ÜNİTE XII-XIII

MATRİSLER - DETERMİNANTLAR

ARA SINAV ÇIKABİLECEK SORU ADEDİ: YOK

FİNAL/BÜTÜNLEME ÇIKABİLECEK SORU ADEDİ: 4-6 Sorudur

UNİTE İÇERİĞİ

Bu ünitede matris, matris boyutunu, matris işlemlerini ve özelliklerini, ters matrisleri görüp ayrıca doğrusal denklem sistemlerinin matrisler ile ifade edilmesini öğreneceksiniz.

Determinant ve determinantın hesaplanmasını, minör ve kofaktörü öğreneceksiniz. Sarus ve Cramer kuralını göreceksiniz.

MATRİS

m ve n pozitif tam sayılar olmak üzere, i: 1, 2, 3, 4, ..., m ve j: 1, 2, 3, 4, 5......., n için a_{ij} sayılarının meydana getirdiği,

Şekildeki dikdörtgensel tabloya m x n tipinde bir matris denir.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & --- & a_{ij} & --- & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & --- & a_{2i} & --- & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & --- & a_{ij} & --- & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & --- & a_{amj} & -- & a_{amn} \end{bmatrix}$$

Satır

Sütun

m x n

m → satır sayısı

n → sütun sayısı

- $A = [aij]_{mxn}$ şeklinde gösterilir.
- i satır indisidir.
- j sütun indisidir.
- aij ye ise matrisin i 'inci satır, j'inci sütundaki elemanı denir.
- Tablo m tane satır, n tane sütun ve m.n tane elemandan oluşur.
- Matrisin i 'inci satırı $\begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} - a_{ij} -- a_{in} \end{bmatrix}$

- Matrisin j 'inci sütunu

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ | \\ | \\ | \\ aij \\ | \\ | \\ amj \end{bmatrix}$$

ÖRNEK

Görsel Eğitim

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ \sqrt{3} & 5 & 2 \end{bmatrix}_{2x3}$$

Matrisi R'de tanımlanmış 2x3 tipinde bir matristir.

ÖRNEK

Görsel Eğitim

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 2 \end{bmatrix}_{3x4}$$

Matrisi Z'de tanımlanmış 3x4 tipinde bir matristir.

- $a_{24} = 0$ Burada ikinci satır, dördüncü sütundaki elemandır.
- $a_{13} = 4$ Burada birinci satır, üçüncü sütundaki elemandır.
- $a_{33} = 5$ Burada üçüncü satır, üçüncü sütundaki elemandır.

ÖRNEK

Görsel Eğitim

Aşağıdaki tablo Görsel Eğitim kurumunun 2004, 2005, 2006,2007, 2008 yıllarındaki yılın ilk 5 ayının satışlarının dağılımını göstermektedir.

	OCAK	ŞUBAT	MART	NİSAN	MAYIS
2004	70	60	50	40	45
2005	80	70	60	30	40
2006	90	80	70	20	35
2007	100	90	80	10	30
2008	110	100	90	0	25

beş satır ve beş sütundan oluşan bu tabloya satış tablosu veya satış matrisi diyoruz. Kullanılan sayılar değişken yada parametrelerle oluşturulur.

$$A = \begin{bmatrix} 70 & 60 & 50 & 40 & 45 \\ 80 & 70 & 60 & 30 & 40 \\ 90 & 80 & 70 & 20 & 35 \\ 100 & 90 & 80 & 10 & 30 \\ 110 & 100 & 90 & 0 & 25 \end{bmatrix}_{5\times5}$$

Doğal sayılarda tanımlanmış 5x5 tipinde bir matristir.

MATRİS ÇEŞİTLERİ

1) KARE MATRİSİ

Bir matriste satır sayısı, sütun sayısına eşit (m = n) ise bu matrise karesel matris denir.

- $\left[a_{ij}\right]_{nxn}$ Kare matrisinde $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots\ldots\ldots a_{nn}$ elemanlarının bulunduğu köşegene asal köşegen, $a_{1n}, a_{2(n-1)}, a_{3(n-2)}, \ldots\ldots\ldots a_{n1}$ elemanlarının bulunduğu köşegene ise yedek köşegen denir.

ÖRNEK

Görsel Eğitim

Yedek Köşegen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 4 & 5 & -5 \end{bmatrix}$$

1.(Asal) Köşegen

Matris 3x3 tipinde karesel matristir.

2) SIFIR MATRİSİ

Bütün elemanları sıfır olan bir matrise sıfır matrisi denir.

ÖRNEK

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 4}$$

Matrisi 2x4 tipinde bir sıfır matrisidir.

3) BİRİM MATRİSİ

Bir nxn tipindeki karesel matriste $i \neq j$ için $a_{ij} = 0$ ve $i = j$ için $a_{ij} = 1$ ise bu matrise birim matris denir. I_n ile gösterilir. Yani birim matriste asal köşegen üzerindeki elemanlar 1, bunların dışındaki elemanların tümü 0'dır.

ÖRNEK

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2x2} \qquad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3x3}$$

Birim Matrislerdir.

4) KÖŞEGEN MATRİSİ

Bir kare matriste, birinci (asal) köşegen üzerindeki elemanlardan en az birisi sıfırdan farklı olmak üzere diğer bütün elemanlar sıfır ise bu matrise köşegen matrisi denir.

ÖRNEK

Görsel Eğitim

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

Matrisi 3x3 tipinde bir köşegen matrisidir.

ÖRNEK

Görsel Eğitim

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

Matrisi 2x2 tipinde bir köşegen matrisidir.

5) SKALER MATRİS

Bir karesel matriste asal köşegen üzerindeki elemanlar birbirinin aynısı olmak üzere diğer bütün elemanlar sıfır ise bu matrise skaler matris denir.

ÖRNEK

Görsel Eğitim

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

Matrisi 3x3 tipinde bir skaler matrisidir.

6) SATIR VE SÜTUN MATRİSİ

Satır sayısı 1 olan matrise satır matrisi, sütun sayısı 1 olan matrise sütun matrisi denir.

ÖRNEK

Görsel Eğitim

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & \sqrt{3} & 0 \end{bmatrix}_{1\times 4}$$

Matrisi 1x4 tipinde bir satır matrisidir.

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}_{3\times1}$$

Matrisi 3x1 tipinde bir sütun matrisidir.

7) ALT MATRİS

Bir matrisin bazı satır veya sütunları silindiğinde kalan matrise o matrisin alt matrisi denir.

ÖRNEK

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Matrisinin bazı alt matrisleridir.

İKİ MATRİSİN EŞİTLİĞİ

$A = \left[a_{ij}\right]_{mxn}$, $B = \left[b_{ij}\right]_{mxn}$ tipindeki iki matris olsun.

- $\forall(i,\ j)$ için $a_{ij} = b_{ij}$ ise ''A ve B matrisleri eşittir.''denir.

- A = B şeklinde gösterilir. Yani iki matrisin eşit olması için aynı tipten olmaları ve karşılıklı olarak aynı indisli elemanlarının birbirine eşit olması gerekir.

ÖRNEK

Görsel Eğitim

$$\begin{bmatrix} x-y & 2 & 3 \\ 1 & x+z & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & y-z \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

olduğuna göre $x+y+z$ toplamı nedir?

UYARI

İki matrisin eşit olması için her elemanın kendi konumundaki elemana eşit olması gerekmektedir.

MATRİSLERDE TOPLAMA İŞLEMİ

$A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$, $B = \left[b_{ij}\right]_{m\times n}$ aynı tipten iki matris olsun.

$A + B = \left[a_{ij} + b_{ij}\right]_{m\times n}$'dir. Yani aynı tipten matrisler toplanırken karşılıklı olarak aynı indisli elemanlar toplanıp aynı indisli yere yazılır.

ÖRNEK

Görsel Eğitim

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}_{3x2} + \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ 8 & 0 \\ 9 & 4 \end{bmatrix}_{3x2} = \begin{bmatrix} (1+7) & (4+(-5)) \\ (2+8) & (5+0) \\ (3+9) & (6+4) \end{bmatrix}_{3x2} = \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ 10 & 5 \\ 12 & 10 \end{bmatrix}_{3x2}$$

TOPLAMA İŞLEMİNİN ÖZELLİKLERİ

$A = \left[a_{ij}\right]_{mxn}$, $B = \left[b_{ij}\right]_{mxn}$ ve $C = \left[c_{ij}\right]_{mxn}$ aynı tipten matrisler olsun.

1) Değişme özelliği vardır.

$$\boxed{A + B = B + A}$$

2) Birleşme özelliği vardır.

$$\boxed{A + B + C = A + (B + C) = (A + B) + C}$$

3) Sıfır matrisi toplama göre etkisiz elemandır.

$$\boxed{A + 0 = 0 + A}$$

UYARI

A matrisinden B matrisini çıkarmak için B matrisinin her elemanı (-) işareti ile çarpılır. Sonra A matrisi ile B matrisinin her elemanı kendi konumundaki elemanı ile toplanır.

ÖRNEK

Görsel Eğitim

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 5 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$ A - B matrisi nedir ?

MATRİSLERİN BİR SKALERLE ÇARPIMI

Bir k skaleri ile $A = \left[a_{ij}\right]_{m \times n}$ matrisinin çarpımı $k.A = \left[k.a_{ij}\right]_{m \times n}$ olarak tanımlanır. Yani bir matrisi k sayısı ile çarpmak demek matrisin bütün elemanlarını k sayısı ile çarpmak demektir.

ÖRNEK

Görsel Eğitim

$A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 7 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 4 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ olduğuna göre 3A-2B matrisi nedir?

MATRİSLERİN ÇARPIMI

$A = [a_{ij}]_{mxn}$ ve $B = [b_{jk}]_{nxp}$ tipinde iki matris olsun. A ile B'nin

çarpımı C matrisi olmak üzere;

$$A.B = C \Rightarrow \underbrace{[a_{ij}]_{mxn} \cdot [b_{jk}]_{nxp}}_{\text{Eşit}} = [c_{ik}]_{mxp} \text{ olur.}$$

Bu bağıntı A matrisinin (i, k)'ıncı elemanlarını verecektir. Bu yüzden iki matrisin çarpılabilmesi için birinci matrisin sütun sayısının, ikinci matrisin satır sayısına eşit olması gerekir. Çarpım matrisinin satır sayısı birinci matrisin satır sayısına, sütun sayısı ise ikinci matrisin sütun sayısına eşit olur.

ÖRNEK

Görsel Eğitim

$$A=\begin{bmatrix}3 & 4 & 5\\ -1 & 2 & 1\end{bmatrix}_{2\times 3},\quad B=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{bmatrix}_{2\times 2}$$

ÇARPIM YAPILAMAZ !

ÖRNEK

Görsel Eğitim

$$A=\begin{bmatrix}3 & 4 & 5\\ -1 & -2 & -3\end{bmatrix}_{2\times 3},\quad B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\\ 2 & -1\end{bmatrix}_{3\times 2}$$

ÇARPIM YAPILIR

ÇARPMA İŞLEMİNİN ÖZELLİKLERİ

k bir skaler ve A, B, C matrisleri aşağıdaki matris işlemleri için tanımlı olsun.

1) Çarpma işleminin birleşme özelliği vardır.

$$\boxed{A.(B.C) = (A.B).C = A.B.C}$$

2) Çarpma işleminin toplama işlemi üzerine dağılma özelliği vardır.

$$\boxed{\begin{array}{l} A.(B+C) = A.B + A.C \\ (B+C).A = B.A + C.A \end{array}}$$

3) $k.(A.B) = (k.A).B = A.(k.B)$

4) I_n, nxn tipinde birim matris olmak üzere;

$$\boxed{A.I_n = I_n.A}$$

5) $n \in N$ ve A, mxm tipinde kare matrisi olsun.

$$\boxed{A^0 = I_m,\ A^1 = A,\ A^2 = A.A,\ A^n = \underbrace{A.A.A.....A}_{\text{n tane}} = A.A^{n-1}}$$

6) Birim matrislerin kuvvetleri kendisine eşittir.

$$\boxed{I_n = I}$$

7) Çarpma işleminin değişme özelliği yoktur.

8) $A.0 = 0.A = 0$'dır. 0 (sıfır matrisi) çarpma işleminin yutan matrisidir.

9) $A \neq 0$ ve $B \neq 0$ iken $A.B = 0$ olabilir.

10) $A \neq 0$ ve $B \neq 0$ iken $A.B = A.C$, $B \neq C$ olabilir.

DETERMİNANTLAR

Determinant fonksiyonu, elemanları reel sayılar olan karesel matrisleri reel sayılara dönüştüren bir fonksiyondur.

$A = \left[a_{ij}\right]$ ise determinant fonksiyonunun bu matrisdeki değeri $\left|A\right|$ veya detA ile gösterilir.

- A matrisi nxn tipinde ise $\left|A\right|$ determinantı n'inci mertebedendir denir.

1x1 tipinde $A = \left|a_{11}\right|$ matrisinin determinantı

$$\left|A\right| = \left|a_{11}\right| = a_{11}$$

$$2x2 \text{ tipinde } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{matrisinin determinantı}$$

$$|A| = \det A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$$

ÖRNEK

Görsel Eğitim

$$\begin{bmatrix} 1376 & 1375 \\ 1375 & 1376 \end{bmatrix}$$ determinantının değeri kaçtır ?

SARRUS KURALI

1.adım: Üçüncü mertebeden bir determinantın değerini bulmak için ilk iki satırı en alta yazılır.

2.adım: Sağ köşegen üzerindeki elemanlar çarpılır ve toplanır.

3.adım: Bunların sonucundan sol köşegen üzerindeki elemanların çarpımlarının toplamı çıkarılır.

sağ köşegen

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$ ise detA değeri;

sol köşegen

$$|A| = \begin{array}{|ccc|} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ \end{array} \atop \begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} - & a_{31}.a_{22}.a_{13} \\ - & a_{11}.a_{32}.a_{23} \\ - & a_{21}.a_{12}.a_{33} \\ + & \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} + & a_{11}.a_{22}.a_{33} \\ + & a_{21}.a_{32}.a_{13} \\ + & a_{31}.a_{12}.a_{23} \\ + & \\ \hline \end{array}$$

$$(a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{21}.a_{32}.a_{13} + a_{31}.a_{12}.a_{23}) - (a_{31}.a_{22}.a_{13} + a_{11}.a_{32}.a_{23} + a_{21}.a_{12}.a_{33})$$

ÖRNEK

Görsel Eğitim

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \text{ ise } |A| \text{ değeri kaçtır ?}$$

MİNÖR VE KOFAKTÖR (EŞ ÇARPAN)

nxn tipindeki bir karesel matrisin determinantının hesaplanması

- Bir $A=\left[a_{ij}\right]_{nxn}$ matrisinde bir a_{ij} elemanının bulunduğu satır ve sütun atıldıktan sonra kalan matrisinin determinantına a_{ij} 'nin minörü denir ve M_{ij} ile gösterilir. $(-1)^{i+j}.M_{ij}$ sayısında a_{ij} kofaktörü (Eş çarpanı)denir.

- a_{ij} elemanın $i+j=$ çift sayı ise determinantın aynısı kofaktördür.
- a_{ij} elemanın $i+j=$ tek sayı ise determinantı ''- 1'' sayısı ile çarpılarak kofaktör bulunur.

ÖRNEK

Görsel Eğitim

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \text{ ise } M_{23}=?$$

ÖRNEK

Görsel Eğitim

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 2 & 5 & 5 \\ 3 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$ ise A_{23}'ün kofaktörü nedir?

DETERMİNANT FONKSİYONUNUN ÖZELLİKLERİ

1) Karesel bir A matrisinin herhangi bir satır veya sütununundaki bütün elemanlar sıfır ise;

$$\boxed{\det A = A = 0\text{'dır.}}$$

2) Karesel matrisin iki satır veya iki sütunu kendi aralarında yer değiştirirse determinant değeri (-) ile çarpılarak bulunur.

3) Bir determinantı $k \in R$ sayısı ile çarpmak için bu determinantın sadece bir satırını veya sütununu k ile çarpmak gerekir.

$$k \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k.a_{11} & k.a_{12} & k.a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

UYARI

A.dereceden bir kare matrisinin tüm elemanları n ile çarpılırsa determinantı k^n katına çıkar.

$$A = \left[a_{ij}\right]_{nxn} \quad \text{ve } k \in R \text{ olmak üzere } |k.A| = k^n.|A|$$

4) Bir determinantın iki satırındaki veya iki sütunundaki elemanları karşılıklı olarak orantılı ise bu determinantın değeri sıfırdır.

ÖRNEK

Görsel Eğitim

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \\ 8 & 6 & 10 \end{bmatrix} = 0, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 3 \\ 7 & 14 & 3 \end{bmatrix} = 0$$

BİR MATRİSİN TRANSPOZU(DEVRİĞİ)

Bir A matrisinin satırlarının sütun, sütunlarının satır yapılması ile elde edilen matrise A matrisinin transpozu (devriği) denir. A^T ile gösterilir.

ÖRNEK

Görsel Eğitim

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}_{2x3} \text{ ise } A^T = \begin{bmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{bmatrix}_{3x2}$$

ÖZELLİKLER

Bir k skaleri ve uygun A, B matrisleri için,

1) $(A+B)^T = A^T + B^T$

2) $(A^T)^T = A$

3) $(k.A)^T = k.A^T$

4) $(A.B)^T = B^T . A^T$

5) $|A^T| = |A|$

6) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ (A^{-1}, A matrisinin çarpımsal tersi)

7) A karesel bir matris olmak üzere;

$A^T = A$ ise A matrisi simetrik matristir.

$A^T = -A$ ise A matrisi antisimetrik matristir.

$A^T = A^{-1}$ ise A matrisi ortagonal matristir.

BİR MATRİSİN RANKI

$\left[a_{ij}\right]_{mxn} \neq 0$ ise matrisin bütün karesel matrislerinden, determinantı sıfırdan farklı olan en büyük mertebedenlisinin mertebesine A matrisinin ranki denir. Rank A ile gösterilir.

ÖRNEK

Görsel Eğitim

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$$ matrisinin rankı nedir ?

EK MATRİS

$A = \left[A_{ij}\right]_{nxn}$ karesel matrisinin a_{ij} elemanlarının yerine A_{ij} kofaktörlerinin yazılmasıyla elde edilen $\left[A_{ij}\right]_{nxn}$ matrisinin transpozuna A matrisinin ek matrisi denir. Ve EkA ile gösterilir.

UYARI

$$\boxed{A.EkA = (EkA).A = |A|.I_n}$$

BİR MATRİSİN TERSİNİN HESAPLANMASI

A, nxn tipinde bir matris olsun.

$A.B = B.A = I_n$ olacak şekilde bir B matrisi varsa, B'ye A'nın çarpmaya göre tersi denir. Ve A^{-1} ile gösterilir.

- $\boxed{A^{-1}.(A.EkA) = A^{-1}.(|A|.I_n)}$
- $\boxed{I_n.EkA = (A^{-1}.|A|.I^n)}$
- $\boxed{A^{-1} = \frac{1}{|A|}.EkA\text{'dır.}}$

UYARI

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}_{2x2} \text{ ise } A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}_{2x2} = \begin{bmatrix} \frac{d}{|A|} & \frac{-b}{|A|} \\ \frac{-c}{|A|} & \frac{a}{|A|} \end{bmatrix}_{2x2}$$

A matrisinin tersi olabilmesi için $|A| = \det A$ sıfırdan farklı olması gerekir.

ÖRNEK

Görsel Eğitim

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}_{2x2}$ ve $A^{-1} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}_{2x2}$ olduğuna göre

$x + y + z$ kaçtır ?

UYARI

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & - & - & - & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & - & - & - & 0 \\ 0 & - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - & 0 \\ 0 & 0 & 0 & - & - & - & a_{nn} \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_{11}} & 0 & 0 & - & - & - & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_{22}} & - & - & - & - & 0 \\ 0 & - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & 0 & - & - & - & \frac{1}{a_{nn}} \end{bmatrix}$$

Yukarıdaki matriste asal köşegen üzerindeki elemanların dışındakiler sıfır ise asal köşegen üzerinde bulunan elemanlarının çarpmaya göre tersleri alınır. A matrisinin tersi A^{-1} olur.

ÖRNEK

Görsel Eğitim

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix} \text{ ise } A^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

ÖZELLİKLER

1) $(A^{-1})^{-1} = A$

2) $(A^{-1})^{T} = (A^{T})^{-1}$

3) $(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$

4) $(A.B.C)^{-1} = C^{-1}.B^{-1}.A^{-1}$

5) $(A^{n})^{-1} = (A^{-1})^{n}$

6) k bir skaler olmak üzere;

$$(k.A)^{-1} = \frac{1}{k}.A^{-1}$$

7) $\left|A^{-1}\right| = \dfrac{1}{|A|}$'dır.

8) Bir matrisin tersi varsa tektir. Tersi olan matrislere regüler matrisler, tersi olmayan matrislere ise singüler matrisler denir.

DOĞRUSAL(LİNEER) DENKLEM SİSTEMLERİ

$$a_{11}.x_1 + a_{12}.x_2 + a_{13}.x_3 + \dots\dots\dots\dots + a_{1n}.x_n = k_1$$

$$a_{21}.x_1 + a_{22}.x_2 + a_{23}.x_3 + \dots\dots\dots\dots + a_{2n}.x_n = k_2$$

$$-------------------------$$

$$-------------------------$$

$$a_{m1}.x_1 + a_{m2}.x_2 + a_{m3}.x_3 + \dots\dots\dots\dots + a_{mn}.x_n = k_m$$

şeklindeki n bilinmeyenli m tane denkleminin meydana getirdiği denkleme doğrusal (lineer) denklem sistemi denir.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & - & - & - & - & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & - & - & - & a_{2n} \\ - & - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - & - \\ a_{m1} & a_{m2} & - & - & - & - & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

matrisine sistemin katsayılar matrisi, değişkenlerin meydana getirdiği

$$A = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ - \\ - \\ x_n \end{bmatrix}_{n \times 1}$$

matrisine sistemin bilinmeyenler matrisi ve sabitlerin meydana getirdiği

$$K = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ - \\ - \\ k_m \end{bmatrix}_{m \times 1}$$

matrisine sistemin sabitler matrisi denir. Buna göre $\boxed{A.x = k}$ ile gösterilir.

$$
\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & & - & - & - & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & & - & - & - & a_{2n} \\
- & - & - & - & - & - & - \\
- & - & - & - & - & - & - \\
- & - & - & - & - & - & - \\
a_{m1} & a_{m2} & & - & - & - & a_{mn}
\end{bmatrix}_{m\times n}
\cdot
\begin{bmatrix}
x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ - \\ - \\ - \\ - \\ x_n
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ - \\ - \\ - \\ - \\ k_m
\end{bmatrix}_{m\times n}
$$

eşit

şeklinde yazılır. $A.x = k$ denklem sisteminin çözümü için, A bir karesel matris,yani bilinmeyen sayısı denklem sayısına eşit $(n = m)$ olsun. Bu durumda $|A| = 0$ ise sistemin çözümü boş kümedir. $|A| \neq 0$ ise sistemin tek çözümü olup, burada çözüm $\boxed{x = A^{-1}.k\text{'dır.}}$

CRAMER KURALI

Bilinmeyen sayısı ile denklem sayısının eşit olduğu lineer denklem sistemlerinin pratik çözümünü veren bir yöntemdir.

$$\left.\begin{array}{l}
a_{11}.x_1 + a_{12}.x_2 + a_{13}.x_3 + \dots\dots\dots\dots + a_{1n}.x_n = k_1 \\
a_{21}.x_1 + a_{22}.x_2 + a_{23}.x_3 + \dots\dots\dots\dots + a_{2n}.x_n = k_2 \\
-\,- \\
-\,- \\
-\,- \\
a_{n1}.x_1 + a_{n2}.x_2 + a_{n3}.x_3 + \dots\dots\dots\dots + a_{nn}.x_n = k_n
\end{array}\right\}$$

lineer denklem sisteminin katsayılarının determinantı.

$$\Delta = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & - & - & - & - & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & - & - & - & - & a_{2n} \\ - & - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - & - \\ a_{n1} & a_{n2} & - & - & - & - & a_{nn} \end{bmatrix}_{nxn}$$

Katsayılar determinantında birinci sütunun elemanları yerine sabit sayılar yazılarak elde edilen determinanta Δ_1 , ikinci sütunun elemanları yerine sabit sayılar yazılarak elde edilen determinanta Δ_2 ,...........dersek

$$\Delta_1 = \begin{bmatrix} k_1 & a_{12} & - & - & - & - & a_{1n} \\ k_2 & a_{22} & - & - & - & - & a_{2n} \\ - & - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - & - \\ k_{n1} & a_{n2} & - & - & - & - & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\Delta_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & k_1 & - & - & - & - & a_{1n} \\ a_{21} & k_2 & - & - & - & - & a_{2n} \\ - & - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - & - \\ a_{n1} & k_n & - & - & - & - & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\Delta_n = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & - & - & - & - & k_1 \\ a_{21} & a_{22} & - & - & - & - & k_2 \\ - & - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - & - \\ a_{n1} & a_{n2} & - & - & - & - & k_n \end{bmatrix}$$

ÖZELLİKLER

1) $\Delta \neq 0$ ise tek çözüm vardır.

$$\boxed{x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}}$$

2) $\Delta_1, \Delta_2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \Delta_n$ lerden en az biri sıfırdan farklı ise sistemin çözümü yoktur.

3) $\Delta = \Delta_1 = \Delta_1 = \Delta_1 = 0$ sistemin sonsuz çözümü vardır.

ÖRNEK

Görsel Eğitim

$$\begin{aligned} 4x + 3y &= 17 \\ 3x + 2y &= 12 \end{aligned}$$

sistemin çözümü nedir?