PreTOI14

Editorial

โจทย์ข้อนี้เป็นโจทย์ Dynamic Programming ที่ค่อนข้างยากข้อหนึ่ง ก่อนอื่น ต้องสังเกตว่าการเลือกต่อยโบราณสถานให้เหลือผลรวมส่วนที่เหลือมากที่สุด สามารถแก้ได้โดยพิจารณาหาวิธีการต่อยโบราณสถานให้ผลรวมส่วนที่ต่อยไปน้อยที่สุด แล้วนำคำตอบที่ได้มาลบออกจากผลรวมทั้งหมด

1. กรณี $K = M = 1$

สังเกตว่าในกรณีที่ $K = M = 1$ เราต้องหาช่วงที่มีผลรวมน้อยที่สุดเพียงช่วงเดียว ซึ่งคล้ายคลึงกับโจทย์คลาสสิก Maximum Sum Subarray ที่ให้หาผลรวมมากที่สุด หากจำวิธีแก้ปัญหานี้ได้ ก็จะได้คะแนน 15 คะแนนในชุดทดสอบนี้ (หากคิดวิธีกรณีทั่วไปออก ก็ไม่จำเป็นต้องเสียเวลา implement ส่วนนี้)

ปัญหานี้สามารถแก้ได้ใน $\mathcal{O}(N)$ โดยใช้วิธี Dynamic Programming

นิยามให้ dp_i เท่ากับผลรวมที่น้อยที่สุดที่เป็นไปได้ เมื่อพิจารณา subarray ทุกแบบที่จบที่ตำแหน่ง i จะได้ Recurrence Relation คือ $dp_i = \min\{dp_{i-1} + V_i, V_i\}$ แต่จะได้คำตอบสุดท้ายของปัญหาเป็น $\min\{dp_1, dp_2, dp_3, \ldots, dp_N\}$ เพราะเราอนุญาตให้แต่ละช่วงจบที่ตำแหน่งใดก็ได้

สามารถศึกษาเพิ่มเติมได้ที่ https://www.geeksforgeeks.org/largest-sum-contiguous-subarray/

2. กรณี $N \le 8$

เนื่องจาก N เล็กพอ เราอาจจะใช้วิธี Brute Force ได้ โดยทดลอง Subset ของโบราณสถานที่ถูกต้องทิ้งทั้งหมดที่เป็นไปได้ แล้วลูปตรวจสอบว่าตรงเงื่อนไขที่กำหนดให้หรือไม่ หากตรงเงื่อนไขก็ให้เก็บคำตอบที่ดีที่สุดเอาไว้ วิธีนี้ทำงานใน $\mathcal{O}(2^N \cdot N)$ หากทำวิธีนี้จะได้ 15 คะแนน

3. กรณี $N \le 10^2$

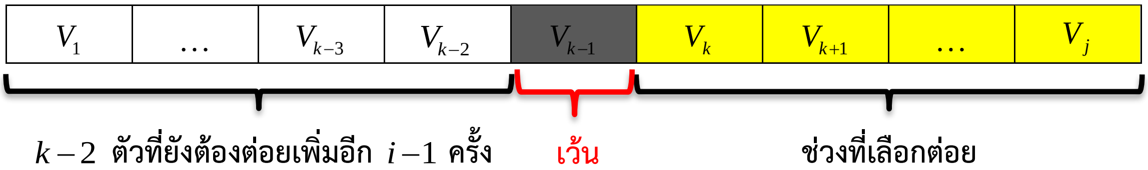
แก้ได้ด้วย Dynamic Programming โดยกำหนดนิยาม state ดังนี้

$dp_{i,j}$ เท่ากับ ผลรวมส่วนที่ถูกต่อยที่น้อยที่สุดที่เป็นไปได้ เมื่อต้องต่อย i ครั้ง และพิจารณา array เพียงตำแหน่งที่ 1 ถึง j เท่านั้น สำหรับ Base Case กำหนดให้ dp_0, j สำหรับทุก $0 \le j \le N$ เท่ากับ 0 (เนื่องจากว่าต้องต่อยอีก 0 ครั้ง) และกำหนดให้ $dp_i, 0$ สำหรับทุก $1 \le i \le K$ เท่ากับ ∞ เนื่องจากเราต้องต่อยอีก i ครั้ง แต่ช่วงที่เราเลือกต่อได้เหลือเพียงแค่ 0

เมื่อกำหนดนิยามแล้ว การหาค่าของ $dp_{i,j}$ เราจะพิจารณาตำแหน่ง j เป็นหลัก โดยจะเลือกวิธีที่สุดจากวิธีดังต่อไปดังนี้

1) เลือกไม่ต่อยช่วงที่เกี่ยวข้องกับตำแหน่งที่ j ดังนั้น ปัญหาก็จะลดเหลือเพียงส่วน $dp_{i,j-1}$

2) เลือกต่อยหนึ่งช่วง โดยช่วงเริ่มต้นที่ตำแหน่ง k (ทดลองทุกค่า k ที่เป็นไปได้) จบที่ตำแหน่ง j และขนาดช่วงต้องมากกว่าหรือเท่ากับ M โดยเมื่อเลือกต่อยช่วงนั้นไปแล้ว จะทำให้เกิดมูลค่าเสียหายเท่ากับ $V_k + V_{k+1} + V_{k+2} + \ldots + V_j$ และต้องพิจารณาการต่อย $i-1$ ครั้งที่เหลือใน array $k-2$ ตัวทางด้านซ้าย รวมแล้วจะเกิดมูลค่าเสียหายทั้งหมด $dp_{i-1,k-2} + (V_k + V_{k+1} + \ldots + V_j)$ (ถ้า $k-2<0$ ให้ถือว่า $k-2=0$)



ดังนั้น สามารถสรุปเป็นสมการได้ว่า

$$dp_{i,j} = \min \begin{cases} dp_{i,j-1} \\ \min_{1\le k \le j-m+1}\left(dp_{i-1,k-2} + (V_k + V_{k+1} + \ldots + V_j)\right) \end{cases}$$

เนื่องจากว่าตาราง dp มีขนาด $K \times N$ ในแต่ละช่องเราต้องลูปหาค่า k ที่ดีที่สุดเป็นเวลา $\mathcal{O}(N)$ โดยต้องลูปหาผลรวม $V_k + \ldots + V_j$ ใน $\mathcal{O}(N)$ อีกชน ดังนั้น สุดท้ายแล้ว จะได้ Time Complexity เท่ากับ $\mathcal{O}(KN^3)$ และ Space Complexity เป็น $\mathcal{O}(KN)$

สุดท้าย จะได้ว่ามูลค่าส่วนที่ถูกต่อยไปที่น้อยที่สุดจะเท่ากับ $dp_{K,N}$ แต่อย่าลืมว่าเราต้องการมูลค่าส่วนที่เหลืออยู่ ดังนั้นต้องนำผลรวมมูลค่าทั้งหมดมาลบจึงจะได้คำตอบ

4. กรณี $N \le 10^3$

ใช้สูตรตาม Subtask 3 แต่ลดเวลาในการหาผลรวมโดยสร้าง Partial Sum Array S ก่อน นิยามให้ $S_i = V_1 + V_2 + \ldots + V_i$ เราสามารถสร้าง array S ได้ใน $O(N)$ จากความสัมพันธ์ $S_i = S_{i-1} + V_i$

หากต้องการหาผลรวม $V_k + V_{k+1} + \ldots + V_j$ สามารถหาได้จาก $S_j - S_{k-1}$ ดังนั้น จะได้ส่วนที่สองของสมการเวียนเกิดเป็น $\min_{1\le k\le j-m+1}\left(dp_{i-1,k-2} + S_j - S_{k-1}\right)$ รวมแล้ว Time Complexity ของอัลกอริทึมทั้งหมดจะเป็น $\mathcal{O}(KN^2)$

5. กรณี $N \le 10^4$

สังเกตว่า ส่วนที่สองของสมการเวียนเกิดสามารถแยกเป็น $\min_{1\le k\le j-m+1}\left(dp_{i-1,k-2} - S_{k-1}\right) + S_j$ โดยส่วนที่เราต้องการหาค่า $\min$ นั้นมีการคำนวณซ้ำซ้อนมากเกินไป เพราะเมื่อขยับ j ไปทางขวาค่านึง ตัวที่ต้องพิจารณาใน $\min$ มีเพิ่มมาเพียงตัวเดียวเท่านั้น เราไม่จำเป็นต้องไปลูปเริ่มตรงส่วนก่อนหน้าใหม่ก็ได้

เพื่อความสะดวกในการเขียนสมการเวียนเกิด ขอกำหนดนิยามของตาราง $pmin$ (Prefix Min.) เป็น

$$pmin_{i,j} = \min\{\infty, dp_{i,0} - S_1, dp_{i,1} - S_2, dp_{i,2} - S_3, \ldots, dp_{i,j-2} - S_{j-1}\}$$

เช่นเดียวกับการสร้าง Partial Sum Array เราสามารถสร้างตาราง $pmin$ ได้จากความสัมพันธ์ $pmin_{i,j} = \min\left\{pmin_{i,j-1}, \left(dp_{i,j-2} - S_{j-1}\right)\right\}$ สุดท้ายแล้ว จากเดิมที่สมการเวียนเกิดเป็น

$$dp_{i,j} = \min\begin{cases} dp_{i,j-1} \\ \min_{1 \le k \le j-m+1}\left(dp_{i-1,k-2} - S_{k-1}\right) + S_j \end{cases}$$

เราสามารถเขียนใหม่ได้ ดังนี้

$$dp_{i,j} = \min\begin{cases} dp_{i,j-1} \\ pmin_{i-1,j-m+1} + S_j \quad ; j-m+1 \ge 1 \end{cases}$$

สังเกตว่าในแต่ละช่องของตาราง dp เราใช้เวลาหาคำตอบเพียง $\mathcal{O}(1)$ เท่านั้น ดังนั้น โดยรวมแล้วอัลกอริทึมทั้งหมดนี้จะใช้เวลาเพียง $\mathcal{O}(KN)$

6. กรณีทั่วไป ($N \le 5 \times 10^4$)

ปัญหาที่เกิดขึ้นในครั้งนี้ไม่ใช่เรื่องเวลา แต่เป็นเรื่องความจำแทน เพราะหากเราใช้ตาราง dp ขนาด $K \times N$ จะต้องเสียพื้นที่มากถึง $8 \times 10^3 \times 10^5 \text{byte} = 800\text{MB}$ (ใช้ตัวแปรประเภท `long long`)

สังเกตว่าสมการเวียนเกิดดังกล่าวอ้างอิงถึงข้อมูลในแถวที่ $i-1$ (แถวก่อนหน้า) และแถวที่ i (แถวปัจจุบัน) เท่านั้น ดังนั้น เราเก็บเพียงแค่สองแถวสุดท้ายก็ได้ โดยเก็บเป็นตารางเพียง 2 แถว โดยให้แถวบนแทนแถวที่ $i-1$ และแถวล่างแทนแถวที่ i

วิธีนี้จะลด Space Complexity เหลือ $\mathcal{O}(N)$ ซึ่งทำให้ได้คะแนนเต็มในข้อนี้

(Solution Code อยู่ในหน้าถัดไป)

Solution Code

```cpp
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;

using ll = long long;

const ll INF = 1e17;
const int N = 100010;
const int M = 100010;
const int K = 1010;

ll A[N], qs[N], dp[2][N], pmin[2][N];

int main()
{
    int n, k, m;
    scanf("%d%d%d", &n, &k, &m);

    pmin[0][0] = INF;
    for (int i = 1; i <= n; ++i) {
        scanf("%lld", &A[i]);
        qs[i] = qs[i-1]+A[i];
        pmin[0][i] = min(pmin[0][i-1], -qs[i-1]);
    }

    for (int i = 1; i <= k; ++i) {
        int x = i&1;
        dp[x][0] = INF;
        pmin[x][0] = INF;
        for (int j = 1; j <= n; ++j) {
            dp[x][j] = dp[x][j-1];
            if (j-m+1 >= 1)
                dp[x][j] = min(dp[x][j], pmin[x^1][j-m+1] + qs[j]);
            pmin[x][j] = min(pmin[x][j-1], dp[x][max(j-2, 0)] - qs[j-1]);
        }
    }

    printf("%lld\n", qs[n]-dp[k&1][n]);

    return 0;
}
```

ก่อนอื่น สังเกตว่าสิ่งที่โจทย์ข้อนี้ให้มาคือกราฟ โดยมีคนเป็น node และความสัมพันธ์เป็น edge

สิ่งที่ง่ายที่สุดที่เราทำได้คือทดลองทุกค่า k ที่เป็นไปได้ แล้วเช็คว่าทุกคู่ที่พยายามจะลอกกันยังอยู่ใน component เดียวกันหรือไม่ โดยเก็บค่า k ที่มากที่สุดที่ตรงเงื่อนไขไว้ การเช็คมีสามวิธีหลัก ๆ ดังนี้

1. สำหรับแต่ละคู่ เราจะทำการ Depth-first Search เริ่มจากคน ๆ หนึ่ง (พิจารณาเฉพาะ edge ที่ยังไม่ถูกตัด) เพื่อเช็คว่าสามารถไปถึงอีกคนหนึ่งได้หรือไม่ เนื่องจากว่ามีมากสุดถึง P คู่ แต่ละคู่ใช้เวลาในการเช็คมากสุด $\mathcal{O}(N+M)$ ดังนั้น หากรวมกับการทดลองทุกค่า k ที่เป็นไปได้ จะต้องใช้เวลามากถึง $\mathcal{O}(\max z_i \cdot P(N+M))$ ซึ่งจะได้คะแนนมากสุดเพียง 20 คะแนนเท่านั้น

2. เราจะทำการระบุหมายเลข component ให้กับ node แต่ละ node จนครบก่อน โดยทำการ DFS จากจุดหนึ่งไปถึงทุก ๆ จุด (พิจารณาเฉพาะ edge ที่ยังไม่ถูกตัด) แล้วกำหนดให้ทุกจุดที่ไปถึงได้เป็นหมายเลขเดียวกัน และหากมีจุดไหนที่ยังไปไม่ถึง ก็ให้ไปเริ่มจากจุดพวกนั้นต่อ โดยเปลี่ยนหมายเลข component เรื่อย ๆ เมื่อทำครบแล้วจึงเช็คแต่ละคู่ว่าอยู่ component เดียวกันหรือไม่ โดยรวมแล้วค่า k หนึ่งค่า จะทำให้เกิดการ DFS บน N node M edge เท่านั้น ไม่มีการ DFS ซ้ำ node เดิมเหมือนวิธีแรก ส่วนการเช็คแต่ละคู่ว่าอยู่ component เดียวกันหรือไม่ สามารถเช็คได้ใน $\mathcal{O}(1)$ ดังนั้น Time Complexity รวมจึงเป็น $\mathcal{O}(\max z_i \cdot (N+M+P))$ แต่จะได้คะแนนมากสุดเพียง 45 คะแนนเท่านั้น

3. ใช้ data structure ที่ชื่อ Union-find Disjoint Set ในการหาว่าแต่ละคู่อยู่ component เดียวกันหรือไม่ วิธีนี้จะได้ 45 คะแนนเช่นกัน รายละเอียดการใช้ DSU ให้อ่านที่ Subtask 3 ของข้อ Worker (PreTOI14 #2) ของ Editorial นี้ (หน้าที่ 11)

การที่จะได้คะแนนเต็มได้นั้น ต้องสังเกตว่า ความจริงแล้วเราไม่จำเป็นต้องทดลองค่า k ทั้งหมดที่เป็นไปได้ก็ได้ เพราะมีคุณสมบัติอยู่สองข้อ คือ

1. ถ้ากำหนดค่า k แล้วทุกคู่ลอกกันไม่ได้ นั่นแปลว่าเราไม่จำเป็นต้องทดลองค่า k ที่น้อยกว่านี้อีกแล้ว (เพราะถ้า k น้อยกว่านี้ ทุกคู่ก็ยังคงลอกกันไม่ได้อยู่ดี และเราพยายามทำให้ค่า k มาก ๆ ด้วย)

2. ถ้ากำหนดค่า k แล้วมีอย่างน้อยหนึ่งคู่ที่ลอกกันได้ นั่นแปลว่าเราต้องใช้ค่า k น้อยกว่านี้ (เพราะเราจำเป็นต้องตัดเพิ่มอีก ถ้าเพิ่มค่า k ไป มีแต่จะทำให้จำนวนคู่ที่ลอกกันได้เพิ่มขึ้น)

ดังนั้น เราสามารถ binary search บนค่า k แล้วจำกัดช่วงตามเงื่อนไข 2 ข้อที่กล่าวมาได้ วิธีนี้จะทำให้ Time Complexity ลดลงเหลือ $\mathcal{O}(\log(\max z_i) \cdot (N+M+P))$

Solution Code

```cpp
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
using pii = pair<int, int>;
const int N = 200010;
const int M = 500010;
int n, m, p, num[N];
bool vis[N];
vector<pii> G[N];
pii P[M];
void dfs(int u, int k, int x) {
    vis[u] = true;
    num[u] = x;
    for (auto v : G[u])
        if (v.second < k && !vis[v.first])
            dfs(v.first, k, x);
}
bool check(int k) {
    fill(vis, vis+n+1, false);
    for (int i = 1; i <= n; ++i)
        if (!vis[i])
            dfs(i, k, i);
    for (int i = 0; i < p; ++i)
        if (num[P[i].first] == num[P[i].second])
            return false;
    return true;
}
int main() {
    scanf("%d%d%d", &n, &m, &p);
    for (int i = 0; i < m; ++i) {
        int u, v, w;
        scanf("%d%d%d", &u, &v, &w);
        G[u].emplace_back(v, w);
        G[v].emplace_back(u, w);
    }
    for (int i = 0; i < p; ++i)
        scanf("%d%d", &P[i].first, &P[i].second);
    int b = 1;
    int e = 1e9+1;
    while (b < e) {
        int mid = (b+e+1)/2;
        if (check(mid)) b = mid;
        else e = mid-1;
    }
    if (e == 1e9+1) e = -1;
    printf("%d\n", e);
    return 0;
}
```

สำหรับโจทย์ข้อนี้ จะเน้นสอนเทคนิค Partial Sum Array (หรือบางคนอาจจะเรียกว่า Quick Sum Array) ซึ่งถือได้ว่าเป็นเทคนิคพื้นฐานอย่างหนึ่ง ถึงอย่างไรก็ตาม รู้แต่เทคนิคนี้ก็ไม่พอ เพราะการที่จะได้คะแนนเต็มนั้นต้องใช้การสังเกตลักษณะของเมทริกซ์เพื่อเวลาและความจำที่ต้องใช้ในการประมวลผล

Subtask 1 (20 คะแนน) - $N \le 10^2$

สร้างตารางขึ้นมาใน $\mathcal{O}(N^2)$ แล้วลูปหาสี่เหลี่ยมขนาด $H \times W$ ที่มีผลรวมมากที่สุด โดยการลูปให้ยึดมุมใดมุมหนึ่งเป็นหลักแล้วลูปหาผลรวมของสมาชิกทุกตัวในสี่เหลี่ยม ในกรณีแย่สุดอาจจะมี Time Complexity เป็น $\mathcal{O}(N^4)$ และ Space Complexity เป็น $\mathcal{O}(N^2)$

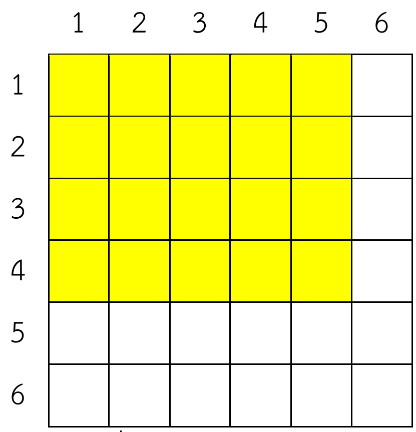
Subtask 2 (30 คะแนน) - $N \le 10^3$

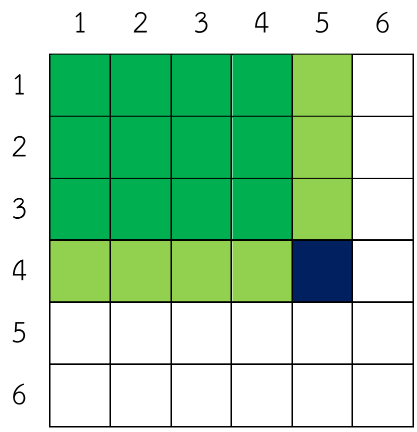
สังเกตว่าเราไม่จำเป็นต้องลูปหาผลรวมของสมาชิกทุกตัวก็ได้ แต่ใช้การสร้างเมทริกซ์ Partial Sum S ขนาด $N \times M$ ขึ้นมา โดย $S_{i,j}$ จะเท่ากับผลรวมของสมาชิกในแถวที่ 1 ถึง i คอลัมน์ที่ 1 ถึง j ยกตัวอย่าง $S_{4,5}$ จะมีค่าเท่ากับผลรวมของสมาชิกในช่องที่เน้นสีเหลืองไว้ตามภาพทางด้านซ้าย

การหาค่า $S_{i,j}$ แต่ละช่อง เราไม่จำเป็นต้องลูปหาผลรวมในช่วง แต่เราจะใช้ข้อสังเกตที่ว่า

$$S_{i,j} = S_{i-1,j} + S_{i,j-1} - S_{i-1,j-1} + M_{i,j}$$

สังเกตว่าเราใช้ $S_{i-1,j} + S_{i,j-1}$ เฉย ๆ ไม่ได้ เพราะจะมีส่วนที่ซ้อนทับกัน (สีเขียวเข้มในภาพทางด้านขวา) จึงต้องลบส่วน $S_{i-1,j-1}$ ทิ้ง





เมื่อสร้างเมทริกซ์ $S_{i,j}$ ได้แล้ว เราสามารถหาผลรวมของ Submatrix ใด ๆ ได้ใน $\mathcal{O}(1)$ โดยผลรวมของสี่เหลี่ยมแถวที่ x_1 ถึง x_2 คอลัมน์ที่ y_1 ถึง y_2 จะเท่ากับ $S_{x2,y2} - S_{x1-1,y2} - S_{x1,y2-1} - S_{x1-1,y1-1}$

โดยรวมแล้ว วิธีนี้จะทำให้ Time Complexity ลดลงเป็น $\mathcal{O}(N^2)$

Subtask 3 (20 คะแนน) - $N \le 5 \times 10^3$

Space Complexity $\mathcal{O}(N^2)$ จะไม่สามารถใช้ได้ เพราะการสร้างตาราง M ขึ้นมาจะต้องใช้เนื้อที่มากถึง $4 \times (5 \times 10^3)^2 \text{byte} \approx 100\text{MB}$ ซึ่งเกิน Memory Limit ที่กำหนดไว้ ดังนั้น หากต้องการใช้วิธีเดิม เราต้องหาผลรวมของ Submatrix ได้โดยไม่ต้องสร้างเมทริกซ์ขึ้นมา

เราจะทดลอง Submatrix Submatrix ขนาด $H \times W$ ทั้งหมดที่เป็นไปได้เหมือนเดิม (ลูปยึดจุดมุมใดมุมหนึ่ง) สมมุติว่า Submatrix ครอบคลุมแถวที่ x_1 ถึง x_1 คอลัมน์ที่ y_1 ถึง y_2 เราสามารถหาผลรวมได้จาก $W\sum_{i=x_1}^{x_2} A_i + H\sum_{j=y_1}^{y_2} B_j$ เช่น ในภาพด้านล่าง ผลรวมเท่ากับ $4(A_2 + A_3 + A_4) + 3(B_2 + B_3 + B_4 + B_5)$

	1	2	3	4	5	6
1	$A_1 + B_1$	$A_1 + B_2$	$A_1 + B_3$	$A_1 + B_4$	$A_1 + B_5$	$A_1 + B_6$
2	$A_2 + B_1$	$A_2 + B_2$	$A_2 + B_3$	$A_2 + B_4$	$A_2 + B_5$	$A_2 + B_6$
3	$A_3 + B_1$	$A_3 + B_2$	$A_3 + B_3$	$A_3 + B_4$	$A_3 + B_5$	$A_3 + B_6$
4	$A_4 + B_1$	$A_4 + B_2$	$A_4 + B_3$	$A_4 + B_4$	$A_4 + B_5$	$A_4 + B_6$
5	$A_5 + B_1$	$A_5 + B_2$	$A_5 + B_3$	$A_5 + B_4$	$A_5 + B_5$	$A_5 + B_6$
6	$A_6 + B_1$	$A_6 + B_2$	$A_6 + B_3$	$A_6 + B_4$	$A_6 + B_5$	$A_6 + B_6$

อนึ่ง ในการหาผลรวมของ subarray A เราสามารถทำได้โดยเก็บ Partial Sum คล้าย ๆ วิธีของ Subtask 2 กล่าวคือ $S_i = A_1 + A_2 + \ldots + A_i$ โดยเราสามารถสร้าง array S ได้จากความสัมพันธ์ $S_i = S_{i-1} + A_i$ ส่วนการหาผลรวมตั้งแต่ตัวที่ x_1 ถึง x_2 สามารถหาได้จาก $S_{x2} - S_{x1-1}$
(array B ก็เหมือนกัน)

เนื่องจากเราไม่ได้สร้างตารางแล้ว จะทำให้ Space Complexity ลดลงเหลือ $\mathcal{O}(N)$ แต่ Time Complexity ยังคงเป็น $\mathcal{O}(N^2)$ อยู่

Subtask 4 (30 คะแนน) - $N \le 10^5$

สังเกตว่า ความจริงแล้วเราไม่จำเป็นต้องทดลองทุกสี่เหลี่ยมที่เป็นไปได้ เพราะผลรวมทั้งหมด ขึ้นอยู่กับผลรวมของ subarray ของ A และ B ที่เลือกมา ซึ่งแยกจากกันโดยสิ้นเชิง ดังนั้น เราเพียงแค่ทดลองหา subarray ขนาด H ของ A ที่ดีที่สุด และหา subarray ขนาด W ของ B ที่ดีที่สุด แล้วนำมารวมกันโดยใช้ความสัมพันธ์ $W\sum_{i=x_1}^{x_2} A_i + H\sum_{j=y_1}^{y_2} B_j$ ก็เพียงพอแล้ว วิธีนี้ Time Complexity จะเป็น $\mathcal{O}(N)$

Solution Code

```cpp
#include <bits/stdc++.h>
#define long long long
using namespace std;

const int N = 1e5+5;

int n, w, h;
long A[N], B[N];

int main() {
    scanf("%d %d %d", &n, &w, &h);
    for(int i = 1; i <= n; ++i) scanf("%lld", A+i), A[i] += A[i-1];
    for(int i = 1; i <= n; ++i) scanf("%lld", B+i), B[i] += B[i-1];
    long mx1 = 0, mx2 = 0;
    for(int i = w; i <= n; ++i) mx1 = max(mx1, A[i] - A[i-w]);
    for(int i = h; i <= n; ++i) mx2 = max(mx2, B[i] - B[i-h]);
    printf("%lld\n", mx1 * h + mx2 * w);
}
```

โจทย์ข้อนี้เป็นหนึ่งในโจทย์คลาสสิกที่ให้ความสำคัญกับ Data Structure เป็นอย่างมาก โดย Data Structure ที่ใช้ในโจทย์ข้อนี้ถือว่าค่อนข้างซับซ้อน แต่สามารถนำไปประยุกต์ใช้ในโจทย์อื่น ๆ ได้จำนวนมาก

Subtask 1 ถึง 3 (45 คะแนน) - $N \le 1{,}000$

เราสามารถจำลองเหตุการณ์ตามที่โจทย์ระบุได้เลย โดยหากใช้ array ก็จำเป็นจะต้องเลื่อนข้อมูลที่อยู่ทางด้านขวาตัวที่เอาออกเข้ามาเอง หรือหากใช้ `std::vector` ก็อาจจะใช้ฟังก์ชัน `erase` ซึ่งเลื่อนตำแหน่งให้โดยอัตโนมัติ ทั้งสองวิธีจะมี Time Complexity เป็น $\mathcal{O}(N^2)$

Subtask 4 (25 คะแนน) - $1 \le N \le 50{,}000$

แทนที่จะจำลองเหตุการณ์โดยการเลื่อนสมาชิกใน array เข้ามา เราจะใช้วิธีเก็บ Boolean Array โดยแต่ละช่องจะระบุว่าข้อมูลช่องนั้นถูกนำออกแล้วหรือยัง เมื่อเราต้องกาหารตัวที่ k ที่ยังไม่ถูกนำออก ให้ลูปจากทางซ้ายมาทางขวา นับเฉพาะช่องที่ไม่ได้นำออก จนกว่าจะถึงช่องที่ k ถึงอย่างไรก็ตาม ก็ยังช้าเกินอยู่ดี

ให้แบ่ง array ขนาด N ออกเป็น S บล็อก แต่ละบล็อกจะเก็บข้อมูลเพื่อนับว่าในบล็อกนั้นมีข้อมูลกี่ตัวที่ยังไม่ถูกนำออก เมื่อเราต้องการหาตัวที่ k ให้เราลูปพิจารณาทีละบล็อกไปก่อน จนกว่าจะเจอบล็อกที่มีข้อมูลตัวที่ k อยู่ จึงลูปตามสมาชิกทีละตัวในบล็อกนั้นเพื่อหาตัวที่ k

ยกตัวอย่าง หากมีข้อมูล $N = 12$ ตัว แล้วเราแบ่งออกเป็น $S = 3$ บล็อก บล็อกละ 4 ตัว โดยข้อมูลตัวที่ 3, 6, 10, 11 ถูกนำออกไปแล้ว เราจะเก็บข้อมูลในแต่ละบล็อกดังนี้

บล็อกที่ 1: เหลือ 3 ตัว				บล็อกที่ 2: เหลือ 3 ตัว				บล็อกที่ 3: เหลือ 2 ตัว			
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

หากต้องการหาตัวที่ $k = 5$ ลำดับการทำงานจะเป็นดังนี้

- บล็อกที่ 1 มีเพียง 3 ตัวที่เหลืออยู่ ซึ่งน้อยไป จึงพิจารณาบล็อกถัดไป
- บล็อกที่ 2 มีเพิ่มมาอีก 3 ตัว รวมเป็น 6 ตัว ดังนั้นตัวที่ 5 ต้องอยู่ในบล็อกนี้
- ก่อนหน้าบล็อกนี้มีอยู่แล้ว 3 ตัว ตำแหน่งที่ 5 จึงเป็นตัวที่ 4
- ตำแหน่งที่ 6 ไม่พิจารณาเพราะถูกนำออกแล้ว
- ตำแหน่งที่ 7 เป็นตัวที่ 5 สิ้นสุดการทำงาน

ในกรณีแย่สุด ข้อมูลที่เราต้องการอาจจะอยู่ในบล็อกสุดท้าย รวมแล้วต้องพิจารณาบล็อกทั้งหมด S บล็อก และภายในบล็อกสุดท้ายต้องพิจารณาข้อมูลอีก $\frac{N}{S}$ ตัว ดังนั้น เราควรกำหนดจำนวนบล็อก S เป็น

$\sqrt{N}$ (โดยประมาณ) เพราะจะทำให้มีจำนวนบล็อกและจำนวนข้อมูลโดด ๆ ที่ต้องพิจารณาเท่ากัน วิธีนี้จะทำให้จำนวนครั้งที่ต้องพิจารณาน้อยสุดเท่าที่เป็นไปได้ โดยพิจารณาเพียง $\mathcal{O}(\sqrt{N})$ รอบ

เนื่องจากโจทย์กำหนดให้ดำเนินการทั้งหมด N ครั้ง ดังนั้น Time Complexity จะเป็น $\mathcal{O}(N\sqrt{N})$ เทคนิคการแบ่ง array เป็น $\sqrt{N}$ บล็อกดังที่กล่าวมา เรียกว่า Square Root Decomposition

สามารถศึกษาข้อมูลเพิ่มเติมได้ที่ https://www.geeksforgeeks.org/sqrt-square-root-decomposition-technique-set-1-introduction/

Subtask 5 (30 คะแนน) - $N \leq 200,000$

1. Order Statistics Tree

ใช้ Binary Search Tree ในการเก็บตำแหน่งข้อมูลที่ยังไม่ถูกนำออก และในแต่ละ node ของ BST จะต้องเก็บจำนวน node ทั้งหมดใน Subtree นั้นด้วย ซึ่งจะต้องอัพเดทเมื่อมีการลบสมาชิกออกจาก BST

หากต้องการหาตัวที่ k ให้เริ่มท่องต้นไม้จาก Root ของ BST ก่อน หากจำนวน node ใน subtree ด้านซ้ายมี $k-1$ node พอดี นั่นแปลว่า node ที่เราพิจารณาอยู่เป็น node ที่ k จึงตอบ node ปัจจุบัน

หากจำนวน node ใน subtree ด้านซ้ายมี k node ขึ้นไป นั่นแปลว่า node ที่ k อยู่ทางด้านซ้าย จึงต้องท่องต้นไม้ต่อไปทางด้านซ้าย แต่หากจำนวน node ใน subtree ด้านซ้ายมีไม่ถึง k node ให้ท่องต้นไม้ต่อไปทางด้านขวา แต่เราจะไม่ได้หาตัวที่ k อีกต่อไป เนื่องจากเราข้ามทางด้านซ้ายและ root ไปแล้ว จึงต้องลบค่า k ด้วยจำนวนข้อมูลที่ข้ามไป

การเก็บ BST ในลักษณะดังกล่าวมีชื่อเรียกคือ Order statistics tree โดยสามารถศึกษาข้อมูลเพิ่มเติมได้ที่ https://en.wikipedia.org/wiki/Order_statistic_tree (ในลิงค์ อาจพิจารณาให้ k เริ่มนับจาก 0 ถึง $N-1$ ดังนั้นจึงตอบ root เมื่อ subtree ซ้ายมี k ตัวแทน)

หากใช้ Balanced Binary Search Tree จะทำให้แต่ละ operation ทำงานใน $\mathcal{O}(\log N)$ เนื่องจากเราดำเนินการทั้งหมด N ครั้ง เวลารวมจึงเป็น $\mathcal{O}(N \log N)$

2. Fenwick Tree หรือ Segment Tree

Fenwick Tree (Binary Indexed Tree) และ Segment Tree เป็นโครงสร้างข้อมูลที่รองรับการดำเนินการตอบคำถามเกี่ยวกับ subarray ได้อย่างรวดเร็ว อีกทั้งยังรองรับการแก้ไขสมาชิกใน array อีกด้วย โดยปกติแล้วจะใช้เวลา $\mathcal{O}(\log N)$ ต่อ operation (โครงสร้างข้อมูลนี้เกินขอบเขตเนื้อหาระดับชาติ)

ในที่นี้ จะขอไม่กล่าวถึงวิธีการสร้างโครงสร้างข้อมูลนี้ขึ้นมา แต่จะนำโครงสร้างข้อมูลมาประยุกต์ใช้เลย ศึกษาข้อมูลเกี่ยวกับ Segment Tree ได้ที่ https://www.geeksforgeeks.org/segment-tree-set-1-sum-of-given-range/ ส่วน Fenwick Tree (Binary Indexed Tree) ศึกษาได้ที่ https://www.geeksforgeeks.org/binary-indexed-tree-or-fenwick-tree-2/

เราจะใช้ Data Structure 1 ใน 2 ตัวนี้ รองรับ operation 2 อย่างคือ 1) หาว่าในช่วงตัวที่ 1 ถึง i มีผลรวมเท่ากับเท่าไหร่ และ 2) อัพเดทค่าของ array ช่องที่ i โดยเราจะกำหนดให้ array ช่องที่ i เป็น 1 เมื่อยังไม่ได้นำข้อมูลช่องที่ i ออก และกำหนดเป็น 0 เมื่อนำข้อมูลช่องที่ i ออกไปแล้ว

ยกตัวอย่าง หากมีข้อมูล $N = 12$ ตัว และนำข้อมูลตัวที่ 3, 6, 9, 10 ออกไปแล้ว จะได้ข้อมูลดังนี้

ตำแหน่ง	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
ค่าที่เก็บ	1	1	0	1	1	0	1	1	1	0	1	1
ผลรวม	1	2	2	3	4	4	5	6	6	6	8	9

เมื่อเราต้องการหาตัวที่ k ที่ยังไม่ถูกนำออก เราสามารถใช้การ Binary Search หาคำตอบได้ โดยเราจะหาตำแหน่งแรกที่มีผลรวมเท่ากับ k พอดี ในที่นี้ หาก $k = 6$ ก็จะต้องตอบตำแหน่งที่ 8 เพราะเป็นตำแหน่งแรกที่มีผลรวมเท่ากับ 6 พอดี

เนื่องจากเราต้อง Binary Search บนข้อมูล N ช่อง และการหาผลรวมแต่ละครั้งใช้เวลา $\mathcal{O}(\log N)$ ดังนั้น จึงใช้เวลา $\mathcal{O}(\log^2 N)$ ต่อ operation ทำให้ Time Complexity ทั้งหมดเป็น $\mathcal{O}(N \log^2 N)$ (สามารถลดเวลาให้เหลือ $\mathcal{O}(N \log N)$ ได้ โดย Binary Search บน Segment Tree ให้ทำวิธีคล้ายกับ Order Statistics Tree ข้างต้น)

(Solution Code อยู่ในหน้าถัดไป)

Solution Code

```
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;

const int N = 1<<19;

int n, A[N], t[N+1];

void update(int x) {
    for(int i = x; i <= N; i += i&-i) t[i]--;
}

int que(int x) {
    int sum = 0;
    for(int i = x; i != 0; i -= i&-i) sum += t[i];
    return sum;
}

int query(int x) {
    int l = 1, r = N;
    while(l < r) {
        int m = (l + r) >> 1;
        if(que(m) >= x) r = m;
        else l = m+1;
    }
    return l;
}

int main() {
    for(int i = 1; i <= N; ++i) t[i] = i&-i;
    scanf("%d", &n);
    for(int i = 1; i <= n; ++i) scanf("%d", A+i);
    for(int i = 1; i <= n; ++i) {
        int now; scanf("%d", &now);
        int ret = query(now);
        printf("%d\n", A[ret]);
        update(ret);
    }
}
```

ในขณะที่โจทย์ข้อนี้พยายามแยกส่วนพนักงานกับเจ้าของบริษัทออกจากกันอย่างชัดเจน หากมองดูดี ๆ แล้วก็จะเห็นได้ว่าเราสามารถสมมุติให้เจ้าของบริษัทเป็นพนักงานอีกคนหนึ่ง โดยเจ้าของบริษัทเป็นคนแรกที่รู้งาน และสามารถส่งข่าวต่อให้ใครก็ได้ (ส่งให้ตัวแทนกลุ่มใดก็ได้) แล้วคนที่เหลือจะส่งต่อให้ใครอีกก็ได้ จนครบทุกคน

เราสามารถมองการส่งข่าวในลักษณะกราฟต้นไม้ได้ โดยที่มีเจ้าของบริษัทเป็นรากของต้นไม้ แล้วแตกกิ่งออกไปเรื่อย ๆ ตามลำดับ โดยเส้นเชื่อมแต่ละเส้นจะถูกกำ ากับด้วยน้ำหนัก ซึ่งก็คือเวลาที่ใช้ในการติดต่อสื่อสารนั่นเอง เนื่องจากว่ากราฟดังกล่าวจะต้องเชื่อมต่อคนทั้งกราฟ (ทุกคนต้องได้รับข่าว) โดยที่เวลารวมน้อยสุด โจทย์นี้ก็คือโจทย์ Minimum Spanning Tree ทั่วไปนั่นเอง

กราฟที่เราต้องการจะหา MST จะมี node ทั้งหมด $n+1$ node แทนคนงานแต่ละคน (รวมเจ้าของบริษัทด้วย อาจจะแทนเจ้าของบริษัทด้วยเลข 0 หรือ n+1 แล้วแต่ความสะดวก) และเส้นเชื่อมระหว่างทุกคู่ node หากเป็นเส้นเชื่อมระหว่างเจ้าของบริษัทกับคนงานคนที่ i น้ำหนักจะเท่ากับ T_i หากเป็นเส้นเชื่อมระหว่างคนงานคนที่ i กับคนที่ j ก็จะมีน้ำหนักเท่ากับ $B_i + B_j$ เมื่อสร้างกราฟเสร็จแล้ว ก็สามารถใช้ Prim’s Algorithm หรือ Kruskal’s Algorithm ได้เลย

Solution Code

```
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;

using ll = long long;
using pii = pair<int, int>;
using edge = pair<int, pii>;
const int N = 1010;

int n, T[N], B[N], parent[N]

int root(int u)
{
    if (parent[u] == u)
        return u;
    return parent[u] = root(parent[u]);
}
// continued on next page
```

```cpp
bool merge(int u, int v)
{
    u = root(u);
    v = root(v);
    if (u != v) {
        parent[u] = v;
        return true;
    }
    return false;
}

int main()
{
    scanf("%d", &n);
    vector<edge> E;
    for (int i = 1; i <= n; ++i) {
        scanf("%d", &T[i]);
        E.emplace_back(T[i], pii(0, i));
        parent[i] = i;
    }

    for (int i = 1; i <= n; ++i) {
        scanf("%d", &B[i]);
        for (int j = 1; j < i; ++j)
            E.emplace_back(B[i]+B[j], pii(i, j));
    }

    sort(E.begin(), E.end());
    ll sum = 0;
    for (auto e : E) {
        if (merge(e.second.first, e.second.second))
            sum += e.first;
    }
    printf("%lld\n", sum);

    return 0;
}
```

โจทย์ข้อนี้ถือเป็นโจทย์ข้อหนึ่งที่มีเนื้อเรื่องยาวที่สุดในบรรดาโจทย์ทั้งหมด ถึงอย่างไรก็ตาม หากพยายามอ่านก็จะทราบว่าโจทย์ข้อนี้เป็นโจทย์คลาสสิกที่ถูกดัดแปลงข้อหนึ่ง

สรุปสั้น ๆ เลยคือ กำหนด Weighted Directed Graph ให้ (กราฟถ่วงน้ำหนักแบบมีทิศทาง) ให้หาเส้นทางสั้นที่สุดจากจุด X ไปจุด Y โดยมีเงื่อนไขพิเศษคือ จำนวน node ในเส้นทางจะต้องเป็นพหุคูณของค่า T ที่กำหนดให้

Subtask 1-2 (50 คะแนน) - $T=1$

ในกรณี $T=1$ นั่นหมายความว่า เราต้องการหาเส้นทางสั้นสุดเฉย ๆ ไม่ได้มีเงื่อนไขพิเศษเพิ่มเติมอะไร เพราะฉะนั้นสามารถใช้ Dijkstra's Algorithm ตามปกติได้เลย

Subtask 3-4 (50 คะแนน) - $T \le 8$

การใช้หมายเลข node ใน priority queue/distance array ไม่เพียงพอ เพราะจะทำให้เราสูญเสียข้อมูลจำนวน node ใน path ของเรา ดังนั้น แทนที่จะใช้หมายเลข node เพียงอย่างเดียว เราจะเก็บจำนวน node ที่เคยเดินผ่านมาใน path คู่กันไปด้วย เช่น หากเราต้องการพิจารณา node หมายเลข 5 โดยที่ node ปัจจุบันเป็น node ที่ 3 ใน path เราจะเก็บเป็นคู่อันดับ $(5,3)$

ในที่นี้ เราจะถือว่าคู่อันดับ $(5,3)$ กับคู่อันดับ $(5,4)$ เป็นคนละ node กันเลย ดังนั้น array ที่ใช้เก็บระยะห่างสั้นสุด จะต้องเป็น array 2 มิติ ถึงอย่างไรก็ตาม สังเกตว่าเราไม่จำเป็นต้องเก็บจำนวน node ที่เดินผ่านมาจริง ๆ ก็ได้ เก็บเพียงจำนวน node ใน mod T ก็เพียงพอ เพราะเราสนแค่ว่าจำนวน node สุดท้ายเป็นพหุคูณของ T หรือไม่ หากเป็นพหุคูณ ค่าที่เก็บใน mod T จะเท่ากับ 0

คุณอาจจะใช้ Dijkstra's Algorithm แบบผิด ๆ มาโดยตลอด

หาก priority queue ของคุณเก็บแค่หมายเลข node (และจำนวน node ใน path) เพียงอย่างเดียว แล้วใช้ comparator function เพื่อจัดลำดับตาม distance array ด้านนอก โค้ดของคุณจะติด – อย่างน้อยหนึ่งตัว เนื่องจากเรา generate test case มาเพื่อดักวิธีนี้โดยเฉพาะ หลายคนอาจจะเข้าใจว่าใช้วิธีนี้ได้ แต่ความจริงแล้ว <u>หากค่า distance ด้านนอกมีการเปลี่ยนแปลง อาจจะทำให้การจัดลำดับใน priority queue ผิดเพี้ยนได้</u> ดังนั้น เราควรเก็บ distance คู่กับหมายเลข node ไปเลย (เก็บเป็นคู่อันดับ) ส่วนการจัดลำดับ priority queue ให้ใช้ค่านี้เท่านั้น (ห้ามอ้างอิง array ด้านนอก) หากค่าด้านนอกเปลี่ยนแปลง ให้ push คู่อันดับใหม่ลงไป เมื่ออันเก่าถูก pop ออกมาแล้ว distance ไม่ตรงกับที่เก็บไว้ใน array ก็สามารถข้ามได้เลย

Solution Code

```cpp
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
using ll = long long;
using pii = pair<int, int>;
using plii = pair<ll, pii>;
const ll INF = 1e17;
const int N = 10010;
const int M = 10010;
const int T = 10;
vector<pii> G[N];
bool visited[N][T];
ll dist[N][T];
int main()
{
    int n, m, t, x, y, u, v, w;
    scanf("%d%d%d%d%d", &n, &m, &t, &x, &y);
    for (int i = 0; i < m; ++i) {
        scanf("%d%d%d", &u, &v, &w);
        G[u].emplace_back(v, w);
    }
    for (int i = 1; i <= n; ++i) {
        for (int j = 0; j < t; ++j)
            dist[i][j] = INF;
    }
    dist[x][1%t] = 0;
    priority_queue<plii, vector<plii>, greater<plii> > Q;
    Q.emplace(dist[x][1], pii(x, 1));
    while (!Q.empty()) {
        ll d = Q.top().first;
        int u = Q.top().second.first;
        int k = Q.top().second.second;
        Q.pop();
        if (visited[u][k]) continue;
        visited[u][k] = true;
        int nk = (k+1)%t;
        for (auto v : G[u]) {
            if (!visited[v.first][nk] && d+v.second < dist[v.first][nk]) {
                dist[v.first][nk] = d+v.second;
                Q.emplace(dist[v.first][nk], pii(v.first, nk));
            }
        }
    }
    printf("%lld\n", dist[y][0] == INF ? -1 : dist[y][0]);
    return 0;
}
```