

1 MATEMATİK NEDİR?

Matematik, akıl yürütme, problem çözme sanatı olup, tündengelimli ve tümevarımlı düşünce yolları ile, sayılar ve geometrik şekiller gibi kavramların özelliklerini ve bunların arasındaki bağlantıları inceleyen bir disiplindir. Bilimsel olan her şey bir matematik formülasyon gerektirdiğinden Matematik, bilim ve teknolojinin vazgeçilmez aracıdır.

İleride tanımlayacağımız üzere eleman olarak adlandıracağımız nesnelerin belirli topluluğuna küme denir. Bu kümenin elemanlarına uygulayacağımız bir bağıntı kümesini göz önüne alalım. Eleman ve bağıntılarla birlikte ilkel terim tanımını yapıp bu ilkel terimlerle Aksiyom tanımlayacağız. Aksiyomlar önceden belirlenmiş birbirleriyle tutarlı kurallar olarak verilir. Koyduğumuz aksiyomlar yardımıyla mantık kurallarına uygun çıkan sonuçlara ise Teorem adı verilir.

İlkel terimler, aksiyomlar ve aksiyomlardan elde edilen teoremlere bir Aksiyomatik sistem veya Matematiksel Disiplin adı verilir. Matematik bu tip aksiyomatik sistemlerin tümünü inceler.

2 AKSİYOMATİK SİSTEMLER

Bu bölümde ilk olarak aksiyomların nasıl çıktığı ile ilgili kısa bir bilgi verip sonrasında aksiyomatik sistemlerin özellikleri ve sonuçları ile ilgileneceğiz.

2.1 Aksiyomların Elde Edilmesi

Aksiyomlar, Gözlemlerin İdealleştirilmesi ve Önden Bilinen Aksiyom Kümelerinde Bazı Değişiklerin Yapılması ile iki temel kaynaktan ortaya çıkmaktadır. Birincisinde örneğin, Euclidin aksiyomları içinde yaşadığımız uzay ile ilgili gözlemlerin bir sonucu olarak elde edilmiştir. Benzer olarak diğer bilim dallarında çeşitli gözlemlerle aksiyomlaştırabiliriz. İkinci yolda ise Bilinen Aksiyomlar esas alınarak yenileri elde edilmeye çalışılır. Bu yeni sistem eskisinden oldukça farklıdır.

Şimdi Aksiyomatik sistemlerin temel özelliklerini inceleyelim.

1. **Tutarlılık:** Bir Aksiyomatik sistemin tutarlılığından bahsedebilmek için bu sistemde ele alınan bir teoremin hem kendisinin hemde olumsuzunun ispatlanamaması gerekmektedir. Tatarsız Aksiyomatik sistemlerle çalışmamak gerekir. Bir aksiyomatik sistemin tutarlılığını görmek için adına Model dediğimiz bir yol izlenmelidir. Böylece ilkel terimleri gerçek dünyadaki bazı kavramlarla ilişkilendirip sistemin bir örneği elde edilir. Bu yeni elde edilen örnekte aksiyomlardan doğru önermeler bulunmalıdır. Gerçek hayatta bir önermenin hem doğru hemde yanlış olamayacağı gerçeğinden bu örneğin tutarlı olup olmadığı anlaşılabilir. Sonlu sayıda eleman bulunan bir model, aksiyomların sonlu sayıda adımla elde edilebileceği gösterir. Ama bu her zaman doğru değildir. Sonlu modeli bulunmayan aksiyomatik sistemlerde bulunmaktadır.
2. **Bağımsızlık:** Bir aksiyomatik sistemde, aksiyomlardan bir tanesi diğerleri yardımıyla elde edilebiliyorsa bu türdeki aksiyoma Bağımlı aksiyom denir. Bağımlı olmayan aksiyomlara ise Bağımsız aksiyom denir. Aksiyomatik sistemdeki aksiyomların bağımsız olması tercih edilmektedir. Aslında diğer aksiyomlar yardımıyla elde edilen aksiyom, teorem olarak karşımıza çıkar. Bir aksiyomatik sistemdeki aksiyomların bağımsızlığını göstermek genellikle zordur. Bunun için ele alınan aksiyomun diğer aksiyomlar yardımıyla elde edilip edilemeyeceği araştırılır.
3. **Tamlık:** Tutarlı bir aksiyomatik sisteme yeni bağımsız bir aksiyom eklendiği zaman elde edilen genişletilmiş aksiyomatik sistem tutarlı ise ve herhangibir yeni ilkel terimin ilave edilmesi gerekmiyorsa ele alınan aksiyomatik sisteme Tam Değil denir.
4. **Aksiyomatik Sistemlerin Eşdeğerliliği:** Eğer iki aksiyomatik sistem birbirini gerektiriyorsa bu iki sisteme Eşdeğer vea Denk sistemler denir.

Sistemlerin eşdeğer olması için, ikinci sistemin ilkel terimleri, birinci sistemin ilkel terimleri cinsinden tanımlanabilmesi ve ikinci sistemin aksiyomları birinci sistemin teoremleri olarak ispatlanabilmesi ve tersinde doğru olması gerekmektedir.