

# ÜNİTE VIII

## ÜSTEL VE LOGARİTMA FONKSİYONU

ARA SINAV ÇIKABİLECEK SORU ADEDİ: YOK

FINAL/BÜTÜNLEME ÇIKABİLECEK SORU ADEDİ: 1-2 Sorudur

## ÜNİTE İÇERİĞİ

Bu ünite de üstel fonksiyon ve grafiği, logoritmik fonksiyonu ve grafiği öğreneceksiniz.

Ayrıca logaritmanın temel özelliklerini, üstel ve logaritma fonksiyonların türevlerini, ekonomideki uygulamalarını göreceksiniz.

## TANIM

$a \in \mathbb{R}^+$  ve  $a \neq 1$  olmak üzere;

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+, y = f(x) = a^x$  şeklinde tanımlı fonksiyona **Üstel Fonksiyon** denir.  $f$  fonksiyonu birebir ve örten olduğundan ters fonksiyonu vardır. Üstel fonksiyonun ters fonksiyonuna **Logaritma Fonksiyonu** denir.

$\log_a^{\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}}$ ,  $f(x) = \log_a^x$  fonksiyonuna  $a$  tabanına göre logaritma fonksiyonu denir.

$f(x) = a^x$  ise  $f(x)$  fonksiyonunun ters fonksiyonu  $y = \log_a^x$  şeklinde gösterilir.

## UYARI

1) logaritma tabanı daima pozitiftir. ( $a > 0$ )

2) logaritma tabanı negatif ise ifade tanımsız olur. ( $a < 0$ )

3)  $a \neq 0$  ise  $a^0 = 1$ ,  $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ ,  $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ ,  $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$

$$(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x, \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$$

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}, 1^x = 1$$

# LOGORİTMA FONKSİYONUN GRAFIĞI

$f$  fonksiyonu ile  $f^{-1}$  ters fonksiyonun grafikleri  $y = x$  doğrusuna göre simetriktirler.

$y = \log_a x$  fonksiyonunu çizerken;

- 1)  $x = a$  için  $y = \log_a a = 1$   $A(a,1)$  noktası bulunur.
- 2)  $x = 1$  için  $y = \log_a 1 = 0$   $B(1,0)$  noktası bulunur.
- 3)  $A$  ve  $B$  noktaları analitik düzlemde işaretlenerek grafik çizilir.
- 4)  $a > 1$  ise logaritma fonksiyonu artandır.
- 5)  $0 < a < 1$  ise logaritma fonksiyonu azalandır.

$y = \log_5^x$  fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

$y = \log_3(x-2)$  fonksiyonunun grafiğini çiziniz?



$y = \log_{\frac{1}{2}} x$  fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

# LOGARİTMA FONKSİYONUNUN TERSİNİN ALINMASI

Logaritma fonksiyonunun tersinin kuralını fonksiyonlar konusunda gördüğümüz ' ' Bir fonksiyonun tersinin kuralını bulma' ' bilgilerimizden faydalanarak çözeceğiz.

$y = f(x) = \log_a^x$  fonksiyonun ters fonksiyonu  $a^y = x$  ise  $f^{-1}(x) = a^x$



Görsel Eğitim

$\log_5^{(x+2)}$  ise  $f^{-1}(x) = ?$

$$f(x) = 2 + \log_2 x \text{ ise } f^{-1}(x) = ?$$

$$f(x) = \log_2(x+2) \text{ ise } f^{-1}(x) = ?$$

$$f(x) = \log_3 x \text{ ise } f^{-1}(x) = ?$$

$$f(x) = 5^x \text{ ise } f^{-1}(x) = ?$$

$$f(x) = 3^{x-1} \text{ ise } f^{-1}(x) = ?$$

## LOGORİTMANIN ALANSAL TANIMI

$x \in \mathbb{R}^+$  ve  $k \in \mathbb{R}^+$  olmak üzere  $y = \frac{k}{x}$  eğrisinin grafiği ile  $Ox$  eksenini arasında apsisi 1 ve  $x$  olan noktalarda  $Ox$  eksenine çizilen dikmelerin sınırladığı alan  $A(x)$  olsun.

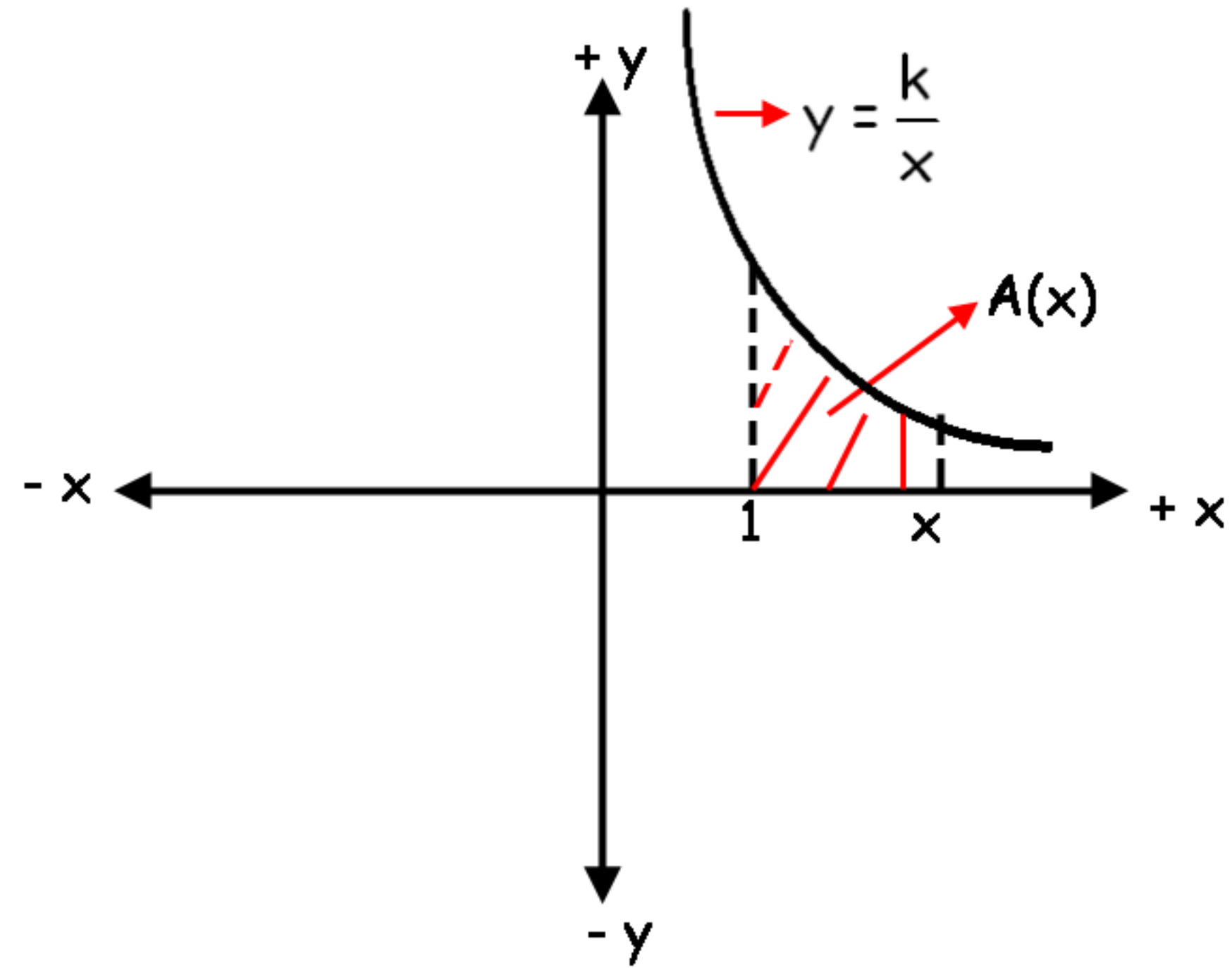
1)  $a > 1$  ise  $A(a) = 1$  olur.

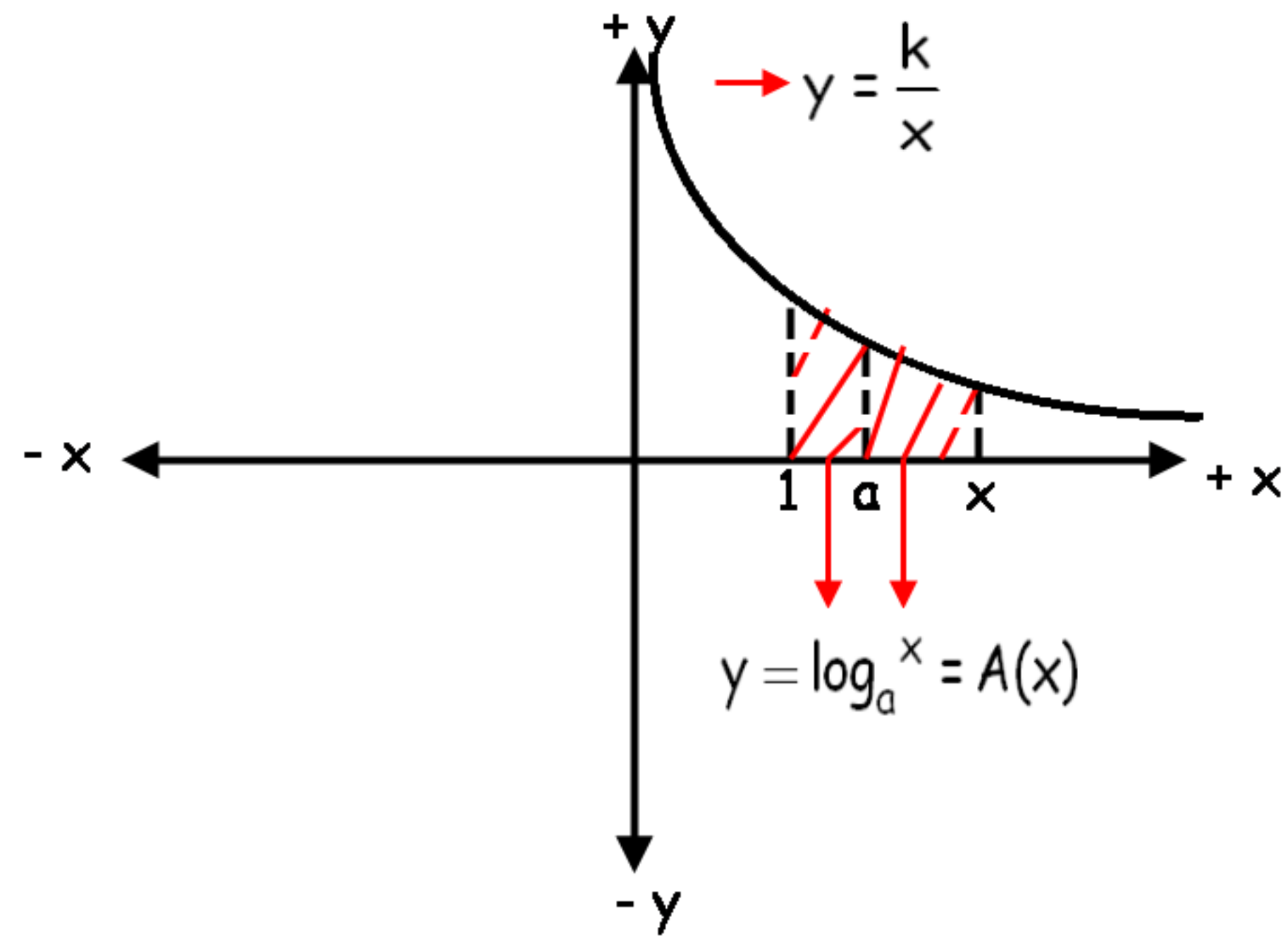
$$0 < x < 1 \text{ için } \log_a x = -A(x)$$

$$x = 1 \text{ için } \log_a 1 = 0$$

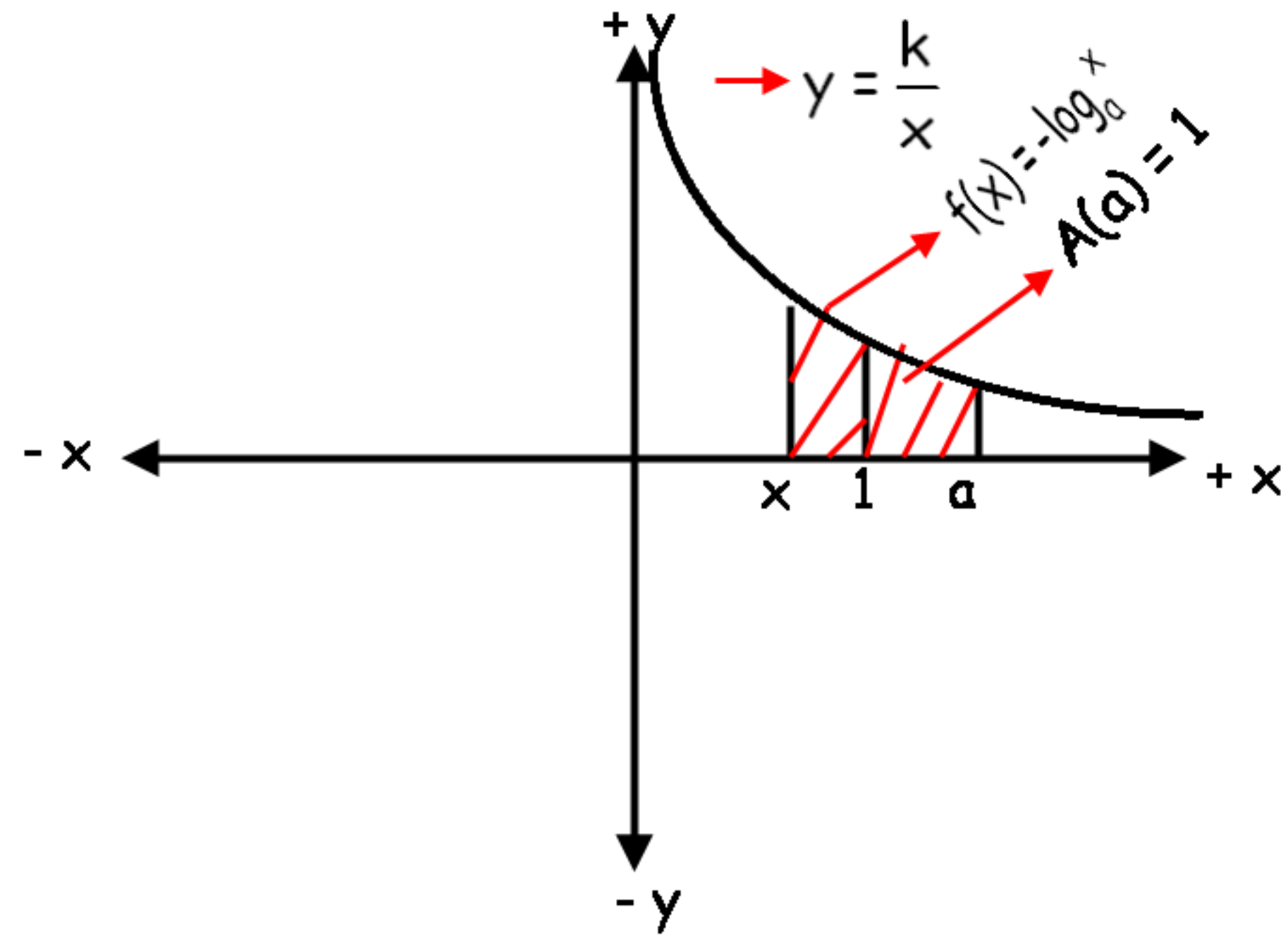
$$x > 1 \text{ için } \log_a x = A(x)$$

$y = A(x) = \log_a x$  tabanında **logaritma** fonksiyonu denir.









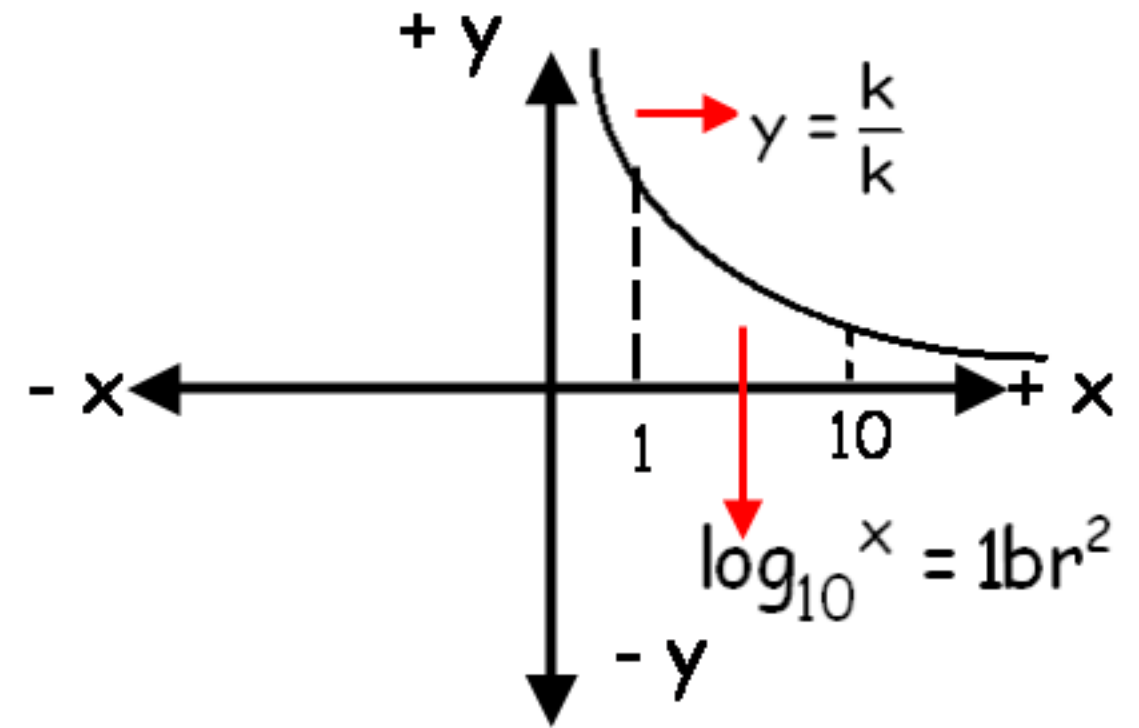
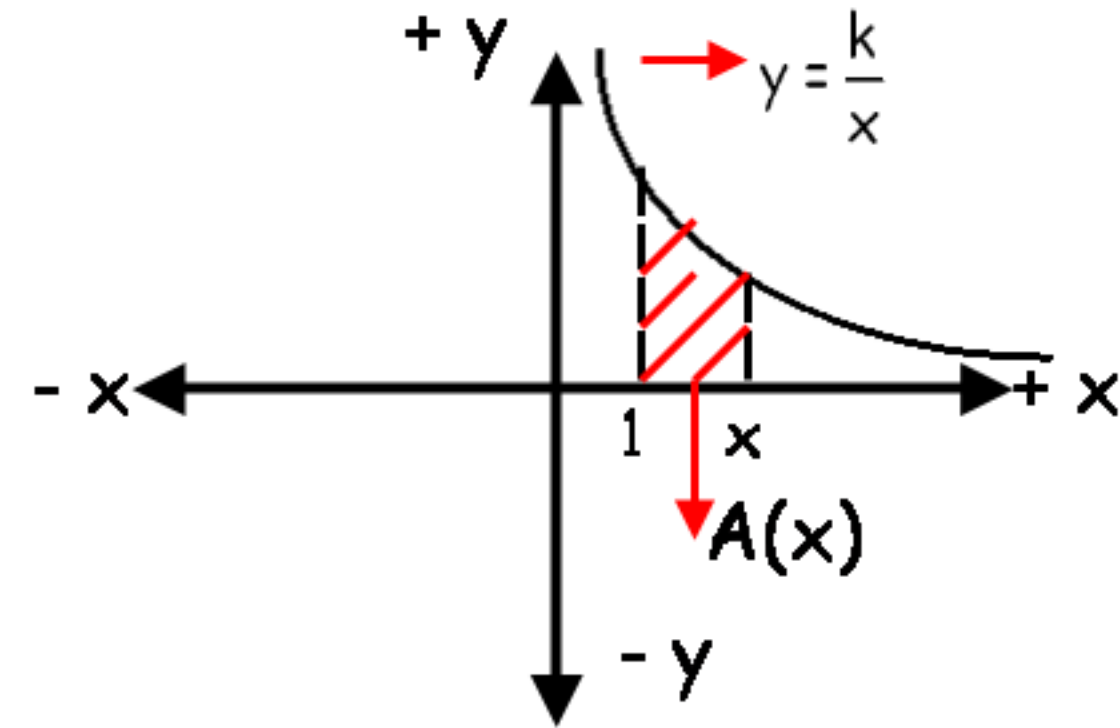
$$2) \quad 0 < a < 1 \text{ için } A(a) = 1$$

$$x > 1 \text{ için } \log_a x = -A(x)$$

$$x = 1 \text{ için } \log_a x = 0$$

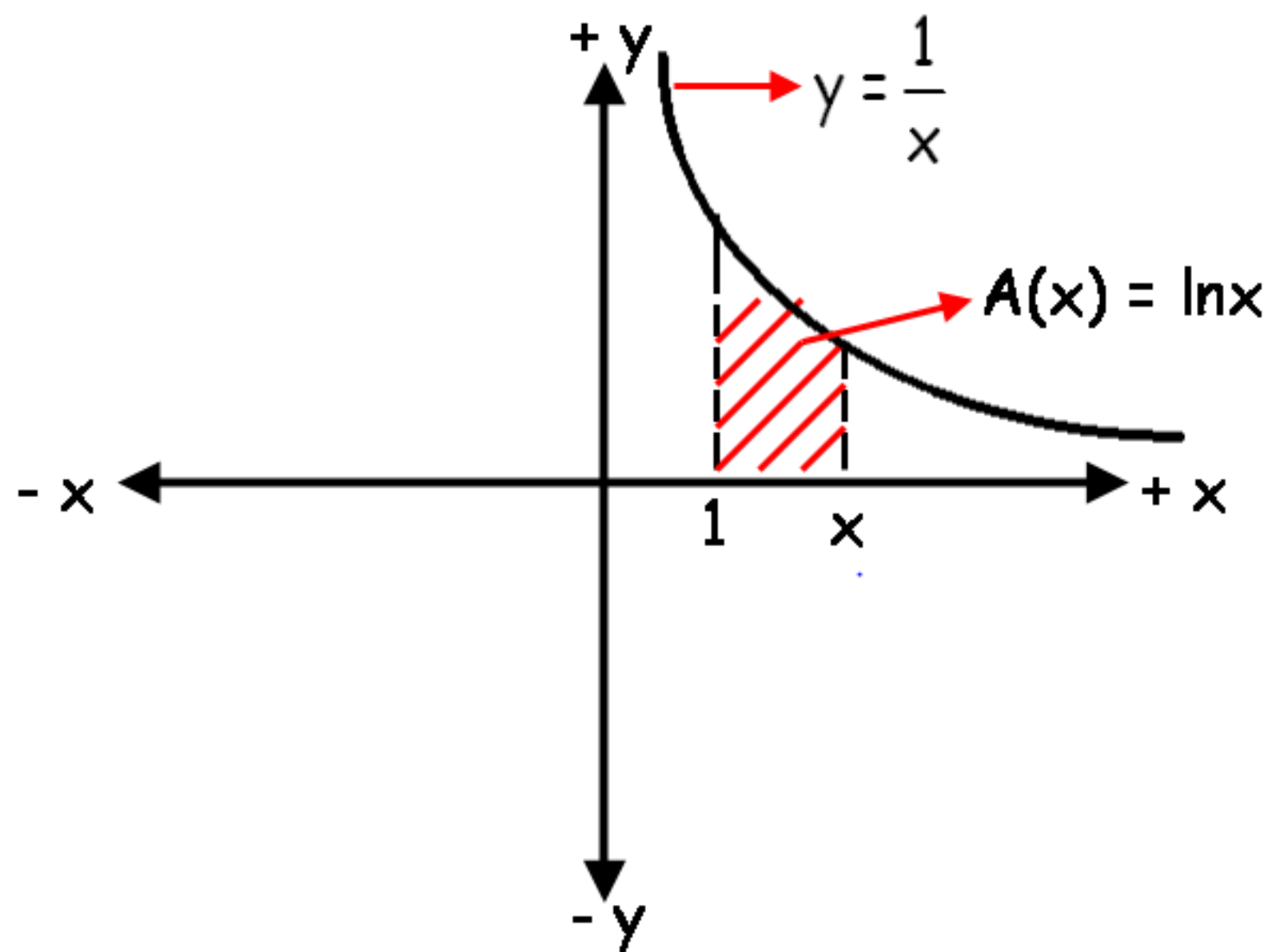
$$0 < x < 1 \text{ için } \log_a x = A(x)$$

# BAYAĞI LOGARİTMA



$y = \log_a x$  fonksiyonunda  $a = 10$  ise logaritma fonksiyonuna **Bayağı** logaritma fonksiyonu denir.  $\log_{10} x = \log x$  olarak gösterilir.

# DOĞAL LOGARİTMA



$y = \frac{1}{x}$  eğrisi ile Ox eksenini apsisi 1 ve x olan noktalardan çıkan dikmelerin sınırladığı alan  $A(x)$  ise;

$$0 < x < 1 \text{ için } \ln x = -A(x)$$

$$x = 1 \text{ için } \ln x = 0$$

$$x > 1 \text{ için } \ln x = A(x)$$

biçiminde tanımlanan fonksiyona **doğal logaritma** fonksiyonu denir. Doğal logaritma fonksiyonunun tabanı **e** ile gösterilir.

$$\log_e x = \ln x$$

$$e = 2,71828.....$$

## UYARI

$$y = \frac{k}{x} = k \cdot \frac{1}{x} \text{ olarak yazıldığında } A(x) = \log_e^x = k \cdot \ln x$$

## ÜSTEL FONKSİYONUN GRAFİĞİ

$$y = f(x) = a^x \quad f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$$

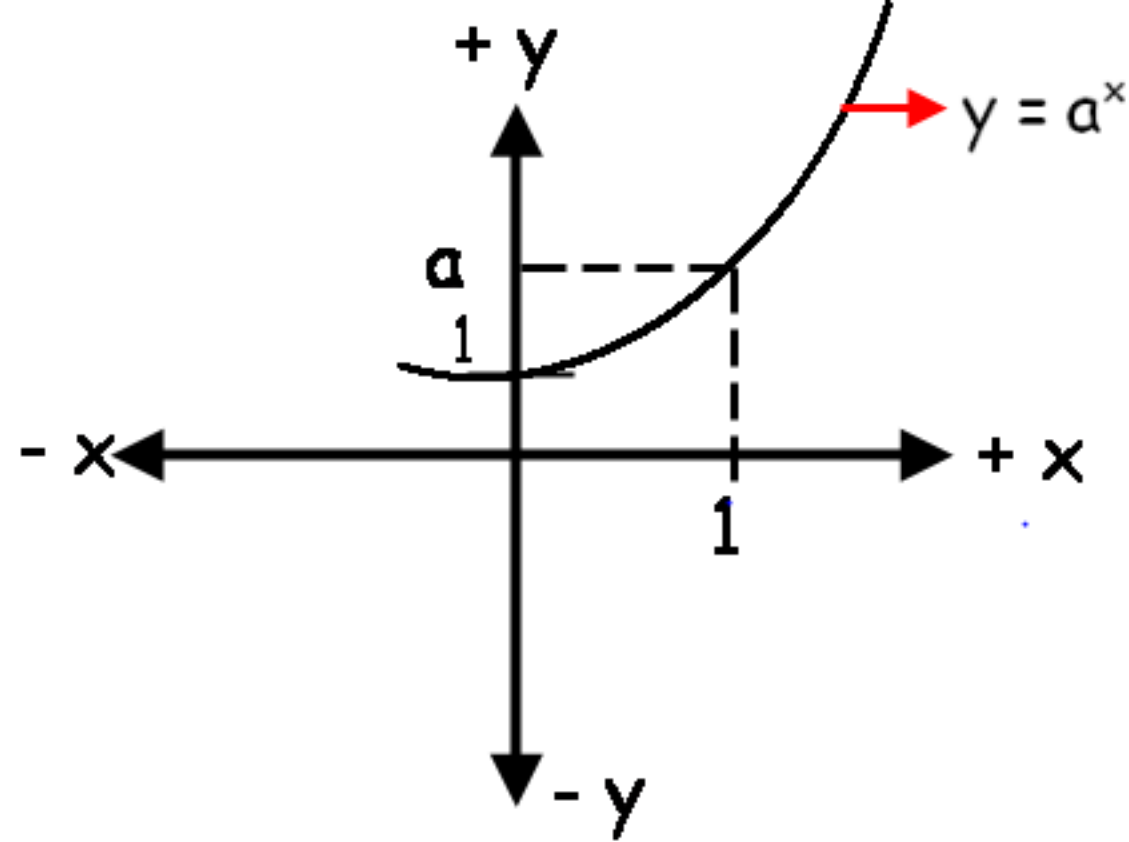
1) Taban daima pozitifdir. ( $a > 0, a \neq 1$ )

2) Taban negatif olamaz. Negatif olursa tanımsız olur. ( $a < 0$ )

$$y = f(x) = a^x \quad \text{ve } x > 0$$

3)  $x = 0$  için  $a^0 = 1$   $A(0,1)$

4)  $x = 1$  için  $a^1 = a$   $B(1,a)$

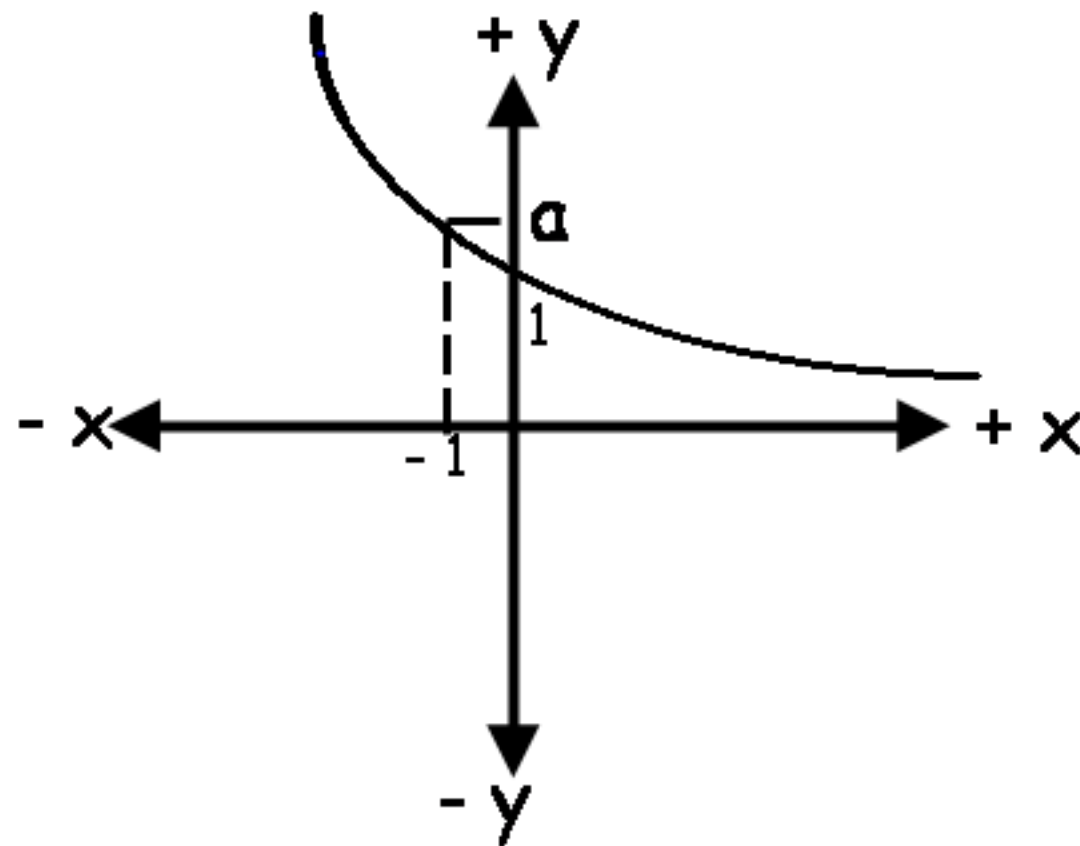


$$y = f(x) = a^x \text{ ve } x > 0$$

$$x = 0 \text{ için } a^0 = 1 \quad A(0,1)$$

$$x = 1 \text{ için } a^1 = a \quad B(1,a)$$

grafik artandır.



$$y = f(x) = a^x \text{ ve } x < 0$$

$$x = 0 \text{ için } a^0 = 1 \quad A(0,1)$$

$$x = -1 \text{ için } a^{-(-1)} = a \quad B(-1,a)$$

grafik azalandır.



# LOGARİTMA FONKSİYONUN ÖZELLİKLERİ

- 1) Yalnız pozitif reel (gerçek) sayıların logaritması vardır.
- 2) Negatif sayıların logaritması yoktur.
- 3) Taban 1 sayısından büyük olmak üzere; ( $a > 1, a \neq 1$  )
  - $x > 1$  sayısından büyük sayıların logaritması pozitiftir.
  - $0 < x < 1$  arasındaki sayıların logaritması negatiftir.

4) Taban hangi sayı olursa olsun 1'in logaritması sıfırdır.

$$\log_a 1 = 0 \text{ 'dir.}$$

5) Tabanı 1 sayısından küçük olmak üzere;  $(0 < a < 1)$

$x > 1$  sayısından büyük sayıların logaritması negatiftir.

$0 < x < 1$  sayısından küçük sayıların logaritması pozitiftir.

6) Tabanın logaritması 1'dir.  $\log_a a = 1$

# LOGARİTMA ALMANIN KURALLARI

$$a > 1, a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$$

$$1) \log_a 1 = 0$$

$$2) \log_a a = 1$$

$$3) \log_a x = b \Leftrightarrow b^x = a$$

$$4) \log x = \log_{10} x$$

$$5) \log_e x = \ln x$$

$$6) \log_e e = \ln e = 1$$

$$7) \log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

$$8) \log_a \left( \frac{x}{y} \right) = \log_a x - \log_a y$$

$$9) \log_a b^m = m \cdot \log_a b$$

$$10) \log_{a^n} b^m = \frac{m}{n} \cdot \log_a b$$

$$11) a^{\log_a b} = b$$

$$12) \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

$$13) \log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$$

# LOGARİTMİK FONKSİYONLARIN TÜREVİ

$$1) y = \log_a f(x) \text{ ise } y' = \frac{f'(x)}{f(x)} \log_a e$$

$$2) y = \ln f(x) \text{ ise } y' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

## ÜSTEL FONKSİYONLARIN TÜREVİ

1)  $y = a^{f(x)}$  ise  $y' = f'(x) \cdot a^{f(x)} \cdot \ln a$

2)  $y = e^{f(x)}$  ise  $y' = f'(x) \cdot e^{f(x)} \cdot \ln e = f'(x) \cdot e^{f(x)}$

3)  $y = e^x$  ise  $y' = e^x$



# ÜSTEL VE LOGARİTMİK FONKSİYONLARIN EKONOMİDEKİ UYGULAMALARI

Üstel ve logaritmik fonksiyonlarla bileşik faiz, nüfus artışı, ekonomik büyüme hesaplamaları yapılabilir. Bileşik faiz belli bir zaman içerisinde oluşan faizin anaparaya eklenmesiyle elde edilen miktardır.

## BİLEŞİK FAİZ HESABI

$A$  = Anapara - Kapital

$K$  = Anapara ile Faiz tutarının toplamıdır.

$F$  = Faiz getirisi (Kazanç)

$n$  = Faiz yüzdesi (Faiz Oranı)

$t$  = Faiz Süresi (yıl, ay, gün)

$$A + F = K = A \cdot \left(1 + \frac{n}{100}\right)^t = A \cdot \left(\frac{100 + n}{100}\right)^t$$

640 ytl parayı yıllık %75 ten bileşik faiz oranı ile 3 yıllığına bankaya yatıran bir kişi üçüncü yılın sonunda kaç ytl bankadan alır ?

120 milyon ytl yıllık %60 bileşik faiz oranıyla  
4'er aylık zaman dilimleriyle (vade) 1 yıl  
sonunda kazanılan toplam faiz kaç ytl'dir ?

2005 yılında Türkiye Cumhuriyetinin nüfusu yaklaşık olarak 60.000.000 ve ortalama yıllık %4 nüfus artışı göstermektedir. Buna göre 2007 yılında nüfusu ne kadar olur ?

Bankaya yatırılan 80.000.000 ytl yıllık %60 bileşik faiz oranıyla kaç ay sonra 88.200.000 ytl'ye ulaşır ?

## KARAKTERİSTİK VE MANTİS

$x \in \mathbb{R}^+, k \in \mathbb{Z}$  ve  $0 < m < 1$  olmak üzere,  $\log x = \log_{10} x = k + m$  biçiminde yazılabilir.

### KARAKTERİSTİK

Birden büyük bir sayının logaritmasının karakteristiği, sayının tam kısmındaki basamak sayısının 1 eksiğine eşit olan bir doğal sayıdır.

$(0, 1)$  arasında bir sayının karakteristiği ise, sayının ondalık yazılışındaki sıfırdan farklı ilk rakamının solundaki sıfırların sayısına eşit olan negatif bir tamsayıdır.

## MANTİS

Logaritma cetveli yardımıyla bulunur.

## UYARILAR

- 1) Mantis negatif olamaz.
- 2) Bir sayının logaritmasının karakteristiği negatif ise karakteristiği üzerine (-) konularak gösterilir.
- 3) Bir sayı 10'un herhangi bir kuvveti ile çarpılır veya bölünürse logaritmanın mantisi değişmez. Yalnızca karakteristiği değişir.



$$\log_{10} x = k + m$$

Karakteristik

Mantis

$$\log_{10} 5 = 0, \dots \dots \dots k = 0$$

$$\log_{10} 6578 = 3,81809$$

$$\log_{10} 412 = 2, \dots \dots \dots k = 2$$

$$\log_{10} 65780 = 4,81809$$

$$\log_{10} 0,3 = \bar{1}, \dots \dots \dots k = -1$$

$$\log_{10} 657,8 = 2,81809$$

$$\log_{10} 0,000021 = \bar{5}, \dots \dots \dots k = -5$$

## KOLOGARİTMA

$x \in \mathbb{R}^+$  sayısının çarpma işlemine göre tersinin logaritmasına  $x$ 'in **kologaritması** denir.

$\text{colog} x$  ile gösterilir.

$$\text{colog} x = \log \frac{1}{x} = -\log x$$

$$\log x = m + n \Leftrightarrow \text{colog} x = -(m + 1) + (1 - n)$$

## UYARI

$\log x$  sonucunun tam kısmı **m**, ondalık kısmı **n**'dir.



$$\log x = 3,12453 \text{ ise } \operatorname{colog} x = \bar{4},87547$$



$$\log x = \bar{2},45328 \text{ ise } \operatorname{colog} x = 1,54672$$

# LOGARİTMA FONKSİYONUNUN TANIM ARALIĞI

$$f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, y = f(x) = \log_a x$$

$(a \in \mathbb{R}^+ \text{ ve } a \neq 1)$  biçiminde tanımlanan logaritma

$x > 0$  için

$$y = \log_a x \Rightarrow x = a^y$$

$$\log_3(2x-6)$$

$$f(x) = \log_5(x+2) - \log_5(3-x)$$