

ÜNİTE XIV

DOĞRUSAL PROGRAMLAMA

ARA SINAV ÇIKABİLECEK SORU ADEDİ: YOK

FINAL/BÜTÜNLEME ÇIKABİLECEK SORU ADEDİ: 2-3 Sorudur

ÜNİTE İÇERİĞİ

Ünitemizde doğrusal programlamayı maliyet veya kar probleminin bir doğrusal programlama yöntemi ile çözüm analizini, bir problemin doğrusal programlamayla model oluşturulmasını ve bu modeli grafik yöntemiyle çözmeyi ve yorumlamayı öğreneceğiz.

TANIM

Matematiksel olarak doğrusal programlama '' Doğrusal bazı sınırlandırmalar altında doğrusal bir fonksiyonu maksimum veya minimum yapan değerleri bulma yöntemidir.'' şeklinde tanımlanmaktadır.

İktisatçılara göre doğrusal programlama ''sınırlı olanakların optimal dağılımında kullanılan bir tekniktir.'' şeklinde tanımlanmaktadır.

İşletme biliminde doğrusal programlama ''önceden belirlenmiş bir amacın, örneğin minimum maliyet veya maksimum karı gerçekleştirmeye yarayan bir tekniktir.'' şeklinde tanımlanmaktadır.

OPTİMÜMLAŞTIRMAK

Belirli bir amacı gerçekleştirmek için minimum maliyet veya maksimum karı elde etmek demektir.

BİR PROBLEMİN DOĞRUSAL PROGRAMLAMA YOLUYLA ÇÖZÜLMESİ İÇİN GEREKLİ ŞARTLAR

- ✚ Problemi oluşturacak elemanların rakam veya sayı ile ifade edilmesi gerekir.
- ✚ Değişkenler(bilinmeyenler) arasında alternatif seçim olabilmelidir. Maksimum veya minimum yapılacak fonksiyondaki değişkenler arasında bir seçim yapılabilmelidir.
- ✚ Problemi oluşturan değişkenler(bilinmeyenler) arasında kurulan bağıntılar doğrusal olmalıdır.

+ Doğrusal denilince, problemde değişkenler arasında bulunan eşitlik veya eşitsizliklerin birinci dereceden denklem sistemleri şeklinde olması gerekir. Bu durum üretim problemi üzerinde uygulanmalı ve açıklanmalıdır.

Bir işletmede bir A malının bir biriminin üretilmesi için 3 dakikalık bir zamana gerek varsa, bu maldan 150 birim için 450 dakika zamana ihtiyaç vardır. Burada zamanla üretilen miktar arasındaki bağıntı doğrusaldır.

$$3.A = 450$$

Bu işletmede A malı ile birlikte bir B malıda üretildiğinde varsayalım B malının üretiminin bir birimi için 5 dakikalık zamana gerek var ve bu iki malın üretimi için 450 dakikalık zamana ihtiyaç duyuluyor ise A ile B malının arasındaki bağıntı,

$$3A + 5B = 450$$

DOĞRUSAL PROGRAMLAMA YÖNTEMİYLE PROBLEMİN BİR MODELİNİ OLUŞTURMAK

- + Verilen problemi doğrusal programlama tekniği ile çözmek için aşağıdaki yollar uygulanmalıdır.

1) PROBLEMİN TANITILMASI

İşletme ve iktisat problemlerinde standartlar (zaman, hammadde, kar, birim maliyetler) tanıtılır. Üretim yapılabilmesi için üretim teknikleri ve bu tekniklerin her birinin uygulanmasıyla üretilebilecek mamüllerin birim maliyetleri (veya her birimin satışından elde edilecek kar) hesaplanmalıdır.

2) MATEMATİKSEL MODELİN OLUŞTURULMASI

+ Değişkenlerin Belirlenmesi

İşletme problemlerinde uygulanan doğrusal programlama modellerinde, genellikle üretim hacmi, makinaların çalışma süreleri, üretimde kullanılan hammadde miktarları ve üretim için yapılan giderler değişken olarak belirlenmelidir.

3) MODELİN GENEL OLARAK GÖSTERİMİ

Genel olarak modele girecek değişkenler x_1, x_2, \dots, x_n ile bu değişkenler arasındaki bağıntıları kuran parametreler $a_{11}, a_{12}, a_{13}, \dots, a_{1n}, \dots, a_{mn}$ şeklinde gösterilir. Problemden verilmiş sabit değerler (makina kapasiteleri, hammadde miktarları ve işgücü) $b_1, b_2, b_3, \dots, b_m$ gösterilir.

Değişkenler arasındaki genel bağıntı aşağıdaki gibidir.

$$a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1j} \cdot x_j + \dots + a_{1n} \cdot x_n \leq b_1$$

$$a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2j} \cdot x_j + \dots + a_{2n} \cdot x_n \leq b_2$$

$$a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \dots + a_{mj} \cdot x_j + \dots + a_{mn} \cdot x_n \leq b_m$$

UYARI

Değişkenler pozitif ve sıfır değeri alır. Ancak değişkenler **negatif** değer **alamazlar**.

UYARI

Modelde amaç fonksiyonu, modeldeki bütün değişkenleri içinde bulunduran (değişkenlerin katsayıları, birim karları veya maliyetleri) minimum veya maksimum yapılması istenen bir fonksiyondur.

$Z = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + \dots + c_n \cdot x_n$ bu fonksiyona **amaç fonksiyonu** denir.

Bir işletmede A ve B olmak üzere iki çeşit mal üretilmektedir. A ve B mallarının üretimi için izlenebilir iki üretim tekniği aşağıdaki tabloda verilmiştir. Söz konusu iki malın üretim teknikleri ile birer birimlerinin satışından elde edilebilecek karlar aşağıdaki tabloda gösterilmiştir.

	A MALI		B MALI		KAPASİTE
	I.TEKNİK	II.TEKNİK	I.TEKNİK	II.TEKNİK	
İŞ GÜCÜ (SAAT)	30	30	30	30	450
HAMMADDE (X)	10	8	6	4	240
HAMMADDE (Y)	5	4	9	15	180
BİRİM KAR (YTL)	5	6	7	11	?
DEĞİŞKENLER	x_1	x_2	x_3	x_4	

$$30.x_1 + 30.x_2 + 30.x_3 + 30.x_4 \leq 450$$

$$10.x_1 + 8.x_2 + 6.x_3 + 4.x_4 \leq 240$$

$$5.x_1 + 4.x_2 + 9.x_3 + 15.x_4 \leq 180$$

$$Z = 5.x_1 + 6.x_2 + 7.x_3 + 11.x_4 \rightarrow \text{Amaç fonksiyonudur.}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

UYARI

Verilen problemdeki değişkenler arasındaki bağıntılarda kurulan eşitsizlik sistemlerinde kurulan eşitsizlik belirli bir değerden küçük eşitsizlikler olarak verilmiştir.

UYARI

Bazı işletme problemlerinde aşağıdaki gibi eşitlik ve eşitsizlikler bulunabilir.

$$a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + a_{13} \cdot x_3 + \dots + a_{1n} \cdot x_n = b_1$$

$$a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + a_{23} \cdot x_3 + \dots + a_{2n} \cdot x_n \geq b_2$$

DOĞRUSAL PROGRAMLAMA MODELİNİN ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

Doğrusal programlama modelleri üç yöntem ile çözülmektedir.
Bu yöntemler;

1) Grafik Yöntemi

2) Simpleks Yöntemi

3) Matris Yöntemi

1) GRAFİK YÖNTEMİ

- ✚ Grafik yöntemi ile doğrusal programlama modelinin çözümünde önce verilen eşitsizliklerin dikkoordinat sisteminde grafikleri çizilerek uygun çözüm alanı bulunur.
- ✚ Optimum çözümünün bulunması için uygun çözüm alanını gösteren konveks (dışbükey) çokgen olması gerekir.

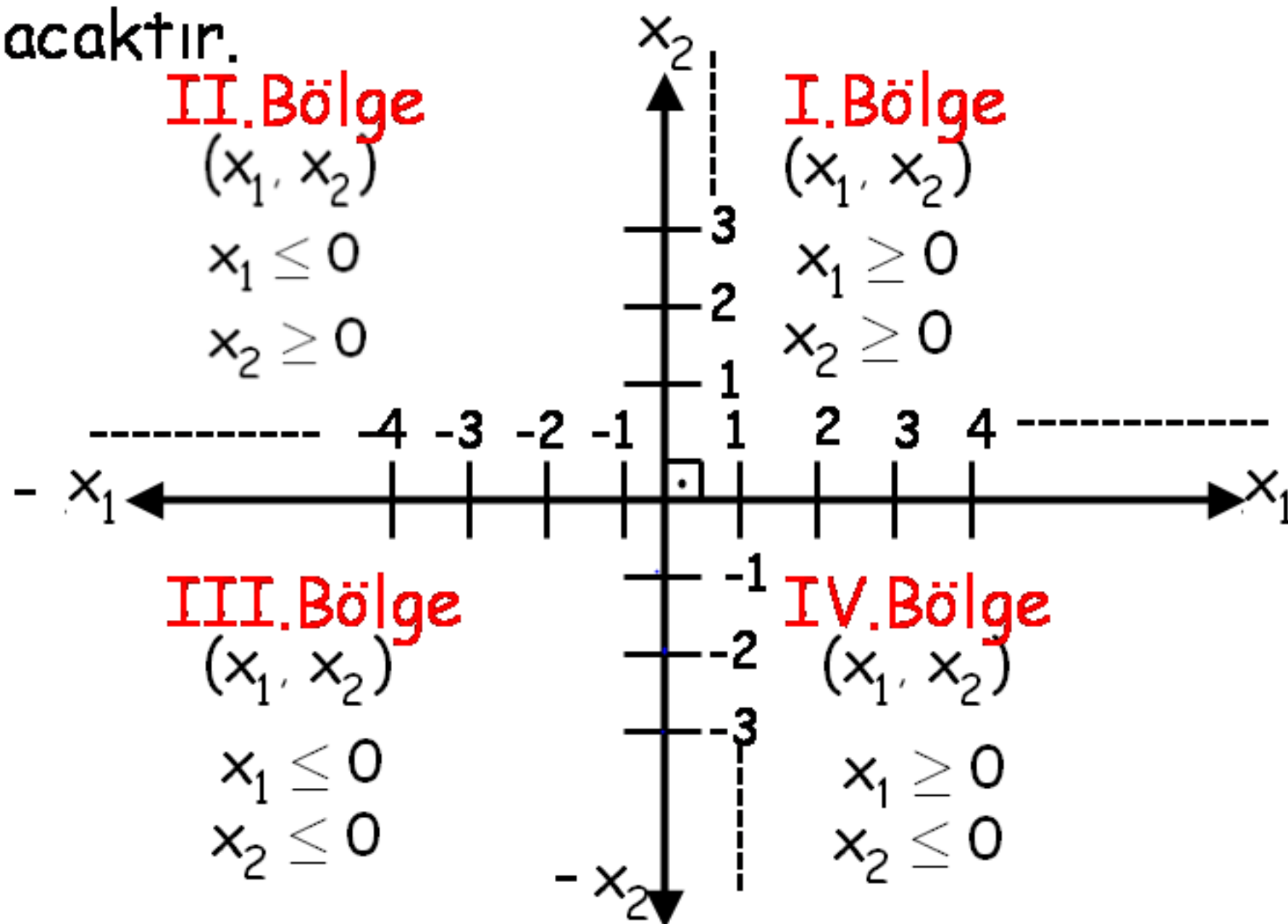
- + Bulunan uygun çözüm alanını gösteren çokgenin köşelerinin koordinatları (sıralı ikilileri) bu köşelerden geçen doğruların denklemlerinin ortak çözümü ile bulunur.
- + Bulunan köşelerinin koordinatları amaç fonksiyonunun denkleminde yerine yazılır.
- + **Problem minimum yapma problemi ise** amaç fonksiyonunun alacağı en küçük değerin bulunduğu noktanın koordinatları optimum çözümü verecektir.
- + **Problem maksimum yapma problemi ise** amaç fonksiyonunun alacağı en büyük değerin bulunduğu noktanın koordinatları optimum çözümü verecektir.

DİKKOORDİNAT DÜZLEMİ

UYARI

(x, y) sıralı ikilisi yerine doğrusal programlama modelin sıralı ikilisi (x_1, x_2) koordinatı olacaktır.

x eksenini yerine x_1 eksenini y eksenini yerine x_2 eksenini kullanılacaktır.



BAZI EŞİTSİZLİKLER

1) $y = mx + n$ doğru belirtir. Doğru çizilir.

2) $y < mx + n$
 $y \leq mx + n$

Doğrunun ALTI taranır

3) $y > mx + n$
 $y \geq mx + n$

Doğrunun ÜSTÜ taranır

Yukarıdaki eşitsizliklerden yararlanarak doğrusal programlama modelinin ortak çözümü belirlenir.

$$4) \begin{aligned} x_2 &< mx_1 + n \\ x_2 &\leq mx_1 + n \end{aligned}$$

Doğrunun ALTI tarafıdır

$$5) \begin{aligned} x_2 &> mx_1 + n \\ x_2 &\geq mx_1 + n \end{aligned}$$

Doğrunun ÜSTÜ tarafıdır

$$6) x_2 = mx_1 + n$$

→ Doğrusal programlama denkleminin eğimidir.

$m > 0$ ise grafik ARTANDIR.

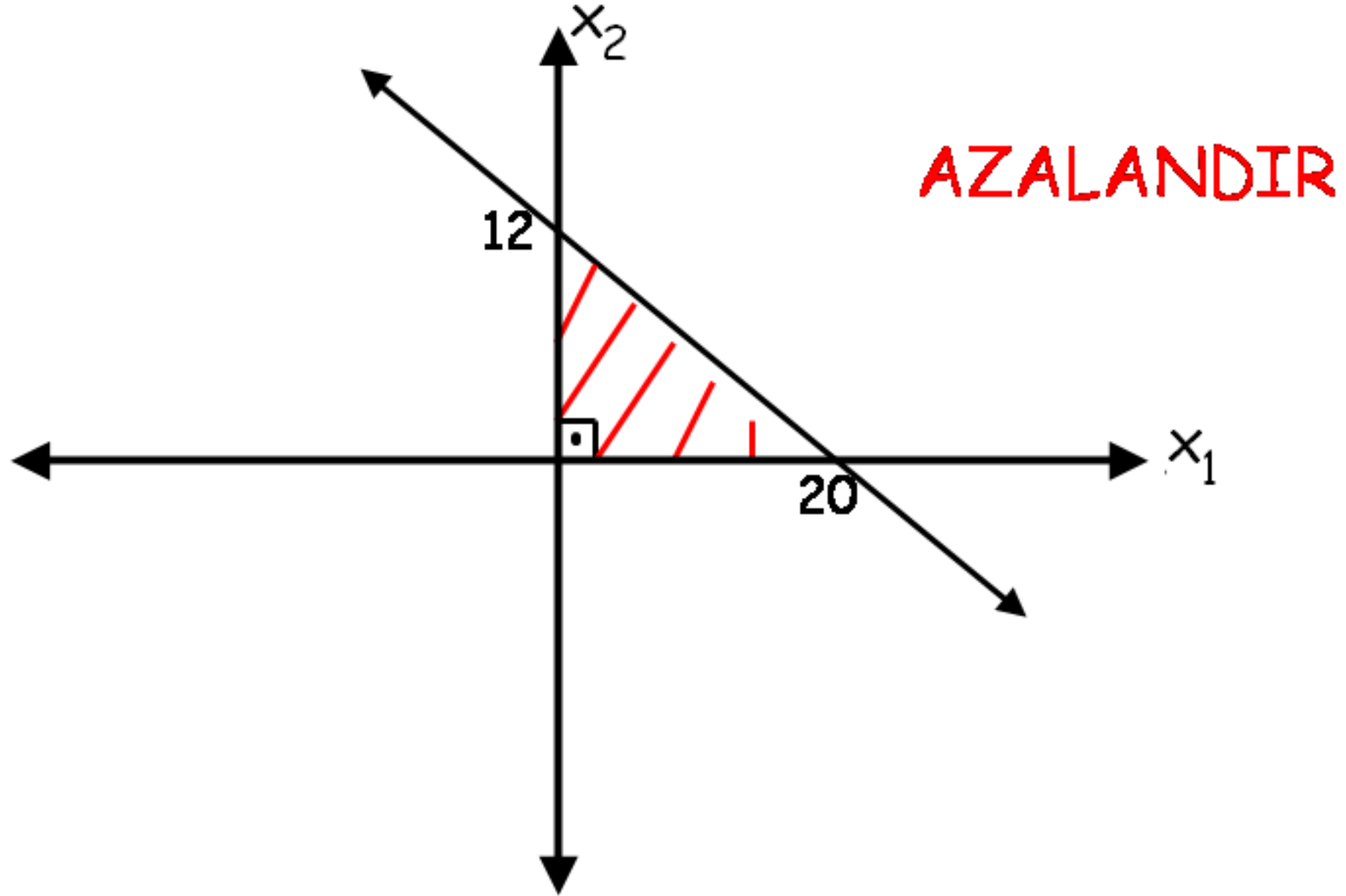
$m < 0$ ise grafik AZALANDIR.

$$z_{\min} = ax_1 + bx_2$$

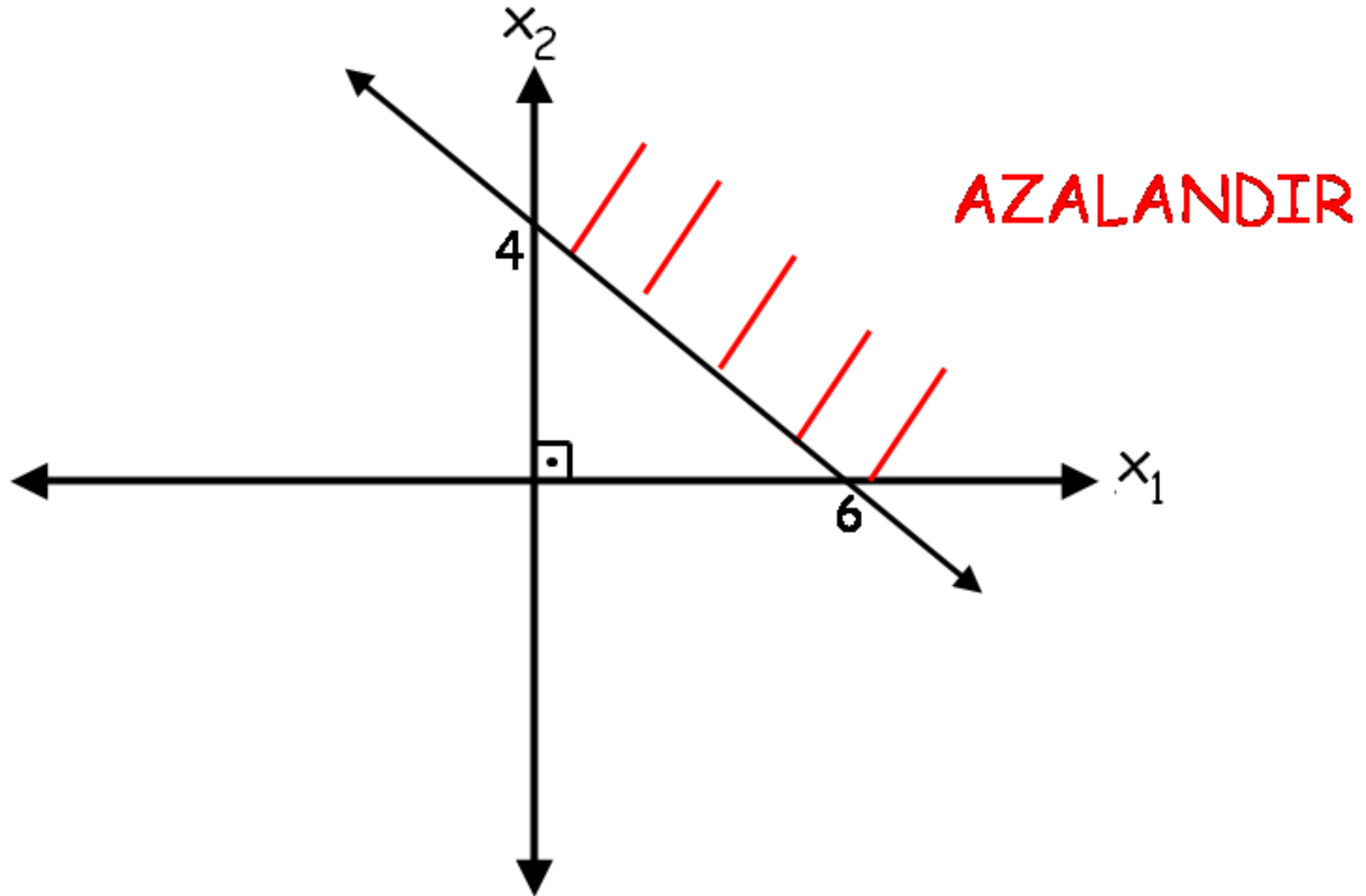
$$z_{\max} = ax_1 + bx_2$$

+ Yandaki doğrusal programlama modelleri amaç fonksiyonlarıdır.

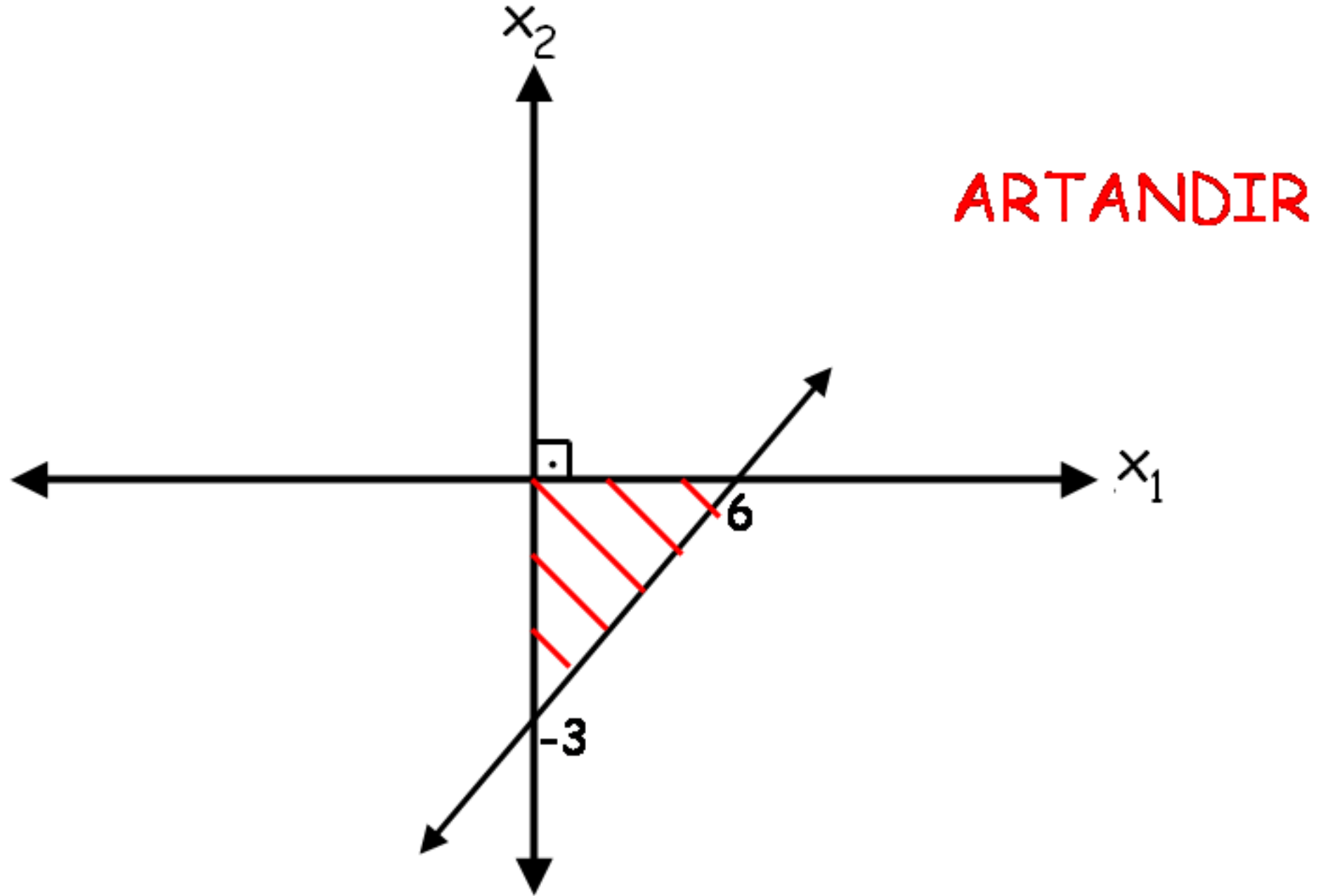
$3x_1 + 5x_2 \leq 60$ ise eşitsizliğin grafiğini çiziniz.



$2x_1 + 3x_2 \geq 12$ ise eşitsizliğin grafiğini çiziniz.



$x_1 - 2x_2 \leq 6$ ise eşitsizliğin grafiğini çiziniz.



Bir fabrika K ve M ürünlerini iki ayrı işletmede aşağıdaki gibi üretmektedir.

I.İşletme

K ürünü	M ürünü	Toplam Süre
2 saat	5 saat	40 saat

II.İşletme

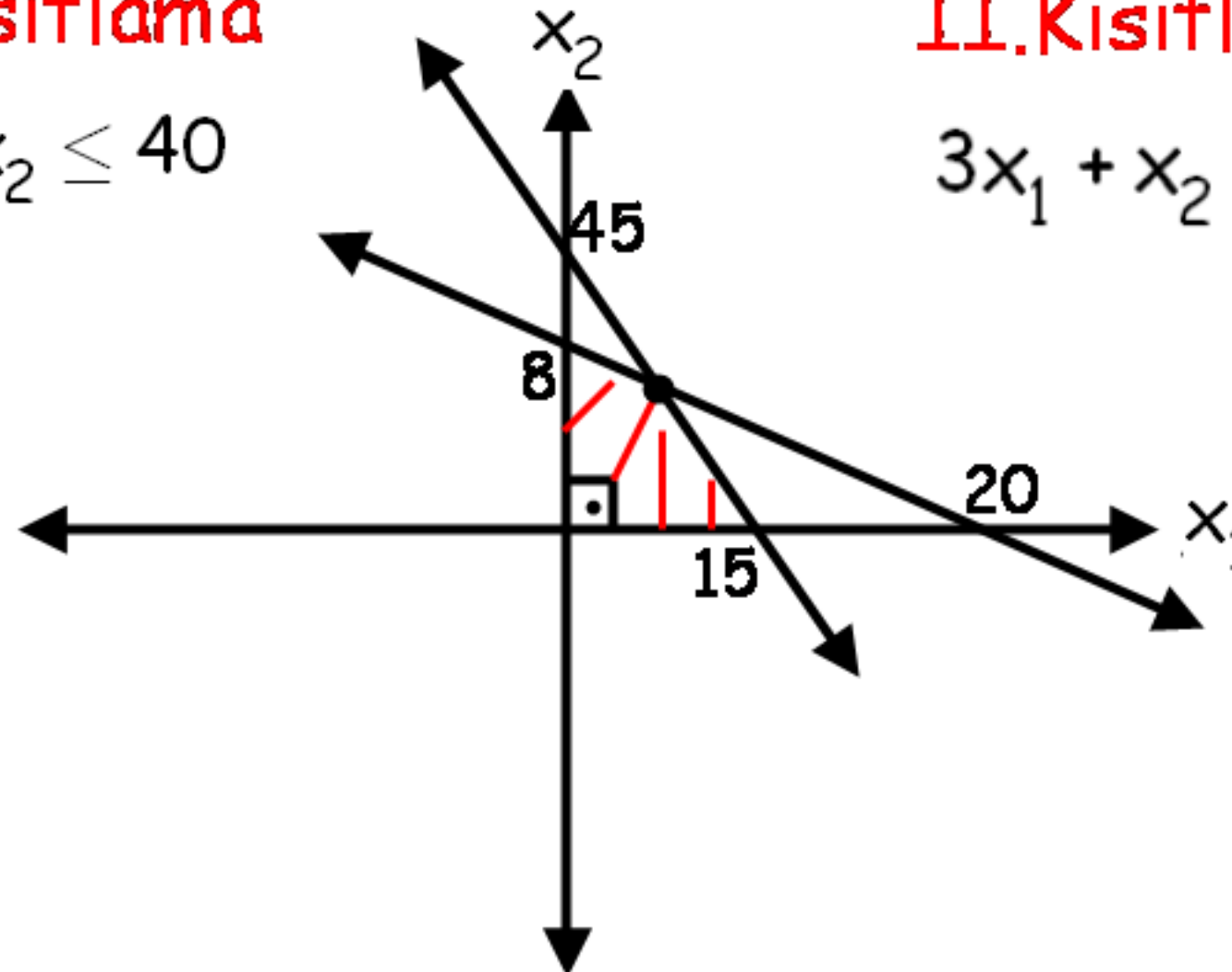
K ürünü	M ürünü	Toplam Süre
3 saat	1 saat	45 saat

I.Kısıtlama

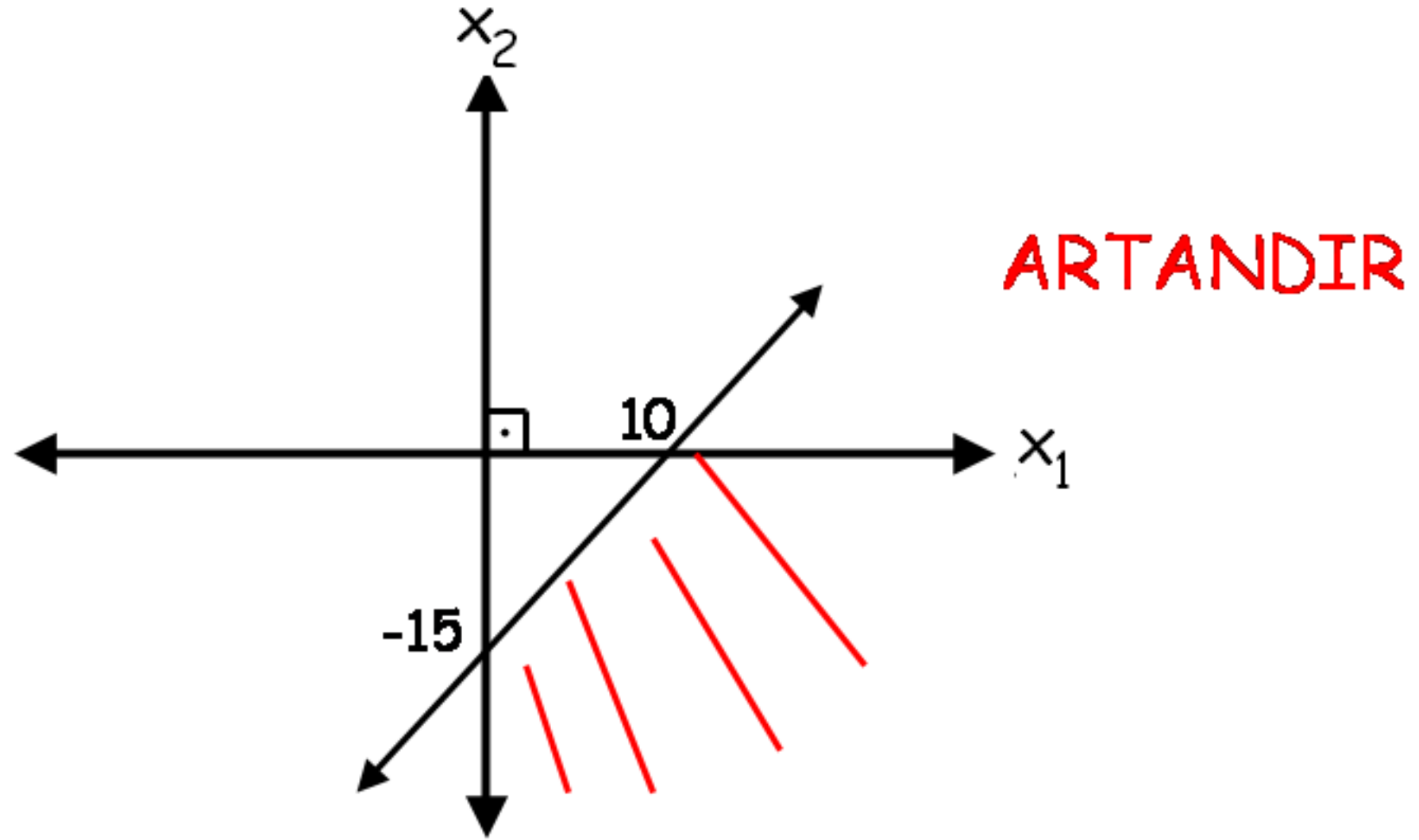
$$2x_1 + 5x_2 \leq 40$$

II.Kısıtlama

$$3x_1 + x_2 \leq 45$$



$3x_1 - 2x_2 \geq 30$ ise eşitsizliğin grafiğini çiziniz.



$$3x_1 + 4x_2 \geq 48$$

Üst Taranır

$$5x_1 + 7x_2 \leq 70$$

Alt Taranır

AZALANDIR

$$x_1 - 6x_2 \geq 12$$

Alt Taranır

$$8x_1 - 3x_2 \leq 24$$

Üst Taranır

ARTANDIR

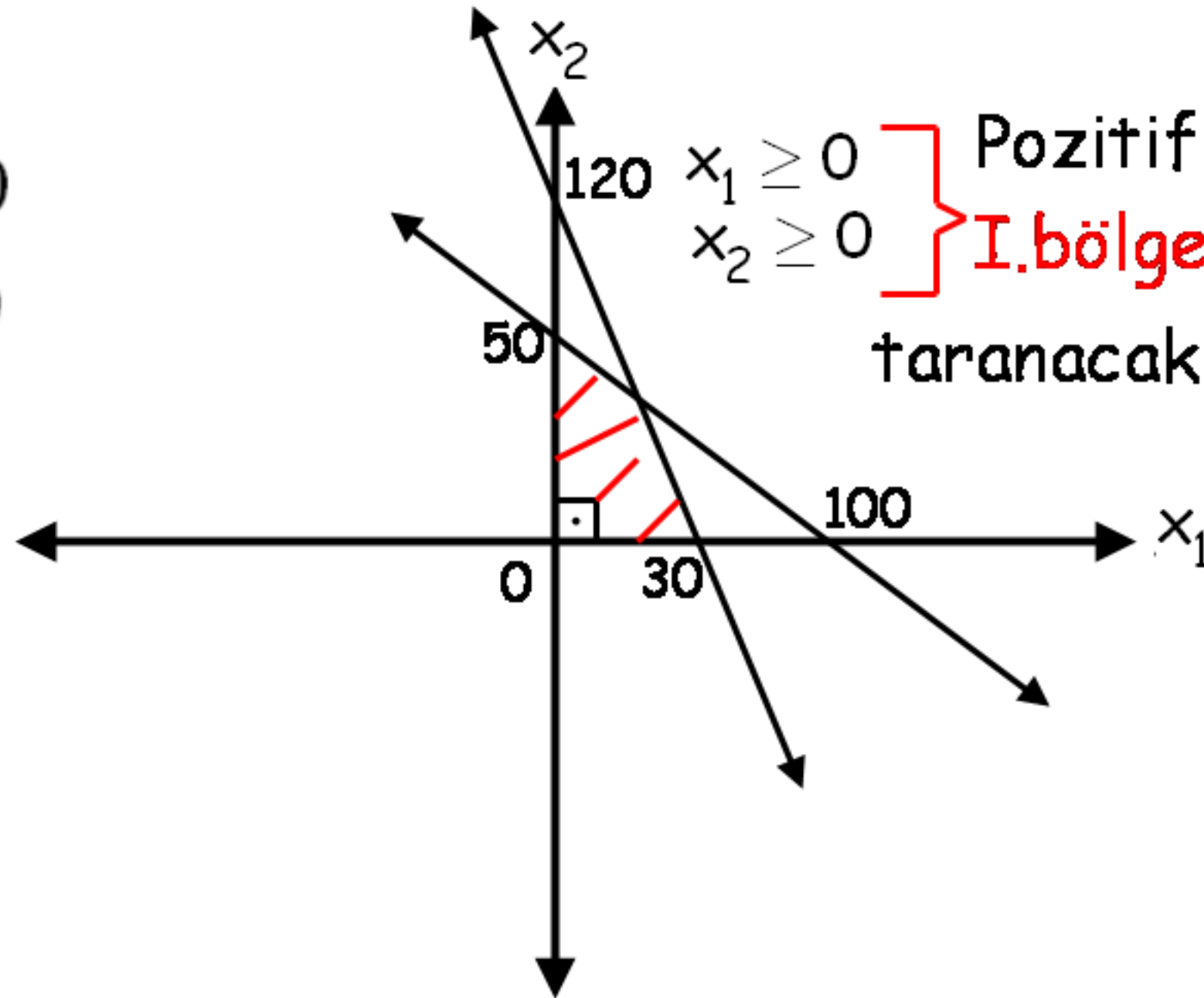
Amaç fonksiyonu $z_{\max} = 10x_1 + 5x_2$

Kısıtlar

$$4x_1 + x_2 \leq 120$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 100$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



$x_1 \geq 0$
 $x_2 \geq 0$ } Pozitif kısıtlama.
I. bölge
taranacak demektir.