ÜNİTE IX-X

INTEGRAL

ARA SINAV ÇIKABİLECEK SORU ADEDİ: YOK

FİNAL/BÜTÜNLEME ÇIKABİLECEK SORU ADEDİ: 5-7 Sorudur

ÜNİTE İÇERİĞİ

Ünitemizde belirsiz integral kavramını ve hesaplama yöntemlerini ayrıntılı olarak öğreneceksiniz.

Belirli integrali, belirli integral yardımıyla alan hesabını ve bir takım ekonomik uygulamaları göreceksiniz.

BELİRSİZ İNTEGRAL

TANIM

$a,b \in R$ olmak üzere;

$f:[a,b] \rightarrow R$ sürekli bir fonksiyon ve $\forall x \in (a,\ b)$ için

$F'(x) = f(x)$ ise

$\boxed{\int f(x).dx \text{ ifadesine } f(x)\text{'in integrali denir.}}$

$\boxed{\int f(x).dx = F(x) + c}$ $c \in R$ olarak gösterilir.

integral sabitidir.

UYARI

İntegral türevi verilen bir fonksiyonu bulma işlemidir.
(Türevin tersidir.)

integral sembolüdür.

$$\int f(x).dx = f(x) + c$$

İntegral Sabitidir.

diferansiyel(türev gibi)

fonksiyonun türevidir.

Fonksiyondur.

ÖRNEK

Görsel Eğitim

$$\int 2x.dx = x^2 + c' \text{dir.}$$

UYARI

Belirsiz integralde integral alma işlemi bittikten sonra c integral sabiti mutlaka eklenir.

İNTEGRAL FORMÜLLERİ (KURALLARI)

1) $$K \in R, \quad \int k.u^{n}du = \frac{k.u^{n+1}}{n+1} + c$$

ÖRNEK
Görsel Eğitim

$$\int 3x^{2}.dx = 3.\frac{x^{2+1}}{2+1} + c = \frac{\cancel{3}x^{3}}{\cancel{3}} + c = x^{3} + c$$

ÖRNEK
Görsel Eğitim

$$\int 4x.dx = 4.\frac{x^{1+1}}{1+1} + c = \frac{\overset{2}{\cancel{4}}x^{2}}{\cancel{2}} + c = 2x^{2} + c$$

2) $$\boxed{\int \sqrt[n]{u^m}.du = \int u^{\frac{m}{n}}.du = \frac{n.\sqrt[n]{u^{m+n}}}{m+n} + c}$$

ÖRNEK

Görsel Eğitim

$$\int \sqrt[3]{x^2}.dx = \int x^{\frac{2}{3}}.dx = \frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} + c = \frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + c$$

3) $$\boxed{\int \frac{k.du}{u} = k.\ln|u| = \ln u^k + c}$$

ÖRNEK

Görsel Eğitim

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$$

ÖRNEK

Görsel Eğitim

$$\int \frac{2x.dx}{x^2} = \ln|x^2| + c = 2\ln|x| + c$$

ÖRNEK

Görsel Eğitim

$$\int \frac{2x.dx}{x^2+4} = \ln|x^2+4| + c$$

4) $\boxed{\int k.e^{u}.du = k.e^{u} + c}$

ÖRNEK

Görsel Eğitim

$$\int e^{2x^2+3}.4x.dx = e^{2x^2+3} + c$$

5) $$\boxed{\int a^u.du = \frac{a^u}{\ln a} + c}$$

ÖRNEK

Görsel Eğitim

$$\int 5^{2x^3+7}.6x^2.dx = \frac{5^{2x^3+7}}{\ln 5} + c$$

UYARI

Bir ürüne ilişkin marjinal maliyet(marjinal gelir, marjinal kar) fonksiyonu verilip maliyet (toplam gelir, toplam kar) fonksiyonu istenildiğinde marjinal maliyet fonksiyonunun integrali alınarak bulunur.

ÖRNEK

x birim mal için marjinal maliyet fonksiyonu $f(x) = 5x^4 + 2x$ olduğuna göre maliyet fonksiyonu nedir ?

Maliyet fonksiyonu = f(x)

$$f(x) = \int (5x^4 + 2x).dx = \frac{\cancel{5}x^5}{\cancel{5}} + \frac{\cancel{2}x^2}{\cancel{2}} + c$$

$$\boxed{f(x) = x^5 + x^2 + c}$$

UYARI

Bir başlangıç koşulu verip c integral sabiti istenildiğinde, integral alıp değeri yerine yazarak işlem sonuca ulaştırılır.

$f(2)=1$ ve $f(x)=\int(3x^2-6x+2)$ integralinin sonucundaki c integral sabitinin değeri kaçtır ?

$$f(x)=\int(3x^2-6x+2).dx=\frac{3x^3}{3}-\frac{6x^2}{2}+2x+c$$

$$f(x)=x^3-3x^2+2x+c$$

$$f(2)=2^3-3.2^2+2.2+c=1$$

$$f(2)=8-12+4+c=1$$

$$\boxed{c=1}$$

BELİRSİZ İNTEGRAL ALMA YÖNTEMLERİ

İntegral soruları arasında integral alma yöntemleriyle çözemeyeceğimiz sorularla karşılaşabiliriz. Bu soruları çözmek için farklı işlemler uygulayacağız.

1) Değişkeni Değiştirme Yöntemi

Değişken değiştirme yöntemi verilen işlemi ''integral yöntemlerden'' birine benzeterek işlemi devam ettireceğiz.

- Parantez işleminin içi $\Rightarrow$ U
- Kök işleminin içi $\Rightarrow$ U
- Üstel işlemin üssü $\Rightarrow$ U
- Kesir işlemin paydası $\Rightarrow$ U

UYARI

Uygun olan değişken değiştirilir.

ÖRNEK

Görsel Eğitim

$$\int (x^2 - 4).x.dx \Rightarrow x^2 - 4 = u$$

ÖRNEK

Görsel Eğitim

$$\int (x^5+3)^{20}.x^4.dx \Rightarrow x^5+3=u$$

ÖRNEK

Görsel Eğitim

$$\int \frac{x^2.dx}{5x^3+12} \Rightarrow 5x^3+12=u$$

ÖRNEK

Görsel Eğitim

$$\int \sqrt{3x-2}.dx \Rightarrow 3x-2=u$$

UYARI

Rasyonelleştirme işlemlerinde fonksiyon $\sqrt{x}$ için $x=u^2$, $\sqrt[3]{x}$ için $x=u^3$ ile rasyonel işlemler yapılır.

ÖRNEK

Görsel Eğitim

$$\int e^{4x-1}.dx \Rightarrow 4x-1=u$$

ÖRNEK

Görsel Eğitim

$$\int \frac{dx}{5-\sqrt{x}}$$ integrali için $\sqrt{x}=u \Rightarrow x=u^2$

ÇÖZÜMLÜ SORULAR

ÖRNEK

Görsel Eğitim

$$\int (4x+3)^{30}.dx$$

$4x+3=u$

$4.dx=du$

$$dx=\frac{du}{4}$$

- Parantez içi U'ya eşitlenir.
- Parantezin içinin türevi dx ile çarpılarak du'ya eşitlenir.
- Bu bilgiler yerine yazılır.

$$\int \frac{u^{30}.du}{4}=\frac{1}{4}\int u^{30}.du$$

$$\frac{1}{4}\int u^{30}.du=\frac{1}{4}.\frac{1}{31}.u^{31}+c=\frac{1}{124}.u^{31}+c$$

$$=\frac{1}{124}.(4x+3)^{31}+c$$

ÖRNEK

Görsel Eğitim

$$\int \frac{dx}{2x+3} = ?$$

$$2x + 3 = u$$

$$2.dx = du$$

$$dx = \frac{du}{2}$$

$$\int \frac{du}{u.2} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u}$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}.\ln|u| + c = \ln\sqrt{u} + c$$

UYARI

Paydanın türevi ''1'' ise;

$$\int \frac{dx}{x+5} \Rightarrow x+5=u \qquad \int \frac{du}{u} = \ln|u| + c = \ln|x+5| + c$$

$$dx = du$$

ÖRNEK

Görsel Eğitim

$$\int \frac{\ln|x-2|.dx}{x-2} = \int \underbrace{\ln|x-2|}_{u} . \underbrace{\frac{1.dx}{x-2}}_{du} = \int u.du$$

$$\frac{1}{2}.u^2 + c = \frac{1}{2}.\ln|x-2|^2 + c$$

ÖRNEK

Görsel Eğitim

$$\int \frac{\sqrt{x}+4}{2-\sqrt{x}}.dx$$

$$\sqrt{x} = u \Rightarrow x = u^2$$

$$dx.\frac{1}{2\sqrt{x}} = du$$

$$dx = 2u.du$$

$$\int \frac{u+4}{2-u}.2u.du = 2\int \frac{u^2+4u}{2-u}.du$$

ÖRNEK

Görsel Eğitim

$$\int \sqrt[3]{x}.dx$$

$\sqrt[3]{x} = u$ ise $x = u^3$ $\quad\quad$ $dx = 3u^2.du$

$$\int u.3u^2.du = 3\int u^3.du$$

2) KISMI İNTEGRAL ALMA YÖNTEMİ

$\boxed{\int u.dv = u.v - \int v.du}$ formülü ile integral alınır. Burada integral alınırken çarpanlardan birine u, diğer çarpan dv değişkeni ile değiştirilir. **du ve dv bir çeşit türevdir.**

ÖRNEK
Görsel Eğitim

$$\int x.e^{x}.dx = ?$$

$x = u \qquad dx = du$

$e^{x}.dx = dv \qquad e^{x} = v$

$$\int u.dv = u.v - \int v.du$$

$$\int u.dv = u.v - \int v.du$$

ÖRNEK

Görsel Eğitim

$\int x.\ln x.dx = ?$ Burdan $\int \underbrace{\ln x}_{u}.\underbrace{x.dx}_{dv}$

$u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x}.dx,$ $x.dx = dv,$ $v = \frac{1}{2}x^2$ $\int u.dv = u.v - \int v.du$

ÖRNEK

Görsel Eğitim

$$\int x^3 . \ln x . dx = \int \underbrace{\ln x}_{u} . \underbrace{x^3 . dx}_{dv}$$

$$\ln x = u \Rightarrow \qquad du = \frac{1}{x}\, dx$$

$$\int u.dv = u.v - \int v.du$$

$$x^3 . dx = dv \Rightarrow v = \frac{1}{4} x^4$$

3) RASYONEL FONKSİYONLARI BASİT KESİRLERE AYIRMA

$f(x)$ ve $g(x)$ ortak çarpanı olmayan iki polinom olsun.

$g(x) \neq 0$

$\int \frac{f(x)}{g(x)}.dx$ ile gösterilir.

UYARI

$f(x)$'in derecesi $g(x)$'in derecesinden büyük yada eşit ise $f(x)$, $g(x)$'e bölünür.

ÖRNEK

Görsel Eğitim

$$\int \frac{x+3}{x-2}.dx = ?$$

ÖRNEK

Görsel Eğitim

$$\int \frac{x^2 - 4x + 5}{x + 1}.dx = ?$$

UYARI

f(x)'in derecesi g(x)'in derecesinden küçük ise ifade basit kesirlere ayrılır. (g(x) çarpanlara ayrılır.)

ÖRNEK

Görsel Eğitim

$$\int \frac{x+3}{x^2-9x+14}.dx =$$

ÖRNEK

Görsel Eğitim

$$\int \frac{dx}{x^2 - 1} = ?$$

ÖRNEK

Görsel Eğitim

$f(x) = \dfrac{6x}{x^2 - 4}$ fonksiyonunu basit kesire ayırınız.

ÖRNEK

Görsel Eğitim

$$\frac{1}{x^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3}$$

ÖRNEK

Görsel Eğitim

$$\frac{1}{(x+5)^3} = \frac{A}{(x+5)} + \frac{B}{(x+5)^2} + \frac{C}{(x+5)^3}$$

ÖRNEKLER

ÖRNEK

Görsel Eğitim

$$\int (3x+5)^7 .dx$$

ÖRNEK

Görsel Eğitim

$$\int (2x^3 - 3)^{15} . x^2 . dx$$

ÖRNEK

Görsel Eğitim

$$\int (x^3 - 3x)^{15}(x^2 - 1).dx$$

ÖRNEK

Görsel Eğitim

$$\int \frac{(\ln x)^3}{x}.dx$$

ÖRNEK

Görsel Eğitim

$$\int \frac{dx}{2x+3}.dx$$

ÖRNEK

Görsel Eğitim

$$\int \frac{x}{x^2+7}.dx$$

ÖRNEK

Görsel Eğitim

$$\int \frac{e^{x}.dx}{e^{x}+3}.dx$$

ÖRNEK

Görsel Eğitim

$$\int \sqrt{3x+7}.dx$$

ÖRNEK

Görsel Eğitim

$$\int x.\sqrt{x^2+5}.dx$$

ÖRNEK

Görsel Eğitim

$$\int e^{10x+2}.dx$$

ÖRNEK

Görsel Eğitim

$$\int e^{2x^2-3} \cdot x . dx$$

ÖRNEK

Görsel Eğitim

$$\int e^{x^4} . x^3 . dx$$

ÖRNEK

Görsel Eğitim

$$\int e^{-6x}.dx$$

ÖRNEK

Görsel Eğitim

$$\int 3^{3x-1}.dx$$

ÖRNEK

Görsel Eğitim

$$\int 5^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2} dx$$

ÖRNEK

Görsel Eğitim

$$\int \frac{dx}{3x-1}$$

ÖRNEK

Görsel Eğitim

$$\int \frac{x.dx}{(x^2+3)^5}$$

ÖRNEK

Görsel Eğitim

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x+3}}$$

UYARI

İntegral alınırken tüm işlemlerde türev aranır. Türev yoksa integral sabiti eklenmeden önce işlem $\dfrac{1}{\text{Türev}}$ ile çarpılarak yapılır.

BELİRLİ İNTEGRAL

TANIM

f, $[a,b]$ aralığında tanımlı integrallenebilen fonksiyon olsun.

$x \in (a,b)$ ve $c \in R$ için;

$f'(x) = f(x)$

$\int f(x).dx = f(x) + c$ ise

$\int_a^b f(x)\,dx$ ifadesine f(x) fonksiyonunun a dan b'ye belirli integral denir ve

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = f(x)\Big|_a^b = f(b) - f(a)}$$ ile gösterilir.

UYARI

C integrali sabiti daima sadeleşeceğinden belirli integralde c sabiti yazmaya gerek yoktur.

BELİRLİ İNTEGRALİN ÖZELLİKLERİ

1) $\int_a^b c.f(x).dx = c.\int_a^b f(x).dx \quad (c \in R)$

2) $\int_a^b \left[f(x) \mp g(x)\right].dx = \int_a^b f(x).dx \mp \int_a^b g(x).dx$

3) a, b , c üç gerçel sayı olsun ve a < c < b olmak üzere;

$$\boxed{\int_a^b f(x).dx = \int_a^c f(x).dx + \int_c^b f(x).dx}$$

4) $\int_a^a f(x) = 0$

5) $\int_a^b f(x).dx = -\int_b^a f(x).dx$

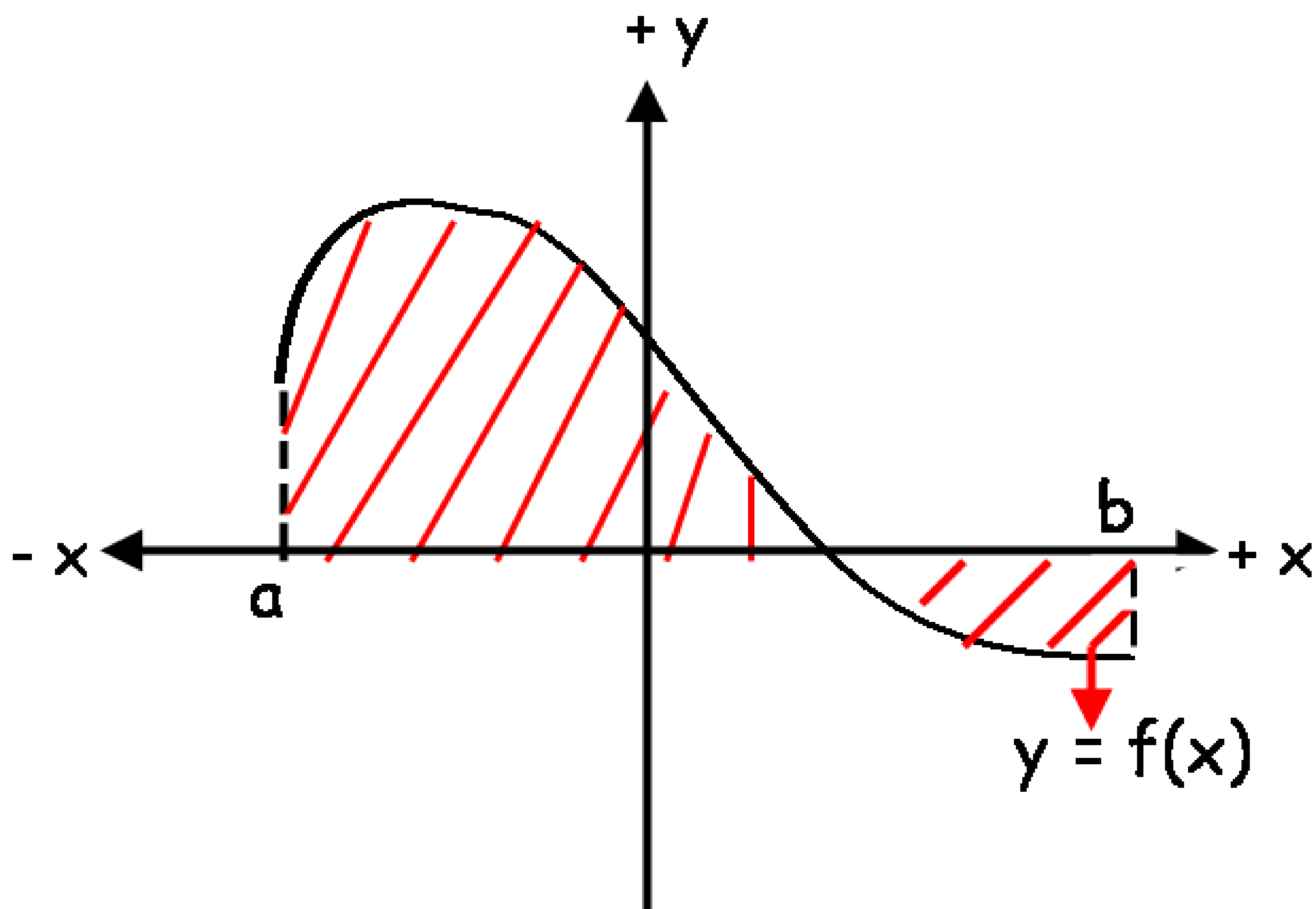
BELİRLİ İNTEGRAL UYGULAMALARI

Belirli integral kavramını kullanarak bazı problemlerin çözümü kolaylıkla yapılabilir. İki eğriyle sınırlı bölgelerin alanlarını göreceksiniz.

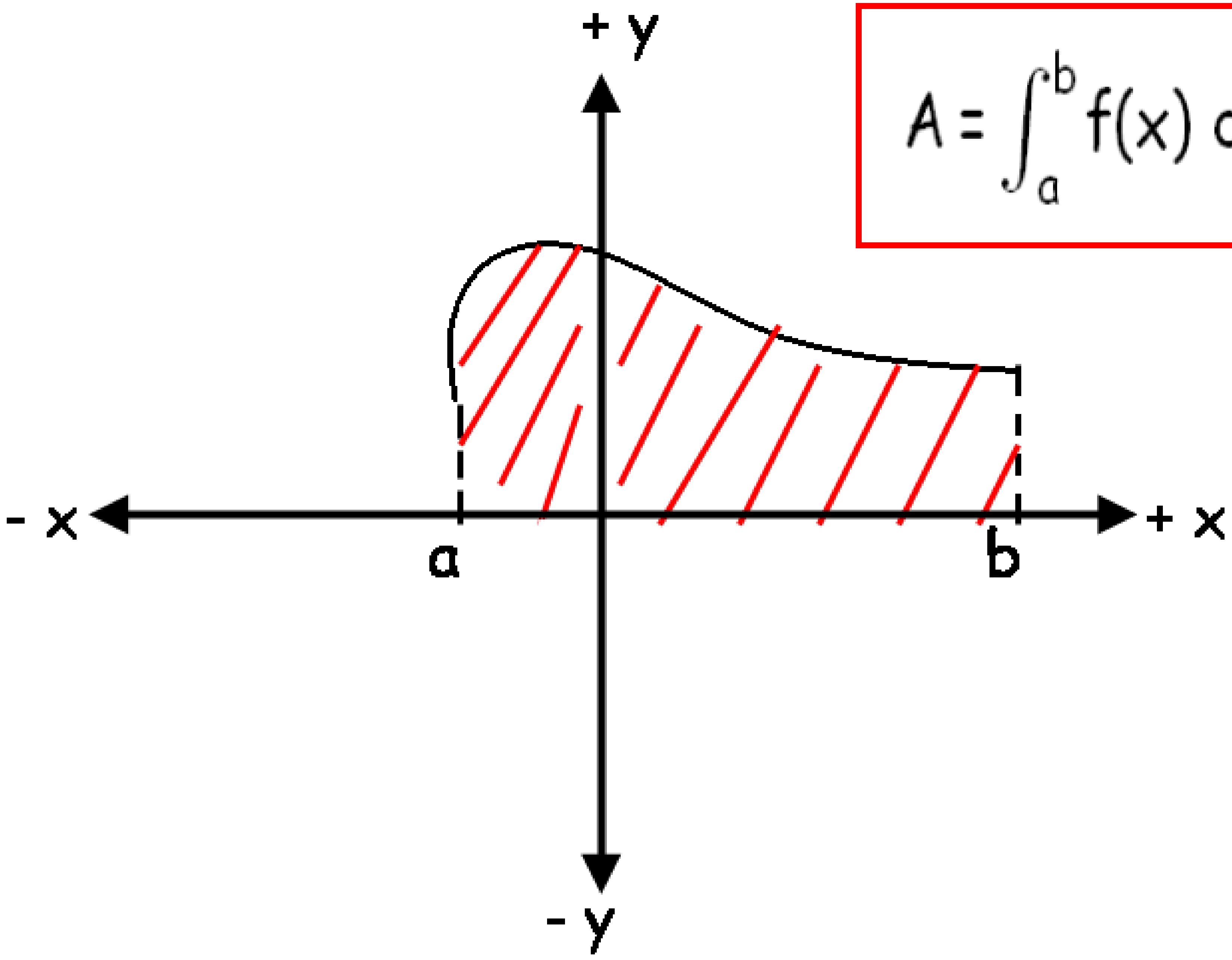
ALAN HESABI

1) $y = f(x)$ eğrisi, $x = a$, $x = b$ doğruları ve x ekseni arasında kalan düzlemsel bölgenin alanı

$$\boxed{ALAN = A = \int_a^b f(x).dx = f(x)\Big|_a^b = f(b) - f(a)}$$

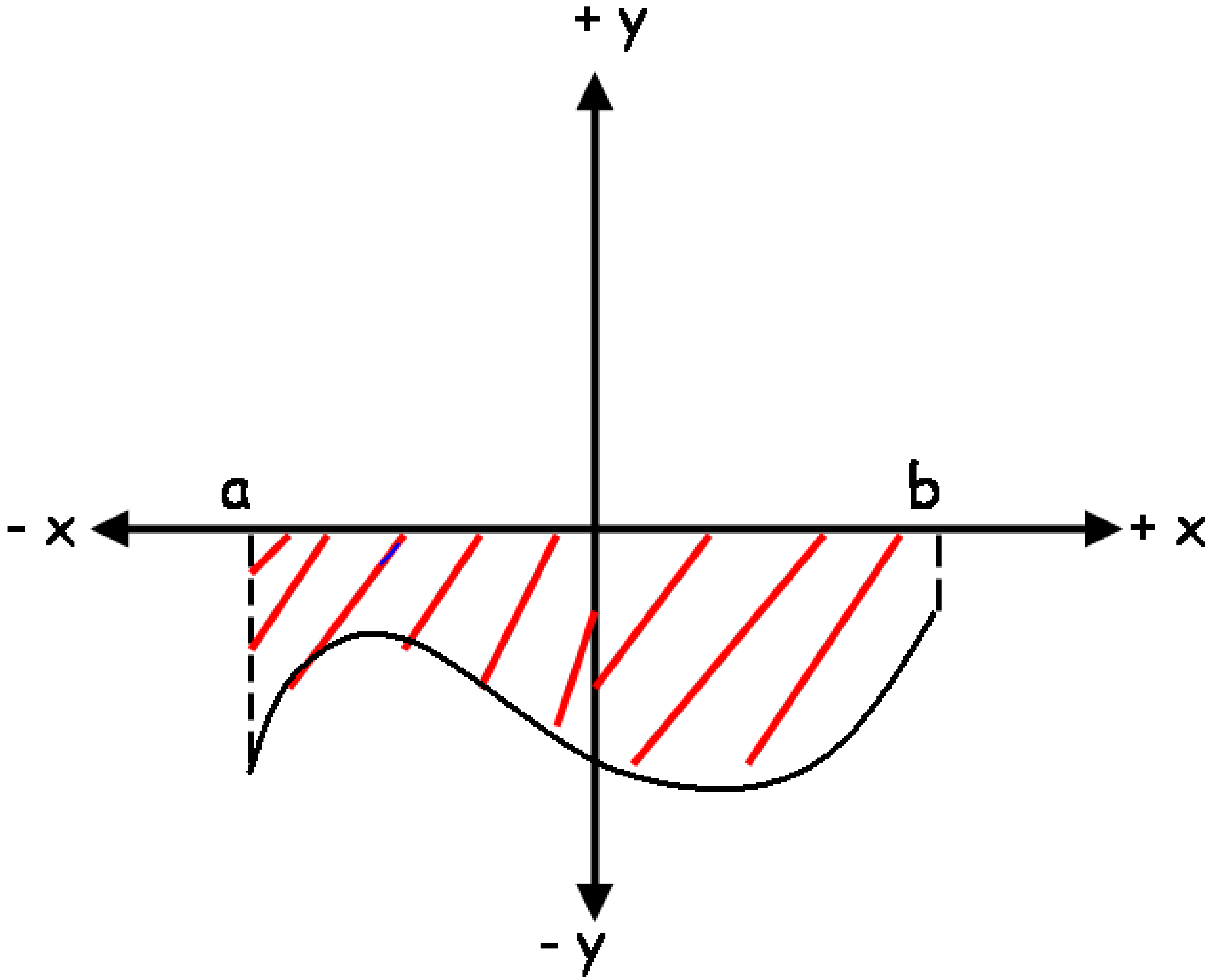


2) $[a,b]$ aralığında $f(x) \geq 0$ ise;



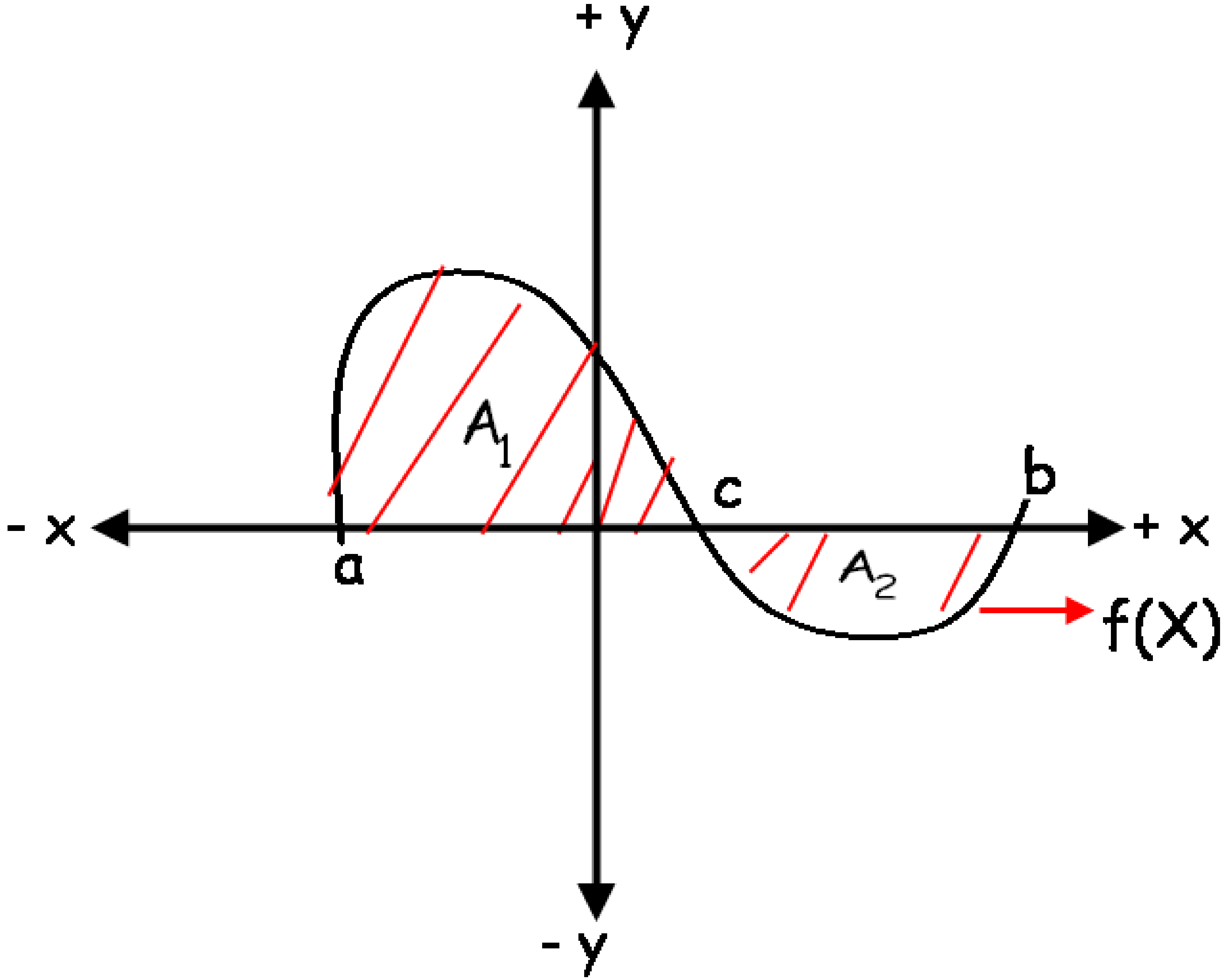
$$A = \int_a^b f(x)\,dx = f(x)\Big|_a^b = f(b) - f(a)$$

3) $[a,b]$ aralığında $f(x) \leq 0$ ise;



$$A = -\int_a^b f(x).dx$$

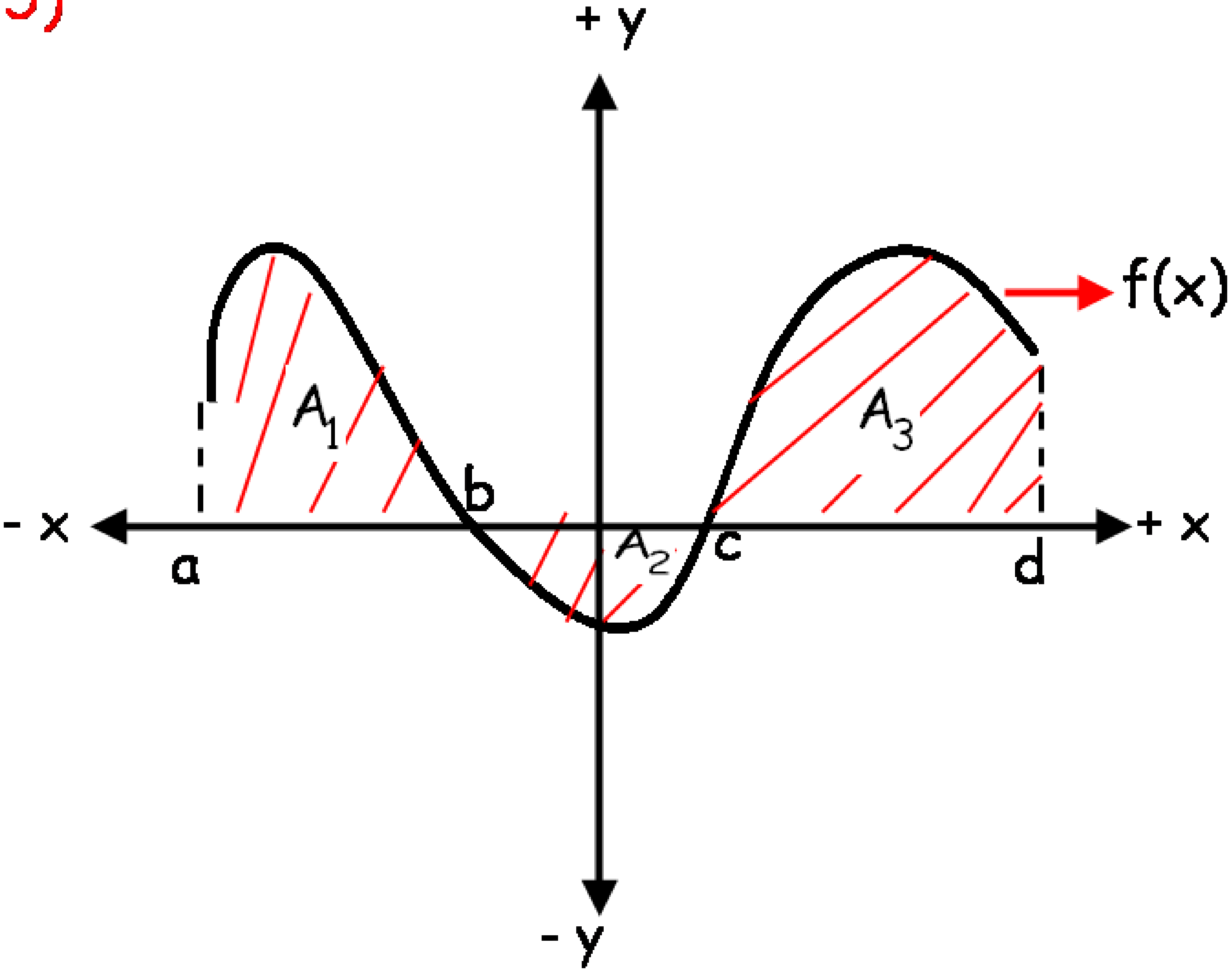
4) f(x), $[a,b]$ aralığında bir kısmında pozitif ve bir kısmında negatif ise alanlar ayrı ayrı hesaplanır toplanır.



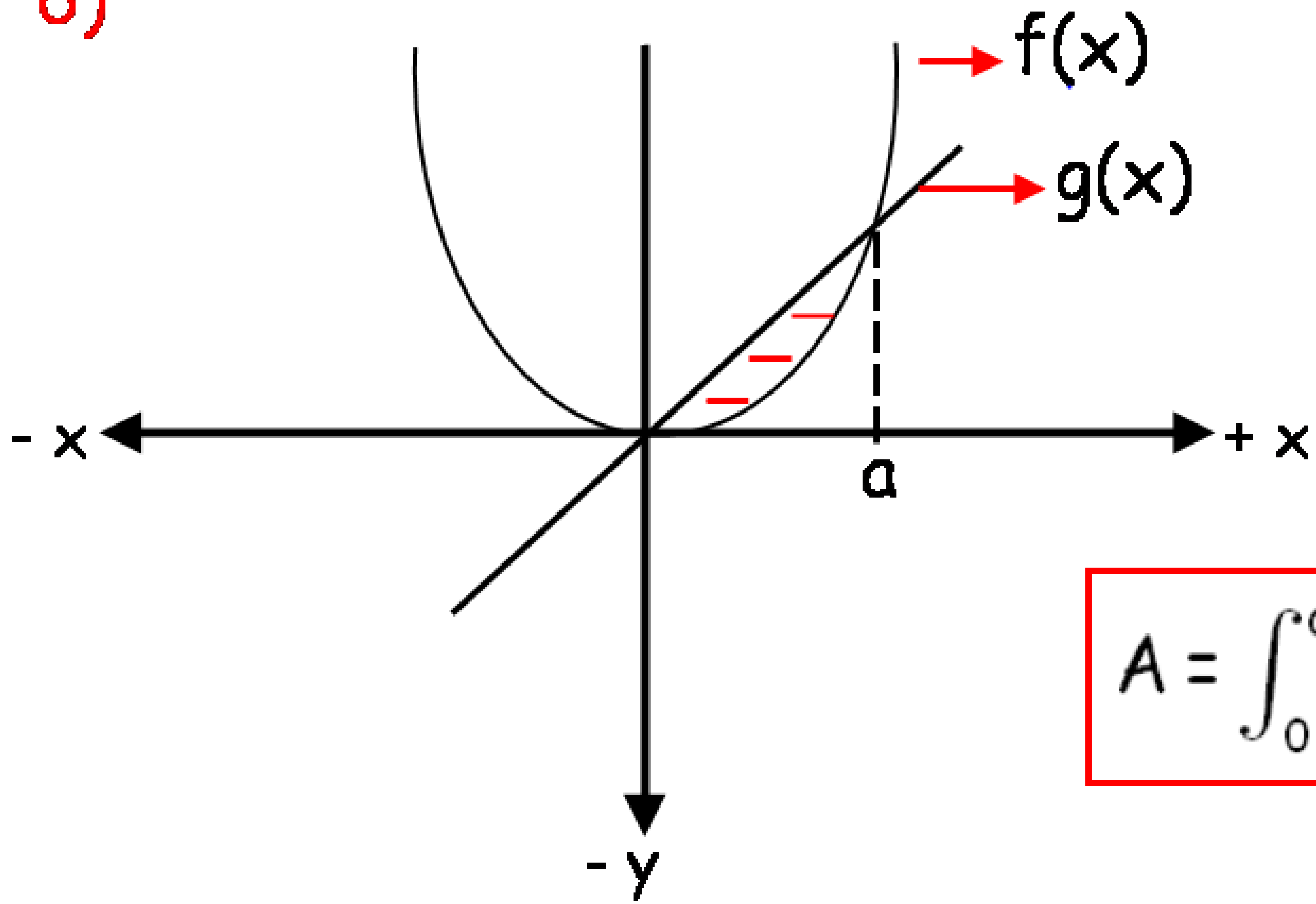
$$A_1 - A_2 = \int_a^c f(x).dx - \int_c^b f(x).dx = \int_a^b f(x).dx$$

$$A_1 - A_2 + A_3 = \int_a^b f(x).dx - \int_b^c f(x).dx + \int_c^d f(x).dx = \int_a^d f(x).dx$$

5)



6)



$$\boxed{A = \int_0^a (f(x) - g(x)).dx}$$

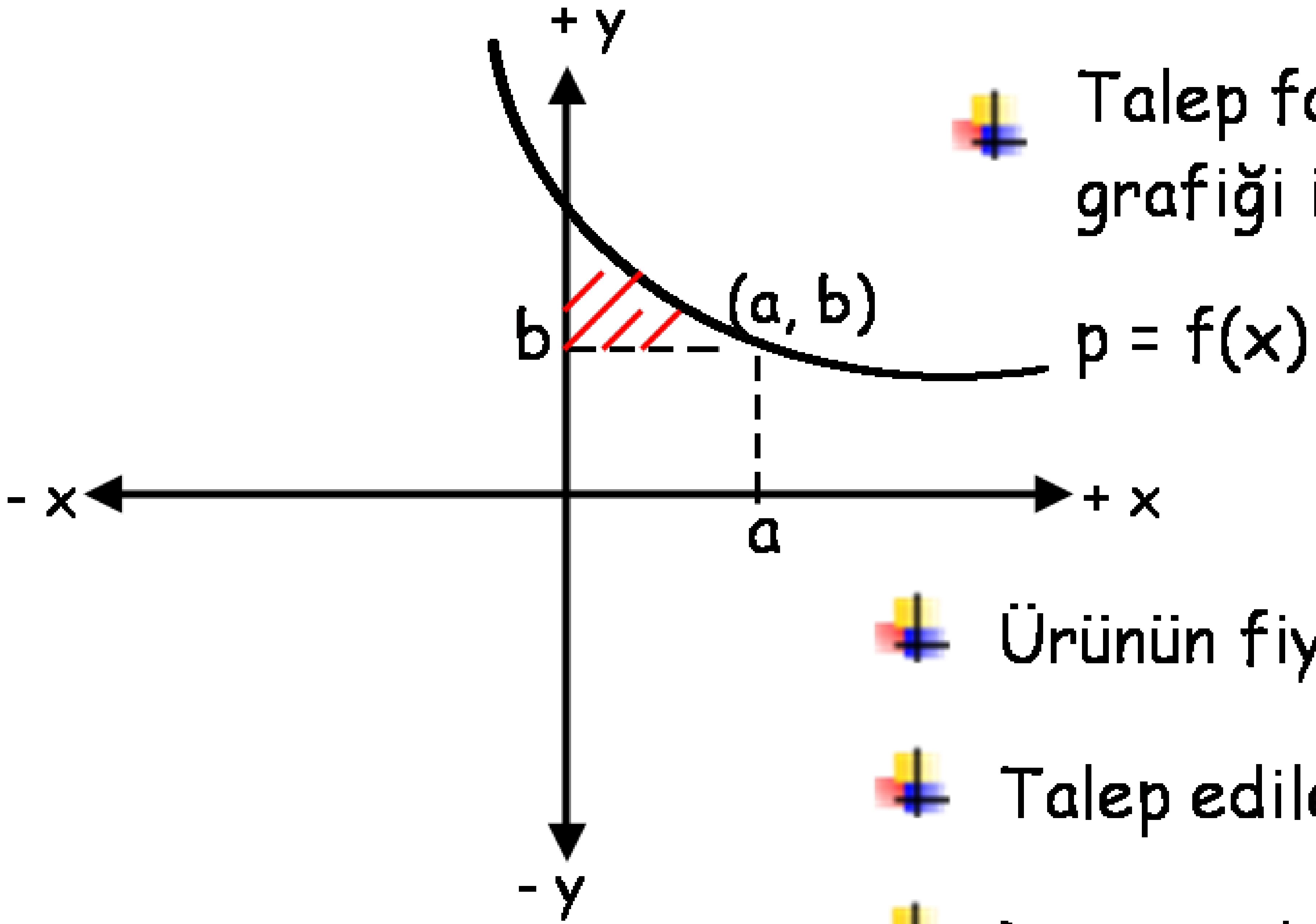
BELİRLİ İNTEGRAL İLE TÜKETİCİ VE ÜRETİCİ RANTININ HESAPLANMASI

Tüketici Rantı

Bir tüketici, almak istediği bir ürün için uygun gördüğü bir fiyatı ödemeye hazırdır. Tüketici bu ürünü alırken ödeyeceği fiyat ödemeye hazır olduğu fiyattan düşük ise aradaki farka Tüketici Rantı denir.

Tüketici aldığı ürünü, düşük fiyata aldığı için kazançlı çıkacaktır.

Tüketici rantı Talep Fonksiyonu yardımıyla belirlenir.



- Talep fonksiyonu p = f(x) grafiği ile solda verilmiştir.
- Ürünün fiyatı P'dir.
- Talep edilen miktar x
- Denge noktası (a, b)
- Talep fonksiyonu p = f(x) grafiği ile solda verilmiştir.

$$\text{TÜKETİCİ RANTI} = TR = \int_0^a f(x).dx - a.f(a)$$

ÖRNEK

Görsel Eğitim

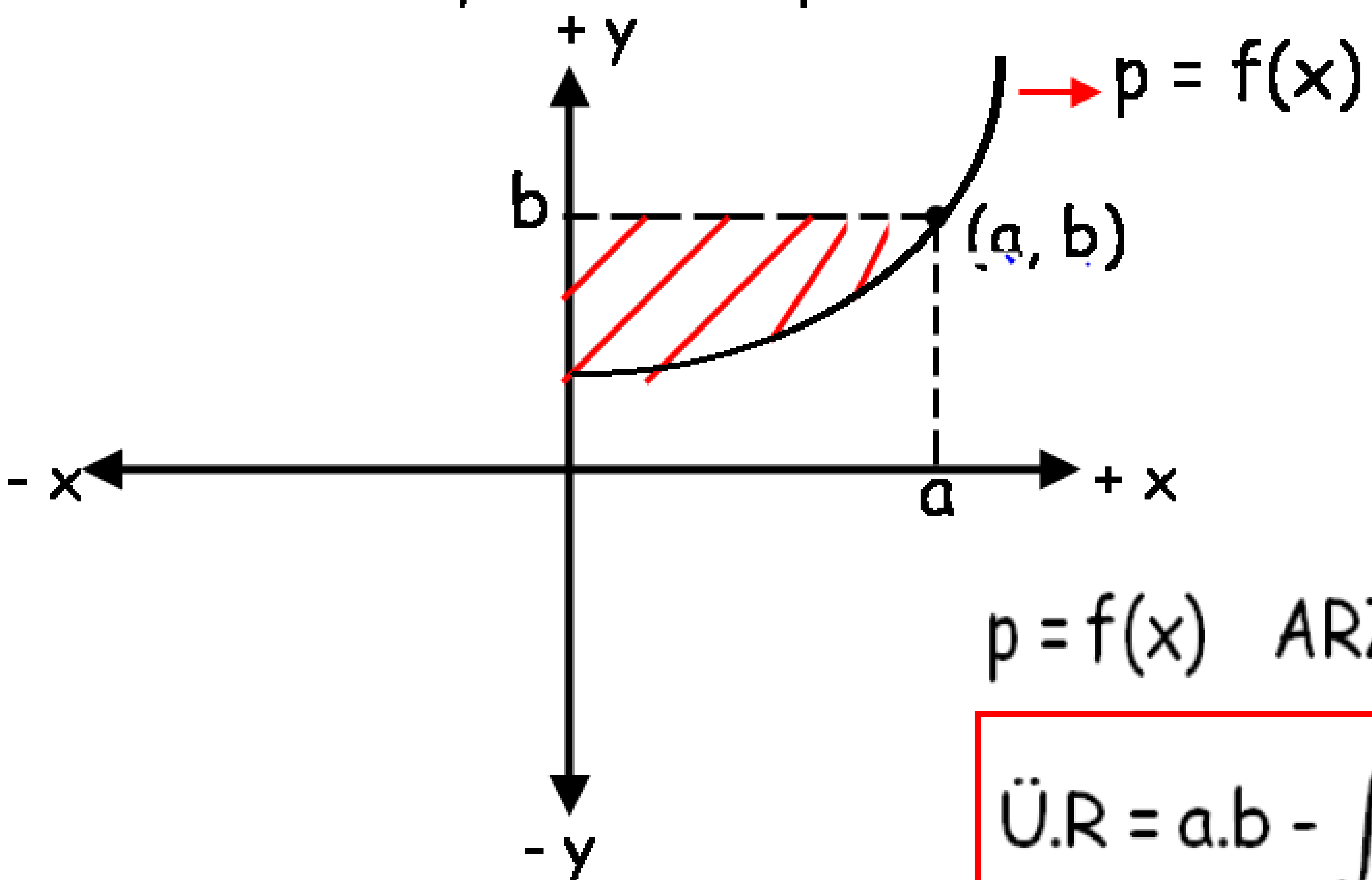
Talep fonksiyonu $p = -4x + 20$ olan bir mal için talep miktarı 3 birim olduğundan tüketici rantı nedir ?

UYARI

Tüketici rantında fiyat arttıkça talep azalır. ARZ ve TALEP fonksiyonları eşitlenerek bulunan x'in pozitif değeri denge noktasıdır.(miktarıdır)

Üretici Rantı

Bir üretici ürettiği malları piyasada satmaya hazır olduğu fiyattan daha yüksek bir fiyata satarsa daha fazla bir kazanç elde eder. Bu kazanca ÜRETİCİ RANTI denir. ARZ fonksiyonu verilip üretici rantı bulunur.



$p = f(x)$ ARZ fonksiyonudur.

$\boxed{\ddot{U}.R = a.b - \int_0^a f(x).dx}$ ile bulunur.

ÖRNEK

Görsel Eğitim

$p = 6x + 5$ arz fonksiyonu ve talep miktarı = x = 6 olduğuna göre üretici rantı kaçtır ?