

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

КАФЕДРА ОБЩЕЙ ФИЗИКИ

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №3.2.5

Вынужденные колебания в электрическом контуре

Маршрут III

6 октября 2018 г.
13 октября 2018 г.

Работу выполнил
Валиев Ринат, 711 гр.

Под руководством
Г.И. Лапушкина, к.ф.-м.н.

Подготовка

Цель работы

Исследование вынужденных колебаний и процессов их установления. В работе используются: генератор звуковой частоты, осциллограф, вольтметр, частотометр, ёмкость, индуктивность, магазин сопротивлений, универсальный мост.

Теоретическая часть

В данной работе будем рассматривать колебания в электрическом колебательном контуре под воздействием внешней ЭДС, гармонически изменяющейся во времени. Получаем, что при подключении внешнего источника возникнут колебания, которые будем рассматривать как решение дифференциального уравнения:

$$L\ddot{I} + R\dot{I} + \frac{I}{C} = -\mathcal{E}\Omega \sin \Omega t$$

в качестве суперпозиции двух синусоид:

$$I = Be^{-\gamma t} \sin(\omega t - \theta) + \frac{\mathcal{E}\Omega}{L\rho_0} \sin(\Omega t - \psi)$$

одна из которых с частотой собственных колебаний контура ω и амплитудой, экспоненциально убывающей со временем; вторая - с частотой внешнего источника и постоянной амплитудой. Однако со временем собственные колебания затухают, и в контуре устанавливаются вынужденные колебания. А их амплитуда максимальна, когда знаменатель второй синусоиды $\rho_0 = \sqrt{(\omega_0^2 - \Omega_0^2)^2 + (2\gamma\Omega)^2}$ минимален, то есть $\omega_0 = \Omega$ (частота внешнего сигнала совпадает с собственной частотой контура). Это явление и называется *резонансом*. Зависимость амплитуды колебаний от частоты внешнего напряжения называется *резонансной кривой*.

Резонансная кривая колебательного контура

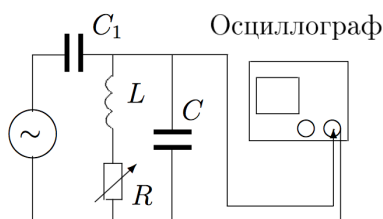


Рис. 1: Схема установки

Мы можем снять зависимость амплитуды напряжения на резисторе R от частоты на генераторе (при постоянной амплитуде выходного напряжения), однако для этого выходное сопротивление генератора должно быть много меньше импеданса контура. Для этого в цепи используется конденсатор C_1 . И в таком случае импеданс внешней по отношению к контуру цепи был гораздо больше импеданса самого контура вблизи резонанса:

$$\frac{1}{\omega C_1} \gg |Z_{\text{рез}}| = \frac{L}{RC}$$

Процессы установления и затухания колебаний

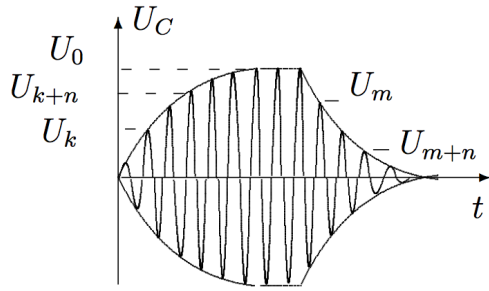


Рис. 2: Нарастание и затухание вынужденных колебаний

Добротность контура можно определить и другими способами, например, по скорости затухания свободных колебаний. Подавая на контур цуги синусоид конечной длины, можно наблюдать процессы установления и затухания колебаний в контуре. И те, и другие могут быть использованы для определения добротности контура по скорости нарастания/затухания напряжения:

$$\Theta = \frac{1}{n} \ln \frac{U_0 - U_k}{U_0 - U_{k+n}}$$

Измеряя амплитуды напряжения в какой-нибудь момент времени и через n периодов, можем посчитать добротность по формуле:

$$Q = \frac{\pi}{\gamma T} = \frac{\pi}{\Theta}$$

Установка и измерения

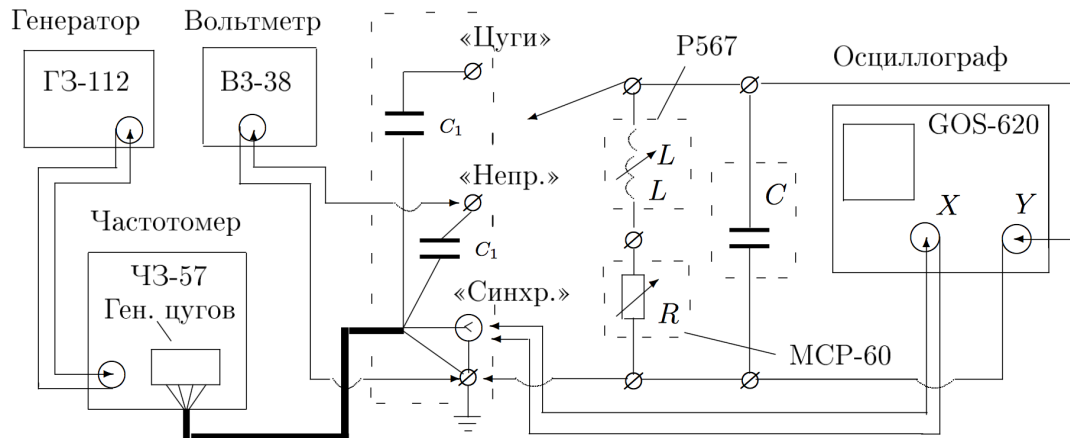


Рис. 3: Схема экспериментальной установки для исследования вынужденных колебаний

Идеальная схема, изображённая на рисунке 1, не соответствует действительности. Элементы цепи не идеальны и имеют паразитные сопротивления. Измерим все величины для разных частот с помощью RLC – моста:

$$R_L = 22.2 \text{ Ом}, L = 99.97 \text{ мГн}, C = 103.33 \text{ нФ}, R = 113.7 \text{ Ом}$$

Метод резонансных кривых

Снимем зависимость напряжения на конденсаторе от входной частоты, и получим таким образом резонансную кривую. Также в таблицу внесем погрешности измерений:

U , мВ	216	332	475	617	775	949	1139	1329	1139	949	760	617	443	316	240
f , кГц	1,442	1,478	1,504	1,518	1,528	1,539	1,548	1,561	1,574	1,582	1,594	1,608	1,630	1,661	1,700
U/U_0	0,163	0,250	0,357	0,464	0,583	0,714	0,857	1,000	0,857	0,714	0,572	0,464	0,333	0,238	0,181
f/f_0	0,921	0,944	0,960	0,969	0,976	0,983	0,989	0,997	1,005	1,010	1,018	1,027	1,041	1,061	1,086
$\Delta U/U_0$	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,003	0,003	0,003	0,003	0,003	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002
$\Delta f/f_0$	0,002	0,002	0,003	0,003	0,003	0,003	0,003	0,003	0,003	0,003	0,003	0,003	0,003	0,003	0,003

Таблица 1: Полученные значения зависимости амплитудного напряжения от частоты для дальнейшего построения АЧХ при $R = 0$ Ом

U , мВ	78	94	108	138	182	246	282	264	228	192	153	126	96	82
f , кГц	1,276	1,316	1,360	1,410	1,460	1,511	1,564	1,608	1,652	1,694	1,762	1,831	1,955	2,172
U/U_0	0,277	0,333	0,383	0,489	0,645	0,872	1,000	0,936	0,809	0,681	0,543	0,447	0,340	0,291
f/f_0	0,815	0,840	0,868	0,900	0,932	0,965	0,999	1,027	1,055	1,082	1,125	1,169	1,248	1,387
$\Delta U/U_0$	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001
$\Delta f/f_0$	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,003	0,003	0,003	0,003	0,003	0,003	0,003	0,003	0,003

Таблица 2: Полученные значения зависимости амплитудного напряжения от частоты для дальнейшего построения АЧХ при $R = 100$ Ом

Используя полученные данные построим резонансные кривые для каждой величины сопротивления:

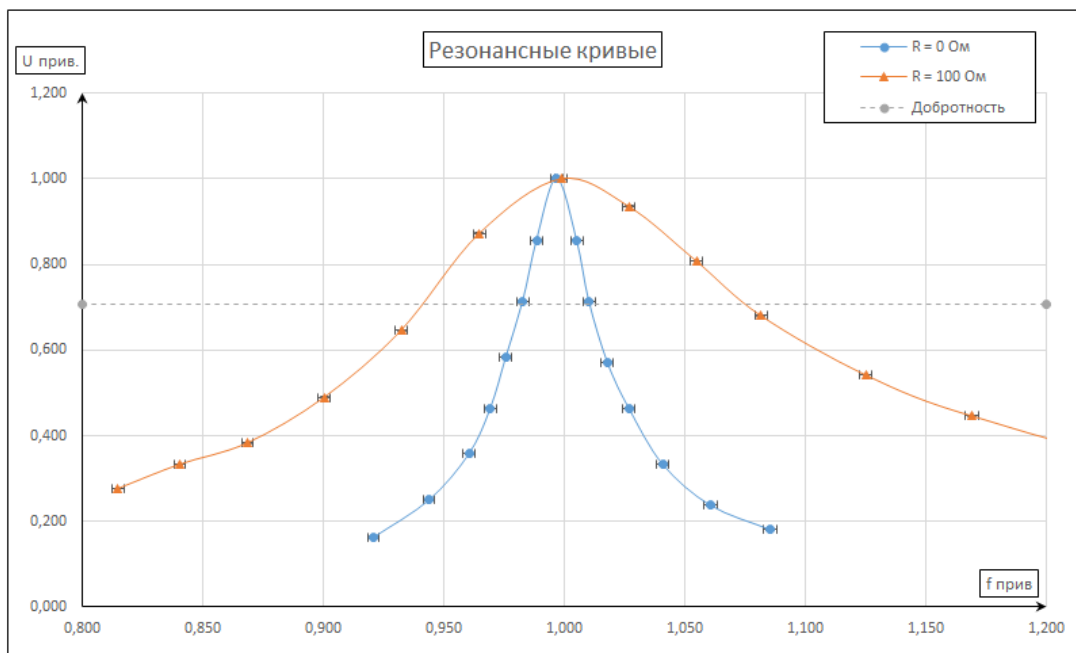


Рис. 4: Резонансные кривые для $R = 0$ Ом, $R = 1000$ Ом в приведенных координатах; значения из таблиц 1 и 2. Также нанесена прямая для определения добротности по ширине кривых.

Метод цугов

Добротность можно определить и другим способ. Будем посылать на осциллограф синусоидальный сигнал порциями. Тогда на экране увидим как сигнал нарастает и затухает. В условиях резонанса огибающая затухающих колебаний – это перевернутая огибающая нарастающего участка. Снимем три пары точек для дальнейших вычислений:

	Нарастание						Затухание					
R , Ом	0			100			0			100		
U_0 , дел	39			40			-					
U_k , дел	4	7	10	10	20	10	37	36	32	40	31.5	40
U_{k+n} , дел	24.5	30	35	37.5	37.5	36	16.5	10	5	4	4	6.5
n	9	13	20	6	5	5	9	13	20	6	5	5
Q	32.1	32.2	31.7	7.6	7.6	7.8	35.0	31.9	33.8	8.2	7.6	8.6

Таблица 3: Измерение добротности по нарастанию и затуханию порционных сигналов. Метод описан выше. Формулы для расчетов также в теоретической части.

Используем данные таблицы 3 и формулы в начале работы для расчета добротности по скорости нарастания и затухания колебаний. Результаты внесем в таблицу 4.

Погрешности

Погрешности измерений и вычислений определим через параметры приборов и по шкале осциллографа. Приведем лишь некоторые формулы расчета погрешностей:

Для погрешности теоретического вычисления погрешности используем:

$$\Delta_Q = \sqrt{\left(\frac{\partial Q}{\partial R}\right)^2 \cdot \Delta_R^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial L}\right)^2 \cdot \Delta_L^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial C}\right)^2 \cdot \Delta_C^2}$$

$$\Delta_Q = \sqrt{\frac{L}{R^4 C} \cdot \Delta_R^2 + \frac{1}{4R^2 LC} \cdot \Delta_L^2 + \frac{L}{4C^3 R^2} \cdot \Delta_C^2}$$

В случае вычисления добротности через затухающую часть графика имеем:

$$Q = \frac{\pi}{\Theta}, \quad \text{где } \Theta = \frac{1}{n} \ln\left(\frac{U_k}{U_{k+n}}\right)$$

$$\Delta_\Theta = \sqrt{\left(\frac{\partial \Theta}{\partial U_k}\right)^2 \cdot \Delta_{U_k}^2 + \left(\frac{\partial \Theta}{\partial U_{k+n}}\right)^2 \cdot \Delta_{U_{k+n}}^2}$$

$$\Delta_Q = \pi \cdot \frac{\Delta_\Theta}{\Theta^2}$$

Итоги

В работе были определены добротности контуров с и без дополнительного сопротивления R_{100} разными способами.

	Теория	Резонансная кривая	Наращение	Убывание
$Q_{R=0}$	36.2	34.5 ± 1.2	32 ± 4	33.6 ± 3
$Q_{R=100}$	7.0	6.2 ± 0.4	7.6 ± 1	8.1 ± 1

Таблица 4: Сравнение экспериментальных значений добротности, полученных разными методами. Каждый метод описан выше.

В целом добротности оказались примерно одинаковыми при измерении разными способами. Однако, результаты немного разнятся. Следует заметить, что магазин сопротивлений мог дать значительный вклад для сопротивления в контуре с $R = 0$ Ом, т.к. резисторы собраны в виде катушек. Данный факт не был учтен в работе.

Замечание

Рассмотрим процесс установления колебаний в контуре с высокой добротностью вблизи резонанса. Этот процесс описывается при начальных условиях ($U = 0, \dot{U} = 0$) формулой:

$$U = U_0[\cos(\Omega t - \psi) - \exp^{\gamma t} \cos(\omega_0 t - \psi)]$$

Напряжение содержит два близких по частоте колебания, между которыми происходят биения. Появление биений связано с тем, что разность фаз этих колебаний медленно меняется; при нулевой разности фаз они вычитаются друг из друга, а при расхождении фаз на π – складываются. Амплитуда колебаний то растет, то падает, испытывая биения. При порционных сигналах также наблюдаются схожая картина.

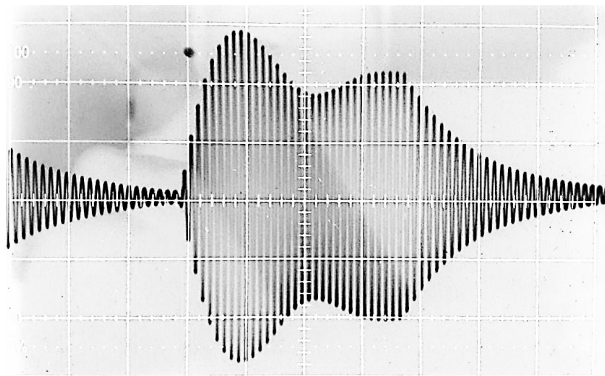


Рис. 5: Биение колебаний вблизи резонанса