

Yrd.Doç.Dr. Emre YALAMAÇ

BAZI ÖNEMLİ SÜREKLİ DEĞİŞKEN DAĞILIMLARI

CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ

© Yrd.Doç.Dr. Emre YALAMAÇ



Yrd.Doç.Dr. Emre YALAMAÇ

BAZI SÜREKLİ OLASILIK DAĞILIMLARI

1. SÜREKLİ DÜZGÜN (UNIFORM) DAĞILIM
2. NORMAL DAĞILIM
3. BİNOM DAĞILIMINA NORMAL YAKLAŞIM
4. POISSON DAĞILIMINA NORMAL YAKLAŞIM
5. ÜSTEL DAĞILIM
6. GAMMA DAĞILIMI
7. WEIBULL DAĞILIMI
8. LOGNORMAL DAĞILIMI

CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ

Yrd.Doç.Dr. Emre YALAMAÇ

SÜREKLİ DÜZGÜN (UNIFORM) DAĞILIM

En basit sürekli dağılım, düzgün kesikli dağılıma benzerlik gösterir.

$$f(x) = 1/(b - a), \quad a \leq x \leq b$$

$$\mu = E(X) = \frac{(a + b)}{2} \quad \text{and} \quad \sigma^2 = V(X) = \frac{(b - a)^2}{12}$$



CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ

© Yrd.Doç.Dr. Emre YALAMAÇ



Yrd.Doç.Dr. Emre YALAMAÇ

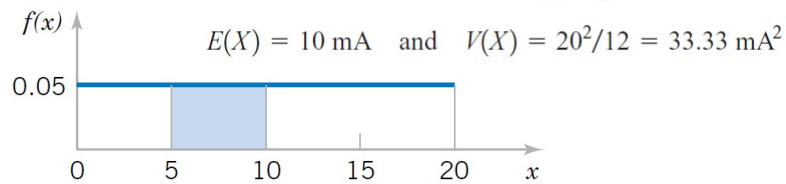
SÜREKLİ DÜZGÜN (UNIFORM) DAĞILIM

X ince bir bakır teldeki miliamper akımı sürekli değişken değerdir ve X değerleri aralığı [0, 20 mA] dir. Ve olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(x)=0.05$, $0 \leq x \leq 20$

Soru: Ölçülen akımın 5 ile 10 miliamper aralığında olma olasılığı nedir?

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$$

$$P(5 < X < 10) = \int_5^{10} f(x) dx$$
$$= 5(0.05) = 0.25$$

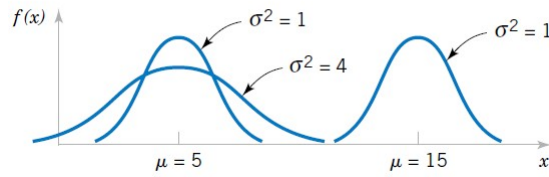


CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ

NORMAL DAĞILIM

Normal dağılım tüm olasılık dağılımlarının en çok kullanılanıdır.

Dağılımı ilk kez 1733'de De Moivre, sonra 1809'da Gauss tarafından bulundu dolayısıyla ayrıca Gauss dağılımı olarakta adlandırılır.



$$E(X) = \mu$$

$$V(X) = \sigma^2$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad -\infty < x < \infty$$

NORMAL DAĞILIM

Örnek A : bir teldeki akım akışı normal dağılım göstermektedir ve ortalama 10 miliamper ve 4 miliamper² varyansa sahiptir. Yapılan bir ölçümün 13 mA üzerinde olma olasılığı nedir?

$$X > 13$$

$$\mu = 10$$

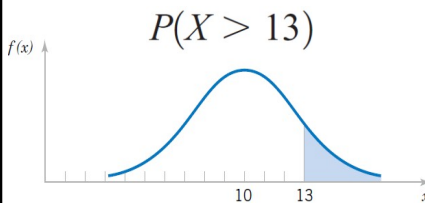
$$\sigma^2 = 4$$

$$P(X > 13)$$

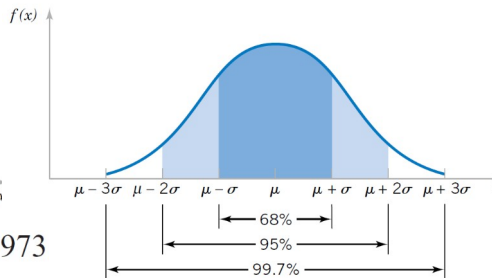
$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = 0.6827$$

$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) = 0.9545$$

$$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) = 0.9973$$



$$(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma), 6\sigma = 0.9973$$



STANDART NORMAL DAĞILIM

Normal rasgele değişken aşağıdaki değerler ile ifade ediliyorsa buna standart normal rasgele değişken denir ve Z ile ifade edilir.

$$\mu = 0 \quad \text{and} \quad \sigma^2 = 1$$

Bir standart normal rasgele değişkenin kümülatif dağılım fonksiyonu aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$\Phi(z) = P(Z \leq z)$$

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \quad E(Z) = 0 \quad V(Z) = 1$$

Yrd.Doç.Dr. Emre YALAMAÇ

$\Phi(z) = P(Z \leq z) = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2} du$

$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}$

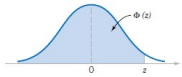
KÜMÜLATİF STANDART NORMAL DAĞILIM

APPENDIX

| z | -0.09 | -0.08 | -0.07 | -0.06 | -0.05 | -0.04 | -0.03 | -0.02 | -0.01 | -0.00 |
|------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| -3.9 | 0.000033 | 0.000034 | 0.000036 | 0.000037 | 0.000039 | 0.000041 | 0.000042 | 0.000044 | 0.000046 | 0.000048 |
| -3.8 | 0.000050 | 0.000052 | 0.000054 | 0.000057 | 0.000059 | 0.000062 | 0.000064 | 0.000067 | 0.000069 | 0.000072 |
| -3.7 | 0.000075 | 0.000078 | 0.000082 | 0.000085 | 0.000088 | 0.000092 | 0.000096 | 0.000100 | 0.000104 | 0.000108 |
| -3.6 | 0.000112 | 0.000117 | 0.000121 | 0.000126 | 0.000131 | 0.000136 | 0.000142 | 0.000147 | 0.000153 | 0.000159 |
| -3.5 | 0.000165 | 0.000172 | 0.000179 | 0.000185 | 0.000193 | 0.000200 | 0.000208 | 0.000216 | 0.000224 | 0.000233 |
| -3.4 | 0.000242 | 0.000251 | 0.000260 | 0.000270 | 0.000280 | 0.000291 | 0.000302 | 0.000313 | 0.000325 | 0.000337 |
| -3.3 | 0.000350 | 0.000362 | 0.000376 | 0.000390 | 0.000404 | 0.000419 | 0.000434 | 0.000450 | 0.000467 | 0.000483 |
| -3.2 | 0.000501 | 0.000519 | 0.000538 | 0.000557 | 0.000577 | 0.000598 | 0.000619 | 0.000641 | 0.000664 | 0.000687 |
| -3.1 | 0.000711 | 0.000736 | 0.000762 | 0.000789 | 0.000816 | 0.000845 | 0.000874 | 0.000904 | 0.000935 | 0.000968 |
| -3.0 | 0.001001 | 0.001035 | 0.001070 | 0.001107 | 0.001144 | 0.001183 | 0.001223 | 0.001264 | 0.001306 | 0.001350 |
| -2.9 | 0.001395 | 0.001441 | 0.001489 | 0.001538 | 0.001589 | 0.001641 | 0.001695 | 0.001750 | 0.001807 | 0.001866 |
| -2.8 | 0.001926 | 0.001988 | 0.002052 | 0.002118 | 0.002186 | 0.002256 | 0.002327 | 0.002401 | 0.002477 | 0.002555 |
| -2.7 | 0.002635 | 0.002718 | 0.002803 | 0.002890 | 0.002980 | 0.003072 | 0.003167 | 0.003264 | 0.003364 | 0.003467 |
| -2.6 | 0.003573 | 0.003681 | 0.003793 | 0.003907 | 0.004025 | 0.004145 | 0.004269 | 0.004396 | 0.004527 | 0.004661 |
| -2.5 | 0.004799 | 0.004940 | 0.005085 | 0.005234 | 0.005386 | 0.005543 | 0.005703 | 0.005868 | 0.006037 | 0.006210 |
| -2.4 | 0.006387 | 0.006569 | 0.006756 | 0.006947 | 0.007143 | 0.007344 | 0.007549 | 0.007760 | 0.007976 | 0.008198 |
| -2.3 | 0.008424 | 0.008656 | 0.008894 | 0.009137 | 0.009387 | 0.009642 | 0.009903 | 0.010170 | 0.010444 | 0.010724 |
| -2.2 | 0.011011 | 0.011304 | 0.011604 | 0.011911 | 0.012224 | 0.012545 | 0.012874 | 0.013209 | 0.013553 | 0.013903 |
| -2.1 | 0.014262 | 0.014629 | 0.015003 | 0.015386 | 0.015778 | 0.016177 | 0.016586 | 0.017003 | 0.017429 | 0.017864 |
| -2.0 | 0.018309 | 0.018763 | 0.019226 | 0.019699 | 0.020182 | 0.020675 | 0.021178 | 0.021692 | 0.022216 | 0.022750 |
| -1.9 | 0.023295 | 0.023852 | 0.024419 | 0.024998 | 0.025588 | 0.026190 | 0.026803 | 0.027429 | 0.028067 | 0.028717 |
| -1.8 | 0.029379 | 0.030054 | 0.030742 | 0.031443 | 0.032157 | 0.032884 | 0.033625 | 0.034379 | 0.035148 | 0.035930 |
| -1.7 | 0.036727 | 0.037538 | 0.038364 | 0.039204 | 0.040059 | 0.040929 | 0.041815 | 0.042716 | 0.043633 | 0.044565 |
| -1.6 | 0.045514 | 0.046479 | 0.047460 | 0.048457 | 0.049471 | 0.050503 | 0.051551 | 0.052616 | 0.053696 | 0.054799 |
| -1.5 | 0.055917 | 0.057053 | 0.058208 | 0.059380 | 0.060571 | 0.061780 | 0.063008 | 0.064256 | 0.065522 | 0.066807 |
| -1.4 | 0.068112 | 0.069437 | 0.070781 | 0.072145 | 0.073529 | 0.074934 | 0.076359 | 0.077804 | 0.079270 | 0.080757 |
| -1.3 | 0.082264 | 0.083793 | 0.085343 | 0.086915 | 0.088508 | 0.090123 | 0.091759 | 0.093418 | 0.095098 | 0.096801 |
| -1.2 | 0.098525 | 0.100273 | 0.102042 | 0.103835 | 0.105650 | 0.107488 | 0.109349 | 0.111233 | 0.113140 | 0.115070 |
| -1.1 | 0.117023 | 0.119000 | 0.121001 | 0.123024 | 0.125072 | 0.127143 | 0.129238 | 0.131357 | 0.133500 | 0.135666 |
| -1.0 | 0.137857 | 0.140071 | 0.142310 | 0.144572 | 0.146859 | 0.149170 | 0.151505 | 0.153864 | 0.156248 | 0.158655 |
| -0.9 | 0.161087 | 0.163543 | 0.166023 | 0.168528 | 0.171056 | 0.173609 | 0.176185 | 0.178786 | 0.181411 | 0.184060 |
| -0.8 | 0.186733 | 0.189430 | 0.192150 | 0.194894 | 0.197662 | 0.200454 | 0.203269 | 0.206108 | 0.208970 | 0.211855 |
| -0.7 | 0.214764 | 0.217695 | 0.220650 | 0.223627 | 0.226627 | 0.229650 | 0.232695 | 0.235762 | 0.238852 | 0.241964 |
| -0.6 | 0.245097 | 0.248252 | 0.251429 | 0.254627 | 0.257846 | 0.261086 | 0.264347 | 0.267629 | 0.270931 | 0.274253 |
| -0.5 | 0.277595 | 0.280957 | 0.284339 | 0.287740 | 0.291160 | 0.294599 | 0.298056 | 0.301532 | 0.305026 | 0.308538 |
| -0.4 | 0.312067 | 0.315614 | 0.319178 | 0.322758 | 0.326355 | 0.329969 | 0.333598 | 0.337243 | 0.340903 | 0.344578 |
| -0.3 | 0.348268 | 0.351973 | 0.355691 | 0.359424 | 0.363169 | 0.366928 | 0.370700 | 0.374484 | 0.378281 | 0.382089 |
| -0.2 | 0.385908 | 0.389739 | 0.393580 | 0.397432 | 0.401294 | 0.405165 | 0.409046 | 0.412936 | 0.416834 | 0.420740 |
| -0.1 | 0.424655 | 0.428576 | 0.432505 | 0.436441 | 0.440382 | 0.444330 | 0.448283 | 0.452242 | 0.456205 | 0.460172 |
| 0.0 | 0.464144 | 0.468119 | 0.472097 | 0.476078 | 0.480061 | 0.484047 | 0.488033 | 0.492022 | 0.496011 | 0.500000 |

Yrd.Doç.Dr. Emre YALAMAÇ

$\Phi(z) = P(Z \leq z) = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2} du$



KÜMÜLATİF STANDART NORMAL DAĞILIM

APPENDIX

| z | 0.00 | 0.01 | 0.02 | 0.03 | 0.04 | 0.05 | 0.06 | 0.07 | 0.08 | 0.09 |
|-----|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 0.0 | 0.500000 | 0.503989 | 0.507978 | 0.511967 | 0.515953 | 0.519939 | 0.523922 | 0.527903 | 0.531881 | 0.535856 |
| 0.1 | 0.539828 | 0.543795 | 0.547758 | 0.551717 | 0.555670 | 0.559618 | 0.563559 | 0.567495 | 0.571424 | 0.575345 |
| 0.2 | 0.579260 | 0.583166 | 0.587064 | 0.590954 | 0.594835 | 0.598706 | 0.602568 | 0.606420 | 0.610261 | 0.614092 |
| 0.3 | 0.617911 | 0.621719 | 0.625516 | 0.629300 | 0.633072 | 0.636831 | 0.640576 | 0.644309 | 0.648027 | 0.651732 |
| 0.4 | 0.655422 | 0.659097 | 0.662757 | 0.666402 | 0.670031 | 0.673645 | 0.677242 | 0.680822 | 0.684386 | 0.687933 |
| 0.5 | 0.691462 | 0.694974 | 0.698468 | 0.701944 | 0.705401 | 0.708840 | 0.712260 | 0.715661 | 0.719043 | 0.722405 |
| 0.6 | 0.725747 | 0.729069 | 0.732371 | 0.735653 | 0.738914 | 0.742154 | 0.745373 | 0.748571 | 0.751748 | 0.754903 |
| 0.7 | 0.758036 | 0.761148 | 0.764238 | 0.767305 | 0.770350 | 0.773373 | 0.776373 | 0.779350 | 0.782305 | 0.785236 |
| 0.8 | 0.788145 | 0.791030 | 0.793892 | 0.796731 | 0.799546 | 0.802338 | 0.805106 | 0.807850 | 0.810570 | 0.813267 |
| 0.9 | 0.815940 | 0.818589 | 0.821214 | 0.823815 | 0.826391 | 0.828944 | 0.831472 | 0.833977 | 0.836457 | 0.838913 |
| 1.0 | 0.841345 | 0.843752 | 0.846136 | 0.848495 | 0.850830 | 0.853141 | 0.855428 | 0.857690 | 0.859929 | 0.862143 |
| 1.1 | 0.864334 | 0.866500 | 0.868643 | 0.870762 | 0.872857 | 0.874928 | 0.876976 | 0.878999 | 0.881000 | 0.882977 |
| 1.2 | 0.884930 | 0.886860 | 0.888767 | 0.890651 | 0.892512 | 0.894350 | 0.896165 | 0.897958 | 0.899727 | 0.901475 |
| 1.3 | 0.903199 | 0.904902 | 0.906582 | 0.908241 | 0.909877 | 0.911492 | 0.913085 | 0.914657 | 0.916207 | 0.917736 |
| 1.4 | 0.919243 | 0.920730 | 0.922196 | 0.923641 | 0.925066 | 0.926471 | 0.927855 | 0.929219 | 0.930563 | 0.931888 |
| 1.5 | 0.933193 | 0.934478 | 0.935744 | 0.936992 | 0.938220 | 0.939429 | 0.940620 | 0.941792 | 0.942947 | 0.944083 |
| 1.6 | 0.945201 | 0.946301 | 0.947384 | 0.948449 | 0.949497 | 0.950529 | 0.951543 | 0.952540 | 0.953521 | 0.954486 |
| 1.7 | 0.955435 | 0.956367 | 0.957284 | 0.958185 | 0.959071 | 0.959941 | 0.960796 | 0.961636 | 0.962462 | 0.963273 |
| 1.8 | 0.964070 | 0.964852 | 0.965621 | 0.966375 | 0.967116 | 0.967843 | 0.968557 | 0.969258 | 0.969946 | 0.970621 |
| 1.9 | 0.971283 | 0.971933 | 0.972571 | 0.973197 | 0.973810 | 0.974412 | 0.975002 | 0.975581 | 0.976148 | 0.976705 |
| 2.0 | 0.977250 | 0.977784 | 0.978308 | 0.978822 | 0.979325 | 0.979818 | 0.980301 | 0.980774 | 0.981237 | 0.981691 |
| 2.1 | 0.982136 | 0.982571 | 0.982997 | 0.983414 | 0.983823 | 0.984222 | 0.984614 | 0.984997 | 0.985371 | 0.985731 |
| 2.2 | 0.986097 | 0.986447 | 0.986791 | 0.987126 | 0.987455 | 0.987776 | 0.988089 | 0.988396 | 0.988696 | 0.988989 |
| 2.3 | 0.989276 | 0.989556 | 0.989830 | 0.990097 | 0.990358 | 0.990613 | 0.990863 | 0.991106 | 0.991344 | 0.991576 |
| 2.4 | 0.991802 | 0.992024 | 0.992240 | 0.992451 | 0.992656 | 0.992857 | 0.993053 | 0.993244 | 0.993431 | 0.993613 |
| 2.5 | 0.993790 | 0.993963 | 0.994132 | 0.994297 | 0.994457 | 0.994614 | 0.994766 | 0.994915 | 0.995060 | 0.995201 |
| 2.6 | 0.995339 | 0.995473 | 0.995604 | 0.995731 | 0.995855 | 0.995975 | 0.996093 | 0.996207 | 0.996319 | 0.996427 |
| 2.7 | 0.996533 | 0.996636 | 0.996736 | 0.996833 | 0.996928 | 0.997020 | 0.997110 | 0.997197 | 0.997282 | 0.997365 |
| 2.8 | 0.997445 | 0.997523 | 0.997599 | 0.997673 | 0.997744 | 0.997814 | 0.997882 | 0.997948 | 0.998012 | 0.998074 |
| 2.9 | 0.998134 | 0.998193 | 0.998250 | 0.998305 | 0.998359 | 0.998411 | 0.998462 | 0.998511 | 0.998559 | 0.998605 |
| 3.0 | 0.998650 | 0.998694 | 0.998736 | 0.998777 | 0.998817 | 0.998856 | 0.998893 | 0.998930 | 0.998965 | 0.998999 |
| 3.1 | 0.999032 | 0.999065 | 0.999096 | 0.999126 | 0.999155 | 0.999184 | 0.999211 | 0.999238 | 0.999264 | 0.999289 |
| 3.2 | 0.999313 | 0.999336 | 0.999359 | 0.999381 | 0.999402 | 0.999423 | 0.999443 | 0.999462 | 0.999481 | 0.999499 |
| 3.3 | 0.999517 | 0.999533 | 0.999550 | 0.999566 | 0.999581 | 0.999596 | 0.999610 | 0.999624 | 0.999638 | 0.999650 |
| 3.4 | 0.999663 | 0.999675 | 0.999687 | 0.999698 | 0.999709 | 0.999720 | 0.999730 | 0.999740 | 0.999749 | 0.999758 |
| 3.5 | 0.999767 | 0.999776 | 0.999784 | 0.999792 | 0.999800 | 0.999807 | 0.999815 | 0.999821 | 0.999828 | 0.999835 |
| 3.6 | 0.999841 | 0.999847 | 0.999853 | 0.999858 | 0.999864 | 0.999869 | 0.999874 | 0.999879 | 0.999883 | 0.999888 |
| 3.7 | 0.999892 | 0.999896 | 0.999900 | 0.999904 | 0.999908 | 0.999912 | 0.999915 | 0.999918 | 0.999922 | 0.999925 |
| 3.8 | 0.999928 | 0.999931 | 0.999933 | 0.999936 | 0.999938 | 0.999941 | 0.999943 | 0.999946 | 0.999948 | 0.999950 |
| 3.9 | 0.999952 | 0.999954 | 0.999956 | 0.999958 | 0.999959 | 0.999961 | 0.999963 | 0.999964 | 0.999966 | 0.999967 |

© Yrd.Doç.Dr. Emre YALAMAÇ

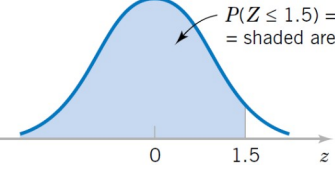


Yrd.Doç.Dr. Emre YALAMAÇ

STANDART NORMAL DAĞILIM

Örnek : $P(Z \leq z)$

$P(Z \leq 1.5) \quad P(Z \leq 1.53)$



$P(Z \leq 1.5) = \Phi(1.5)$
= shaded area

| z | 0.00 | 0.01 | 0.02 | 0.03 |
|-----|---------|---------|---------|---------|
| 0 | 0.50000 | 0.50399 | 0.50398 | 0.51197 |
| ... | ... | ... | ... | ... |
| 1.5 | 0.93319 | 0.93448 | 0.93574 | 0.93699 |

Aıştırmalı örnekler

(1) $P(Z > 1.26)$

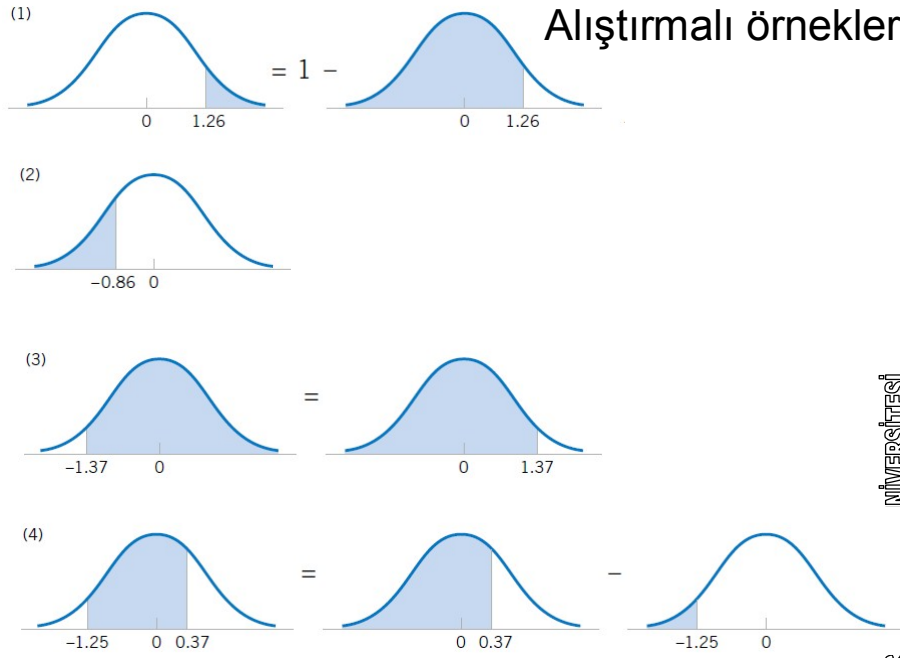
(3) $P(Z > -1.37)$

(2) $P(Z < -0.86)$

(4) $P(-1.25 < Z < 0.37)$

CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ

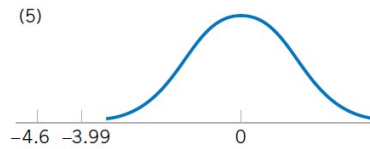
Alıştırırmalı örnekler



Alıştırırmalı örnekler

(5) $P(Z \leq -4.6)$

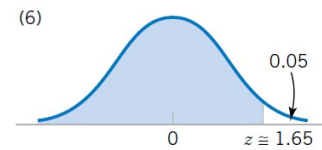
$P(Z \leq -3.99) = 0.00003$



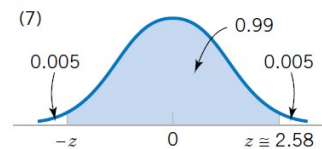
(6) $P(Z > z) = 0.05$

$$z = 1.65 \quad P(Z \leq z) = 0.95$$

$$0.95053$$



(7) $P(-z < Z < z) = 0.99$

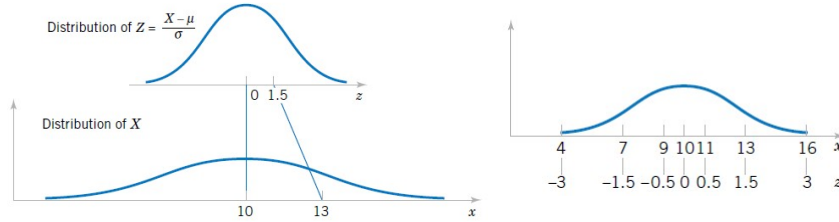


Yrd.Doç.Dr. Emre YALAMAÇ

STANDART NORMAL DAĞILIM

Örnek A : bir teldeki akım akışı normal dağılım göstermektedir ve ortalama 10 miliamper ve 4 miliamper² varyansa sahiptir. Yapılan bir ölçümün 13 mA üzerinde olma olasılığı nedir?

$$X > 13 \quad Z = \frac{(X - 10)}{2} \quad Z > 1.5$$



$$\begin{aligned} P(X > 13) &= P(Z > 1.5) = 1 - P(Z \leq 1.5) \\ &= 1 - 0.93319 = 0.06681 \end{aligned}$$

© Yrd.Doç.Dr. Emre YALAMAÇ



CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ

Yrd.Doç.Dr. Emre YALAMAÇ

STANDART NORMAL DAĞILIM

Bir olasılığı hesaplamak için standardizasyon

$$P(X \leq x) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{x - \mu}{\sigma}\right) = P(Z \leq z)$$

Örnek A

$$\begin{aligned} P(X > 13) &= P\left(\frac{(X - 10)}{2} > \frac{(13 - 10)}{2}\right) = P(Z > 1.5) \\ &= P(Z > 1.5) = 0.06681 \end{aligned}$$

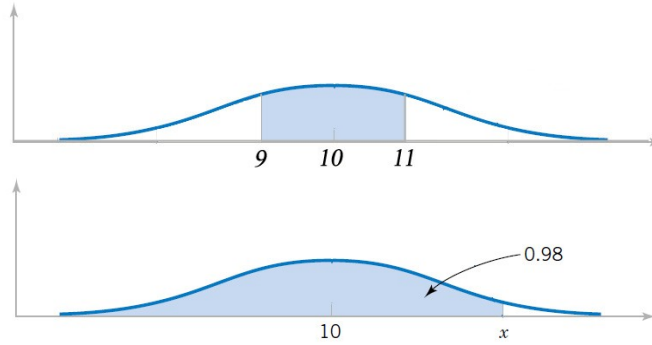
CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ

Yrd.Doç.Dr. Emre YALAMAÇ

STANDART NORMAL DAĞILIM

Örnek AB : bir teldeki akım akışı normal dağılım göstermektedir ve ortalama 10 miliamper ve 4 miliamper² varyansa sahiptir.

- a)Yapılan bir ölçümün 9 ile 11 miliamper arasında olma olasılığı nedir?
b)Bir ölçümün sonucunun %98 olasılık sınırını altında olduğunu belirleyen akım değeri nedir?



© Yrd.Doç.Dr. Emre YALAMAÇ



CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ

Yrd.Doç.Dr. Emre YALAMAÇ

Cevap :

$$\begin{aligned} P(9 < X < 11) &= P((9 - 10)/2 < (X - 10)/2 < (11 - 10)/2) \\ &= P(-0.5 < Z < 0.5) = P(Z < 0.5) - P(Z < -0.5) \\ &= 0.69146 - 0.30854 = 0.38292 \end{aligned}$$

$$P(X < x) = 0.98 \quad P(Z < z) = 0.98$$

$$(x - 10)/2 = 2.05 \quad P(Z < 2.05) = 0.97982$$

$$\begin{aligned} P(X < x) &= P((X - 10)/2 < (x - 10)/2) \\ &= P(Z < (x - 10)/2) \\ &= 0.98 \end{aligned}$$

$$x = 2(2.05) + 10 = 14.1 \text{ miliamper}$$

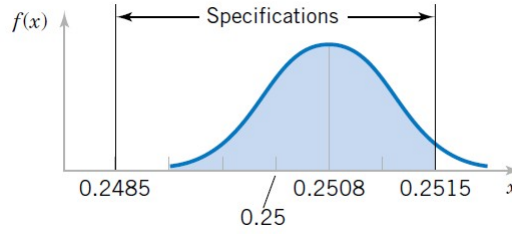
CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ

Yrd.Doç.Dr. Emre YALAMAÇ

STANDART NORMAL DAĞILIM

Örnek : Bir hard disk okuyucusunun şaft çapı normal dağılım ile 0,2508 inç ortalama değere ve 0,0005 standart sapmaya sahiptir. Şarft üreticisi tarafından tanımlanan şartnamede şaft çap ölçüleri 0,2500±0,0015 inç olarak tanımlanmaktadır.

- a) Buna göre üretilen şaftların ne kadarı şartnameyi sağlar?
b) Üretimin ortalaması hedef değeri bulursa şartname ne kadar oranda sağlanır?



CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ

© Yrd.Doç.Dr. Emre YALAMAÇ



Yrd.Doç.Dr. Emre YALAMAÇ

STANDART NORMAL DAĞILIM

Örnek : Bir hard disk okuyucusunun şaft çapı normal dağılım ile 0,2508 inç ortalama değere ve 0,0005 standart sapmaya sahiptir. Şarft üreticisi tarafından tanımlanan şartnamede şaft çap ölçüleri 0,2500±0,0015 inç olarak tanımlanmaktadır.

- a) Buna göre üretilen şaftların ne kadarı şartnameyi sağlar?
b) Üretimin ortalaması hedef değeri bulursa şartname ne kadar oranda sağlanır?

Cevap :

$$\begin{aligned} P(0.2485 < X < 0.2515) &= P\left(\frac{0.2485 - 0.2508}{0.0005} < Z < \frac{0.2515 - 0.2508}{0.0005}\right) \\ &= P(-4.6 < Z < 1.4) = P(Z < 1.4) - P(Z < -4.6) \\ &= 0.91924 - 0.0000 = 0.91924 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(0.2485 < X < 0.2515) &= P\left(\frac{0.2485 - 0.2500}{0.0005} < Z < \frac{0.2515 - 0.2500}{0.0005}\right) \\ &= P(-3 < Z < 3) \\ &= P(Z < 3) - P(Z < -3) \\ &= 0.99865 - 0.00135 \\ &= 0.9973 \end{aligned}$$

99.73%

CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ

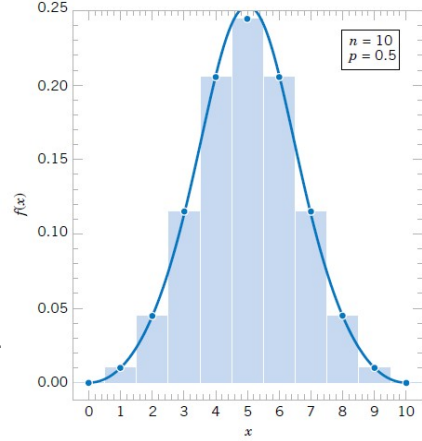
Yrd.Doç.Dr. Emre YALAMAÇ

BİNOM DAĞILIMINA NORMAL YAKLAŞIM

Yüksek sayıda deneme içeren binom olasılıklarının dağılımında normal dağılım kullanılabilir.

Yandaki şekilde herbir sütun altında kalan alan x değeri için binom olasılığıdır. Sütunların alanları, normal yoğunluk fonksiyonu altında kalan alana yaklaştırılabilir.

Örneğin $P(3 \leq X \leq 7)$ olasılığı normal eğri de 2,5 ile 7,5 arasındaki alana yaklaştırılır. Buna *süreklilik düzeltmesi* denir.



$$Z = \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

$$np > 5 \quad \text{and} \quad n(1-p) > 5$$

© Yrd.Doç.Dr. Emre YALAMAÇ



Yrd.Doç.Dr. Emre YALAMAÇ

BİNOM DAĞILIMINA NORMAL YAKLAŞIM

ÖRNEK SORU:

Örnek olarak alınan suda organik kirlilik olma olasılığı %10'dur. 50 adet alınan örnekte iki veya daha az örneğin kirlilik içermesi olasılığı kaçtır?

Cevap :

BİNOM DAĞILIM

$$P(X \leq 2) = \binom{50}{0} 0.9^{50} + \binom{50}{1} 0.1(0.9^{49}) + \binom{50}{2} 0.1^2(0.9^{48}) = 0.112$$

BİNOM DAĞILIMINA NORMAL YAKLAŞIM

$$P(X \leq 2) = P\left(\frac{X - 5}{2.12} < \frac{2 - 5}{2.12}\right) = P(Z < -1.42) = 0.08$$

Her ne kadar n=50 test az sayıda deneme olarsa da binom dağılımına normal yaklaşım tutarlıdır.

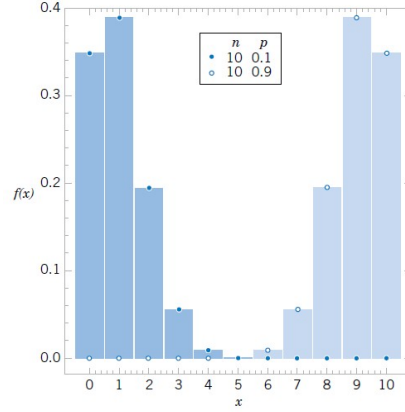
Yrd.Doç.Dr. Emre YALAMAÇ

BİNOM DAĞILIMINA NORMAL YAKLAŞIM

ÖRNEK SORU:

Örnek olarak alınan suda organik kirlilik olma olasılığı %10'dur. 10 adet alınan örnekte birinin, beşinin ve dokuzunun kirlilik içermesi olasılığı kaçtır?

np ya da $n(1-p)$ küçükse binom dağılımı biraz çarpıktır ve bu da simetrik normal dağılımla iyi bir yaklaşım olmaz. Fakat bir düzeltme faktörüyle daha çok yaklaşım yapılabilir.



Hipergeometrik
Dağılım

$$\approx \frac{n}{N} < 0.1$$

Binom
Dağılım

$$\approx np > 5$$
$$n(1-p) > 5$$

Normal
Dağılım

CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ

© Yrd.Doç.Dr. Emre YALAMAÇ



Yrd.Doç.Dr. Emre YALAMAÇ

POISSON DAĞILIMINA NORMAL YAKLAŞIM

$$f(x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

POISSON DAĞILIMI

$$E(X) = \lambda \text{ and } V(X) = \lambda \Rightarrow Z = \frac{X - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \quad \text{Standart normal rasgele değişken}$$

ÖRNEK SORU: Bir metre kare asfalt yüzeyinde asbest tane miktarı ortalama 1000 adet ile poisson dağılımı gösterir. Bir metre kare asfalt incelendiğinde 950 ve aşağısında asbest tanesi bulma olasılığı nedir?

$$P(X \leq 950) = \sum_{x=0}^{950} \frac{e^{-1000} 1000^x}{x!} \Rightarrow \text{Hesaplama oldukça zor olduğu için Poisson dağılımı aşağıdaki şekilde normal yaklaşım yapılır.}$$

$$P(X \leq x) = P\left(Z \leq \frac{950 - 1000}{\sqrt{1000}}\right) = P(Z \leq -1.58) = 0.057$$

CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ

Yrd.Doç.Dr. Emre YALAMAÇ

ÜSTEL DAĞILIM

Rasgele değişken N, x milimetre telde geçen akım sayısını gösterir.

Eğer λ her milimetrede geçen ortalama akım sayısı ise N, λx ortalama ile bir Poisson dağılımına sahiptir.

Tel x'den büyük ise;

$$P(X > x) = P(N = 0) = \frac{e^{-\lambda x} (\lambda x)^0}{0!} = e^{-\lambda x}$$

$$F(x) = P(X \leq x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0$$

Kümülatif dağılım fonksiyonu F(x) tarafından differensiyali alınırsa olasılık yoğunluk fonksiyonu x,

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0$$

X dağılımının derivasyonu sadece tel içindeki akımın bir *poisson işlemi* izlediği varsayımına bağlıdır.

CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ

© Yrd.Doç.Dr. Emre YALAMAÇ



Yrd.Doç.Dr. Emre YALAMAÇ

ÜSTEL DAĞILIM

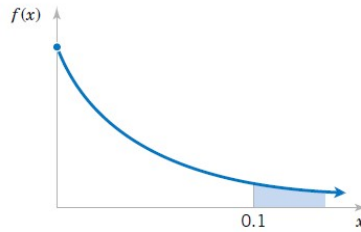
Bilgisayar ağı sistemine kullanıcı girişleri Poisson işlemiyle modellenilebilir ve saatte 25 giriş ortalamasıdır. 6 dakika içinde hiç giriş olmama olasılığı nedir?

X : ilk giriş yapılana kadar geçen zaman

X, $\lambda=25$ giriş/saat ortalama ile üstel dağılıma sahiptir.

Ve biz $x>6$ dk olasılığını araştırıyoruz

6 dk =0.1 saat



$$P(X > 0.1) = \int_{0.1}^{\infty} 25e^{-25x} dx = e^{-25(0.1)} = 0.082$$

CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ

Yrd.Doç.Dr. Emre YALAMAÇ

GAMMA DAĞILIMI

Bir üstel rasgele değişken bir poisson işlem içinde ilk değer elde edilene kadarki mesafedir. Üstel dağılımın bir genellemesi bir poisson işlem içinde r kadar değer elde edilene kadar ki mesafedir. Rasgele değişken bir poisson işlem içinde r kadar değer oluncaya kadar ki mesafe aralığı gamma dağılımına sahiptir.

Gamma Fonksiyonu

$$\Gamma(r) = \int_0^{\infty} x^{r-1} e^{-x} dx, \text{ for } r > 0 \quad f(x) = \frac{\lambda^r x^{r-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(r)}, \text{ for } x > 0$$

$$\mu = E(X) = r/\lambda \quad \text{and} \quad \sigma^2 = V(X) = r/\lambda^2$$

$$\lambda > 0 \text{ and } r > 0$$

CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ

© Yrd.Doç.Dr. Emre YALAMAÇ



Introduction to the Gamma Function

Pascal Sebah and Xavier Gourdon

numbers.computation.free.fr/Constants/constants.html

February 4, 2002

Some special values of $\Gamma(x)$

Except for the integer values of $x = n$ for which

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

some non integers values have a closed form.

The change of variable $t = u^2$ gives

$$\Gamma(1/2) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = 2 \int_0^{\infty} e^{-u^2} du = 2 \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}.$$

The functional equation entails for positive integers n

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{1.3.5...(2n-1)}{2^n} \sqrt{\pi},$$

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{3}\right) = \frac{1.4.7...(3n-2)}{3^n} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right),$$

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{4}\right) = \frac{1.5.9...(4n-3)}{4^n} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right),$$

and for negative values

$$\Gamma\left(-n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(-1)^n 2^n}{1.3.5...(2n-1)} \sqrt{\pi}.$$

CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ

Yrd.Doç.Dr. Emre YALAMAÇ

GAMMA DAĞILIMI

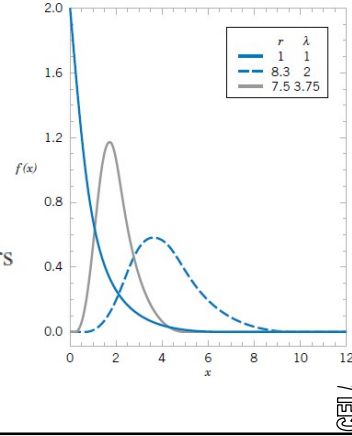
Gençip lamı hazırlama saatte 0.0001 adet ortalama hata ile poisson işlemidir. X rasgele değişkeni 4 adet hatalı lam hazırlanana kadar geçen zamandır. X rasgele değişkeninin 40000 saati aşma olasılığı nedir?

N, 40000 saat içindeki hata sayısı olsun.
4 hatanın 40000 saat üzerinde geçen bir zamanda olması için, 40000 saat içinde 3 veya daha az hatanın olması gerekir.

$$P(X > 40,000) = P(N \leq 3)$$

$$E(N) = 40,000(0.0001) = 4 \text{ failures per } 40,000 \text{ hours}$$

$$P(X > 40,000) = P(N \leq 3) = \sum_{k=0}^3 \frac{e^{-4} 4^k}{k!} = 0.433$$



© Yrd.Doç.Dr. Emre YALAMAÇ



Yrd.Doç.Dr. Emre YALAMAÇ

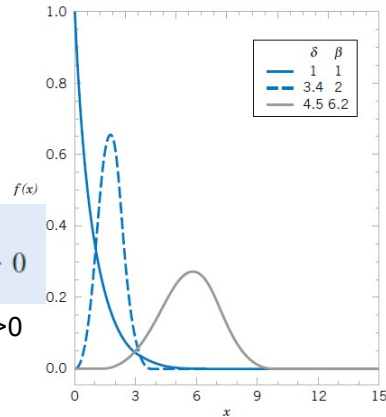
WEIBULL DAĞILIMI

Bir çok fiziksel sistemin hataya uğrayana kadar geçen zamanını modellemek için sıkça kullanılan bir dağılım şeklidir. Dağılımdaki parametreler model sistemler için büyük bir esneklik sağlar örneğin: parçalardaki işgöremezlik sayısının zamanla artması (yatak aşınması), zamanla azalması (bazı yarıiletkenler) ve ya zaman ile sabit kalması(sisteme dış bir şokun sonucu işgöremezlik).

X rasgele değişkeni,olasılık yoğunluk fonksiyonu ile

$$f(x) = \frac{\beta}{\delta} \left(\frac{x}{\delta}\right)^{\beta-1} \exp \left[-\left(\frac{x}{\delta}\right)^{\beta} \right], \quad \text{for } x > 0$$

Skala parametresi, $\delta > 0$ ve şekil parametresi $\beta > 0$



Yrd.Doç.Dr. Emre YALAMAÇ

WEIBULL DAĞILIMI

X rasgele değişkeni Skala parametresi (δ) ve şekil parametresi (β) ile Weibull dağılımına sahipse;

$$\mu = E(x) = \delta \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \quad \text{and} \quad \sigma^2 = V(x) = \delta^2 \Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right) - \delta^2 \left[\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)\right]^2$$

ÖRNEK:

Bir mekanik şafttaki bir yatağın işgöremezliğe kadar gecen zaman Weibull rasgele değişken modeli $\beta=1/2$ ve $\delta=5000$ saat ile uygun olarak modellenenilmektedir. İşgöremezlik ortalama zamanı nedir?

$$E(X) = 5000 \Gamma[1 + (1/0.5)] = 5000 \Gamma[3] = 5000 \times 2! = 10,000 \text{ hours}$$

En az 6000 saat sonuna kadar ki olasılığı nedir?

$$P(x > 6000) = 1 - F(6000) = \exp\left[-\left(\frac{6000}{5000}\right)^{1/2}\right] = e^{-1.095} = 0.334$$

Sonuç olarak tüm yatak parçalarının sadece %33,4'ü 6000 saat sonuna kadar

CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ

© Yrd.Doç.Dr. Emre YALAMAÇ



Yrd.Doç.Dr. Emre YALAMAÇ

LOGNORMAL DAĞILIMI

Bir sistem içindeki değişkenler bazen bir üstsel ilişki takip edeler yani $x=\exp(w)$ gibi. Şayet üst W bir rasgele değişken ise, $X=\exp(W)$ da bir rasgele değişkendir ve X dağılımı ilginçtir. Önemli bir durum W normal bir dağılım sergilediğinde X dağılımına lognormal dağılım denir.

İsmi $\ln(X)=W$ transformasyonundan alır.

X olasılıkları W 'ya transformasyonundan elde edilir. X için eklenik dağılım fonksiyonu:

$$\begin{aligned} F(x) &= P[X \leq x] = P[\exp(W) \leq x] = P[W \leq \ln(x)] \\ &= P\left[Z \leq \frac{\ln(x) - \theta}{\omega}\right] = \Phi\left[\frac{\ln(x) - \theta}{\omega}\right] \end{aligned}$$

Z standart normal rasgele değişkeni olduğu için olasılık eklenik standart olasılık dağılımı tablosundan bulunur.

CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ

Yrd.Doç.Dr. Emre YALAMAÇ

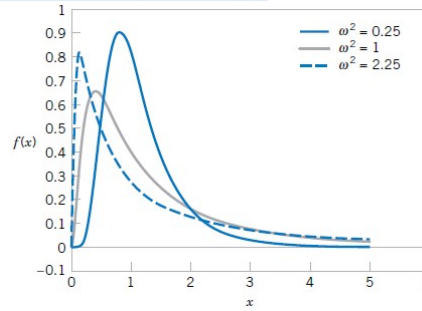
LOGNORMAL DAĞILIMI

W , ortalama θ ve varyans ω^2 ile bir normal dağılımlıdır dolayısıyla $X=\exp(W)$ aşağıdaki olasılık yoğunluk fonksiyonlu bir lognormal rasgele değişkendir.

$$f(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\ln x - \theta)^2}{2\omega^2}\right] \quad 0 < x < \infty$$

X 'in ortalama ve varyansı

$$E(X) = e^{\theta + \omega^2/2} \quad \text{and} \quad V(X) = e^{2\theta + \omega^2} (e^{\omega^2} - 1)$$



CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ

© Yrd.Doç.Dr. Emre YALAMAÇ



Yrd.Doç.Dr. Emre YALAMAÇ

LOGNORMAL DAĞILIMI

ÖRNEK :

Yarıiletken bir lazerin ömrü $\theta=10$ saat ve $\omega=1,5$ saat ile lognormal dağılımlıdır.

10000 saat ömrün üzerinde olma olasılığı nedir?

Lazerlerin %99'nun ömür uzunluğu ne kadardır?

$$F(x) = P[X \leq x] = P[\exp(W) \leq x] = P[W \leq \ln(x)]$$

$$\begin{aligned} P(X > 10,000) &= 1 - P[\exp(W) \leq 10,000] = 1 - P[W \leq \ln(10,000)] \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{\ln(10,000) - 10}{1.5}\right) = 1 - \Phi(-0.52) = 1 - 0.30 = 0.70 \end{aligned}$$

$$P(X > x) = 0.99$$

$$P(X > x) = P[\exp(W) > x] = P[W > \ln(x)] = 1 - \Phi\left(\frac{\ln(x) - 10}{1.5}\right) = 0.99$$

$$1 - \Phi(z) = 0.99 \quad z = -2.33$$

$$\frac{\ln(x) - 10}{1.5} = -2.33 \quad \text{and} \quad x = \exp(6.505) = 668.48 \text{ hours}$$

CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ

$$\Phi(z) = P(Z \leq z) = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2} du$$

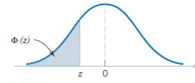


Table Cumulative Standard Normal Distribution

| z | -0.09 | -0.08 | -0.07 | -0.06 | -0.05 | -0.04 | -0.03 | -0.02 | -0.01 | -0.00 |
|------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| -3.9 | 0.000033 | 0.000034 | 0.000036 | 0.000037 | 0.000039 | 0.000041 | 0.000042 | 0.000044 | 0.000046 | 0.000048 |
| -3.8 | 0.000050 | 0.000052 | 0.000054 | 0.000057 | 0.000059 | 0.000062 | 0.000064 | 0.000067 | 0.000069 | 0.000072 |
| -3.7 | 0.000075 | 0.000078 | 0.000082 | 0.000085 | 0.000088 | 0.000092 | 0.000096 | 0.000100 | 0.000104 | 0.000108 |
| -3.6 | 0.000112 | 0.000117 | 0.000121 | 0.000126 | 0.000131 | 0.000136 | 0.000142 | 0.000147 | 0.000153 | 0.000159 |
| -3.5 | 0.000165 | 0.000172 | 0.000179 | 0.000185 | 0.000193 | 0.000200 | 0.000208 | 0.000216 | 0.000224 | 0.000233 |
| -3.4 | 0.000242 | 0.000251 | 0.000260 | 0.000270 | 0.000280 | 0.000291 | 0.000302 | 0.000313 | 0.000325 | 0.000337 |
| -3.3 | 0.000350 | 0.000362 | 0.000376 | 0.000390 | 0.000404 | 0.000419 | 0.000434 | 0.000450 | 0.000467 | 0.000483 |
| -3.2 | 0.000501 | 0.000519 | 0.000538 | 0.000557 | 0.000577 | 0.000598 | 0.000619 | 0.000641 | 0.000664 | 0.000687 |
| -3.1 | 0.000711 | 0.000736 | 0.000762 | 0.000789 | 0.000816 | 0.000845 | 0.000874 | 0.000904 | 0.000935 | 0.000968 |
| -3.0 | 0.001001 | 0.001035 | 0.001070 | 0.001107 | 0.001144 | 0.001183 | 0.001223 | 0.001264 | 0.001306 | 0.001350 |
| -2.9 | 0.001395 | 0.001441 | 0.001489 | 0.001538 | 0.001589 | 0.001641 | 0.001695 | 0.001750 | 0.001807 | 0.001866 |
| -2.8 | 0.001926 | 0.001988 | 0.002052 | 0.002118 | 0.002186 | 0.002256 | 0.002327 | 0.002401 | 0.002477 | 0.002555 |
| -2.7 | 0.002635 | 0.002718 | 0.002803 | 0.002890 | 0.002980 | 0.003072 | 0.003167 | 0.003264 | 0.003364 | 0.003467 |
| -2.6 | 0.003573 | 0.003681 | 0.003793 | 0.003907 | 0.004025 | 0.004145 | 0.004269 | 0.004396 | 0.004527 | 0.004661 |
| -2.5 | 0.004799 | 0.004940 | 0.005085 | 0.005234 | 0.005386 | 0.005543 | 0.005703 | 0.005868 | 0.006037 | 0.006210 |
| -2.4 | 0.006387 | 0.006569 | 0.006756 | 0.006947 | 0.007143 | 0.007344 | 0.007549 | 0.007760 | 0.007976 | 0.008198 |
| -2.3 | 0.008424 | 0.008656 | 0.008894 | 0.009137 | 0.009387 | 0.009642 | 0.009903 | 0.010170 | 0.010444 | 0.010724 |
| -2.2 | 0.011011 | 0.011304 | 0.011604 | 0.011911 | 0.012224 | 0.012545 | 0.012874 | 0.013209 | 0.013553 | 0.013903 |
| -2.1 | 0.014262 | 0.014629 | 0.015003 | 0.015386 | 0.015778 | 0.016177 | 0.016586 | 0.017003 | 0.017429 | 0.017864 |
| -2.0 | 0.018309 | 0.018763 | 0.019226 | 0.019699 | 0.020182 | 0.020675 | 0.021178 | 0.021692 | 0.022216 | 0.022750 |
| -1.9 | 0.023295 | 0.023852 | 0.024419 | 0.024998 | 0.025588 | 0.026190 | 0.026803 | 0.027429 | 0.028067 | 0.028717 |
| -1.8 | 0.029379 | 0.030054 | 0.030742 | 0.031443 | 0.032157 | 0.032884 | 0.033625 | 0.034379 | 0.035148 | 0.035930 |
| -1.7 | 0.036727 | 0.037538 | 0.038364 | 0.039204 | 0.040059 | 0.040929 | 0.041815 | 0.042716 | 0.043633 | 0.044565 |
| -1.6 | 0.045514 | 0.046479 | 0.047460 | 0.048457 | 0.049471 | 0.050503 | 0.051551 | 0.052616 | 0.053699 | 0.054799 |
| -1.5 | 0.055917 | 0.057053 | 0.058208 | 0.059380 | 0.060571 | 0.061780 | 0.063008 | 0.064256 | 0.065522 | 0.066807 |
| -1.4 | 0.068112 | 0.069437 | 0.070781 | 0.072145 | 0.073529 | 0.074934 | 0.076359 | 0.077804 | 0.079270 | 0.080757 |
| -1.3 | 0.082264 | 0.083793 | 0.085343 | 0.086915 | 0.088508 | 0.090123 | 0.091759 | 0.093418 | 0.095098 | 0.096801 |
| -1.2 | 0.098525 | 0.100273 | 0.102042 | 0.103835 | 0.105650 | 0.107488 | 0.109349 | 0.111233 | 0.113140 | 0.115070 |
| -1.1 | 0.117023 | 0.119000 | 0.121001 | 0.123024 | 0.125072 | 0.127143 | 0.129238 | 0.131357 | 0.133500 | 0.135666 |
| -1.0 | 0.137857 | 0.140071 | 0.142310 | 0.144572 | 0.146859 | 0.149170 | 0.151505 | 0.153864 | 0.156248 | 0.158655 |
| -0.9 | 0.161087 | 0.163543 | 0.166023 | 0.168528 | 0.171056 | 0.173609 | 0.176185 | 0.178786 | 0.181411 | 0.184060 |
| -0.8 | 0.186733 | 0.189430 | 0.192150 | 0.194894 | 0.197662 | 0.200454 | 0.203269 | 0.206108 | 0.208970 | 0.211855 |
| -0.7 | 0.214764 | 0.217695 | 0.220650 | 0.223627 | 0.226627 | 0.229650 | 0.232695 | 0.235762 | 0.238852 | 0.241964 |
| -0.6 | 0.245097 | 0.248252 | 0.251429 | 0.254627 | 0.257846 | 0.261086 | 0.264347 | 0.267629 | 0.270931 | 0.274253 |
| -0.5 | 0.277595 | 0.280957 | 0.284339 | 0.287740 | 0.291160 | 0.294599 | 0.298056 | 0.301532 | 0.305026 | 0.308538 |
| -0.4 | 0.312067 | 0.315614 | 0.319178 | 0.322758 | 0.326355 | 0.329969 | 0.333598 | 0.337243 | 0.340903 | 0.344578 |
| -0.3 | 0.348268 | 0.351973 | 0.355691 | 0.359424 | 0.363169 | 0.366928 | 0.370700 | 0.374484 | 0.378281 | 0.382089 |
| -0.2 | 0.385908 | 0.389739 | 0.393580 | 0.397432 | 0.401294 | 0.405165 | 0.409046 | 0.412936 | 0.416834 | 0.420740 |
| -0.1 | 0.424655 | 0.428576 | 0.432505 | 0.436441 | 0.440382 | 0.444330 | 0.448283 | 0.452242 | 0.456205 | 0.460172 |
| 0.0 | 0.464144 | 0.468119 | 0.472097 | 0.476078 | 0.480061 | 0.484047 | 0.488033 | 0.492022 | 0.496011 | 0.500000 |

CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ