

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

КАФЕДРА ОБЩЕЙ ФИЗИКИ

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №3.2.5

Вынужденные колебания в электрическом контуре

Маршрут III

6 октября 2018 г.
13 октября 2018 г.

Работу выполнил
Валиев Ринат, 711 гр.

Под руководством
Г.И. Лапушкина, к.ф.-м.н.

Подготовка

Цель работы

Исследование вынужденных колебаний и процессов их установления. В работе используются: генератор звуковой частоты, осциллограф, вольтметр, частотометр, ёмкость, индуктивность, магазин сопротивлений, универсальный мост.

Теоретическая часть

В данной работе будем рассматривать колебания в электрическом колебательном контуре под воздействием внешней ЭДС, гармонически изменяющейся во времени. Получаем, что при подключении внешнего источника возникнут колебания, которые будем рассматривать как решение дифференциального уравнения:

$$L\ddot{I} + R\dot{I} + \frac{I}{C} = -\mathcal{E}\Omega \sin \Omega t$$

в качестве суперпозиции двух синусоид:

$$I = Be^{-\gamma t} \sin(\omega t - \theta) + \frac{\mathcal{E}\Omega}{L\rho_0} \sin(\Omega t - \psi)$$

одна из которых с частотой собственных колебаний контура ω и амплитудой, экспоненциально убывающей со временем; вторая - с частотой внешнего источника и постоянной амплитудой. Однако со временем собственные колебания затухают, и в контуре устанавливаются вынужденные колебания. А их амплитуда максимальна, когда знаменатель второй синусоиды $\rho_0 = \sqrt{(\omega_0^2 - \Omega_0^2)^2 + (2\gamma\Omega)^2}$ минимален, то есть $\omega_0 = \Omega$ (частота внешнего сигнала совпадает с собственной частотой контура). Это явление и называется *резонансом*. Зависимость амплитуды колебаний от частоты внешнего напряжения называется *резонансной кривой*.

Резонансная кривая колебательного контура

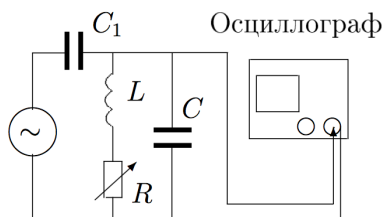


Рис. 1: Схема установки

Мы можем снять зависимость амплитуды напряжения на резисторе R от частоты на генераторе (при постоянной амплитуде выходного напряжения), однако для этого выходное сопротивление генератора должно быть много меньше импеданса контура. Для этого в цепи используется конденсатор C_1 . И в таком случае импеданс внешней по отношению к контуру цепи был гораздо больше импеданса самого контура вблизи резонанса:

$$\frac{1}{\omega C_1} \gg |Z_{\text{рез}}| = \frac{L}{RC}$$

Процессы установления и затухания колебаний

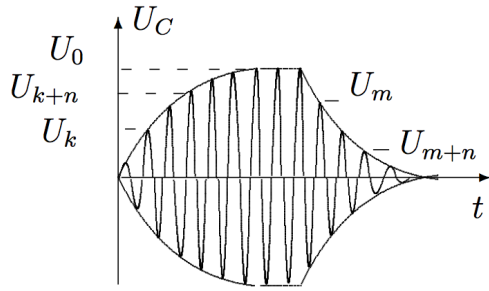


Рис. 2: Нарастание и затухание вынужденных колебаний

Добротность контура можно определить и другими способами, например, по скорости затухания свободных колебаний. Подавая на контур цуги синусоид конечной длины, можно наблюдать процессы установления и затухания колебаний в контуре. И те, и другие могут быть использованы для определения добротности контура по скорости нарастания/затухания напряжения:

$$\Theta = \frac{1}{n} \ln \frac{U_0 - U_k}{U_0 - U_{k+n}}$$

Измеряя амплитуды напряжения в какой-нибудь момент времени и через n периодов, можем посчитать добротность по формуле:

$$Q = \frac{\pi}{\gamma T} = \frac{\pi}{\Theta}$$

Установка и измерения

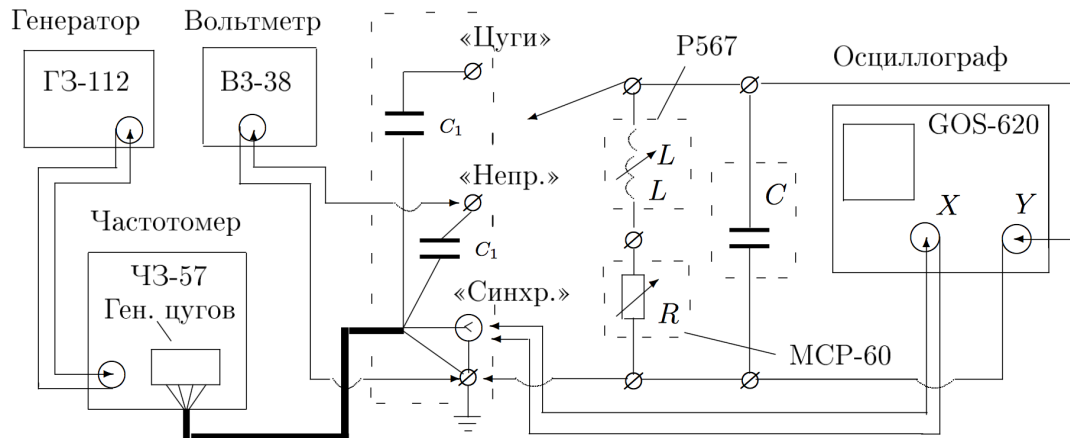


Рис. 3: Схема экспериментальной установки для исследования вынужденных колебаний

Идеальная схема, изображённая на рисунке 1, не соответствует действительности. Элементы цепи не идеальны и имеют паразитные сопротивления. Измерим все величины для разных частот с помощью RLC – моста:

$$R_L = 22.2 \text{ Ом}, L = 99.97 \text{ мГн}, C = 103.33 \text{ нФ}, R = 113.7 \text{ Ом}$$

Метод резонансных кривых

Снимем зависимость напряжения на конденсаторе от входной частоты, и получим таким образом резонансную кривую. Также в таблицу внесем погрешности измерений:

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|----------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| U , мВ | 216 | 332 | 475 | 617 | 775 | 949 | 1139 | 1329 | 1139 | 949 | 760 | 617 | 443 | 316 | 240 |
| f , кГц | 1,442 | 1,478 | 1,504 | 1,518 | 1,528 | 1,539 | 1,548 | 1,561 | 1,574 | 1,582 | 1,594 | 1,608 | 1,630 | 1,661 | 1,700 |
| U/U_0 | 0,163 | 0,250 | 0,357 | 0,464 | 0,583 | 0,714 | 0,857 | 1,000 | 0,857 | 0,714 | 0,572 | 0,464 | 0,333 | 0,238 | 0,181 |
| f/f_0 | 0,921 | 0,944 | 0,960 | 0,969 | 0,976 | 0,983 | 0,989 | 0,997 | 1,005 | 1,010 | 1,018 | 1,027 | 1,041 | 1,061 | 1,086 |
| $\Delta U/U_0$ | 0,002 | 0,002 | 0,002 | 0,002 | 0,002 | 0,003 | 0,003 | 0,003 | 0,003 | 0,003 | 0,002 | 0,002 | 0,002 | 0,002 | 0,002 |
| $\Delta f/f_0$ | 0,002 | 0,002 | 0,003 | 0,003 | 0,003 | 0,003 | 0,003 | 0,003 | 0,003 | 0,003 | 0,003 | 0,003 | 0,003 | 0,003 | 0,003 |

Таблица 1: Полученные значения при $R = 0 \text{ Ом}$

| | | | | | | | | | | | | | | |
|----------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| U , мВ | 78 | 94 | 108 | 138 | 182 | 246 | 282 | 264 | 228 | 192 | 153 | 126 | 96 | 82 |
| f , кГц | 1,276 | 1,316 | 1,360 | 1,410 | 1,460 | 1,511 | 1,564 | 1,608 | 1,652 | 1,694 | 1,762 | 1,831 | 1,955 | 2,172 |
| U/U_0 | 0,277 | 0,333 | 0,383 | 0,489 | 0,645 | 0,872 | 1,000 | 0,936 | 0,809 | 0,681 | 0,543 | 0,447 | 0,340 | 0,291 |
| f/f_0 | 0,815 | 0,840 | 0,868 | 0,900 | 0,932 | 0,965 | 0,999 | 1,027 | 1,055 | 1,082 | 1,125 | 1,169 | 1,248 | 1,387 |
| $\Delta U/U_0$ | 0,001 | 0,001 | 0,001 | 0,001 | 0,001 | 0,001 | 0,001 | 0,001 | 0,001 | 0,001 | 0,001 | 0,001 | 0,001 | 0,001 |
| $\Delta f/f_0$ | 0,002 | 0,002 | 0,002 | 0,002 | 0,002 | 0,003 | 0,003 | 0,003 | 0,003 | 0,003 | 0,003 | 0,003 | 0,003 | 0,003 |

Таблица 2: Полученные значения при $R = 100 \text{ Ом}$

Используя полученные данные построим резонансные кривые для каждой величины сопротивления:

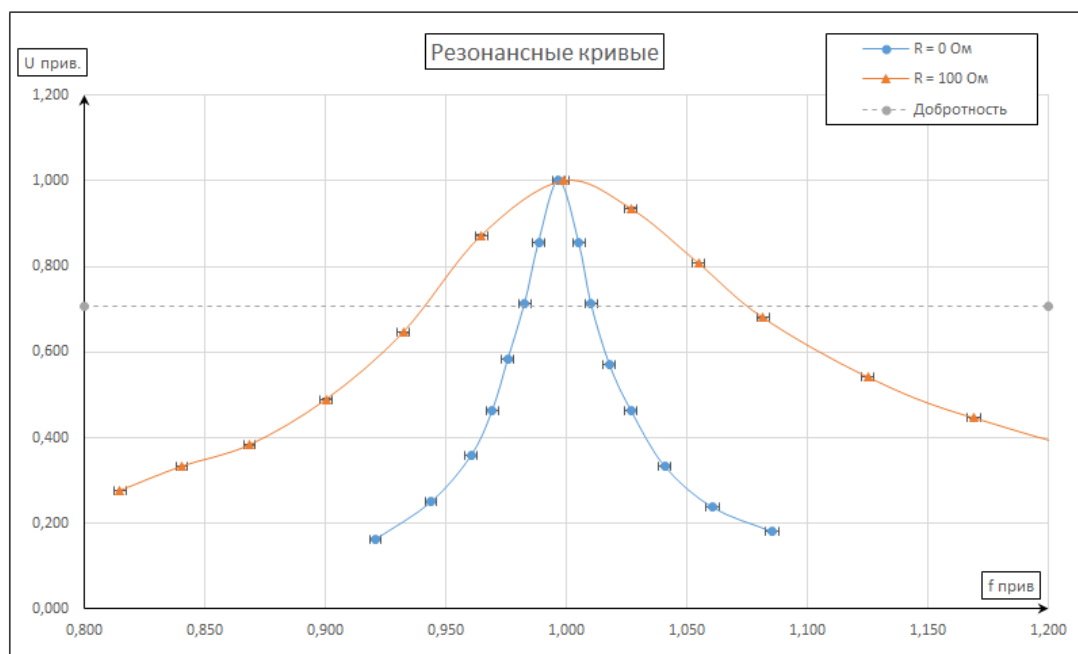


Рис. 4: Резонансные кривые для $R = 0 \text{ Ом}$, $R = 1000 \text{ Ом}$ в приведенных координатах

Метод цугов

Добротность можно определить и другим способ. Будем посылать на осциллограф синусоидальный сигнал порциями. Тогда на экране увидим как сигнал нарастает и затухает. В условиях резонанса огибающая затухающих колебаний – это перевернутая огибающая нарастающего участка. Снимем три пары точек для дальнейших вычислений:

| | Нарастание | | | | | | Затухание | | | | | |
|-----------------|------------|------|------|------|------|-----|-----------|------|------|-----|------|-----|
| R , Ом | 0 | | | 100 | | | 0 | | | 100 | | |
| U_0 , дел | 39 | | | 40 | | | - | | | | | |
| U_k , дел | 4 | 7 | 10 | 10 | 20 | 10 | 37 | 36 | 32 | 40 | 31.5 | 40 |
| U_{k+n} , дел | 24.5 | 30 | 35 | 37.5 | 37.5 | 36 | 16.5 | 10 | 5 | 4 | 4 | 6.5 |
| n | 9 | 13 | 20 | 6 | 5 | 5 | 9 | 13 | 20 | 6 | 5 | 5 |
| Q | 32.1 | 32.2 | 31.7 | 7.6 | 7.6 | 7.8 | 35.0 | 31.9 | 33.8 | 8.2 | 7.6 | 8.6 |

Таблица 3: Измерение добротности по нарастанию и затуханию

Используем данные таблицы 3 и формулы в начале работы для расчета добротности по скорости нарастания и затухания колебаний. Результаты внесем в таблицу 4.

Погрешности

Погрешности измерений и вычислений определим через параметры приборов и по шкале осциллографа. Приведем лишь некоторые формулы расчета погрешностей:

Для погрешности теоретического вычисления погрешности используем:

$$\Delta_Q = \sqrt{\left(\frac{\partial Q}{\partial R}\right)^2 \cdot \Delta_R^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial L}\right)^2 \cdot \Delta_L^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial C}\right)^2 \cdot \Delta_C^2}$$

$$\Delta_Q = \sqrt{\frac{L}{R^4 C} \cdot \Delta_R^2 + \frac{1}{4R^2 LC} \cdot \Delta_L^2 + \frac{L}{4C^3 R^2} \cdot \Delta_C^2}$$

В случае вычисления добротности через затухающую часть графика имеем:

$$Q = \frac{\pi}{\Theta}, \quad \text{где } \Theta = \frac{1}{n} \ln\left(\frac{U_k}{U_{k+n}}\right)$$

$$\Delta_\Theta = \sqrt{\left(\frac{\partial \Theta}{\partial U_k}\right)^2 \cdot \Delta_{U_k}^2 + \left(\frac{\partial \Theta}{\partial U_{k+n}}\right)^2 \cdot \Delta_{U_{k+n}}^2}$$

$$\Delta_Q = \pi \cdot \frac{\Delta_\Theta}{\Theta^2}$$

Итоги

В работе были определены добротности контуров с и без дополнительного сопротивления R_{100} разными способами.

| | Теория | Резонансная кривая | Нарастание | Убывание |
|-------------|--------|--------------------|-------------|--------------|
| $Q_{R=0}$ | 36.2 | 34.5 ± 1.2 | 32 ± 4 | 33.6 ± 3 |
| $Q_{R=100}$ | 7.0 | 6.2 ± 0.4 | 7.6 ± 1 | 8.1 ± 1 |

Таблица 4: Сравнение экспериментальных значений добротности, полученных разными методами

В целом добротности оказались примерно одинаковыми при измерении разными способами. Однако, результаты немного разнятся. Следует заметить, что магазин сопротивлений мог дать значительный вклад для сопротивления в контуре с $R = 0$ Ом, т.к. резисторы собраны в виде катушек. Данный факт не был учтен в работе.

Замечание

Рассмотрим процесс установления колебаний в контуре с высокой добротностью вблизи резонанса. Этот процесс описывается при начальных условиях ($U = 0, \dot{U} = 0$) формулой:

$$U = U_0[\cos(\Omega t - \psi) - \exp^{\gamma t} \cos(\omega_0 t - \psi)]$$

Напряжение содержит два близких по частоте колебания, между которыми происходят биения. Появление биений связано с тем, что разность фаз этих колебаний медленно меняется; при нулевой разности фаз они вычитаются друг из друга, а при расхождении фаз на π – складываются. Амплитуда колебаний то растет, то падает, испытывая биения. При порционных сигналах также наблюдаются схожая картина.

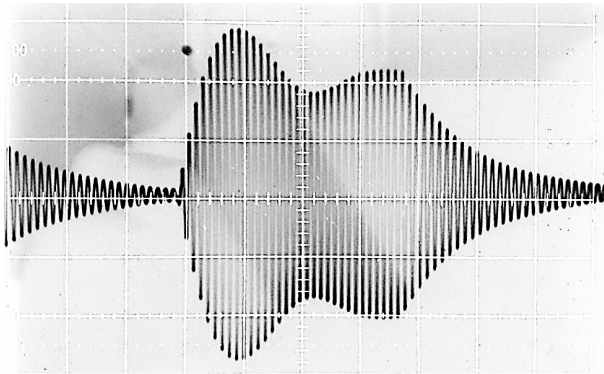


Рис. 5: Биение колебаний вблизи резонанса