END331
YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI I
DERS NOTLARI
(2014-2015)

Dr. Y. İlker Topcu & Dr. Özgür Kabak

Teşekkür:
Prof. W.L. Winston'ın "Operations Research: Applications and Algorithms" kitabı ile Prof. J.E. Beasley's YA ders notlarının bu ders notlarının oluşturulmasına olan katkıları yüzünden her iki profesöre de teşekkür ederiz....
Rastlayabileceğiniz tüm hataların sorumluluğu bize aittir. Lütfen bizi bu hatalardan haberdar ediniz!
İstanbul Teknik Universitesi OR/MS takımı

İÇİNDEKİLER

1. YÖNEYLEM ARAŞTIRMASINA GİRİŞ

1.1 TERMİNOLOJİ

"Yöneylem Araştırması" (YA), İngiliz ve Avrupalılar tarafından "Operational Research" ve Amerikalılar tarafından "Operations Research" olarak isimlendirilir ve "OR" olarak kısaltılır.

Bu alanda kullanılan bir diğer terim de "Yönetim Bilimi"dir (Management Science) ve uluslararası literatürde MS olarak kısaltılır. İki terim birleştirilerek "***OR/MS***" veya "ORMS" de denilir.

YA genelde bir "Sorun Çözme" (problem solving) ve "Karar Verme Bilimi" (decision science) olarak da değerlendirilir.

Bazı kaynaklarda YA yerine Endüstri Mühendisliği (Industrial Engineering - IE) kavramı da kullanılır.

Son yıllarda bu alan için tek bir terim kullanılmaya çalışılmaktadır: OR.

Biz de derste bu alan için Yöneylem Araştırmasının Türkçe kısaltması olan YA'yı kullanacağız.

“Yöneylem Araştırması (Yönetim Bilimi) genellikle kıt kaynakların tahsis edilmesi gereken durumlarda en iyi şekilde bir sistemi tasarlamaya ve işletmeye yönelik karar verme sürecine bilimsel bir yaklaşımdır.”

Belirli bir hedefi gerçekleştirmek için birlikte çalışan birbirine bağlı bileşenlerin oluşturduğu düzen sistemdir.

1.2 YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI YÖNTEMBİLİMİ

Bir sorunun çözümü için YA kullanıldığı zaman aşağıdaki yedi adımlık süreç takip edilmelidir.

<u>Adım 1. Sorunun Formülasyonu</u>

YA analisti (sorunu olan karar vericiye YA teknikleri ile yardımcı olan kişi) ilk olarak sorunu tanımlar. Sorunun tanımlanması; amaçların ve sorunu oluşturan sistemin bileşenlerinin belirlenmesi ile olur.

Adım 2. Sistemin İncelenmesi

Daha sonra analist sorunu etkileyen parametrelerin değerlerini belirlemek için veri toplar. Söz konusu değerler sorunu temsil edecek bir matematiksel modelin geliştirilmesi (Adım 3) ve değerlendirilmesi (Adım 4) için kullanılır.

Adım 3. Sorunun Matematiksel Modelinin Kurulması

Analist tarafından sorunu ideal bir şekilde temsil edecek bir matematiksel model geliştirilir. Bu derste modelleme için çeşitli yöntemler öğreneceğiz.

Adım 4. Modelin Doğrulanması

Üçüncü adımda kurulan modelin gerçeği iyi yansıtıp yansıtmadığı sınanır. Şu anki durum için modelin ne kadar geçerli olduğu belirlenerek modelin gerçeğe ne kadar uyduğu test edilir.

Adım 5. Uygun bir Seçeneğin Seçilmesi

Eldeki model üzerinde bir çözüm yöntemi kullanılarak amaçları en iyi karşılayan bir seçenek (varsa) analist tarafından seçilir.

Bazen eldeki seçeneklerin kullanımı için sınırlandırmalar ve kısıtlamalar olabilir. Bu yüzden amacı karşılayan seçenek bulunamayabilir. Bazı durumlarda ise amaçları en iyi şekilde karşılayan birden fazla sayıda seçenek bulunabilir.

Adım 6. Sonuçların Karar Vericiye Sunumu

Bu adımda, analist modeli ve model çözümü sonucunda ortaya çıkan önerileri karar verici ya da vericilere sunar. Seçenek sayısı birden fazla ise karar verici(ler) gereksinimlerine göre birini seçerler.

Sonuçların sunumundan sonra, karar verici(ler) öneriyi onaylamayabilir. Bunun nedeni uğraşılan sorunun doğru tanımlanmaması ya da modelin kurulmasında karar vericinin yeterince sürece karışmaması olabilir. Bu durumda analist ilk üç adıma yeniden dönmelidir.

Adım 7. Önerinin Uygulanması ve İzlenmesi

Eğer karar verici sunulan öneriden memnun kalırsa, analistin son görevi karar vericinin öneriyi uygulamasına yardımcı olmaktır: Seçeneğin kullanılarak sorunun çözümüne nezaret etmeli ve özellikle çevre koşulları değiştikçe amaçları karşılamaya yönelik dinamik güncellemeler yaparak uygulamayı izlemelidir.

1.3 YÖNEYLEM ARAŞTIRMASININ TARİHÇESİ

Yöneylem Araştırması göreceli olarak yeni bir bilim dalıdır. 1930'lu yılların sonunda YA ilk olarak Birleşik Krallık'ta kullanıldı.

1936 yılının başında İngiliz Hava Bakanlığı; doğu kıyısında, Felixstowe yakınlarında, Suffolk'da Bawdsey Araştırma İstasyonu'nu kurdu. Söz konusu yer hava kuvvetleri savaş öncesi radar çalışmalarının yapıldığı merkezdi. Yine 1936 yılında Kraliyet Hava Kuvvetleri (RAF) içinde Britanya hava savunması için özel bir birlik oluşturuldu. Radarın kullanılmaya başlaması beraberinde bazı sorunlar da getirdi: Uçakların rotası ve kontrolu gibi elde edilen bilginin doğru ve etkin bir şekilde kullanılması gibi. 1936 yılının sonunda, Kent'deki Biggin Hill'de kurulan bir grup elde edilen radar bilgisi ile diğer uçak ile ilgili yer bilgilerinin bütünleştirilmesini hedefleyen çalışmalar yaptı. Söz konusu çalışmalar YA'nın başlangıcı olarak kabul edilebilir.

1937 yılında Bawdsey Araştırma İstasyonu deneysel çalışmaları pratiğe çevirdi ve Radar İstasyonu olarak çalışmaya başladı. Radardan elde edilen bilgiler bütünleştirilerek genel hava savunma ve kontrol sistemi oluşturuldu. Temmuz 1938'de kıyı boyunca dört yeni radar istasyonu daha kuruldu. Bu durumda da farklı istasyonlardan elde edilen ve genelde birbirleri ile çelişen bilginin doğrulanması ve eşgüdümü sorunu ortaya çıktı.

Sorunun çözümü için ve yapılan işlerin etkinliğinin ölçülmesi amacıyla Bawdsey Araştırma İstasyonu'nda A.P. Rowe başkanlığında bir bilimsel grup oluşturuldu. Söz konusu askeri operasyonların araştırılması (Research into Military Operations) işlemine "Operational Research" denildi. Genişleyen çalışma grubu, 1939 yazında, Stanmore Araştırma İstasyonu'nu merkez olarak kullanmaya başladı.

Savaş sırasında Stanmore Araştırma Merkezi, Fransa'daki Alman güçlerine karşı istenen ek uçak kuvvetlerinin uygun olup olmadığını YA teknikleri kullanarak değerlendirdi ve uygun olmadığını gösteren grafiklerle o zamanki başbakan Winston Churchill'e bir sunum yaptı ve sonuçta bölgeye ek kuvvet gönderilmeyerek hava kuvvetlerinin gücünün azalması engellendi. 1941 yılında Yöneylem Araştırması Bölümü (Operational Research Section - ORS) kuruldu ve savaş bitimine kadar söz konusu grup çalışmalar yaptı.

1941 yılında kurulan Blackett önderliğindeki bu gruba yedi ayrı bilim dalından onbir bilim adamı katılmıştı: üç fizyolog, bir fizikçi, iki matematikçi, bir astrofizikçi, iki fizik matematikçisi, bir subay, bir mühendis. Savaştan sonra YA çalışmaları özellikle ABD'de askeriye dışındaki alanlarda da hızlandı

Türkiye'de ise ilk YA çalışmaları, 1 Haziran 1956'da, Alb. Fuat Uluğ'un çabaları ile Genel Kurmay'da oluşturulan yedek subaylardan oluşan Harekat Araştırması grubu ile başladı. Seferberlik ve hava savunma konularında yurtdışından alınan destek ile araştırmalar yapıldı. Ülkemizde ilk YA dersi de İTÜ Makine Fakültesinde 1960-61 ders yılında Prof. Dr. İlhami Karayalçın tarafından verildi. 1966 yılında Harekat Araştırması ismi Yöneylem Araştırması olarak değiştirildi.

2. TEMEL YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI KAVRAMLARI

“Yöneylem araştırması, gerçek hayat sistemlerinin matematiksel modellerle temsil edilmesi ve en iyi (optimum) çözümü bulmak için kurulan modellere sayısal yöntemler (algoritmalar) uygulanmasıdır.”
Bir eniyileme (optimizasyon) modeli verilen kısıtları sağlayan karar değişkenlerinin tüm değerleri arasında amaç fonksiyonunu eniyileyen (enbüyükleyen veya enküçükleyen) değerleri bulmayı hedefler

Örnek
Two Mines Şirketi özel bir cevher çıkardığı iki adet maden ocağına sahiptir. Ocaklarda üretilen cevher üç sınıfa ayrılır: yüksek, orta, düşük kaliteli. Şirket bir fabrikaya haftalık olarak 12 ton yüksek, 8 ton orta ve 24 ton düşük kaliteli cevher sağlamak üzere anlaşmıştır. Söz konusu iki maden ocağı (X ve Y) ayrıntıları aşağıda verilen farklı işletim özelliklerine sahiptir.

Maden	**Maliyet (£'000 / gün)**	**Üretim (ton/gün)**		
		Yüksek	**Orta**	**Düşük**
X	180	6	3	4
Y	160	1	1	6

Anlaşmayı gerçekleştirmek için hafta sonu üretim yapılmayan maden ocakları haftada kaç gün işletilmelidir?

Tahmin
Two Mines örneğini incelemek için çok basit bir şekilde yargımızı kullanarak madenlerin haftada kaç gün çalışacağına yönelik olarak fikir yürüterek tahmin yapabiliriz.

- haftada bir gün X madenini, bir gün Y madenini işletme

Bu çözüm önerisi iyi bir sonuç vermeyecek gibi gözükmektedir. Sadece 7 ton yüksek kaliteli cevher üretilecek bu durumda da 12 tonluk müşteri gereksinimi karşılanamayacaktır. Böyle bir çözüme "olurlu (uygun) olmayan" (infeasible) çözüm denilir.

- haftada 4 gün X madenini, 3 gün Y madenini işletme

Bu durumda tüm müşteri gereksinimleri karşılanabilmektedir. Böyle bir çözüme de "olurlu" (feasible) çözüm denilir. Fakat söz konusu çözüm önerisi çok pahalıdır.

Anlaşmayı en küçük maliyetle sağlayacak çözümü isteriz. Tahmin ederek yeni çözümler bulsak bile bulduğumuz çözümün en küçük maliyetli olup olmadığını bilemeyiz. Yapısal bir yaklaşım ile en iyi çözümü bulabiliriz.

Çözüm

Yapmamız gereken Two Mines örneğini sözel olarak ifade edip, söz konusu ifadeyi matematiksel bir tanıma çevirmektir.

Bu tipte sorunları çözmeye uğraşırken öncelikle aşağıdaki kavramları belirlemeliyiz:

- değişkenler (variables)
- kısıtlar (constraints)
- amaç.(objective)

Bu belirleme sürecine "formülasyon" ya da daha resmi bir şekilde sorunun matematiksel modelinin formülasyonu denilir.

Değişkenler

Bunlar verilmesi gereken kararları veya bilinmeyenleri temsil eder. İncelenen sorunda iki adet karar değişkeni (decision variable) vardır:

x = Bir haftada X maden ocağının işletileceği gün sayısı

y = Bir haftada Y maden ocağının işletileceği gün sayısı

Doğal olarak $x >= 0$ ve $y >= 0$ olacaktır

Kısıtlar

Kısıt, soruna özgü durumların getirdiği sınırlamalardır. Kısıt belirlemenin en iyi yolu önce sınırlayıcı durumları sözel olarak ifade edip daha sonra değişkenleri kullanıp matematiksel biçimde yazmaktır:

Cevher üretim kısıdı – üretilen cevher ile müşteri gereksiniminin dengelenmesi

Cevher çeşitleri

Yüksek	$6x + 1y >= 12$
Orta	$3x + 1y >= 8$
Düşük	$4x + 6y >= 24$

Kısıtlarda eşitlik yerine eşitsizlik kullanıldığına dikkat ediniz. Bu durumda gereksinim duyulandan daha fazla cevher üretebiliriz. Eşitsizlik kullanma "en iyileme" (optimization) sorunlarındaki kısıtlarda esneklik sağlar.

Haftalık gün kısıdı - Haftada belirli bir günden fazla çalışılamaz. Örneğin haftada 5 gün çalışılırsa

$x <= 5$

$y <= 5$

Haftalık gün sayısı gibi kısıtlar genellikle saklı (implicit) kısıtlar olarak isimlendirilir çünkü bu kısıtlar değişkenlerin tanımlanmasında saklıdır

Amaç

Şirketin amacı toplam maliyeti (180x + 160y) en az seviyede tutarak müşteri gereksinimlerini karşılamaktır.

Ele alınan sorunda tüm olası olurlu çözümlerden amaç fonskiyonu değerini enküçükleyen karar değişkeni değerlerini barındıran çözüm en iyi çözümdür.

Sorunun amacının kar enbüyüklemesi olması durumunda en iyi çözüm amaç fonksiyonu değerini en büyük yapan değer olacaktır.

Genel olarak, tüm olası olurlu çözümlerden amaç fonksiyonu değerini en iyi hale getiren karar değişkeni değerlerini barındıran çözüme "en iyi" (optimum) çözüm denilir.

Sonuç olarak tüm kavramları bir arada yazarak ***tam matematiksel modeli*** aşağıdaki gibi yazabiliriz:

enküçükle (minimize)

$180x + 160y$

öyle ki (subject to)

$6x + y >= 12$

$3x + y >= 8$

$4x + 6y >= 24$

$x <= 5$

$y <= 5$

$x,y >= 0$

Yukarıda verilen matematiksel model aşağıdaki biçimdedir:

- tüm değişkenler süreklidir (continuous)
- tek bir amaç vardır (enbüyükleme (maximize) veya enküçükleme (minimize))

- amaç ve kısıt fonksiyonları doğrusaldır. Fonksiyondaki her terim ya sabit sayıdır ya da bir sabitle çarpılmış değişkendir (örneğin 24, 0, $4x$, $6y$ doğrusal terimlerdir fakat xy, x^2 doğrusal değildir).

Yukarıdaki üç koşulu sağlayan herhangi bir formülasyon bir "Doğrusal Program"dır (DP; linear program - LP).

Bir sorunu DP ile incelediğimizde yukarıdaki koşullara uymak için bazı varsayımlar yaparız. Ele aldığımız örnekte haftalık çalışma gün sayısının kesirli olabileceği (tam sayı olmak zorunda olmaması) gibi. Aslında bu tip sorunları çözmek için "Tam sayılı programlama" (*integer programming*- IP) teknikleri de kullanılabilir.

Matematiksel model (formülasyon) kurulduktan sonra algoritma adı verilen sayısal bir çözüm tekniği kullanılarak amaç fonksiyonunun "en iyi" (optimum) değerini verecek (enbüyükleme sorunlarında en büyük, enküçüklemede en küçük) ve tüm kısıtları sağlayacak şekilde karar değişkeni değerleri bulunur.

"YA, gerçek hayat sistemlerinin matematiksel modellerle temsil edilmesi ve en iyi çözümü bulmak için kurulan modellere sayısal yöntemler (algoritmalar) uygulanmasıdır."

3. DOĞRUSAL PROGRAMLAMA İLE MODELLEME

Two Mines örneği incelenirse, bir matematiksel modelin bir "Doğrusal Program" (DP; linear program - LP) olması için aşağıdaki koşulları sağlaması gerektiği görülür:

- Tüm değişkenler süreklidir (continuous)
- Tek bir amaç vardır (enbüyükleme (maximize) veya enküçükleme (minimize))
- Amaç ve kısıt fonksiyonları doğrusaldır. Fonksiyondaki her terim ya sabit sayıdır ya da bir sabitle çarpılmış değişkendir

DP'ler önemlidir çünkü:

- çok sayıda sorun DP olarak formüle edilebilir
- "Simpleks algoritması" kullanılarak DP'ler çözülebilir ve en iyi çözüm bulunabilir

DP'lerin temel uygulama alanlarına aşağıda çeşitli örnekler verilmiştir:

- Üretim planlama
- Rafineri yönetimi
- Karışım
- Dağıtım
- Finansal ve ekonomik planlama
- İşgücü planlaması
- Tarımsal planlama
- Gıda planlama

DP'ler için dört temel varsayım söz konusudur:

- Oransallık
  - Her karar değişkeninin amaç fonksiyonuna katkısı karar değişkeninin değeri ile orantılıdır (Dört asker üretmenin amaç fonksiyonuna (kâra) katkısı ($4\times\$3=\$12$) bir askerin amaç fonkisyonuna katkısının (\$3) tam olarak dört katıdır.)
  - Her karar değişkeninin kısıtların sol tarafına katkısı karar değişkeninin değeri ile orantılıdır. (Üç asker üretmek gerekli cilalama zamanı (2 saat $\times$ 3 = 6 saat) tam olarak bir asker üretmek için gerekli cilalama zamanının (2 saat) üç katıdır.)
- Toplanabilirlik
  - Herhangi bir karar değişkeninin amaç fonksiyonuna katkısı diğer karar değişkenlerinin değerlerinden bağımsızdır. (Trenin (x_2) değeri ne olursa olsun, asker (x_1) üretmek her zaman amaç fonksiyonuna $3x_1$ dolar katkı yapacaktır.)

- Herhangi bir karar değişkeninin kısıt sol tarafına katkısı diğer karar değişkenlerinin değerlerinden bağımsızdır. (x_1'in değeri ne olursa olsun, x_2 üretimi x_2 saat cilalama ve x_2 saat marangozluk gerektirir.)

  Sonuç 1: Amaç fonksiyonu değeri her bir karar değişkeninin katkısının toplamına eşittir.

  Sonuç 2: Her bir kısıdın sol taraf değeri her bir karar değişkeninin katkısının toplamına eşittir.

- Bölünebilirlik

Karar değişkenleri tam sayı olmayan değerler alabilir. Eğer tam sayı değerler kullanmak şartsa TP kullanılmalıdır. (1.69 tren üretmek kabul edilebilir.)

- Kesinlik

Her parametre kesin olarak bilinmektedir.

3.1 DP ÖRNEKLERİ

3.1.1 Giapetto Örneği

(Winston 3.1., s. 49)

Giapetto tahtadan oyuncak asker ve tren yapmaktadır. Satış fiyatları, bir oyuncak asker için \$27, bir oyuncak tren için \$21'dır. Bir asker için \$10'lık hammadde ve \$14'lık işçilik kullanılmaktadır. Bir tren için ise söz konusu rakamlar sırasıyla \$9 ve \$10'dır. Her bir asker için 2 saat cilalama ve 1 saat marangozluk gerekirken, her bir tren için 1 saat cilalama ve 1 saat marangozluk gerekmektedir. Eldeki hammadde miktarı sınırsızdır, fakat haftada en çok 100 saat cilalama ve 80 saat marangozluk kullanabilen Giapetto'nun haftada en fazla 40 oyuncak asker satabileceğini göz önünde bulundurarak karını enbüyüklemek için hangi oyuncaktan haftada kaç adet üretmesi gerektiğini bulunuz.

Yanıt

Karar değişkenleri tam olarak verilmesi gereken (bu sorunda Giapetto tarafından) kararları tanımlamalıdır. Giapetto bir haftada kaç oyuncak asker ve tren yapacağına karar vermelidir. Bu karara göre aşağıdaki karar değişkenleri tanımlanabilir:

x_1 = bir haftada üretilen asker sayısı

x_2 = bir haftada üretilen tren sayısı

Amaç fonksiyonu karar değişkenlerinin bir fonksiyonudur. Gelir veya karını enbüyüklemek ya da maliyetini enküçüklemek isteyen karar vericinin amacını yansıtır. Giapetto haftalık karını (z) enbüyüklemek isteyecektir.

Bu sorunda kar

(haftalık gelir) – (hammadde satınalma maliyeti) – (diğer değişken maliyetler)

olarak formüle edilebilir. Bu durumda Giapetto'nun amaç fonksiyonu:

Enbüyükle $z = 3x_1 + 2x_2$

Kısıtlar karar değişkenlerinin alabileceği değerler üzerindeki, sınırlamaları gösterir. Herhangi bir sınırlama olmazsa Giapetto çok fazla sayıda oyuncak üreterek çok büyük kar elde edebilir. Fakat gerçek hayatta olduğu gibi burada da kısıtlar vardır

Haftalık kullanılabilen cilalama zamanı

Haftalık kullanılabilen marangozluk zamanı

Askerler için haftalık talep

İşaret sınırlamaları da eğer karar değişkenleri salt negatif olmayan değerler alıyorsa kullanılmalıdır (Giapetto negatif sayıda asker veya tren üretemez!).

Yukarıdaki tüm bu özellikler aşağıdaki ***Doğrusal Programlama*** (DP; Linear Programming - LP) modelini verir:

Maks $z = 3x_1 + 2x_2$		(Amaç fonksiyonu)
s.t.	$2x_1 + x_2 \leq 100$	(Cilalama kısıdı)
	$x_1 + x_2 \leq 80$	(Marangozluk kısıdı)
	$x_1 \leq 40$	(Talep kısıdı)
	$x_1, x_2 \geq 0$	(İşaret sınırlamaları)

Eğer (x_1,x_2)'nin bir değeri (bir çözüm) tüm bu kısıtları ve işaret sınırlamalarını sağlarsa, söz konusu çözüm ***olurlu bölge***dedir (feasible region).

Grafik olarak ya da hesaplayarak sorun çözüldüğünde olurlu bölgedeki çözümlerden amaç fonksiyon değeri en yüksek olan çözümün $(x_1,x_2) = (20,60)$ olduğunu ve $z=180$ değerini verdiğini buluruz. Bu çözüm ***en iyi çözüm***dür (optimal solution).

Rapor

Haftada 20 asker ve 60 tren üretilmesi durumunda kar $180 olacaktır. Kar miktarları, eldeki işçilik ve talebe göre elde edilebilecek en büyük kar budur. Daha fazla işçilik bulunursa kar çoğalabilir.

3.1.2 Reklam Örneği

(Winston 3.2, s. 61)

Dorian şirketi, yüksek gelirli müşterileri için otomobil ve jeep üretmektedir. Televizyondaki tiyatro oyunlarına ve futbol maçlarına bir dakikalık spot reklamlar vererek satışlarını arttırmayı hedeflemektedir. Tiyatro oyununa verilen reklamın maliyeti $50bin'dir ve hedef kitledeki 7 milyon kadın ve 2 milyon erkek tarafından seyredilebilir. Futbol maçına verilen reklamın maliyeti ise $100bin'dir ve hedef kitledeki 2 milyon kadın ve 12 milyon erkek tarafından seyredilebilir. Dorian yüksek gelirli 28 milyon kadın ve 24 milyon erkeğe en az maliyetle nasıl ulaşır?

Yanıt

Karar değişkenleri aşağıdaki gibi belirlenebilir:

x_1 = tiyatro oyununa verilen reklam sayısı

x_2 = futbol maçına verilen reklam sayısı

Sorunun modeli:

$$\begin{aligned} &\min z = 50x_1 + 100x_2 \\ &\text{öyle ki} \quad 7x_1 + 2x_2 \geq 28 \\ &\qquad\qquad 2x_1 + 12x_2 \geq 24 \\ &\quad x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Grafik çözüm yapılırsa $(x_1, x_2) = (3.6, 1.4)$ değerleri için amaç fonksiyonunun en iyi değeri $z = 320$ olarak bulunur.

Grafiğe bakılarak en iyi tamsayılı çözüm $(x_1, x_2) = (4, 2)$ olarak bulunabilir.

Rapor

Hedeflenen kitleye ulaşmak için en az maliyetli çözüm 4 adet reklamı tiyatro oyununda ve 2 adet reklamı futbol maçında kullanmak gerekir. Bu durumda Dorian $400bin reklam masrafı yapacaktır.

3.1.3 Beslenme Örneği

(Winston 3.4., s. 70)

Bayan Fidan dört "temel gıda grubu" ile beslenmektedir: kek, çikolatalı dondurma, kola, ananaslı pasta. Bir adet kek $0.5'a, bir kaşık dondurma $0.2'a, bir şişe kola $0.3'a ve bir dilim pasta $0.8'a satılmaktadır. Her gün en az 500 kalori, 6 oz. çikolata, 10 oz. şeker ve 8 oz. yağ alması gereken Bayan Fidan en az maliyetle bu gereksinimlerini nasıl karşılar? Aşağıdaki tabloyu kullanarak bir DP modeli kurup sorunu çözünüz.

	Kalori	Çikolata (ounce)	Şeker (ounce)	Yağ (ounce)
Kek (1 adet)	400	3	2	2
Çikolatalı dondurma (1 kaşık)	200	2	2	4
Kola (1 şişe)	150	0	4	1
Ananaslı pasta (1 dilim)	500	0	4	5

Yanıt

Karar değişkenleri:

x_1: günlük yenilecek kek sayısı

x_2: günlük yenilecek kaşık dondurma sayısı

x_3: günlük içilecek şişe kola sayısı

x_4: günlük yenilecek dilim pasta sayısı

şeklinde belirlenebilir.

Bu durumda amaç fonksiyonu (cent cinsinden toplam günlük maliyet):

$$\min w = 50\, x_1 + 20\, x_2 + 30\, x_3 + 80\, x_4$$

Kısıtlar:

$$400\, x_1 + 200\, x_2 + 150\, x_3 + 500\, x_4 \geq 500 \quad \text{(günlük kalori)}$$

$$3\, x_1 + 2\, x_2 \geq 6 \quad \text{(günlük çikolata)}$$

$$2\, x_1 + 2\, x_2 + 4\, x_3 + 4\, x_4 \geq 10 \quad \text{(günlük şeker)}$$

$$2\, x_1 + 4\, x_2 + x_3 + 5\, x_4 \geq 8 \quad \text{(günlük yağ)}$$

$$x_i \geq 0,\ i = 1, 2, 3, 4 \quad \text{(işaret sınırlamaları!)}$$

Rapor

Bayan Fidan günde 3 kaşık dondurma yiyip 1 şişe kola içerek tüm besin gereksinimlerini karşılayabilir ve sadece 90 cent harcar (w=90, x_2=3, x_3=1).

3.1.4 Postane Örneği

(Winston 3.5., s. 74)

Bir postanede haftanın her günü farklı sayıda elemana gereksinim duymaktadır. Sendika kurallarına göre bir eleman 5 gün peş peşe çalışmakta diğer iki gün izin yapmaktadır. Çalıştırılması gereken toplam en az eleman sayısını aşağıdaki iş yüküne göre hesaplayınız.

	Pzt	Sal	Çar	Per	Cum	Cmt	Paz
Gerekli eleman	17	13	15	19	14	16	11

Yanıt

Karar değişkenleri x_i (i. gün çalışmaya başlayan eleman sayısı) olsun

Matematiksel olarak DP modeli aşağıdaki gibi oluşturulabilir:

$$
\begin{array}{llllllllll}
\min z = & x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & +x_5 & +x_6 & +x_7 & & \\
& x_1 & & & +x_4 & +x_5 & +x_6 & +x_7 & \geq & 17 \\
& x_1 & +x_2 & & & +x_5 & +x_6 & +x_7 & \geq & 13 \\
& x_1 & +x_2 & +x_3 & & & +x_6 & +x_7 & \geq & 15 \\
& x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & & & +x_7 & \geq & 19 \\
& x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & +x_5 & & & \geq & 14 \\
& & +x_2 & +x_3 & +x_4 & +x_5 & +x_6 & & \geq & 16 \\
& & & +x_3 & +x_4 & +x_5 & +x_6 & +x_7 & \geq & 11
\end{array}
$$

$x_t \geq 0, \forall t$

Rapor

(x_t) = (4/3,10/3,2,22/3,0,10/3,5), z = 67/3 şeklindedir.

Karar değişkeni değerleri yakın tamsayılara yuvarlanırsa (x_t) = (2,4,2,8,0,4,5), z=25 çözümü bulunur (yanlış olabilir!).

Elde edilen Tamsayılı Lindo çözümüne göre ise amaç fonksiyonun en iyi değeri z=23'dür ve (x_t) = (4,4,2,6,0,4,3) şeklindedir.

3.1.5 Sailco Örneği

(Winston 3.10., s. 99)

Sailco şirketi gelecek dört mevsimde kaç adet yelkenli üreteceğine karar verecektir. Talep sırasıyla 40, 60, 75 ve 25 yelkenlidir. Sailco tüm talepleri zamanında karşılamalıdır. Başlangıçta Sailco'nun envanterinde 10 yelkenli vardır. Normal mesai ile bir mevsimde 40 yelkenli üretebilen şirket yelkenli başına $400 işçilik maliyetine maruz kalmaktadır. Fazla mesai ile yapılan her ek yelkenli için ise işçilik maliyeti $450'dır. Herhangi bir mevsimde yapılan yelkenli ya talebi karşılamak için kullanılıp satılır ya da envantere konulur. Bir yelkenlinin bir mevsim envanterde tutulması durumunda ise $20 envanter taşıma maliyeti oluşmaktadır.

Yanıt

t = 1,2,3,4 için karar değişkenleri

x_t = t. mevsimde normal mesai ile üretilen yelkenli sayısı

y_t = t. mevsimde fazla mesai ile üretilen yelkenli sayısı

Envanter hesaplarının yapılabilmesi için kullanılacak değişkenler:

i_t = t. mevsimin sonunda envanterdeki yelkenli sayısı

d_t = t. dönem için yelkenli talebi

Veri $x_t \leq 40, \forall t$

Mantıksal olarak $i_t = i_{t-1} + x_t + y_t - d_t,\ \forall t.$

Talep karşılanmalı $i_t \geq 0,\ \forall t$

(İşaret sınırlamaları $x_t, y_t \geq 0,\ \forall t$)

Bu kısıt kümelerini kullanarak toplam maliyet z'yi enküçüklemeliyiz:

$$z = 400(x_1+x_2+x_3+x_4) + 450(y_1+y_2+y_3+y_4) + 20(i_1+i_2+i_3+i_4)$$

Rapor

Lindo en iyi çözümü $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (40, 40, 40, 25)$, $(y_1, y_2, y_3, y_4) = (0, 10, 35, 0)$ ve toplam maliyet = \$78450.00 olarak verir. Üretim çizelgesi:

		M1	**M2**	**M3**	**M4**
Normal mesai (x_t)		40	40	40	25
Fazla mesai (y_t)		0	10	35	0
Envanter (i_t)	10	10	0	0	0
Talep (d_t)		40	60	75	25

3.1.6 Müşteri Hizmet Düzeyi Örneği

(Winston 3.12, s. 108)

Bir bilgisayar şirketinde müşteri hizmetleri için deneyimli uzmana olan talep (adamsaat/ay) aşağıdaki gibidir:

t	**Ocak**	**Şubat**	**Mart**	**Nisan**	**Mayıs**
d_t	6000	7000	8000	9500	11000

Ocak ayı başında şirkette 50 deneyimli uzman vardır. Her uzman ayda 160 saat çalışabilir. Yeni bir uzmanı yetiştirmek için deneyimli uzmanlar 50 saat ayırmaktadır ve söz konusu uzmanın eğitimi bir ayda tamamlanmaktadır. Her deneyimli uzmana ayda \$2000, her yeni uzmana ise ayda \$1000 ödenmektedir. Her ay deneyimli uzmanların %5'i işten ayrılmaktadır. Şirket hem hizmet talebini karşılamak istemekte hem de maliyetleri enazlamak istemektedir. Sorunu çözmek için DP modeli kurunuz.

Yanıt

Karar değişkenleri:

$x_t = t$ ayında eğitilecek uzman sayısı

İşlem yapabilmek için kullanılan diğer değişkenler ise

$y_t = t$. ayın başında şirketteki deneyimli uzman sayısı

$d_t = t$. ayın hizmet talebi

Bu durumda

min $z = 2000(y_1+...+y_5)+1000(x_1+...+x_5)$

öyle ki

$160y_t - 50x_t \geq d_t$ $\quad t = 1,...5$ için,

$y_1 = 50$

$y_t = .95y_{t-1} + x_{t-1}$ $\quad t = 2,3,4,5$ için.

$x_t, y_t \geq 0$

3.1.7 Petrol Karışımı Örneği

(Winston 3.8'den esinlenilmiştir)

Sunco oktan dereceleri ve sülfür oranları farklı üç tip ham petrolün (H1, H2, H3) karıştırılması ile üç tip benzin (B1, B2, B3) üretmektedir. Benzinlerin oktan dereceleri ve sülfür oranları belli standartları sağlamalıdır:

- B1 için ortalama oktan derecesi en az 10, sülfür oranı en fazla %2 olmalıdır,
- B2 için ortalama oktan derecesi en az 8, sülfür oranı en fazla %4 olmalıdır,
- B3 için ortalama oktan derecesi en az 6, sülfür oranı en fazla %3 olmalıdır.

Firmanın her benzin tipi için en fazla satabileceği talepler sırasıyla 3000, 2000 ve 1000 varildir. Bununla birlikte firma reklam yaparak talebini arttırabilmektedir. Herhangi bir benzinde 1 dolarlık reklam, talebi 10 varil arttırmaktadır. Hammaddelerin oktan dereceleri, sülfür oranları ve alış fiyatları ile benzinlerin satış fiyatları aşağıda verilen tablolardaki gibi ise Sunco'nun kârını enbüyükleyecek DP'yi kurunuz.

Ham petrol	Oktan	Sülfür (%)	Alış fiyatı ($/varil)
1	12	1	45
2	6	3	35
3	8	5	25

Benzin	Satış fiyatı ($/varil)
1	70
2	60
3	50

Yanıt

Karar değişkenleri

x_{ij} : *i*. hammaddeden *j*. benzine konulan miktar (varil), $i = 1,2,3$; $j=1,2,3$.

r_j : *j*. benzin için yapılan reklam ($), $j=1,2,3$.

Amaç fonksiyonu (karı enbüyüklemek)

Maks Z = Kar = gelir – maliyet

Maks Z = $(70\sum_i x_{i1} + 60\sum_i x_{i2} + 50\sum_i x_{i3}) - \left(45\sum_j x_{1j} + 35\sum_j x_{2j} + 25\sum_j x_{3j}\right) - \sum_j r_j$

Kısıtlar

Oktan derecesi

$12x_{11} + 6x_{21} + 8x_{31} \geq 10\ (x_{11} + x_{21} + x_{31})$ $\quad$ benzin 1 oktan derecesi

$12x_{12} + 6x_{22} + 8x_{32} \geq 8(x_{12} + x_{22} + x_{32})$ $\quad$ benzin 2 oktan derecesi

$12x_{13} + 6x_{23} + 8x_{33} \geq 6\ (x_{13} + x_{23} + x_{33})$ benzin 3 oktan derecesi

Sülfür oranları

$(.01x_{11} + .03x_{21} + .05x_{31})/(x_{11} + x_{21} + x_{31}) \leq .02$ →

$x_{11} + 3x_{21} + 5x_{31} \leq 2\ (x_{11} + x_{21} + x_{31})$ benzin 1 sülfür oranı

$x_{12} + 3x_{22} + 5x_{32} \leq 4\ (x_{12} + x_{22} + x_{32})$ benzin 2 sülfür oranı

$x_{13} + 3x_{23} + 5x_{33} \leq 2\ (x_{13} + x_{23} + x_{33})$ benzin 3 sülfür oranı

Talepler

$\sum_i x_{ij} \leq T_j + 10r_j$ $\forall j$. (T_j : j. benzinin reklamsız talebi)

İşaret sınırlamaları

x_{ij} , $r_j \geq 0$, $\forall i,j$.

3.2 MUTLAK DEĞERLİ İFADELERİN DP'YE EKLENMESİ

3.2.1 Dönüşüm

Bir modelde bir fonksiyonun mutlak değeri kullanılıyorsa, bu doğrusal olmayan bir yapı oluşturur. Bir $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ fonksiyonun mutlak değerini | $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$|, DP'ye ekleyebilmek için bir yapay değişken (λ) tanımlayarak modele aşağıdaki kısıtlar eklenir:

$\lambda \geq f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$\lambda \geq - f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

Modelde amaç fonksiyonu ve/veya kısıtlarda $|f(x_1, x_2, \ldots, x_n)|$ yerine λ yazılır. Bu şekilde bir modellemenin çalışabilmesi için modelin λ'yı küçükleme eğiminde olası gerekir. Aksi taktirde yukarıdaki ifadeler ile λ üstten sınırlandırmadığı için istenen mutlak değer hesabı yapılamaz.

Benzer yaklaşım Min-Maks ve Maks-Min ifadelerinin DP'ye eklenmesinde de kullanılabilir. { Min (Maks [$f_1(\boldsymbol{x})$, $f_2(\boldsymbol{x})$,…, $f_k(\boldsymbol{x})$]) } ifadesini DP'ye eklemek için bir yapay değişken (λ) tanımlanarak modele aşağıdaki kısıtlar eklenir:

$\lambda \geq f_1(\boldsymbol{x})$, $\lambda \geq f_2(\boldsymbol{x})$, …. , $\lambda \geq f_k(\boldsymbol{x})$

{ Maks (Min [$f_1(\boldsymbol{x})$, $f_2(\boldsymbol{x})$,…, $f_k(\boldsymbol{x})$]) } ifadesini DP'ye eklemek için bir yapay değişken (λ) tanımlanarak modele aşağıdaki kısıtlar eklenir:

$\lambda \leq f_1(\boldsymbol{x})$, $\lambda \leq f_2(\boldsymbol{x})$, …. , $\lambda \leq f_k(\boldsymbol{x})$

3.2.2 Makine Yeri Belirleme Örneği

(Bazaraa, 2010; s.30.)

Dört makine bulunan bir üretim alanına yeni bir makinenin koyulacağı yer belirlenmek istenmektedir. Mevcut makinelerin koordinatları şöyledir. $\binom{3}{1}, \binom{0}{-3}, \binom{-2}{2}, \binom{1}{4}$. Yeni makinenin koordinatları: $\binom{x_1}{x_2}$ olacaktır. Yeni makine ile diğer makineler arasındaki mesafeyi en küçükleyecek koordinatı bulmak için bir DP kurunuz. Makineler arası mesafeyi Manhattan uzaklığı ile belirlenecektir. Örnek: $\binom{x_1}{x_2}$ ile $\binom{3}{1}$ arasındaki mesafe: $|x_1 - 3| + |x_2 - 1|$.

Yanıt

Karar değişkenleri

x_1 ve x_2, yeni makinenin koordinatları

λ_{ij} : yeni makine ile *i*. mevcut makine arasındaki *j*. koordinata göre mesafesi, *i* = 1,2,3,4; *j* = 1,2.

Amaç fonksiyonu

Min $\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{2}\lambda_{ij}$

Kısıtlar (*Uzaklık hesaplama)*

$\lambda_{ij} \geq k_{ij} - x_j, \quad \lambda_{ij} \geq -k_{ij} + x_j \quad \forall i, j.$ k_{ij}: *i*. makinenin *j*. koordinatı

Örneğin; i =1 ve j=1,2 için;

$\lambda_{11} \geq 3 - x_1$ $\quad \lambda_{11} \geq -3 + x_1$

$\lambda_{12} \geq 1 - x_2$ $\quad \lambda_{12} \geq -1 + x_2$

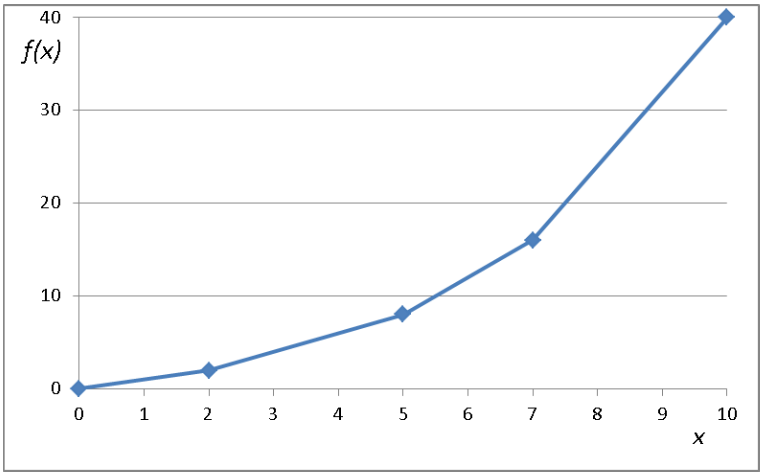
İşaret sınırlamaları

x_1, x_2 serbest; $\lambda_{ij} \geq 0$, $\forall i,j$.

3.3 PARÇALI DOĞRUSAL FONKSİYONLAR

3.3.1 Parçalı doğrusal Konveks fonksiyonların DP'ye eklenmesi

Bir parçalı doğrusal fonksiyon birden çok doğru parçasından oluşur. Örneğin aşağıdaki şekilde fonksiyon dört doğru parçasının birleşiminden oluşmaktadır.



Şekilde ifade edilen fonksiyon aşağıda verilmiştir.

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x < 2 \\ 2 + 2(x-2) & 2 \leq x < 5 \\ 8 + 4(x-5) & 5 \leq x < 7 \\ 16 + 8(x-7) & 7 \leq x < 10 \end{cases}$$

Fonksiyonun eğiminin değiştiği noktalara kesme noktası denir. Şekilde 0, 2, 5, 7 ve 10 kesme noktalarıdır. Eğer *x* değeri arttıkça parçalı fonksiyonların eğimi artıyorsa bu fonksiyon bir parçalı doğrusal konveks fonksiyondur. Bir matematiksel modelin enküçüklenecek amaç fonksiyonu parçalı doğrusal konveks fonksiyon ise bu amacı DP'ye ilave etmek için aşağıdaki iki yöntem kullanılabilir:

f(*x*) bir parçalı doğrusal konveks fonksiyon; d_1, d_2, … ,d_n kesme noktaları olsun.

Yöntem 1.

Modelde *f*(*x*) yerine $\sum_{i=1}^{n-1} c_i y_i$,

x yerine $\sum_{i=1}^{n-1} y_i$ yazılır,

kısıtlara $y_i \leq d_{i+1} - d_i, i = 1, \ldots, n-1$ ilave edilir.

Burada $y_i, i = 1, \ldots, n-1$ karar değişkenleri,

$c_i, i = 1, \ldots, n-1$ ise *i*'nci parçalı fonksiyonun eğimidir.

Örnekte verilen fonksiyon için DP formülasyonu aşağıda verilmiştir.

$$f(x) = y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 8y_4$$

$$x = y_1 + y_2 + y_3 + y_4$$

$$y_1 \leq 2$$

$$y_2 \leq 3$$

$$y_3 \leq 2$$

$$y_4 \leq 3$$

Yöntem 2.

Modelde $f(x)$ yerine $\sum_{i=1}^{n} z_i f(d_i)$,

x yerine $\sum_{i=1}^{n} z_i d_i$ yazılır,

kısıtlara $\sum_{i=1}^{n} z_i = 1$ ilave edilir.

Burada $z_i, i = 1, \dots, n$ karar değişkenleri,

$f(d_i)$ ise *i*'nci kesme noktasının fonksiyon değeridir.

Örnekte verilen fonksiyon için DP formülasyonu aşağıda verilmiştir.

$$f(x) = 0z_1 + 2z_2 + 8z_3 + 16z_4 + 40z_5$$

$$x = 0z_1 + 2z_2 + 5z_3 + 7z_4 + 10z_5$$

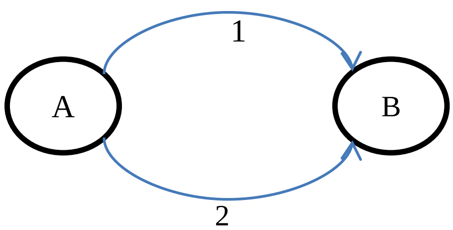
$$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5 = 1$$

3.3.2 Doğrusal Olmayan Konveks Fonksiyonların Dönüşümü

Doğrusal olmayan konveks amaç fonksiyonları parçalı doğrusal konveks fonksiyona dönüştürülerek DP ile yaklaşık olarak modellenebilir. Bunun için öncelikle doğrusal olmayan fonksiyon *n*-1 parçaya bölünür ve parçalar arası doğrusal kabul edilerek parçalı fonksiyona dönüştürülür. Elde edilen parçalı fonksiyon yukarda verilen yöntemlerden biri ile DP olarak modellenir.

3.3.3 Petrol Taşıma Örneği

A noktasında bulunan 10.000 varil petrol 1 ve 2 boru hatlarından B noktasına taşınacaktır. Taşıma süresi taşınan petrol miktarına bağlıdır. Birinci borudan taşınan petrol miktarı x_1 bin varil, İkinci borudan taşınan petrol miktarı x_2 bin varil iken birinci borudan taşıma süresi x_1^2 saat; ikinci borudan taşıma süresi ise $x_2^{1,5}$ saat olarak hesaplanabilir. İki borudan aynı anda petrol gönderilmesi durumunda taşıma süresini en küçükleyecek DP modelini kurunuz.



Yanıt

Öncelikle taşıma süresi fonksiyonları parçalı fonksiyona dönüştürülür, x_1 ve x_2, 0 ile 10 arasında değer alacakları için 0-10 aralığı 4 eşit parçaya bölünerek fonksiyonlar parçalanabilir. Aşağıdaki tabloda *x*'lere karşılık gelen fonksiyon değerleri verilmiştir.

x	$f(x_1)= \boldsymbol{x_1^2}$	$f(x_2)= \boldsymbol{x_2^{1,5}}$
0,0	0,000	0,000
2,5	6,250	3,953
5,0	25,000	11,180
7,5	56,250	20,540
10,0	100,000	31,623

Bu durumda sorunun DP formülasyonu:

<u>Karar değişkenleri</u>

x_i : *i*. borudan taşınan petrol miktarı (*1000 varil),

f_i : *i*. boruda taşıma süresi (saat),

λ : en uzun taşıma süresi (saat)

z_{ij} : parçalı fonksiyonlar için yardımcı değişkenler, i =1,2, j=1,…,5.

<u>Amaç fonksiyonu</u>

Min λ

<u>Kısıtlar</u>

En uzun taşıma süresi borulardan taşıma sürelerinden daha az olmamalı

$\lambda \geq f_1$

$\lambda \geq f_2$

Birinci boru için parçalı fonksiyonun ifade edilmesi (Yöntem 2)

$x_1 = 0z_{11} + 2{,}5\ z_{12} + 5\ z_{13} + 7{,}5\ z_{14} + 10\ z_{15}$

$f_1 = 0z_{11} + 6{,}25\ z_{12} + 25\ z_{13} + 56{,}25\ z_{14} + 100\ z_{15}$

$z_{11} + z_{12} + z_{13} + z_{14} + z_{15} = 1$

İkinci boru için parçalı fonksiyonun ifade edilmesi

$x_2 = 0z_{21} + 2{,}5\ z_{22} + 5\ z_{23} + 7{,}5\ z_{24} + 10\ z_{25}$

$f_2 = 0z_{21} + 3{,}953\ z_{22} + 11{,}18\ z_{23} + 20{,}54\ z_{24} + 31{,}623\ z_{25}$

$z_{21} + z_{22} + z_{23} + z_{24} + z_{25}= 1$

Toplam taşınacak miktar 10.000 varil olmalı

$x_1 + x_2 = 10$

<u>İşaret sınırlamaları</u>

tüm değişkenler $\geq$ 0.

Rapor

Verilen DP çözüldüğünde $\lambda = f_1 = f_2 = 15{,}781$; $x_1 = 3{,}771$; $x_2 = 6{,}229$; olarak bulunmuştur. Çözümde elde edilen x_1 ve x_2 değerlerine göre f_1 ve f_2 'nin gerçek değerleri (doğrusal olmayan x_1^2 ve $x_2^{1,5}$ fonksiyonlarına göre) 14,220 ve 15,546'dır.

Aynı problemin doğrusal olmayan programlama ile çözümü $f_1 = f_2 = 15{,}112$; $x_1 = 3{,}887$; $x_2 = 6{,}113$ olarak elde edilir. Görüldüğü gibi doğrusal olmayan fonksiyonların parçalı fonksiyona dönüştürülmesi ile elde edilen DP sonucu ile doğrusal olmayan programlama çözümü birbirine çok yakındır. DP'nin çözümü doğrusal olmayan programlamaya göre daha kolay olduğu için bu şeklide bir modelleme daha etkin olabilir. Probleme DP ile daha kesin bir çözüm bulabilmek için doğrusal olmayan fonksiyonlar başta daha fazla parçaya bölünebilir.

4. DP'NİN ÇÖZÜMÜ

4.1 DP ÇÖZÜMLERİ: DÖRT DURUM

Bir DP çözüldüğü zaman aşağıdaki dört durumdan biri ile karşılaşılır:

1. DP'nin **bir tek en iyi çözüm**ü vardır.
2. DP'nin **alternatif (çok sayıda) en iyi çözüm**leri vardır. Birden fazla (aslında sonsuz sayıda) en iyi çözüm bulunur.
3. DP **olurlu değildir** (infeasible). Hiç olurlu çözümü yoktur (Olurlu bölgede nokta yoktur).
4. DP **sınırlı değildir** (unbounded). Olurlu bölgedeki noktalar sonsuz büyüklükte amaç fonksiyon değeri vermektedir.

4.2 GRAFİK ÇÖZÜM

Sadece iki değişkenli herhangi bir DP'nin çözümü grafiksel olarak bulunabilir

Örnek 1. Giapetto

(*Winston 3.1, s. 49*)

Giapetto DP'nin sadece iki karar değişkeni olduğundan grafik üzerinde çözüme gidilebilir

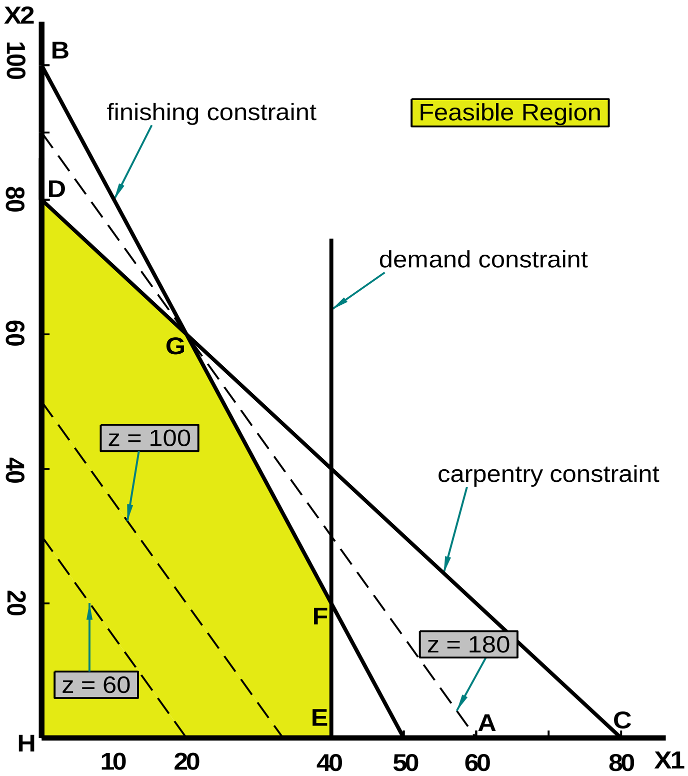
Yanıt

The feasible region is the set of all points satisfying the constraints.

maks $z = 3x_1 + 2x_2$

öyle ki	$2x_1 + x_2 \leq 100$	(Cilalama kısıdı)
	$x_1 + x_2 \leq 80$	(Marangozluk kısıdı)
	$x_1 \leq 40$	(Talep kısıdı)
	$x_1, x_2 \geq 0$	(İşaret sınırlamaları)

Aşağıdaki kısıtları sağlayan noktalar kümesi olurlu bölgedir. DP'yi sağlayan noktalar kümesi DGFEH beşgeni ile sınırlandırılmıştır. Bu beşgen (boyalı bölge) **üzerinde**ki veya **içinde**ki herhangi bir nokta **olurlu bölge**dedir.



DP için olurlu bölgeyi belirledikten sonra en iyi çözüm için araştırma yapılabilir. **En iyi çözüm**, olurlu bölgede *en fazla z* değerini veren noktadır (enbüyükleme sorunu).

En iyi çözümü bulmak için, z değerleri aynı olan bir doğru çizilir. Enbüyükleme sorunu için bu çizgi **eş kar** (isoprofit) doğrusu; enküçükleme sorunu içinse **eş maliyet** (isocost) doğrusu olarak isimlendirilir (*Şekilde z = 60, z = 100 ve z = 180 için eş kar doğruları görülmektedir*).

Bir tek en iyi çözüm varsa, eş kar doğrusu olurlu bölgeyi terk ederken bir köşe (vertex - corner) ile kesişir.

Bu DP için en iyi çözüm z = 180 için G noktası (x_1, x_2) = (20,60) şeklindedir.

Karar değişkenlerinin en iyi çözüm değerleri kullanıldığında bir kısıdın sol taraf değeri ile sağ taraf değeri eşitse o kısıt ***aktif*** (sıkı; binding, tight) bir kısıttır.

Karar değişkenlerinin en iyi çözüm değerleri kullanıldığında bir kısıdın sol taraf değeri ile sağ taraf değeri eşit değilse o kısıt ***aktif olmayan*** (nonbinding) bir kısıttır.

Giapetto DP'de cilalama işçiliği ve marangozluk kısıtları aktiftir. Öte yandan talep kısıdı aktif olmayan bir kısıttır çünkü en iyi çözümde $x_1 < 40$ ($x_1 = 20$).

Örnek 2. Reklam

(*Winston 3.2, s. 61*)

Reklam DP'nin sadece iki karar değişkeni olduğundan grafik üzerinde çözüme gidilebilir

Yanıt

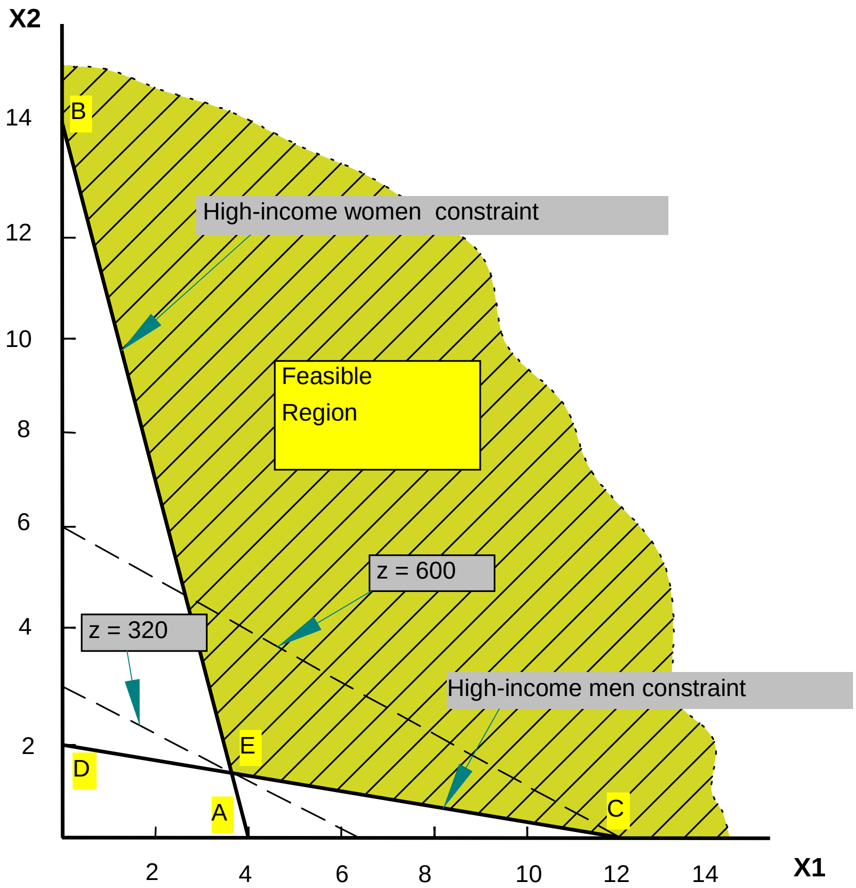
Aşağıdaki kısıtları sağlayan noktalar kümesi olurlu bölgedir.

min $z = 50x_1 + 100x_2$

öyle ki $7x_1 + 2x_2 \geq 28$ (yüksek gelirli kadın)

$2x_1 + 12x_2 \geq 24$ (yüksek gelirli erkek)

$x_1, x_2 \geq 0$



Dorian toplam reklam maliyetini enküçüklemek istediği için sorunun en iyi çözümü olurlu bölgede *en az z* değerini veren noktadır.

En az *z* değerli eş maliyet doğrusu E noktasından geçmektedir; bu yüzden en iyi çözüm $x_1 = 3.6$, $x_2 = 1.4$ ve $z = 320$ şeklindedir.

Hem yüksek gelirli kadın hem de yüksek gelirli erkek kısıtları sağlandığı için her ikisi de aktif kısıtlardır.

Örnek 3. İki Maden

min $180x + 160y$

öyle ki $6x + y >= 12$

$3x + y >= 8$

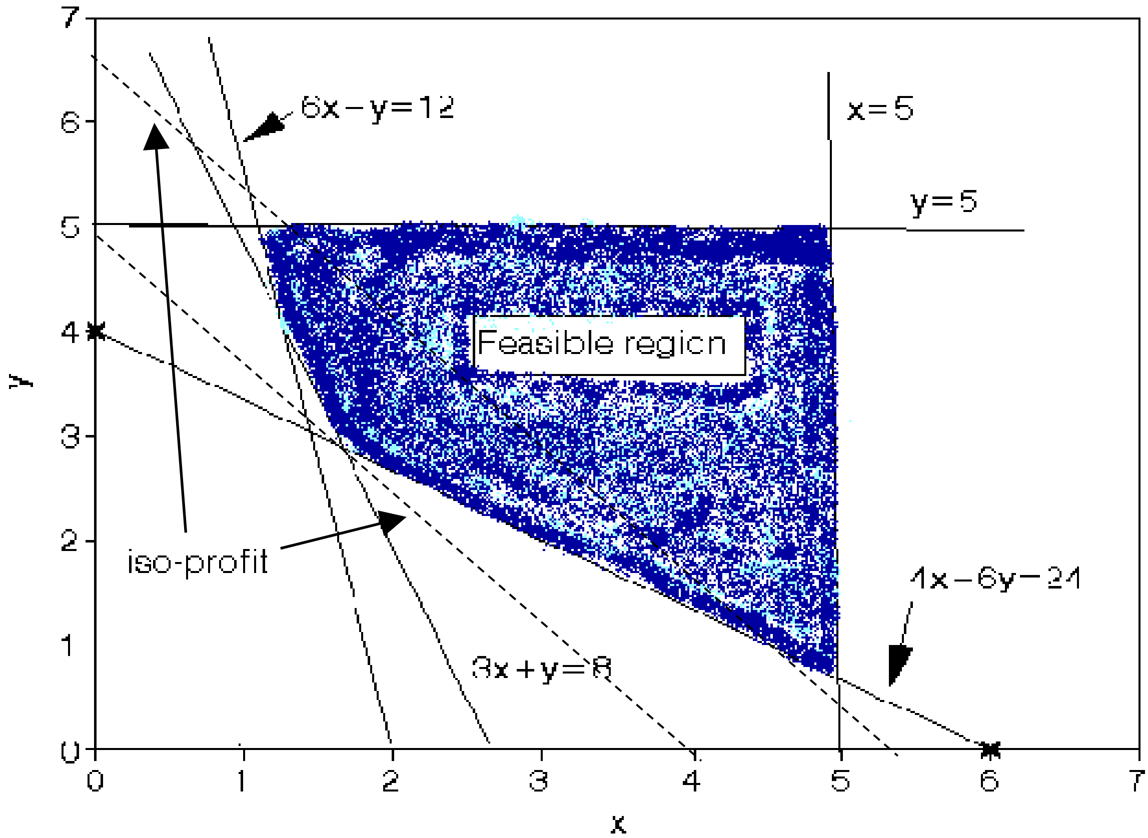
$4x + 6y >= 24$

$x <= 5$

$y <= 5$

$x,y >= 0$

Yanıt



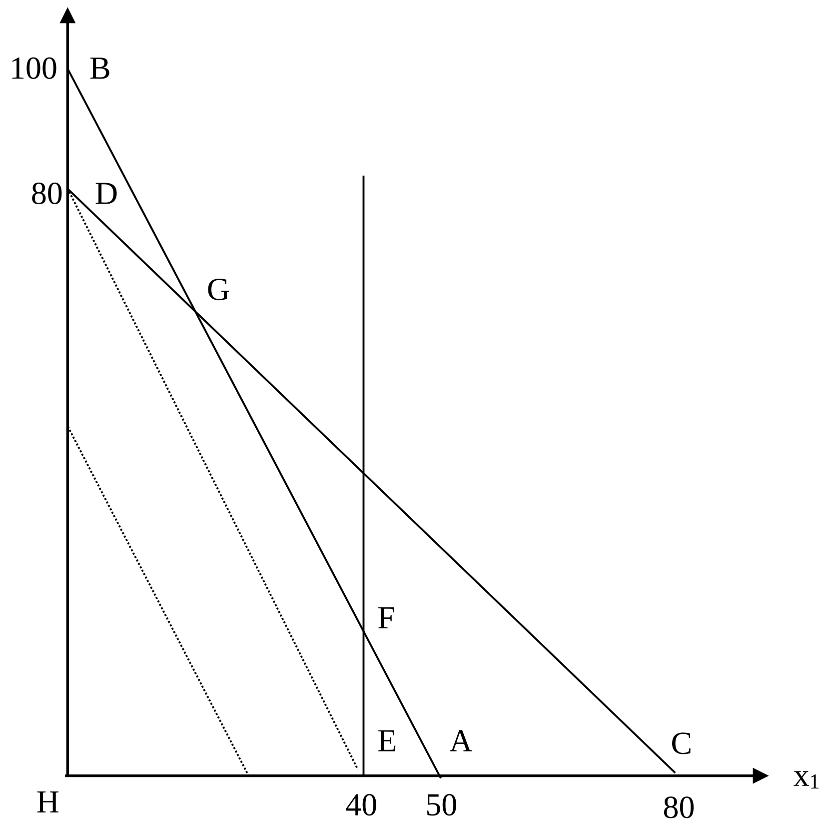
En iyi çözüm için maliyet 765.71'dir. 1.71 gün X madeni ve 2.86 gün Y madeni çalıştırılmalıdır.

Örnek 4. Değiştirilmiş Giapetto

maks $z = 4x_1 + 2x_2$

Öyle ki;	$2x_1 + x_2 \leq 100$	(Cilalama kısıt)
	$x_1 + x_2 \leq 80$	(Marangozluk kısıtı)
	$x_1 \leq 40$	(Talep kısıtı)
	$x_1, x_2 \geq 0$	(İşaret sınırlamaları)

Yanıt



G (20, 60) ve F (40, 20) noktaları arasındaki doğru üzerindeki noktalar **alternatif en iyi çözümler**i verir.

$0 \leq c \leq 1$ için

c [20 60] + (1-c) [40 20] = **[40-20*c*, 20+40*c*]**

en iyi çözümdür.

Tüm en iyi çözümler için en iyi amaç fonksiyon değeri 200'dür.

Örnek 5. Değiştirilmiş Giapetto (v. 2)

$x_2 \geq 90$ (Tren talebi) kısıdını ekleyelim.

Yanıt

Olurlu bölge yoktur: **Olurlu olmayan DP**

Örnek 6. Değiştirilmiş Giapetto (v. 3)

Sadece $x_2 \geq 90$ kısıdı olsun.

Yanıt

Eş kar doğrusu olurlu bölgeyi terk edemez: **Sınırlı olmayan DP**

4.3 SİMPLEKS ALGORİTMASI

Tüm DP sorunlarının (ikiden fazla sayıda karar değişkeni olanların da) en iyi çözümü olurlu bölgenin bir köşesindedir. Simpleks algoritması bu gerçeği kullanarak çözüme gider.

Başlangıçta olurlu bölgenin bir köşesi ile işleme başlanır ve eğer söz konusu köşe en iyi çözümü vermezse yeni bir adım (iterasyon) işletilerek amaç fonksiyonunu iyileştiren (veya aynı bırakan) başka bir komşu köşeye geçilir. Bu adımlar en iyi DP çözümü bulununcaya kadar sürer.

DP'leri çözmek için kullanılan simpleks algoritması Dantzig tarafından 1940'lı yılların sonunda geliştirilmiştir. Daha sonra algoritma geliştirilip yeni versiyonları geliştirilmiştir. Bunlardan biri olan "revised simpleks algoritması" DP çözümü için kullanılan bilgisayar paketlerinde kullanılmaktadır.

Adımlar

1. DP'yi standart biçime çeviriniz
2. Bir temel olurlu çözüm (basic feasible solution - bfs) bulunuz
3. Mevcut bfs'nin en iyi çözüm olup olmadığını araştırınız. En iyi ise sorun çözülmüştür, durunuz.
4. Mevcut bfs en iyi çözüm değilse, amaç fonksiyon değerini en çok iyileştirmek için hangi temel dışı değişkenin temel değişken olacağını (çözüme gireceğini) ve hangi temel değişkenin çözümden çıkıp temel dışı değişken olacağını saptayarak yeni bir bfs bulunuz.
5. Adım 3'e dönünüz.

İlgili kavramlar:

- Standart biçim: tüm kısıtlar eşitliktir ve tüm değişkenler negatif olmayan değerler alır
- bfs: tüm değişkenlerin negatif olmayan değerler aldığı bir olurlu çözüm
- Temel dışı değişken: bfs'de değerleri 0'a eşit olan değişkenler
- Temel değişken: bfs'deki diğer değişkenler, standart biçimdeki eşitliklerin çözülmesi ile 0'dan büyük değerler alırlar

Örnek 1. Dakota Mobilya

(Winston 4.3, s. 134)

Dakota mobilya şirketi sıra, masa ve sandalye yapmaktadır. Her ürün için, aşağıdaki tabloda görüldüğü gibi, sınırlı miktarda kullanılabilen tahta, marangozluk ve cilalama işçiliği gerekmektedir. Aynı tabloda ürünlerin satış fiyatları da verilmiştir. Haftada en fazla 5 masa satılabilmektedir. Haftalık karı enbüyükleyecek bir üretim planı oluşturunuz.

Kaynak	Sıra	Masa	Sandalye	Kullanılabilen.
Tahta (m^2)	8	6	1	48
Cilalama	4	2	1.5	20
Marangozluk	2	1.5	.5	8
Talep (maks)	-	5	-	
Fiyat ($)	60	30	20	

DP Modeli:

x_1, x_2, x_3 bir haftada üretilen sıra, masa ve sandalye sayısı olsun. z ise Dakota'nın haftalık kar miktarını göstersin. Aşağıdaki DP'yi formüle edebiliriz

$$\text{maks } z = 60x_1+30x_2+20x_3$$

$$\begin{array}{lrl}
\text{öyle ki} & 8x_1+\ 6x_2+\ \ \ x_3 & \le 48 \\
 & 4x_1+\ 2x_2+1.5x_3 & \le 20 \\
 & 2x_1+1.5x_2+\ .5x_3 & \le\ \ 8 \\
 & x_2\qquad\quad & \le\ \ 5 \\
 & x_1,x_2,x_3 \ge 0 &
\end{array}$$

Simpleks algoritması ile çözüm

<u>Öncelikle gevşek (slack) değişkenler kullanarak DP modelini standart biçime getiriniz ve modeli kanonik bir şekilde yazınız.</u>

$$\begin{array}{llllllllll}
R_0 & z & -60x_1 & -30x_2 & -20x_3 & & & & & = 0 \\
R_1 & & 8x_1 & +\ 6x_2 & +\ \ x_3 & +s_1 & & & & = 48 \\
R_2 & & 4x_1 & +\ 2x_2 & +1.5x_3 & & +s_2 & & & = 20 \\
R_3 & & 2x_1 & +1.5x_2 & +\ .5x_3 & & & +s_3 & & = 8 \\
R_4 & & & x_2 & & & & & +s_4 & = 5
\end{array}$$

$$x_1,x_2,x_3,s_1,s_2,s_3,s_4 \ge 0$$

<u>Bir başlangıç temel olurlu çözümü bulunuz</u>

Sorun için $(x_1,\ x_2,\ x_3) = 0$ çözümü olurlu olduğundan, aşağıda verilen nokta bir başlangıç temel olurlu çözümdür (basic feasible solution – bfs):

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0,\ s_1 = 48,\ s_2 = 20,\ s_3 = 8,\ s_4 = 5.$$

Bu bfs'de üç karar değişkeni ***temel dışı değişken*** (non-basic variables) ve dört gevşek değişken ise ***temel değişkendir*** (basic variables) ve değerleri kanonik modeldeki eşitliklerden bulunur.

Mevcut bfs'nin en iyi çözüm olup olmadığını kontrol ediniz

Temel dışı herhangi bir değişkenin değerinin çoğaltılması (temele girmesi) ile z'nin değerinin iyileşmesinin mümkün olup olmadığı araştırılır.

Eğer tüm temel dışı değişkenlerin amaç fonksiyon satırındaki (***0. satır; row 0 – R_0***) katsayıları 0 ya da 0'dan büyükse (nonnegative), mevcut bfs en iyi (optimal) çözümdür (z'nin değeri daha çok iyileştirilemez).

Fakat örnekte tüm temel dışı değişkenlerin 0. satırdaki katsayıları negatiftir: Çözüm en iyi değildir.

Yeni bfs'nin bulunması

- Enbüyüklenmek istenen z en çok x_1 sıfırdan farklı yapıldığı zaman çoğalır: x_1 ***giren değişken***dir
- R_1 incelendiğinde x_1'in en fazla 6 olabileceği görülür. Aksi takdirde $s_1 < 0$ olacaktır. Benzer şekilde R2 ve R3 sırasıyla 5 ve 4 sınırlarını verir. Son satırda x_1 olmadığından herhangi bir sınırlama söz konusu değildir. Bu durumda tüm sınırlamaların (aslında sağ taraf değerlerinin giren değişken katsayılarına "oran"larının – ***oran testi***) en küçüğü olan 4, x_1'in alabileceği en büyük değerdir. $x_1 = 4$ olduğunda $s_3 = 0$ olup çözümden çıkar ve ***çıkan değişken*** olarak isimlendirilir.
- R_3 de ***pivot denklem*** olur. x_1 temel değişken olduğu için birim matrise girecek şekilde sistem yeniden düzenlenir.

Yeni *pivot denklem* (R_3/2):

$$R_3' : x_1 + .75x_2 + .25x_3 + \quad .5s_3 \quad = 4$$

R_3' kullanılarak x_1 tüm diğer satırlarda yok edilir.

$$R_0' = R_0 + 60R_3', \quad R_1' = R_1 - 8R_3', \quad R_2' = R_2 - 4R_3', \quad R_4' = R_4$$

R_0'	z		$+15x_2$	$-5x_3$			$+30s_3$		$= 240$	$z = 240$
R_1'				$-x_3$	$+s_1$		$-4s_3$		$= 16$	$s_1 = 16$
R_2'			$-x_2$	$+.5x_3$		$+s_2$	$-2s_3$		$= 4$	$s_2 = 4$
R_3'		x_1	$+.75x_2$	$+.25x_3$			$+.5s_3$		$= 4$	$x_1 = 4$
R_4'			x_2					$+s_4$	$= 5$	$s_4 = 5$

Yeni bfs x_2=x_3=s_3=0, x_1=4, s_1=16, s_2=4, s_4=5 şeklindedir ve z=240 olur

<u>Mevcut bfs'in optimalliğini kontrol ediniz ve en iyi çözümü bulunana kadar adımları tekrar ediniz</u>

- x_3 girer.
- Oran testi sonucu $x_3 = 8$ bulunur; s_2 çıkar: İkinci satır pivot denklem olur.
- Pivot denklemde (R_2') giren değişkenin katsayısı 1 yapılır:

  R_2'' $-2x_2+x_3+2s_2-4s_3 = 8$ ($R_2' \times 2$).

R_2'' satır işlemleri ile diğer satırlarda giren değişken yok edilir:

$R_0'' = R_0' + 5R_2''$, $R_1'' = R_1' + R_2''$, $R_3'' = R_3' - .5R_2''$, $R_4'' = R_4'$

Yeni bfs: $x_2=s_2=s_3=0$, $x_1=2$, $x_3=8$, $s_1=24$, $s_4=5$; $z = 280$.

Sıfırıncı satırdaki tüm temel dışı değişkenlerin katsayısı pozitiftir ($5x_2$, $10s_2$, $10s_3$).

MEVCUT ÇÖZÜM EN İYİ ÇÖZÜMDÜR (OPTIMAL SONUÇ)

Rapor: Dakota mobilya şirketi haftalık karını enbüyüklemek için 2 sıra ve 8 sandalye üretmelidir. Bu durumda 280$ kar eder.

Simpleks algoritması tablolarla gösterilirse

(***<u>Siz de tüm ödev ve sınavlarda her işlem için tablo kullanın!!!</u>***)

maks $z = 60x_1+30x_2+20x_3$

$$\begin{aligned} \text{öyle ki} \quad 8x_1+\ 6x_2+\quad x_3 &\le 48 \\ 4x_1+\ 2x_2+1.5x_3 &\le 20 \\ 2x_1+1.5x_2+.5x_3 &\le 8 \\ x_2 &\le 5 \\ x_1,x_2,x_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

<u>Başlangıç tablosu:</u>

z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4	ST	TD	Oran
1	-60	-30	-20	0	0	0	0	0	z = 0	
0	8	6	1	1	0	0	0	48	$s_1 = 48$	6
0	4	2	1.5	0	1	0	0	20	$s_2 = 20$	5
0	2	1.5	0.5	0	0	1	0	8	$s_3 = 8$	4
0	0	1	0	0	0	0	1	5	$s_4 = 5$	-

İlk tablo:

z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4	ST	TD	Oran
1	0	15	-5	0	0	30	0	240	z = 240	
0	0	0	-1	1	0	-4	0	16	s_1 = 16	-
0	0	-1	0.5	0	1	-2	0	4	s_2 = 4	8
0	1	0.75	0.25	0	0	0.5	0	4	x_1 = 4	16
0	0	1	0	0	0	0	1	5	s_4 = 5	-

İkinci ve en iyi tablo:

z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4	ST	TD	Oran
1	0	5	0	0	10	10	0	280	z = 280	
0	0	-2	0	1	2	-8	0	24	s_1 = 24	
0	0	-2	1	0	2	-4	0	8	x_3 = 8	
0	1	1.25	0	0	-0.5	1.5	0	2	x_1 = 2	
0	0	1	0	0	0	0	1	5	s_4 = 5	

Örnek 2. Değiştirilmiş Dakota Mobilya

Dakota örneğini \$35/masa olarak değiştirelim

Yeni $z = 60\,x_1 + 35\,x_2 + 20\,x_3$

Yeni sorun için ikinci ve en iyi (optimal) tablo:

z	x_1	⇓ x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4	ST	TD	Oran	
1	0	**0**	0	0	10	10	0	280	z=280		
0	0	-2	0	1	2	-8	0	24	s_1=24	-	
0	0	-2	1	0	2	-4	0	8	x_3=8	-	
0	1	1.25	0	0	-0.5	1.5	0	2	x_1=2	2/1.25	⇒
0	0	1	0	0	0	0	1	5	s_4=5	5/1	

Bir diğer en iyi tablo:

z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4	ST	TD
1	0	0	0	0	10	10	0	280	z=280
0	1.6	0	0	1	1.2	-5.6	0	27.2	s_1=27.2
0	1.6	0	1	0	1.2	-1.6	0	11.2	x_3=11.2
0	0.8	1	0	0	-0.4	1.2	0	1.6	x_2=1.6
0	-0.8	0	0	0	0.4	-1.2	1	3.4	s_4=3.4

Bu yüzden en iyi çözüm aşağıdaki gibidir:

$\boldsymbol{z = 280}$ **ve** $\boldsymbol{0 \leq c \leq 1}$ için

$$\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} 2 \\ 0 \\ 8 \end{vmatrix} + (1 - c) \begin{vmatrix} 0 \\ 1.6 \\ 11.2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{2c} \\ \mathbf{1.6 - 1.6c} \\ \mathbf{11.2 - 3.2c} \end{vmatrix}$$

Örnek 3. Sınırlı Olmayan DP'ler

z	x_1	x_2	x_3 ⇓	x_4	s_1	s_2	ST	TD	Oran
1	0	2	**-9**	0	12	4	100	z=100	
0	0	1	-6	1	6	-1	20	x_4=20	Yok
0	1	1	-1	0	1	0	5	x_1=5	Yok

Oran testi yapılamadığı için çözülmek istenen DP sınırlı olmayan DP'dir.

4.4 BÜYÜK M YÖNTEMİ

Eğer bir DP'de $\geq$ veya = kısıtlar varsa, Simpleks yöntemi kullanılarak bir başlangıç temel olurlu çözümü (bfs) oluşturulamaz.

Bu durumda Büyük M (Big M) yöntemi veya İki Aşamalı (Two Phase) Simpleks yöntemi kullanılmalıdır.

Büyük M yöntemi Simpleks Algoritmasının bir türüdür: Soruna yapay (artificial) değişkenler de eklenerek bir bfs bulunur. DP'nin amaç fonksiyonu da sonuçta yapay değişkenlerin katsayıları 0 olacak şekilde yeniden düzenlenir.

Adımlar

1. Öncelikle tüm kısıtlar sağ taraf (ST; Right Hand Side - RHS) değerleri negatif olmayacak şekilde düzenlenir (ST değeri negatif olan kısıtlar -1 ile çarpılır. Bu çarpım sonucu eşitsizliğin yönünün değişeceğini unutmayınız!). Düzenlemelerden sonra her kısıt $\leq$, $\geq$ veya = kısıt olarak sınıflandırılır
2. Tüm kısıtlar standart biçime çevrilir. Eğer kısıt $\leq$ kısıtsa, sol tarafa simpleks yönteminde olduğu gibi gevşek değişken s_i eklenir. Eğer kısıt $\geq$ kısıtsa, sol taraftan bir fazlalık (excess) değişken e_i çıkarılır.
3. Tüm $\geq$ veya = kısıtların sol tarafına bir yapay değişken a_i eklenir. Aynı zamanda yapay değişkenler için işaret sınırlaması ($a_i \geq 0$) da eklenir.
4. *M* çok büyük bir sayı olsun. Eğer DP enküçükleme sorunu ise, amaç fonksiyonuna (her yapay değişken için) Ma_i eklenir. Eğer DP enbüyükleme sorunu ise, amaç fonksiyonuna (her yapay değişken için) $-Ma_i$ eklenir.
5. Her yapay değişken başlangıç temel çözümünde olacağı için amaç fonksiyonundan (0. satır) elenmelidir (katsayıları sıfır olacak şekilde düzenleme yapılmalıdır). Daha sonra simpleks algoritmasının adımları kullanılarak (*M*'nin büyük bir sayı olduğu unutulmadan!) çözüme gidilir.

Yukarıdaki 5 adımla düzenlenen yeni DP'nin en iyi çözümünde tüm yapay değişkenler 0'a eşit çıkarsa, esas sorunun **en iyi çözüm**ü bulunmuştur.

Eğer yeni DP'nin en iyi çözümünde en az bir yapay değişken pozitif bir değer alırsa, esas sorun **çözümsüzdür** (infeasible)!!!

Örnek 1. Oranj Meyve Suyu

(Winston 4.10., s. 164)

Bevco şirketi, portakal gazozu ile portakal suyunu karıştırarak Oranj ismiyle portakallı meyve suları üretmektedir. Portakal gazozunun bir onsunda 0.5 oz. şeker ve 1 mg C vitamini vardır. Portakal suyunun bir onsunda ise 0.25 oz. şeker ve 3 mg C vitamini vardır. Bevco bir oz. portakal gazozu üretmek için 2¢, bir oz. portakal suyu üretmek için ise 3¢ harcamaktadır. Şirketin pazarlama bölümü Oranj'ı 10 oz.luk şişelerde satmak istemektedir. Bevco'nun her bir şişede en az 20 mg C vitamini bulunmasını ve en çok 4 oz. şeker olması şartını en az maliyetle karşılamasını sağlayınız.

DP Modeli:

x_1 ve x_2 bir şişe Oranj'da bulunması gereken portakal gazozu ve portakal suyu miktarı olsun. DP modeli aşağıdaki gibi kurulur.

$$\min z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\begin{aligned} 0.5x_1 + 0.25x_2 &\le 4 && \text{(şeker kısıdı)} \\ x_1 + 3x_2 &\ge 20 && \text{(C vit. kısıdı)} \\ x_1 + x_2 &= 10 && \text{(10 oz'luk şişe kısıdı)} \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

Büyük M yöntemi ile çözüm:

<u>Adım 1. Tüm kısıtları ST değerleri negatif olmayacak şekilde düzenleyiniz</u>

Tüm kısıtların ST değeri pozitiftir

<u>Adım 2. Tüm kısıtları standart biçime çeviriniz</u>

$$\begin{aligned} z - 2x_1 - 3x_2 &= 0 \\ 0.5x_1 + 0.25x_2 + s_1 &= 4 \\ x_1 + 3x_2 - e_2 &= 20 \\ x_1 + x_2 &= 10 \end{aligned}$$

tüm değişkenler ≥ 0

Adım 3. > veya = kısıtlara a_i yapay değişkenini ekleyiniz

$$z - 2x_1 - 3x_2 = 0 \qquad R_0$$
$$0.5x_1 + 0.25x_2 + s_1 = 4 \qquad R_1$$
$$x_1 + 3x_2 - e_2 + a_2 = 20 \qquad R_2$$
$$x_1 + x_2 + a_3 = 10 \qquad R_3$$

tüm değişkenler ≥ 0

Adım 4. Amaç fonksiyonuna Ma_i ekleyiniz (min. sorunu için)

$$\min z = 2x_1 + 3x_2 + M a_2 + M a_3$$

Sıfırıncı satır (R0) aşağıdaki gibi olacaktır:

$$z - 2x_1 - 3x_2 - M a_2 - M a_3 = 0$$

Adım 5. Yapay değişkenleri R_0'dan eleyecek şekilde yeni R_0 oluşturunuz

$$\text{Yeni } R_0 = R_0 + M R_2 + M R_3 \Rightarrow$$

$$z + (2M-2)x_1 + (4M-3)x_2 - M e_2 = 30M \qquad \text{Yeni } R_0$$

Başlangıç tablosu:

z	x_1	x_2 ⇓	s_1	e_2	a_2	a_3	ST	TD	Oran
1	2M-2	**4M-3**	0	-M	0	0	30M	z=30M	
0	0.5	0.25	1	0	0	0	4	s_1=4	16
0	1	$\boxed{3}$	0	-1	1	0	20	a_2=20	**20/3** ⇒
0	1	1	0	0	0	1	10	a_3=10	10

Enk. sorununda, 0. satır katsayısı "en pozitif" olan değişken giren değişkendir!

İlk tablo:

z	x_1 ⇓	x_2	s_1	e_2	a_2	a_3	ST	TD	Oran
1	**(2M-3)/3**	0	0	(M-3)/3	(3-4M)/3	0	20+3.3M	z	
0	5/12	0	1	1/12	-1/12	0	7/3	s_1	28/5
0	1/3	1	0	-1/3	1/3	0	20/3	x_2	20
0	$\boxed{2/3}$	0	0	1/3	-1/3	1	10/3	a_3	**5** ⇒

En iyi tablo:

z	x_1	x_2	s_1	e_2	a_2	a_3	ST	TD
1	0	0	0	-1/2	(1-2M)/2	(3-2M)/2	25	z=25
0	0	0	1	-1/8	1/8	-5/8	1/4	s_1=1/4
0	0	1	0	-1/2	1/2	-1/2	5	x_2=5
0	1	0	0	1/2	-1/2	3/2	5	x_1=5

Rapor:

Bir şişe Oranj'da, 5 oz. portakal gazozu ve 5 oz. portakal suyu olmalıdır.

Bu durumda toplam maliyet 25¢ olacaktır.

Örnek 2. Değiştirilmiş Oranj Meyve Suyu

Bevco sorununda diğer koşullar aynı kalmak kaydıyla 36 mg. C vitamini gerektiği göz önüne alınırsa ilgili DP modeli aşağıdaki gibi oluşturulur.

x_1 ve x_2 bir şişe Oranj'da bulunması gereken portakal gazozu ve portakal suyu miktarı olmak üzere;

$$\min z = 2x_1 + 3x_2$$
$$0.5x_1 + 0.25x_2 \leq 4 \quad \text{(şeker kısıdı)}$$
$$x_1 + 3x_2 \geq 36 \quad \text{(C vit. kısıdı)}$$
$$x_1 + x_2 = 10 \quad \text{(10 oz'luk şişe kısıdı)}$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Büyük M yöntemi ile çözüm:

Başlangıç tablosu:

z	x_1	x_2 ⇓	s_1	e_2	a_2	a_3	ST	TD	Oran
1	2M-2	**4M-3**	0	-M	0	0	46M	z=46M	
0	0.5	0.25	1	0	0	0	4	s_1=4	16
0	1	3	0	-1	1	0	36	a_2=36	36/3
0	1	$\boxed{\mathbf{1}}$	0	0	0	1	10	a_3=10	**10** ⇒

En iyi tablo:

z	x_1	x_2	s_1	e_2	a_2	a_3	ST	TD
1	1-2M	0	0	-M	0	3-4M	30+6M	z=30+6M
0	1/4	0	1	0	0	-1/4	3/2	s_1=3/2
0	-2	0	0	-1	1	-3	6	a_2=6
0	1	1	0	0	0	1	10	x_2=10

Bir yapay değişken (a_2) temel değişken olduğu için orijinal DP olurlu değildir.

Rapor:

Belirtilen şartlarda Oranj üretimi yapmak mümkün değildir.

4.5 İKİ AŞAMALI SİMPLEKS

Temel olurlu çözümün (bfs) hazır olmadığı durumlarda iki aşamalı simpleks yöntemi büyük M yöntemine alternatif olarak kullanılabilir. İlgili kısıtlara büyük M yöntemine benzer şekilde yapay değişkenler eklenir. Daha sonra Aşama I DP çözülerek orijinal DP'ye bir bfs bulunur. Aşama I DP'de amaç fonksiyonu yapay değişkenlerin toplamının en küçüklenmesidir. Aşama I sonucunda, orijinal DP'nin amaç fonksiyonu eklenerek DP'nin en iyi çözümü belirlenir.

Adımlar

1. Öncelikle tüm kısıtlar sağ taraf (ST; Right Hand Side - RHS) değerleri negatif olmayacak şekilde düzenlenir (ST değeri negatif olan kısıtlar -1 ile çarpılır. Bu

çarpım sonucu eşitsizliğin yönünün değişeceğini unutmayınız!). Düzenlemelerden sonra her kısıt $\leq$, $\geq$ veya = kısıt olarak sınıflandırılır

2. Tüm kısıtlar standart biçime çevrilir. Eğer kısıt $\leq$ kısıtsa, sol tarafa simpleks yönteminde olduğu gibi gevşek değişken s_i eklenir. Eğer kısıt $\geq$ kısıtsa, sol taraftan bir fazlalık (excess) değişken e_i çıkarılır.
3. Tüm $\geq$ veya = kısıtların sol tarafına bir yapay değişken a_i eklenir. Aynı zamanda yapay değişkenler için işaret sınırlaması ($a_i \geq 0$) da eklenir.
4. Aşama I'de orijinal amaç fonksiyonu, tüm yapay değişkenlerin toplamını ($w = \Sigma a_i$) en küçükleyecek bir amaç fonksiyonu ile değiştirilerek orijinal DP çözülür. Böylece Aşama I DP'nin çözümü yapay değişkenleri 0 olmaya zorlayacaktır.
5. Her yapay değişken başlangıç temel çözümünde olacağı için simplekse başlamadan önce bu değişkenler 0. satırdan elenmelidir. Daha sonra simpleks ile değiştirilmiş sorun çözülür.

Aşama I DP çözümünde üç farklı durum ile karşılaşılabilir:

I. Durum 1. w > 0 ise orijinal DP'nin çözümü olurlu değildir. (Aşama II'ye geçilmez!)

II. Durum 2. w = 0 ve hiçbir yapay değişken temel değişken değil ise;

   i. Aşama I DP'nin en iyi tablosunda yer alan amaç fonksiyonu satırı ve yapay değişkenler ile ilgili sütunlar atılır.

   ii. Orijinal amaç fonksiyonu ile Aşama I DP'den gelen tablo birleştirilerek Aşama II DP oluşturulur. Eğer Aşama I DP'nin en iyi tablosundaki bazı temel değişkenlerin orijinal amaç fonksiyonu katsayıları sıfırdan farklı ise bu değişkenlerin amaç fonksiyonunun elenmesi için satır işlemleri yapılmalısına dikkat edilmelidir.

   iii. Aşama II DP simpleks algoritmasının adımları kullanılarak çözülür. Aşama II DP'nin çözümü orijinal problemin çözümüdür.

III. Durum 3. w = 0 ve en az bir yapay değişken temel değişken ise;

   i. Aşama I DP'nin en iyi tablosunda yer alan amaç fonksiyonu satırı ile temel dışı yapay değişkenler ve sıfırıncı satırdaki katsayısı negatif olan değişkenlere ait sütunlar atılır.

   ii. Orijinal amaç fonksiyonu ile Aşama I DP'den gelen tablo birleştirilerek Aşama II DP oluşturulur. Eğer Aşama I DP'nin en iyi tablosundaki bazı temel değişkenlerin orijinal amaç fonksiyonu katsayıları sıfırdan farklı ise bu değişkenlerin amaç fonksiyonunun elenmesi için satır işlemleri yapılmasına dikkat edilmelidir.

iii. Aşama II DP simpleks algoritmasının adımları kullanılarak çözülür. Aşama II DP'nin çözümü orijinal problemin çözümüdür.

Örnek 1. Oranj Meyve Suyu

x_1 ve x_2 bir şişe Oranj'da bulunması gereken portakal gazozu ve portakal suyu miktarı olmak üzere;

$$
\begin{array}{llr}
\min z = 2x_1 + 3x_2 & & \\
\quad 0.5x_1 + 0.25x_2 \leq 4 & & \text{(şeker kısıdı)} \\
\quad x_1 + 3x_2 \geq 20 & & \text{(C vit. kısıdı)} \\
\quad x_1 + x_2 = 10 & & \text{(10 oz'luk şişe kısıdı)} \\
\quad x_1, x_2 \geq 0 & &
\end{array}
$$

İki aşamalı simpleks yöntemi ile çözüm:

Adım 1. Tüm kısıtları ST değerleri negatif olmayacak şekilde düzenleyiniz

Tüm kısıtların ST değeri pozitiftir

Adım 2. Tüm kısıtları standart biçime çeviriniz

$$
\begin{array}{l}
z - 2x_1 - 3x_2 = 0 \\
0.5x_1 + 0.25x_2 + s_1 = 4 \\
x_1 + 3x_2 - e_2 = 20 \\
x_1 + x_2 = 10 \\
\text{tüm değişkenler} \geq 0
\end{array}
$$

Adım 3. > veya = kısıtlara a_i yapay değişkenini ekleyiniz

$$
\begin{array}{ll}
z - 2x_1 - 3x_2 = 0 & R_0 \\
0.5x_1 + 0.25x_2 + s_1 = 4 & R_1 \\
x_1 + 3x_2 - e_2 + a_2 = 20 & R_2 \\
x_1 + x_2 + a_3 = 10 & R_3 \\
\text{tüm değişkenler} \geq 0 &
\end{array}
$$

Adım 4. Tüm yapay değişkenlerin toplamı en küçüklenecek amaç olarak belirlenir.

Min w = $a_2 + a_3$

Sıfırıncı satır (R0) aşağıdaki gibi olacaktır:

$$w - a_2 - a_3 = 0$$

Adım 5. Yapay değişkenleri R_0'dan eleyecek şekilde yeni R_0 oluşturunuz

Yeni $R_0 = R_0 + R_2 + R_3 \Rightarrow$

$w + (1+1)x_1 + (3+1)x_2 - e_2 = 30$ Yeni R_0

Aşama I DP - Başlangıç tablosu:

w	x_1	⇓ x_2	s_1	e_2	a_2	a_3	ST	TD	Oran
1	2	**4**	0	-1	0	0	30	w=30	
0	1/2	1/4	1	0	0	0	4	s_1=4	16
0	1	$\boxed{\mathbf{3}}$	0	-1	1	0	20	a_2=20	**20/3**⇒
0	1	1	0	0	0	1	10	a_3=10	10

Aşama I DP - İlk tablo:

w	⇓ x_1	x_2	s_1	e_2	a_2	a_3	ST	TD	Oran
1	**2/3**	0	0	1/3	-4/3	0	10/3	w=10/3	
0	5/12	0	1	1/12	-1/12	0	7/3	s_1=7/3	28/5
0	1/3	1	0	-1/3	1/3	0	20/3	x_2=20/3	20
0	$\boxed{\mathbf{2/3}}$	0	0	1/3	-1/3	1	10/3	a_3=10/3	**5**⇒

Aşama I DP - En iyi tablo:

w	x_1	x_2	s_1	e_2	a_2	a_3	ST	TD
1	0	0	0	0	-1	-1	0	w=0
0	0	0	1	-1/8	1/8	-5/8	1/4	s_1=1/4
0	0	1	0	-1/2	1/2	-1/2	5	x_2=5
0	1	0	0	1/2	-1/2	3/2	5	x_1=5

Aşama I DP çözümünde üç farklı durum ile karşılaşılabilir:

Aşama I DP en iyi tablosunda $w = 0$ ve a_2 ile a_3 temel dışı değişken olduğu için Durum 2 ile karşılaşılmıştır.

i. Birinci aşama tablosundaki yapay değişkenler ile ilgili sütunları ve amaç fonksiyonu satırı atılır,

w	x_1	x_2	s_1	e_2	a_2	a_3	ST	TD
1	0	0	0	0	-1	-1	0	w=0
0	0	0	1	-1/8	1/8	-5/8	1/4	s_1=1/4
0	0	1	0	-1/2	1/2	-1/2	5	x_2=5
0	1	0	0	1/2	-1/2	3/2	5	x_1=5

min $z = 2x_1 + 3x_2$

z	x_1	x_2	s_1	e_2	ST	TD
1	-2	-3	0	0	0	z=0
0	0	0	1	-1/8	1/4	s_1=1/4
0	0	1	0	-1/2	5	x_2=5
0	1	0	0	1/2	5	x_1=5

yeni R0 = R0 + 2R3 + 3R2

Aşama II DP - Başlangıç tablosu:

z	x_1	x_2	s_1	e_2	ST	TD
1	0	0	0	-1/2	25	z=25
0	0	0	1	-1/8	1/4	s_1=1/4
0	0	1	0	-1/2	5	x_2=5
0	1	0	0	1/2	5	x_1=5

ii. Aşama II DP simpleks algoritmasının adımları kullanılarak çözülür. Aşama II DP'nin çözümü orijinal problemin çözümüdür.

Başlangıç tablosunda ilk satırda pozitif katsayı olmadığı için bu tablo en iyi çözümdür. Bu çözüme göre $x_1 = x_2 = 5$; $z = 25$ 'tir.

Rapor:

Bir şişe Oranj'da, 5 oz. portakal gazozu ve 5 oz. portakal suyu olmalıdır.

Bu durumda toplam maliyet 25¢ olacaktır.

Örnek 2. Değiştirilmiş Oranj Meyve Suyu

x_1 ve x_2 bir şişe Oranj'da bulunması gereken portakal gazozu ve portakal suyu miktarı olmak üzere;

$$
\begin{array}{lll}
\min z = 2x_1 + 3x_2 & & \\
0.5x_1 + 0.25x_2 \leq 4 & & \text{(şeker kısıdı)} \\
x_1 + 3x_2 \geq 36 & & \text{(C vit. kısıdı)} \\
x_1 + x_2 = 10 & & \text{(10 oz'luk şişe kısıdı)} \\
x_1, x_2 \geq 0 & &
\end{array}
$$

İki aşamalı simpleks yöntemi ile çözüm:

Adım 1. Tüm kısıtları ST değerleri negatif olmayacak şekilde düzenleyiniz

Tüm kısıtların ST değeri pozitiftir

Adım 2. Tüm kısıtları standart biçime çeviriniz

$$
\begin{array}{l}
z - 2x_1 - 3x_2 = 0 \\
0.5x_1 + 0.25x_2 + s_1 = 4 \\
x_1 + 3x_2 - e_2 = 36 \\
x_1 + x_2 = 10 \\
\text{tüm değişkenler} \geq 0
\end{array}
$$

Adım 3. > veya = kısıtlara a_i yapay değişkenini ekleyiniz

$$
\begin{array}{ll}
z - 2x_1 - 3x_2 = 0 & R_0 \\
0.5x_1 + 0.25x_2 + s_1 = 4 & R_1 \\
x_1 + 3x_2 - e_2 + a_2 = 36 & R_2 \\
x_1 + x_2 + a_3 = 10 & R_3 \\
\text{tüm değişkenler} \geq 0 &
\end{array}
$$

Adım 4. Tüm yapay değişkenlerin toplamı en küçüklenecek amaç olarak belirlenir.

Min $w = a_2 + a_3$

Sıfırıncı satır (R0) aşağıdaki gibi olacaktır:

$$w - a_2 - a_3 = 0$$

Adım 5. Yapay değişkenleri R_0'dan eleyecek şekilde yeni R_0 oluşturunuz

Yeni $R_0 = R_0 + R_2 + R_3 \Rightarrow$

$w + (1+1)x_1 + (3+1)x_2 - e_2 = 46$ Yeni R_0

Aşama I DP - Başlangıç tablosu:

w	x_1	x_2 ⇓	s_1	e_2	a_2	a_3	ST	TD	Oran
1	2	**4**	0	-1	0	0	46	w=46	
0	1/2	1/4	1	0	0	0	4	s_1=4	16
0	1	3	0	-1	1	0	36	a_2=36	12
0	1	$\boxed{\mathbf{1}}$	0	0	0	1	10	a_3=10	**10**⇒

Aşama I DP – En iyi tablo

w	x_1	x_2	s_1	e_2	a_2	a_3	ST	TD
1	-2	0	0	-1	0	-4	6	w=6
0	1/4	0	1	0	0	-1/4	3/2	s_1=3/2
0	-2	0	0	-1	1	-3	6	a_2=6
0	1	1	0	0	0	1	10	x_2=10

<u>Aşama I DP çözümünde üç farklı durum ile karşılaşılabilir</u>:

Aşama I DP en iyi tablosunda *w* > 0 olduğu için Durum 1 ile karşılaşılmıştır. Buna göre orijinal DP olurlu değildir.

Rapor:

Belirtilen şartlarda Oranj üretimi yapmak mümkün değildir.

Örnek 3. (*Winston*, 4.13)

Aşağıdaki DP Modelini iki aşamalı simpleks ile çözünüz.

$$
\begin{array}{llllll}
\text{maks } z = 40x_1 + 10x_2 & & +7x_5 + 14x_6 & \\
\text{Öyle ki;} \quad x_1 - x_2 & & +2x_5 & = 0 \\
-2x_1 + x_2 & & -2x_5 & = 0 \\
x_1 & + x_3 & + x_5 - x_6 & = 3 \\
& 2x_2 + x_3 + x_4 & + 2x_5 + x_6 & = 4
\end{array}
$$

İki aşamalı simpleks yöntemi ile çözüm:

<u>Adım 1. Tüm kısıtları ST değerleri negatif olmayacak şekilde düzenleyiniz</u>

Tüm kısıtların ST değeri pozitiftir

<u>Adım 2. Tüm kısıtları standart biçime çeviriniz</u>

Tüm kısıtlar eşittir kısıtı olduğu için problem standart biçimdedir.

<u>Adım 3. > veya = kısıtlara a_i yapay değişkenini ekleyiniz</u>

$$
\begin{array}{llllll}
z - 40x_1 - 10x_2 & & -7x_5 - 14x_6 & & = 0 \\
x_1 - x_2 & & +2x_5 & + a_1 & = 0 \\
-2x_1 + x_2 & & -2x_5 & + a_2 & = 0 \\
x_1 & + x_3 & + x_5 - x_6 & + a_3 & = 3 \\
& 2x_2 + x_3 + x_4 & + 2x_5 + x_6 & & = 4
\end{array}
$$

(Not: son kısıtta x4 temel değişken olabileceği için yapay değişken eklenmemiştir.)

<u>Adım 4. Tüm yapay değişkenlerin toplamı en küçüklenecek amaç olarak belirlenir</u>.

$$\min w = a_1 + a_2 + a_3$$

Sıfırıncı satır (R0) aşağıdaki gibi olacaktır:

$w - a_1 - a_2 - a_3 = 0$

Adım 5. Yapay değişkenleri R_0'dan eleyecek şekilde yeni R_0 oluşturunuz

Yeni $R_0 = R_0 + R1 + R_2 + R_3 \Rightarrow$

$w + x_3 + x_5 - x_6 = 3$ Yeni R_0

Aşama I DP - Başlangıç tablosu:

w	x_1	x_2	x_3 ⇓	x_4	x_5	x_6	a_1	a_2	a_3	ST	TD	Oran
1	0	0	**1**	0	1	-1	0	0	0	3	w=3	
0	1	-1	0	0	2	0	1	0	0	0	a_1=0	-
0	-2	1	0	0	-2	0	0	1	0	0	a_2=0	-
0	1	0	$\boxed{1}$	0	1	-1	0	0	1	3	a_3=3	**3** ⇒
0	0	2	1	1	2	1	0	0	0	4	x_4=4	4

Aşama I DP – En iyi tablo:

w	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	a_1	a_2	a_3	ST	TD
1	-1	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	w=0
0	1	-1	0	0	2	0	1	0	0	0	a_1=0
0	-2	1	0	0	-2	0	0	1	0	0	a_2=0
0	1	0	1	0	1	-1	0	0	1	3	x_3=3
0	-1	2	0	1	1	2	0	0	-1	1	x_4=1

Aşama I DP çözümünde üç farklı durum ile karşılaşılabilir:

w = 0 ama a_1 ve a_2 temel değişken olduğu için Durum 3 ile karşılaşılmıştır.

i. Aşama I DP'nin en iyi tablosunda yer alan temel dışı yapay değişkenler ve ilk satırdaki katsayısı negatif olan değişkenler ile ilgili sütunlar ve amaç fonksiyonu satırı atılır.

w	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	a_1	a_2	a_3	ST	TD
1	-1	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	w=0
0	1	-1	0	0	2	0	1	0	0	0	a_1=0
0	-2	1	0	0	-2	0	0	1	0	0	a_2=0
0	1	0	1	0	1	-1	0	0	1	3	x_3=3
0	-1	2	0	1	1	2	0	0	-1	1	x_4=1

ii. Orijinal amaç fonksiyonu (z) ile Aşama I DP'den gelen tablo birleştirilerek Aşama II DP oluşturulur.

$$z - 40x_1 - 10x_2 \qquad -7x_5 - 14x_6 = 0$$

Orijinal amaç fonksiyonunda katsayısı sıfırdan farklı olan değişkenlerin tümü temel dışı değişkendir; bu yüzden satır işlemi yapmadan Aşama II DP oluşturulur.

Aşama II DP – Başlangıç Tablosu

Z	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6 ⇓	a_1	a_2	ST	TD	Oran
1	-10	0	0	-7	**-14**	0	0	0	z=0	
0	-1	0	0	2	0	1	0	0	a_1=0	-
0	1	0	0	-2	0	0	1	0	a_2=0	-
0	0	1	0	1	-1	0	0	3	x_3=3	-
0	2	0	1	1	$\boxed{\mathbf{2}}$	0	0	1	x_4=1	**1/2** ⇒

iii. Aşama II DP simpleks algoritmasının adımları kullanılarak çözülür. Aşama II DP'nin çözümü orijinal problemin çözümüdür.

Aşama II DP – En iyi tablo

z	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	a_1	a_2	ST	TD
1	4	0	7	0	0	0	0	7	z=7
0	-1	0	0	2	0	1	0	0	a_1=0
0	1	0	0	-2	0	0	1	0	a_2=0
0	1	1	1/2	3/2	0	0	0	7/2	x_3=7/2
0	1	0	1/2	1/2	1	0	0	1/2	x_6=1/2

Rapor:

$z = 7$, $x_3 = 3{,}5$; $x_6 = 0{,}5$; $x_1 = x_2 = x_5 = x_4 = 0$

4.6 İŞARETİ SINIRLANDIRILMAMIŞ DEĞİŞKENLER

İşareti sınırlandırılmamış değişkenler olabilir (serbest; unrestricted in sign - **urs**).

Bu konu sınıfta işlenecektir.

5. DUYARLILIK ANALİZİ VE DUALİTE

5.1 DUYARLILIK ANALİZİ

5.1.1 İndirgenmiş Maliyet

Herhangi bir temel dışı değişkenin indirgenmiş maliyeti (reduced cost), değişkenin temel değişken olması (DP'nin en iyi çözümüne girmesi) için amaç fonksiyon katsayısında yapılacak iyileştirme miktarıdır.

Eğer bir x_k temel dışı değişkeninin amaç fonksiyon katsayısı indirgenmiş maliyet kadar iyileştirilirse, DP'nin bir tek en iyi çözümü olmaz: alternatif çözümler vardır. x_k, söz konusu çözümlerden en az birinde temel değişken; en az birinde ise temel dışı değişken konumundadır.

Eğer x_k temel dışı değişkeninin amaç fonksiyon katsayısı indirgenmiş maliyetten daha fazla iyileştirilirse, yeni DP'nin tek bir en iyi çözümüne ulaşılır ve bu çözümde x_k temel değişken olur (x_k>0).

Temel değişkenin indirgenmiş maliyeti sıfırdır (tanıma bakınız)!

5.1.2 Gölge Fiyat

DP modelinin *i*. kısıdının gölge fiyatı (shadow price), söz konusu kısıdın sağ taraf (ST; Right Hand Side - RHS) değerinin 1 birim çoğaltılması durumunda, en iyi amaç fonksiyon değerinin ne kadar iyileştiğini (enbüyükleme sorununda ne kadar arttığını, enküçükleme sorununda ne kadar azaldığını) gösterir.

Bu tanım sadece değişimden önceki çözümün değişimden sonra da aynı kalması durumunda geçerlidir!

Bir $\geq$ kısıdın gölge fiyatı her zaman 0 ya da 0'dan küçük (nonpositive); bir $\leq$ kısıdın gölge fiyatı ise her zaman 0 ya da 0'dan büyük (nonnegative) olacaktır.

5.1.3 Kavramsallaştırma

$$
\begin{array}{lrcrcrl}
\text{maks } z = & 6x_1 & + & x_2 & + & 10x_3 & \\
& x_1 & & & + & x_3 & \leq 100 \\
& & & x_2 & & & \leq \;\; 1 \\
\multicolumn{7}{l}{\text{Tüm değişkenler} \geq 0}
\end{array}
$$

Bu çok kolay bir DP modelidir ve simpleks kullanılmadan elle de çözülebilir:

x_2 = 1 (Bu değişken ilk kısıtta yoktur, bu durumda sorun enbüyükleme olduğundan ikinci kısıdın sol taraf değeri 1'e eşit olur)

$x_1 = 0$, $x_3 = 100$ (Bu iki değişken ise salt ilk kısıtta kullanılmışlardır ve x_3'ün amaç fonksiyon değeri x_1'inkinden büyük olduğu için x_3'ün en iyi değeri birinci kısıt ST değerine eşit olur)

Bu durumda en iyi çözüm aşağıdaki gibidir:

$z = 1001$, $[x_1, x_2, x_3] = [0, 1, 100]$

Aynı zamanda duyarlık analizi de elle hesaplanabilir:

İndirgenmiş Maliyet

x_2 ve x_3 temel değişken (en iyi çözümde) olduklarından, indirgenmiş maliyetleri 0'dır.

x_1'i temel değişken yapabilmek için amaç fonksiyon katsayısını en az x_3'ün amaç fonksiyon katsayısı kadar yapmak diğer bir deyişle 4 (10-6) birim çoğaltmak gerekir.

Yeni amaç fonksiyonu (maks $z = 10\, x_1 + x_2 + 10\, x_3$) olacak ve $[x_1, x_2, x_3]$ için en az iki en iyi çözüm bulunacaktır: [0, 1, 100] ve [100, 1, 0].

Bu durumda x_1'in indirgenmiş maliyeti 4'tür.

Eğer x_1'in amaç fonksiyon katsayısını indirgenmiş maliyet değerinden daha fazla çoğaltırsak en iyi çözüm bir tane olacaktır: [100, 1, 0].

Gölge Fiyat

Eğer birinci kısıdın ST değeri 1 birim arttırılırsa, x_3'ün yeni en iyi çözüm değeri 100 yerine 101 olacaktır. Bu durumda da z'nin yeni değeri 1011 olacaktır.

Tanımdan faydalanıp tersten gidersek: 1011 - 1001 = 10, birinci kısıdın gölge fiyat değeridir.

Benzer şekilde ikinci kısıdın gölge fiyatı 1 olarak hesaplanır (lütfen hesaplayınız).

5.1.4 Duyarlılık için Lindo Çıktısının Kullanılması

DİKKAT: Simpleks'de sıfırıncı satır olan amaç fonksiyonu Lindo'da birinci satır (Row 1) olarak kabul edilir!

Bu yüzden ilk kısıt, Lindo'da her zaman ikinci satırdır!!!

```
MAX      6 X1 + X2 + 10 X3
SUBJECT TO
       2)   X1 + X3 <=   100
       3)   X2 <=   1
END

LP OPTIMUM FOUND AT STEP      0
       OBJECTIVE FUNCTION VALUE
       1)      1001.000
 VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
       X1         0.000000         4.000000
       X2         1.000000         0.000000
       X3       100.000000         0.000000
      ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
```

```
             2)          0.000000          10.000000
             3)          0.000000           1.000000
 RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:
                                OBJ COEFFICIENT RANGES
  VARIABLE          CURRENT          ALLOWABLE          ALLOWABLE
                     COEF            INCREASE           DECREASE
        X1         6.000000          4.000000           INFINITY
        X2         1.000000          INFINITY           1.000000
        X3        10.000000          INFINITY           4.000000
                                RIGHTHAND SIDE RANGES
       ROW          CURRENT          ALLOWABLE          ALLOWABLE
                      RHS            INCREASE           DECREASE
         2       100.000000          INFINITY         100.000000
         3         1.000000          INFINITY           1.000000
```

Lindo çıktısı x_1, x_2 ve x_3 değişkenlerinin indirgenmiş maliyetlerini (reduced costs) 4, 0 ve 0 olarak vermektedir.

Enbüyükleme sorunlarında temel dışı bir değişkenin indirgenmiş maliyeti aynı zamanda Lindo çıktısındaki amaç fonksiyon katsayıları aralığındaki (obj. coefficient ranges) o değişken için izin verilen çoğalış (allowable increase) değeri ile de bulunabilir. Burada x_1 için söz konusu değer 4'tür.

Enküçükleme sorunlarında ise temel dışı değişkenin indirgenmiş maliyeti izin verilen azalış (allowable decrease) değerine eşittir.

Aynı Lindo çıktısından, gölge fiyatlar (shadow prices) da kısıtların "dual price" değerleri okunarak bulunabilir:

Örneğimizde birinci kısıdın (satır 2) gölge fiyatı 10'dur.

İkinci kısıdın (satır 3) gölge fiyatı ise 1'dir.

Eğer bir kısıdın ST değerindeki bir değişim en iyi çözümün değişmeyeceği izin verilen ST aralıklarında (allowable RHS range) ise aşağıdaki denklemler kullanılarak yeni amaç fonksiyon değeri hesaplanabilir:

enbüyükleme sorunu için

- yeni amaç fn. değeri = eski amaç fn. değeri + (yeni ST – eski ST) × gölge fiyat

enküçükleme sorunu için

- yeni amaç fn. değeri = eski amaç fn. değeri – (yeni ST – eski ST) × gölge fiyat

Lindo örneğinde, izin verilen ST aralığı çoğalışı (allowable increase in RHS ranges) sonsuz (infinity) olduğu için her iki kısıdın da ST değerini istediğimiz kadar çoğaltabiliriz. Fakat izin verilen ST aralığı azalışına (allowable decrease) göre birinci kısıdı en fazla 100, ikinci kısıdı ise 1 birim azaltabiliriz.

Örnek

Birinci kısıdın yeni ST değerinin 60 olduğunu düşünelim.

Öncelikle izin verilen aralıklar kontrol edilir. Çoğalış sonsuz olduğundan birinci denklemi kullanabiliriz (maks sorunu):

$$z_{yeni} = 1001 + (60 - 100) 10 = 601$$

5.1.5 Grafik Çözüm Kullanarak Duyarlılık

Sınıfta işlenecektir.

5.1.6 %100 Kuralı

Sınıfta işlenecektir.

5.2 DUALİTE

5.2.1 Primal – Dual

Herhangi bir DP ile ilişkisi olan bir diğer DP ***dual*** (eşters) olarak isimlendirilir. Dual bilgisi ekonomik ve duyarlılık analizi ile ilgili ilginç açıklamalar sağlar. Duali alınan DP ***primal*** olarak isimlendirilir. Primal model enbüyükleme sorunu ise dual enküçükleme sorunu olur. Bu kuralın tam tersi de doğrudur.

5.2.2 Bir DP'nin Dualini Bulma

Normal enbüyükleme sorununun duali ***normal enküçükleme*** sorunudur.

> *Normal enbüyükleme sorunu tüm değişkenlerin 0 veya 0'dan büyük olduğu ve tüm kısıtların ≤ olduğu bir sorundur.*
>
> *Normal enküçükleme sorunu tüm değişkenlerin 0 veya 0'dan büyük olduğu ve tüm kısıtların ≥ olduğu bir sorundur.*

Benzer şekilde, normal enküçükleme sorununun duali de normal enbüyükleme sorunudur.

Normal Enbüyükleme Sorununun Dualini Bulma

PRİMAL

$$\begin{array}{ll} \text{maks } z = & c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \\ \text{öyle ki} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2 \\ & \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m \end{array}$$

$x_j \ge 0$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$

DUAL

$$\begin{array}{ll} \text{min } w = & b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m \\ \text{öyle ki} & a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m \ge c_1 \\ & a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_m \ge c_2 \\ & \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ & a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m \ge c_n \end{array}$$

$y_i \ge 0$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$

Normal Enküçükleme Sorununun Dualini Bulma

PRİMAL

$$\begin{array}{ll} \text{min } w = & b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m \\ \text{öyle ki} & a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m \ge c_1 \\ & a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_m \ge c_2 \\ & \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ & a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m \ge c_n \end{array}$$

$y_i \ge 0$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$

DUAL

$$\begin{array}{ll} \text{maks } z = & c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \\ \text{öyle ki} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2 \\ & \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m \end{array}$$

$x_j \ge 0$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$

Normal Olmayan Enbüyükleme Sorununun Dualini Bulma

- Eğer *i.* primal kısıt $\ge$ kısıtsa, ilgili dual değişken $y_i \le 0$ şeklinde olmalıdır.
- Eğer *i.* primal kısıt eşitlikse, ilgili dual değişken y_i "işareti sınırlandırılmamış" (serbest; unrestricted in sign - urs) değişkendir.
- Eğer *i.* primal değişken urs ise, *i.* dual kısıt eşitliktir.

Normal Olmayan Enküçükleme Sorununun Dualini Bulma

- Eğer *i.* primal kısıt $\le$ kısıtsa, ilgili dual değişken $x_i \le 0$ şeklinde olmalıdır
- Eğer *i.* primal kısıt eşitlikse, ilgili dual değişken x_i "işareti sınırlandırılmamış" (urs) değişkendir.
- Eğer *i.* primal değişken urs ise, *i.* dual kısıt eşitliktir

5.2.3 Dual Teoremi

Primal ve dualin en iyi amaç fonksiyon değerleri eşittir (eğer sorunlar için en iyi çözüm varsa).

Zayıf dualiteye göre; dual için herhangi bir olurlu çözümün *w*-değeri en az primal için herhangi bir olurlu çözümün *z*-değeri kadar olabilir → $z \le w$.

- Dual için herhangi bir olurlu çözüm primal amaç fonksiyon değeri için sınır olarak kullanılabilir.
- Primal sınırlı değilse (unbounded) dual olurlu değildir (infeasible)
- Dual sınırlı değilse primal olurlu değildir.
- Primal enbüyükleme sorunu ise en iyi tablonun sıfırıncı satırından en iyi dual çözüm nasıl okunur?

  'y_i dual değişkeninin en iyi değeri'
  = 'en iyi R_0'da s_i'nin katsayısı' (kısıt i ≤ ise)
  = –'en iyi R_0'da e_i'nin katsayısı' (kısıt i ≥ ise)
  = 'en iyi R_0'da a_i'nin katsayısı' – M (kısıt i = ise)
- Primal enküçükleme sorunu ise en iyi tablonun sıfırıncı satırından en iyi dual çözüm nasıl okunur?

  'xi dual değişkeninin en iyi değeri'
  = 'en iyi R_0'da s_i'nin katsayısı' (kısıt i ≤ ise)
  = –'en iyi R_0'da e_i'nin katsayısı' (kısıt i ≥ ise)
  = 'en iyi R_0'da a_i'nin katsayısı' + M (kısıt i = ise)

5.2.4 Ekonomik Yorum

Primal normal enbüyükleme sorunu olduğunda, dual değişkenler karar vericiye sağlanabilecek kaynakların değeri ile ilgili olur. Bu yüzden dual değişkenlerden çoğu kez ***kaynak gölge fiyatları*** olarak söz edilir.

Örnek

PRİMAL

x_1, x_2, x_3 üretilen sıra, masa ve sandalye sayısını göstersin. Haftalık kar $\$z$ iken DP modeli:

$$
\begin{aligned}
&\text{maks } z = 60x_1+30x_2+20x_3 \\
&8x_1+\ \ 6x_2+\quad x_3 \le 48 \qquad \text{(Tahta kısıtı)} \\
&4x_1+\ \ 2x_2+1.5x_3 \le 20 \qquad \text{(Cilalama kısıtı)} \\
&2x_1+1.5x_2+0.5x_3 \le \ \ 8 \qquad \text{(Marangozluk kısıtı)} \\
&x_1,x_2,x_3 \ge 0
\end{aligned}
$$

DUAL

Farzedelim ki bir girişimci Dakota'nın tüm kaynaklarını (hammadde) satın almak istiyor. Dual sorunda y_1, y_2, y_3 sırasıyla bir m^2 tahta, bir saat cilalama işçiliği ve bir saat marangozluk için ödenmesi gereken ücreti gösterir.

$\$w$ de kaynak satın alma toplam maliyetini gösterir.

Kaynak ücretleri Dakota'yı satışa teşvik edecek kadar yüksek; girişimciyi vazgeçirmeyecek kadar az olmalıdır. Bu durumda da toplam satın alma maliyeti toplam kar kadar olur.

$$\min w = 48y_1 + 20y_2 + 8y_3$$

$$8y_1 + 4y_2 + 2y_3 \geq 60 \quad \text{(Sıra kısıtı)}$$

$$6y_1 + 2y_2 + 1.5y_3 \geq 30 \quad \text{(Masa kısıtı)}$$

$$y_1 + 1.5y_2 + 0.5y_3 \geq 20 \quad \text{(Sandalye kısıtı)}$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

5.3 DUALİTE VE DUYARLILIK

Sınıfta işlenecektir.

5.4 TÜMLER GEVŞEKLİK TEOREMİ

Primal ve Dual çözümleri birbiriyle ilişkilendiren bir teoremdir. Bu teorem ile en iyi çözümde primal modeldeki kısıtlar ile dual modeldeki değişkenlerin ve primal modeldeki değişkenler ile dual modeldeki kısıtların ilişkileri ortaya konmaktadır.

Karar değişkenleri $x_1, x_2, \ldots, x_n$ olan m tane $\leq$ kısıtı ve bu kısıtlarla ilgili $s_1, s_2, \ldots, s_m$ gevşek değişkenlerini içeren bir normal en büyükleme probleminin (PRIMAL) duali karar değişkenleri $y_1, y_2, \ldots, y_m$; n tane $\geq$ kısıtı ve bu kısıtlarla ilgili $e_1, e_2, \ldots, e_n$ fazlalık değişkenlerini içeren bir normal en küçükleme problemi (DUAL) olacaktır.

Bu problemler için $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \ldots x_n]$ bir primal olurlu çözüm; $\mathbf{y} = [y_1, y_2, \ldots y_m]$ ise bir dual olurlu çözüm olsun. **x** ve **y** en iyi çözüm olabilmeleri için yalnız ve yalnız aşağıdaki koşullar sağlanmalıdır:

$$s_i\, y_i = 0 \ (i = 1,2,\ldots,m)$$
$$e_j\, x_j = 0 \ (j = 1,2,\ldots,n)$$

Diğer bir deyişle, en iyi çözümde, bir modeldeki değişken (y_i veya x_j) pozitif ise diğer modelde bu değişkenle ilişkili kısıt aktiftir (s_i veya $e_j = 0$). Bir modeldeki kısıt aktif değil ise (s_i veya $e_j > 0$) diğer modelde bu kısıtla ilişkili değişken (y_i veya x_j) 0 değerini alır.

Tümler gevşeklik teoreminden faydalanarak dual modelinin çözümünden primal modelin çözümüne veya primal modelin çözümünden dual modelin çözümüne ulaşılabilir. Bu özellik aşağıdaki örnek ile gösterilmiştir.

Örnek:

Aşağıdaki verilen DP modelini göz önüne alınız.

$$\begin{aligned}
&\min z = 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\
&\text{Öyle ki;} \quad 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 60 \\
&\qquad\qquad 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 \geq 120 \\
&\qquad\qquad x_1 + x_2 - 3x_3 \leq 150 \\
&x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}$$

bu DP modelinin en iyi çözümü Z= 90, $x_1 = 0$, $x_2 = 15$, $x_3 = 15$ olarak verilsin. Buna göre dual modelin çözümünü, primal model için gölge fiyatları ve indirgenmiş maliyetleri bulunuz.

<u>Primal modelin standart biçimi</u>:

$$\begin{aligned}
&\min z = 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\
&\text{Öyle ki;} \quad 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 60 \\
&\qquad\qquad 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - e_2 = 120 \\
&\qquad\qquad x_1 + x_2 - 3x_3 + s_3 = 150 \\
&\text{tüm değişkenler} \geq 0
\end{aligned}$$

<u>Dual modelin standart biçimi</u>:

$$\begin{aligned}
&\text{Maks } w = 60\,y_1 + 120\,y_2 + 150\,y_3 \\
&\text{Öyle ki;} \quad 2\,y_1 + 3\,y_2 + y_3 + sd_1 = 3 \\
&\qquad\qquad y_1 + 3\,y_2 + y_3 + sd_2 = 2 \\
&\qquad\qquad 3\,y_1 + 5\,y_2 - 3\,y_3 + sd_3 = 4 \\
&y_1 \text{ urs}, y_2 \geq 0, y_3 \leq 0, \; sd_1, sd_2, sd_3 \geq 0.
\end{aligned}$$

Dual modeldeki y_1, y_2, y_3 primal modelin gölge fiyatlarını; sd_1, sd_2, sd_3 ise primal modelin indirgenmiş maliyetlerini verecektir.

Tümler gevşeklik teoremine göre en iyi çözümde aşağıdaki koşullar sağlanmalıdır:

$x_1 * sd_1 = 0$; $x_2 * sd_2 = 0$; $x_3 * sd_3 = 0$

$y_2 * e_2 = 0$; $y_3 * s_3 = 0$

z = 90, $x_1 = 0$, $x_2 = 15$, $x_3 = 15$ olduğuna göre $e_2 = 0$ ve $s_3 = 180$'dir.

Koşulların sağlanması için $sd_2 = 0$, $sd_3 = 0$; $y_3 = 0$ olmalıdır. Bunlar dual modelde yerine konduğunda üç bilinmeyenli üç denklem elde edilir:

$$2y_1 + 3y_2 + sd_1 = 3$$
$$y_1 + 3y_2 = 2$$
$$3y_1 + 5y_2 = 4$$

Buradan $y_1 = 1/2$; $y_2 = 1/2$; $sd_1 = 1/2$ olarak hesaplanır.

Rapor: Dual DP modelinin çözümü: w=0; $y_1 = 1/2$; $y_2 = 1/2$; $y_3 = 0$; $sd_1 = 1/2$; $sd_2 = 0$; $sd_3 = 0$. Buna göre primal model için; birinci ve ikinci kısıtların gölge fiyatları -1/2; üçüncü kısıtın gölge fiyatı 0'dır. İkinci ve üçüncü karar değişkenlerinin indirgenmiş maliyetleri 0'dır. Birinci karar değişkenin indirgenmiş maliyeti 1/2'ye eşittir.

5.5 DUAL SİMPLEKS YÖNTEMİ

5.5.1 Dual simpleks'in üç farklı kullanımı

- DP'ye bir kısıt eklenmesi durumunda yeni en iyi çözümü bulma
- DP'deki kısıtlardan birinin ST değerinin değiştirilmesi durumunda yeni en iyi çözümü bulma
- Normal enküçükleme sorunu çözme

5.5.2 Adımlar

1. En negatif ST'yi seçeriz
2. Bu pivot satırın temel değişkeni çözümden çıkar
3. Pivot satırdaki negatif katsayılı değişkenler için oranlar hesaplanır (sıfırıncı satırdaki katsayı / pivot satırdaki katsayı)
4. Mutlak değerce en küçük oranlı değişken çözüme girer.

- Pivot satırdaki her değişken negatif olmayan katsayılara sahipse, DP'nin olurlu çözümü yoktur.

Örnek:

z	x_1	x_2	**s_1**	s_2	s_3	ST	TD
1	0	0	1,25	0,75	0	41,25	z
0	0	1	2,25	-0,25	0	2,25	x_2
0	1	0	-1,25	0,25	0	3,75	x_1
0	0	0	-0,75	-0,25	1	**-0,75**	**s_3**

s_3 negatif ST değerine sahip olduğu için çözümden çıkar.

Pivot satırdaki negatif katsayılı değişkenler için hesaplanan mutlak değerce en küçük oranı olan değişken s_1 olduğu için ($|1,25 / -0,75|$ ve $|0,75 / -0,25|$) s_1 çözüme girer.

Satır işlemleri yapılır.

z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	ST	TD
1	0	0	0	0,333	1,667	40	z
0	0	1	0	-1	3	0	x_2
0	1	0	0	0,667	-1,667	5	x_1
0	0	0	1	0,333	-1,333	1	s_1

En iyi çözüm: $z = 40$, $x_1 = 5$, $x_2 = 0$

5.5.3 Bir Kısıt Ekleme

Ek örnek 1

Dakota sorununda pazarlama faaliyetleri açısından en az 1 masa üretmek zorunlu olsun.

Yanıt

$x_2 \geq 1$ eklenir

Mevcut en iyi çözüm ($z = 280$, $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 8$) yeni kısıtı sağlamadığı için artık olurlu değildir.

Yeni en iyi çözümü bulmak için en iyi tabloya yeni bir satır eklemeliyiz:

$$x_2 - e_5 = 1$$

e_5'i TD olarak kullanabilmek için bu denklemi -1 ile çarpmalıyız:

$$-x_2 + e_5 = -1$$

Yeni tablo:

z	x_1	**x_2**	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4	e_5	RHS	BV
1	0	5	0	0	10	10	0	0	280	z = 280
0	0	-2	0	1	2	-8	0	0	24	$s_1 = 24$
0	0	-2	1	0	2	-4	0	0	8	$x_3 = 8$
0	1	1.25	0	0	-0.5	1.5	0	0	2	$x_1 = 2$
0	0	1	0	0	0	0	1	0	5	$s_4 = 5$
0	0	**-1**	0	0	0	0	0	1	-1	**$e_5 = -1$**

e_5 çözümden çıkar ve x_2 çözüme girer.

En iyi çözüm:

$$z = 275, s_1 = 26, x_3 = 10, x_1 = 3/4, s_4 = 4, x_2 = 1$$

Ek örnek 2

$x_1 + x_2 \geq 12$ kısıtını eklediğimizi varsayalım.

Yanıt

Mevcut en iyi çözüm (z = 280, x_1 = 2, x_2 = 0, x_3 = 8) yeni kısıtı sağlamadığı için artık olurlu değildir.

Yeni en iyi çözümü bulmak için en iyi tabloya yeni bir satır eklemeliyiz:

$$x_1 + x_2 - e_5 = 12$$

e_5'i TD olarak kullanabilmek için bu denklemi -1 ile çarpmalıyız:

$$-x_1 - x_2 + e_5 = -12$$

Yeni tablo:

z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4	e_5	ST	TD
1	0	5	0	0	10	10	0	0	280	z
0	0	-2	0	1	2	-8	0	0	24	s_1
0	0	-2	1	0	2	-4	0	0	8	x_3
0	1	1,25	0	0	-0,5	1,5	0	0	2	
0	0	1	0	0	0	0	1	0	5	s_4
0	-1	-1	0	0	0	0	0	1	-12	e_5

x_1'i TD olarak kullanabilmek için satır işlemi yapılır:

z	x_1	x_2	x_3	s_1	**s_2**	s_3	s_4	e_5	ST	TD
1	0	5	0	0	10	10	0	0	280	z
0	0	-2	0	1	2	-8	0	0	24	s_1
0	0	-2	1	0	2	-4	0	0	8	x_3
0	1	1,25	0	0	-0,5	1,5	0	0	2	x_1
0	0	1	0	0	0	0	1	0	5	s_4
0	0	0,25	0	0	**-0,5**	1,5	0	1	**-10**	**e_5**

İterasyonlar:

z	x_1	**x_2**	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4	e_5	ST	TD
1	0	10	0	0	0	40	0	20	80	z
0	0	-1	0	1	0	-2	0	4	-16	s_1
0	0	**-1**	1	0	0	2	0	4	**-32**	**x_3**
0	1	1	0	0	0	0	0	-1	12	x_1
0	0	1	0	0	0	0	1	0	5	s_4
0	0	-0,5	0	0	1	-3	0	-2	20	s_2

z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4	e_5	ST	TD
1	0	0	10	0	0	60	0	60	-240	z
0	0	0	-1	1	0	-4	0	0	16	s_1
0	0	1	-1	0	0	-2	0	-4	32	x_2
0	1	0	1	0	0	2	0	3	-20	x_1
0	0	0	1	0	0	2	1	4	**-27**	$\mathbf{s_4}$
0	0	0	-0,5	0	1	-4	0	-4	36	s_2

Pivot satırdaki her değişken negatif olmayan katsayılara sahip:

DP'nin olurlu çözümü yoktur

5.5.4 Normal enküçükleme sorunu çözme

Ek örnek 3

Aşağıdaki DP'yi çözünüz

$$\min z = x_1 + 2x_2$$

$$\text{öyle ki} \quad x_1 - 2x_2 + x_3 \geq 4$$

$$2x_1 + x_2 - x_3 \geq 6$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Yanıt

z	$\mathbf{x_1}$	x_2	x_3	e_1	e_2	ST	TD
1	-1	-2	0	0	0	0	z
0	-1	2	-1	1	0	-4	e_1
0	**-2**	-1	1	0	1	**-6**	$\mathbf{e_2}$

z	x_1	x_2	$\mathbf{x_3}$	e_1	e_2	ST	TD
1	0	-1,5	-0,5	0	-0,5	3	z
0	0	2,5	**-1,5**	1	-0,5	**-1**	$\mathbf{e_1}$
0	1	0,5	-0,5	0	-0,5	3	x_1

z	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	ST	TD
1	0	-2,333	0	-0,333	-0,333	3,333	z
0	0	-1,667	1	-0,667	0,333	0,667	x_3
0	1	-0,333	0	-0,333	-0,333	3,333	x_1

En iyi çözüm: $z = 10/3$, $x_1 = 10/3$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2/3$

6. DP'DE İLERİ KONULAR

6.1 DÜZELTİLMİŞ SİMPLEKS YÖNTEMİ

Klasik simpleks yöntemi bilgisayarlar için en etkin yöntem değildir. Çünkü mevcut adımda veya sonraki adımlarda gerekli olmayan veriler hesaplanır ve depolanır.

Düzeltilmiş simpleks, Simpleks yöntemi adımlarının daha az hesaplama ile uygulanmasını sağlayan sistematik bir prosedürdür. Özellikle bilgisayar programlarının daha az veri saklamasını sağlar.

Simpleks yöntemde her bir iterasyonda gerekli olan bilgiler şunlardır:

- Temel olmayan değişkenlerin Satır 0 (R0)'daki katsayıları,
- Çözüme girecek değişkenin diğer denklemlerdeki katsayıları,
- Sağ taraf değerleri.

Simpleks yönteminde tüm tablodaki değerler hesaplanırken düzeltilmiş simpleks yönteminde sadece yukarıda verilen bilgiler hesaplanarak etkin bir algoritma oluşturulur.

6.1.1 Simpleks yönteminin matris formunda gösterimi

Değişken sayısı=n, kısıt sayısı=m olmak üzere,

Maks Z = **cx**

Öyle ki; **Ax** = **b** , **x** $\geq$ 0.

Burada **x** karar değişkenleri vektörü, **c** amaç fonksiyonu katsayıları vektörü, **A** teknoloji katsayıları matrisi, **b** sağ taraf değerleridir.

Örneğin aşağıda verilen Dakota Mobilya DP'si için;

$$
\begin{aligned}
\text{maks } z &= 60x_1+30x_2+20x_3 \\
\text{öyle ki } \quad & 8x_1+6x_2+x_3 \leq 48 \\
& 4x_1+2x_2+1.5x_3 \leq 20 \\
& 2x_1+1.5x_2+.5x_3 \leq 8 \\
& x_2 \leq 5 \\
& x_1,x_2,x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \mathbf{c} = [60,\ 30, 20\ ], \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 8 & 6 & 1 \\ 4 & 2 & 1.5 \\ 2 & 1.5 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 48 \\ 20 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix} \text{ olur.}$$

Notasyon tablosu

c	$1 \times n$ satır vektörü, amaç fonksiyonu katsayıları
x	$n \times 1$ sütun vektörü, karar değişkenleri
A	$m \times n$ matrisi; teknoloji katsayıları

b	sağ taraf değerleri vektörü
BV	temel değişkenler kümesi (BV'nin ilk elemenı ilk kısıttaki temel değişken, BV'nin ikinci elemenı ikinci kısıttaki temel değişken, ….,
BV_j	*j*'inci kısıttaki temel değişken
NBV	temel olmayan değişkenlerin kümesi
$\mathbf{a}_j$	orijinal problemde kısıtların x_j sütunu
B	$m \times m$ matrisi; *j*'inci sütunu orijinal kısıtlarda BV_j için olan sütunlardan oluşur
N	$m \times (n - m)$ matrisi; sütunları orijinal kısıtlarda temel olmayan değişkenler için olan sütunlardan oluşur
c_j	amaç fonksiyonunda x_j nin katsayıları
$\mathbf{c}_B$	$1 \times m$ satır vektörü; *j*'inci elemanı BV_j 'nin amaç fonksiyonu katsayısı
$\mathbf{c}_N$	$1 \times (n\text{-}m)$ satır vektörü; *j*'inci elemanı NBV 'nin *j*'inci elemanına karşılık gelen amaç fonksiyonu katsayısı
$\mathbf{x}_B$	$m \times 1$ sütun vektörü, temel değişkenler
$\mathbf{x}_N$	$n\text{-}m \times 1$ sütun vektörü, temel dışı değişkenler

Simpleks yöntemde herhangi bir temel olurlu çözüm içerdiği temel değişkenler ile ifade edilebilir. Bunun için BV temel değişkenler kümesinin tanımlanması gerekir.

Herhangi bir BV için **A**, **x** ve **c** temel ve temel dışı değişkenlere karşı gelen sütunlara göre iki kısma ayrılırsa;

$\mathbf{A} = [\mathbf{B}, \mathbf{N}]$

$\mathbf{x} = [\mathbf{x}_B, \mathbf{x}_N]$

$\mathbf{c} = [\mathbf{c}_B, \mathbf{c}_N]$

elde edilir. Bunlara göre ilgilenilen DP aşağıdaki gibi düzenlenebilir:

Maks $\mathrm{Z} = \mathbf{c}_\mathrm{B}\mathbf{x}_\mathrm{B} + \mathbf{c}_\mathrm{N}\mathbf{x}_\mathrm{N}$

Öyle ki; $\mathbf{B}\mathbf{x}_\mathrm{B} + \mathbf{N}\mathbf{x}_\mathrm{NB} = \mathbf{b}$

$\mathbf{x}_{BV}, \mathbf{x}_{NBV} \geq 0$

buradaki sembollerin tanımları notasyon tablosunda verilmiştir.

Bu modelde **B** matrisi doğrusal bağımsız vektörlerden oluştuğu için tersi alınabilirdir. Temel değişkenlerin ilgili temel olurlu çözümdeki değerlerini bulabilmek için kısıtların her iki tarafı $\mathbf{B}^{-1}$ ile çarpılır:

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{x}_\mathrm{B} + \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_\mathrm{N} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$$

$$\mathbf{x}_\mathrm{B} + \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_\mathrm{N} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$$

Burada $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}$ temel dışı değişkenlerin simpleks tablosundaki katsayılarını, $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ ise sağ taraf değerlerini verir.

Simpleks tablosundaki sıfırıncı satırı bulabilmek için $\mathrm{Z} = \mathbf{c}_\mathrm{B}\mathbf{x}_\mathrm{B} + \mathbf{c}_\mathrm{N}\mathbf{x}_\mathrm{N}$ denkleminde $\mathbf{x}_\mathrm{B}$ yerine $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_\mathrm{N}$ yazılırsa;

$$\mathrm{Z} = \mathbf{c}_\mathrm{B}(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_\mathrm{N}) + \mathbf{c}_\mathrm{N}\mathbf{x}_\mathrm{N}$$

$$\mathrm{Z} + (\mathbf{c}_\mathrm{B}B^{-1}N - \mathbf{c}_\mathrm{N})\mathbf{x}_\mathrm{N} = \mathbf{c}_\mathrm{B}B^{-1}\mathbf{b}$$

Burada $(\mathbf{c}_\mathrm{B}B^{-1}N - \mathbf{c}_\mathrm{N})$ temel dışı değişkenlerin sıfırıncı satırdaki katsayıları, $\mathbf{c}_\mathrm{B}B^{-1}\mathbf{b}$ ise sıfırıncı satırın sağ taraf değeridir. Bir temel dışı değişkenin sıfırıncı satırdaki katsayısı indirgenmiş maliyet olarak adlandırılır ve $z_j - c_j = \mathbf{c}_\mathrm{BV}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_j - c_j$ şeklinde ifade edilebilir.

Verilen formülere göre herhangi bir temel olurlu çözümdeki BV için simpleks tablosu aşağıdaki gibi oturuştuturulabilir.

	z	$\mathbf{x}_B$	$\mathbf{x}_N$	ST	
z	1	$\mathbf{0}$	$\mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} - \mathbf{c}_N$	$\mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$	Satır 0 (R_0)
$\mathbf{x}_B$	**0**	$\mathbf{I}$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$	Satır 1 – *m* (R_1-R_m)

Bu tablo üzerinden en iyilik koşulu (maks problemi için) $\mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} - \mathbf{c}_N \geq 0$'dır. Eğer herhangi bir *j* temel dışı değişkeni için $z_j - c_j = \mathbf{c}_\mathrm{BV}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_j - c_j < 0$ ise mevcut tablo en iyi değildir. Hangi temel dışı değişkenin temel; hangi temel değişkenin temel dışı olacağına karar verilerek sonraki iterasyona geçilir.

Yukarıda verilen tabloda çözüme girmeyecek olan temel dışı değişkenler için hesaplanan $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}$ değerleri simpleks yöntemde kullanılmaz. Kullanılmayacak verilerin hesaplanması ve depolanması büyük problemlerde etkinliği düşürmektedir. Bu yüzden aşağıda adımları verilen düzeltilmiş simpleks yöntemi geliştirilmiştir.

6.1.2 Düzeltilmiş Simpleks Yöntemi Adımları

(Maks problemi için)

Adım 0: $\mathbf{B}^{-1}$ in okunacağı sütunların belirlenmesi. Başlangıçta, $\mathbf{B}^{-1} = I$.

Adım 1: Mevcut tablo için $\mathbf{w} = \mathbf{c}_\mathrm{B}\mathbf{B}^{-1}$ hesaplanır, (**w** simpleks çarpanı veya dual/ gölge fiyat olarak adlandırılır)

Adım 2: Tüm temel olmayan değişkenler için R0'daki katsayıları $(z_j - c_j = \mathrm{c}_\mathrm{BV}\mathrm{B}^{-1}\mathrm{a}_j - c_j = \mathrm{wa}_j - c_j)$ hesaplanır.

- Tüm katsayılar negatif olmayan değerler almış ise, mevcut çözüm en iyidir.

- Mevcut çözüm en iyi değil ise en negatif katsayılı değişken çözüme girecek değişken olarak belirlenir. Bu değişkene x_k denir.

Adım 3: x_k 'nın hangi satırdan temel değişken olarak gireceğini belirlemek için,

- x_k'nin mevcut tablodaki sütunu hesaplanır ($\mathbf{y}_j = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_j$)
- Mevcut tablonun sağ taraf değeri hesaplanır ($\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$)
- Oran testi ile hangi değişkenin temel dışı olacağı belirlenir.
- Yeni BV kümesi bulunmuş olur.

Adım 4: Mevcut tablodaki x_k nın temele girmesi için gerekli ERO'lar belirlenir. Bu ERO'lar mevcut B^{-1}'e uygulanırsa yeni B^{-1} elde edilir. Adım 1'e dönülür.

Düzeltilmiş simplekste kullanılan formüller

Formül	**Açıklama**
$\mathbf{y_j} = \mathbf{B^{-1}a_j}$	BV tablosundaki x_j sütünu
$\mathbf{w} = \mathbf{c_B B^{-1}}$	Simpleks çarpanları – gölge fiyat
$z_j - c_j = \mathbf{c_B B^{-1} a_j} - \boldsymbol{c_j} = \mathbf{w a_j} - \boldsymbol{c_j}$	x_j nin R0'daki katsayıları – indirgenmiş maliyet
$\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{B^{-1}b}$	BV tablosundaki kısıt sağ taraf değerleri – temel değişken değerleri
$Z = \mathbf{c_B B^{-1} b} = \mathbf{c_B}\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{wb}$	BV tablosunda R0'daki sağ taraf değeri - Amaç fonksiyonu değeri

Örnek 1. Aşağıdaki DP'yi düzeltilmiş simpleks ile çözünüz.

$$
\begin{aligned}
\text{Maks } Z &= x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + 4x_5 - 2x_6 \\
\text{Öyle ki; } & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \le 6 \\
& 2x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 \le 4 \\
& x_3 + x_4 + 2x_5 + x_6 \le 4
\end{aligned}
$$

Tüm değişkenler ≥ 0

Öncelikle problem standart biçime dönüştürülür:

$$
\begin{aligned}
\text{Maks } Z &= x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + 4x_5 - 2x_6 \\
\text{Öyle ki; } & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + s_1 = 6 \\
& 2x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 + s_2 = 4 \\
& x_3 + x_4 + 2x_5 + x_6 + s_3 = 4
\end{aligned}
$$

Tüm değişkenler ≥ 0

Başlangıçta gevşek değişkenler temel değişkendir. BV = $\{s_1, s_2, s_3\}$

Adım 0: $\mathbf{B} = [a_7, a_8, a_9] = \mathrm{I}$, $\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{B} = \mathrm{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

<u>1. İterasyon</u>

Adım 1: BV = $\{s_1, s_2, s_3\}$, $\mathbf{B}^{-1} = \mathrm{I}$, $\mathbf{c}_\mathrm{B} = [0,0,0]$

$\mathbf{w} = \mathbf{c}_\mathrm{B}\mathbf{B}^{-1}$; $\mathbf{w} = [0,0,0]\mathbf{I} = [0,0,0]$

Adım 2: $(z_j - c_j = \mathrm{c_{BV}B^{-1}a}_j - c_j = \mathrm{wa}_j - c_j)$ hesaplanır.

$z_1 - c_1 = [0,0,0]\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix} - 1 = -1$; $z_2 - c_2 = [0,0,0]\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix} - 2 = -2$

$z_3 - c_3 = [0,0,0]\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix} - (-1) = 1$; $z_4 - c_4 = [0,0,0]\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} - 1 = -1$

$z_5 - c_5 = [0,0,0]\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix} - 4 = -4$; $z_6 - c_6 = [0,0,0]\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} - (-2) = 2$

İndirgenmiş maliyeti negatif olan değişkenler var, bu yüzden çözüm en iyi değildir. En negatif indirgenmiş maliyet değerine sahip olan x_5 çözüme girer.

Adım 3: çıkan değişkenin belirlenmesi;

x_5 in mevcut tablodaki sütunu: $\mathbf{y}_5 = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_5 = \mathbf{I}\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}$;

Mevcut tablonun sağ taraf değeri: $\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{I}\begin{bmatrix}6\\4\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}6\\4\\4\end{bmatrix}$

Oran testi: $\begin{bmatrix}6\\4\\4\end{bmatrix} / \begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix} = \begin{matrix}6\\-\\2*\end{matrix}$ $\quad s_3$ çözümden çıkar

Yeni BV= {s_1, s_2 , x_5 }

Adım 4: Yeni BV için B^{-1} hesaplanır. $\mathbf{y}_5$'i $\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ haline getirmek için gerekli ERO'lar B'ye uygulanır. $\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ için R3' = R3 / 2; R1' = R1 – R3'; R2' = R2.

Bu işlemler $\boldsymbol{B}^{-1} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$'e uygulanırsa yeni $\boldsymbol{B}^{-1} = \begin{bmatrix}1 & 0 & -1/2\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1/2\end{bmatrix}$ olarak bulunur.

<u>2. İterasyon</u>

Adım 1: BV= {s_1, s_2 , x_5 } , $\boldsymbol{B}^{-1} = \begin{bmatrix}1 & 0 & -1/2\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1/2\end{bmatrix}$, $\mathbf{c}_\mathrm{B} = [0,0,4]$

$\mathbf{w} = \mathbf{c}_\mathrm{B}\mathbf{B}^{-1}$; $\mathbf{w} = [0,0,4]\begin{bmatrix}1 & 0 & -1/2\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1/2\end{bmatrix} = [0,0,2]$

Adım 2: $(z_j - c_j = \mathrm{c_{BV}B^{-1}a}_j - c_j = \mathrm{wa}_j - c_j)$ hesaplanır.

$z_1 - c_1 = [0,0,2]\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix} - 1 = -1$; $\quad z_2 - c_2 = [0,0,2]\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix} - 2 = -2$

$z_3 - c_3 = [0,0,2]\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix} - (-1) = 3$; $\quad z_4 - c_4 = [0,0,2]\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} - 1 = 1$

$z_6 - c_6 = [0,0,2]\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} - (-2) = 4$; $\quad z_9 - c_9 = [0,0,2]\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} - 0 = 2$;

İndirgenmiş maliyeti negatif olan değişkenler var, bu yüzden çözüm en iyi değildir. En negatif indirgenmiş maliyet değerine sahip olan x_2 çözüme girer.

Adım 3: Çıkan değişkenin belirlenmesi;

x_2 nin mevcut tablodaki sütunu: $\mathbf{y}_2 = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix}1 & 0 & -1/2\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$;

Mevcut tablonun sağ taraf değeri: $\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix}1 & 0 & -1/2\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6\\4\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\4\\2\end{bmatrix}$

Oran testi: $\begin{bmatrix}4\\4\\2\end{bmatrix} / \begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix} = \begin{matrix}4 *\\ -\\ -\end{matrix}$ $\quad s_1$ çözümden çıkar

Yeni BV= {x_2, s_2 , x_5 }

Adım 4: Yeni BV için B^{-1} hesaplanır. $\mathbf{y}_2$'yi $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$ haline getirmek için gerekli ERO'lar B'ye uygulanır. $\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$ için R1' = R1; R2' = R2 + R1'; R3' = R3.

Bu işlemler $\boldsymbol{B}^{-1} = \begin{bmatrix}1 & 0 & -1/2\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1/2\end{bmatrix}$'e uygulanırsa yeni $\boldsymbol{B}^{-1} = \begin{bmatrix}1 & 0 & -1/2\\1 & 1 & -1/2\\0 & 0 & 1/2\end{bmatrix}$ olarak bulunur.

<u>3. İterasyon</u>

Adım 1: BV= {x_2, s_2 , x_5 }, $\boldsymbol{B}^{-1} = \begin{bmatrix}1 & 0 & -1/2\\1 & 1 & -1/2\\0 & 0 & 1/2\end{bmatrix}$, $\mathbf{c}_\mathrm{B} = [2,0,4]$,

$\mathbf{w} = \mathbf{c}_\mathrm{B}\mathbf{B}^{-1}$; $\mathbf{w} = [2,0,4]\begin{bmatrix}1 & 0 & -1/2\\1 & 1 & -1/2\\0 & 0 & 1/2\end{bmatrix} = [2,0,1]$

Adım 2: $(z_j - c_j = \mathrm{c_{BV}B^{-1}a}_j - c_j = \mathrm{wa}_j - c_j)$ hesaplanır.

$$z_1 - c_1 = [2{,}0{,}1]\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix} - 1 = 1 \;; \qquad z_3 - c_3 = [2{,}0{,}1]\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix} - (-1) = 4\;;$$

$$z_4 - c_4 = [2{,}0{,}1]\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} - 1 = 2; \qquad z_6 - c_6 = [2{,}0{,}1]\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} - (-2) = 5;$$

$$z_7 - c_7 = [2{,}0{,}1]\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} - 0 = 2\;; \qquad z_9 - c_9 = [2{,}0{,}1]\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} - 0 = 1\;;$$

İndirgenmiş maliyeti negatif olan değişken yok, bu yüzden çözüm en iyidir.

Temel değişkenlerin değeri $x_B = \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ formülü ile hesaplanırsa;

$\begin{bmatrix}x_2\\s_2\\x_5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & -1/2\\1 & 1 & -1/2\\0 & 0 & 1/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6\\4\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\8\\2\end{bmatrix}$ olarak bulunur. Temel dışı değişkenlerin değeri 0'dır.

Amaç fonksiyon değeri $\boldsymbol{Z} = \mathbf{c_B B^{-1} b} = \mathbf{c_{BV}}\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{wb}$ formülüne göre;

$\mathbf{Z} = \mathbf{wb} = [2{,}0{,}1]\begin{bmatrix}6\\4\\4\end{bmatrix} = 16$ olur.

6.1.3 Düzeltilmiş Simpleks Yöntemi Tablo Gösterimi

Düzeltilmiş simpleks yöntemi ile elle çözmek için tablo gösteriminden faydalanılabilir. Bunun için tabloda simpleks yönteminden farklı olarak sağ taraf değerleri, simpleks çarpanları **w** ve temel matrisin tersi değerleri saklanır. Gerekli olduğunda çözüme girecek değişkenin katsayıları tabloya ek olarak ilave edilir.

Başlatma adımı

$\mathbf{B}^{-1}$ ile bir temel olurlu çözüm bul. $\mathbf{w} = \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}$, $\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ hesaplayarak aşağıdaki düzeltilmiş simpleks tablosunu oluştur:

Temel tersi	ST
w	$\mathbf{c}_B\bar{\mathbf{b}}$
$\mathbf{B}^{-1}$	$\bar{\mathbf{b}}$

Ana adım

Her temel dışı değişken için $z_j - c_j = \mathbf{wa}_j - \mathbf{c}_j$ hesapla.

$z_k - c_k = \min_{j\in J}\{z_j - c_j\}$ belirle. Eğer $z_k - c_k \geq 0$ ise dur! Mevcut çözüm en iyi çözümdür.

Değil ise $\mathbf{y}_k = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_k$ hesapla. Eğer $\mathbf{y}_k \leq 0$ ise en iyi çözüm sınırsızdır. Eğer $\mathbf{y}_k \nleq 0$ ise $\begin{bmatrix} \frac{z_k - c_k}{\mathbf{y}_k} \end{bmatrix}$ sütununu tablonun sağına ekle.

Temel tersi	ST
$\mathbf{w}$	$\mathbf{c}_B\bar{\mathbf{b}}$
$\mathbf{B}^{-1}$	$\bar{\mathbf{b}}$

x_k
$z_k - c_k$
$\mathbf{y}_k$

r indisini standart oran testi ile belirle: $\frac{\bar{b}_r}{y_{rk}} = \min\limits_{1\leq i\leq m} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{y_{ik}} : y_{ik} > 0 \right\}$

y_{rk}'ya göre pivot işlemler yaparak tabloyu güncelle, ana adımı tekrar et.

Örnek 2. Aşağıdaki DP'yi düzeltilmiş simpleks ile çözünüz.

maks z = 60x1+30x2+20x3

$$
\begin{aligned}
&\text{maks } z = 60x_1+30x_2+20x_3\\
&\text{Öyle ki;}\quad 8x_1 + 6x_2 + x_3 \leq 48\\
&\qquad\qquad 4x_1 + 2x_2 + 1{,}5x_3 \leq 20\\
&\qquad\qquad 2x_1 + 1{,}5x_2 + 0{,}5x_3 \leq 8\\
&\quad x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

Öncelikle problem standart biçime dönüştürülür:

$$
\begin{aligned}
&\text{maks } z = 60x_1+30x_2+20x_3\\
&\text{Öyle ki;}\quad 8x_1 + 6x_2 + x_3 + s_1 = 48\\
&\qquad\qquad 4x_1 + 2x_2 + 1{,}5x_3 + s_2 = 20\\
&\qquad\qquad 2x_1 + 1{,}5x_2 + 0{,}5x_3 + s_3 = 8\\
&\qquad\qquad \text{Tüm değişkenler} \geq 0
\end{aligned}
$$

<u>Başlatma adımı</u>

Başlangıçta gevşek değişkenler temel değişkendir. BV = {s_1, s_2 , s_3 },

$\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{B} = \mathrm{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; $\qquad \mathbf{w} = \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1} = [0,0,0]\mathbf{I} = [0,0,0]$

$\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{I}\begin{bmatrix} 48 \\ 20 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 48 \\ 20 \\ 8 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{c}_B\bar{\mathbf{b}} = [0,0,0]\begin{bmatrix} 48 \\ 20 \\ 8 \end{bmatrix} = 0$

Düzeltilmiş simpleks tablosunu oluştur:

	Temel Tersi			ST
z	0	0	0	0
s_1	1	0	0	48
s_2	0	1	0	20
s_3	0	0	1	8

<u>Ana adım – 1. iterasyon</u>

Her temel dışı değişken için $z_j - c_j = \mathbf{w}\mathbf{a}_j - \mathbf{c}_j$ hesapla.

$$z_1 - c_1 = \mathbf{w}\mathbf{a}_1 - \mathbf{c}_1 = [0,0,0]\begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} - 60 = -60$$

$z_2 - c_2 = \mathbf{wa}_2 - \mathbf{c}_2 = [0,0,0]\begin{bmatrix}6\\2\\1.5\end{bmatrix} - 30 = -30$

$z_3 - c_3 = \mathbf{wa}_3 - \mathbf{c}_3 = [0,0,0]\begin{bmatrix}1\\1.5\\0.5\end{bmatrix} - 20 = -20$

$\boldsymbol{z_k - c_k} = \min_{j\in J}\{\boldsymbol{z_j - c_j}\} = \boldsymbol{min}\{-60,-30,-20\} = -60 < 0$; mevcut temel olurlu çözüm en iyi değildir.

x_1 çözüme girer; k = 1. $\mathbf{y}_1 = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_1 = \mathbf{I}\begin{bmatrix}8\\4\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8\\4\\2\end{bmatrix}$: $\begin{bmatrix}\frac{z_k-c_k}{\mathbf{y}_k}\end{bmatrix}$ sütununu tablonun sağına ekle.

	Temel Tersi			ST	x_1	Oran
z	0	0	0	0	-60	
s_1	1	0	0	48	8	48/8 = 6
s_2	0	1	0	20	4	20/4=5
s_3	0	0	1	8	2	8/2=4**

Oran testi ile çıkan değişken s_3 olarak belirlenir. Yeni tabloyu elde etmek için düzeltilmiş simpleks tablosuna eklenen sütuna göre pivot işlem yapılır $\begin{bmatrix}-60\\8\\4\\1\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$.

R3' = R3 / 2; R2' = R2 – 4R3', R1' = R1 – 8R3', R0' = R0 + 60R3'

	Temel Tersi			ST
z	0	0	30	240
s_1	1	0	-4	16
s_2	0	1	-2	4
x_1	0	0	0.5	4

<u>Ana adım – 2. iterasyon</u>

Her temel dışı değişken için $z_j - c_j = \mathbf{wa}_j - \mathbf{c}_j$ hesapla. $\mathbf{w}$ vektörünü düzeltilmiş simpleks tablosu R0'dan al!

$z_2 - c_2 = \mathbf{wa}_2 - \mathbf{c}_2 = [0,0,30]\begin{bmatrix}6\\2\\1.5\end{bmatrix} - 30 = 15$

$z_3 - c_3 = \mathbf{wa}_3 - \mathbf{c}_3 = [0,0,30]\begin{bmatrix}1\\1.5\\0.5\end{bmatrix} - \mathbf{20} = -5$

$z_6 - c_6 = \mathbf{wa}_6 - \mathbf{c}_6 = [0,0,30]\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} - 0 = 30$

$\boldsymbol{z_k - c_k} = \min_{j\in J}\{\boldsymbol{z_j - c_j}\} = \boldsymbol{min}\{15,-5,30\} = -5 < 0$; mevcut çözüm en iyi değildir.

x_3 çözüme girecek; k = 3. $\mathbf{y}_3 = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix}1 & 0 & -4\\0 & 1 & -2\\0 & 0 & 0.5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1.5\\0.5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\0.5\\0.25\end{bmatrix}$. $\begin{bmatrix}\frac{z_k-c_k}{\mathbf{y}_k}\end{bmatrix}$ sütununu tablonun sağına ekle.

	Temel Tersi			ST
z	0	0	30	240
s_1	1	0	-4	16
s_2	0	1	-2	4
x_1	0	0	0.5	4

x_3	Oran
-5	
-1	--
$\boxed{0.5}$	4/0.5=8**
0.25	4/0.25=16

Oran testi ile çıkan değişken s_2 olarak belirlenir. Yeni tabloyu elde etmek için düzeltilmiş simpleks tablosuna eklenen sütuna göre pivot işlem yapılır $\begin{bmatrix} -5 \\ -1 \\ 0.5 \\ 0.25 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

R2' = R2 / 0.5; R1' = R1 + R2', R1' = R1 – 0.25 R2', R0' = R0 + 5R2'

	Temel Tersi			ST
z	0	10	10	280
s_1	1	2	-8	24
x_3	0	2	-4	8
x_1	0	-0.5	1.5	2

<u>Ana adım – 3. iterasyon</u>

Her temel dışı değişken için $z_j - c_j = \mathbf{w}\mathbf{a}_j - \mathbf{c}_j$ hesapla. $\mathbf{w}$ vektörünü düzeltilmiş simpleks tablosu R0'dan al!

$$z_2 - c_2 = \mathbf{w}\mathbf{a}_2 - \mathbf{c}_2 = [0, 10, 10] \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 1.5 \end{bmatrix} - 30 = 5$$

$$z_5 - c_5 = \mathbf{w}\mathbf{a}_5 - \mathbf{c}_5 = [0, 10, 10] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \mathbf{0} = 10$$

$$z_6 - c_6 = \mathbf{w}\mathbf{a}_6 - \mathbf{c}_6 = [0, 10, 10] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - 0 = 10$$

$\boldsymbol{z_k} - \boldsymbol{c_k} = \min_{j \in J}\{\boldsymbol{z_j} - \boldsymbol{c_j}\} = \boldsymbol{min}\{5, 10, 10\} = 5 \geq 0$; mevcut temel olurlu çözüm en iyidir.

Değişkenlerin çözümdeki değerleri tablodan görülebilir:

$x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 8$, $z = 280$.

6.2 SİMPLEKS KULLANARAK DUYARLILIK

Simpleks kullanarak yapılabilecek duyarlılık analizleri Dakota mobilya örneğinde incelenecektir. Dakota mobilya probleminde x_1, x_2, x_3 sırasıyla üretilen sıra, masa ve sandalye miktarı olarak tanımlanmıştır.

Karı enbüyüklemek için kurulan DP:

$$\text{maks } z = 60x_1 \quad 30x_2 \quad 20x_3$$

$$8x_1 + 6x_2 + x_3 + s_1 = 48 \quad \text{Tahta}$$

$4x_1 + 2x_2 + 1.5x_3 + s_2 = 20$ Montaj

$2x_1 + 1.5x_2 + .5x_3 + s_3 = 8$ Marangozluk

Bu problemin en iyi çözümü (Simpleks tablosu):

$$
\begin{array}{lllllllll}
z & & +5x_2 & & & +10s_2 & +10s_3 & = & 280 \\
 & & -2x_2 & & +s_1 & +2s_2 & -8s_3 & = & 24 \\
 & & -2x_2 & +x_3 & & +2s_2 & -4s_3 & = & 8 \\
 & +x_1 & +1.25x_2 & & & -.5s_2 & +1.5s_3 & = & 2
\end{array}
$$

En iyi çözümde BV: {s_1, x_3, x_1} , NBV:{x_2,s_2,s_3}, $\mathbf{w} = \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1} = [0,10,10]$ ve

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -0{,}5 & 1{,}5 \end{bmatrix}.$$

Analiz 1: Temel dışı değişkenin amaç fonksiyonu katsayısının değişmesi

x_j temel dışı değişkenin amaç fonksiyonu katsayısı c'_j olursa; bu değişkenin en iyi tablodaki indirgenmiş maliyeti [$z_j - c_j = \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}a_j - c'_j$] kontrol edilir.

Eğer $z_j - c_j \geq 0$ ise (Maks problemi için) mevcut temel en iyi kalır ve mevcut çözüm değişmez.

Eğer $z_j - c_j < 0$ ise (Maks problemi için) mevcut temel en iyi değildir, x_j çözüme girer ve oran testi ile hangi değişkenin çözümden çıkacağı belirlenerek yeni çözüm simpleks yöntem ile elde edilir.

x_j temel dışı değişkenin amaç fonksiyonu katsayısı için mevcut temel çözümün en iyi kalacağı aralığı bulunmak için; $c'_j = c_j + \delta$ kabul edilerek δ'nın $z_j - c_j \geq 0$ (Maks problemi için) eşitsizliğini sağlayan değerleri bulunur.

Örnek 1. Dakota Mobilya problemi için x_2'nin amaç fonksiyonu katsayısı hangi aralıklarda değişirse mevcut temel çözüm en iyi kalır?

$$c'_2 = 30 + \delta \quad \Rightarrow \quad z_2 - c_2 = [0,10,10]\begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 1{,}5 \end{bmatrix} - (30 + \delta) \geq 0$$

$$5 - \delta \geq 0 \qquad \Rightarrow \qquad \delta \leq 5$$

veya $c'_2 \leq 35$ iken mevcut temel değişmez.

Örnek 2. Dakota Mobilya probleminde masanın satış fiyatı 40 birim olursa yeni çözüm ne olur?

Masanın satış fiyatı x_2'nin amaç fonksiyonu katsayısıdır. 40 olursa Örnek 1'den görülebileceği gibi mevcut temel en iyi değildir. $z_2 - c_2 = [0{,}10{,}10]\begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 1{,}5 \end{bmatrix} - (40) = -5$ olarak hesaplanır ve x_2 çözüme girer. Oran testi ile x_1'in çözümden çıkacağı belirlenir ve simpleks ile yeni çözüm bulunur (lütfen kendiniz bulunuz).

Analiz 2. Temel değişkenin amaç fonksiyonu katsayısının değişmesi

x_k temel değişkenin amaç fonksiyonu katsayısı c'_k olursa; tüm temel dışı değişkenlerin indirgenmiş maliyetleri [$z_j - c_j = \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}a_j - c_j$] kontrol edilir.

Eğer tüm temel dışı değişkenler için $z_j - c_j \geq 0$ ise (Maks problemi için) mevcut temel en iyi kalır. Mevcut çözümdeki amaç fonksiyonu değeri değişir ve $Z = \mathbf{c_B B^{-1} b} = \mathbf{c_B \bar{b}}$ formülü ile hesaplanır.

Eğer en az bir temel dışı değişken için $z_j - c_j < 0$ ise (Maks problemi için) mevcut temel en iyi değildir, en negatif katsayılı x_j çözüme girer ve oran testi ile hangi değişkenin çözümden çıkacağı belirlenerek yeni çözüm simpleks yöntem ile elde edilir.

x_k temel değişkenin amaç fonksiyonu katsayısı için temel çözümün en iyi kalmasını sağlayacak aralığı bulunmak için; $c'_k = c_k + \delta$ kabul edilerek δ'nın tüm temel dışı değişkenler için $z_j - c_j \geq 0$ (Maks problemi için) eşitsizliğini sağlayan değerleri bulunur.

Örnek 3. Dakota Mobilya probleminde sıranın satış fiyatı (x_1'in amaç fonksiyonu katsayısı) hangi aralıklarda değişirse mevcut temel çözüm en iyi kalır?

$c'_1 = 60 + \delta$

$$z_2 - c_2 = [0, 20, 60+\delta]\begin{bmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -0{,}5 & 1{,}5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 1{,}5 \end{bmatrix} - 30 \geq 0 \Rightarrow 5 + 1.25\delta \geq 0 \Rightarrow \delta \geq -4$$

$$z_5 - c_5 = [0, 20, 60+\delta]\begin{bmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -0{,}5 & 1{,}5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 \geq 0 \Rightarrow 10 - 0.5\delta \geq 0 \Rightarrow \delta \leq 20$$

$$z_6 - c_6 = [0, 20, 60+\delta]\begin{bmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -0{,}5 & 1{,}5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - 0 \geq 0 \Rightarrow 10 + 1.5\delta \geq 0 \Rightarrow \delta \geq -20/3$$

Sonuç olarak $-4 \leq \delta \leq 20$; veya $56 \leq c'_1 \leq 80$ ise mevcut temel en iyi kalır.

Örnek 4. Dakota Mobilya probleminde sıranın satış fiyatı (x_1'in amaç fonksiyonu katsayısı) 50 olursa çözüm ne olur?

Örnek 3'te hesaplandığı gibi eğer x_1'in amaç fonksiyonu katsayısı 50 olursa mevcut temel en iyi değildir. Yeni çözümü bulabilmek için düzeltilmiş simpleks tablosu oluşturulur:

	Temel Tersi			ST
z	0	15	-5	260
s_1	1	2	-8	24
x_3	0	2	-4	8
x_1	0	-0.5	1.5	2

Temel dışı değişkenler için indirgenmiş maliyetler hesaplanır:

$z_2 - c_2 = -7.5;\quad z_5 - c_5 = 15;\quad z_6 - c_6 = -5$

x_2 çözüme girer. x_2 sütunu tabloya eklenir:

	Temel Tersi			ST	x_2	Oran
z	0	15	-5	260	-7,5	
s_1	1	2	-8	24	-2	-
x_3	0	2	-4	8	-2	-
x_1	0	-0.5	1.5	2	1.25	1.6*

x_1 çözümden çıkar. Yeni tablo:

	Temel Tersi			ST
z	0	12	4	272
s_1	1	1,2	-5,6	27,2
x_3	0	1,2	-1,6	11,2
x_2	0	-0,4	1,2	1,6

Bu çözümün en iyiliği kontrol etmek için temel dışı değişkenlerin indirgenmiş maliyetleri hesaplanmalıdır. Hesaplandığında hepsinin pozitif olduğu görülebilir (lütfen kendiniz hesaplayınız).

Sonuç olarak sıranın satış fiyatı 50 olursa firma sıra üretmeyi bırakmalı onun yerine masa üretmelidir. Üretim miktarları x_2 = 1.6; x_3 = 11.2; kar ise 272 olacaktır.

Analiz 3. Kısıt sağ taraf değerinin değişmesi

i'nci kıstın sağ taraf değeri b'_i olursa; en iyi simpleks tablosunun sağ taraf değerleri $[\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}]$ kontrol edilir.

Eğer $\bar{\mathbf{b}} \geq \mathbf{0}$ ise mevcut temel en iyi kalır. Karar değişkenlerindeki ve amaç fonksiyonu değerindeki değişim değişir, $\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ ve $Z = \mathbf{c_B}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{c_B}\bar{\mathbf{b}}$ formülleri ile hesaplanır.

Eğer $\bar{\mathbf{b}} \ngeq \mathbf{0}$ (en az bir sağ taraf değeri negatif) ise mevcut çözüm yeni durum için olurlu değildir. Bu durumda dual simpleks yöntemi ile en iyi çözüm bulunur.

i'nci kıstın sağ taraf değeri için temel çözümü değiştirmeyecek aralık bulunmak istenirse; $b'_i = b_i + \delta$ kabul edilerek δ'nın $\bar{\mathbf{b}} \geq \mathbf{0}$ eşitsizliğini sağlayan değerleri bulunur.

Örnek 5. Dakota Mobilya probleminde mevcut cilalama miktarı (İkinci kısıt sağ taraf değeri) hangi aralıklarda değişirse mevcut çözüm en iyi kalır?

$b'_2 = 20+\delta$

$$\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -0{,}5 & 1{,}5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 48 \\ 20+\delta \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24+2\delta \\ 8+2\delta \\ 2-0.5\delta \end{bmatrix} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} \delta \geq -12 \\ \delta \geq -4 \\ \delta \leq 4 \end{matrix}$$

Sonuç olarak $-4 \leq \delta \leq 4$ veya $16 \leq b'_2 \leq 24$ için mevcut temel en iyi kalır.

Örnek 6. Dakota Mobilya probleminde mevcut cilalama miktarı (İkinci kısıt sağ taraf değeri) 18 saat olursa çözüm ne olur?

Önerilen değişim mevcut cilalama miktarı için izin verilen aralıkta olduğu için mevcut temel en iyidir. Yeni karar değişkeni değerleri $\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -0{,}5 & 1{,}5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 48 \\ 18 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ olarak ($x_1 = 3$, $x_2 = 0$, $x_3 = 4$) bulunur. Yeni amaç fonksiyonu değeri ise $Z = \mathbf{c_B}\bar{\mathbf{b}} = [0, 20, 60] \begin{bmatrix} 20 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} = 260$ 'tır.

Analiz 4. Yeni bir karar değişkeni eklenmesi

Probleme yeni bir x_j karar değişkeni eklenirse; mevcut en iyi çözümün değişip değişmeyeceği bu karar değişkeni için indirgenmiş maliyet [$z_j - c_j = \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}a_j - c_j$] hesaplanarak kontrol edilir.

Eğer $z_j - c_j \geq 0$ ise (Maks problemi için) mevcut temel en iyi kalır ve mevcut çözüm değişmez.

Eğer $z_j - c_j < 0$ ise (Maks problemi için) mevcut temel en iyi değildir, x_j çözüme girer ve oran testi ile hangi değişkenin çözümden çıkacağı belirlenerek yeni çözüm simpleks yöntem ile elde edilir.

Örnek 7. Dakota Mobilya probleminde yeni bir ürün olarak sehpa üretilmesi değerlendirilmektedir. Sehpa üretimi için birer birim marangozluk, cilalama ve tahta kullanılmaktadır ve sehpanın satış fiyatı 15$'dır. Dakota için sehpa üretmek karlı olup olmadığını belirleyiniz.

x_7 üretilen sehpa miktarı olmak üzere c_7 = 15, $a_7 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ olsun. Öncelikle x_7 için indirgenmiş maliyet hesaplanır: $[z_8 - c_8 =$ [0, 10, 10] $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 15 = 5$. İndirgenmiş maliyet pozitif olduğu için mevcut çözüm en iyidir. Sonuç olarak x_7 = 0 elde edilir, yani Dakota için sehpa üretmek karlı değildir.

Analiz 5. Yeni bir kısıt eklenmesi

Probleme yeni bir kısıt eklenirse en iyi çözümün değişip değişmeyeceği eklenen yeni kısıt için en iyi tabloda sağ taraf değeri $[\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}]$ hesaplanarak kontrol edilir. Burada yeni kısıt ile birlikte temel değişken kümesine yeni kısıtla ilgili gevşek değişken eklenecektir. Dolayısıyla **B** temel matrisi ile $\mathbf{B}^{-1}$ temel matris tersi değişecektir. Bu analizi yapabilmek için öncelikle yeni $\mathbf{B}^{-1}$ bulunmalı ve $\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ hesaplanmalıdır.

Eğer $\bar{\mathbf{b}} \geq \mathbf{0}$ ise mevcut temel çözüm yeni kısıtı sağladığı anlaşılır. Mevcut temel en iyi kalır, karar değişkenlerinin ve amaç fonksiyonun değeri değişmez.

Eğer $\bar{\mathbf{b}} \ngeq \mathbf{0}$ (yeni kısıtn sağ taraf değeri negatif) ise mevcut temel çözümüm yeni kısıtı sağlamadığı anlaşılır. Mevcut çözüm yeni durum için olurlu değildir. Bu durumda simpleks tablosu oluşturularak dual simpleks yöntemi ile en iyi çözüm bulunur.

Örnek 8. Dakota Mobilya probleminde ürünler bittikten sonra son bir kalite kontrolü yapılması gerektiği ortaya çıkmıştır. Her ürün 0.5 saatte kontrol edilmektedir ve haftalık toplam 7 saat mevcuttur. Yeni durum için en iyi çözümü bulunuz.

Yeni kısıt: $0{,}5x_1 + 0{,}5x_2 + 0{,}5x_3 \leq 8 \quad \Rightarrow \quad 0{,}5x_1 + 0{,}5x_2 + 0{,}5x_3 + s_4 = 8$

Yeni temel çözüm: BV= $\{s_1, x_3, x_1, s_4\}$, NBV=$\{x_2, s_2, s_3\}$

$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 8 & 0 \\ 0 & 1.5 & 4 & 0 \\ 0 & 0.5 & 2 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 1 \end{bmatrix}$ kullanılarak $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -8 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & -0.5 & 1.5 & 0 \\ 0 & -0.75 & 1.25 & 1 \end{bmatrix}$ hesaplanır.

$\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -8 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & -0.5 & 1.5 & 0 \\ 0 & -0.75 & 1.25 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 48 \\ 20 \\ 8 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ 8 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \geq 0$ olduğu için mevcut çözüm değişmez.

7. ULAŞTIRMA SORUNLARI

7.1 ULAŞTIRMA SORUNLARININ FORMÜLASYONU

Genel olarak, bir ulaştırma sorunu aşağıdaki bilgileri barındırır:

- Bir ürün/hizmet gönderen *m* adet ***arz noktası*** (supply point). *i* arz noktası en fazla s_i birim arz edebilir.
- Ürünün/hizmetin gönderildiği *n* adet ***talep noktası*** (demand point). *j* talep noktası en az d_j birime gereksinim duyar.
- Bir birimin *i* arz noktasından *j* talep noktasına gönderilmesi maliyeti c_{ij}'dir.

Söz konusu bilgi aşağıdaki ***ulaştırma tablosu*** ile formüle edilebilir:

	Talep noktası 1	Talep noktası 2	.....	Talep noktası *n*	ARZ
Arz noktası 1	c_{11}	c_{12}		c_{1n}	s_1
Arz noktası 2	c_{21}	c_{22}		c_{2n}	s_2
.....					
Arz noktası *m*	c_{m1}	c_{m2}		c_{mn}	s_m
TALEP	d_1	d_2		d_n	

Eğer toplam talep miktarı toplam arz miktarına eşitse sorun ***dengeli ulaştırma sorunu*** olarak isimlendirilir.

x_{ij} = *i* arz noktasından *j* talep noktasına gönderilen miktar olsun.

Bu durumda ulaştırma sorununun genel DP gösterimi aşağıdaki gibidir:

$$\min \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij}$$

öyle ki $\sum_j x_{ij} \leq s_i$ $(i=1,2, ..., m)$ Arz kısıtları

$\sum_i x_{ij} \geq d_j$ $(j=1,2, ..., n)$ Talep kısıtları

$x_{ij} \geq 0$

Yukarıdaki sorun, bir enbüyükleme sorunu (ulaştırma sonucu kar elde edilmesi gibi) da olsa, kısıtlarının benzer özellikler taşıması durumunda yine bir ulaştırma sorunudur.

7.1.1 Dengeli Ulaştırma Sorununun Formülasyonu

Örnek 1. Powerco

Powerco şirketinin dört şehre hizmet veren üç adet elektrik santrali vardır. Her bir santral sırasıyla 35 milyon, 50 milyon ve 40 milyon kWh elektrik üretmektedir. Şehirlerin en yoğun saatlerde talep ettiği elektrik miktarı ise sırasıyla 45 milyon, 20 milyon, 30 milyon ve 30 milyon kWh'dir. 1 milyon kWh elektriğin bir santralden bir şehre gönderilmesinin maliyeti aşağıdaki tabloda verilmiştir. Her şehrin talebini en az maliyetle karşılamak üzere bir ulaştırma tablosunda dengeli bir ulaştırma sorunu formüle ediniz ve sorunun DP modelini gösteriniz.

	Şehir 1	Şehir 2	Şehir 3	Şehir 4
Santral 1	$8	$6	$10	$9
Santral 2	$9	$12	$13	$7
Santral 3	$14	$9	$16	$5

Yanıt:

1. Ulaştırma sorununun formülasyonu

	Şehir 1	Şehir 2	Şehir 3	Şehir 4	ARZ
Santral 1	8	6	10	9	35
Santral 2	9	12	13	7	50
Santral 3	14	9	16	5	40
TALEP	45	20	30	30	125

Toplam talep ve toplam arz eşit olduğundan (125 milyon kWh) sorun "dengeli"dir.

2. Sorunun DP modeli olarak gösterimi

x_{ij}: Santral *i*'de üretilen ve Şehir *j*'ye gönderilen elektrik miktarı (million kwh)

$$\min z = 8x_{11} + 6x_{12} + 10x_{13} + 9x_{14} + 9x_{21} + 12x_{22} + 13x_{23} + 7x_{24} + 14x_{31} + 9x_{32} + 16x_{33} + 5\,x_{34}$$

s.t. $x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq 35$ (arz kısıtları)

$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \leq 50$

$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \leq 40$

$x_{11} + x_{21} + x_{31} \geq 45$ (talep kısıtları)

$x_{12} + x_{22} + x_{32} \geq 20$

$x_{13} + x_{23} + x_{33} \geq 30$

$x_{14} + x_{24} + x_{34} \geq 30$

$x_{ij} \geq 0$ (i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3, 4)

7.1.2 Dengesiz bir Ulaştırma Sorununun Dengelenmesi

Fazla Arz

Eğer toplam arz miktarı toplam talep miktarını geçerse, sorunu dengelemek için talep miktarı aradaki fark (fazla arz miktarı) kadar olan bir ***yapay talep noktası*** yaratırız. Söz konusu noktaya yapılacak gönderimler aslında olmayacağı için bu noktaya arz noktalarından yapılacak ulaştırma maliyeti 0 olacaktır.

Karşılanmayan Talep

Eğer toplam arz miktarı toplam talep miktarından azsa, aslında olurlu bir çözüm yoktur (talepler karşılanamaz). Bu durumda karşılanamayan talep kadar arzı olan bir ***yapay arz noktası*** yaratırız. Talebin olmayan bir arz noktasından karşılanamaması beraberinde bir "ceza maliyeti" getirir.

Örnek 2. Fazla Arz için Değiştirilmiş Powerco

Şehir 1'in talebinin 40 milyon kwh olduğunu farz edelim. Bu durumda dengeli bir ulaştırma sorunu formüle ediniz.

Yanıt

Toplam talep 120 ve toplam arz 125 olduğundan sorun dengeli değildir.

Sorunu dengelemek için bir yapay talep noktası yaratırız. Söz konusu noktanın talebi 125 – 120 = 5 milyon kwh olacaktır.

Her santralden yapay talep noktasına 1 milyon kwh elektrik göndermenin maliyeti 0 olacaktır.

Tablo 4. Fazla Arz Örneği için Ulaştırma Tablosu

	Şehir 1	Şehir 2	Şehir 3	Şehir 4	Yapay	ARZ
Santral 1	8	6	10	9	0	35
Santral 2	9	12	13	7	0	50
Santral 3	14	9	16	5	0	40
TALEP	40	20	30	30	5	125

Örnek 3. Karşılanmayan Talep için Değiştirilmiş Powerco

Şehir 1'in talebinin 50 milyon kwh olduğunu farz edelim. Karşılanamayan her 1 milyon kWh elektrik için 80$ ceza maliyeti kesilirse dengeli bir ulaştırma sorunu formüle ediniz.

Yanıt

5 milyon kWh elektrik arz eden bir yapay arz noktası yaratırız.

	Şehir 1	Şehir 2	Şehir 3	Şehir 4	ARZ
Santral 1	8	6	10	9	35
Santral 2	9	12	13	7	50
Santral 3	14	9	16	5	40
Talep	80	80	80	80	5
TALEP	50	20	30	30	130

7.2 TEMEL OLURLU ÇÖZÜMÜN BULUNMASI

Dengeli bir ulaştırma sorunu için genel DP gösterimi aşağıdaki gibi yazılabilir::

$\min \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij}$

öyle ki $\sum_j x_{ij} = s_i$ $(i=1,2, \ldots, m)$ Arz kısıtları

$\sum_i x_{ij} = d_j$ $(j=1,2, \ldots, n)$ Talep kısıtları

$x_{ij} \geq 0$

Söz konusu soruna bir temel olurlu çözüm (basic feasible solution - bfs) bulmak için aşağıdaki önemli gözlemi kullanmalıyız:

"Eğer dengeli bir ulaştırma sorununda x_{ij}'lerin değerler kümesi bir kısıt haricinde tüm kısıtları sağlarsa, bu değerler o kısıdı da sağlar."

Bu gözlem ulaştırma sorununun çözümü sırasında herhangi bir kısıtı gözardı edebileceğimizi ve $m+n-1$ kısıttan oluşan bir DP çözeceğimizi gösterir. Genel olarak ilk arz kısıtı değerlendirme dışı bırakılır.

Geri kalan $m+n-1$ kısıda bfs bulmak için herhangi bir $m+n-1$ değişkenin temel çözüm verebileceğini düşünebilirsiniz: fakat söz konusu $m+n-1$ değişkenin temel çözümde olabilmesi için bir **döngü oluşturmamaları** gerekir.

En az dört hücrenin bir döngü oluşturması için:

- Herhangi ardışık iki hücrenin aynı satır veya sütunda olması gerekir
- Aynı satır veya sütunda ardışık üç hücre olmamalıdır
- Serinin son hücresi ilk hücre ile aynı satır veya sütunda olup döngüyü kapatmalıdır

Dengeli bir ulaştırma sorununa temel olurlu çözüm bulmak için üç farklı yöntem kullanılabilir:

1. Kuzeybatı Köşe (Northwest Corner) Yöntemi
2. Enküçük Maliyet (Minimum Cost) Yöntemi
3. Vogel’in Yaklaşımı

7.2.1 Kuzeybatı Köşe Yöntemi

Ulaştırma tablosunun en sol üst köşesinden başlarız ve x_{11}‘i mümkün olduğunca büyük bir değer atarız (tabii ki, x_{11} en çok s_1 ve d_1 ikilisinin en küçük değeri kadar olabilir).

- Eğer $x_{11}=s_1$ ise ilk satırı iptal ediniz ve d_1‘i d_1-s_1 olarak güncelleyiniz
- Eğer $x_{11}=d_1$ ise ilk sütunu iptal ediniz ve s_1‘i s_1-d_1 olarak güncelleyiniz
- Eğer $x_{11}=s_1=d_1$ ise ya ilk satırı ya da ilk sütunu iptal ediniz (her ikisini de değil!)
    - Eğer satırı iptal ettinizse d_1‘i sıfır yapınız
    - Eğer sütunu iptal ettinizse s_1‘i sıfır yapınız

Bu şekilde devam ederek (her seferinde geri kalan hücrelerde yeni sol-üst köşeye atama yaparak) tüm atamalar yapılır. Sonuçta, bir hücre geriye kalacaktır. Satır veya sütundaki değeri atayarak ve hem satırı hem de sütunu iptal ederek işlemi bitiriniz: bir bfs elde edilmiştir.

Örnek 1.

Aşağıdaki dengeli ulaştırma sorunu için bir bfs bulalım
(Bu yöntemde maliyetler gerekmediğinden verilmemiştir!).

				5
				1
				3
2	4	2	1	

Toplam talep toplam arza eşittir (9): sorun dengelidir.

2				3
				1
				3
X	4	2	1	

2	3			X
				1
				3
X	1	2	1	

2	3			X
	1			X
				3
X	0	2	1	

2	3			X
	1			X
	0	2	1	3
X	0	2	1	

m+n-1 (3+4-1 = 6) adet değişken atanmış olur. KBK yöntemi ile seçilen değişkenler bir döngü oluşturmadıklarından bir bfs bulunmuştur.

7.2.2 Enküçük Maliyet Yöntemi

KBK yöntemi maliyetleri göz önüne almadığından başlangıç bfs'si maliyeti yüksek olan bir çözüm olabilir ve en iyi çözümün bulunması için çok sayıda işlem gerekebilir.

Bu durumla karşılaşmamak için kullanılabilecek olan enküçük maliyet yönteminde en düşük taşıma maliyeti olan hücreye atama yapılır. Bu hücreye yapılacak x_{ij} ataması yine min {s_i, d_j} kadardır.

KBK yöntemindeki gibi atama yapılan hücrenin olduğu satır veya sütun iptal edilip arz ya da talep değeri güncellenir ve tüm atamalar yapılıncaya kadar devam edilir.

Örnek 2.

2	3	5	6	5
2	1	3	5	10
3	8	4	6	15
12	8	4	6	

[2]	[3]	[5]	[6]	5
[2]	8 [**1**]	[3]	[5]	2
[3]	[8]	[4]	[6]	15
12	X	4	6	

[2]	[3]	[5]	[6]	5
2 [**2**]	8 [1]	[3]	[5]	X
[3]	[8]	[4]	[6]	15
10	X	4	6	

5 [**2**]	[3]	[5]	[6]	X
2 [2]	8 [1]	[3]	[5]	X
[3]	[8]	[4]	[6]	15
5	X	4	6	

5 [2]	[3]	[5]	[6]	X
2 [2]	8 [1]	[3]	[5]	X
5 [3]	[8]	4 [4]	6 [6]	15
5	X	4	6	

7.2.3 Vogel Yaklaşımı

Her satır ve sütun için ceza hesaplanarak yönteme başlanır. Ceza o satır veya sütundaki en küçük iki maliyet arasındaki farktır.

Daha sonra cezası enbüyük olan satır veya sütun bulunur. Söz konusu satır veya sütundaki en düşük maliyetli hücre ilk temel değişkeni verir.

Yine KBK yöntemindeki gibi bu değişkene atanacak değer, ilgili hücrenin arz ve talep miktarlarına bağlıdır. Gerekli iptaller ve güncellemeler yapılır. Yeniden geri kalan tablo için yeni cezalar hesaplanır ve prosedüre benzer adımlarla devam edilir.

Örnek 3.

				Arz	Satır cezası
	14	22	24	5	22-14=8
	6	7	8	8	7-6=1
	15	80	78	15	78-15=**63**
Talep	12	7	9		
Sütun cezası	14-6=8	22-7=15	24-8=16		

				Arz	Satır cezası
	14 X	22	24	5	24-22=2
	6 X	7	8	8	8-7=1
	15 12	80	78	3	80-78=2
Talep	X	7	9		
Sütun cezası		22-7=15	24-8=**16**		

				Arz	Satır cezası
	14 X	22	24	5	24-22=2
	6 X	7 X	8 8	X	
	15 12	80	78	3	80-78=2
Talep	X	7	1		
Sütun cezası		80-22=**58**	78-24=54		

				Arz	Satır cezası
	14 X	22 5	24 X	X	
	6 X	7 X	8 8	X	
	15 12	80	78	3	80-78=2
Talep	X	2	1		
Sütun cezası		-	-		

<u>Vogel yaklaşımı ile elde edilen temel olurlu çözüm:</u>

				Arz
	14 X	22 5	24 x	5
	6 X	7 X	8 8	8
	15 12	80 2	78 1	15
Talep	12	7	9	

7.3 ULAŞTIRMA SİMPLEKSİ

Yöntemin Adımları

1. Eğer ulaştırma sorunu dengesiz ise dengeleyiniz.
2. Bir bfs bulmak için KBK, Enküçük Maliyet veya Vogel yöntemlerinden birini kullanınız
3. $u_1 = 0$ olarak kabul edip mevcut bfs'deki tüm temel değişkenler için $u_i + v_j = c_{ij}$ denklemini kullanarak u'ları ve v'leri hesaplayınız.
4. Tüm temel dışı değişkenler için $u_i + v_j - c_{ij} \leq 0$ ise, en iyi çözüm bulunmuştur. Eğer bu koşul sağlanmazsa $u_i + v_j - c_{ij}$ değeri en pozitif olan değişken *pivot işlemleri* ile temele girer ve temeldeki değişkenlerden biri çözümden çıkar. Böylece yeni bir bfs bulunmuş olur. Adım 3'e gidiniz.

Enbüyükleme sorunu için yine yukarıdaki adınlar uygulanır. Sadece 4. adımda aşağıdaki değişiklik yapılmalıdır:

Tüm temel dışı değişkenler için $u_i + v_j - c_{ij} \geq 0$ ise, en iyi çözüm bulunmuştur. Eğer bu koşul sağlanmazsa $u_i + v_j - c_{ij}$ değeri en negatif olan değişken *pivot işlemleri* ile temele girer ve temeldeki değişkenlerden biri çözümden çıkar. Böylece yeni bir bfs bulunmuş olur. Adım 3'e gidiniz.

Pivot işlemleri

1. Çözüme girecek olan değişken ile temel değişkenlerin bazıları veya hepsi bir döngü oluşturur (sadece bir olası döngü vardır!).
2. Döngüdeki hücreleri çözüme giren hücreden başlayarak sayınız. Sayısı çift olanları (0, 2, 4, vb.) *çift hücreler* olarak işaretleyiniz. Döngüdeki diğer hücreleri de *tek hücreler* olarak işaretleyiniz.

3. Tek hücrelerde değeri en küçük olan değişkeni bulunuz. Bu değere Φ diyelim. Bu değişken temel dışı kalacaktır. İşlemi tamamlamak için tüm tek hücrelerdeki değerlerden Φ çıkaralım ve çift hücrelerdeki değerlere Φ ekleyelim. Döngüde olmayan değişkenlerin değeri değişmez. Eğer Φ = 0 ise giren değişken 0 değeri ile çözüme girecektir.

Örnek 1. Powerco

Sorun dengelidir (toplam talep toplam arza eşittir). Powerco örneğine KBK yöntemi uygulanırsa, aşağıdaki tabloda göreülen bfs elde edilir (m+n–1=6 temel değişken!).

	Şehir 1	Şehir 2	Şehir 3	Şehir 4	ARZ
Santral 1	[8] 35	[6]	[10]	[9]	35
Santral 2	[9] 10	[12] 20	[13] 20	[7]	50
Santral 3	[14]	[9]	[16] 10	[5] 30	40
TALEP	45	20	30	30	125

$u_1 = 0$
$u_1 + v_1 = 8 \quad \Rightarrow \quad v_1 = 8$
$u_2 + v_1 = 9 \quad \Rightarrow \quad u_2 = 1$
$u_2 + v_2 = 12 \quad \Rightarrow \quad v_2 = 11$
$u_2 + v_3 = 13 \quad \Rightarrow \quad v_3 = 12$
$u_3 + v_3 = 16 \quad \Rightarrow \quad u_3 = 4$
$u_3 + v_4 = 5 \quad \Rightarrow \quad v_4 = 1$

Tüm temel dışı değişkenler için $\hat{c}_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$ hesaplanır:

$\hat{c}_{12} = 0 + 11 - 6 = 5$
$\hat{c}_{13} = 0 + 12 - 10 = 2$
$\hat{c}_{14} = 0 + 1 - 9 = -8$
$\hat{c}_{24} = 1 + 1 - 7 = -5$
$\hat{c}_{31} = 4 + 8 - 14 = -2$
$\hat{c}_{32} = 4 + 11 - 9 = 6$

$\hat{c}_{32}$ en pozitif olan değeri verdiğinden, x_{32} temel değişken olacaktır.

x_{32}'nin de olduğu döngü (3,2)-(3,3)-(2,3)-(2,2) şeklindedir: Φ = 10 bulunur.

	Şehir 1	Şehir 2	Şehir 3	Şehir 4	ARZ
Santral 1	[8] 35	[6]	[10]	[9]	35
Santral 2	[9] 10	[12] **20–Φ**	[13] **20+Φ**	[7]	50
Santral 3	[14]	[9] **Φ**	[16] **10–Φ**	[5] 30	40
TALEP	45	20	30	30	125

x_{33} temel dışı değişken olacaktır. Yeni bfs aşağıdaki tabloda verilmiştir:

u_i/v_j	8	11	12	7	ARZ
0	8 35	6	10	9	35
1	9 10	12 10	13 30	7	50
-2	14	9 10	16	5 30	40
TALEP	45	20	30	30	125

$\hat{c}_{12} = 5,\ \hat{c}_{13} = 2,\ \hat{c}_{14} = -2,\ \hat{c}_{24} = 1,\ \hat{c}_{31} = -8,\ \hat{c}_{33} = -6$

$\hat{c}_{12}$ en pozitif değeri verdiğinden, x_{12} çözüme girer.

x_{12}'nin de olduğu döngü (1,2)-(2,2)-(2,1)-(1,1) şeklindedir ve $\Phi = 10$'dur

	Şehir 1	Şehir 2	Şehir 3	Şehir 4	ARZ
Santral 1	8 **35–Φ**	6 **Φ**	10	9	35
Santral 2	9 **10+Φ**	12 **10–Φ**	13 30	7	50
Santral 3	14	9 10	16	5 30	40
TALEP	45	20	30	30	125

x_{22} çözümden çıkar. Yeni bfs aşağıdaki tabloda verilmiştir:

u_i/v_j	8	6	12	2	ARZ
0	8 25	6 10	10	9	35
1	9 20	12	13 30	7	50
3	14	9 10	16	5 30	40
TALEP	45	20	30	30	125

$\hat{c}_{13} = 2,\ \hat{c}_{14} = -7,\ \hat{c}_{22} = -5,\ \hat{c}_{24} = -4,\ \hat{c}_{31} = -3,\ \hat{c}_{33} = -1$

$\hat{c}_{13}$ en pozitif olan değeri verdiğinden, x_{13} temel değişken olacaktır.

x_{13}'ün de olduğu döngü (1,3)-(2,3)-(2,1)-(1,1) şeklindedir. $\Phi = 25$

	Şehir 1	Şehir 2	Şehir 3	Şehir 4	ARZ
Santral 1	8 **25–Φ**	6 10	10 **Φ**	9	35
Santral 2	9 **20+Φ**	12	13 **30–Φ**	7	50
Santral 3	14	9 10	16	5 30	40
TALEP	45	20	30	30	125

x_{11} temel dışı değişken olur. Yeni bfs:

u_i/v_j	6	6	10	2	ARZ
0	8	6 10	10 25	9	35
3	9 45	12	13 5	7	50
3	14	9 10	16	5 30	40
TALEP	45	20	30	30	125

$\hat{c}_{11} = -2$, $\hat{c}_{14} = -7$, $\hat{c}_{22} = -3$, $\hat{c}_{24} = -2$, $\hat{c}_{31} = -5$, $\hat{c}_{33} = -3$

Tüm $\hat{c}_{ij}$'ler negatif olduğundan en iyi çözüm bulunmuştur.

Rapor

Santral 2'den Şehir 1'e 45 milyon kwh elektrik gönderilmelidir.

Santral 1'den Şehir 2'ye 10 milyon kwh elektrik gönderilmelidir. Benzer şekilde Santral 3'den Şehir 2'ye 10 milyon kwh elektrik gönderilmelidir.

Santral 1'den Şehir 3'e 25 milyon kwh ve Santral 2'den Şehir 3'e 5 milyon kwh elektrik gönderilmelidir.

Santral 3'den Şehir 4'e 30 milyon kwh elektrik gönderilmelidir

Toplam taşıma maliyeti: $z = .9(45) + 6(10) + 9(10) + 10(25) + 13(5) + 5(30) =$ \$1020.

7.4 ULAŞTIRMA SORUNLARI İÇİN DUYARLILIK ANALİZİ

Bu bölümde ulaştırma sorunları için duyarlılık analizi ile ilgili aşağıdaki noktalar incelenmektedir:

- Temel Dışı Değişkenin (NBV) amaç fonksiyon katsayısının değiştirilmesi.
- Temel Değişkenin (BV) amaç fonksiyon katsayısının değiştirilmesi.
- Bir arzın Δ kadar artırılması ve bir talebin Δ kadar artırılması.

Bu değişiklikler Powerco sorunu kullanılarak açıklanmaktadır. Anımsanacağı gibi Powerco sorunu için en iyi çözüm z=\$1,020'dir ve en iyi tablo önceki bölümde (sayfa başında) verilmiştir.

Temel Dışı Değişkenin Amaç Fonksiyon Katsayısının Değiştirilmesi

Temel dışı bir x_{ij} değişkeninin amaç fonksiyon katsayısının değiştirilmesi en iyi tablonun sağ taraf değerini değiştirmez. Bu nedenle mevcut temel hala olurludur.

$\mathbf{c}_{BV}\mathbf{B}^{-1}$ değişmediğinden u_i'ler ve v_j'ler değişmez. 0. satırda yalnız x_{ij}'nin katsayısı değişir. Bu nedenle x_{ij}'nin katsayısı en iyi tablonun 0. satırında pozitif olmayan bir değer aldığı sürece mevcut temel en iyi kalır.

ÖRNEK: 1 milyon kwh elektriğin Santral 1'den Şehir 1'e iletim maliyetinin hangi aralıktaki değerleri için mevcut temel en iyi kalır?

c_{11}'in 8'den 8+Δ'ya değiştirildiği varsayılsın. Δ'nın hangi değerleri için mevcut temel en iyi kalır? $\bar{c}_{11} = u_1 + v_1 - c_{11} = 0 + 6 - (8 + \Delta) = -2 - \Delta$.

Bu nedenle mevcut temel -2 - Δ ≤ 0, ya da Δ ≥ -2, ve $c_{11} \geq 8 - 2 = 6$ olduğu sürece mevcut temel en iyi kalır.

Temel Değişkenin Amaç Fonksiyon Katsayısının Değiştirilmesi

$\mathbf{c}_{BV}\mathbf{B}^{-1}$ değeri değiştirildiği için 0. satırdaki her temel dışı değişkenin katsayısı değişebilir. Mevcut temelin en iyi kalıp kalmadığını belirlemek için yeni u_i'ler ve v_j'ler bulunmalı ve bu değerler kullanılarak her temel dışı değişken için olurluluk koşulu denetlenmelidir. Mevcut temel, temel dışı değişkenlerin olurluluk denetimi pozitif olmayan bir sonuç verdiği sürece en iyi kalır.

ÖRNEK: 1 milyon kwh elektriğin Santral 1'den Şehir 3'e iletim maliyetinin hangi aralıktaki değerleri için mevcut temel en iyi kalır?

c_{13}'ün 10'dan 10+Δ'ya değiştiği varsayılsın. O zaman $\bar{c}_{13} = 0$ denklemi $u_1 + v_3 = 10$'dan $u_1 + v_3 = 10 + \Delta$'ya dönüşür. Bu nedenle u_i'lerin ve v_j'lerin bulunması için, aşağıdaki denklemler çözülmelidir.

$$
\begin{aligned}
&u_1 = 0 \\
&u_2 + v_1 = 9 \\
&u_1 + v_2 = 6 \\
&u_2 + v_3 = 13 \\
&u_3 + v_2 = 9 \\
&u_1 + v_3 = 10 + \Delta \\
&u_3 + v_4 = 5
\end{aligned}
$$

Bu denklemlerin çözülmesi ile $u_1 = 0$, $v_2 = 6$, $v_3 = 10 + \Delta$, $v_1 = 6 + \Delta$, $u_2 = 3 - \Delta$, $u_3 = 3$, ve $v_4 = 2$ sonuçları elde edilir.

Bundan sonra her temel dışı değişken için olurluluk denetimi yapılır. Her temel dışı değişken 0. satırda pozitif olmayan bir katsayıya sahip olduğu sürece mevcut temel en iyi kalır.

$$
\begin{aligned}
&\bar{c}_{11} = u_1 + v_1 - 8 = \Delta - 2 \leq 0 && \Delta \leq 2 \\
&\bar{c}_{14} = u_1 + v_4 - 9 = -7 && \\
&\bar{c}_{22} = u_2 + v_2 - 12 = -3 - \Delta \leq 0 && \Delta \geq -3 \\
&\bar{c}_{24} = u_2 + v_4 - 7 = -2 - \Delta \leq 0 && \Delta \geq -2 \\
&\bar{c}_{31} = u_3 + v_1 - 14 = -5 + \Delta \leq 0 && \Delta \leq 5 \\
&\bar{c}_{33} = u_3 + v_3 - 16 = \Delta - 3 \leq 0 && \Delta \leq 3
\end{aligned}
$$

Bu nedenle mevcut temel $-2 \leq \Delta \leq 2$, ya da $8 = 10 - 2 \leq c_{13} \leq 10 + 2 = 12$ eşitsizlikleri geçerli olduğu sürece en iyi kalır.

Hem s_i Arzının Hem de d_j Talebinin Δ Kadar Artırılması

Bu değişiklik ulaştırma sorununun dengeli kalmasını sağlar. u_i'ler and v_j'ler her kısıtın gölge fiyatının negatifi olarak düşünülebileceğinden mevcut temelin en iyi kalması durumunda yeni z-değeri aşağıdaki şekilde hesaplanabilir.

yeni z-değeri = eski z-değeri + Δ (u_i) + Δ (v_j)

Örneğin, 1. Santralin arzı ve 2. Şehrin talebi 1 birim arttığında

yeni maliyet = 1,020 + 1 (0) + 1 (6) = \$ 1,026.

Karar değişkenlerinin yeni değerleri ise şu şekilde bulunabilir:

1. x_{ij} en iyi çözümdeki temel değişkense x_{ij} Δ kadar arttırılır.
2. x_{ij} en iyi çözümdeki temel dışı değişken ise x_{ij}'yi ve bazı temel değişkenleri içeren döngü bulunur. i satırında ve döngüde olan tek hücre bulunur. Bu tek hücrenin değeri Δ kadar artırılır ve döngüde dolaşılarak ve değişimli olarak değerler artırılarak ve azaltılarak mevcut temel değişkenlerin yeni değerleri bulunur.

İlk durumu göstermek üzere s_1 ve d_2 değerleri 2 birim artırılmaktadır. x_{12} en iyi çözümdeki bir temel değişken olduğu için, yeni en iyi çözüm:

		Şehir 1	Şehir 2	Şehir 3	Şehir 4	Arz
	u_i/v_j	6	6	10	2	
Santral 1	0	[8]	[6] 12	[10] 25	[9]	37
Santral 2	3	[9] 45	[12]	[13] 5	[7]	50
Santral 3	3	[14]	[9] 10	[16]	[5] 30	40
Talep		45	22	30	30	

Yeni z-değeri $1{,}020 + 2u_1 + 2v_2 = \$ 1{,}032$.

İkinci durumu göstermek üzere, hem s_1 hem de d_1 1 birim artırılmaktadır. x_{11} mevcut en iyi çözümde temel dışı bir değişken olduğu için x_{11}'i ve bazı temel değişkenleri içeren bir döngü bulunmalıdır. Döngü (1, 1) – (1, 3) – (2, 3) – (2, 1) şeklindedir. İlk satırda olup döngü içinde yer alan tek hücre x_{13}'tür. Bu nedenle yeni en iyi çözüm x_{13}

ve x_{21}'yi 1 artırarak ve x_{23}'ü 1 azaltarak bulunmaktadır. Bu değişiklik sonucu aşağıdaki en iyi çözüm ortaya konulur:

	u_i/v_j	Şehir 1	Şehir 2	Şehir 3	Şehir 4	Arz
		6	6	10	2	
Santral 1	0	[8]	[6] 10	[10] 26	[9]	36
Santral 2	3	[9] 46	[12]	[13] 4	[7]	50
Santral 3	3	[14]	[9] 10	[16]	[5] 30	40
Talep		46	20	30	30	

Yeni z-değeri = 1,020 + u_1 + v_1 = \$ 1,026'dır.

Dikkat: Hem s_1 hem d_1 5 birimden fazla arttırılırsa mevcut temel olurlu olmayan çözüm durumuna gelmektedir.

7.5 GEÇİCİ KONAKLAMA SORUNLARI

Bazı durumlarda gönderim sürecindeki bir nokta hem ürün/hizmet gönderebilir, hem de söz konusu noktaya ürün/hizmet gönderilebilir. Ürün/hizmetin arz noktasından talep noktasına gönderimi sırasında geçici olarak konakladığı bu nokta **geçici konaklama noktası** olarak isimlendirilir.

Bu özelliği olan bir gönderim sorunu geçici konaklama sorunudur.

Geçici konaklama sorununa en iyi çözüm söz konusu sorunu ulaştırma sorununa dönüştürüp ulaştırma sorununu çözerek bulunabilir.

Uyarı

"Ulaştırma Sorunlarının Formülasyonu" bölümünde belirtildiği gibi, bir başka noktaya bir ürün/hizmet gönderen fakat hiç bir noktadan ürün/hizmet alamayan nokta **arz noktası** olarak isimlendirilir.

Benzer şekilde, bir **talep noktası** da diğer noktalardan ürün/hizmet alabilir fakat hiç bir noktaya ürün/hizmet gönderemez.

Adımlar

1. Eğer sorun dengesiz ise sorunu dengeleyiniz.
   s = dengeli sorun için toplam arz (veya talep) miktarı olsun
2. Aşağıdaki şekilde bir ulaştırma tablosu kurunuz:
   Her arz ve geçici konaklama noktası için tabloda bir satır gerekecektir

Her talep ve geçici konaklama noktası için bir sütun gerekecektir

Her arz noktasının arzı o noktanın arz miktarı kadar olacaktır

Her talep noktasının talebi o noktanın talep miktarı kadar olacaktır

Her geçici konaklama noktasının arzı "o noktanın arz miktarı + *s*" kadar olacaktır

Her geçici konaklama noktasının talebi "o noktanın talep miktarı + *s*" kadar olacaktır

3. Ulaştırma sorununu çözünüz

Örnek 1. Kuruoğlu

(Winston 7.6.'dan esinlenilmiştir)

Kuruoglu Malatya ve G.Antep'deki fabrikalarında buzdolabı üretmektedir. Malatya'daki fabrika günde en fazla 150 adet, G.Antep'teki fabrika ise günde en fazla 200 adet buzdolabı üretebilmektedir. Buzdolapları uçak ile İstanbul, İzmir ve Ankara'daki müşterilere gönderilmektedir. İzmir ve İstanbul'daki müşterilerin talepleri 130 iken Ankara'daki müşterilerin talebi 50 adettir. Gönderim maliyetlerindeki değişiklikler yüzünden bazı buzdolaplarının fabrikalardan uçakla öncelikle Ankara veya Eskişehir'e gönderilmesi ve daha sonra nihai müşterilere bu şehirlerden gönderilmesi düşünülmektedir. Bir buzdolabının taşıma maliyeti aşağıdaki tabloda verilmiştir. Kuruoğlu toplam taşıma maliyetlerini enazlayacak şekilde müşteri taleplerini karşılamak istemektedir. Aşağıdaki tabloda şehirler arası birim taşıma maliyetleri verilmiştir.

TL	Ankara	Eskişehir	Istanbul	İzmir
Malatya	8	13	25	28
G.Antep	15	12	26	25
Ankara	0	6	16	17
Eskişehir	6	0	14	16

Yanıt

Bu sorunda Ankara ve Eskişehir *geçici konaklama* noktalarıdır.

Adım 1. Sorunu dengeleme

Toplam arz = 150 + 200 = 350

Toplam talep = 130 + 130 + 50 = 310

Yapay talep = 350 – 310 = 40

s = 350 (dengeli sorun için toplam arz veya talep miktarı)

Adım 2. Bir ulaştırma tablosu kurma

Geçici konaklama noktası talebi = O noktanın talep miktarı + *s*

Ankara için talep: 50 +350 = 400 Eskişehir için talep: 0 + 350 = 350

Geçici konaklama noktası arzı = O noktanın arz miktarı + s = 0 + 350 = 350

	Ankara	Eskişehir	Istanbul	Izmir	Yapay	Arz
Malatya	8	13	25	28	0	150
G.Antep	15	12	26	25	0	200
Ankara	0	6	16	17	0	350
Eskişehir	6	0	14	16	0	350
Talep	400	350	130	130	40	1050

Adım 3. Ulaştırma sorununun çözümü(Adım 2'de oluşturulan ulaştırma tablosunun ulaştırma simpleksi kullanılarak çözümü)

	Ankara	Eskişehir	Istanbul	Izmir	Yapay	Arz
Malatya	8 150	13	25	28	0	150
G.Antep	15	12 30	26	25 130	0 40	200
Ankara	0 250	6	16 100	17	0	350
Eskişehir	6	0 320	14 30	16	0	350
Talep	400	350	130	130	40	1050

Rapor:

Kuruoglu Malatya'da 150 buzdolabı üretip bunların tamamını Ankara'ya göndermelidir. Ankara'ya gelen 150 ürünün 50'si Ankara'nın talebi için kullanılırken; 100'ü İstanbul'a gönderilir. G.Antep'de 160 buzdolabı üretilmelidir (Yapayın 40 çıkması G.Antep'in 200 üretim kapasitesinin 40'nın kullanılmayacağını göstermektedir). Üretimin 130'u doğrudan İzmir'e, 30'u Eskişehir üzerinden İstanbul'a gönderilmelidir.

Bu durumda toplam taşıma maliyeti 6830 TL olacaktır.

7.6 ATAMA SORUNLARI

Ulaştırma sorunlarında her arz noktasının bir talep noktasına atanmasını ve her talebin karşılanmasını gerektiren özel bir durum söz konusudur. Bu tip sorunlar "atama sorunları" olarak isimlendirilir. Örneğin hangi işçinin veya makinenin hangi işi yapacağını belirlemek bir atama sorunudur.

7.6.1 DP Gösterimi

Bir atama sorununda bir arz noktasını bir talep noktasına atamanın maliyeti c_{ij}'dir.

Öte yandan, bir x_{ij} 0-1 tamsayı değişkeni aşağıdaki gibi tanımlanır:

x_{ij} = 1 eğer *i*. arz noktası *j*. talep noktasının talebini karşılamak üzere atanırsa

x_{ij} = 0 eğer *i*. arz noktası *j*. talep noktasının talebini karşılamazsa

Bu durumda, bir atama sorununun genel DP gösterimi aşağıdaki gibidir:

$\min \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij}$

öyle ki $\sum_j x_{ij} = 1$ (i=1,2, ..., m) Arz kısıtları

$\sum_i x_{ij} = 1$ (j=1,2, ..., n) Talep kısıtları

$x_{ij} = 0$ veya $x_{ij} = 1$

7.6.2 Macar Yöntemi

Tüm arz ve talep miktarları tamsayı olduğundan, en iyi çözümdeki tüm değişkenler de tamsayı olmalıdır. Her kısıtın ST değeri 1'e eşit olduğundan, her x_{ij} 1'den büyük olmayan ve negatif olmayan bir tamsayı olmalıdır. Bu durumda her x_{ij} 0 veya 1 olmalıdır.

$x_{ij} = 0$ veya $x_{ij} = 1$ kısıtlamasını DP gösteriminde ihmal edersek, her arz noktasının bir adet arz ettiği ve her talep noktasının bir adet talep ettiği dengeli bir ulaştırma sorunu ile karşılaşırız.

Fakat atama sorununun ulaştırma simpleks yöntemi ile çözülmesi yukarıda verilen kısıtlamayı kullanmayacağı için etkin olmayacaktır.

Bu yüzden simpleks'den daha basit bir algoritma olan Macar Yöntemi ile atama sorunları çözülür.

Uyarı

1. Amaç fonksiyonunun enbüyüklenmesi istenilen atama sorunlarında karlar matrisindeki elemanların –1 ile çarpılarak sorunun **enküçükleme** sorunu olarak Macar Yöntemi ile çözülmesi gerekir
2. Eğer maliyet matrisinde satır ve sütun sayıları eşit değilse atama sorunu **dengesiz**dir. Bu durumda sorunu Macar Yöntemi ile çözmeden önce bir veya daha fazla sayıda yapay nokta eklenerek dengelenmelidir..

Adımlar

1. $m \times m$'lik maliyet matrisinin her satırındaki en küçük maliyeti bulunuz.
2. Her maliyetten kendi satırındaki en küçük maliyeti çıkararak bir matris kurunuz.
3. Yeni matrisde her sütunun en küçük maliyetini bulunuz.

4. Bu sefer her maliyetten kendi sütunundaki en küçük maliyeti çıkararak yeni bir matris (indirgenmiş maliyet matrisi) kurunuz.
5. İndirgenmiş maliyet matrisindeki tüm sıfırları örtecek şekilde en az sayıda (yatay veya düşey) çizgi çiziniz. Eğer bu işlem için *m* adet çizgi gerekli ise en iyi çözüm bulunmuştur. Eğer gerekli çizgi sayısı *m* adetten az ise bir sonraki adıma geçiniz.
6. İndirgenmiş maliyet matrisinde Adım 5'de çizilen çizgiler ile örtülmemiş en küçük maliyeti (*k*) bulunuz.
7. Her üstünden çizgi geçmeyen maliyetten *k*'yı çıkarınız ve çift çizgi ile örtülen her maliyete *k*'yı ekleyiniz. Adım 5'e dönünüz.

Örnek 1. Uçuş Ekibi

(Winston 7.5.'den esinlenilmiştir)

Dört adet kaptan pilot (P1, P2, P3, P4) uçuşlarda beraber oldukları dört adet uçuş teknisyenini (T1, T2, T3, T4) yetkinlik, uyum ve moral motivasyon açısından 1-20 ölçeğinde değerlendirmişlerdir (1: çok iyi, 20: çok kötü). Değerlendirme notları tabloda verilmiştir. Havayolu şirketi her uçuş teknisyeninin kaptan pilotlara atamasını bu değerlendirmelere göre yapmak istemektedir.

	T1	T2	T3	T4
P1	2	4	6	10
P2	2	12	6	5
P3	7	8	3	9
P4	14	5	8	7

Yanıt:

Adım 1 & 2 Tablodaki her satır için en küçük maliyetler bulunur ve her maliyetten kendi satırındaki en küçük maliyet çıkarılır.

				Satır min					
2	4	6	10	2		0	2	4	8
2	12	6	5	2	⇒	0	10	4	3
7	8	3	9	3		4	5	0	6
14	5	8	7	5		9	0	3	2

Adım 3 & 4. Yeni matrisin her sütunun en küçük maliyeti bulunur. Her maliyetten kendi sütunundaki en küçük maliyeti çıkararak indirgenmiş maliyet matrisi elde edilir.

	0	2	4	8		0	2	4	6
	0	10	4	3	⇒	0	10	4	1
	4	5	0	6		4	5	0	4
	9	0	3	2		9	0	3	0
Sütun min	0	0	0	2					

Adım 5. Aşağıdaki tabloda gösterildiği gibi 3. ve 4. satır ile 1. sütunda çizilecek çizgiler indirgenmiş maliyet matrisindeki tüm sıfırları örter. Gerekli en az çizgi sayısı 3'dür. 4'den az çizgi gerektiğinden çözüm en iyi değildir. Bir sonraki adıma geçilir.

0	2	4	6
0	10	4	1
4	5	0	4
9	0	3	0

Adım 6 & 7. Örtülememiş en küçük maliyet 1'dir. Her örtülmemiş maliyetten 1 çıkarılır ve iki çizgi ile örtülenlere 1 eklenir.

0	**2**	**4**	**6**
0	**10**	**4**	**1**
4	5	0	4
9	0	3	0

$\Rightarrow$

0	1	3	5
0	9	3	0
5	5	0	4
10	0	3	0

Yeni tabloda tüm sıfırları dörtten daha az çizgi ile örtmek mümkün değildir. En iyi çözüm bulunmuştur.

Sütun 3'deki tek sıfır x_{33}'de ve Sütun 2'deki tek sıfır x_{42}'dedir. Satır 4 tekrar kullanılmayacağı için Sütun 4 için kalan sıfır x_{24}'dedir. Son olarak x_{11}'i seçeriz. Seçilen tüm karar değişkenleri 1'e eşittir.

Rapor:

P1 T1 ile, P2 T4 ile, P3 T3 ile ve P4 T2 ile uçmalıdır.

Örnek 2. Enbüyükleme sorunu

	F	G	H	I	J
A	6	3	5	8	10
B	2	7	6	3	2
C	5	8	3	4	6
D	6	9	3	1	7
E	2	2	2	2	8

Rapor:

En iyi kar = 36, Atamalar: A-I, B-H, C-G, D-F, E-J

Alternatif en iyi çözüm: A-I, B-H, C-F, D-G, E-J

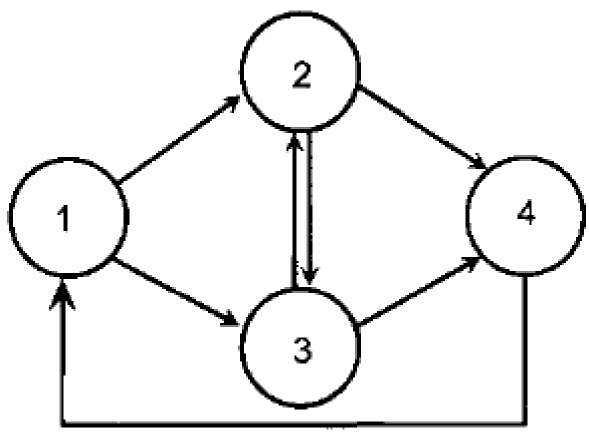
8. AĞ MODELLERİNE GİRİŞ

Telefon hatları, internet, kara yolları, elektrik sistemleri ve su dağıtım sistemleri gibi bir çok fiziksel yapı yaşamımızın içerisinde olan çok bilinen ağlardır. Bu sistemler, ürünlerin en kısa yolla veya en düşük maliyet ile istenilen yerlere gönderilmesi gibi ortak problemler içerirler. Bu fiziksel ağlar gibi bir çok en iyileme problemi de ağ gösterimi ile analiz edilebilir.

Ağ enyilemesi konusunun kökleri 1940'lara doğrusal programlamanın gelişmesine kadar gider. Bundan sonra teorik ve uygulama araştırmalarının artması ve pratik birçok probleme uygulanması ile ağ enyilemesi konusu hızla gelişmiştir.

Ders kapsamında birkaç önemli ağ modelinin tanıtımı yapılacaktır: bu konular içerisinde en kısa yol problemi, en büyük akış problemi, en küçük maliyetli akış problemi ve proje yönetimi vardır.

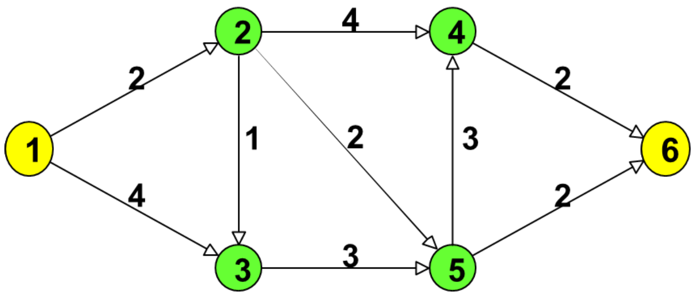
Bir ağ veya çizge iki ana unsur ile tanımlanır. Bir yönlü $G(N,S)$ ağı sonlu düğüm (köşe, nokta) kümesi N = {1,2,..., m} ve bu düğümleri birbirlerine bağlayan sonlu yönlü bağlantı (yay, dal, çizgi) kümesi S = {(i,j), (k,l),...,(s, t)} ile tanımlanır. (i,j) bağlantısı i ve j düğümlerini i'den j yönüne bağlar. Bir ağın m düğüm ve n bağlantıdan oluştuğu varsayılabilir. Örneğin aşağıdaki ağ dört düğüm ve yedi bağlantıdan oluşmaktadır ve N = {1,2,3,4}, S = {(1,2), (1,3), (2,4), (2,3), (3,2), (3,4), (4,1)}.



8.1 EN KISA YOL PROBLEMİ

m düğüm ve *n* bağlantıdan oluşan bir $G(N,S)$ ağını göz önüne alalım. Her $(i,j) \in S$ bağlantısı için bir c_{ij} maliyeti verilsin. Bir başlangıç noktasından (düğüm 1) bitiş noktasına (düğüm *m*) en kısa rotayı bulma problemine en kısa yol problemi denir.

Örnek 1. Firmalara kargo hizmeti veren ATK-Brown şirketi, bir müşterisinin ürünlerini dağıtım merkezinden (düğüm 1) müşterinin deposuna (düğüm 6) taşımak istemektedir. Olası yollar ve km cinsinden uzunlukları aşağıdaki şekilde verilmiştir. Burada problem 1. noktadan 6. noktaya ulaşmak için en kısa rotayı belirlemektir.



8.1.1 En kısa yol probleminin DP gösterimi

x_{ij} = 0 veya 1; (i,j) bağlantısının en kısa yol üzerinde olup olmadığı göstermek üzere,

$$\text{Min} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij}$$

Öyle ki; $\sum_{j=1}^{m} x_{1j} = 1$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} - \sum_{k=1}^{m} x_{ki} = 0 \qquad i=2,\ldots,m-1$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{im} = 1$$

x_{ij} = 0 veya 1, $i,j=1,2,\ldots,m$.

Burada toplamlar ağdaki mevcut olan bağlantılar için hesaplanır.

8.1.2 Dijkstra Algoritması

Tüm $c_{ij} \geq 0$ olduğu durumu göz önüne alalım. Bu durum için bir noktadan (düğüm 1) diğer tüm noktalara en kısa yolu veren çok basit ve etkin bir yöntem vardır: Dijkstra Algoritması. Bu yöntem bir etiketleme algoritmasıdır ve düğümleri önce geçici sonra da kalıcı olarak etiketleyerek ilerler.

BAŞLANGIÇ ADIMI

Başlangıç düğümü (düğüm 1) 0 olarak kalıcı etiketlenir.

Diğer tüm düğümler ∞ olarak geçici etiketlenir.

ANA ADIM

1) Tüm geçici etiketleri güncelle:

j düğümü geçici etiketi=

$$\min\begin{cases} j \text{ düğümünün mevcut geçici etiketi} \\ i \text{ düğümünün kalıcı etiketi} + (i,j)\text{bağlantısının uzunluğu}, (i,j) \in S \text{ için} \end{cases}$$

2) En küçük geçici etikete sahip düğümün geçici etiketini kalıcıya çevir.

3) Ana adımı varış düğümünün kalıcı etiketini buluncaya kadar yürüt, bulunca dur.

En kısa rotayı bulabilmek için *m*'den 1'e geriye doğru; etiketleri arasındaki fark aralarındaki mesafeye eşit olan düğümlerden geçerek gidilir.

Örnek 2. Örnek 1'deki problem için en kısa yolu bulunuz.

Yanıt: P(*i*): *i*'nin kalıcı etiketi; T(*i*): *i*'nin geçici etiketi olamak üzere;

BAŞLANGIÇ ADIMI
P(1) = 0, T(i) = ∞, i = 2,…,6.

ANA ADIM – 1'nci koşum
T(2) = min (∞, P(1) + c_{12}) = min (∞, 2) = 2
T(3) = min (∞, P(1) + c_{13}) = min (∞, 4) = 4
T(4) = T(5) = T(6) = ∞
Düğüm 2'nin geçici etiketini kalıcı hale getiriyoruz; P(2) = 2.

ANA ADIM – 2'nci koşum
T(3) = min (4, P(2) + c_{23}) = min (4, 2+1) = 3
T(4) = 6, T(5) = 4, T(6) = ∞
Düğüm 3'nin geçici etiketini kalıcı hale getiriyoruz; P(3) = 3.

ANA ADIM – 3'üncü koşum
T(4) = 6
T(5) = min (4, P(3) + c_{35}) = min (4, 6) = 4
T(6) = ∞
Düğüm 5'in geçici etiketini kalıcı hale getiriyoruz; P(5) = 4.

ANA ADIM – 4'üncü koşum
T(4) = min (6, P(5) + c_{54}) = min (6, 7) = 6
T(6) = min (∞, P(5) + c_{56}) = (∞, 6) = 6
Düğüm 6'nın geçici etiketini kalıcı hale getiriyoruz; P(6) = 6. Varış düğümünün kalıcı etiketi bulundu, dur.

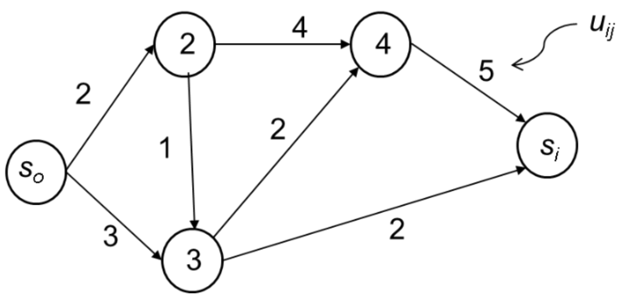
En kısa yol 1-2-5-6 düğümlerinden geçmektedir. Toplam maliyet (toplam uzaklık) 6 km'dir.

8.2 EN BÜYÜK AKIŞ PROBLEMİ

m düğüm ve *n* bağlantıdan oluşan bir *G*(*N*,*S*) ağını göz önüne alalım. Ağ üzerinden tek bir ürünün akışı planlanmak istensin. Her $(i,j) \in S$ bağlantısının üzerinde akan ürün miktarı bir u_{ij} üst limiti ile sınırlandırılsın. Bu şekilde tanımlanan bir ağda bir başlangıç noktasından (düğüm 1) bitiş noktasına (düğüm *m*) en fazla ürün akışını bulma en büyük akış problemi olarak tanımlanır. Problemde herhangi bir maliyet söz konusu değildir.

Örnek 3. (Winston 8.3'ten esinlenilmiştir.)

ATK-Petrol aşağıda verilen ağ üzerinde s_o 'dan s_i'ye bir saatte gönderilecek ham petrolü miktarını enbüyüklemek istemektedir. Ham petrol s_o 'dan s_i'ye taşınırken 2, 3 ve 4 numaralı istasyonların hepsinden veya bir kısmından geçmelidir. Şekildeki bağlantılar farklı çaptaki boru hatlarını göstermektedir. Her bir bağlantı üzerinden bir saatte taşınabilecek en fazla petrol miktarları milyon varil cinsiden şekil üzerinde verilmiştir. Burada problem verilen şartlarda s_o 'dan s_i'ye bir saatte gönderilecek en fazla ham petrol miktarını bulmaktır.



8.2.1 En büyük akış probleminin DP gösterimi

Düğüm 1'den düğüm *m*'ye akış *f* ile; (*i*,*j*) bağlantısı üzerindeki akış x_{ij} ile gösterilmek üzere;

Maks f

Öyle ki; $\sum_{j=1}^{m} x_{1j} = f$

$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} - \sum_{k=1}^{m} x_{ki} = 0$ i=2,…,*m*-1

$$\sum_{i=1}^{m} x_{im} = f$$

$$x_{ij} \leq u_{ij} \;\; i,j = 1,2,\ldots,m.$$

$x_{ij} \geq 0$, i,j=1,2,…,m.

Burada toplamlar ve eşitsizlikler ağdaki mevcut olan bağlantılar için tanımlanmıştır.

Örnek 4. Örnek 3'te verilen problemi çözmek için gerekli DP'yi kurunuz.

Yanıt:

Maks f

Öyle ki;

$$\begin{aligned}
&x_{12} + x_{13} = f\\
&x_{23} + x_{24} - x_{12} = 0\\
&x_{34} + x_{35} - x_{13} - x_{23} = 0\\
&x_{45} - x_{24} - x_{34} = 0\\
&x_{45} + x_{35} = f\\
&x_{12} \leq 2\\
&x_{13} \leq 3\\
&x_{23} \leq 1\\
&x_{24} \leq 4\\
&x_{34} \leq 2\\
&x_{35} \leq 2\\
&x_{45} \leq 7
\end{aligned}$$

Tüm değişkenler ≥ 0

(not: s_0 ve s_i noktalarının indis numaraları 1 ve 5 olarak alınmıştır.)

8.3 EN KÜÇÜK MALİYETLİ AKIŞ PROBLEMİ

En küçük maliyetli akış problemi ders kapsamında işlenen ulaştırma, atama, geçici konaklama, en küçük maliyetli akış, en büyük akış ve CPM problemlerinin en genel halidir. En küçük maliyetli akış problemine düğümler için talep ve arz değerleri ile bağlantılarla ilgili maliyetler ve üst / alt sınırlar dahil edilebilir. Problemin tanımı aşağıda verilmiştir.

m düğüm ve n bağlantıdan oluşan bir $G(N,S)$ ağını göz önüne alalım. N kümesindeki her i düğümü için bir b_i tanımlanır. b_i, eğer $b_i > 0$ ise arz miktarını, eğer $b_i < 0$ ise talep miktarını ifade eder. i düğümleri; eğer $b_i > 0$ ise arz noktası, eğer $b_i < 0$ ise talep noktası olarak sınıflandırılabilir. Eğer $b_i = 0$ ise i düğümü arz veya talep noktası değildir, geçici konaklama veya ara nokta olarak isimlendirilebilir. Her $(i,j) \in S$ bağlantısı için bağlantı üzerindeki akış x_{ij} gösterilsin. Ayrıca her bağlantı için c_{ij}

maliyeti ve bağlantı üzerindeki akışın en büyük ve en küçük miktarları u_{ij} ve l_{ij} verilsin.

En küçük maliyetli akış problemi, verilen şartlarda kullanılabilir arzın ağ boyunca taşınarak talepleri en küçük maliyetle taşınması olarak tanımlanır.

Matematiksel olarak problem aşağıdaki DP ile ifade edilebilir (toplamlar ve eşitsizlikler ağdaki mevcut olan bağlantılar için tanımlanmıştır.)

$$\text{Min} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij}$$

Öyle ki; $\sum_{j=1}^{m} x_{ij} - \sum_{k=1}^{m} x_{ki} = b_i$ $\quad i=1,\ldots,m$

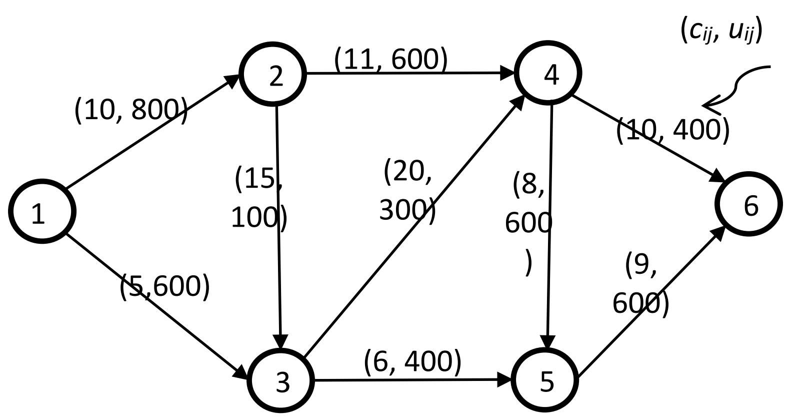
$l_{ij} \le x_{ij} \le u_{ij} \quad i,j = 1,2,\ldots,m.$

$x_{ij} \ge 0$, $i,j=1,2,\ldots,m$.

Burada akış dengeleme denklemleri olarak ifade edilen ilk kısıt *i* düğümündeki net akışın b_i'ye eşit olmasını sağlar. İkinci kısıt bağlantılardaki akışın alt ve üst sınırlar içerisinde kalmasını sağlar.

Örnek 5. (Winston 8.5'ten esinlenilmiştir.)

Aşağıda verilen yol ağına her saat 1 noktasından 900 araç girmektedir. Bu araçlardan 300 tanesi 4 noktasından, 500 tanesi 6 noktasından ve 100 tanesi de 5 noktasından çıkacaktır. Şekil üzerinde her bağlantı üzerinde, araçların bağlantıyı geçme süresi (dakika olarak) ve bağlantıdan bir saatte geçebilecek azami araç sayısı verilmiştir. tüm araçların 1 noktasından 4, 5 ve 6 noktalarına en kısa sürede varması için problemi en küçük maliyetli akış problemi olarak modelleyiniz.



9. PROJE YÖNETİMİ

9.1 KAVRAMLAR

Organizasyonlar işlerini işlemler veya projeler olarak gerçekleştirirler.

İşlemler ve projelerin ortak özellikleri:

- İnsanlar tarafından gerçekleştirilirler,
- Kıt kaynaklarla sınırlandırılırlar,
- Planlanır, uygulanır ve kontrol edilirler.

İşlemler ve projelerin farkları:

- İşlemler süregelen işlerdir ve tekrarlanır,
- Projeler geçici işlerdir ve bir kereye mahsus yürütülür.

"Bir ***proje*** tek bir ürün veya hizmet ortaya çıkarmak için yapılan geçici ve yoğun ciddi çabalardır". Burada vurgulanan *geçici* kavramı "tanımlı bir başlangıç ve bitişi olan", *tek* kavramı ise "bazı ayırt edici özelliklerine göre farklı" anlamındadır.

Projelerde kullanılan kaynaklar zaman, finans, işçilik, malzeme, makine, araç gereç vb. olarak sıralanabilir.

Proje Örnekleri:

- Yeni bir ürün veya hizmet geliştirmek,
- Yeni bir ulaşım aracı tasarlamak,
- Bir bina veya tesis inşa etmek,
- Politik kampanya yürütmek,
- Yeni bir iş sürecinin uygulanması

Yönetim genel olarak yürümekte olan bir süreç veya faaliyetin planlaması, uygulanması ve kontrolü ile ilgili olduğu düşünülür.

Proje Yönetimi kısa süre zarfında önemli faaliyetlere kaynakların ve insanların bağlantılandırılmasını ifade eder.

Proje yönetimi, paydaşların projeden beklentilerini karşılamak ve aşmak için proje faaliyetlerine bilgi, beceri, araç ve yöntemlerin uygulanmasıdır. Paydaşların projeden beklentilerini karşılama ve aşma aşağıda örnekleri verilen birbiri ile çatışan taleplerin karşılanmasını içerir:

- Kapsam, süre, maliyet, kalite,
- Farklı paydaşların farklı ihtiyaç ve beklentileri,
- Tanımlanmış ihtiyaçlar, tanımlanmamış beklentiler.

Proje Planlama
1. Amaçların tanımlanması
2. Projenin tanımlanması
3. Gerekli faaliyetlerin planlanması
4. takımların organize edilmesi

Proje Öncesi

Proje Çizelgeleme
1. Faaliyetlere kaynakların atanması
2. Faaliyetler arası ilişkilerin ayarlanması
3. Düzenli olarak güncellemelerin yapılması

Proje Kontrolü
1. Kaynakları, maliyetlerin, kalitenin ve bütçenin izlenmesi
2. Planların revize edilmesi ve değiştirilmesi
3. Taleplerin karşılanması için kaynakların kaydırılması

Proje sırasında

9.2 PROJE AĞI

Düğüm ve yönlü bağlantılardan oluşur ve faaliyetler arasındaki ilişkileri gösterir. İki türü vardır:

- Bağlantı Şeması (Activity on Arc – ***AOA***): Bağlantılar faaliyetleri gösterir, düğümler faaliyetlerin başlama ve bitişini gösterir.
- Blok Şeması (Activity on Node – ***AON***): Noktalar faaliyetleri gösterir, bağlantılar faaliyetler arasındaki öncelik ilişkilerini gösterir.

Örnek 1. Proje Ağı

Bir projede 5 faaliyet vardır.

A ve B faaliyetleri C aktivitesinden önce yapılmalıdır.

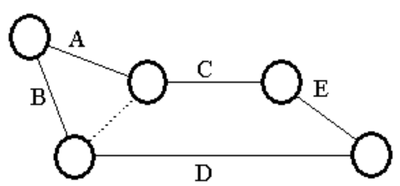
B, D'den önce yapılmalıdır.

C, E'den önce yapılmalıdır.

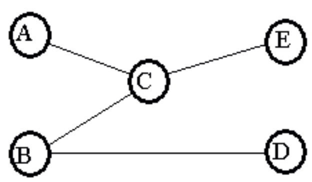
Proje ağını iki farklı türe göre çiziniz.

Yanıt:

Bağlantı Şeması



Blok Şeması



9.3 CPM/PERT

Ağ modelleri birçok faaliyet içeren büyük ve karmaşık projeleri çizelgelemek için kullanılabilir.

Eğer tüm faaliyetlerin süreleri kesin olarak biliniyorsa projenin tümünün bitirilmesi için gerekli süre ***Kritik Yol Yöntemi*** (***CPM*** - Critical Path Method) ile belirlenir. CPM faaliyetlerin proje toplam süresini uzatmadan ne kadar ertelenebileceğini bulmak için de kullanılır.

Eğer faaliyetlerin süreleri kesin olarak bilinmiyorsa proje için belirlenmiş bir teslim zamanında bitirme olasılığını bulmak için ***Program Değerlendirme ve Gözden Geçirme Tekniği*** (***PERT*** - Program Evaluation and Review Technique) yöntemi kullanılır.

CPM/PERT Uygulama Alanlarına Örnekler

- Bina, hava alanı, yol vb. inşaat projelerinin çizelgelenmesi
- Yeni bilgisayar sistemlerinin yüklenmesi
- Yeni ürünlerin tasarımı ve pazarlaması
- Gemi imalatı

CPM/PERT için ortak altı adım

1. Projeyi ve önemli faaliyetleri tanımla,
2. Faaliyetler arası ilişkileri tanımla. Öncelik ilişkilerini belirle,
3. Proje ağını çiz,
4. Her faaliyet için yapılma süresini ve/veya maliyet tahminlerini belirle,
5. Ağdaki en uzun yolu (***kritik yol***) hesapla,
6. Projeyi planlamak, çizelgelemek, takip etmek ve kontrol etmek için ağı kullan.

CPM/PERT ile cevaplanabilecek sorular

- Proje ne zaman bitecek?
- Projedeki kritik faaliyetler ve işler neler?
- Kritik olmayan faaliyetler hangileri?
- Belirli bir zamanda projenin bitme olasılığı ne?
- Proje plana göre yürüyor mu? Planın önünde mi? Planın gerisinde mi?
- Proje bütçenin üzerinde mi, altında mı?
- Projeyi zamanında bitirebilmek için yeterli kaynak var mı?

- Eğer proje planlanandan önce bitirilmek isteniyorsa bu en az maliyet ile nasıl yapılabilir?

CPM/PERT'in avantajları

- Proje yönetiminin çeşitli aşamalarında kullanılması yararlıdır.
- Matematiksel olarak çok karmaşık değildir.
- Ağ gösterimi ile kullanıcıların görsel olarak proje faaliyetleri arasındaki ilişkileri görmeleri sağlanır.
- Kritik yol ve gevşek zaman analizleri önemli faaliyetlere yakından bakmayı sağlar.
- Ağ yapısı gösterimi projelerin belgelenmesi için önemli bir kaynak oluşturur.
- Çok çeşitli projelerde ve sektörlerde uygulanabilir.
- Sadece süreleri gösteren çizelgeleri değil maliyetleri takip etmek için de yararlıdır.

CPM/PERT'in sınırlamaları

- Proje faaliyetleri açık olarak tanımlanmalıdır. Birbirlerinden bağımsız olmalıdır ve ilişkiler değiştirilemez.
- Öncelik ilişkileri belirli olmalıdır.
- PERT'teki faaliyet zamanları Beta olasılık dağılımına uymalıdır. Bu dağılıma uyduğu doğrulanmalıdır.
- Süre tahminleri genelde özneldir ve yöneticilerin görüşlerine bağlıdır.
- Kritik yola çok fazla odaklanılması riski ile karşılaşılabilir.

CPM/PERT'in uygulanması

CPM veya PERT'i uygulayabilmek için projeyi oluşturan faaliyetlerin listesi gereklidir. Tüm faaliyetler bittiğinde proje de biter. Her faaliyet için ondan önce bitmesi gereken faaliyetlerin (**öncül faaliyetler**) listesi verilmelidir.

Öncelik ilişkilerini içeren Proje Ağı (Proje şeması) hazırlanmalıdır. Bunun için bağlantı şeması (AOA) kullanılır.

Faaliyetler ve öncelik ilişkileri verilmişse proje ağı aşağıdaki kurallara göre çizilir:

- Düğüm 1, projenin ***başlangıc***ını ifade eder. 1'den çıkan bağlantılar önceliği olmayan faaliyetlerdir.
- Projenin ***bitiş***ini ifade etmek üzere bir bitiş düğümü ilave edilmelidir.

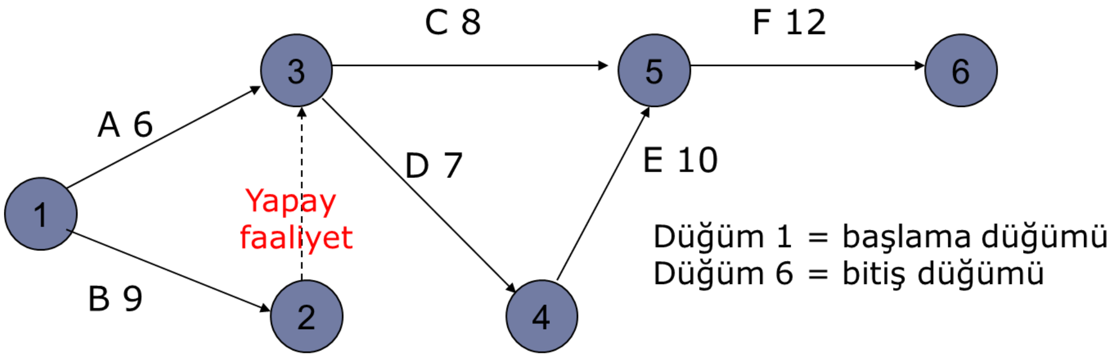
- Ağdaki düğümler öyle numaralandırılmalıdır ki; herhangi bir faaliyetin bittiğini gösteren düğüm her zaman faaliyetin başladığını gösteren düğümden daha büyük numara ile ifade edilmelidir.
- Bir faaliyet ağda birden fazla bağlantı ile gösterilemez.
- İki düğüm sadece bir bağlantı ile birleştirilebilir.
- Son iki kurala uymak için ağa sıfır süreli bir ***yapay faaliyet*** eklenebilir.

Örnek 2. Widgetco (*Winston 8.4., p. 433*)

Widgetco yeni bir ürün geliştirmektedir. Yapılması gereken faaliyetler, öncelik ilişkileri ve süreleri aşağıda verilmiştir. Bu proje için proje ağını çiziniz.

Faaliyetler	**Öncül faaliyetler**	**Süre (gün)**
A:işçilerin eğitimi	-	6
B:hammaddeleri satın alınması	-	9
C: 1. ürünün imalatı	A, B	8
D:2. ürünün imalatı	A, B	7
E: 2. ürünün test edilmesi	D	10
F: 1. ve 2. ürünlerin montajı	C, E	12

Yanıt



9.3.1 CPM

CPM için iki kilit hesap vardır:

Erken başlama zamanı (the *early event time*) ***ET*(*i*)**: *i* düğümünün en erken başlama zamanıdır.

En geç başlama zamanı (the *late event time*) ***LT*(*i*):** *i* düğümünün projenin bitiş zamanını etkilemeden en geç başlanabileceği zamanıdır.

ERKEN BAŞLAMA ZAMANI - ET

ET(1) = 0

ET(*i*) hesabı:

i düğümüne doğrudan bağlanan önceki düğümleri bul *k*; (*k*, *i*) $\in$ S.

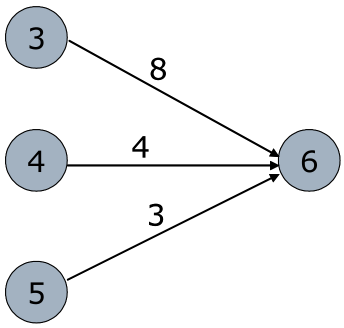
$$ET = \underset{k,(k,i)\epsilon S}{\text{maks}}\ ET(k,\ i) + d_{ki}$$

d_{ki}: (*k*,*i*) bağlantısıyla tanımlanan faaliyetin süresi.

ET(*n*) hesaplandığında dur (*n: bitiş düğümü*)

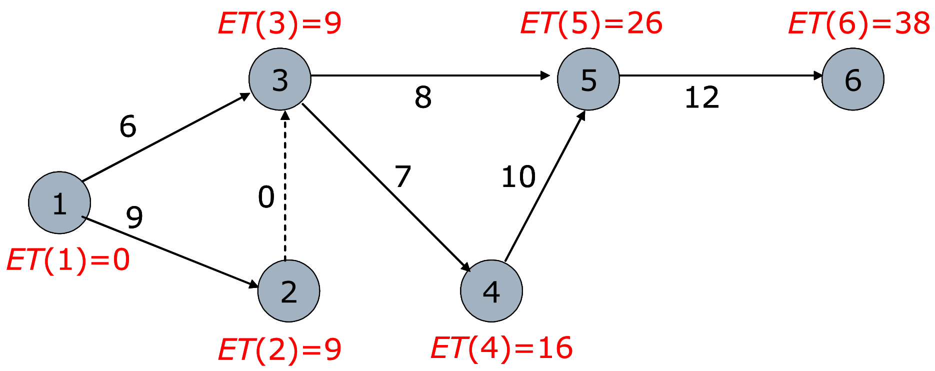
Örnek 3. ET

Proje ağının bir parçası aşağıda verilen noktalar için ET değerleri şu şekilde ise ET(6)'yı hesaplayınız: ET(3)=6, ET(4)=8, ve ET(5)=10



Yanıt: *ET*(6) = maks {*ET*(3)+8, *ET*(4)+4, *ET*(5)+3} = maks {14, 12, 13} = 14

Örnek 4. Widgetco Örneği için *ET*(*i*) değerleri



En geç başlama zamanı - LT

Bitiş düğümünden başlayarak geriye doğru git.

LT(*n*) = *ET*(*n*)

LT(*i*) hesabı:

i düğümüne doğrudan bağlanan sonraki düğümleri bul *j*; (*i*, *j*) $\in$ S.

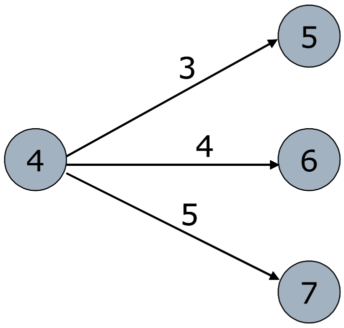
$$LT = \min_{j,(i,j)\epsilon S} LT(i,j) - d_{ij}$$

d_{ij}: (*i,j*) bağlantısıyla tanımlanan faaliyetin süresi.

ET(1) hesaplandığında dur.

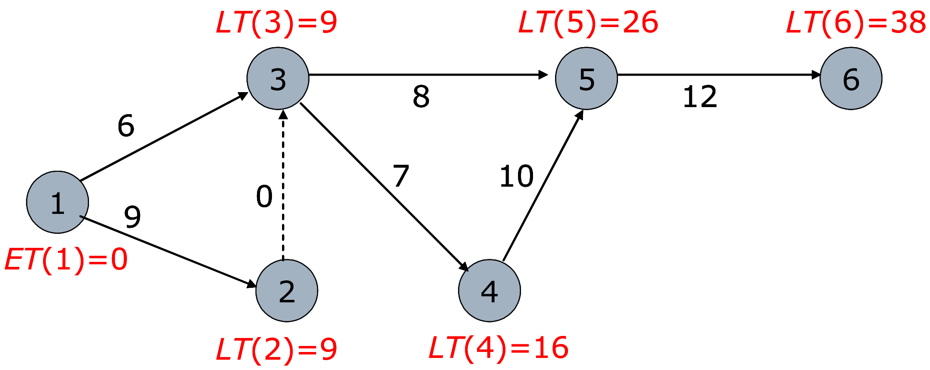
Örnek 5. LT

Proje ağının bir parçası aşağıda verilen noktalar için LT değerleri şu şekilde ise LT(4)'ü hesaplayınız:*LT*(5)=24, *LT*(6)=26, ve *LT*(7)=28



Yanıt: *LT*(4) = min {*LT*(5)–3, *LT*(6)–4, *LT*(7)–5} = min {21, 22, 23} = 21

Örnek 6. Widgetco Örneği için *LT*(*i*) değerleri



TOPLAM BOŞLUK (TOTAL FLOAT)

Proje başlamadan önce bir faaliyetin süresi bilinemez. Proje ağını kurarken kullanılan değerler faaliyetlerin gerçek bitiş süresinin yaklaşık bir tahminidir.

Toplam boşluk kavramı bir faaliyetin bitiş süresinin tahmini bitiş süresini aşmasının ne kadar önemli olduğu ile ilgili bir ölçüdür.

Bir (*i,j*) bağlantısı ile gösterilen faaliyetin toplam boşluk (Total Float) ***TF*(*i,j*)** değeri bu faaliyetin projenin bitirilme süresini etkilemeden en erken başlama zamanına göre ne kadar ertelenebileceğini gösterir. Bir başka ifade ile projenin bitirilme süresini etkilemeden bir faaliyetin süresi ne kadar arttırılabileceğini gösterir.

$$TF(i,j) = LT(j) - ET(i) - t_{ij}$$

Örnek 7. Widgetco örneği için $TF(i,j)$ değerleri

Faaliyet B: $TF(1,2) = LT(2) - ET(1) - 9 = 0$

Faaliyet A: $TF(1,3) = LT(3) - ET(1) - 6 = 3$

Faaliyet D: $TF(3,4) = LT(4) - ET(3) - 7 = 0$

Faaliyet C: $TF(3,5) = LT(5) - ET(3) - 8 = 9$

Faaliyet E: $TF(4,5) = LT(5) - ET(4) - 10 = 0$

Faaliyet F: $TF(5,6) = LT(6) - ET(5) - 12 = 0$

Yapay Faaliyet: $TF(2,3) = LT(3) - ET(2) - 0 = 0$

KRİTİK YOLUN BELİRLENMESİ

Eğer bir faaliyetin toplam boşluğu sıfır ise o faaliyetin ertelenmesi projenin bitiş zamanını öteleyecektir. Sıfır toplam boşluğa sahip bir faaliyet ***Kritik Faaliyet***tir. Başlangıç düğümünden bitiş düğümüne kadar tüm kritik faaliyetleri içeren yola ***Kritik Yol*** denir.

Örnek 8. Widgetco Örneği için Kritik Yol

$TF(1,2) = 0$
$TF(1,3) = 3$
$TF(2,3) = 0$
$TF(3,4) = 0$
$TF(3,5) = 9$
$TF(4,5) = 0$
$TF(5,6) = 0$
Widgetco için kritik yol: 1-2-3-4-5-6

SERBEST BOŞLUK (FREE FLOAT)

Bir (i,j) bağlantısı ile gösterilen faaliyetin serbest boşluk $\boldsymbol{FF(i,j)}$ değeri bu faaliyetin sonraki faaliyetlerin başlamasını etkilemeden ne kadar ertelenebileceğini gösterir.

$$FF(i,j) = ET(j) - ET(i) - t_{ij}$$

Örnek 9. Widgetco örneği için $FF(i,j)$ değerleri

Faaliyet B: FF(1,2) = 9 – 0 – 9 = 0

Faaliyet A: FF(1,3) = 9 – 0 – 6 = 3

Faaliyet D: FF(3,4) = 16 – 9 – 7 = 0

Faaliyet C: FF(3,5) = 26 – 9 – 8 = 9

Faaliyet E: FF(4,5) = 26 – 16 – 10 = 0

Faaliyet F: FF(5,6) = 38 – 26 – 12 = 0

Örneğin C Faaliyetinin FF'si 9 gündür. Bu faaliyetin başlamasının 9 günden fazla ertelenmesi sonraki faaliyetlerin (bu durumda F faaliyeti) başlama zamanını etkiler.

Kritik yol süresini bulmak için DP kullanımı

Kritik yolun süresini bulmak için DP kullanılabilir.

Karar değişkeni: x_j: *j* düğümünün zamanı

Kısıtlar: Her (*i*,*j*) faaliyeti için *j* ortaya çıkmadan önce *i* düğümü ortaya çıkmalıdır ve (*i*,*j*) faaliyeti bitirilmelidir.

$$x_j \geq x_i + t_{ij} \qquad \forall(i,j) \in S$$

Amaç projenin bitiş süresini en küçüklemektir.

$$\min z = x_n - x_1$$

Projenin kritik yolu, gölge fiyatları -1 olan kısıtlarla ilgili faaliyetleri içerir.

Eğer bir kısıtın gölge fiyatı -1 ise bu kısıtın sağ taraf değeri (faaliyetin süresi) Δ kadar arttığında amaç fonksiyonu (projenin toplam süresi) da Δ kadar artacaktır.

Örnek 10. Widgetco örneği için DP yaklaşımı

min z =	x6 - x1	
Öyle ki	x3 ≥ x1 + 6	(Bağlantı (1,3) kısıtı)
	x2 ≥ x1 + 9	(Bağlantı (1,2) kısıtı)
	x5 ≥ x3 + 8	(Bağlantı (3,5) kısıtı)
	x4 ≥ x3 + 7	(Bağlantı (3,4) kısıtı)
	x5 ≥ x4 + 10	(Bağlantı (4,5) kısıtı)
	x6 ≥ x5 + 12	(Bağlantı (5,6) kısıtı)
	x3 ≥ x2	(Bağlantı (2,3) kısıtı)
	tüm değişkenler urs	

En iyi çözüm Raporu (LINDO)

```
OBJECTIVE FUNCTION VALUE
        1)      38.00000
  VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
        X6        38.000000          0.000000
        X1         0.000000          0.000000
        X3         9.000000          0.000000
        X2         9.000000          0.000000
        X5        26.000000          0.000000
        X4        16.000000          0.000000
       ROW     SLACK OR SURPLUS      DUAL PRICES
 ARC (1,3)         3.000000          0.000000
 ARC (1,2)         0.000000         -1.000000
 ARC (3,5)         9.000000          0.000000
 ARC (3,4)         0.000000         -1.000000
 ARC (4,5)         0.000000         -1.000000
 ARC (5,6)         0.000000         -1.000000
 ARC (2,3)         0.000000         -1.000000
```

Proje 38 günde bitirilebilir.

Kritik yol: 1-2-3-4-5-6

9.3.2 Projenin hızlandırılması

Çoğu zaman projeler kritik yol süresinden daha önce bitirilmelidir. DP ile proje teslim süresine yetişmek için en düşük maliyet ile kaynakların nasıl tahsis edileceği bulunabilir. Bu sürece proje hızlandırma (crashing a project) denir.

Örnek 11. Widgetco Projesinin hızlandırılması

Widgetco geliştirdiği ürünün rakip ürüne göre piyasaya daha önce çıkmasını istemektedir. Rakibinin ürünü 26 gün sonra piyasa çıkacaktır. Bu yüzden Widgetco kendi ürününü 25 içinde piyasaya sürmelidir. Projenin bitiş süresi 38 gün olduğu için Widgetco ek harcamalar yarak 25 günlük proje bitiş süresini sağlamalıdır. Widgetco herhangibir faaliyetin süresini en fazla 5 gün azaltabilir.

Bir faaliyetin süresini bir gün düşürmenin maliyeti şu şekildedir:

- Faaliyet A $10
- Faaliyet B $20
- Faaliyet C $3
- Faaliyet D $30
- Faaliyet E $40
- Faaliyet F $50

Projeyi 25 günde bitirmenin en düşük maliyetini bulunuz.

Yanıt:

Karar değişkenleri

A: Faaliyet A'nın süresinden azaltılan gün sayısı
...
F: Faaliyet F'nin süresinden azaltılan gün sayısı
x_j: j düğümünün zamanı (j = 1,…,6)

DP

min $10A + 20B + 3C + 30D + 40E + 50F$
Öyle ki; $A \leq 5$
$B \leq 5$
$C \leq 5$
$D \leq 5$
$E \leq 5$
$F \leq 5$
$x_3 \geq x_1 + 6 - A$
$x_2 \geq x_1 + 9 - B$
$x_5 \geq x_3 + 8 - C$
$x_4 \geq x_3 + 7 - D$
$x_5 \geq x_4 + 10 - E$
$x_6 \geq x_5 + 12 - F$
$x_3 \geq x_2$
$x_6 - x_1 \leq 25$
$A, B, C, D, E, F \geq 0$; x_j urs

Çözüm ve Rapor

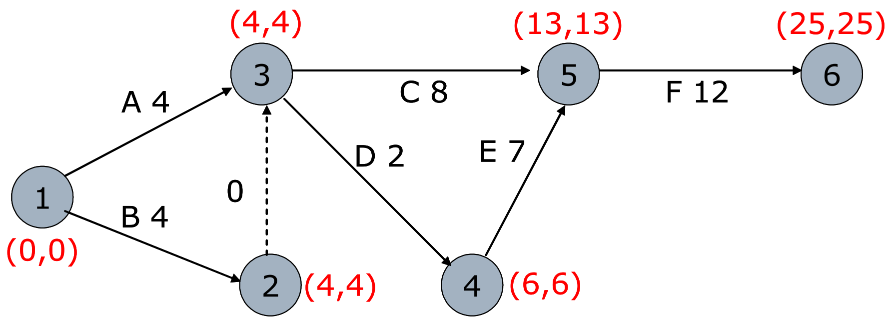
z = 390, A = 2, B = 5, C = 0, D = 5, E = 3, F = 0

$x_1 = 0, x_2 = 4, x_3 = 4, x_4 = 6, x_5 = 13, x_6 = 25$

A'yı 2, B'yi 5, D'yi 5 ve E'yi 3 gün azaltarak, proje 25 günde bitirilebilir.

Toplam maliyet $390 olacaktır.

Proje Ağı ve Kritik yol



Kritik yol: 1-2-3-4-5-6 veya 1-3-4-5-6

9.3.3 PERT

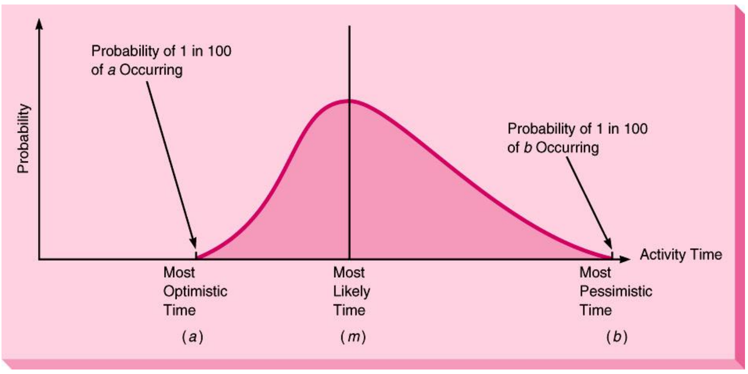
CPM'de tüm faaliyetlerin sürelerinin net olarak bilindiği varsayılır. Bir çok projede bu geçerli değildir. **PERT**'te ise faaliyetlerin süreleri rassal değişken olarak modellenir. PERT'te her faaliyet için proje yöneticileri üç değeri belirlemelidir:

- İyimser süre (a)
- Kötümser süre (b)
- Sürenin en olası değeri (m)

Bir (i,j) bağlantısı ile gösterilen faaliyetin süresi $\mathbf{T}_{ij}$ ile gösterilirse, PERT $\mathbf{T}_{ij}$ 'nin beta dağılımına uyduğunu varsayar. Bu varsayıma göre $\mathbf{T}_{ij}$'nin ortalaması (beklenen değeri) ve varyansı şu şekilde hesaplanabilir:

$$E(\mathbf{T}_{ij}) = (a + 4m + b) / 6$$
$$\text{var } \mathbf{T}_{ij} = (b - a)^2 / 36$$

Beta Olasılık Dağılımı:



PERT tüm faaliyetlerin sürelerinin bağımsız olduğunu varsayar. Buna göre herhangi bir yoldaki faaliyetleri tamamlamanın ortalama değeri ve varyansı şu şekilde hesaplanır:

Faaliyetlerin bitirilme zamanlarının ortalaması = $\sum_{(i,j)\in yol} E(T_{ij})$

Faaliyetlerin bitirilme zamanlarının varyansı = $\sum_{(i,j)\in yol} var(T_{ij})$

CPM ile bulunan kritik yol üzerindeki faaliyetlerin toplam süresini gösteren rassal değişken **CP** olarak tanımlansın. PERT'te, CPM ile elde edilen kritik yolun Merkezi Limit Teoremine göre normal dağıldığını varsayılır ve CP şu şekilde hesaplanır:

$$\mathbf{CP} = \sum_{(i,j)\in kritik\ yol} T_{ij}$$

Örnek 12. Değiştirilmiş Widgetco

Widgetco örneğinde faaliyetler için *a*, *b*, *m* değerleri tablodaki gibi verilmiştir. Projenin beklenen bitiş zamanını ve varyansını bulunuz.

Faaliyet	a	b	m
(1,2)	5	13	9
(1,3)	2	10	6
(3,5)	3	13	8
(3,4)	1	13	7
(4,5)	8	12	10
(5,6)	9	15	12

Yanıt: $E(\mathbf{T}_{12}) = (5+13+9\times4)/6 = 9$, var$\mathbf{T}_{12} = (13-5)^2/36 = 1.78$

$E(\mathbf{T}_{13}) = 6$ var$\mathbf{T}_{13} = 1.78$

$E(\mathbf{T}_{35}) = 8$ var$\mathbf{T}_{35} = 2.78$

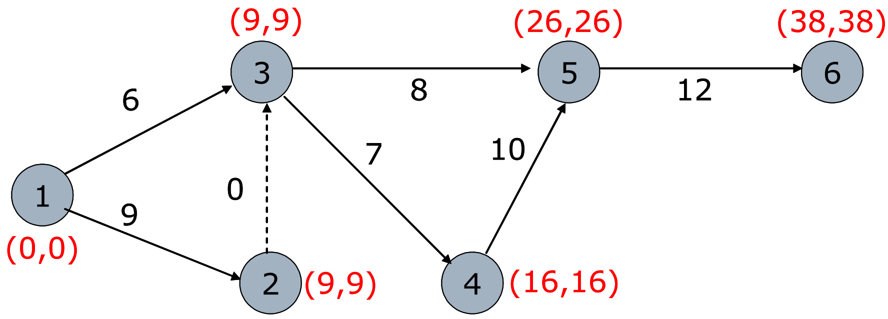
$E(\mathbf{T}_{34}) = 7$ var$\mathbf{T}_{34} = 4$

$E(\mathbf{T}_{45}) = 10$ var$\mathbf{T}_{45} = 0.44$

$E(\mathbf{T}_{56}) = 12$ var$\mathbf{T}_{56} = 1$

$E(\mathbf{T}_{23}) = 0$ var$\mathbf{T}_{23} = 0$

Proje Ağı ve Kritik Yol



Kritik yol: 1-2-3-4-5-6

E(**CP**) = 9 + 0 + 7 + 10 + 12 = 38

var**CP** = 1.78 + 0 + 4 + 0.44 + 1 = 7.22

CP'nin standart sapması = $(7.22)^{1/2}$ = 2.69

9.3.4 CP için Olasılık Analizi

Örnek 13. Değiştirilmiş Widgetco örneği için olasılık analizi

Örnek 13'te problem için projenin 35 gün içerisinde bitme olasılığı nedir?

Yanıt: CP'nin normal dağılıma uyduğu göz önüne alınırsa, Z tablosu yardımı ile istenen olasılık bulunabilir.

Standart normal birikimli olasılıklar kullanılarak (*Winston 12.6, s. 724-725*):

$P(\mathbf{CP} \le 35) = P[(\mathbf{CP}-38)/2.69 \le (35-38)/2.69)] = P(\mathbf{Z} \le -1.12) = 0.1314$

Projenin 35 gün içerisinde bitirilme olasılığı %13.14'tür.