# ÜNİTE VI-VII

## TÜREV VE UYGULAMALAR

ARA SINAV ÇIKABİLECEK SORU ADEDİ: 6-8 Sorudur

FİNAL/BÜTÜNLEME ÇIKABİLECEK SORU ADEDİ: 2-4 Sorudur

# ÜNİTE İÇERİĞİ

Bu ünitede türev kavramını, türev kurallarını, teğet denklemini, fonksiyonların artanlığını ve azalanlığını, maksimum ve minimum noktalarını, bükeylik ve büküm noktalarını ve grafik çizimlerini öğreneceksiniz.

# TÜREV VE UYGULAMALAR

## TANIM

$f: [a,b] \longrightarrow R$ bir fonksiyon ve $k \in (a, b)$ olmak üzere;

$\lim\limits_{x \to k} \dfrac{f(x) - f(k)}{x - k}$ limiti varsa limite f fonksiyonunun k noktasındaki türevi denir.

$y'$, $f'(x)$, $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{d\,f(x)}{dx}$ şeklinde gösterilir.

f fonksiyonun $x = k$ da türevinin olabilmesi için ilk koşul, bu noktada f fonksiyonun sürekli olmasıdır.

UYARI

$h \in R - \{0\}$ için $x = k + h$ alınırsa $h = x - k$ ve $x \to k$ iken $h \to 0$ olur.

Buna göre, f fonksiyonunun k noktasındaki türevi;

$$\boxed{y' = f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(k+h) - f(k)}{h}}$$

# TÜREV ALMA KURALLARI

1) $c \in R$ ve $f(x) = C$ ise $f'(x) = y' = 0$

ÖRNEK
Görsel Eğitim

$f(x) = 2008$ ise $f'(x) = 0$

2) $c, n \in R$ olmak üzere;

I $f(x) = c.x^n$ ise $f'(x) = c.n.x^{n-1}$

ÖRNEK
Görsel Eğitim

$f(x) = x$ ise $f'(x) = 1.x^{1-1} = 1.x^0 = 1$

ÖRNEK
Görsel Eğitim

$f(x) = 3x$ ise $f'(x) = 3.x^{1-1} = 3.x^0 = 3$

ÖRNEK
Görsel Eğitim

$f(x) = 5x^3$ ise $f'(x) = 5.3.x^{3-1} = 15.x^2$

II $y = f(x)^n$ ise $y' = n.\ f(x)^{n-1}.\ f'(x)$

ÖRNEK

Görsel Eğitim

$y = (2x+5)^5$ ise $y' = 5.2.\ (2x+5)^{5-1} = 10.\ (2x+5)^4$

3) $y = f(x) \mp g(x)$ ise $y' = f'(x) \mp g'(x)$

4) $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ ise $y' = \dfrac{f'(x).g(x) - g'(x).f(x)}{g^2(x)}$

5) $y = f(x).g(x)$ ise $y' = f'(x).g(x) + g'(x).f(x)$

6) $y = \sqrt[n]{f(x)}$ ise $y' = \dfrac{f'(x)}{n.\sqrt[n]{f(x)^{n-1}}}$

7) $y = \sqrt{f(x)}$ ise $y' = \dfrac{f'(x)}{2.\sqrt{f(x)}}$

8) $c \in R,\ f(x) \neq 0$ $\quad y = \dfrac{c}{f(x)}$ ise $y' = -\dfrac{c}{f'(x)}$

UYARI $y = \dfrac{c}{a.x^n}$ ise $y' = -\dfrac{c.n}{a.x^{n+1}}$

# LOGORİTMİK FONKSİYONLARIN TÜREVİ

1) $y = \ln f(x)$ ise $y' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$

2) $y = \ln x$ ise $y' = \dfrac{1}{x}$

3) $y = \log_a f(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)} \log_a e$

# ÜSTEL(ÜSLÜ) FONKSİYONLARIN TÜREVİ

1) $y = a^{f(x)}$ ise $y' = f'(x).\,a^{f(x)}.\ln a$

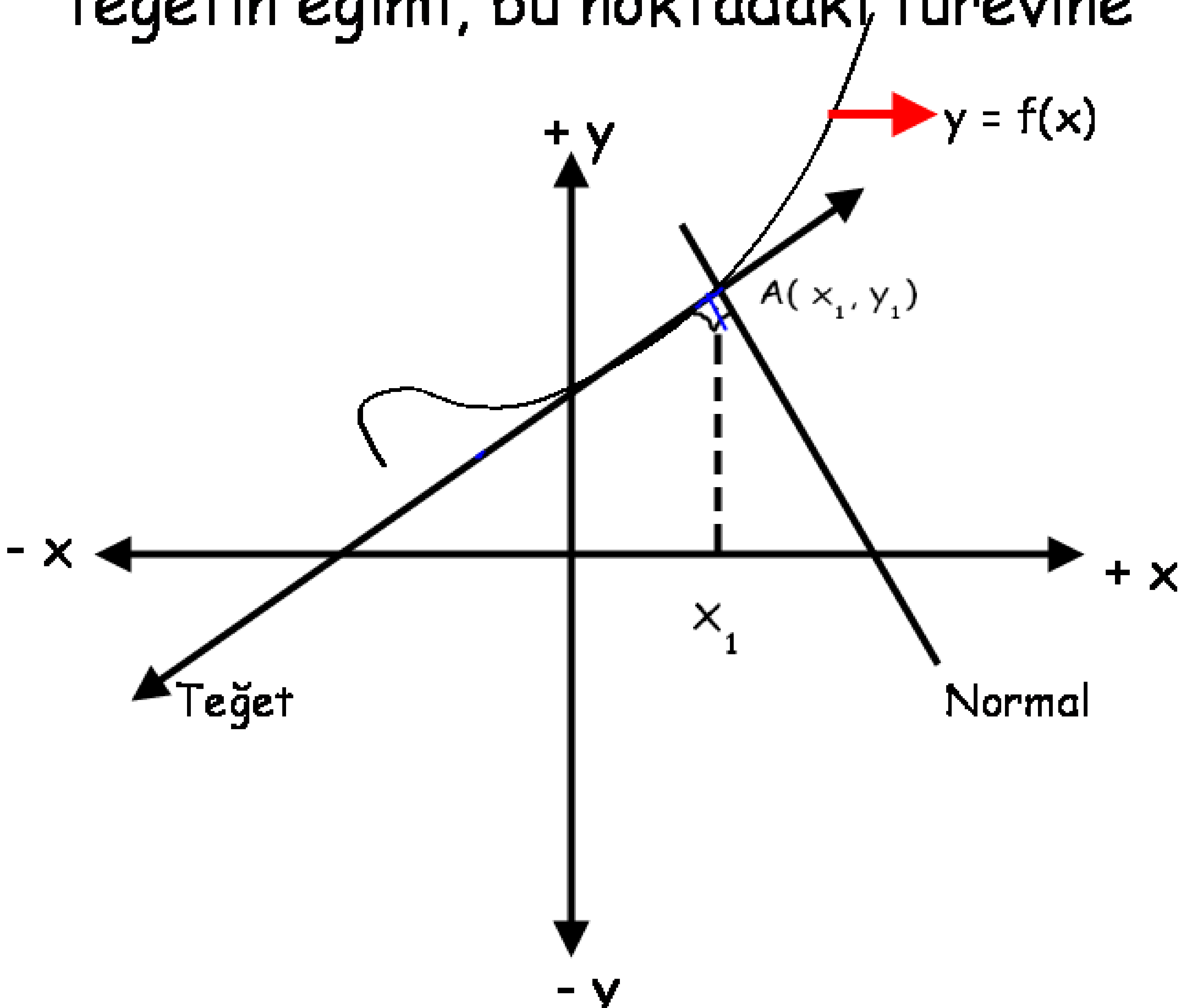
2) $y = e^{f(x)}$ ise $y' = f'(x).\,e^{f(x)}$

3) $y = e^{x}$ ise $y' = e^{x}$

# TÜREVİN GEOMETRİK ANLAMI

## TEĞET EĞİMİ

$y = f(x)$ eğrisine üzerindeki bir $x = x_1$ noktasından çizilen teğetin eğimi, bu noktadaki türevine eşittir.




$$f'(x) = m = \tan \alpha$$

**TEĞETİN DENKLEMİ**

$$y - y_1 = m\,(x - x_1)$$

**NORMALİN DENKLEMİ**

$$y - y_1 = \frac{-1}{m}.(x - x_1)$$

# ARTAN VE AZALAN FONKSİYONLAR

1) $\forall x \in (a, b)$ için $f'(x) > 0$ ise f fonksiyonu (a, b) aralığında artandır.

2) $\forall x \in (a, b)$ için $f'(x) < 0$ ise f fonksiyonu (a, b) aralığında azalandır.

ÖRNEK

Görsel Eğitim

$f(x) = x^2 - 2x + 5$ fonksiyonun artan ve azalan olduğu aralıkları bulunuz.

$f'(x) = 2x - 2 = 0$ ise $x = 1$

| $x$ | $-\infty$ | $\infty$ |
| --- | --- | --- |
| $f'(x)$ | $-$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↘ Azalan | ↗ Artan |

$(-\infty, 1)$ azalandır.

$(1, \infty)$ artandır.

ÖRNEK

Görsel Eğitim

$f(x) = -3x^2 + 5x + 1$ fonksiyonun artan ve azalan olduğu aralıkları bulunuz.

# ORTALAMA DEĞER TEOREMİ

Bir f fonksiyonu [m, n] aralığında $R^-$ 'ye tanımlansın.

$$\boxed{\frac{f(n) - f(m)}{n - m}}$$ bu aralıkta ortalama hızdır.

$$\boxed{a \in [m, n] \text{ için } \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}$$ bu fonksiyonun a noktasındaki türevidir.

ÖRNEK

Görsel Eğitim

$f(x) = x^2 + 2x - 3$ fonksiyonunun $[3, 7]$ aralığındaki ortalama hızı nedir ?

UYARI

**MARJİNAL MALİYET, TOPLAM MALİYET FONKSİYONUNUN TÜREVİDİR.**

$T(x)$ toplam maliyet fonksiyon ise $T'(x)$ marjinal maliyet fonksiyonudur.

# YÜKSEK MERTEBEDEN TÜREVLER

$$f'' \,,\; \frac{dy^2}{dx^2} \,,\; \frac{d^2 f(x)}{dx^2}$$

$$f''' \,,\; \frac{dy^3}{dx^3} \,,\; \frac{d^3 f(x)}{dx^3}$$

$$f^n \,,\; \frac{dy^n}{dx^n} \,,\; \frac{d^n f(x)}{dx^n}$$

şeklinde gösterilir.

ÖRNEK

Görsel Eğitim

$f(x) = 5x^6 + 4x^4 + 7$ ise $f'''(x) = ?$

# TÜREV UYGULAMALARI

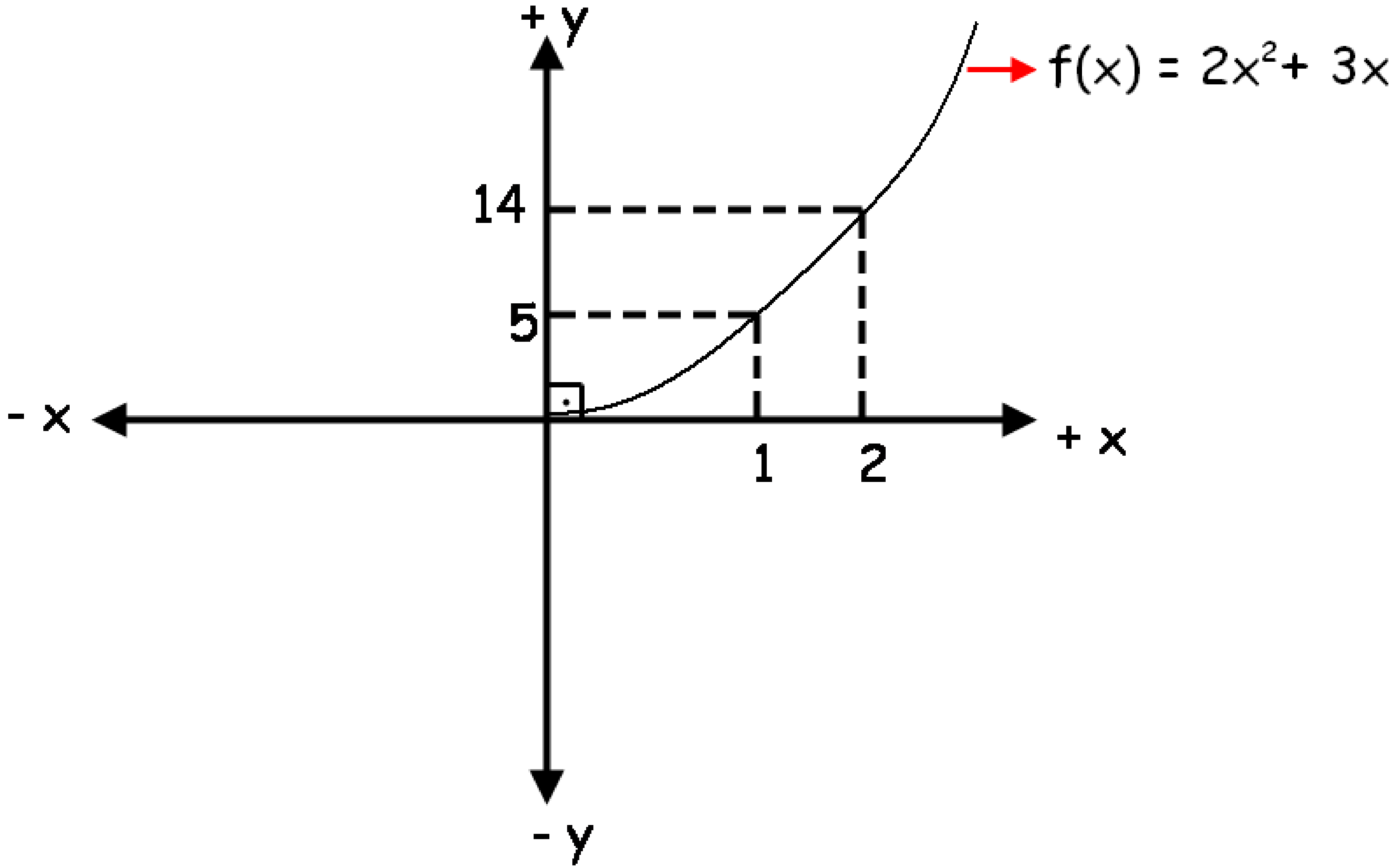
ÖRNEK

Görsel Eğitim

$f(x) = 2x^2 + 3x$ Fonksiyonu için;

$f(1) = 5$

$f(2) = 14$



UYARI

Bir f fonksiyonunda x değeri artarken y değeride artıyorsa f fonksiyonu artan fonksiyondur.

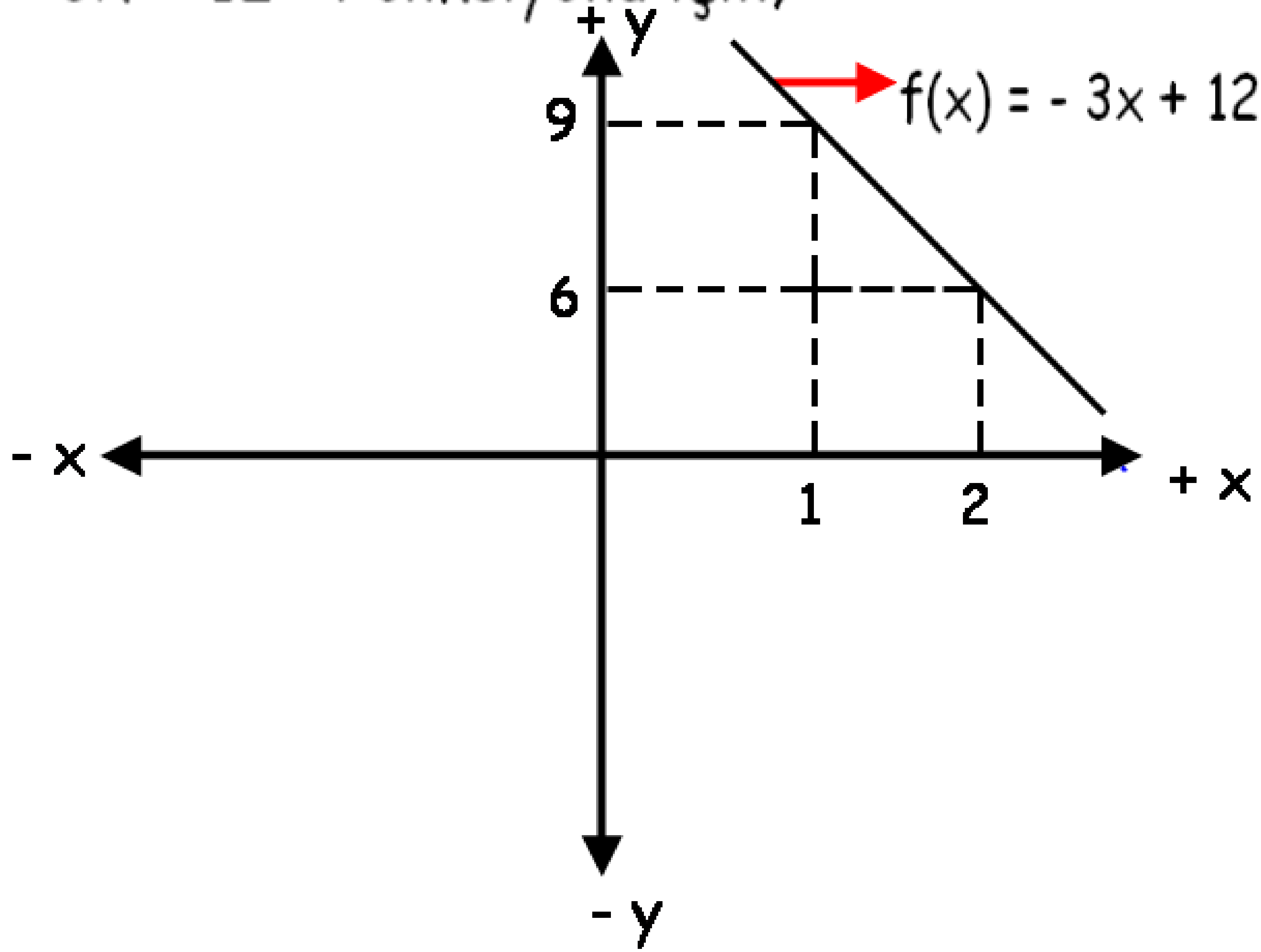
ÖRNEK

Görsel Eğitim

$f(x) = -3x + 12$ Fonksiyonu için;

$f(1) = -3 + 12 = 9$

$f(2) = -6 + 12 = 6$



## UYARI

Bir f fonksiyonunda x değeri artarken y değeri azalıyorsa f fonksiyonu azalan fonksiyondur.

# FONKSİYONLARIN YEREL MAKSİMUM VE YEREL MİNİMUM NOKTALARI

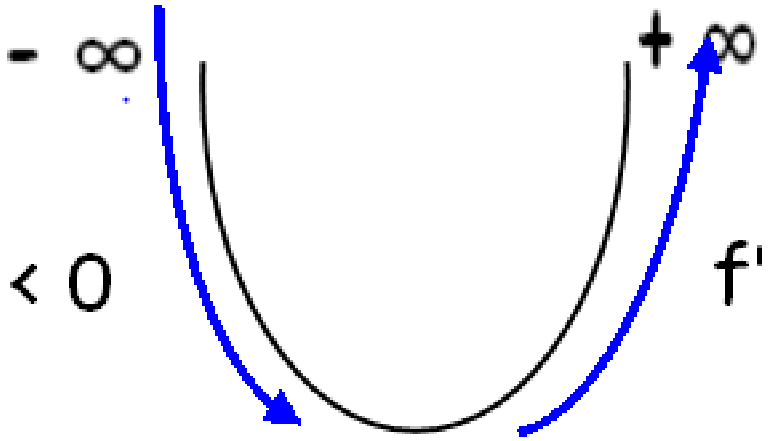
$f:[a,b]\longrightarrow R$ tanımlanmış f fonksiyonun $x_0 \in (a,b)$ noktasındaki bir yerel minimumu veya yerel maximumu varsa f bu aralıkta türevli ise $f'(x_0)=0$ 'dır.

## UYARI

I $f'(x_0)=0$ olduğunda f fonksiyonun $x_0$ noktasında yerel ekstremumu olmayabilir.

II $f'(x_0)=0$ olduğunda $f'(x)$ fonksiyonu $x_0$ noktasının sağında ve solunda değiştirmiş ise bu noktada ekstremumu vardır.

1) $f(x) = ax^2 + bx + c \quad a > 0$




$f'(x) < 0$ $\qquad$ $f'(x) > 0$

min $(r, k)$ → Tepe Noktasıdır. $\boxed{f'(x) = 0}$

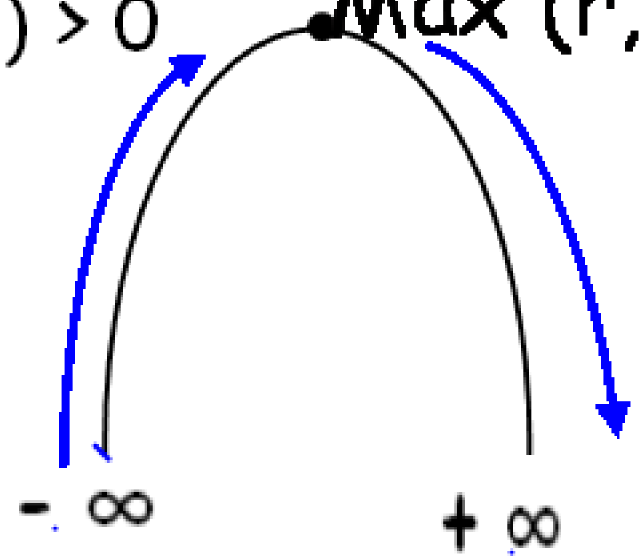
| |
|---|
| $f'(x) < 0$ ise $(-\infty, r)$ azalandır. |

| |
|---|
| $f'(x) > 0$ ise $(r, \infty)$ artandır. |

| |
|---|
| Artan parabolün tepe noktası minumum noktasıdır. |

**2)** $f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a < 0$

$f'(x) > 0$ Max $(r, k)$ tepe noktasıdır. $\boxed{f'(x) = 0}$



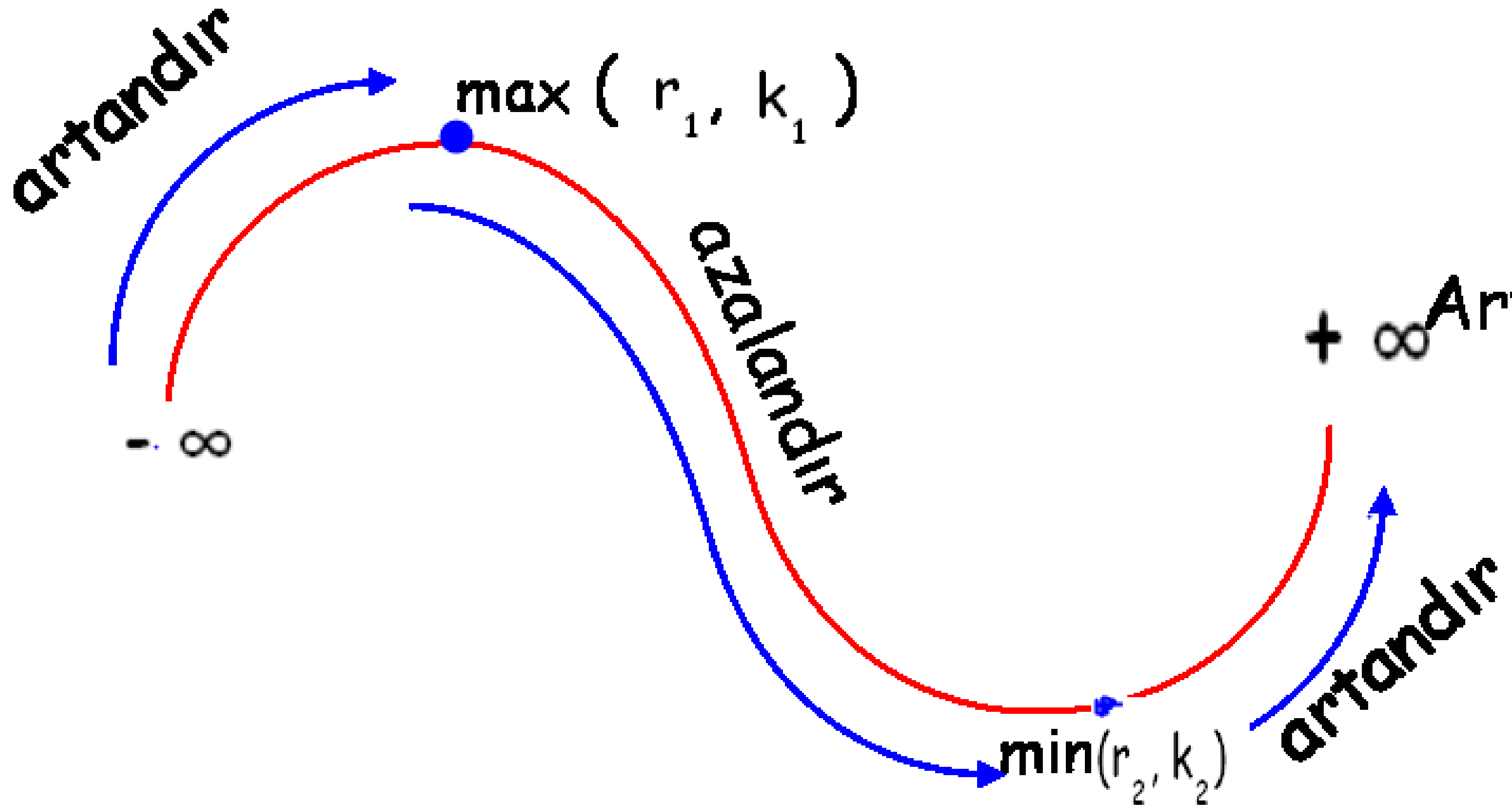

$f'(x) < 0$

| |
|---|
| $f'(x) < 0$ ise $(\infty, r)$ azalandır. |

| |
|---|
| $f'(x) > 0$ ise $(-\infty, r)$ artandır. |

| |
|---|
| Azalan parabolün tepe noktası maximum noktasıdır. |

3) $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad a > 0$




$\boxed{f'(x) = 0}$

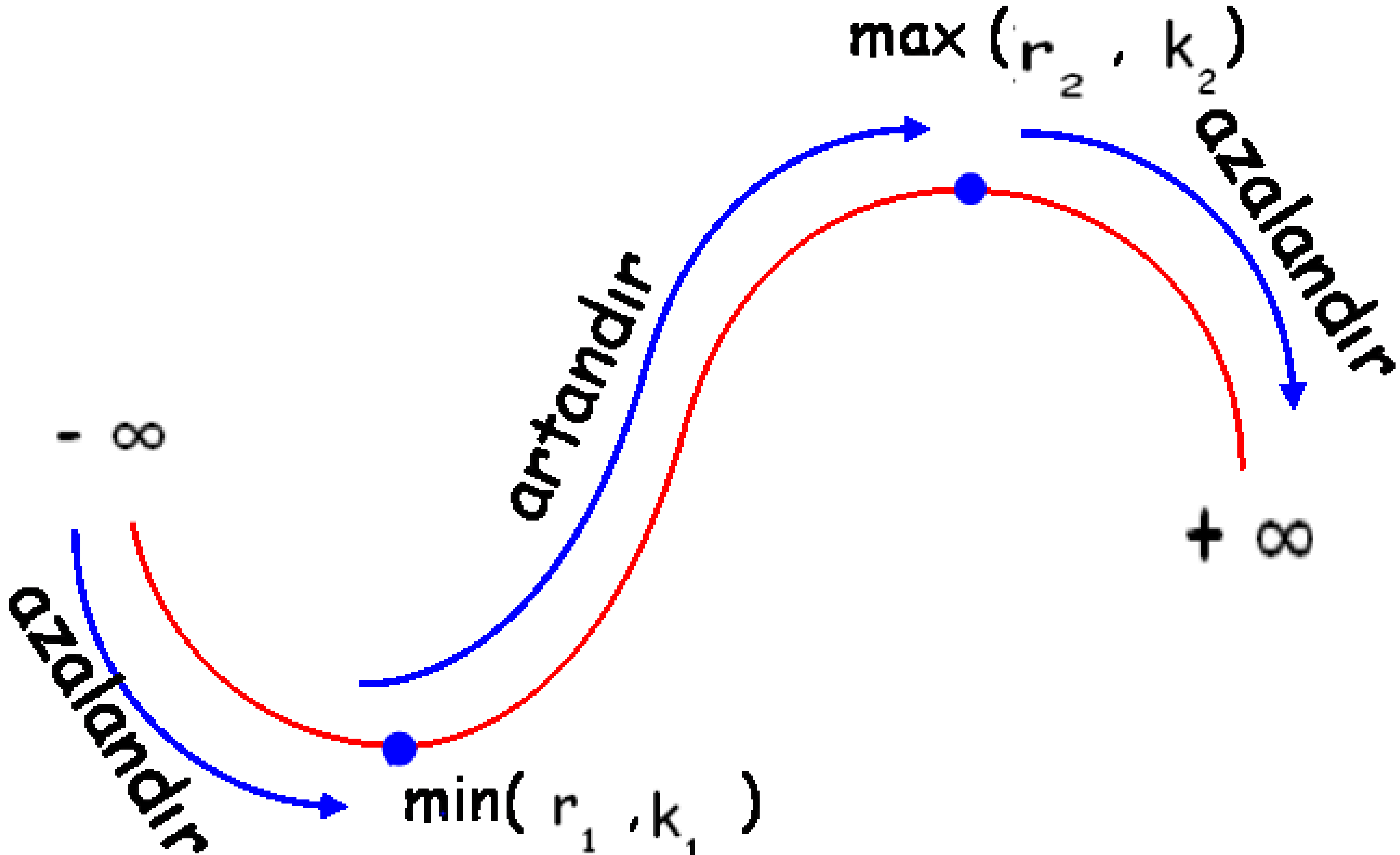
ise $(-\infty, r_1)$ ve $(r_2, \infty)$ aralarında artandır.

$\boxed{(r_1, r_2) \text{ aralığında azalandır.}}$

Artan eğrinin hem maximum hemde minimum noktası vardır.

Max < Min

4) $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad a < 0$




$\boxed{f'(x) = 0}$

ise $(-\infty, r_1)$ ve $(\infty, r_2)$ aralarında azalandır.

$(r_1, r_2)$ aralığında artandır.

Azalan eğrinin hem minimum hemde maximum noktası vardır.

Min < Max

UYARI

Bir f fonksiyonunun türevinin işaret değiştirdiği noktalar (ekstremum noktalar) yerel maximum ve yerel minimum noktalarıdır.

Ekstremum nokta olmaya aday noktalara Kritik Nokta denir.

## UYARI

Bir f fonksiyonunun max veya min noktalarının koordinatlarını bulmak için f fonksiyonunun türevi alınıp sıfıra eşitlenir. X koordinatı bulunur. Bulunan x değeri fonksiyonda yerine yazılarak y koordinatının değeri bulunur.

x $\longrightarrow$ Apsis koordinatı ve y $\longrightarrow$ ordinat koordinatıdır.

(x, y) noktanın koordinatlarıdır.

UYARI

$x$ mal miktarı olmak üzere bir malın kar fonksiyonu $k(x)$ ise maksimum kar elde etmek için satılması gereken mal miktarını bulmak için $\boxed{k'(x)}$ sıfıra eşitlenerek x mal miktarı bulunur. Maksimum karı istendiğinde $k(x)$ fonksiyonunda $x$ değeri yerine yazılarak maksimum kar değeri bulunur.

ÖRNEK

Görsel Eğitim

x mal miktarı olmak üzere, $k(x) = \frac{-x^2}{500} + 40x - 4000$ kar fonksiyon ise, satılması gereken mal miktarı nedir?

ÖRNEK

Görsel Eğitim

$f(x)= \frac{-x^2}{250} + 20x + 150$ kar fonksiyonu ise maximum kar ne kadardır?

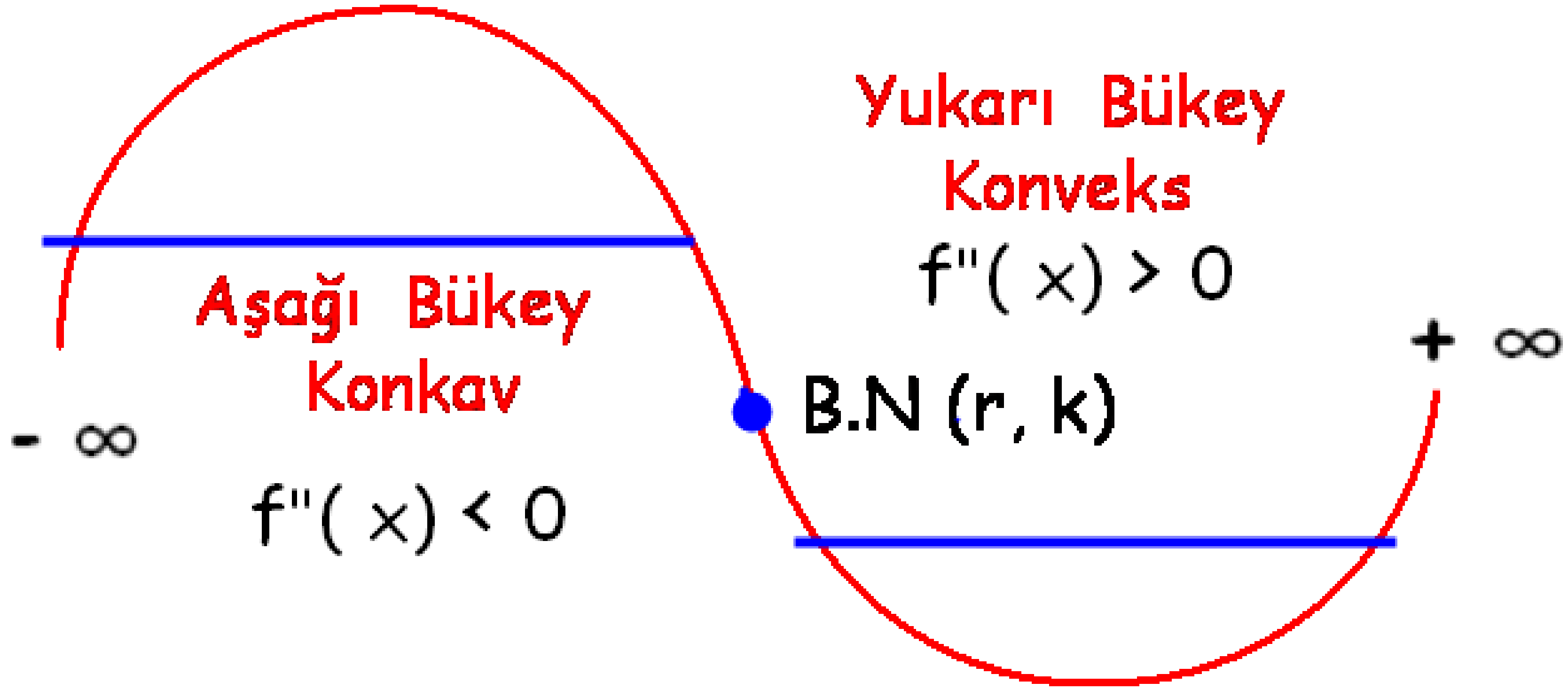
# BİR EĞRİNİN BÜKEY (DÖNÜM) NOKTASI

Bir fonksiyonun dönüm (büküm) noktasının olduğu yerde ikinci türevi sıfırdır ve işaret değiştirir. Büküm noktasında eğri konkavlığını değiştir. Eğrilik $f''(x) > 0$ olduğu noktalarda yukarı bükey $f''(x) < 0$ olduğu noktalarda aşağı bükeydir.

İkinci türevin kökleri eğrinin dönüm noktalarının apsisleridir. Fonksiyon 3. derecedense dönüm noktası aynı zamanda simetri eksenidir. İkinci türevinin (+) olduğu bölgede eğri konvekstir. (-) olduğu bölgede eğri konkavdır.

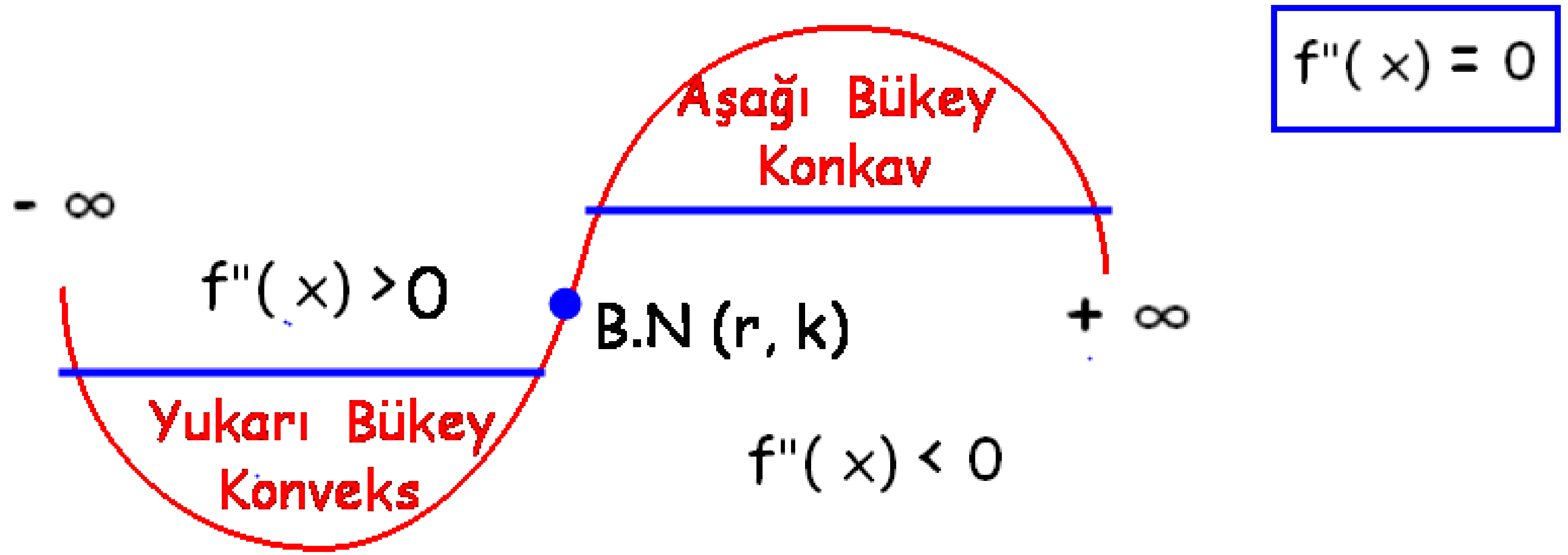
$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \quad a > 0$

$\boxed{f''(x) = 0}$




| | |
|---|---|
| $f''(x) > 0$ Yukarı bükeydir. $(r, \infty)$ aralığıdır. | $f''(x) < 0$ Aşağı bükeydir. $(-\infty, r)$ aralığıdır. |

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \quad a < 0$




$f''(x) > 0$ Yukarı bükeydir.

$(-\infty, r)$ aralığıdır.

$f''(x) < 0$ Aşağı bükeydir.

$(r, \infty)$ aralığıdır.

ÖRNEK

Görsel Eğitim

$f(x) = x^3 - 8$ fonksiyonunun dönüm noktası nedir ?

# GRAFİK ÇİZİMİ

## 1) DÜŞEY ASİMPTOT

$\lim_{x \to c} f(x) = \infty$ ise $x - c = 0$ ise $x = c$ düşey asimptot denir

UYARI

f fonksiyonun tanımsız olduğu noktadır. Düşey asimptotu bulmak için kesirli f fonksiyonun paydası sıfıra eşitlenerek bulunur.

ÖRNEK

Görsel Eğitim

$$f(x) = \frac{4x-3}{x-3}$$ fonksiyonun düşey asimptotu nedir ?

ÖRNEK

Görsel Eğitim

$$f(x) = \frac{6x^2 + 4x + 5}{2x - 12}$$ fonksiyonun düşey asimptotu nedir ?

## 2) YATAY ASİMPTOT

$\lim_{x \to \infty} f(x) = k$ ise $y = f(x) = k$'ya yatay asimptot denir.

## UYARI

$\lim_{x \to \infty} f(x)$ için f fonksiyonun yatay asimptotu bulmak için pay ve paydanın derecelerine bakılarak bulunur.

1) Payın derecesi, paydanın derecesinden büyük ise yatay asimptot $+\infty$ veya $-\infty$ 'a eşittir.

2) Payın derecesi, paydanın derecesinden küçük ise yatay asimptot sıfıra eşittir.

3) Pay ve paydanın dereceleri eşit ise yatay asimptot baş katsayıları oranına eşittir.

ÖRNEK

Görsel Eğitim

$$f(x) = \frac{3x}{4x+1}$$

ÖRNEK

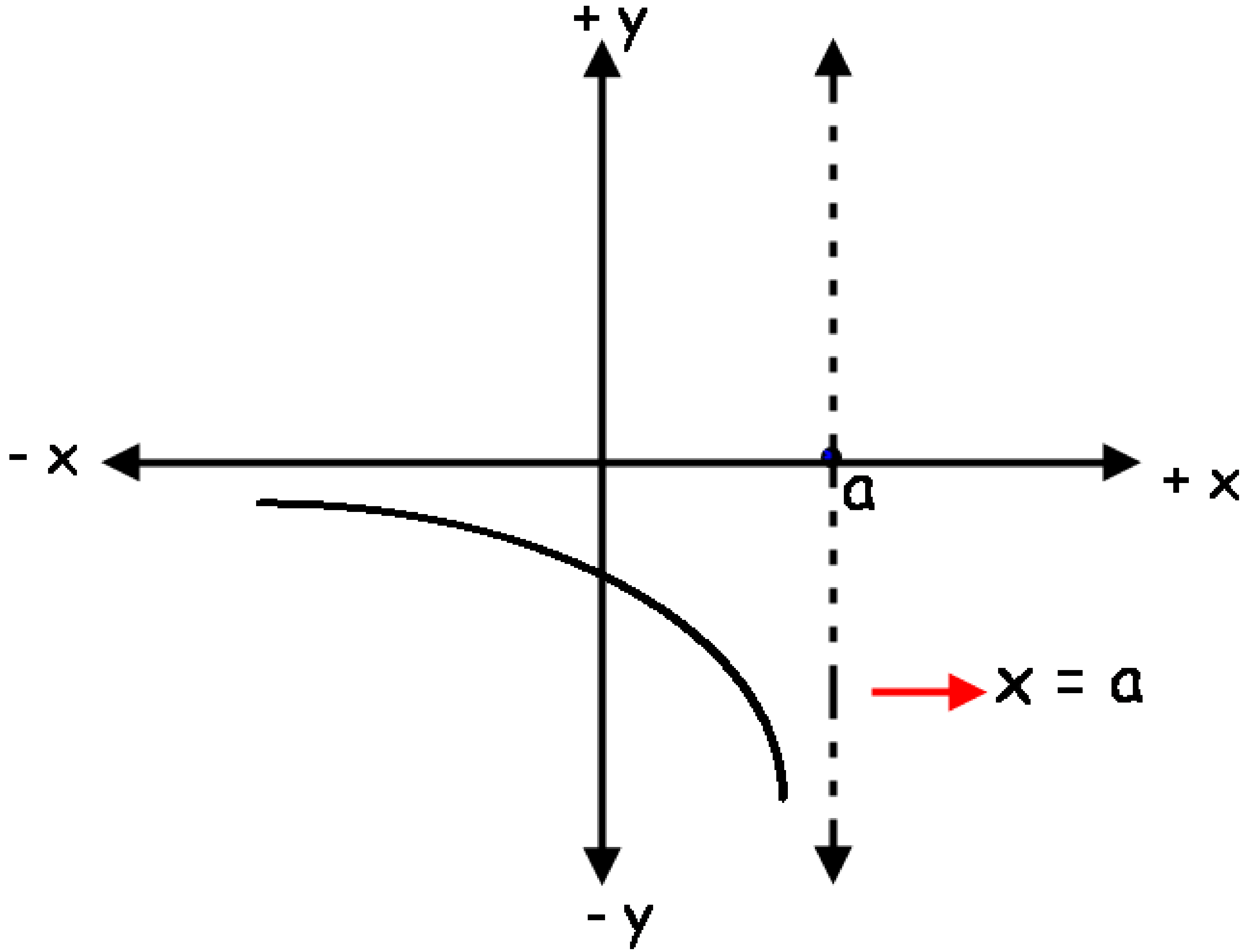
Görsel Eğitim

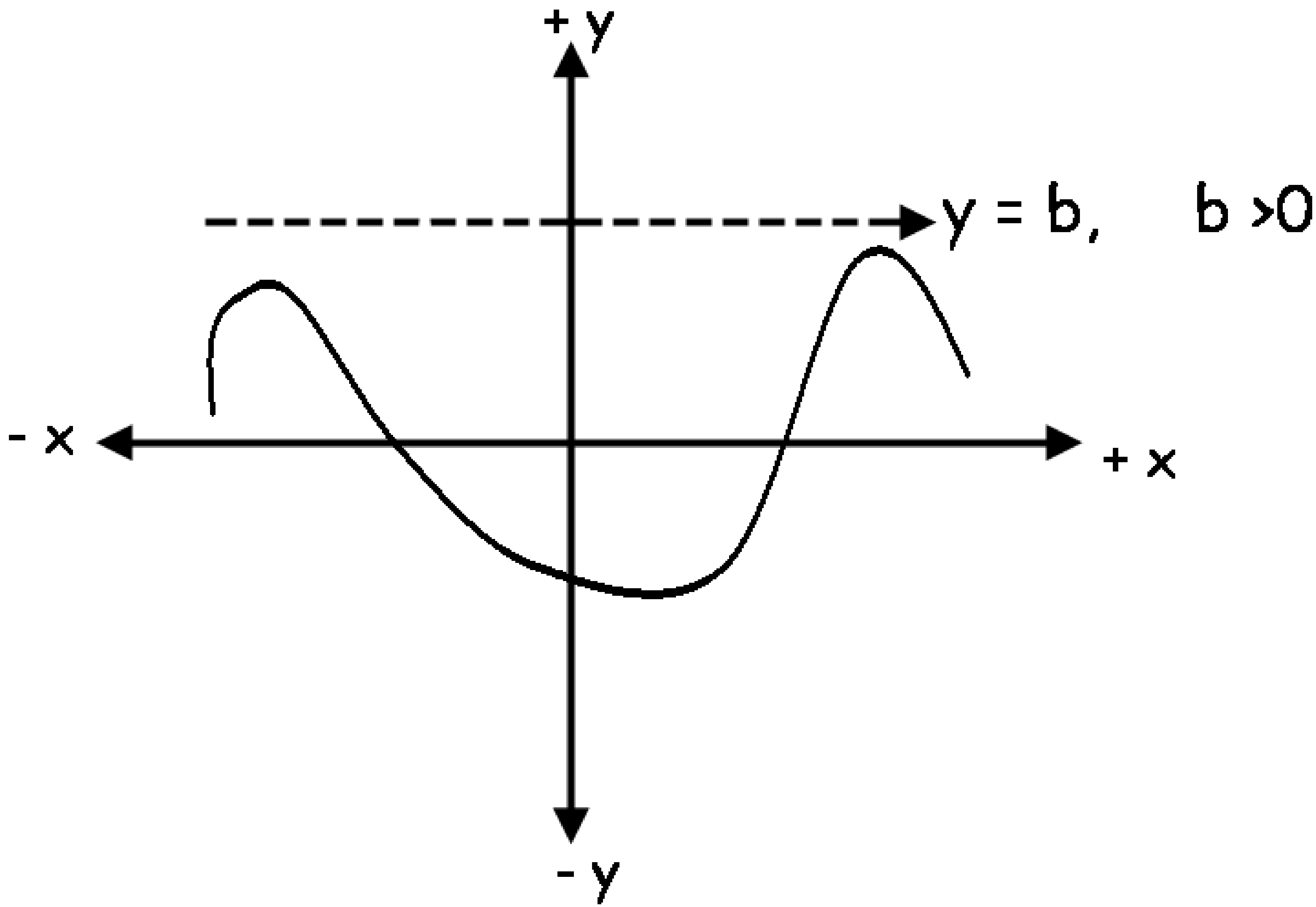
$$f(x) = \frac{4x-3}{x^3+5x}$$

ÖRNEK

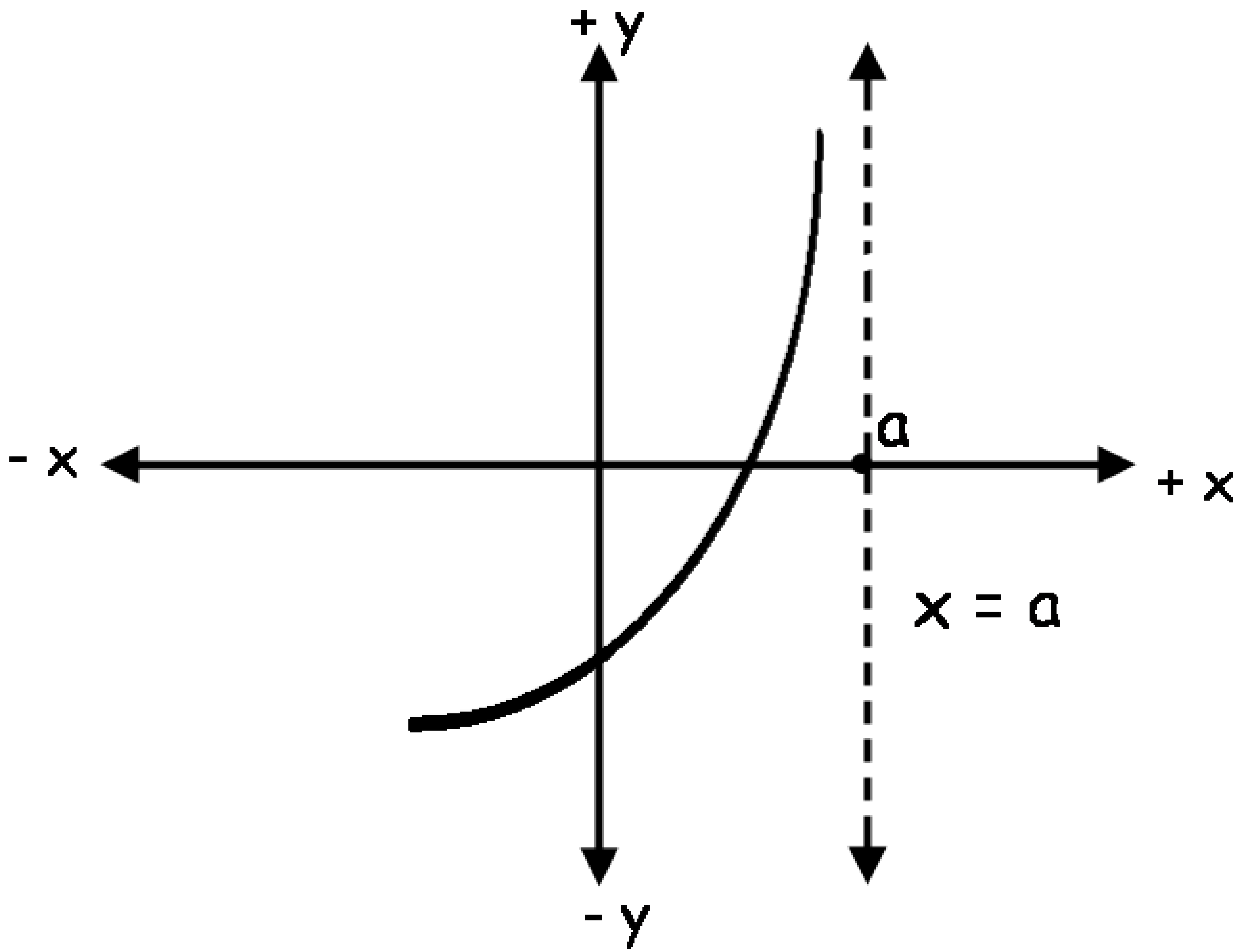
Görsel Eğitim

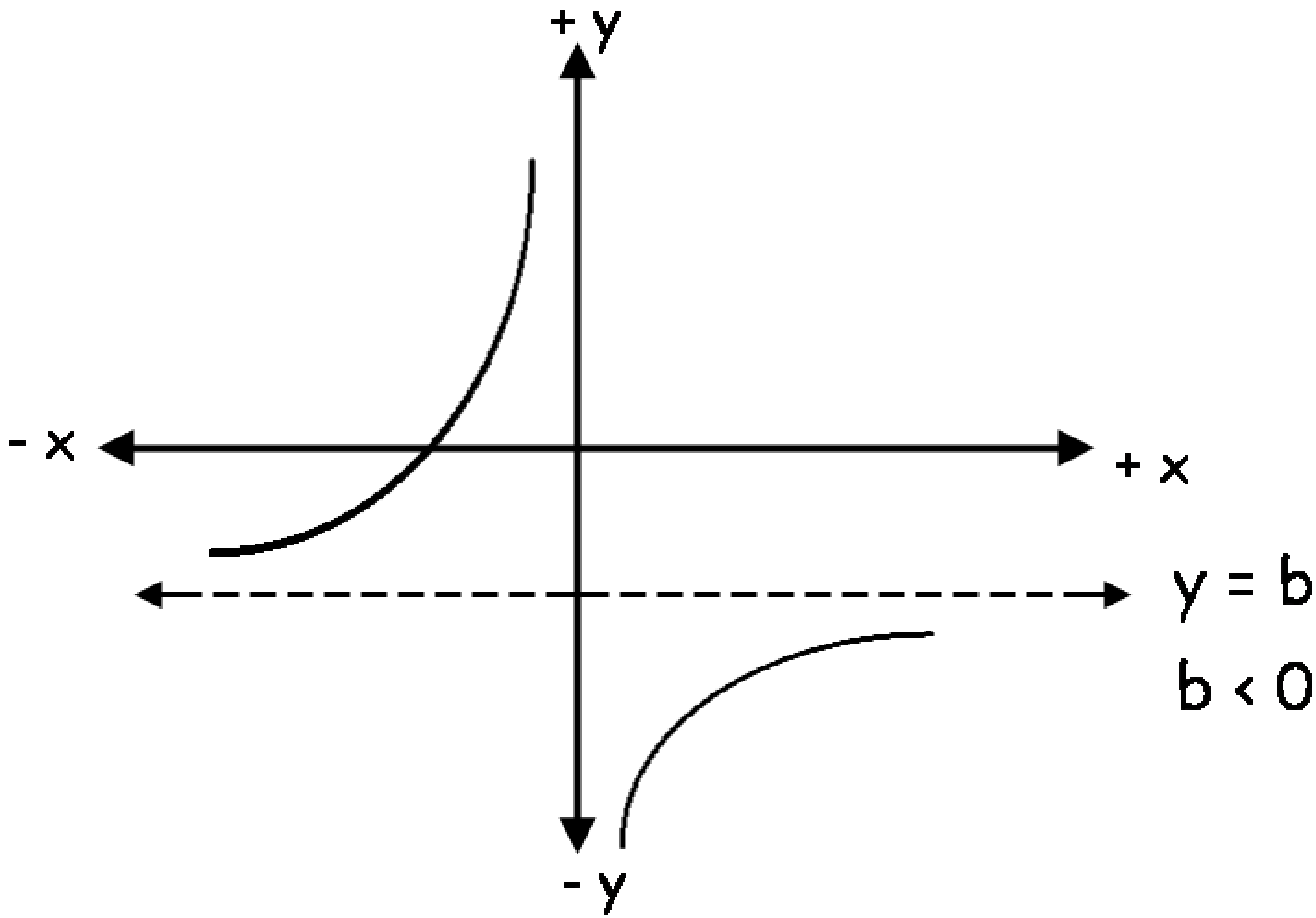
$$f(x) = \frac{5x^2+4x+5}{6x+20}$$


+ y
- x
+ x
a
x = a
- y

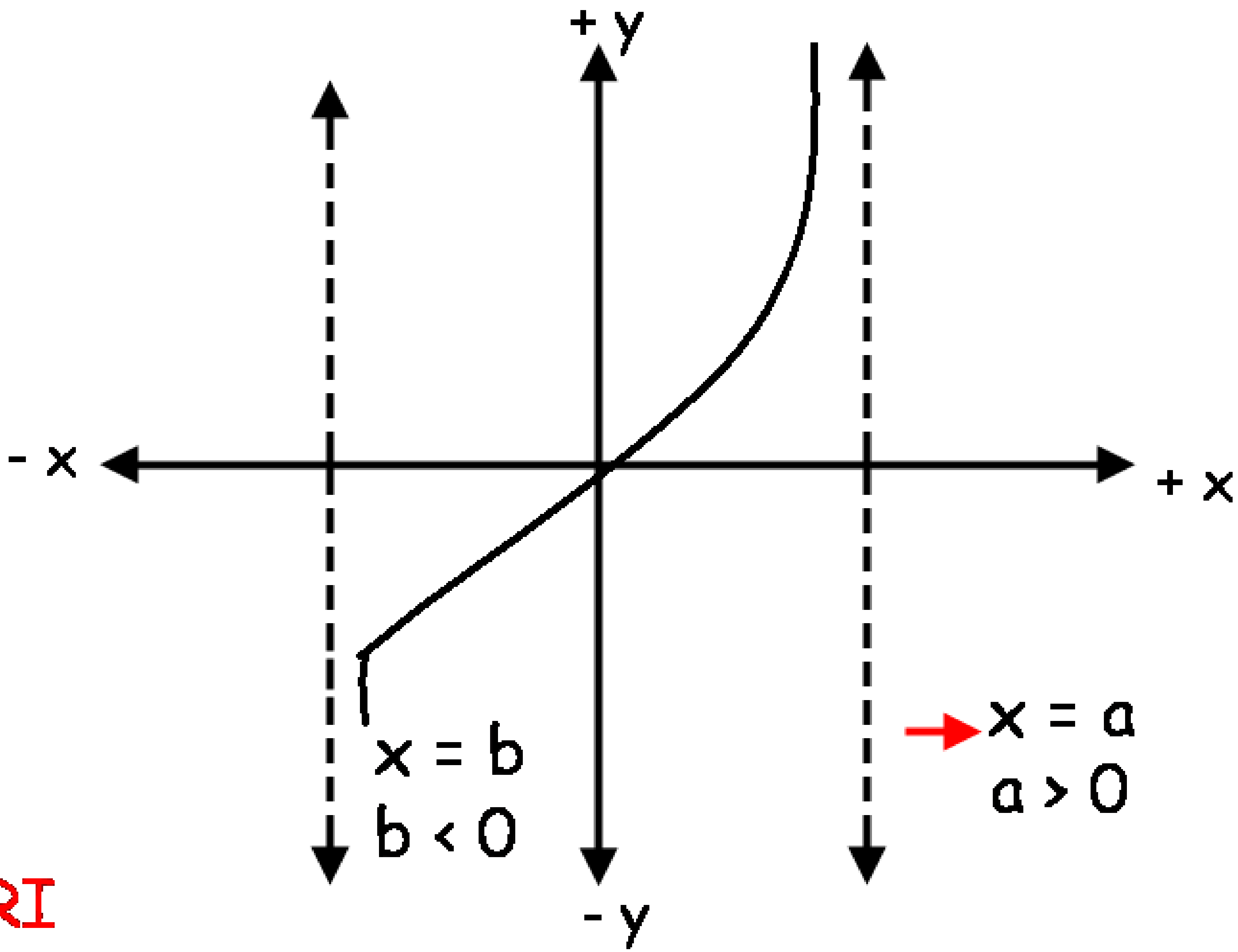


+ y
y = b,
b >0
- x
+ x
- y


+ y
- x
a
+ x
x = a
- y



+ y
- x
+ x
y = b
b < 0
- y




UYARI

Bir f fonksiyonun grafiğini çizmek için asimptotlar dışında fonksiyonun x eksenini ve y eksenini kestiği noktalar bulunur. Gerekirse x ve y noktalarının birkaç değeri bulunur.

ÖRNEK

Görsel Eğitim

$y = f(x) = \dfrac{x-2}{3-x}$ fonksiyonun grafiğini çiziniz.