4.7 复习要求及习题

4.7.1 本章要求掌握的概念和计算

(1) 掌握二、三维向量线性组合和向量空间的定义，为什么要求其各基向量必须线性无关？

(2) 向量点乘、叉乘的定义，与平面向量四边形的面积、三维向量六面体的体积有何关系？

(3) 行列式为什么能表示体积？与向量组线性无关有何关系？

(4) 掌握向量的归一化及两向量夹角计算公式 $\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}=\|\boldsymbol{v}\|\cdot\|\boldsymbol{w}\|\cos\theta$ 来源及意义。当 $\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}=0$ 时，$\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{w}$ 正交。

(5) 如何用 rref 函数判断多个向量组合的线性相关或线性无关？如何判断多个向量之间的正交性？

(6) 从向量线性组合的角度，看待线性方程组的几何意义，分别就适定、欠定或超定进行讨论。超定方程中点与平面的最小距离为何等价于最小二乘误差？

(7) 线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解写成 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}\backslash\boldsymbol{b}$，可适用于适定、欠定或超定吗？三种情况如何判别？它的实际计算内容有些什么不同？

(8) MATLAB 实践：四个以上三维向量的相关性分析，欠定方程组通解的 MATLAB 求法，超定方程组的解法。

(9) MATLAB 函数：rank、norm、null、zeros、pinv、drawvec、dot、cross。

4.7.2 计算题

4.1 用空间笛卡尔坐标概念，找出两个最简单的单位向量 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$，它们与向量 a(1,0,1)垂直并相互正交。

解： 设 u=[u1,u2,u3], v=[v1,v2,v3],则与 a 正交的条件为[u,a]=0, [v,a]=0, u1+u3=0, v1+v3=0, norm(v)=1, norm(u)=1, u1v1+u2v2+u3v3=0, 可由笛卡尔坐标内图形取 u=[-0.707,0,0.707],v=[0,1,0]

4.2 问向量[1, 1, 1]是否处在向量[1, 3, 4], [4, 0, 1]和[3, 1, 2] 所张成的子空间中？

解：取向量组 A=[[1;3;4],[4;0;1],[3;1;2],[1;1;1]], 求 U=rref(A)

得到：$U=\begin{bmatrix}1.0000 & 0 & 0.3333 & 0\\ 0 & 1.0000 & 0.6667 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1.0000\end{bmatrix}$

前三个向量的秩为 2，即它们是共面的。第四个向量则超出了这个子空间之外。

4.3 是非题(若为“是”，给出理由，若为非，给出反例)：

(a) 设三维向量 $\boldsymbol{u}$ 垂直于 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{w}$，则 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{w}$ 平行；非

(b) 设三维向量 $\boldsymbol{u}$ 垂直于 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{w}$，则 $\boldsymbol{u}$ 垂直于 $\boldsymbol{v}+2\boldsymbol{w}$；是

(c) 设 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 为相互正交的单位向量，则 $\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\|=\sqrt{2}$ 。是

4.4 求顶点为 A(1,2,2)、B(3,1,4)、C(5,2,1)的三角形的面积。(提示：用叉乘命令 cross)

解：三角形面积等于其任意两边向量的叉乘积之半， $S=0.5\overline{AB}\times\overline{AC}$

坐标顶点 za=[1;2;2],zb=[3;1;4],zc=[5;2;1],向量 ab=zc-za,ac=zc-za，故三角形的面积向量为：

S=0.5*cross([zb-za],[zc-za]), 其大小为 A=norm(S)

程序运行结果为：

$$za=\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix},zb=\begin{bmatrix}3\\1\\4\end{bmatrix},zc=\begin{bmatrix}5\\2\\1\end{bmatrix},s=0.5*cross([zb-za],[zc-za])=\begin{bmatrix}0.5\\5.0\\2.0\end{bmatrix},\ A=norm(S)=5.4083$$

此面积的法线的三个方向余弦可由 s/A 求得。

4.5 已知两个在三维空间中的平面 $x-2y+z=0$ 和 $-x+2y+z=0$，试画出此两平面的立体图形并显示它们

的交线。

解：ezmesh('-x+2*y'),hold on,ezmesh('-x-2*y')

4.6 解下列方程组，并用 ezplot 函数画出各个方程所对应的直线及交点。

(a) $\begin{cases}x+3y=5\\3x-y=2\end{cases}$；(b) $\begin{cases}x+y=2\\3x+3y=6\end{cases}$；(c) $\begin{cases}x+y=2\\3x+3y=5\end{cases}$。

解：

(a) close all, ezplot('x+3*y=5'), hold on, ezplot('3*x-y=2'), grid on 有解方程组

(b) close all, ezplot('x+y=2'), hold on, ezplot('3*x+3*y=6'), grid on 不独立方程组

(a) close all, ezplot('x+y=2'), hold on, ezplot('3*x+3*y=5'), grid on, 不相容方程组

4.7 解下列方程组，并用 ezmesh 函数画出各个方程所对应的平面、交线及交点。

(a) $\begin{cases}x+3y-2z=5\\3x-y+z=2\\2x+y-3z=-3\end{cases}$；(b) $\begin{cases}x+3y-2z=5\\3x-y+z=2\\2x+6y-4z=3\end{cases}$。

解：(a) close, ezmesh('(x+3*y-5)/2'),hold on,ezmesh('-3*x+y+2'),hold on, ezmesh('(2*x+y+3)/3')

(b) close, ezmesh('(x+3*y-5)/2'),hold on,ezmesh('-3*x+y+2'),hold on, ezmesh('(2*x+6*y-3)/4')

4.8 设五个三维向量 $M=[\alpha_1,\cdots,\alpha_5]=\begin{bmatrix}3&2&-1&-3&-2\\2&-1&3&1&-3\\7&2&5&-4&-3\end{bmatrix}$，判断哪几个向量组成线性无关组。

M=[3,2,1,-3,- 2;2,-1,3,1,-3;7,2,5,-4,-3], U0=rref(M)

$$M=\begin{bmatrix}3&2&1&-3&-2\\2&-1&3&1&-3\\7&2&5&-4&-3\end{bmatrix},\ U0=\begin{bmatrix}1.0000&0&1.0000&0&-2.3333\\0&1.0000&-1.0000&0&-10.0000\\0&0&0&1.0000&-8.3333\end{bmatrix}$$

可见 1,2,3 三个向量构成了线性相关组外，其余任何三个向量组成的都是线性无关组。

4.9 求由向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=[4,5,6]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=[1,3,1]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=[3,4,3]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=[1,1,2]^{\mathrm{T}}$ 所张的向量空间的一组基，确定这四个向量的线性相关关系式。

解：a1=[4;5;6], a2=[1;3;1], a3=[3;4;3], a4=[1;1;2], A=[a1,a2,a3,a4], U0a=rref(A)

得到：$A=\begin{bmatrix}4&1&3&1\\5&3&4&1\\6&1&3&2\end{bmatrix},\ U0a=\begin{bmatrix}1.0000&0&0&0.5000\\0&1.0000&0&-0.1000\\0&0&1.0000&-0.3000\end{bmatrix}$

取 a1,a2,a3 为此向量组的一组基，这四个向量的线性相关关系式位：a4=0.5a1-0.1a2-0.3a3

解：v1=[5;3;8], v2=[1;3;4], v3=[2;-1;5], v4=[0;-12;-18], V=[v1,v2,-v3,-v4],要找到 C 满足 V*C=[0,0,0]$^{\mathrm{T}}$

这要求 V 的各子方阵的行列式等于零，也就是 rank(V)<3.

4.10 设 **H** 为由 $\mathbf{v_1}=\begin{bmatrix}5\\3\\8\end{bmatrix}$, $\mathbf{v_2}=\begin{bmatrix}1\\3\\4\end{bmatrix}$, 所张成的向量空间，现有一个向量 $b=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}$, 问 b 的三个分量应该满足什么条件才能保证 b 在 H 空间中？

解：**b** 必须是 $\mathbf{v_1}$ 和 $\mathbf{v_2}$ 的线性组合，$\mathbf{b=c_1v_1+c_2v_2}$，即

$$b=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}=c_1v_1+c_2v_2=c_1\begin{bmatrix}5\\3\\8\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}1\\3\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5c_1+c_2\\3c_1+3c_2\\8c_1+4c_2\end{bmatrix}$$

4.11 求 $\boldsymbol{\alpha}_1=[1,-1,2,4]^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=[0,3,1,2]^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=[3,0,7,14]^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_4=[1,-1,2,0]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_5=[2,1,5,0]^{\mathrm{T}}$ 的线性无关组，并将其余向量用这组基向量表示。

解：a1=[1;-1;2;4], a2=[0;3;1;2], a3=[3;0;7;14], a4=[1;-1;2;0], a5=[2;1;5;0], U0=rref([a1,a2,a3,4,a5])

得到 $U0a=\begin{bmatrix} 1.0000 & 0 & 3.0000 & 0 & -0.5000 \\ 0 & 1.0000 & 1.0000 & 0 & 1.0000 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0000 & 2.5000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

取任意三个向量并列，构成方阵，如果出现全零行，就是线性相关组，反之就是线性无关组。所以[a1,a2,a4]是一个线性无关组，a3=3a1+a2, a5=-0.5a1+a2+2.5a3，

同理[a1,a3,a4],[a1,a3,a5],[a2,a3,a5],[a2,a4,a5],[a3,a4,a5]等都是线性无关组。

只有[a1,a2,a3]是线性相关组。

4.12　求出通过平面上三点(0,4),(1,2),(2,5)的二次多项式 ax^2+bx+c，并画出其图形。若要求它通过点(3,9)，可以做到吗？要使四个线性方程误差的均方根最小，二次多项式应具有何种形式？

解：将三点坐标代入多项式，得矩阵模型：

$$\left.\begin{aligned} c&=4 \\ a+b+c&=2 \\ 4a+2b+c&=5 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{AX}=\mathbf{B}$$

A=[0,0,1;1,1,1;4,2,1], B=[4;2;5], X=A\B

得：　a=2.5, b=-4.5, c=4. 多项式为 $f(x)=2.5x^2-4.5x+4$

用 x=3 代入，f(3)=13，所以不可能通过点(3,9)。其拟合方程组为

$$\left.\begin{aligned} c&=4 \\ a+b+c&=2 \\ 4a+2b+c&=5 \\ 9a+3b+c&=9 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{A}1*\mathbf{X}1=\mathbf{B}1$$

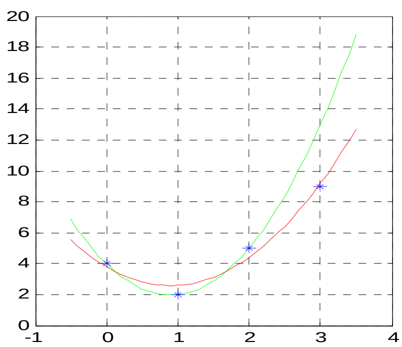
A1=[0,0,1;1,1,1;4,2,1;9,3,1], B1=[4;2;5;9], X1=A1\B1

解得：　a1= 1.5000,　a2=　-2.7000,　a3=　3.8000

拟合多项式成为 $f1(x)=1.5x^2-2.7x+3.8$

画图程序：

```
x=[-0.5:0.1:3.5]'; y=2.5*x.^2-4.5*x+4; y1=1.5*x.^2-2.7*x+3.8;
 plot(x,y,'g',x,y1,'r'),grid on
hold on, plot([0,1,2,3],[4,2,5,9],'*b')
```



4.13　设(*x*,*y*,*z*)是(2,3,1)和(1,2,3)的线性组合，试问所有满足条件的 *x*、*y*、*z* 取何形状？其方程是什么？

x,y,z 应满足以下方程组：$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=c1\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}+c2\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2c1+c2 \\ 3c1+2c2 \\ c1+3c2 \end{bmatrix}$，这是一个通过原点的平面方程。

4.14　已知 x,y 平面上四点(0,0),(1,8),(3,8),(4,20)，求直线 b=Dx，使得在 x=[0,1,3,4]四处误差(y-b)的

均方值为最小。

解：$\begin{bmatrix}0\\1\\3\\4\end{bmatrix}D=\begin{bmatrix}0\\8\\8\\20\end{bmatrix}\Rightarrow \mathbf{X}D=\mathbf{Y},\ \mathbf{X}=\begin{bmatrix}0\\1\\3\\4\end{bmatrix},\mathbf{Y}=\begin{bmatrix}0\\8\\8\\20\end{bmatrix}$

根据超定方程组公式求 D:

$$D=\left(\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{Y}=\left(\begin{bmatrix}0&1&3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\3\\4\end{bmatrix}\right)^{-1}\left(\begin{bmatrix}0&1&3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\8\\8\\20\end{bmatrix}\right)=\frac{112}{25}=4.48$$

拟合直线的方程为 b= 4.48x。

4.15　求：(a) 一个平面 $C+Dx+Ey=z$，它在四个角(1,0),(0,1),(−1,0),(0,−1)上能最佳拟合 4 个值 b=(0,1,3,4)；

(b) 四个误差及其均方值，并证明在方形中心的原点上，z 是四个 b 的平均值。

解：四个方程为：

$$\left.\begin{array}{l}C+D\qquad\;=0\\C+\qquad E=1\\C-D\qquad\;=3\\C\qquad -E=4\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\1&-1&0\\1&1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C\\D\\E\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\\3\\4\end{bmatrix}\Rightarrow \mathbf{AX=B}$$

A=[1,1,0;1,0,1;1,-1,0;1,0,-1], B=[0;1;3;4], X=A\B

解得：X=[2;-1.5;-1.5]，即 C=2, D=-1.5, E=-1.5, 平面方程为 z=2-1.5x-1.5y。在中点 x=y=0 处，z=2=(0+1+3+4)/4，即四个 b 的平均值。

4.16　已知健康孩子的心脏收缩血压 p(毫米汞柱)与他的体重 w(斤)之间的近似关系为 $\beta_0+\beta_1\ln w=p$。现有的统计结果如表 4-5 所示。

表 4-5　例 4.16 的数据表

w	20	30	40	50	60
ln$w$	3.00	3.40	3.69	3.91	4.09
p	91	99	105	110	112

(a) 根据以上统计数据来确定 β_0、β_1 的值。

(b) 对于体重为 45(斤)的孩子，其收缩压的标准值应为多少？

解(a)，列出方程组：

$$\left.\begin{array}{l}b1+3.00\times b2=91\\b1+3.40\times b2=99\\b1+3.69\times b2=105\\b1+3.91\times b2=110\\b1+4.09\times b2=112\end{array}\right\}\Rightarrow b0+\begin{bmatrix}3.00\\3.40\\3.69\\3.91\\4.09\end{bmatrix}b1=\begin{bmatrix}91\\99\\105\\110\\112\end{bmatrix},\Rightarrow\begin{bmatrix}1&3.00\\1&3.40\\1&3.69\\1&3.91\\1&4.09\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b0\\b1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}91\\99\\105\\110\\112\end{bmatrix}\Rightarrow \mathbf{AX=B}$$

由这个超定方程组解 X，程序为：

A=[1,3;1,3.4;1,3.69;1,3.91;1,4.09], B=[91;99;105;110;112], X=A\B

解得：X=[31.6714, 19.8255]$^{\mathrm{T}}$，即 b0= 31.6714, b1=19.8255，p=b0+b1*log(w)。

解(b)，w=45 时，p=31.6714+19.8255*log(45)=107。

4.17　设某经济体有三个部门：化工、动力和机械制造。化工部门把它产出的 30%卖给动力部门，50%卖给机械部门，其余自己留用。动力部门把它产出的 80%卖给化工部门，10%卖给机械部门，其余自己留用。机械部门把它产出的 40%卖给动力部门，40%卖给化工部门，其余自己留用。

(a) 列出此经济体的交换表；

(b) 求出此经济体的平衡价格。

解：

(a) 交换矩阵为：(按化工 1，动力 2，机械 3 排序) $V=\begin{bmatrix} 0.2 & 0.8 & 0.4 \\ 0.3 & 0.1 & 0.4 \\ 0.5 & 0.1 & 0.2 \end{bmatrix}$

(b) V=[0.2,0.8,0.4;0.3,0.1,0.4;0.5,0.1,0.2], U0=rref([eye(3)-V])

得到：$U0=\begin{bmatrix} 1.0000 & 0 & -1.4167 \\ 0 & 1.0000 & -0.9167 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

意味着平衡价格为： p1=1.4167 p3, p2=0.9167 p3

下为最小二乘参数估值补充习题及题解

4.18 求最小二乘直线 y= β_0+ x, 来拟合数据，并求均方误差

a. (−2, 0), (−1, 0), (0, 2), (1, 4) 和 (2, 4)

b. (2, 3), (3, 2), (5, 1) 和 (6, 0)

解：可列出下列方程组：

$$\left.\begin{matrix} \beta_0+\beta_1x_1=y_1 \\ \beta_0+\beta_1x_2=y_2 \\ \beta_0+\beta_1x_3=y_3 \\ \beta_0+\beta_1x_4=y_4 \\ \beta_0+\beta_1x_5=y_5 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_0 \\ \beta_0 \\ \beta_0 \\ \beta_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \beta_1 = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \\ 1 & x_4 \\ 1 & x_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{A}*beta=\mathbf{b}$$

故 beta=inv(A'*A)*A'*b

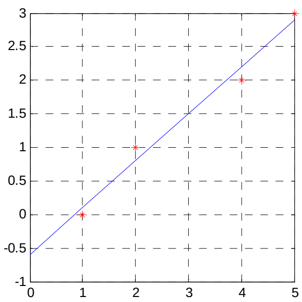
对于数据集 a，计算程序为：

A=[1,-2;1,-1;1,0;1,1;1,2], b=[0;0;2;4;4],

beta=inv(A'*A)*A'*b, e=A*beta-b, norme=norm(e)

得到： beta=[2, 1.2]'，即 β_0=2， β_1=1. 2

norme = 1.2649



绘图程序：plot([-2:2],[0,0,2,4,4],'r*'),hold on,grid on

xc=-2:1:2; yc=2+1.2*x; plot(xc,yc)

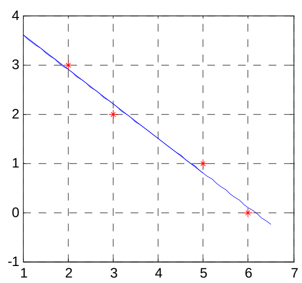
对于数据集 b.

A=[ones(4,1),[2;3;5;6]], b=[3;2;1;0], beta=inv(A'*A)*A'*b

e=A*beta-b,norme=norm(e)

得到 beta= [4.3; - 0.7]

拟合式为：y=4.3-0.7*x



绘图程序：

plot([2;3;5;6], [3;2;1;0],'r*'),hold on,grid on

xc=1:0.1:6.5; yc=4.3-0.7*xc; plot(xc,yc)

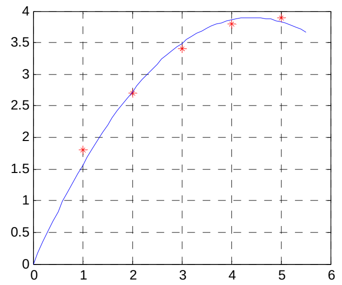
4.19。一个实验产生的数据为(1, 1. 8), (2, 2. 7), (3，3. 4), (4，3. 8)和(5，3. 9)，描述用下列函数形式生成的最小二乘拟合模型： $y=\beta_1x+\beta_2x^2$

这种函数会出现在销售的总量影响产品的价格设定时。

a. 给出这模型的设计矩阵，观察向量，和未知参数向量，

b. 找出数据对应的最小二乘曲线。

解：模型为$\begin{bmatrix} x_1 & x_1^2 \\ x_2 & x_2^2 \\ x_3 & x_3^2 \\ x_4 & x_4^2 \\ x_5 & x_5^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{X*beta = Y}$



其中 X 为设计矩阵，Y 为观测向量，beta 为参数向量。

b. 用 MATLAB 编程如下：

```
x=[1:5]', y=[1.8;2.7;3.4;3.8;3.9],
A=[x, x.^2]; b=y, beta=inv(A'*A)*A'*b
e=A*beta-b, norme=norm(e)
```

运行程序得到： beta=[1.7604, -0.1988]

即： $y=1.7604x-0.1988x^2$.

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} -0.2384 \\ 0.0257 \\ 0.0923 \\ 0.0614 \\ -0.0671 \end{bmatrix}, \quad norm(\mathbf{e}) = 0.2725$$

绘图程序为：plot(x, y,'r*'), hold on, grid on

```
xc=0:0.1:5.5; yc=1.7604*xc-0.1988*xc.^2; plot(xc,yc)
```

4.20. 某一个实验得到的数据为 (1,7.4)，(2,5.9)，(3,-0.9)，描述有下列形式的函数 V 拟合来这些数据产生的最小二乘模型。

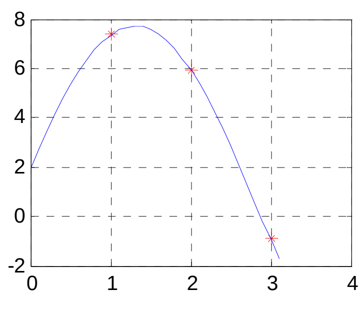
$$y = a\cos x + b\sin x$$

解：模型为：

$$\begin{bmatrix} \cos x_1 & \sin x_1 \\ \cos x_2 & \sin x_2 \\ \cos x_3 & \sin x_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \cos 1 & \sin 1 \\ \cos 2 & \sin 2 \\ \cos 3 & \sin 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.4 \\ 5.9 \\ -0.9 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{A*beta = b}$$

解题的程序为：

```
x=[1;2;3],y=[7.4;5.9;-0.9],
A=[cos(x),sin(x)],b=y,beta=inv(A'*A)*A'*b,
e=A*beta-b, norme=norm(e)
```



程序运行结果为： beta =[2.0116; 7.4558],

$$\mathrm{e} = \begin{bmatrix} -0.0393 \\ 0.0424 \\ -0.0393 \end{bmatrix}, \ \text{norme} = 0.0699$$

即 $y = 2.0116\cos x + 7.4558\sin x$

绘图程序为：

```
plot( x, y,'r*'), hold on, grid on
xc=0:0.1:pi; yc=2.0116*cos(xc)+7.4558*sin(xc); plot(xc,yc)
```

4.21. 为测量飞机起飞表演，飞机的水平位置从 t=0.2 到 t=12 每秒测量一次，具体位置是

0, 8.8, 29.9, 62.0, 104.7,160, 222.0, 294.5, 380.4, 471.1, 571.7, 686.8, 809.2。

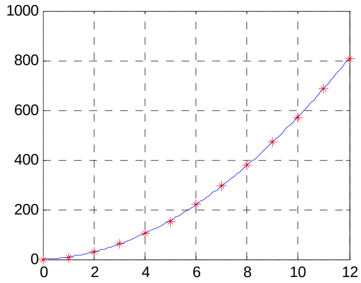
a, 求这些数据的最小二乘立方曲线 $y=\beta_0+\beta_1 t+\beta_2 t^2+\beta_3 t^3$

b, 利用（a）的结果，估计当 t 等于 4.5 秒时飞机的水平速度，

程序为：

```
t=[0:12]';x=[0, 8.8, 29.9, 62.0, 104.7, 150, 222.0, 294.5, 380.4, 471.1, 571.7, 686.8, 809.2]';
A=[ones(13,1),t,t.^2,t.^3],beta=inv(A'*A)*A'*x
```

程序运行结果为：beta =[0.1442; 3.1631; 5.8054; -0.0380]



即 $x=0.1442+3.1631t+5.8054t^2-0.0380t^3$

t=5 时，

x=0.1442+3.1631*5+5.8054*25-0.0380*125=156.34

绘图程序为：

```
plot( t, x,'r*'), hold on, grid on
tc=0:0.1:12;
xc=0.1442+ 3.1631*tc+ 5.8054*tc.^2 -0.0380 *tc.^3
plot(tc,xc)
```

4.22 若放射性物质 A 和 B 分别具有衰变常数 0.02 和 0.07，如果一种含这两种物质的混合物，在时刻 t=0 时，包含有 A 物质 M_A 克和 B 物质 M_B 克，那么在时刻 t，混合物的总量模型是：

$$y=M_A e^{-0.02t}+M_B e^{-0.07t}$$

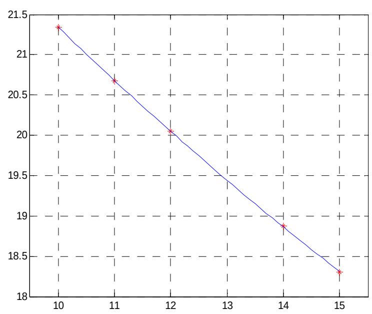
若初始含量 M_A 和 M_B 未知，但在几个时刻记录的(ti,yi)数据为：(10,21.34),(11,20.68),(12,20.05), (14,18.87) 和 (15,18.30)，试给出能估计 M_A 和 M_B 的线性模型。并找出基于此方程的最小二乘曲线。

$$\left.\begin{aligned} M_A e^{-0.02t_1}+M_B e^{-0.07t_1}&=y_1\\ M_A e^{-0.02t_2}+M_B e^{-0.07t_2}&=y_2\\ M_A e^{-0.02t_3}+M_B e^{-0.07t_3}&=y_3\\ M_A e^{-0.02t_4}+M_B e^{-0.07t_4}&=y_4\\ M_A e^{-0.02t5}+M_B e^{-0.07t_5}&=y_5 \end{aligned}\right\}\Rightarrow \begin{bmatrix} e^{-0.02t_1} & e^{-0.07t_1}\\ e^{-0.02t_2} & e^{-0.07t_2}\\ e^{-0.02t_3} & e^{-0.07t_3}\\ e^{-0.02t_4} & e^{-0.07t_4}\\ e^{-0.02t_5} & e^{-0.07t_5} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} M_A\\ M_B \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} y_1\\ y_2\\ y_3\\ y_4\\ y_5 \end{bmatrix}\Rightarrow \mathbf{A}*\mathbf{K}=\mathbf{Y}$$

用 MATLAB 程序表示为：

```
t=[10,11,12,14,15]'; y=[21.34,20.68,20.05,18.87,18.30]';
A=[exp(-0.02*t), exp(-0.07*t)], K=inv(A'*A)*A'*y
```

程序运行结果为：K =[19.9411, 10.1015]^T



即模型为： $y=19.9411e^{-0.02t}+10.1015e^{-0.07t}$

绘图程序：

```
plot( t, y,'r*'), hold on, grid on
tc=10:0.1:15;
yc=19.9411*exp(-0.02*tc)+ 10.1015*exp(-0.07*tc);
plot(tc,yc)
```

4.23.已知文革后高校历年录取人数如右表，分别用二次及三次多项式：

$$y=\alpha_0+\alpha_1 t+\alpha_2 t^2$$

$$y=\beta_0+\beta_1 t+\beta_2 t^2+\beta_3 t^3$$

年份 t	录取人数 y（万）
1977	27
1980	40.2
1990	60.9
2000	221
2008	607.7

拟合此数据，比较其拟合误差。

解；两种情况的模型分别为：

$$\begin{bmatrix}1 & t_1 & t_1^2\\1 & t_2 & t_2^2\\1 & t_3 & t_3^2\\1 & t_4 & t_4^2\\1 & t_5 & t_5^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_0\\\alpha_1\\\alpha_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\\y_5\end{bmatrix},\qquad \begin{bmatrix}1 & t_1 & t_1^2 & t_1^3\\1 & t_2 & t_2^2 & t_2^3\\1 & t_3 & t_3^2 & t_3^3\\1 & t_4 & t_4^2 & t_4^3\\1 & t_5 & t_5^2 & t_5^3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta_0\\\beta_1\\\beta_2\\\beta_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\\y_5\end{bmatrix}$$

程序为：

```
t=[1977,1980,1990,2000,2008]';y=[27,30.2,60.9,221,607.7]';
Aa=[ones(5,1),t,t.^2], alpha=inv(Aa'*Aa)*Aa'*y
Ab=[ones(5,1),t,t.^2,t.^3], beta=inv(Ab'*Ab)*Ab'*y
```

运行程序时出现警告：

Warning: Matrix is close to singular or badly scaled.

Results may be inaccurate. RCOND = 3.622911e-023.

alpha = 1.0e+006 *[4.0289 -0.0041 0.0000]^T

beta = 1.0e+008 *[-2.3562 0.0036 -0.0000 0.0000]

造成此问题的原因是 t 的数值太大，它的乘方就更大，超出了 MATLAB 限定的动态范围。

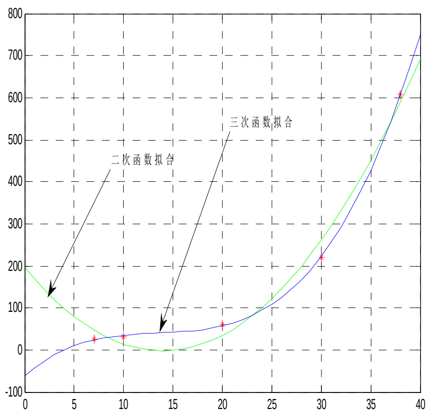
解决的方法是改变时间起点，把 1970 年作为起点：

```
t=[7, 10, 20,30,38]';y=[27,30.2,60.9,221,607.7]';
Aa=[ones(5,1),t,t.^2], alpha=inv(Aa'*Aa)*Aa'*y ,normea=norm(Aa*alpha-y)
Ab=[ones(5,1),t,t.^2,t.^3], beta=inv(Ab'*Ab)*Ab'*y, normeb=norm(Ab*beta-y)
```

得到：

alpha = [196.3427, -28.5353, 1.0236]^T

beta =[-61.9064, 20.7737, -1.4710, 0.0365]



绘图程序如下，

```
plot( t, y,'r*'), hold on, grid on
tc=0: 40;
xc1=196.3427 -28.5353*tc+1.0236 *tc.^2
xc2= -61.9064+ 20.7737*tc -1.4710*tc.^2+0.0365*tc.^3
plot(tc,xc1,'g'), plot(tc,xc2,'m'),
```

拟合误差为：

```
normea=norm(Aa*alpha-y)
normeb=norm(Ab*beta-y)
```

得到右图（注意横坐标是从 1970-2010）

并算得：

normea= 57.3896【万人】

normeb= 7.3194【万人】

所以用三次多项式拟合精度要好得多。