第一章题解

1.7.1 本章要求掌握的概念和计算

(1) 二阶和三阶方程在笛卡尔坐标中的图形？三类联立方程组解的几何意义。

(2) 高阶线性方程组经过怎样的消元过程后变为上三角型？

(3) 消元法如何使主元 $\boldsymbol{A}(i,i)$下方的各元素 $\boldsymbol{A}(j,i)(j>i)$等于零？

(4)消元过程为何主元不得为零？如果出现零，而它的下方有一个非零元素，如何进行修正？

(5) 如果无法修正，则此系统的独立方程(秩)将减少，属欠定方程，无解或有无数解。

(6) 上三角系统如何用回代法变成对角系统？对角线主元都不为零是方程组解存在的充要条件。

(7) 秩表明独立方程的个数。系数矩阵与增广矩阵的秩相等是方程解存在的必要条件。

(8) MATLAB 实践：掌握各类随机阵的生成，矩阵及其分块的提取，行消元运算，适定、欠定方程组的求解。

(9) MATLAB 函数：randintr、rref、rrefdemo、rrefdemo1、ref1、ref2、ones、zeros。

1.7.2 计算题

1.1 本书提供了一个生成随机整数矩阵的程序 A=randintr(m,n,k,r),输入变元 m 为行数，n 为列数(缺省值为 m)，k 为元素最大绝对值(缺省值为 9)，r 为矩阵的秩(缺省值为 m)。请利用这个程序自行生成各种所需的矩阵。

(a) 生成一个 4 × 5 的一位整数的随机增广矩阵，用 ref1 及 rref 函数求出它的行阶梯形及最简行阶梯形矩阵，并求其解；

解：设方程组为：AX=b，即增广矩阵为 C=[A,b]，输入程序：

C=randintr(4,5), U=ref1(C),U2=ref2(C), U0=rref(C)，其一组随机解为：

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix} 6 & 3 & 9 & 9 & -1 \\ 8 & -8 & 9 & 0 & 8 \\ -7 & -4 & -7 & 6 & 6 \\ 8 & 1 & 9 & -7 & 9 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{U1}=\begin{bmatrix} 8.0000 & -8.0000 & 9.0000 & 0 & 8.0000 \\ 0 & -11.0000 & 0.8750 & 6.0000 & 13.0000 \\ 0 & 0 & 2.9659 & 13.9091 & 3.6364 \\ 0 & 0 & 0 & -5.4483 & 10.7586 \end{bmatrix},\quad \mathbf{U2}=\begin{bmatrix} 8.0000 & 0 & 0 & 0 & -97.7778 \\ 0 & -11.0000 & 0 & 0 & 15.6724 \\ 0 & 0 & 2.9659 & 0 & 31.1026 \\ 0 & 0 & 0 & -5.4483 & 10.7586 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{U0}=\begin{bmatrix} 1.0000 & 0 & 0 & 0 & -12.2222 \\ 0 & 1.0000 & 0 & 0 & -1.4248 \\ 0 & 0 & 1.0000 & 0 & 10.4866 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0000 & -1.9747 \end{bmatrix},\ \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -12.2222 \\ -1.4248 \\ 10.4866 \\ -1.9747 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad \mathbf{X = U0(:,5)}$$

检验方法为求 E=C(:,[1:4])*U0(:,5)-C(:,5)，它应该等于全零列向量。

(b) 生成一个元素绝对值最大为 20 的 5 × 6 的随机矩阵，并以它为增广矩阵求解方程组。

1.2 用 MATLAB 语句列出下列方程组的增广矩阵，保留其中第一个方程，用初等行变换将后面方程的变量 x_1 消元，并列出每一步所用的 MATLAB 消元语句。

(a) $\begin{cases} x_1 + \ \ x_2 = -1 \\ 4x_1 - 3x_2 = 3 \end{cases}$

解：程序为：C=[1,1,-1;4,-3,3], C1=C, C1(2,:)=C(2,:)-C(2,1)/C(1,1)*C(1,:),

得到: $C=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 3 \end{bmatrix}, C1=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -7 & 7 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1-x_2-x_3=0 \end{cases}$

解：程序为：C=[1,1,1;1,-1,-1], C1=C, C1(2,:)=C(2,:)-C(2,1)/C(1,1)*C(1,:),

$$C=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix},\quad C1=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

(c) $\begin{cases} x_1+3x_2+\ x_3=3 \\ 2x_1-2x_2+\ x_3=8 \\ 3x_1+\ x_2+2x_3=-1 \end{cases}$ ；　　　。

解：程序为：C=[1,3,1,3;2,-2,1,8;3,1,2,-1], C1=C,

C1(2,:)=C(2,:)-C(2,1)/C(1,1)*C(1,:), C1(3,:)=C(3,:)-C(3,1)/C(1,1)*C(1,:),

C1(3,:)=C1(3,:)-C1(3,2)/C1(2,2)*C1(2,:),

运行结果为：

$$C=C1=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 & 8 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix},\ C1(2,:)=C(2,:)-C(2,1)/C(1,1)*C(1,:),$$

$$C1=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & -8 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix},\ C1(3,:)=C(3,:)-C(3,1)/C(1,1)*C(1,:),$$

$$C1=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & -8 & -1 & 2 \\ 0 & -8 & -1 & -10 \end{bmatrix}, C1(3,:)=C1(3,:)-C1(3,2)/C1(2,2)*C1(2,:),$$

$$C1=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & -8 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -12 \end{bmatrix}$$

可见主对角线左下方的元素被逐步消为零，这就是高斯消元法的基本思路。本题消为上三角矩阵的结果显示，系数矩阵的秩为 2，增广矩阵的秩为 3，所以这个方程组是不相容的。

(d) $\begin{cases} x_1+\ x_2+x_3+\ x_4=0 \\ 2x_1+\ x_2-x_3+3x_4=0 \\ x_1-2x_2+x_3+\ x_4=0 \end{cases}$

解：程序为：C=[1,1,1,1,0;2,1,-1,3,0;1,-2,1,1,0], C1=C,

C1(2,:)=C(2,:)-C(2,1)/C(1,1)*C(1,:), C1(3,:)=C(3,:)-C(3,1)/C(1,1)*C(1,:),

C1(3,:)=C1(3,:)-C1(3,2)/C1(2,2)*C1(2,:),

运行结果为：

$$C=C1=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},\ C1(2,:)=C(2,:)-C(2,1)/C(1,1)*C(1,:),$$

$$C1=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},\ C1(3,:)=C(3,:)-C(3,1)/C(1,1)*C(1,:),$$

$$C1=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, C1(3,:)=C1(3,:)-C1(3,2)/C1(2,2)*C1(2,:),$$

$$C1=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

要想得到行最简形 U0，先要进行回代，把主对角线右上方的元素消成零，再将各行分

别除以各行的主元。回代过程是从下而上，从右至左。以题 d 为例:

C1(2,:)=C1(2,:)-C1(2,3)/C1(3,3)*C1(3,:),

C1(1,:)=C1(1,:)-C1(1,3)/C1(3,3)*C1(3,:), C1(1,:)=C1(1,:)-C1(1,2)/C1(2,2)*C1(2,:),

$$C1=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & -3 & 0 \end{bmatrix}, C1(2,:)=C1(2,:)-C1(3,:)*C1(2,3)/C1(3,3)$$

$$C1=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & -3 & 0 \end{bmatrix}, \text{C1(1,:)=C1(1,:)-C1(1,3)/C1(3,3)*C1(3,:)}$$

$$C1=\begin{bmatrix} 1.0000 & 1.0000 & 0 & 1.3333 & 0 \\ 0 & -1.0000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9.0000 & -3.0000 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{C1(1,:)=C1(1,:)-C1(1,2)/C1(2,2)*C1(2,:)}$$

$$C1=\begin{bmatrix} 1.0000 & 0 & 0 & 1.3333 & 0 \\ 0 & -1.0000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9.0000 & -3.0000 & 0 \end{bmatrix}$$

再将各行除以相应主元后，得到最简形

$$C1=\begin{bmatrix} 1.0000 & 0 & 0 & 1.3333 & 0 \\ 0 & 1.0000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0000 & -1/3 & 0 \end{bmatrix}$$

1.3　本书设计了两个行阶梯形化简演示程序来帮助读者复习高斯消元法: 其中 U=rrefdemo(C)是不进行行交换的，U=rrefdemo1(C)是为找最大主元进行行交换的。调用方法为 d=rrefdemo (C)，程序首先会提示我们是否要显示详细过程，如果键入 y，则进行分阶动作，即每按一次回车键，程序会告诉我们这一步执行了何种运算及其结果；如果不键入 y 而直接按回车键，则显示方程组的解 d。

(a) 用这个程序来解题 1.2，检验你的计算；

(b) 用这个程序来检验例 1.6，看所得结果与例题叙述是否相符。

1.4　列出下列方程组的增广矩阵 C，用 $U1=\mathrm{ref1}(C)$及$U2=\mathrm{ref\,2}(C)$ 对它进行化简，解释所得结果的意义，并将算出的结果与用 rref 函数所得的最简行阶梯形式的结果进行比较。

(a) $\begin{cases} 2x_1+3x_2+\ \ x_3=1 \\ \ \ x_1+\ \ x_2+\ \ x_3=3 \\ 3x_1+4x_2+2x_3=4 \end{cases}$；

C=[2,3,1,1;1,1,1,3;3,4,2,4], U1=ref1(C), U2=ref2(C), U0=rref(C)

$$C=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$U1=\begin{bmatrix} 3.0000 & 4.0000 & 2.0000 & 4.0000 \\ 0 & 0.3333 & -0.3333 & -1.6667 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad U2=\begin{bmatrix} 3.0000 & 0 & 6.0000 & 24.0000 \\ 0 & 0.3333 & -0.3333 & -1.6667 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$U0=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(b) $\begin{cases} \ \ x_1+\ \ x_2+x_3=3 \\ 2x_1+3x_2-x_3=2 \\ 3x_1+2x_2+x_3=5 \end{cases}$；

C=[1,1,1,3; 2,3,-1,2;3, 2,1,5], U1=ref1(C), U2=ref2(C), U0=rref(C)

$$C=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$U1=\begin{bmatrix} 3.0000 & 2.0000 & 1.0000 & 5.0000 \\ 0 & 1.6667 & -1.6667 & -1.3333 \\ 0 & 0 & 1.0000 & 1.6000 \end{bmatrix},\quad U2=\begin{bmatrix} 3.0000 & 0 & 0 & 1.8000 \\ 0 & 1.6667 & 0 & 1.3333 \\ 0 & 0 & 1.0000 & 1.6000 \end{bmatrix},$$

$$U0=\begin{bmatrix} 1.0000 & 0 & 0 & 0.6000 \\ 0 & 1.0000 & 0 & 0.8000 \\ 0 & 0 & 1.0000 & 1.6000 \end{bmatrix}$$

(c) $\begin{cases} x_1+3x_2+x_3+\ \ x_4=3 \\ 2x_1-2x_2+x_3+2x_4=8 \\ \ x_1-5x_2\qquad +\ x_4=5 \end{cases}$；

C=[1,3,1,1,3; 2,-2,1,2,8;1,-5,0,1,5], U1=ref1(C), U2=ref2(C), U0=rref(C)

$$C=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 & 2 & 8 \\ 1 & -5 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$U1=\begin{bmatrix} 2.0000 & -2.0000 & 1.0000 & 2.0000 & 8.0000 \\ 0 & 4.0000 & 0.5000 & 0 & -1.0000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\quad U2=\begin{bmatrix} 2.0000 & 0 & 1.2500 & 2.0000 & 7.5000 \\ 0 & 4.0000 & 0.5000 & 0 & -1.0000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$U0=\begin{bmatrix} 1.0000 & 0 & 0.6250 & 1.0000 & 3.7500 \\ 0 & 1.0000 & 0.1250 & 0 & -0.2500 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(d) $\begin{cases} -\ x_1+2x_2-\ \ x_3=2 \\ -2x_1+2x_2+\ \ x_3=4 \\ \ 3x_1+2x_2+2x_3=5 \\ -3x_1+8x_2+5x_3=17 \end{cases}$。

C=[-1,2,-1,2;-2,2,1,4;3,2,2,5;-3,8,5,17], U1=ref1(C), U2=ref2(C), U0=rref(C)

$$C=\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 2 & 5 \\ -3 & 8 & 5 & 17 \end{bmatrix},\quad U0=rref(C)=\begin{bmatrix} 1.00 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.00 & 0 & 1.50 \\ 0 & 0 & 1.00 & 1.00 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$U1=\begin{bmatrix} 3.0000 & 2.0000 & 2.0000 & 5.0000 \\ 0 & 10.0000 & 7.0000 & 22.0000 \\ 0 & 0 & -2.2000 & -2.2000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\quad U2=\begin{bmatrix} 3.00 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10.00 & 0 & 15.00 \\ 0 & 0 & -2.20 & -2.20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1.5　解下列方程组：

(a) $\begin{cases} 3x_1-2x_2-5x_3+\ \ x_4=3 \\ 2x_1-3x_2+\ \ x_3+5x_4=-3 \\ \ x_1+2x_2\qquad -4x_4=-3 \\ \ x_1-\ \ x_2-4x_3+9x_4=22 \end{cases}$；

程序为：A=[3,-2,-5,1;2,-3,1,5;1,2,0,-4;1,-1,-4,9], b=[3;-3;-3;22], Uc=rref([A,b]), X=Uc(:,5), X1=A\b

解得：

$$A=\begin{bmatrix}3&-2&-5&1\\2&-3&1&5\\1&2&0&-4\\1&-1&-4&9\end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix}3\\-3\\-3\\22\end{bmatrix},\quad Uc=\begin{bmatrix}1&0&0&0&-1\\0&1&0&0&3\\0&0&1&0&-2\\0&0&0&1&2\end{bmatrix},\quad X=\begin{bmatrix}-1\\3\\-2\\2\end{bmatrix},\quad X1=\begin{bmatrix}-1\\3\\-2\\2\end{bmatrix}$$

(b) $\begin{cases}2x_1-2x_2 \quad\quad + \ x_4+3=0\\2x_1+3x_2+x_3-3x_4+6=0\\3x_1+4x_2-x_3+2x_4 \quad =0\\x_1+3x_2+x_3-\ x_4-2=0\end{cases}$；

程序为：A=[2,-2,0,1,3;2,3,1,-3,6;3,4,-1,2,0;1,3,1,-1,-2], b=[0;0;0;0], Uc=rref([A,b]), X=Uc(:,5), X1=A\b

解得：

$$A=\begin{bmatrix}2&-2&0&1&3\\2&3&1&-3&6\\3&4&-1&2&0\\1&3&1&-1&-2\end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix},\quad Uc=\begin{bmatrix}1&0&0&0&2&0\\0&1&0&0&-1&0\\0&0&1&0&-4&0\\0&0&0&1&-3&0\end{bmatrix},\quad X=\begin{bmatrix}2\\-1\\-4\\-3\\1\end{bmatrix}x_5,\quad X1=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

其中用 MATLAB 左除求得的欠定方程组的解 X1 是 x_5=0 时通解 X 的一个特解。

(c) $\begin{cases}x_1+\ x_2-6x_3-4x_4=6\\3x_1-\ x_2-6x_3-4x_4=2\\2x_1+3x_2+9x_3+2x_4=6\\3x_1+2x_2+3x_3+8x_4=-7\end{cases}$

程序为：A=[1,1,-6,-4;3,-1,-6,-4;2,3,9,2;3,2,3,8], b=[6;2;6;-7], Uc=rref([A,b]), X=Uc(:,5), X1=A\b

解得：

$$A=\begin{bmatrix}1&1&-6&-4\\3&-1&-6&-4\\2&3&9&2\\3&2&3&8\end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix}6\\2\\6\\-7\end{bmatrix},\quad Uc=\begin{bmatrix}1.0000&0&0&0&0\\0&1.0000&0&0&2.0000\\0&0&1.0000&0&0.3333\\0&0&0&1.0000&-1.5000\end{bmatrix},\quad X=X1=\begin{bmatrix}0\\2.0000\\0.3333\\-1.5000\end{bmatrix}$$

1.6 设题 1.6 图所示的是某地区的公路交通图，所有道路都是单行道，且道上不能停车，通行方向用箭头标明，数字代表某时段进出交通网络的车辆数。假设进入每一个交叉点的车辆数等于离开该交叉点的车辆数。请求出该时段经过各路线的车辆数。

建模：从上而下，从左至右对各节点列出流量方程：

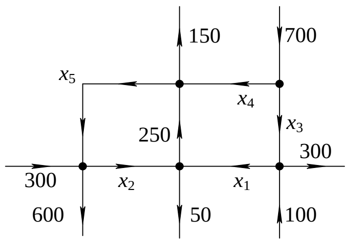
x4-x5=150-250=-100

x4+x3=700

x5-x2=600-300=300

x1+x2=250+50=300

x3-x1=300-100=200



题 1.6 图 交通流量图

写成矩阵方程为：

$$\begin{bmatrix}0&0&0&1&-1\\0&0&1&1&0\\0&-1&0&0&1\\1&1&0&0&0\\-1&0&1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x1\\x2\\x3\\x4\\x5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-100\\700\\300\\300\\200\end{bmatrix}\Rightarrow \mathbf{AX=b}$$

写成 MATLAB 程序：

A=[0,0,0,1,-1;0,0,1,1,0;0,-1,0,0,1;1,1,0,0,0;-1,0,1,0,0], b=[-100;700;300;300;200],

Uc=rref([A,b]), X=Uc(:,5), X1=A\b

解得：

$$Uc=\begin{bmatrix}1&0&0&0&1&600\\0&1&0&0&-1&-300\\0&0&1&0&1&800\\0&0&0&1&-1&-100\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix},\ X=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-1\\1\end{bmatrix}x_5+\begin{bmatrix}600\\-300\\800\\-100\\0\end{bmatrix}$$

其中 x_5 表示可以取任何值而不影响方程组的自由变量，物理上是一个绕行的车流量。

1.7 求一个三次多项式 $f(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$，使 $f(-2)=2$，$f(-1)=0$，$f(1)=-4$，$f(2)=6$。

解：将各点数值代入多项式，得到四个线性方程：

$$\left.\begin{aligned}f(-2)&=-8a_3+4a_2-2a_1+a_0=2\\f(-1)&=-a_3+a_2-a_1+a_0=0\\f(1)&=a_3+a_2+a_1+a_0=-4\\f(2)&=8a_3+4a_2+2a_1+a_0=6\end{aligned}\right\}\Rightarrow\begin{bmatrix}-8&4&-2&1\\-1&1&-1&1\\1&1&1&1\\8&4&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_3\\a_2\\a_1\\a_0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\0\\-4\\6\end{bmatrix}\Rightarrow\mathbf{AX=b}$$

解题程序：

A=[-8,4,-2,1;-1,1,-1,1;1,1,1,1;8,4,2,1], b=[2;0;-4;6], X=A\b

得到：$X=[1,2,-3,-4]^T$，即 a3=1, a2=2, a1=-3, a0=-4。

故多项式为： $f(x)=x^3+2x^2-3x-4$

1.8 一个矿业公司有两个矿井。1# 矿井每天生产 20 吨铜矿石和 550 公斤银矿石，2# 矿井每天生产 30 吨铜矿石和 500 公斤银矿石，令 $\boldsymbol{v}_1=\begin{bmatrix}20\\550\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{v}_2=\begin{bmatrix}30\\500\end{bmatrix}$，于是 $\boldsymbol{v}_1$ 和 $\boldsymbol{v}_2$ 分别表示 1# 和 2# 矿井每天的产出向量。:

(a) 向量 $5\boldsymbol{v}_1$ 具有何种物理意义？答：1# 矿井五天生产铜矿石和银矿石总量。

(b) 设公司让 1#矿井开工 x_1 天，让 2#矿井开工 x_2 天，以天数为变量，列出使两个矿井生产出 150 吨铜矿石和 2825 公斤银矿石的方程。v1x1+v2x2=v,写成矩阵形式为

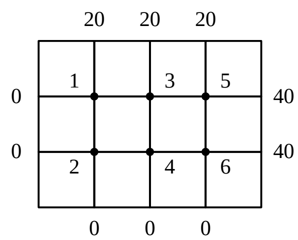
$$\begin{bmatrix}20\\550\end{bmatrix}x1+\begin{bmatrix}30\\500\end{bmatrix}x2=\begin{bmatrix}150\\2825\end{bmatrix}\ \Rightarrow\ \begin{bmatrix}20&30\\550&500\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x1\\x2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}150\\2825\end{bmatrix}$$

(c) 解这个方程：

A=[20,30;550,500], b=[150;2825], X=A\b,

得到：X=[1.5; 4]，即 x1=1.5, x2=4（矿井 1 生产 1.5 天，矿井 2 生产 4 天）。

1.9 薄铁板四周温度已知，如题 1.9 图所示(单位为℃)。设在铁板中间的所有网格节点温度都为相邻四个节点温度的平均值。求图中 1、2、3、4、5、6 点的温度。



题 1.9 图 铁板温度计算

解：列出方程组：

T1=(0+20+T2+T3)/4

T2=(T1+0+T4+0)/4

T3=(T1+20+T4+T5)/4

T4=(T2+0+T3+T6)/4

T5=(T3+20+40+T6)/4

T6=(T4+0+T5+40)/4

$$\left.\begin{aligned}T1&=(0+20+T2+T3)/4\\T2&=(T1+0+T4+0)/4\\T3&=(T1+20+T4+T5)/4\\T4&=(T2+0+T3+T6)/4\\T5&=(T3+20+40+T6)/4\\T6&=(T4+0+T5+40)/4\end{aligned}\right\}\Rightarrow\begin{bmatrix}1&k&k&0&0&0\\k&1&0&k&0&0\\k&0&1&k&k&0\\0&k&k&1&0&k\\0&0&k&0&1&k\\0&0&0&k&k&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}T1\\T2\\T3\\T4\\T5\\T6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\0\\5\\0\\15\\10\end{bmatrix}\Rightarrow\mathbf{AT=b}\ \Rightarrow\ \mathbf{T}=\begin{bmatrix}T1\\T2\\T3\\T4\\T5\\T6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10.2277\\5.0104\\15.9006\\9.8137\\23.5611\\18.3437\end{bmatrix}$$

程序：k=-0.25, A=[1,k,k,0,0,0;k,1,0,k,0,0;k,0,1,k,k,0;0,k,k,1,0,k;0,0,k,0,1,k;0,0,0,k,k,1], b=[5;0;5;0;15;10], T=A\b

解得各内点的温度组成的向量 T。

T=[10.2277 5.0104 15.9006 9.8137 23.5611 18.3437]^T

1.10 用整数格式的 x_1、x_2、x_3、x_4、x_5、x_6 来配平下列化学的方程式：

$$(x_1)\mathrm{PbN_6}+(x_2)\mathrm{CrMn_2O_8}\to(x_3)\mathrm{Pb_3O_4}+(x_4)\mathrm{Cr_2O_3}+(x_5)\mathrm{MnO_2}+(x_6)\mathrm{NO}$$

Pb: $x_1=3x_3$

Cr: $x_2=2x_4$

Mn: $2x_2=x_5$

N: $6x_1=x_6$

O: $8x_2=4x_3+3x_4+2x_5+x_6$

$$\begin{bmatrix}-1&0&3&0&0&0\\0&-1&0&2&0&0\\0&-2&0&0&1&0\\-6&0&0&0&0&1\\0&-8&4&3&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\\x6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}\Rightarrow \mathbf{AX=0}\Rightarrow \mathbf{rref(A)}=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&-1/6\\0&1&0&0&0&-22/45\\0&0&1&0&0&-1/18\\0&0&0&1&0&-11/45\\0&0&0&0&1&-44/45\end{bmatrix}\Rightarrow X=\begin{bmatrix}1/6\\22/45\\1/18\\11/45\\44/45\end{bmatrix}*x_6$$

程序为：

A=[-1,0,3,0,0,0;0,-1,0,2,0,0;0,-2,0,0,1,0;-6,0,0,0,0,1;0,-8,4, 3,2,1],

format rat, U0=rref([A,zeros(5,1)]

选 x_6=45*2=90 才能保证解为最小的正整数，此时：X=[15,44,5,22,88]^T，配平方程为：

$$15\,\mathrm{PbN_6}+44\,\mathrm{CrMn_2O_8}\to 5\,\mathrm{Pb_3O_4}+22\,\mathrm{Cr_2O_3}+88\,\mathrm{MnO_2}+90\,\mathrm{NO}$$

1.11 一幢大型公寓楼可以有三种安排各层建筑结构的类型。类型甲可以在一层上安排 18 个单元：3 个三室一厅、7 个两室一厅和 8 个一室一厅；类型乙可以在一层上安排 20 个单元：4 个三室一厅、4 个两室一厅和 12 个一室一厅；类型丙可以在一层上安排 18 个单元：5 个三室一厅、3 个两室一厅和 10 个一室一厅。现在要求整个公寓楼恰好有 51 个三室一厅、75 个两室一厅和 136 个一室一厅，问应该怎样选择各类型的层数？

1. 建模： x1 层类型甲 3 个 A 型，7 个 B 型，8 个 C 型

x2 层类型乙 4 个 A 型，4 个 B 型，8 个 C 型

x3 层类型丙 5 个 A 型，3 个 B 型，10 个 C 型

$$x1*\begin{bmatrix}3\\7\\8\end{bmatrix}+x2*\begin{bmatrix}4\\4\\12\end{bmatrix}+x3*\begin{bmatrix}5\\3\\10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}51\\75\\136\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}3&4&5\\7&4&3\\8&12&10\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x1\\x2\\x3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}51\\75\\136\end{bmatrix}\Rightarrow \mathbf{AX=b}$$

A=[3,4,5;7,4,3;8,12,10], b=[51;75;136], X=A\b

结果为：X=[7;5;2], 即 7 层甲型布局，5 层乙型布局，2 层丙型布局。

1.12 工业硝酸通常经过三次化学反应产生。在第一个反应中，氮气N_2与氢气H_2合成为阿摩尼亚NH_3，然后阿摩尼亚和氧气O_2合成，产生二氧化氮和水；最后NO_2与部分水H_2O生成硝酸HNO_3和氧化氮NO。每一种成分的总量都用莫尔（测量化学反应的标准单位）来度量。为了生产8莫尔的硝酸，请问需要氮、氢、氧各多少莫尔。

将三次化学反应合并，写成如下的反应平衡方程：

$$(x_1)N_2+(x_2)H_2+(x_3)O_2\to(x_4)NO_2+(x_5)NO+(x_6)HNO_3$$

按元素列方程：

N2: 2x1=x4+x5+x6 x1=0.5(x4+x5+x6)

H2: 2x2=x6 x2=0.5x6

O2: 2x3=2x4+x5+3x6 x3=x4+0.5x5+0.5x6

$$\left.\begin{array}{l} N2:?2x1=x4+x5+x6 \\ H2:?2x2=x6 \\ O2:?2x3=2x4+x5+3x6 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \\ x5 \\ x6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A=[-2,0,0,1,1,1;0,-2,0,0,0,1;0,0,-2,2,1,3], U0=rref(A)

$$U0 = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0 & 0 & -0.5000 & -0.5000 & -0.5000 \\ 0 & 1.0000 & 0 & 0 & 0 & -0.5000 \\ 0 & 0 & 1.0000 & -1.0000 & -0.5000 & -1.5000 \end{bmatrix}$$

三种原料的消耗量取决于 x4,x5,x6 三个自由变量。光知道硝酸产量 x6 还不够，还要知道 NO 和 NO2 的产量 x4 和 x5。