Projeto de Introdução à Geofísica Computacional - MS590

Antônio Queiroz Manetta - RA:231565

23 de Junho de 2022

1 Introdução

Este trabalho tem por objetivo obter um código que exiba a solução para a equação da onda unidimensional sem termo de fonte, e também analisaremos o que acontece com a onda em um intervalo de tempo. A equação é dada por

$$u_{xx}(x,t) = \frac{1}{c^2} u_{tt}(x,t) \tag{1}$$

A equação (1) pode ser discretizada a partir da seguinte expressão, em um determinado ponto (x_i, t_n):

$$u_{xx}(x_i,t_n) = \frac{1}{c^2(x_i)} u_{tt}(x_i,t_n) \tag{2}$$

2 Método das diferenças finitas

Como sabemos do método das diferenças finitas, as derivadas parciais podem ser aproximadas da seguinte forma:

$$\frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} = \frac{1}{c_i^2} \frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{\Delta t^2} \tag{3}$$

Assim, temos que um termo da malha (x,t) pode ser calculado a partir de

$$u_i^{n+1} = 2u_i^n - u_i^{n-1} + \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} c_i^2 (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) \tag{4}$$

No entanto, para determinar um termo genérico, necessitamos dos pontos anteriores da seguinte forma:

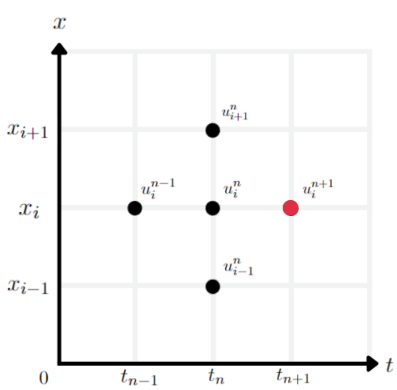

Figure 1: Malha de pontos do método das diferenças finitas

Então, para formarmos uma malha completa, precisamos determinar inicialmente as duas primeiras colunas, em t_0 e t_1, e as linhas da borda da matriz, em x_{min} e x_{max}. As duas primeiras colunas, são determinadas com as condições iniciais, fornecidas no problema:

$$\begin{cases} u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \end{cases}$$

Já as linhas da borda, são determinadas por condições de contorno. No caso, usaremos:

$$\begin{cases} u_t(x_{min},t) = 0 \\ u_t(x_{max},t) = 0 \end{cases}$$

Como temos as duas primeiras colunas, nas linhas da borda só precisamos usar o termo anterior e a derivada naquele ponto para obter as linhas usando o método das diferenças finitas para derivada de 1^a ordem. No resto da malha, usaremos o método para derivadas de 2^a ordem.

3 O código

O código possui uma autoexplicação na forma de comentários:

```
1 function[] = difin6(u0,ut0,c,t1,t2,x1,x2)
2 # Instruções para utilização do código:
3 # O usuário deverá fornecer 7 parâmetros: u0, uma função dependente de x, que será entendida como a função u no tempo t=0; ut0, uma função dependente de x, que será entendida como a derivada da função u em relação ao tempo no tempo t=0; c, a velocidade da onda, que aqui foi entendida como uma função de x, mas que pode ser declarada como uma constante; t1, o tempo inicial; t2, o tempo final; x1, o valor de x mínimo; e x2, o valor de x máximo. O resultado do gráfico é um plot 3D da função u nos intervalos de tempo e espaço. Caso o usuário queira o resultado em um único tempo específico, poderá usar t1=t2. O resultado será uma curva no espaço tridimensional.
4 dt=10^(-1); #aqui se delimita o valor do passo que a função utilizará. para intervalos de tempo e espaço muito grandes, recomenda-se aumentar o passo.
5 dx=dt; #aqui trabalhamos com a hipótese de que o passo em t deve ser igual ao passo em x.
6 nx=(x2-x1)*10;
7 nt=(t2)*10;
8 nt2=(t2-t1)*10;
9 vt=zeros(1,nt+1); #nas linhas 9 a 12, criamos os vetores que utilizaremos como eixos x e t, e também para a função da velocidade de onda.
10 vt2=zeros(1,nt2+1); # a existência de um segundo vetor para t explicaremos mais adiante.
11 vx=zeros(1,nx+1);
12 vc=zeros(1,nx+1);
13
14 for i=1:nt+1 #aqui criamos o vetor original dos tempos, que vai de 0 à t2.
15     vt(i)=(i-1)*dt;
16 endfor
17
18 for i=1:nt2+1 #aqui criamos o vetor final dos tempos, que vai de t1 à t2.
19     vt2(i)=(i-1)*dt+t1;
20 endfor
21
22 for i=1:nx+1 #aqui criamos os vetores x, que vai de x1 à x2, e e c, que vai de c(x1) à c(x2).
23     vx(i)=(i-1)*dx+x1;
24     x=i*dx+x1;
25     vc(i)=c(x);
26 endfor
27
28 u=zeros(nx+1,nt+1); #aqui criamos a matriz da função u, que é calculada de 0 à t2 e de x1 à x2.
29 u2=zeros(nx+1,nt2+1); #aqui criamos a matriz da função u2, que é calculada de t1 à t2 e de x1 à x2.
30
31 for i=1:nx+1 #aqui inicializamos a primeira coluna de u, como sendo o valor de u0(x)
32     x=(i-1)*dx+x1;
33     u(i,1)=u0(x);
34 endfor
```

Figure 2: Primeira parte do código

```
35
36 for i=1:nx+1 #aqui inicializamos a segunda coluna de u, utilizando o valor da função na coluna anterior e a função ut0(x), que é a derivada de u em t=0.
37     x=(i-1)*dx+x1;
38     u(i,2)=ut0(x)*dt+u(i,1);
39 endfor
40
41 for j=3:nt+1 #aqui inicializamos a primeira e a última linha de u, utilizando como condições de contorno a hipótese de que a derivada de u em relação ao tempo em t0 permanece constante para todos os pontos no mesmo x, isto é, supondo que as fronteiras não mudam.
42   x=dx+x1;
43   xn2=(nx)*dx+x1;
44   u(1,j)=ut0(x)*dx+u(1,j-1);
45   u(nx+1,j)=ut0(xn2)*dx+u(nx+1,j-1);
46 endfor
47
48 for j=2:nt #aqui calculamos o valor de u no restante da matriz utilizando o método das diferenças finitas.
49   for i=2:nx
50     u(i,j+1)=2*u(i,j)-u(i,j-1)+(vc(i))**2*dt**2*(u(i+1,j)-2*u(i,j)+u(i-1,j))/dt**2;
51   endfor
52 endfor
53
54 for j=1:nt2+1 #aqui utilizamos a matriz u para calcular a matriz u2, considerando as condições que estabelecemos anteriormente.
55   for i=1:nx
56     u2(i,j)=u(i,j+nt-nt2);
57   endfor
58 endfor
59
60 [xx, yy] = meshgrid (vt2, vx); #aqui utilizamos a função meshgrid para criar a malha que usaremos na função u2
61 mesh (vt2, vx, u2) #aqui usamos a função mesh que utiliza a malha que criamos e plota a função u2 como uma superfície em relação a malha tempoXespaço.
62
63 endfunction
64
```

Figure 3: Segunda parte do código

Também será disponibilizado o arquivo do código, nomeado ”difin6.m”.

4 Resultados importantes e análise dos resultados

Vamos rodar o código com os seguintes parâmetros: $u0 = @(x)\ exp(-(x/0.2)^2)$, $ut0 = @(x)\ 0$, $c = @(x)\ 1$, $t1 = 0$, $t2 = 20$, $x1 = -5$, $x2 = 5$. O resultado é o seguinte:

```
>> u0=@(x) exp(-(x/0.2)^2)
u0 =

@(x) exp (-(x / 0.2) ^ 2)

>> ut0=@(x) 0
ut0 =

@(x) 0

>> c=@(x) 1
c =

@(x) 1

>> difin6(u0,ut0,c,0,20,-5,5)
```

Figure 4: Janela de comandos para a chamada da função.

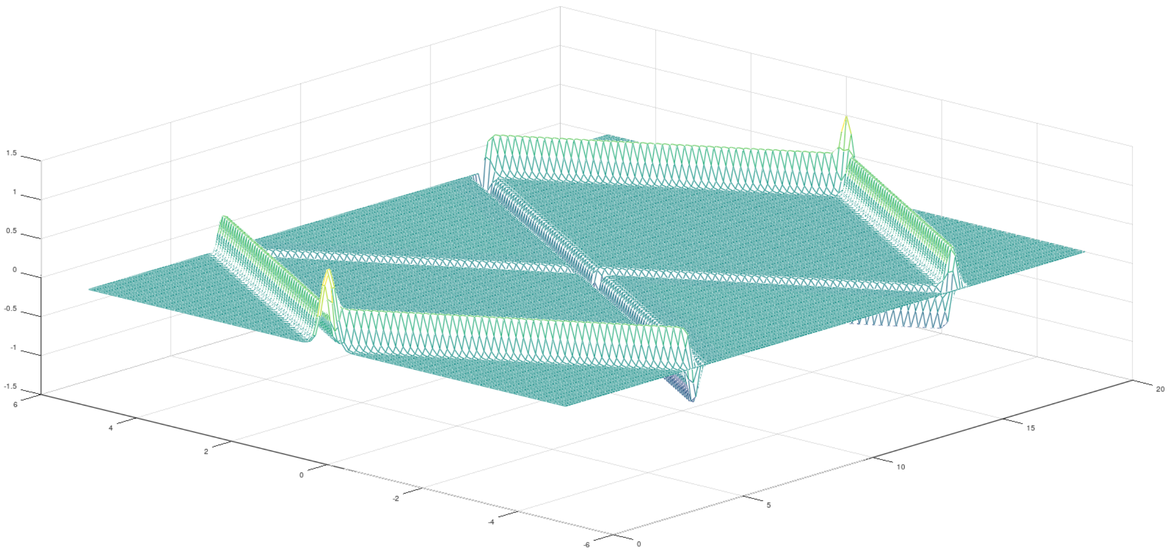

Figure 5: Superfície da função u, com t de 0 a 20 e x de -5 a 5.

Neste gráfico podemos observar um comportamento mais geral da onda, que sai do centro dos espaços para ambos os lados no tempo t=0, bate nas bordas por volta do tempo t=5, em seguida, é refletida para baixo e volta a se encontrar no centro dos espaços e se soma negativamente no tempo t=10. O comportamento no restante do tempo se repete de forma semelhante: volta a se separar, bate na pared no tempo t=15, reflete para cima e volta se somar, agora positivamente, no tempo t=20. Abaixo, se encontram alguns gráficos em um determinado tempo específico. Por questões de diminuição dos dados, agora podemos diminuir o tamanho do passo, de $1e-1$ para $1e-2$, por exemplo.

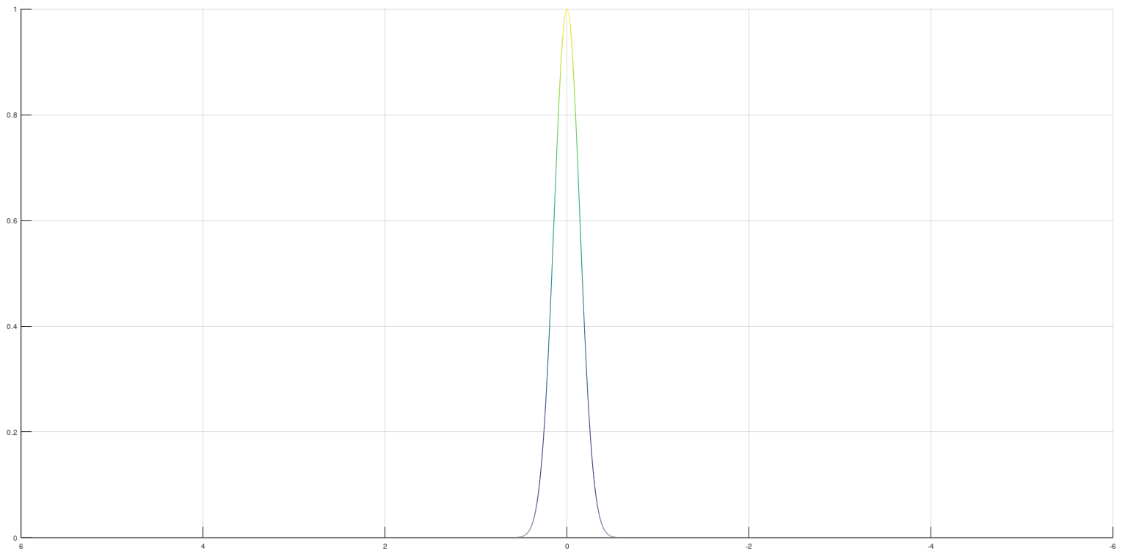

Figure 6: Gráfico da onda em t=0s. Podemos observar a onda no tempo inicial, que é dada pelas condições iniciais.

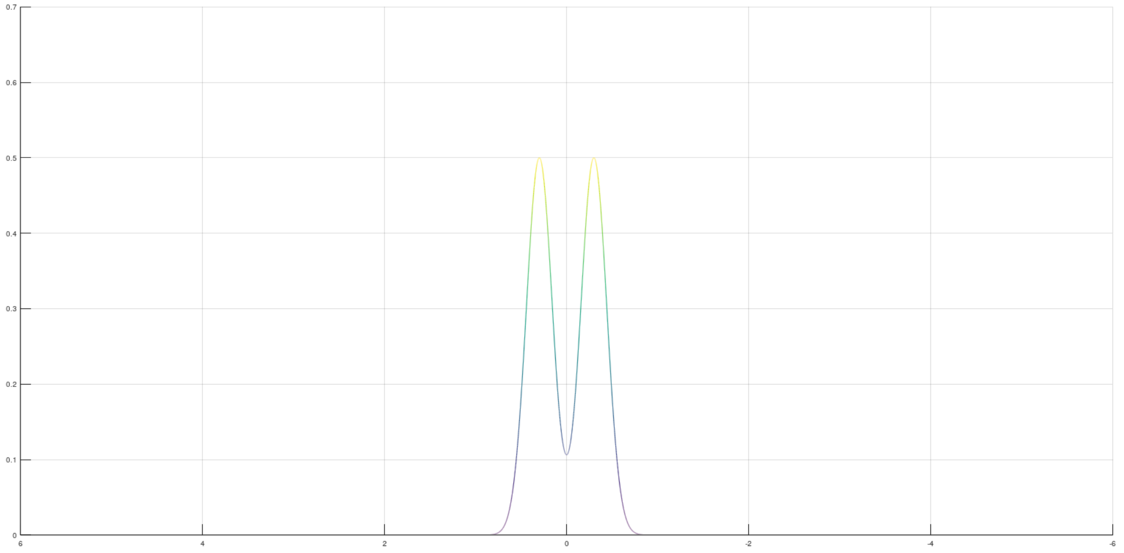

Figure 7: Gráfico da onda em t=0.3s. Podemos observar a onda um pouco depois do tempo inicial. O pulso já está se dividindo para ambos os lados, mas ainda não se separou completamente.

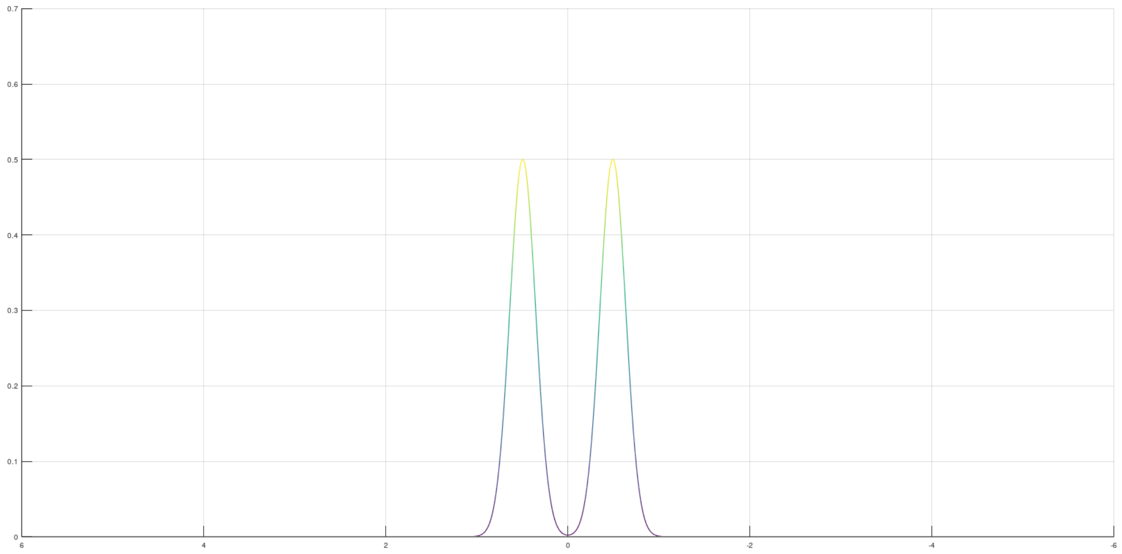

Figure 8: Gráfico da onda em t=0.5s. Podemos visualizar a onda quando ela se separa completamente, mas os pulsos ainda estão adjacentes entre si. A amplitude das ondas tem o valor da metade do valor inicial.

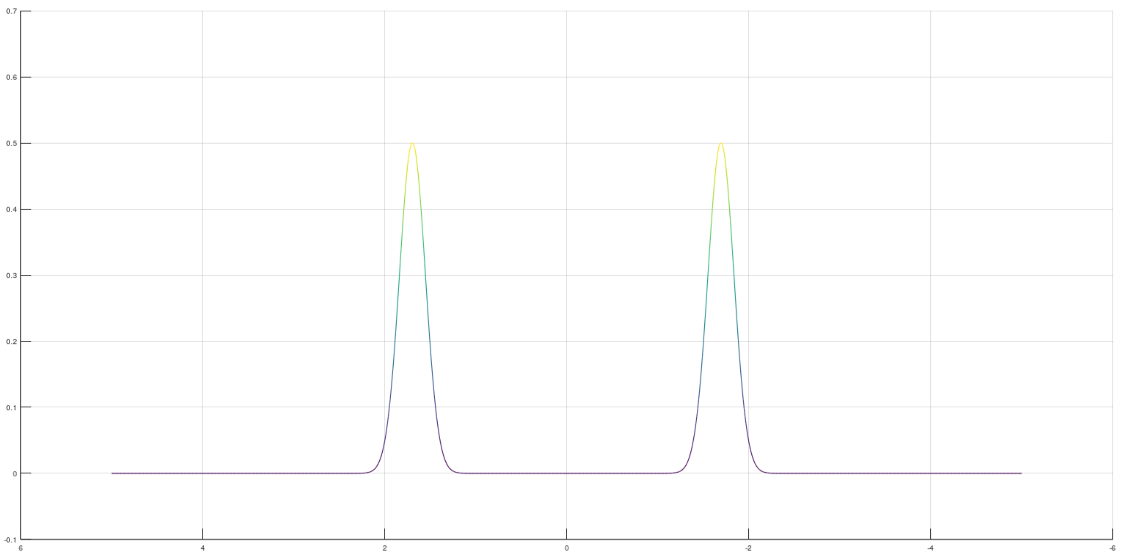

Figure 9: Gráfico da onda em t=1.7s. Podemos observar as ondas um tempo depois de se separar, mas ainda não chegaram nas bordas.

Figure 10: Gráfico da onda em t=4.8s. Aqui, podemos ver as ondas na iminência de se chocar com as bordas.

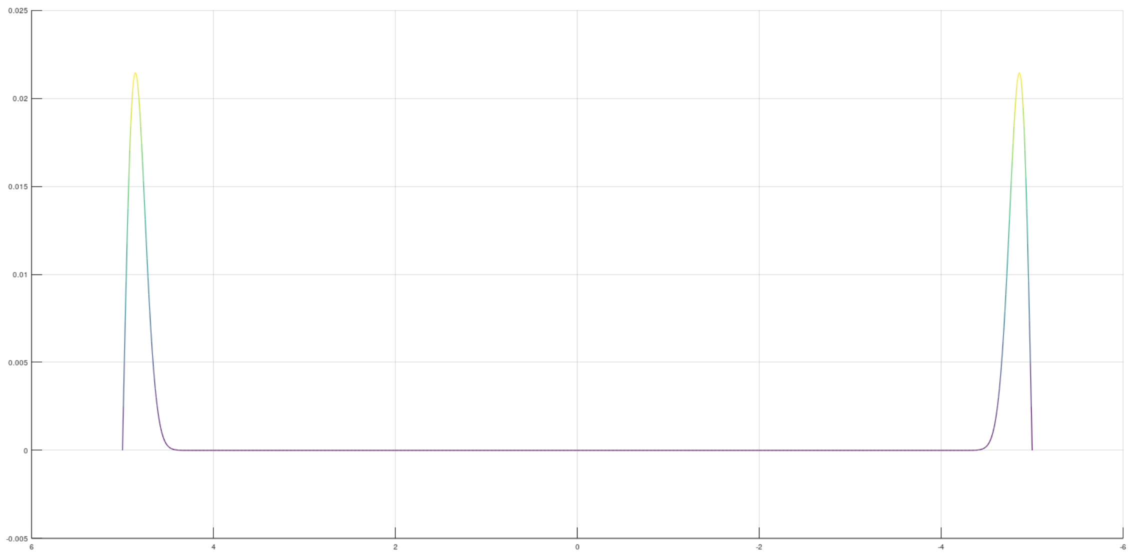

Figure 11: Gráfico da onda em t=5s. Neste momento, a onda já se chocou com a borda, e está na iminência de ser refletida. Aqui podemos observar o fênomeno da interferência destrutiva. Quando a onda se choca com a extremidade fixa, ocorre a inversão de sua fase. Assim, quando temos uma parte da onda indo em direção à parede e outra voltando, elas praticamente se anulam, causando um pulso de ordem muito pequena (0.02) em relação ao pulso normal da onda (0.5).

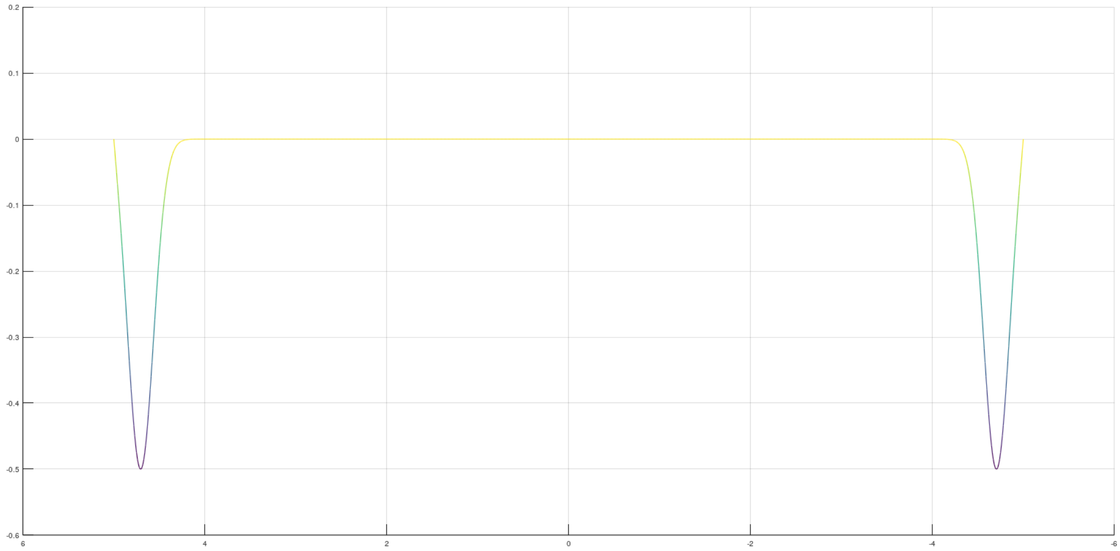

Figure 12: Gráfico da onda em t=5.3s. Aqui a onda já foi inteiramente refletida e não há mais interferências destrutivas. A inversão de fase já foi completada.

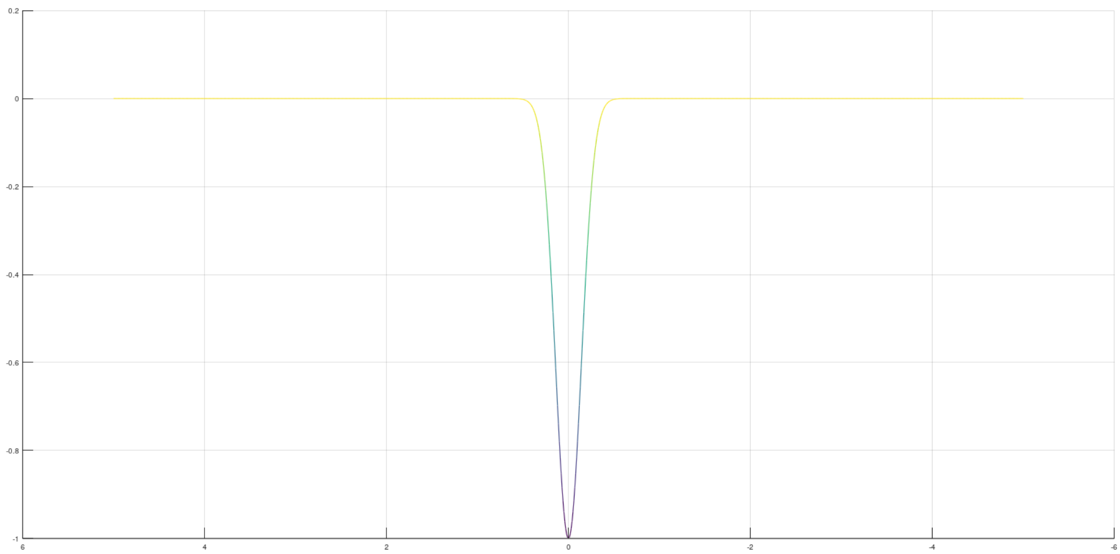

Figure 13: Gráfico da onda em t=10s. Neste momento, as ondas voltam a se encontrar no centro dos espaços, ambas com a fase invertida, o que faz com que haja uma interferência construtiva.

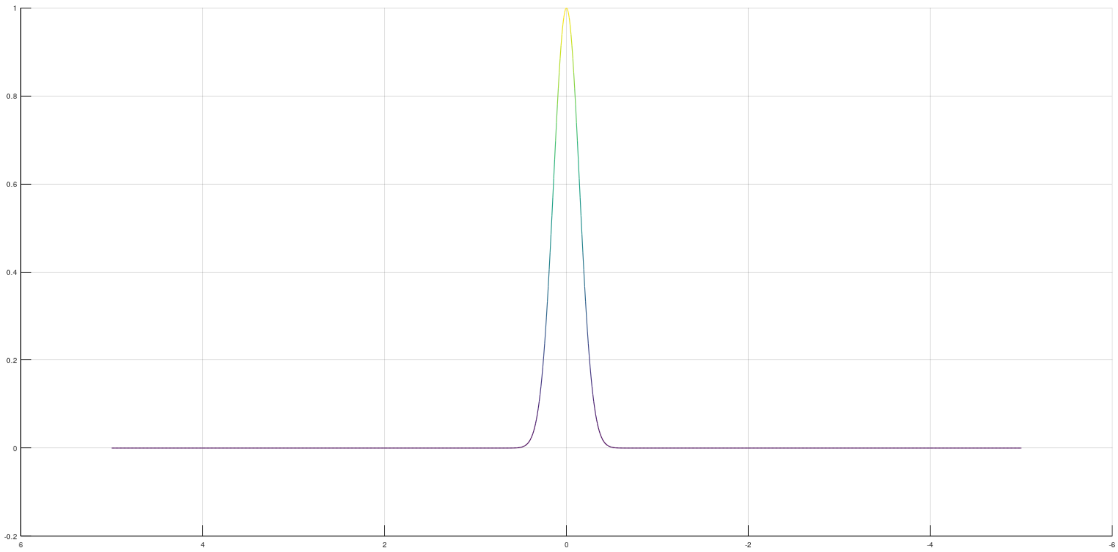

Figure 14: Gráfico da onda em t=20s. Aqui as ondas já completaram todo seu período. Inverteram a fase novamente e voltam a estar na fase inicial, novamente fazendo uma interferência construtiva, e voltando ao seu estado original, em t=0s.