ÜNİTE - V

LİMİT FONKSİYONU

ARA SINAV ÇIKABİLECEK SORU ADEDİ: 3-4 Sorudur

FİNAL/BÜTÜNLEME ÇIKABİLECEK SORU ADEDİ: 1-2 Sorudur

UNİTE İÇERİĞİ

Bu ünite limit kavramını, limitin özelliklerini, tek yönlü limitlerini ve limitin sürekliliğini öğreneceksiniz.

TANIM

$A \subseteq R$ olmak üzere $f(x)$ A' dan R' ye veya $A \longrightarrow \{ a \}'$ dan R' ye tanımlanmış olan fonksiyon olsun.

Reel x değişkeni bir a sayısına yaklaşırken f(x) fonksiyonu k reel sayısına yaklaşıyorsa, k reel sayısına x değişkeni a sayısına yaklaşırken f(x) fonksiyonun limiti denir.

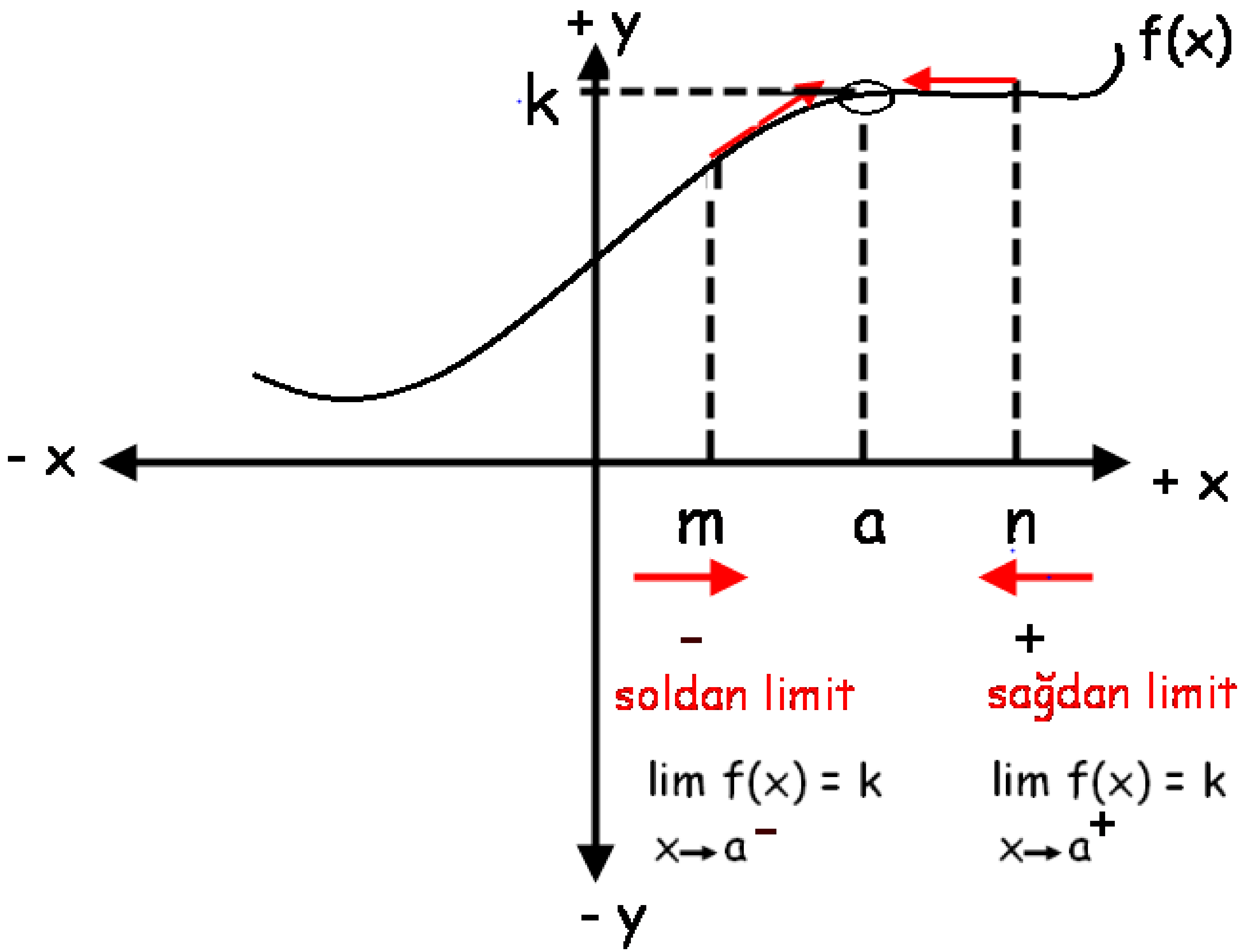
$f : A - \{a\} \longrightarrow R$ ve $\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = k}$ ile gösterilir.

SAĞDAN VE SOLDAN LİMİT

$A = (m, n)$

$a \in (m, n)$

$$\lim_{x \to a} f(x) = k$$



SAĞDAN LİMİT

Reel x değişkeni bir a noktasına sağdan yaklaşırken f(x) fonksiyonu k_1 reel sayısına yakınlaşıyorsa, k_1 reel sayısına f(x)' in reel x değişkeni a sayısına yaklaşırken sağdan limiti denir.

$$\boxed{f : (a, n) \longrightarrow R \qquad \text{ve} \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = k_1}$$

SOLDAN LİMİT

Reel x değişkeni bir a noktasına soldan yaklaşırken f(x) fonksiyonu k_2 reel sayısına yakınlaşıyorsa, k_2 reel sayısına f(x)' in reel x değişkeni a sayısına yaklaşırken soldan limiti denir.

$$f: (m, a) \longrightarrow R \qquad \text{ve} \qquad \lim_{x \to a^-} f(x) = k_2$$

NOT

1) f(x) fonksiyonunun x = a noktasında limitinin var olması için gerek ve yeter koşul bu noktadaki sağdan ve soldan limitlerin var ve birbirine eşit olmasıdır.

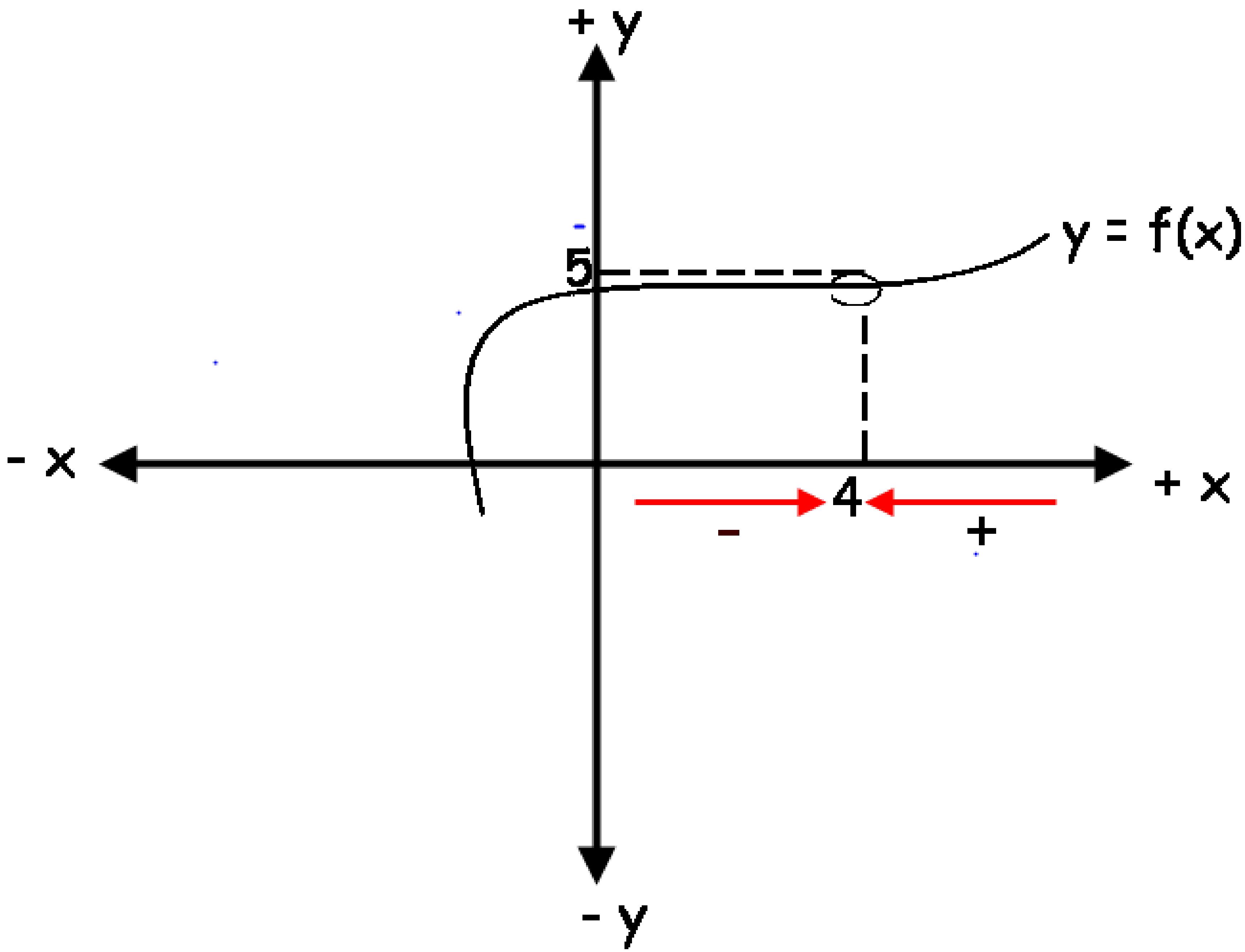
2) f(x) fonksiyonun x = a noktasındaki sağdan ve soldan limitleri eşit değil ise f(x)' in a noktasında limiti yoktur.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = k_1 \\[2em] \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = k_2 \end{array}\right\} \begin{array}{ll} k_1 = k_2 & \text{ise limit var.} \\[2em] k_1 \neq k_2 & \text{ise limit yoktur.} \end{array}$$

3) Bir f(x) fonksiyonun x = a noktasında limitin olması için bu noktada tanımlı olması gerekmez. Bu noktanın civarında tanımlı olması gerekir.

4) $\lim_{x \to a} f(x) = k$ ise x reel değişkeni a sayısına yaklaşırken f(x) fonksiyonu k reel sayısına YAKINSAR denir.

5) $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ veya $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ ise x reel değişkeni a sayısına yaklaşırken f(x) fonksiyonu $\pm\infty$'a IRAKSAR denir.



$$\lim_{x \to 4^+} f(x) = 5$$

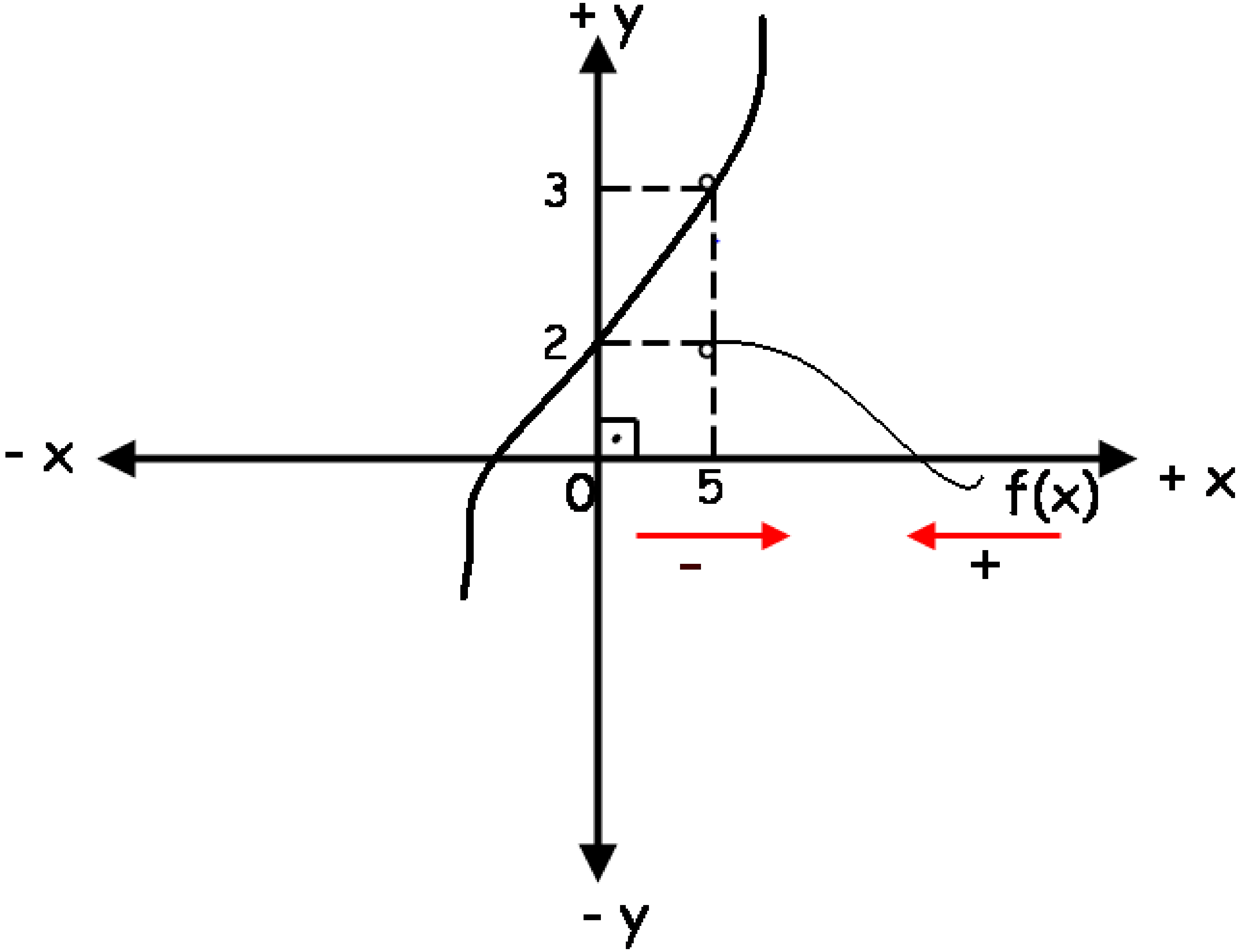
$$\lim_{x \to 4^-} f(x) = 5$$

$\lim_{x \to 4^+} f(x) = \lim_{x \to 4^-} f(x) = 5$ olduğundan $f(x)$ fonksiyonun $x = 4$ noktasında limiti vardır. Ve $\lim_{x \to 4^+} f(x) = 5$ dir.

ÖRNEK

Görsel Eğitim

$\lim_{x \to 5^+} f(x) \neq \lim_{x \to 5^-} f(x)$ olduğundan f(x) fonksiyonun x = 5 noktasında limiti yoktur.



$\lim_{x \to 5^+} f(x) = 2$

$\lim_{x \to 5^-} f(x) = 3$

ÖRNEK

Görsel Eğitim

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = ?$$

ÖRNEK

Görsel Eğitim

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 2 ; & x < 0 \\ 4x^2 + 1 ; & x > 0 \end{cases} \quad \textbf{ise} \quad \lim_{x \to 1} f(x) = \ ?$$

LİMİTİN ÖZELLİKLERİ

1) $\lim\limits_{x \to a} c = c \; , \; (c \in R)$

2) $\lim\limits_{x \to a} c \, . \, f(x) = c \, . \lim\limits_{x \to a} f(x)$

3) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

4) $\lim\limits_{x \to a} (f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \pm \lim\limits_{x \to a} g(x)$

5) $\lim\limits_{x \to a} (f(x) \,.\, g(x)) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \,.\, \lim\limits_{x \to a} g(x)$

6) $\lim\limits_{x \to a} (f(x) : g(x)) = \lim\limits_{x \to a} f(x) : \lim\limits_{x \to a} g(x) \quad (\lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0)$

7) $\lim\limits_{x \to a} c^{f(x)} = c^{\lim\limits_{x \to a} f(x)}$

8) n Tek doğal sayı veya $f(a) \geq 0$ ise;

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)}$$

9) $\lim_{x \to a} \log f(x) = \log \left(\lim_{x \to a} f(x) \right)$

BELİRSİZLİKLER

$\lim\limits_{x \to a} f(x)$ limiti bulunurken f(x) fonksiyonunda x yerine a sayısı yazdığımızda reel sayı tanımına uymayan belirsizlikler giderildikten sonra limit alınır.

$$\boxed{\left(\frac{0}{0} = \text{Belirsiz},\ 0^0 = \text{Belirsiz}\ x \neq 0,\ \frac{x}{0} = \pm\infty\ ,\infty\ ,-\infty\ ,1^{\infty}\ ,0^{\infty}\ ,\infty^{\infty}\right)}$$

$x \neq 0$ ise $x^0 = 1$

ÖRNEK

Görsel Eğitim

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \ ?$$

ÖRNEK

Görsel Eğitim

$$\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2 - 6x + 9} - x + 6\right) = ?$$

ÖRNEK

Görsel Eğitim

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{6x+5}{x^2+5}\right) = 0 \text{ 'dır.}$$

ÖRNEK

Görsel Eğitim

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{8x^6 + 4x^3 + 5x + 7}{4x^6 - x^3 - 4x - 3}\right) = ?$$

ÖRNEK

Görsel Eğitim

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{-4x^2 + 5x}{x^2 + 4}\right) = \ ?$$

ÖRNEK

Görsel Eğitim

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^3 + x^2}{x^2 + 1}\right) = ?$$

ÖRNEK

Görsel Eğitim

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x^5 + 4}{x^4 + x}\right) = \ ?$$

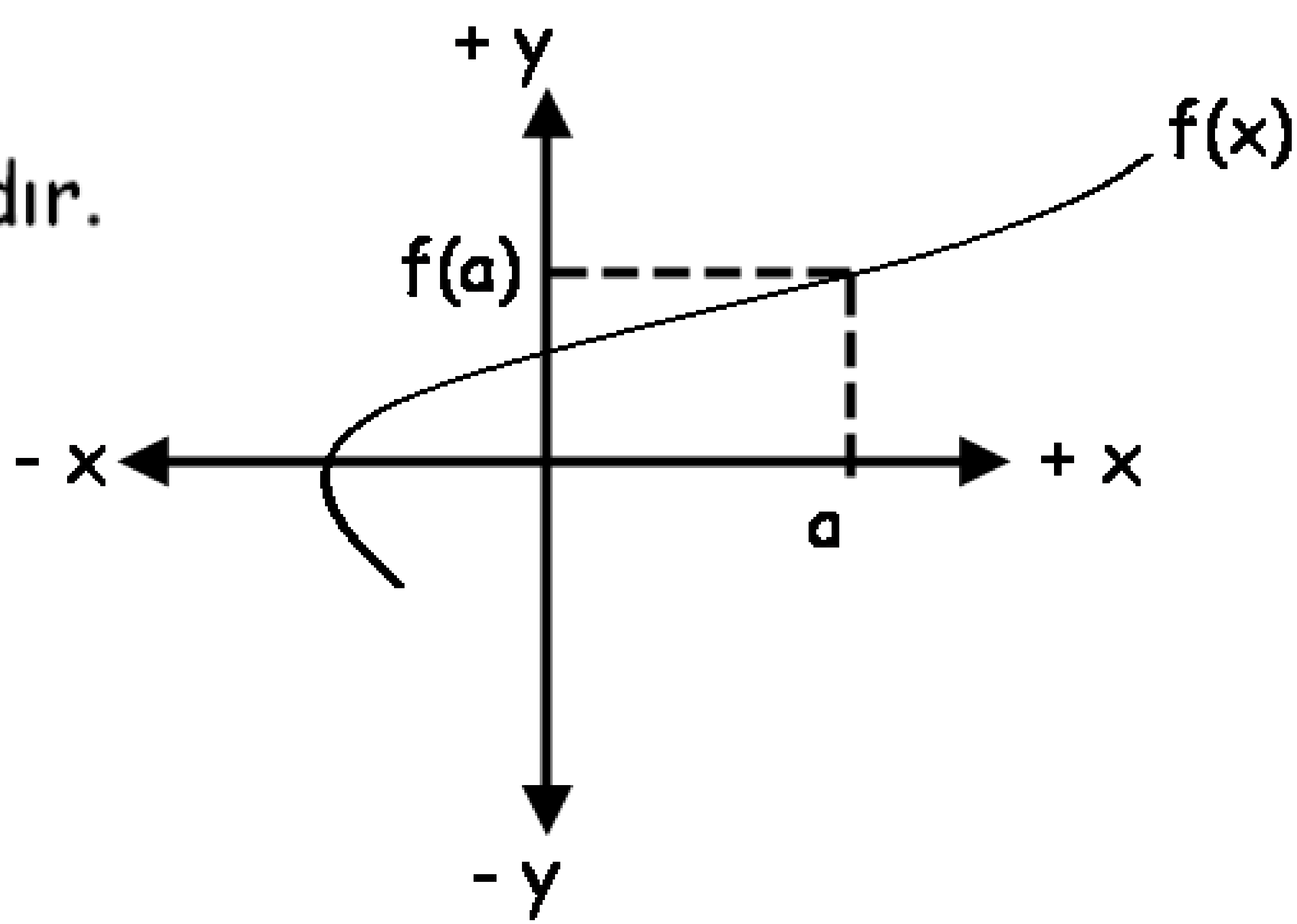
FONKSİYONUN SÜREKLİLİĞİ

f(x) fonksiyonu x = a noktasında aşağıda verilen üç koşulu sağlıyorsa süreklidir.

1) f(x) fonksiyonu x = a noktasında tanımlı olmalıdır.

2) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = k$ limiti olmalıdır.

3) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a) = k$ olmalıdır.

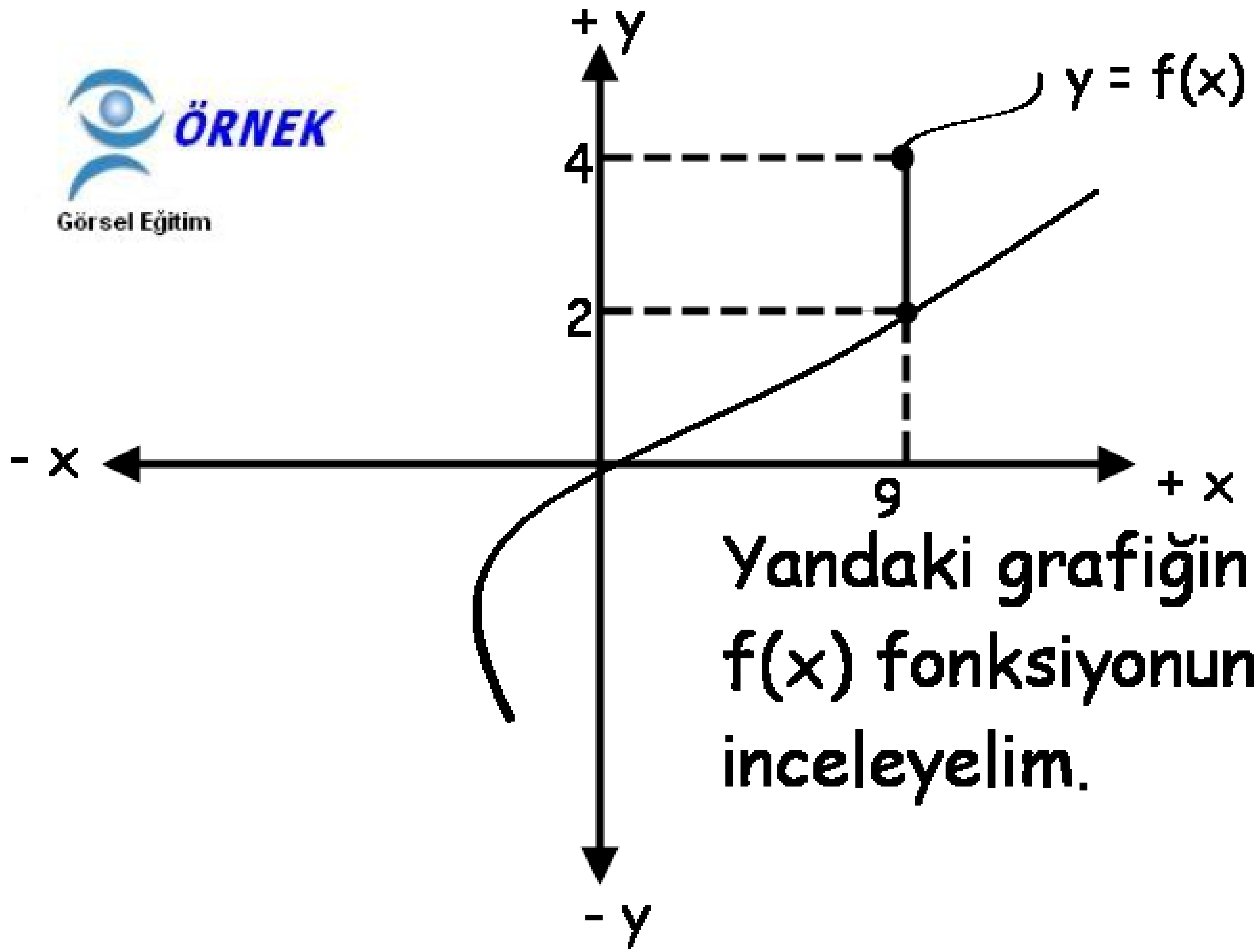


ÖRNEK

Görsel Eğitim

$$f(x) = \begin{cases} 5x + 2 ; & x > 1 \\ 7 ; & x = 1 \\ 7x ; & x < 1 \end{cases}$$

Fonksiyonun x = 1 noktasında sürekliliğini inceleyelim.



Yandaki grafiğin x = 9 noktasındaki f(x) fonksiyonunun sürekliliğini inceleyelim.

$$\lim_{x \to \infty} f(x) \text{ veya } \lim_{x \to -\infty} f(x) \text{ için ;}$$

f(x) fonksiyonu için x değişkeni sağa doğru sınırsız artabilir veya sola doğru sınırsızca azalabilir. Bu durumdaki limitler için;

PAYIN DERECESİ PAYDANIN DERECESİNDEN BÜYÜK İSE SONUÇ SONSUZ (-∞, ∞)' DUR.

ÖRNEK

Görsel Eğitim

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^3 + x^2 + 20x}{3x^2 + 21}\right) = ?$$

ÖRNEK

Görsel Eğitim

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^5 + 5x + 3}{-4x^3 + 7}\right) = \ ?$$

ÖRNEK

Görsel Eğitim

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x^7 + 6x^4 + 3}{x^5 + 4x + 1}\right) = ?$$

ÖRNEK

Görsel Eğitim

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x^4+5x+13}{3x+21}\right) = \ ?$$

PAYIN DERECESİ PAYDANIN DERECESİNDEN KÜÇÜK İSE SONUÇ SIFIR' DIR.

ÖRNEK

Görsel Eğitim

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2 + 7x + 3}{x^3 + x^2 + 1}\right) = 0$$

ÖRNEK

Görsel Eğitim

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x^5 + 7x^4 - 3}{x^{11} + x^{10}}\right) = 0$$

PAYIN DERECESİ PAYDANIN DERECESİNE EŞİT İSE LİMİTİN İŞLEM SONUCU **BAŞ KAT SAYILARIN ORANINA EŞİTTİR.**

ÖRNEK

Görsel Eğitim

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2 + 7x + 2}{4x^2 + 3}\right) = ?$$

ÖRNEK

Görsel Eğitim

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{-x^5 - x^4 + 3x}{3x^5 + x^4 + 1} \right) = \ ?$$

ÖRNEK

Görsel Eğitim

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{4x^2 - 25}{9x^2 - 1} \right) = \ ?$$

L- HOSPİTAL KURALI

f ve g türevi alınabilen fonksiyonlar olsun.

$\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{0}{0}$ yada $\dfrac{\infty}{\infty}$ oluyorsa ve $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ limiti (sonlu yada sonsuz)

varsa $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 'dir.

Eğer belirsizlik devam ediyorsa, bu kural yine uygulanır.