慕课第五章题解

5.1　什么样的 2×2 矩阵 $\boldsymbol{R}$ 能把所有向量旋转 45 度？从而使向量(1,0)变成(0.707,0.707)，向量(0,1)变成(–0.707,0.707)。并画出上述过程的图形。

解：将两个正交单位基向量旋转 θ 后，其坐标分别为$\begin{bmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{bmatrix}$及$\begin{bmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{bmatrix}$,将它们合并为变换矩阵 R

$R(\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$，θ =45 度时，$R=\begin{bmatrix}0.707 & -0.707\\ 0.707 & 0.707\end{bmatrix}$,

$$R\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.707 & -0.707\\ 0.707 & 0.707\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.707\\0.707\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}0.707 & -0.707\\ 0.707 & 0.707\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0.707\\0.707\end{bmatrix},$$

5.2　将行向量 $\boldsymbol{A}$=[1,4,5]与列向量 $\boldsymbol{X}=[x,y,z]^T$ 的数量积写成矩阵乘法 $\boldsymbol{AX}$。$\boldsymbol{A}$ 只有一行，$\boldsymbol{AX}$=0 的解 $\boldsymbol{X}$ 具有什么形状？它与向量 (1,4,5)具有何种几何关系？

解：AX=x+4y+5z=0. z=(x+4y)/5 是三维空间的一个平面方程。在该平面上的各点到原点的向量 (x,y,z)都与向量 A 正交，或者说，A 是这个平面的法线向量。A/norm(A)是这个法线向量的方向余弦。

A=[1,4,5]',　s= A/norm(A)

得到：$s=\begin{bmatrix}0.1543\\0.6172\\0.7715\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{bmatrix}=a\cos(s)=\begin{bmatrix}1.4159\\0.9056\\0.6896\end{bmatrix}$弧度。

这是向量 A 与 x,y,z 三根坐标轴之间的空间夹角。

5.3　坐标测量仪测出平面上五点的数据如下表：

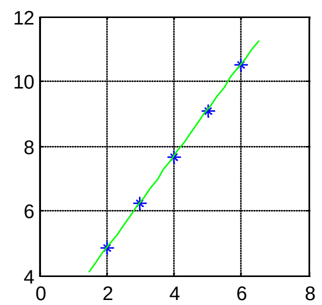
点	1	2	3	4	5
x	2	3	4	5	6
y	4.8	6.2	7.6	9.1	10.5

问(a) 若用一根直线拟合这五个点，该直线的方程是什么？(b) 各点到该直线的垂直误差是多少？

解：(a) 设该直线的方程为 y=ax+b

将 5 点坐标代入，得到方程组

$$\begin{bmatrix}4.83\\6.24\\7.66\\9.07\\10.49\end{bmatrix}=a\begin{bmatrix}2\\3\\4\\5\\6\end{bmatrix}+b,\ \Rightarrow\begin{bmatrix}2&1\\3&1\\4&1\\5&1\\6&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4.83\\6.24\\7.66\\9.07\\10.49\end{bmatrix}\Rightarrow \mathbf{AX}=\mathbf{B}$$



程序为：A=[2,1;3,1;4,1;5,1;6,1], B=[4.8;6.2;7.7;9.1;10.5],

X=A\B, e=A*X-B

解得：X=[1.43; 1.94]，即直线方程为：y=1.43x+1.94.

误差为：e=AX-B=[0.00,0.03,-0.04,-0.01,0.02], std(e)=0.0274

(b) 要求各点到直线的垂直距离，必须以这根直线为坐标基准，求各点在此坐标系内的投影。为此，先列出这五点在原坐标系中的向量组 V，然后取点 5 为基准，求出各点到点 5 联线向量（差向量）为新的向量组 M，为求它在新坐标系内的分量，对 M 进行 qr 分解。

V=[2,3,4,5,6;B'], M=V-V(:,5)*ones(1,5) , [Q,R]=qr(M)

运行的结果是：

$$V=\begin{bmatrix}2.0 & 3.0 & 4.0 & 5.0 & 6.0\\ 4.8 & 6.2 & 7.7 & 9.1 & 10.5\end{bmatrix},\ M=\begin{bmatrix}-4.0000 & -3.0000 & -2.0000 & -1.0000 & 0\\ -5.7000 & -4.3000 & -2.8000 & -1.4000 & 0\end{bmatrix}$$

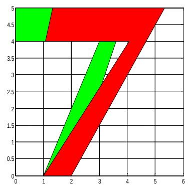
$$Q=\begin{bmatrix}-0.5744 & -0.8186\\ -0.8186 & 0.5744\end{bmatrix},\ R=\begin{bmatrix}6.9635 & 5.2431 & 3.4408 & 1.7204 & 0\\ 0 & -0.0144 & 0.0287 & 0.0144 & 0\end{bmatrix}$$

R 就是在新坐标系中各点的坐标值，R 的第二行 R(2,:)就是这些点偏离五点联线方向的值，现在看到的值都是零或负值。如果使这个误差正负对称化，就可以把误差控制在 0.029 以下, std(R(2,:))= 0.0164，因为它是在联线的垂直方向，是最小的距离。(a)问中的误差 e 是在 y 方向度量的，故 std(e)>std(R(2,:))。

5.4 按照制图国标，斜体数字和英文字母的倾斜角度应约为 75 度，问：

(a) ***A*** 应如何选择，才能保证其水平基线及高度不变，而垂直基线倾斜成 75 度？

(b) 以数字 7 的空心字为例，说明其正体字的数据集如何建立，又如何用于生成斜体字。用图形加以说明。（设空心 7 字的数据矩阵为 $D1=\begin{bmatrix}1 & 2 & 4 & 0 & 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 5 & 5 & 4 & 4 & 0\end{bmatrix}$）。



解：(a) 按题意，选择新坐标的一个基向量为(1,0)，第二个为按 75 度角指向右上方，且 y 向高度仍为 1，即(cot75,1)，MATLAB 表示式为：

x1=[1;0], x2=[cot(75*pi/180);1]; A=[x1,x2]

变换矩阵为 $A=\begin{bmatrix}1 & 0.2679\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

解(b) 空心数字 7 的数据矩阵可表为：$D1=\begin{bmatrix}1 & 2 & 4 & 0 & 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 5 & 5 & 4 & 4 & 0\end{bmatrix}$，

程序为：A=[1,0.2679;0,1], D1=[1,2,4,0,0,3,1;0,0,5,5,4,4,0], D2=A*D1

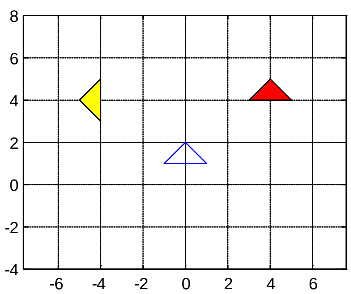
plot(D1(1,:),D1(2,:),'g'), hold on, plot(D2(1,:),D2(2,:),'r'), grid on,

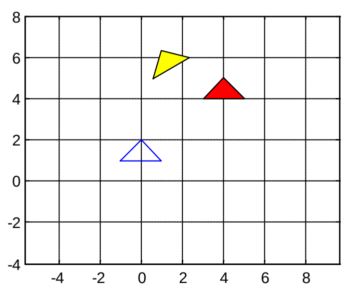
将 plot 改成 fill，图形更加鲜明好看。

fill(D1(1,:),D1(2,:),'g'), hold on, fill(D2(1,:),D2(2,:),'r'), grid on,

5.5 在例 5.3 中，若要使三角形先上移 3 和右移 2，再旋转 30 度，则其变换矩阵 ***A*** 应具有何种形式？编写程序显示出变换后的图形，该图形用黄色表示，叠加在原图上，以便比较。（提示：程序 pla503a 给出了先移后转 90 度的结果，可以参考比较）

解：在 pla503a 中，转角设为 t=pi/2，得出的图形如下左，转角改为 t=pi/6，得出的图形如下右。





可以看出，它的旋转变换是以坐标原点(0,0)为轴心的，所以先移动后转动与先转动后移动的结果不同。这也说明了矩阵乘法不符合交换律的物理原因。

5.6 设 $\boldsymbol{Q}=c\begin{bmatrix}1, & -1, & -1, & -1\\ -1, & 1, & -1, & -1\\ -1, & -1, & 1, & -1\\ -1, & -1, & -1, & 1\end{bmatrix}$，选择 $\boldsymbol{c}$ 使得 $\boldsymbol{Q}$ 成为一个规范正交矩阵。

解：syms c, k=-1; Q=c*[1,k,k,k;k,1,k,k;k,k,1,k;k,k,k,1], D=Q'*Q

得到：$$D=\begin{bmatrix}[\ 4*c*conj(c), & 0, & 0, & 0] \\ [\quad 0, & 4*c*conj(c), & 0, & 0] \\ [\quad 0, & 0, & 4*c*conj(c), & 0] \\ [\quad 0, & 0, & 0, & 4*c*conj(c)]\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}[\ 4*c\text{^}2, & 0, & 0, & 0] \\ [\quad 0, & 4*c\text{^}2, & 0, & 0] \\ [\quad 0, & 0, & 4*c\text{^}2, & 0] \\ [\quad 0, & 0, & 0, & 4*c\text{^}2\end{bmatrix}$$

c 是实数，c=conj(c)。要使它成为单位矩阵，应令 $4*c^2=1$，故有 c=1/2。

5.7　求将列向量(1,0)及(0,1)转换为(1,4)及(1,5)的矩阵 ***M***，并求 ***M*** 的逆矩阵。

解：设 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 4 & 5\end{bmatrix}$，　令 M*A=B，解得：

程序：A=[1,0;0,1],B= [1,1;4,5],　M=B/A, V=inv(M)

得到：$\mathbf{M}=\mathbf{B/A}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 4 & 5\end{bmatrix}\Big/\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 4 & 5\end{bmatrix}$，$\mathbf{M}^{-1}=\mathbf{V}=\begin{bmatrix}5 & -1\\ -4 & 1\end{bmatrix}$，

5.8　设变换矩阵为，　$\mathbf{P}=\begin{bmatrix}\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2\\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2\end{bmatrix}$，求 P^{2016}.

解：转动 θ 角的变换矩阵为 $\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$，此处 θ=45 度。即 $\mathbf{P}=\begin{bmatrix}\cos(\pi/4) & -\sin(\pi/4)\\ \sin(\pi/4) & \cos(\pi/4)\end{bmatrix}$，经过 2016 次方，相当于转的角度乘以 2016 倍，因为 2016 是 8 的整倍数，相当于转回到零度，即 $\mathbf{P}^{2016}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$。

5.9　将下列矩阵对角化，列出其正交矩阵 ***P*** 和对角矩阵 ***D***，检验误差 P*D/P-A 是否为零？

(a) $\begin{bmatrix}3 & -2 & 4\\ -2 & 6 & 2\\ 4 & 2 & 3\end{bmatrix}$；(b) $\begin{bmatrix}7 & -4 & 4\\ -4 & 5 & 0\\ 4 & 0 & 9\end{bmatrix}$。

解：　(a) Aa=[3,-2,4;-2,6,2;4,2,3], [Pa,Da]=eig(Aa),

得到：$A=\begin{bmatrix}3 & -2 & 4\\ -2 & 6 & 2\\ 4 & 2 & 3\end{bmatrix}$，$P=\begin{bmatrix}-0.6667 & 0.3804 & 0.6410\\ -0.3333 & -0.9213 & 0.2000\\ 0.6667 & -0.0803 & 0.7410\end{bmatrix}$，$D=\begin{bmatrix}-2.0000 & 0 & 0\\ 0 & 7.0000 & 0\\ 0 & 0 & 7.0000\end{bmatrix}$

(b) Ab=[7,-4,4;-4,5,0;4,0,9], [Pb,Db]=eig(Ab)

$A=\begin{bmatrix}7 & -4 & 4\\ -4 & 5 & 0\\ 4 & 0 & 9\end{bmatrix}$，$P=\begin{bmatrix}0.6667 & -0.3333 & 0.6667\\ 0.6667 & 0.6667 & -0.3333\\ -0.3333 & 0.6667 & 0.6667\end{bmatrix}$，$D=\begin{bmatrix}1.0000 & 0 & 0\\ 0 & 7.0000 & 0\\ 0 & 0 & 13.0000\end{bmatrix}$

5.10　用 poly 及 roots 函数求特征方程和特征值，用 eig 函数校核：

(a)　$A=\begin{bmatrix}0 & 2\\ 2 & -1\end{bmatrix}$；(b)　$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}4 & 0 & 0\\ 5 & 3 & 2\\ -2 & 0 & 2\end{bmatrix}$；(c)　$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\ -3 & 4 & 1\\ 2 & 0 & 2\end{bmatrix}$

解：(a) 键入 Aa=[0,2;2,-1],fa=poly(Aa),ra=roots(fa),[Pa,Da]=eig(Aa),
for i= 1:2 Pa1(:,i)=null(Aa-ra(i)*eye(2)), end

得到：$\mathbf{Pa}=\begin{bmatrix}-0.6154 & -0.7882\\ 0.7882 & -0.6154\end{bmatrix}$，$\mathbf{Da}=\begin{bmatrix}-2.5616 & 0\\ 0 & 1.5616\end{bmatrix}$，$\mathbf{Pa1}=\begin{bmatrix}0.6154 & 0.7882\\ -0.7882 & 0.6154\end{bmatrix}$

(b) 键入 Ab=[4,0,0;5,3,2;-2,0,2],fb=poly(Ab),rb=roots(fb), [Pb,Db]=eig(Ab)

得到

$$\mathbf{fb}=[1\ \ -9\ \ 26\ \ -24\,],\quad \mathbf{rb}=\begin{bmatrix}4\\3\\2\end{bmatrix},\ \mathbf{Pb}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0.3015\\ 1 & -0.8944 & 0.9045\\ 0 & 0.4472 & -0.3015\end{bmatrix},\ \mathbf{Db}=\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}$$

(c) 键入 Ac=[-1,0,1;-3,4,1;2,0,2],fc=poly(Ac),rc=roots(fc), [Pc,Dc]=eig(Ac)

得到

$$\mathbf{fc}=[1\ \ -5\ \ \ 0\ \ 16\,],\quad \mathbf{rc}=\begin{bmatrix}4.0000\\2.5616\\-1.5616\end{bmatrix},\ \mathbf{Pc}=\begin{bmatrix}0 & -0.7613 & -0.2688\\ 1 & -0.4875 & 0.1049\\ 0 & 0.4275 & -0.9575\end{bmatrix},\ \mathbf{Dc}=\begin{bmatrix}4.0000 & 0 & 0\\ 0 & -1.5616 & 0\\ 0 & 0 & 2.5616\end{bmatrix}$$

可见用 poly 加 roots 算出的特征值与用 eig 函数算出的特征值相同。我们发现，MATLAB 中 null(A)函数不稳定，当 det(A)不真正等于零时，得不出正确的结果，所以(b)(c)两问没用它算。

5.11 用 eig(A)函数求下列方阵的特征值与特征向量。

(a) $A=\begin{bmatrix}0 & 2\\ 2 & -1\end{bmatrix}$； (b) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}4 & 0 & 0\\ 5 & 3 & 2\\ -2 & 0 & 2\end{bmatrix}$； (c) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\ -3 & 4 & 1\\ 2 & 0 & 2\end{bmatrix}$

解：(a) Aa=[0,2;2,-1], [pa,Da]=eig(Aa),

(b) Ab=[4,0,0;5,3,2;-2,0,2], [pb,Db]=eig(Ab)

(c) Ac=[-1,0,1;-3,4,1;2,0,2], [pc,Dc]=eig(Ac)

得到： $pa=\begin{bmatrix}-0.6154 & -0.7882\\ 0.7882 & -0.6154\end{bmatrix},\quad Da=\begin{bmatrix}-2.5616 & 0\\ 0 & 1.5616\end{bmatrix}$

$$Ab=\begin{bmatrix}4 & 0 & 0\\ 5 & 3 & 2\\ -2 & 0 & 2\end{bmatrix},\ Pb=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0.3015\\ 1.0000 & -0.8944 & 0.9045\\ 0 & 0.4472 & -0.3015\end{bmatrix},\ Db=\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}$$

$$Ac=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\ -3 & 4 & 1\\ 2 & 0 & 2\end{bmatrix},\ Pc=\begin{bmatrix}0 & -0.7613 & -0.2688\\ 1.0000 & -0.4875 & 0.1049\\ 0 & 0.4275 & -0.9575\end{bmatrix},\ Dc=\begin{bmatrix}4.0000 & 0 & 0\\ 0 & -1.5616 & 0\\ 0 & 0 & 2.5616\end{bmatrix}$$

5.12 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 2\\ 3 & 1 & 2\end{bmatrix}$，写出用特征值和特征向量求 $\boldsymbol{A}^{10}$ 的表达式及 MATLAB 程序。

解：A=[-1,0,0;2,1,2;3,1,2], [P,D]=eig(A), A10= P*D^10*inv(P)

得到： $P=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0.7071\\ 0.7071 & 0.8944 & 0\\ 0.7071 & -0.4472 & -0.7071\end{bmatrix},\ D=\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$

$$A^{10}=P*\begin{bmatrix}3^{10} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & (-1)^{10}\end{bmatrix}*inv(P)=1.0\text{e}+04*\begin{bmatrix}0.0001 & 0 & 0\\ 3.9365 & 1.9683 & 3.9366\\ 3.9365 & 1.9683 & 3.9366\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 39366 & 19683 & 39366\\ 39365 & 19683 & 39366\end{bmatrix}o$$

5.13 分别用特征值正交分解法和 expm 函数计算指数矩阵 $e^{\boldsymbol{A}}$，比较其结果。

(a) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3 & 4\\ 2 & 3\end{bmatrix}$； (b) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -2 & 2\end{bmatrix}$； (c) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}4 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 2\end{bmatrix}$。

（提示：对角矩阵指数 $\exp(D)=\exp\left(\begin{bmatrix} d_{11} & & \mathbf{O} \\ & \ddots & \\ \mathbf{O} & & d_{nn} \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} \exp(d_{11}) & & \mathbf{O} \\ & \ddots & \\ \mathbf{O} & & \exp(d_{nn}) \end{bmatrix}$ 可用以下语句实现：

exp(D)=diag(exp(diag(D)))。diag(D)可把对角阵 D 变为单列矩阵，也能把单列矩阵变为对角矩阵。）

解：(a) Aa=[3,4;2,3], [Pa,Da]=eig(Aa), expAa=Pa*diag(exp(diag(Da)))*inv(Pa)

得到：

$$Aa=\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix},\ Pa=\begin{bmatrix} 0.8165 & -0.8165 \\ 0.5774 & 0.5774 \end{bmatrix},\ Da=\begin{bmatrix} 5.8284 & 0 \\ 0 & 0.1716 \end{bmatrix},\ \exp Aa=\begin{bmatrix} 170.5055 & 239.4522 \\ 119.7261 & 171.5055 \end{bmatrix}$$

而用 MATLAB 函数 expm 计算的结果是：

$$\text{expm(Aa)}=\begin{bmatrix} 170.5055 & 239.4522 \\ 119.7261 & 170.5055 \end{bmatrix}$$

(b) Ab=[1,2;-2,2], [Pb,Db]=eig(Ab), expAb=Pb*diag(exp(diag(Db)))*inv(Pb)

$$Ab=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix},\ Pb=\begin{bmatrix} 0.7071 & 0.7071 \\ 0.1768+0.6847i & 0.1768-0.6847i \end{bmatrix},\ Db=\begin{bmatrix} 1.5000+1.9365i & 0 \\ 0 & 1.5000-1.9365i \end{bmatrix}$$

$$\exp Ab=\begin{bmatrix} -1.6833 & 4.3226 \\ -3.8226 & -1.5220 \end{bmatrix}$$

而用 MATLAB 函数 expm 计算的结果是：$\exp m(Ab)=\begin{bmatrix} -2.6833 & 4.3226 \\ -4.3226 & -0.5220 \end{bmatrix}$

(c) Ac=[4,1,2;1,2,3;2,3,2], [Pc,Dc]=eig(Ac), expAc=Pc*diag(exp(diag(Dc)))*inv(Pc)

$$Ac=\begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix},\ Pc=\begin{bmatrix} -0.1592 & -0.7639 & -0.6254 \\ -0.6579 & 0.5544 & -0.5097 \\ 0.7361 & 0.3303 & -0.5909 \end{bmatrix},\ Dc=\begin{bmatrix} -1.1142 & 0 & 0 \\ 0 & 2.4095 & 0 \\ 0 & 0 & 6.7047 \end{bmatrix}$$

$$\exp Ac=\begin{bmatrix} 325.7156 & 255.4908 & 298.7538 \\ 255.4908 & 215.6088 & 247.6933 \\ 298.7538 & 247.6933 & 286.3514 \end{bmatrix}$$

而用 MATLAB 函数 expm 计算的结果是：$\exp m(Ac)=\begin{bmatrix} 325.7156 & 255.4908 & 298.7538 \\ 255.4908 & 215.6088 & 247.6933 \\ 298.7538 & 247.6933 & 286.3514 \end{bmatrix}$

三个题目都证明了计算程序的正确性。

5.14　用正交变换将下列二次型变换为标准形。

(a) $4x_1^2+4x_2^2+3x_1x_2$

(b) $11x_1^2-x_2^2-12x_1x_2$

解：(a) 此二次型的系数矩阵为 Aa=[4,1.5;1.5,4], [Pa,Da]=eig(Aa)

运行结果：$Aa=\begin{bmatrix} 4.0000 & 1.5000 \\ 1.5000 & 4.0000 \end{bmatrix},\ Pa=\begin{bmatrix} -0.7071 & 0.7071 \\ 0.7071 & 0.7071 \end{bmatrix},\ Da=\begin{bmatrix} 2.5000 & 0 \\ 0 & 5.5000 \end{bmatrix}$

故其标准型为：$2.5y_1^2+5.5y_2^2$，其中

$$y=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}=\mathbf{Pa}*\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -0.7071 & 0.7071 \\ 0.7071 & 0.7071 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

即 y1=-0.7071x1+0.7071x2, y2=0.7071x1+0.7071x2.

(b) 此二次型的系数矩阵为 Ab=[11,-6;-6,-1], [Pb,Db]=eig(Ab)

运行结果：$Ab=\begin{bmatrix}11 & -6\\ -6 & -1\end{bmatrix}$，$Pb=\begin{bmatrix}-0.3827 & -0.9239\\ -0.9239 & 0.3827\end{bmatrix}$，$Db=\begin{bmatrix}-3.4853 & 0\\ 0 & 13.4853\end{bmatrix}$

故其标准型为： $-3.4853y_1^2 + 13.4853y_2^2$，其中

$$y=\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix}=\mathbf{Pb}*\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0.3827 & -0.9239\\ -0.9239 & 0.3827\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix},$$

即 y1= -0.3827x1 -0.9239x2, y2= -0.9239x1+0.3827x2.

5.15　求马尔科夫矩阵的特征值和特征向量(即稳态值)：

(a) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0.9 & 0.15\\ 0.1 & 0.85\end{bmatrix}$；(b) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0.15\\ 0 & 0.85\end{bmatrix}$；(c) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0.2 & 1\\ 0.8 & 0\end{bmatrix}$。

解：程序及结果：

(a)　Aa=[0.9,0.15; 0.1,0.85], [Pa,Da]=eig(Aa)

结果：$Aa=\begin{bmatrix}0.9000 & 0.1500\\ 0.1000 & 0.8500\end{bmatrix}$，$Pa=\begin{bmatrix}0.8321 & -0.7071\\ 0.5547 & 0.7071\end{bmatrix}$，$Da=\begin{bmatrix}1.0000 & 0\\ 0 & 0.7500\end{bmatrix}$

特征值为 Da=[1;　0.75]，特征向量(稳态值)为：$Pa=\begin{bmatrix}0.8321\\ 0.5547\end{bmatrix}$及$\begin{bmatrix}-0.7071\\ 0.7071\end{bmatrix}$

(b)　Ab=[1,0.15; 0,0.85], [Pb,Db]=eig(Ab)

结果：$Ab=\begin{bmatrix}1.0000 & 0.1500\\ 0 & 0.8500\end{bmatrix}$，$Pb=\begin{bmatrix}1.0000 & -0.7071\\ 0 & 0.7071\end{bmatrix}$，$Db=\begin{bmatrix}1.0000 & 0\\ 0 & 0.8500\end{bmatrix}$

特征值为 Db=[1;　0.85]，特征向量(稳态值)为：$Pb=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$及$\begin{bmatrix}-0.7071\\ 0.7071\end{bmatrix}$

(c)　Ac=[0.2,1;0.8,0], [Pc,Dc]=eig(Ac)

结果：$Ac=\begin{bmatrix}0.2000 & 1.0000\\ 0.8000 & 0\end{bmatrix}$，$Pc=\begin{bmatrix}0.7809 & -0.7071\\ 0.6247 & 0.7071\end{bmatrix}$，$Dc=\begin{bmatrix}1.0000 & 0\\ 0 & -0.8000\end{bmatrix}$

特征值为 Dc=[1; -0.8]，特征向量(稳态值)为：$Pc=\begin{bmatrix}0.7809\\ 0.6247\end{bmatrix}$及$\begin{bmatrix}-0.7071\\ 0.7071\end{bmatrix}$

5.16 见表 5-6，设三坐标测量仪测出工件上的六点坐标，问这六点是否大体在一个平面上？此平面的方程是什么？各点离此平面的误差有多大？

表 5-6　题 5.16 的数据表

	点 a	点 b	点 c	点 d	点 e	点 f
x	1.01	0.80	2.82	0.81	3.04	2.43
y	2.16	0.78	-1.36	0.67	3.58	-1.30
z	2.47	2.40	3.55	2.41	3.50	3.34

解：题给的数据向量组为：

A=[1.01,0.80,2.82,0.81,3.04,2.43;2.16,0.78,-1.36,0.67,3.58,-1.30;2.47,2.40,3.55,2.41,3.50,3.34],

$$A=\begin{bmatrix}1.0100 & 0.8000 & 2.8200 & 0.8100 & 3.0400 & 2.4300\\ 2.1600 & 0.7800 & -1.3600 & 0.6700 & 3.5800 & -1.3000\\ 2.4700 & 2.4000 & 3.5500 & 2.4100 & 3.5000 & 3.3400\end{bmatrix}$$

以 f 点为基准的差向量组为：

M=A-A(:,6)*ones(1,6)

得：$M=\begin{bmatrix}-1.4200 & -1.6300 & 0.3900 & -1.6200 & 0.6100 & 0\\ 3.4600 & 2.0800 & -0.0600 & 1.9700 & 4.8800 & 0\\ -0.8700 & -0.9400 & 0.2100 & -0.9300 & 0.1600 & 0\end{bmatrix}$

计算 rank(M), rank(M,0.1), rank(M,0.01), rank(M,0.001)，

可知 rank(M,0.1)= rank(M,0.01)=2，rank(M)=3, rank=rank(M,0.001)=3，说明各点间联线向量当允许误差为 0.01 时，可认为基本上在一个二维平面上。

将差向量矩阵 M 做 qr 分解：[Q,R]=qr(M)，得到：

$$Q=\begin{bmatrix} -0.3698 & -0.7997 & -0.4730 \\ 0.9011 & -0.4328 & 0.0273 \\ -0.2266 & -0.4161 & 0.8806 \end{bmatrix},\quad R=\begin{bmatrix} 3.8399 & 2.6900 & -0.2459 & 2.5849 & 4.1354 & 0 \\ 0 & 0.7944 & -0.3733 & 0.8298 & -2.6666 & 0 \\ 0 & 0 & -0.0012 & 0.0011 & -0.0144 & 0 \end{bmatrix}$$

最后一行表示在新的数据向量坐标系中，某些点突出于该平面的数值，这些值数量级为 0.01，可见这六个点以 0.01 的误差，大致处于同一平面上。

```
for i= 1:2 Pa1(:,i)=null(Aa-ra(i)*eye(2)), end
```

,