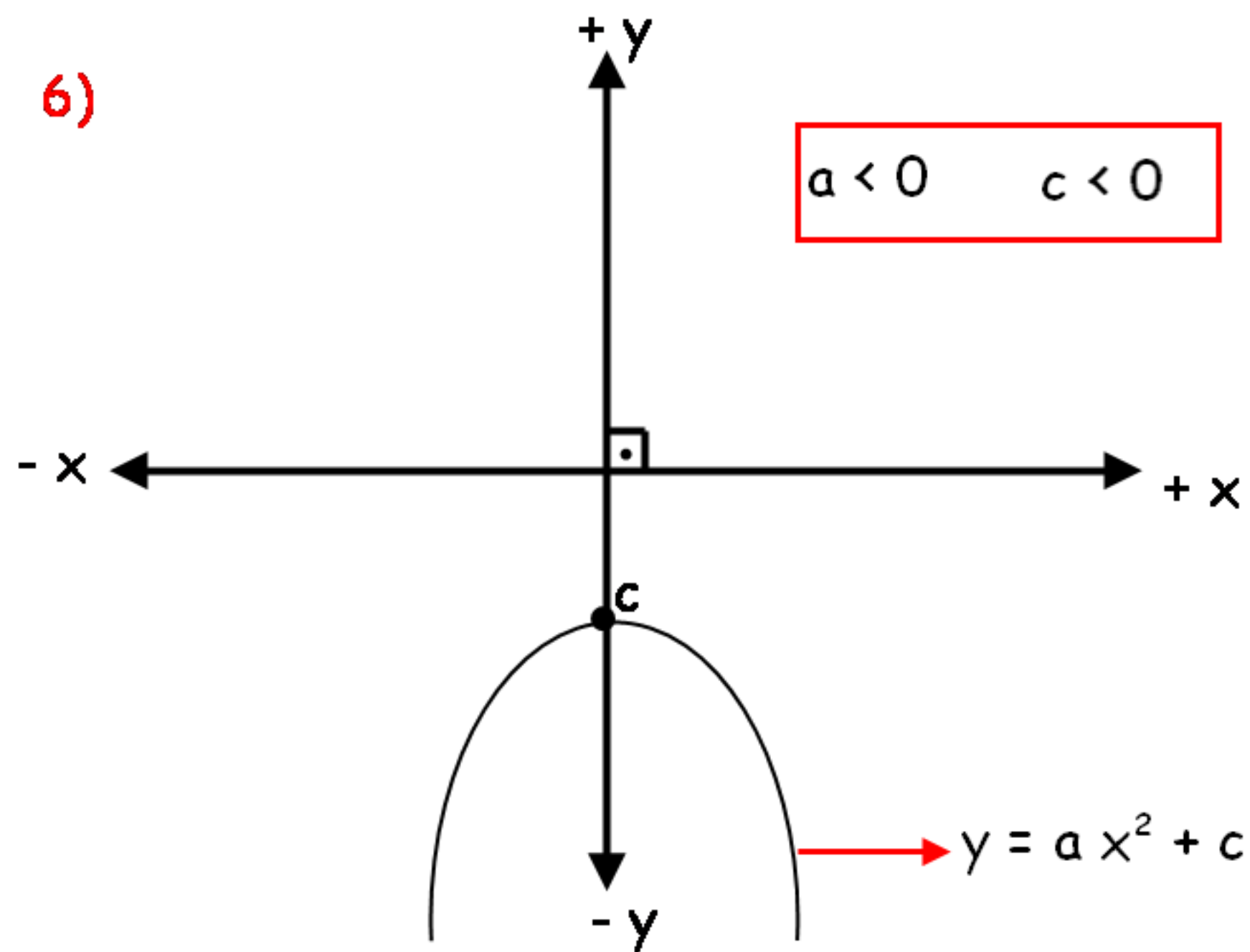
$$c < 0 \quad \text{ve} \quad a > 0$$



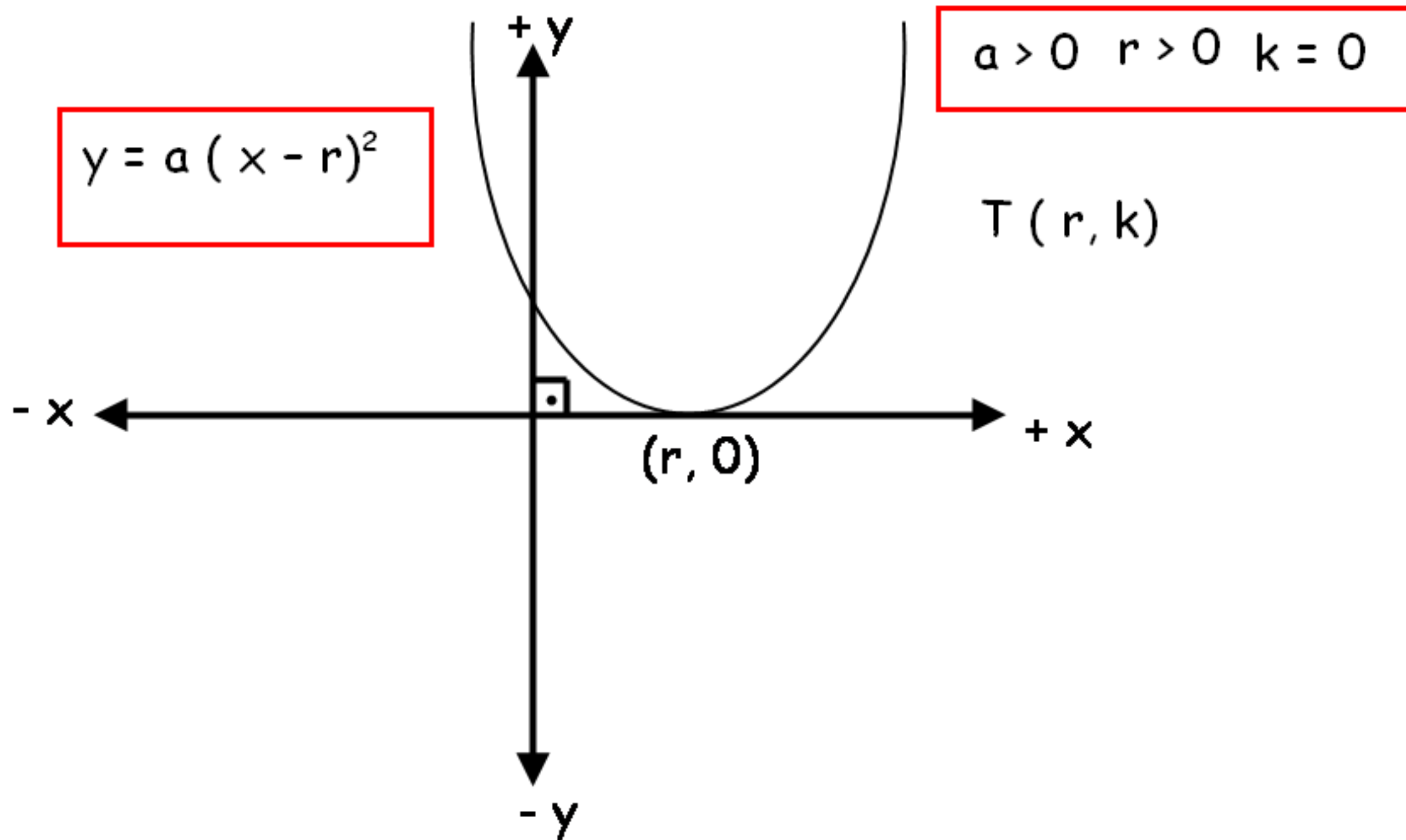
5)



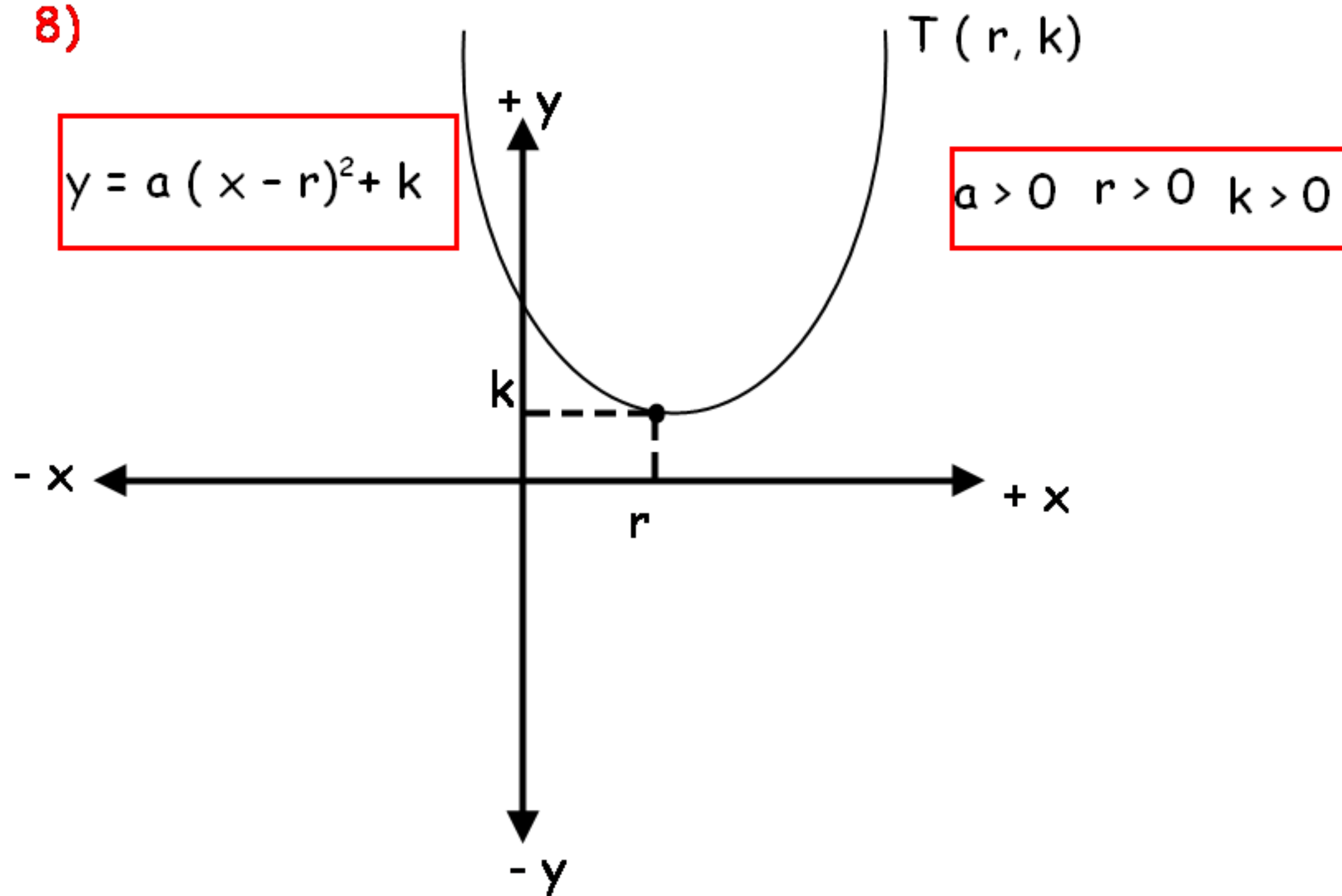
6)



7)



8)



PARABOL İLE DOĞRUNUN DÜZLEMDEKİ DURUMU

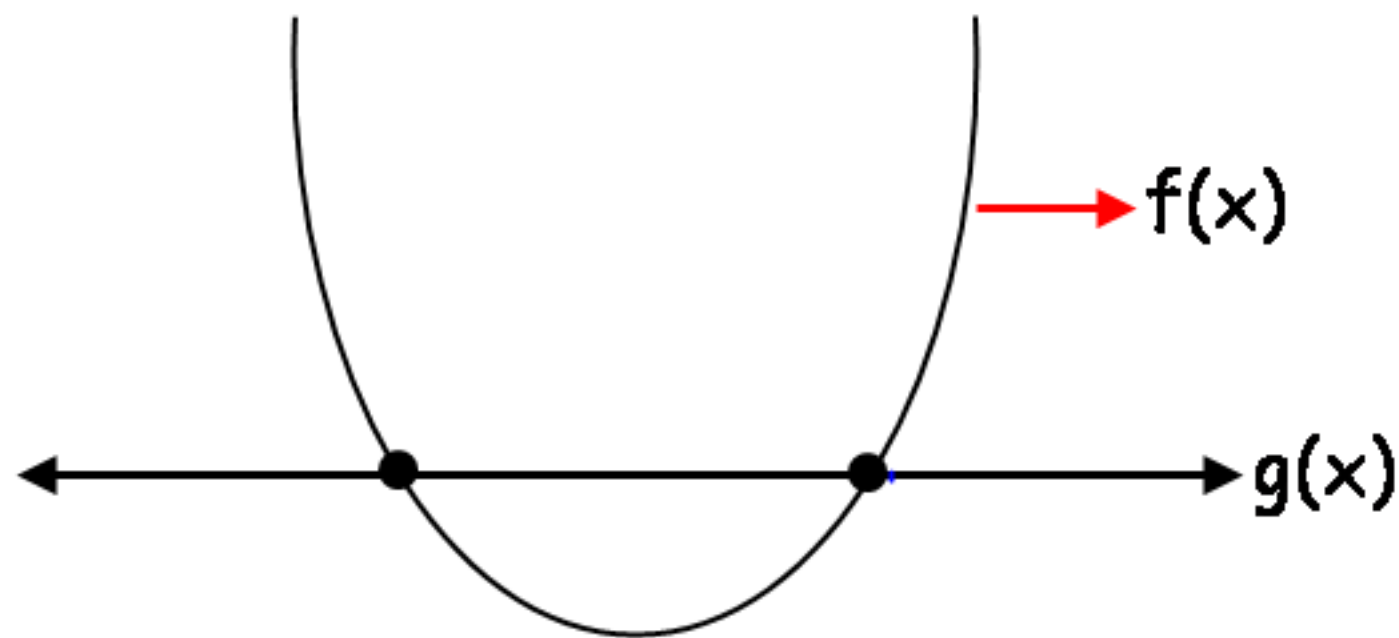
$y = f(x) = ax^2 + bx + c$ parabolü ile $y = g(x) = mx + n$ doğrusunun kesişim durumlarını belirlemek için ortak çözüm yapılır.

$$f(x) = g(x)$$

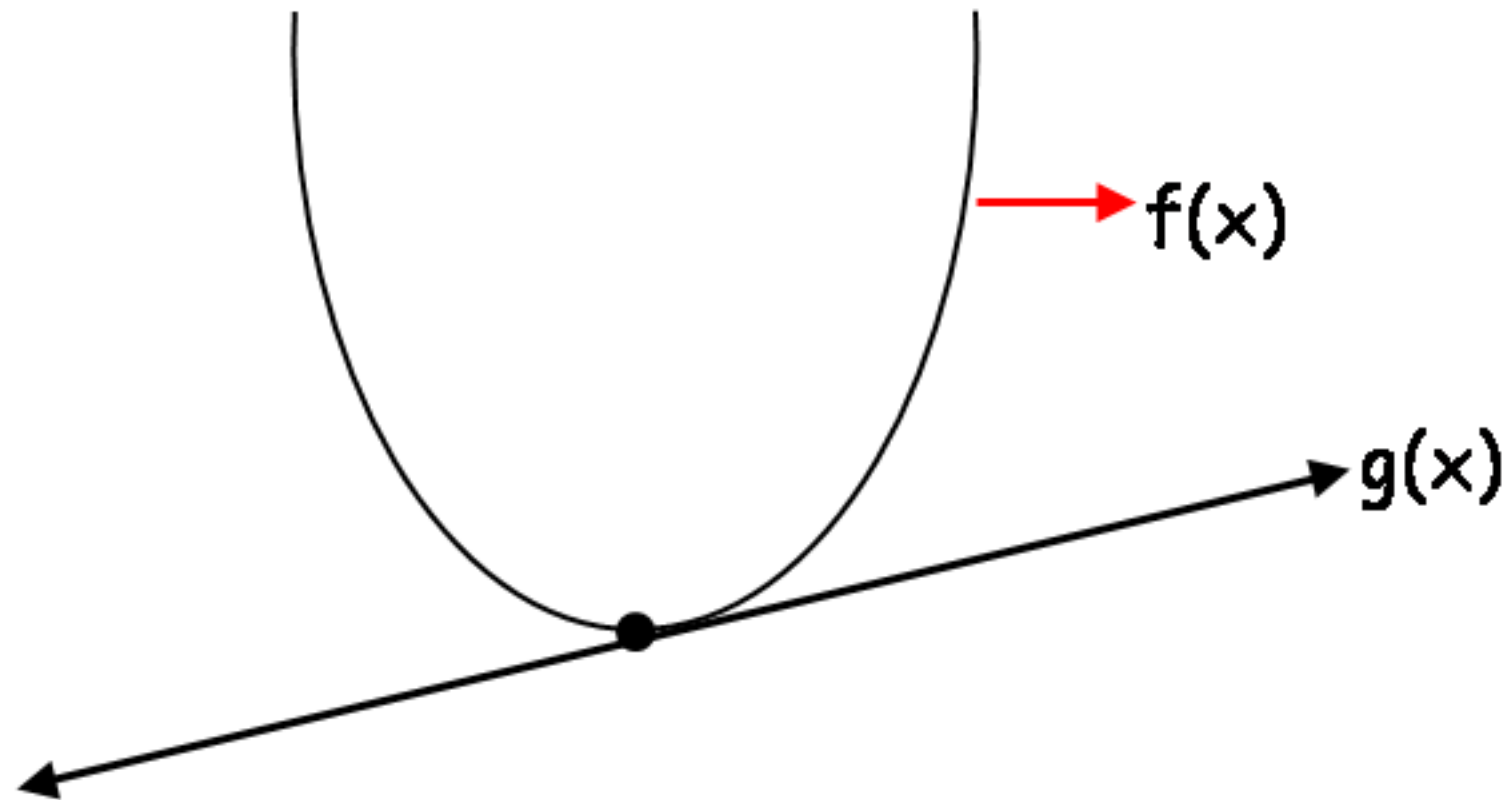
denkleminde

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

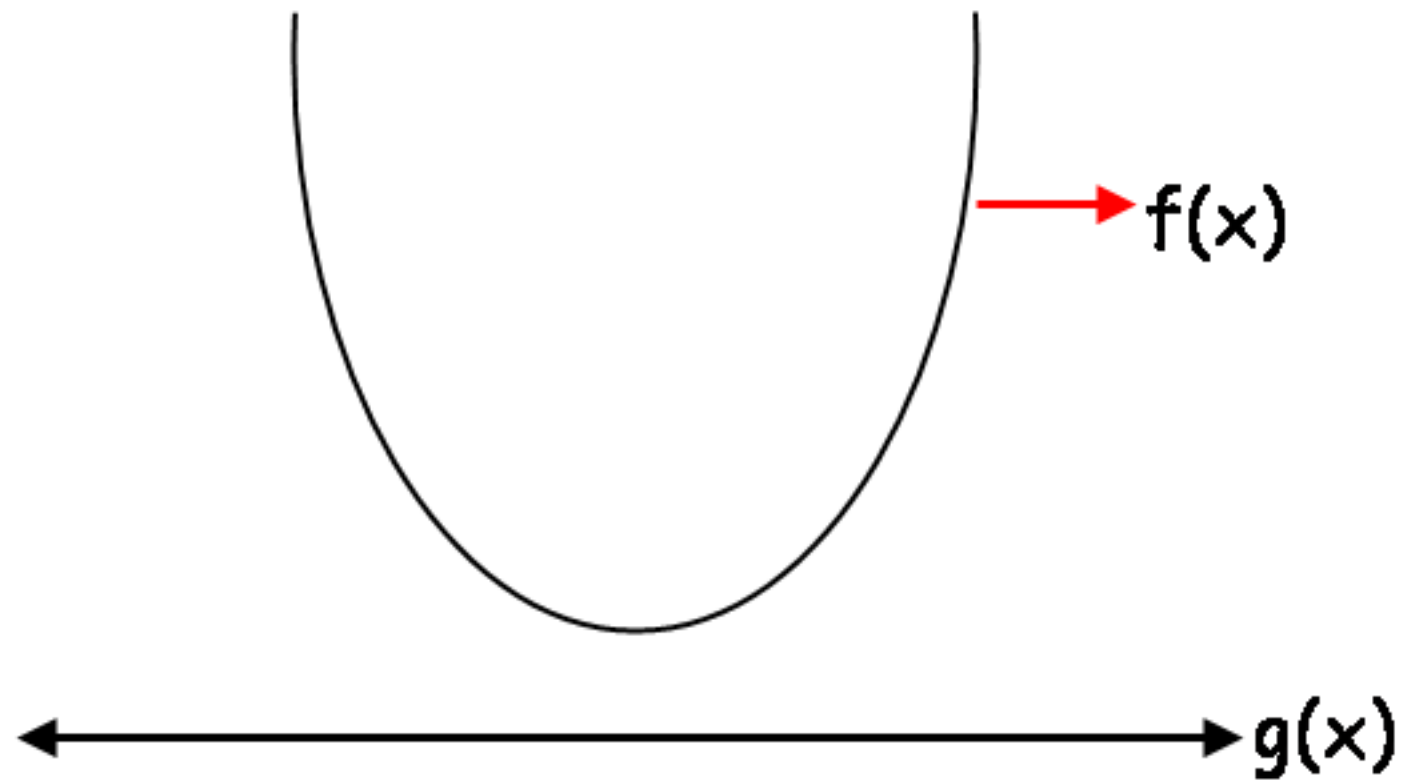
1) $\Delta > 0$ ise doğru, parabolü farklı iki noktada keser.



2) $\Delta = 0$ ise doğru, parabole teğettir.

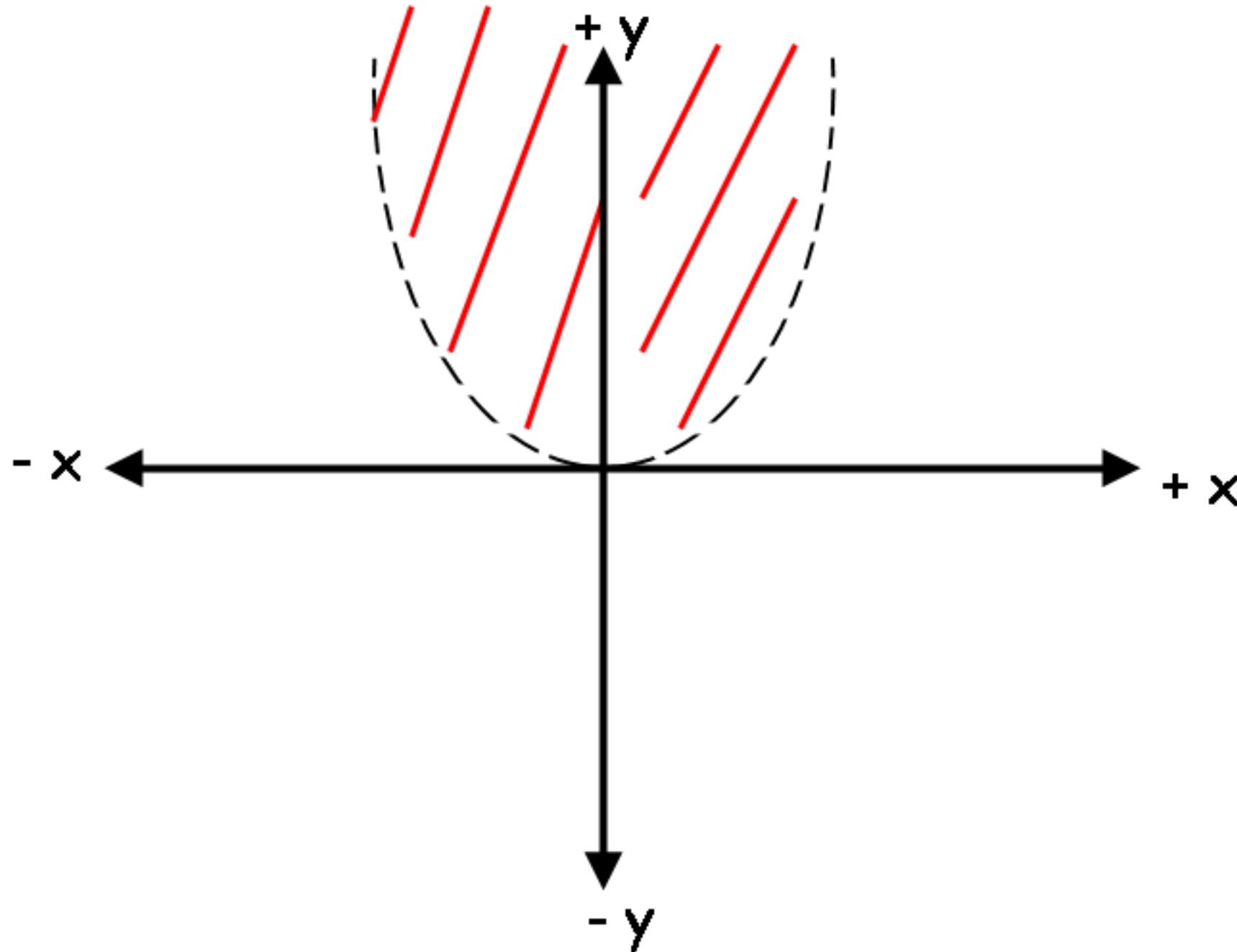


3) $\Delta < 0$ ise doğru, parabolü kesmez.

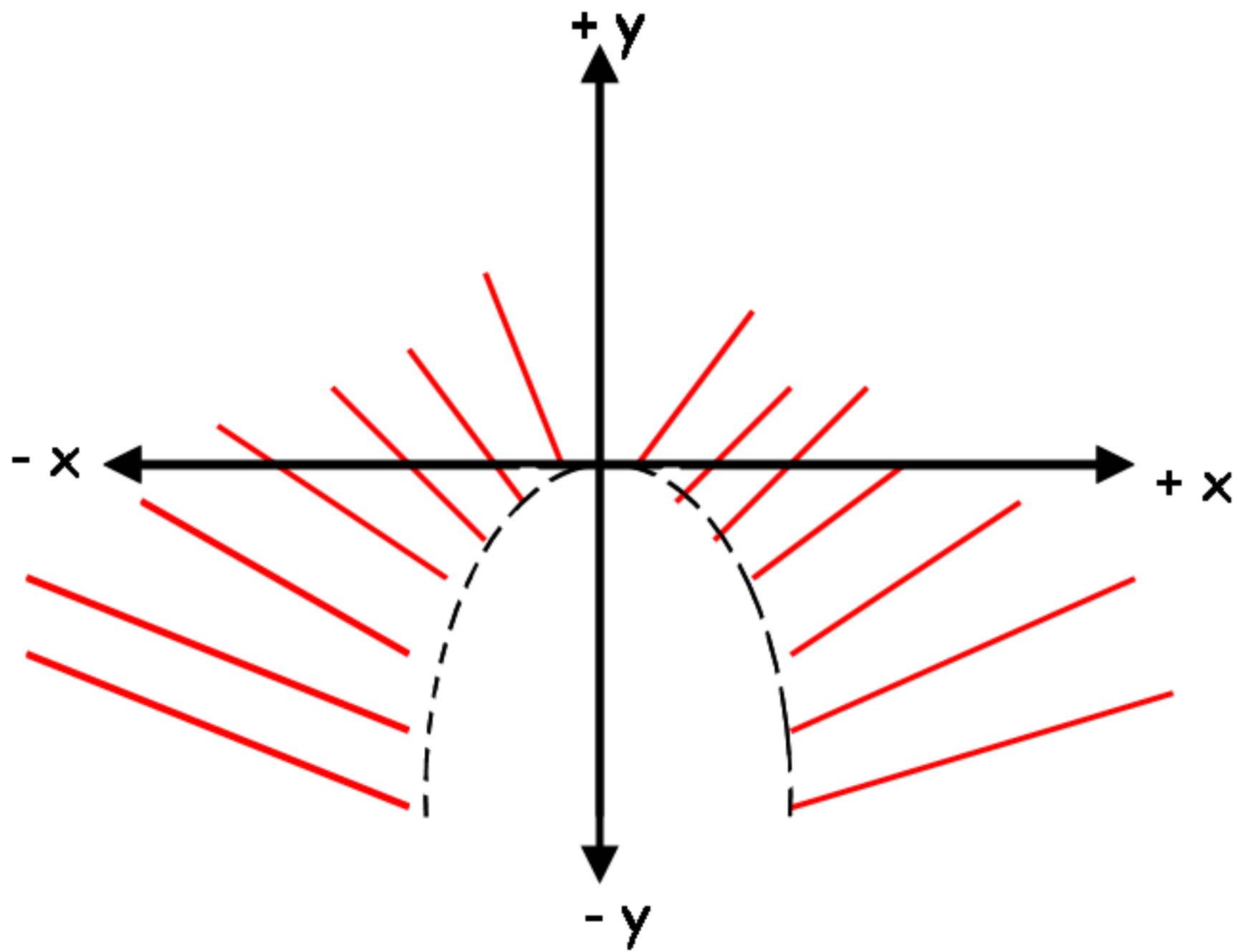


İKİNCİ DERECEDEKİ BİR BİLİNMEYENLİ EŞİTSİZLİKLER

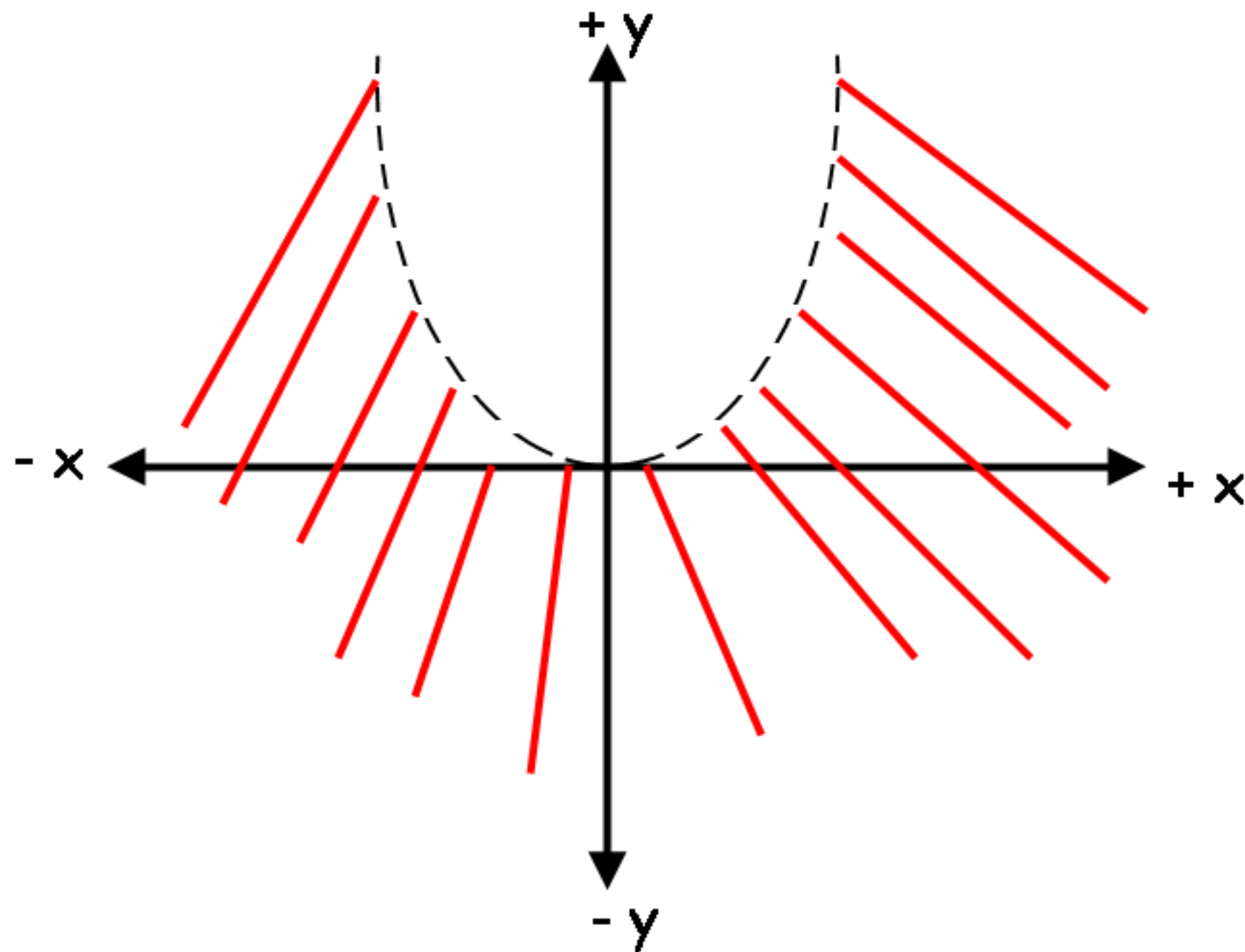
1) $y > ax^2 + bx + c \quad a > 0$



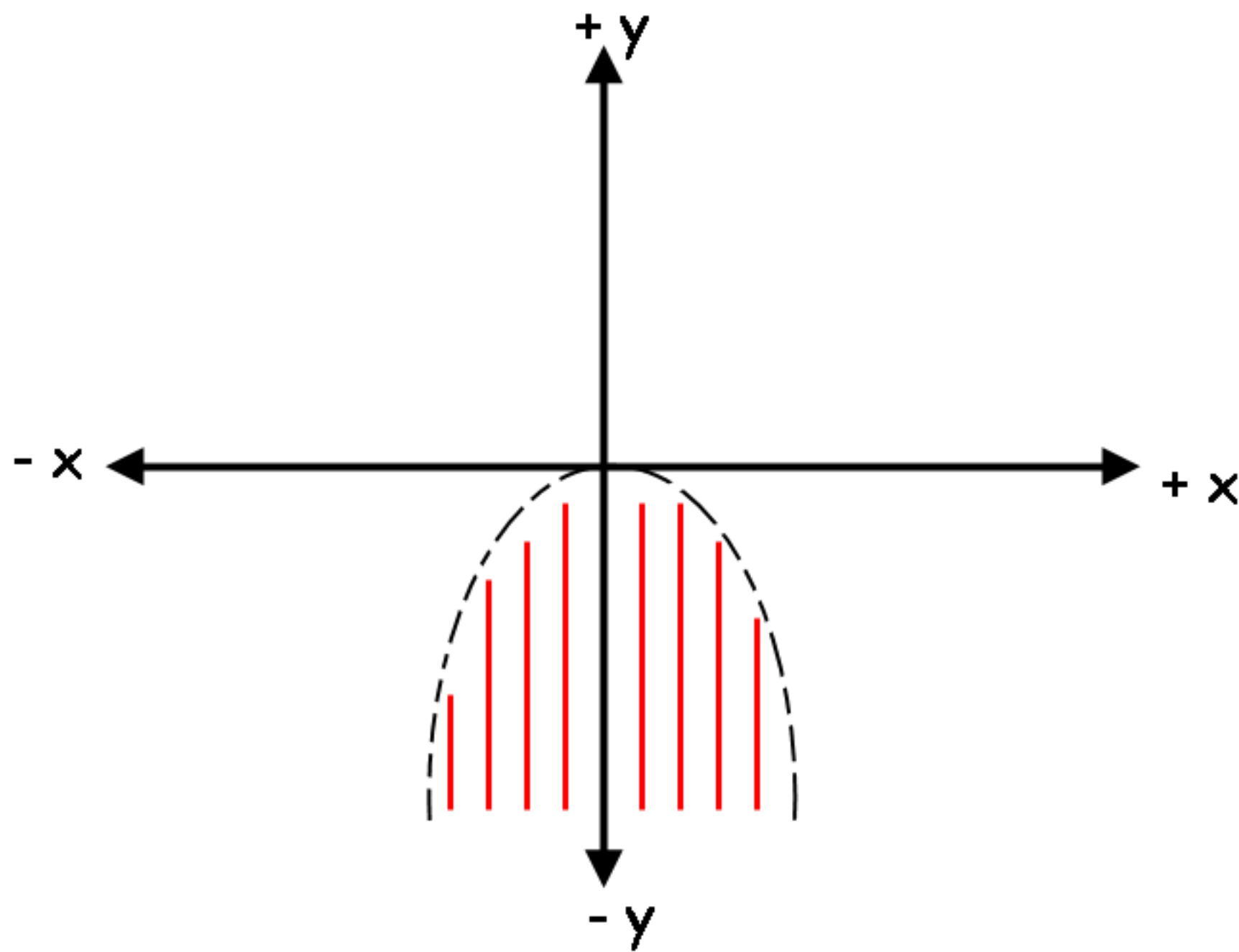
2) $y > ax^2 + bx + c$ $a < 0$



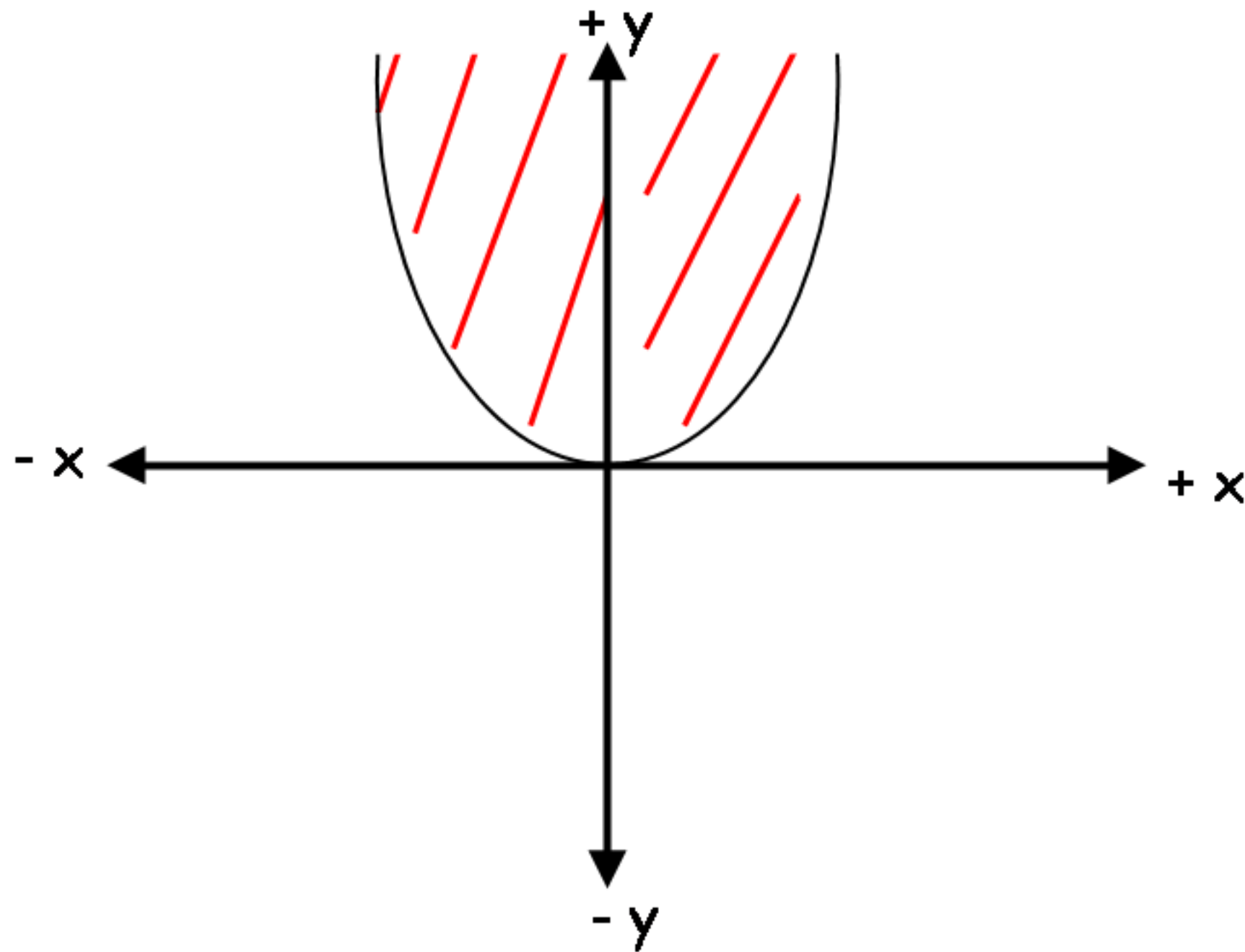
3) $y < ax^2 + bx + c \quad a > 0$



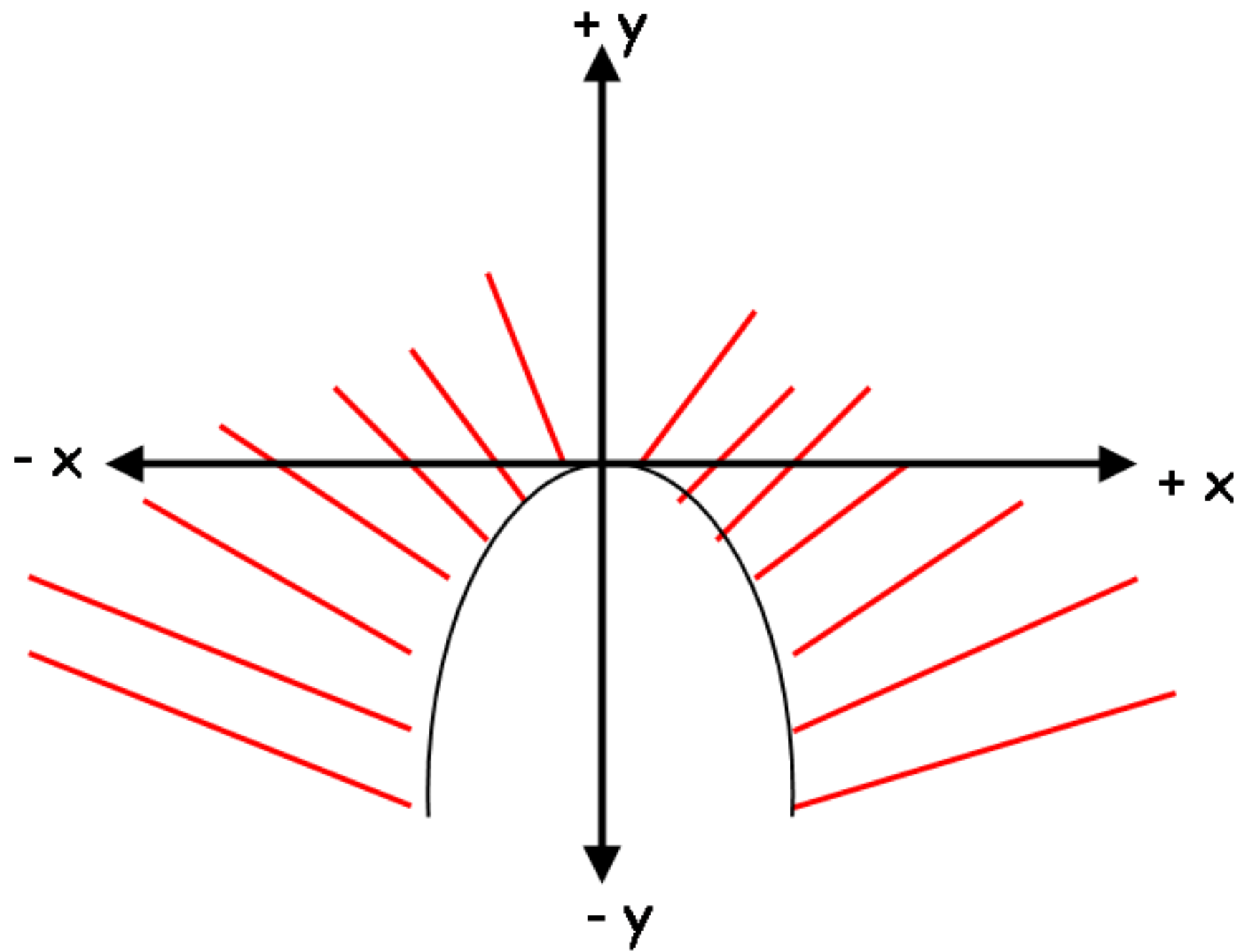
4) $y < ax^2 + bx + c \quad a < 0$



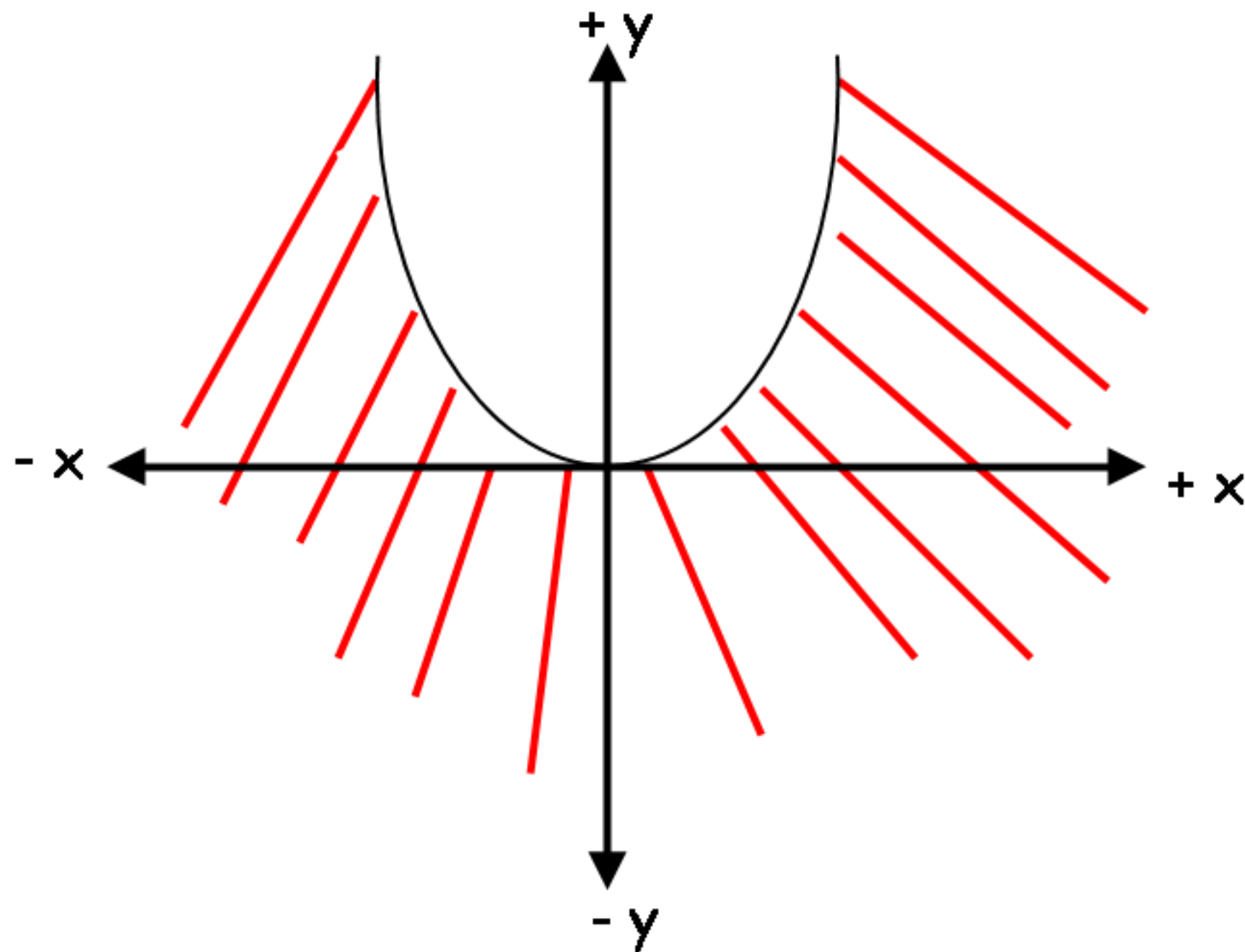
5) $y \geq ax^2 + bx + c \quad a > 0$



6) $y \geq ax^2 + bx + c$ $a < 0$



7) $y \leq ax^2 + bx + c \quad a > 0$



8) $y \leq ax^2 + bx + c \quad a < 0$

