0.1 FONKSİYONLAR

Tanım 1 *f, A kümesinden B kümesine bir bağıntı olsun. Eğer f bağıntısı A kümesinin her elemanını B kümesinin yalnız bir elemanına eşliyorsa f bağıntısına A dan B ye bir fonksiyon denir.*

$$f : A \to B \text{ veya } A \xrightarrow{f} B$$

ile gösterilir. A kümesine f fonksiyonunun Tanım Kümesi B kümesine ise Değer Kümesi denir. Bu tanıma göre f bağıntısının A dan B ye bir fonksiyon olması için gerek ve yeter şart

i $\forall x \in A,\ \exists y \in B,\ (x, y) \in f$

ii $\forall x \in A,\ \forall y,\ z \in B,\ [(x, y) \in f \text{ ve } (x, z) \in f] \Rightarrow x = z$

olmasıdır.

Tanım 2 *$f : A \to B$ olsun. $(x, y) \in f$ ise y ye x in f fonksiyonu altındaki görüntüsü veya f nin x deki değeri denir. Bu değer genellikle $f(x)$ ile gösterilir. A kümesinin f fonksiyonu altındaki görüntülerinin kümesine Görüntü kümesi denir ve $f(A)$ ile gösterilir. Yani*

$$f(A) = \{f(x) : x \in A\}$$

dır.

Tanım 3 *$f : A \to B$ ve $g : A \to B$ iki fonksiyon olmak üzere A kümesinin her x elemanı için $f(x) = g(x)$ ise f ve g fonksiyonlarına eşit fonksiyonlar denir ve $f = g$ ile gösterilir.*

Tanım 4 *$f : A \to A$, $f(x) = x$ ile tanımlanan fonksiyona A kümesinin birim fonksiyonu denir. A kümesi üzerinde tanımlanan birim fonksiyon I_A ile gösterilir.*

Tanım 5 *$f : A \to B$ ve $b \in B$ olmak üzere her A kümesinden alınan her x elemanı için $f(x) = b$ oluyorsa f fonksiyonuna A kümesinde sabir bir fonksiyon denir.*

Tanım 6 *$f : A \to B$ bir fonksiyon olmak üzere A kümesinden alınan her farklı iki elemanın B kümesindeki görüntüleri farklı ise f fonksiyonuna bire bir fonksiyon denir. O halde f fonksiyonunun bire bir olması için gerek ve yeter şart*

$$\forall x,\ y \in A \text{ için } x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$$

veya

$$\forall x,\ y \in A \text{ için } f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$$

olmasıdır.

Örnek 7 *$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3$ ile tanımlanan f fonksiyonu birebirdir.*

Tanım 8 *$f:A\to B$ bir fonksiyon olmak üzere B den alınan her eleman için $f(a)=b$ olacak şekilde en az bir $a\in A$ varsa f fonksiyonuna örten fonksiyon denir. O halde*

$$f \text{ örten} \Leftrightarrow f(A)=B$$

dir.

Örnek 9 *$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3$ ile tanımlanan f fonksiyonu örtendir. Fakat $g:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$, $g(x)=2x$ ile tanımlı g fonksiyonu birebir olduğu halde örten değildir. Gerçekten $g(x)=1$ olacak şekilde $x\in\mathbb{Z}$ yoktur. Yine $\mathbb{R}$' den $\mathbb{R}$ ye tanımlanan $h(x)=\mathrm{Si}\,nx$ fonksiyonu birebir ve örten değildir.*

Yukarıda verilen fonksiyonların tanım bölgelerini yada değer bölgelerini değiştirdiğimizde fonksiyonun niteliğinde bir dğişiklik olur. Örneğin $g(x)=2x$ ile tanımlanan g fonksiyonunu $\mathbb{Z}$ den $\mathbb{Z}_ç$ çift tamsayılar kümesine bir fonksiyon alırsak g fonksiyonu örten olur. Benzer olarak

$$h:[-\pi/2,\pi/2]\to[-1,1]$$

$h(x)=\mathrm{Si}\,nx$ şeklinde tanımlarsak h fonksiyonu bire bir ve örten olur.

Tanım 10 *$f:X\to Y$ bir fonksiyon ve $B\subseteq Y$ olmak üzere*

$$f^{-1}(B)=\{x\in X: f(x)\in B\}$$

olarak tanımlanan X'in alt kümesine B kümesinin f altındaki ters görüntüsü adı verilir.

Daha önceden bir bağıntının tersi tanımı vermiştik. Her fonksiyon bir bağıntı olduğuna göre, her fonksiyonun da bir ters bağıntısı vardır. Fakat bu bağıntı her zaman bir fonksiyon olmayabilir. Şimdi bir fonksiyonun hangi durumlarda tersinin olacağına dair iki teorem vereceğiz.

Teorem 11 *$f:A\to B$ bir fonksiyon olmak üzere f fonksiyonunun tersinin bir fonksiyon olması için gerek ve yeter şart f fonksiyonunun birebir ve örten olmasıdır. f birebir ve örten ise f nin tersi olan f^{-1} de birebir ve örtendir.*

Tanım 12 *$f:A\to B$ ve $g:C\to D$ fonkiyonları verilsin. $f(A)\subseteq C$ ve $a\in A$ olmak üzere A dan D ye $h(a)=g(f(a))$ eşitliği ile tanımlanan h fonksiyonuna f ile g fonksiyonlarının birleşimi (ya da bileşke fonksiyon) denir ve $g\circ f$ ile gösterilir.*

Örnek 13 *$f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=1+\cos 2x$ ve $g(x)=\frac{1}{x^2+1}$ olmak üzere*

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=\frac{1}{(1+\cos 2x)^2+1}$$

ve

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=1+\cos\frac{2}{x^2+1}$$

ile tanımlanır.