慕课第三章习题及题解

3.6.2 计算题

3.1 用行阶梯形(或 LU 分解)方法求矩阵的行列式，并与用 det 函数求的结果比较：

(a) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-6 & -7 & 7 & 6\\ 3 & 4 & 2 & 3\\ -4 & -2 & 0 & 6\\ 1 & 7 & 8 & 3\end{bmatrix}$；(b) $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0 & -5 & 7 & -1\\ 7 & 7 & -6 & -8\\ -6 & 5 & -4 & 9\\ 9 & -7 & 3 & 2\end{bmatrix}$；(c) $\begin{bmatrix}-6 & -9 & -2 & 6\\ -6 & 5 & 7 & -9\\ 2 & -1 & 0 & 3\\ -4 & 8 & -6 & -2\end{bmatrix}$。

(a) Aa=[-6,-7,7,6;3,4,2,3;-4,-2,0,6;1,7,8,3], [Ua]=ref1(Aa), Da=prod(diag(Aa)), Da1=det(Aa)

结果为：

$$La=\begin{bmatrix}1.0000 & 0 & 0 & 0\\ -0.5000 & 0.0857 & -0.5323 & 1.0000\\ 0.6667 & 0.4571 & 1.0000 & 0\\ -0.1667 & 1.0000 & 0 & 0\end{bmatrix},\ Ua=\begin{bmatrix}-6.0000 & -7.0000 & 7.0000 & 6.0000\\ 0 & 5.8333 & 9.1667 & 4.0000\\ 0 & 0 & -8.8571 & 0.1714\\ 0 & 0 & 0 & 5.7484\end{bmatrix}$$

Da = 1.7820e+03， Da1 = -1.7820e+03。

(b) Ab=[0,-5,7,-1;7,7,-6,-8;-6,5,-4,9;9,-7,3,2], [Ub]=ref2(Ab), Db=prod(diag(Ub)), Db1=det(Ab)

Db = 3368, Db1 = 3368

$$Lb=\begin{bmatrix}0 & -0.4018 & 1.0000 & 0\\ 0.7778 & 1.0000 & 0 & 0\\ -0.6667 & 0.0268 & -0.4866 & 1.0000\\ 1.0000 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\ Ub=\begin{bmatrix}9.0000 & -7.0000 & 3.0000 & 2.0000\\ 0 & 12.4444 & -8.3333 & -9.5556\\ 0 & 0 & 3.6518 & -4.8393\\ 0 & 0 & 0 & 8.2347\end{bmatrix}$$

(c) Ac=[-6,-9,-2,6;-6,5,7,-9;2,-1,0,3;-4,8,-6,-2], [Lc,Uc]=lu(Ac), Dc=prod(diag(Uc)), Dc1=det(Ac)

$$Lc=\begin{bmatrix}1.0000 & 0 & 0 & 0\\ 1.0000 & 1.0000 & 0 & 0\\ -0.3333 & -0.2857 & -0.1394 & 1.0000\\ 0.6667 & 1.0000 & 1.0000 & 0\end{bmatrix},\ Uc=\begin{bmatrix}-6.0000 & -9.0000 & -2.0000 & 6.0000\\ 0 & 14.0000 & 9.0000 & -15.0000\\ 0 & 0 & -13.6667 & 9.0000\\ 0 & 0 & 0 & 1.9686\end{bmatrix}$$

Dc = 2260, Dc1 = -2260

3.2 用 det 函数计算行列式：

(a) $\begin{vmatrix}4 & 9 & 1\\ 1 & 4 & 0\\ 2 & 5 & 2\end{vmatrix}$；(b) $\begin{vmatrix}1 & 9 & 4\\ 3 & 1 & 7\\ 2 & 0 & 9\end{vmatrix}$；(c) $\begin{vmatrix}a & b & a+b\\ b & a+b & a\\ a+b & a & b\end{vmatrix}$；(d) $\begin{vmatrix}1 & a & 0 & 0\\ 0 & b & 0 & 0\\ 0 & c & 1 & 0\\ 0 & d & 0 & 1\end{vmatrix}$ 及 $\begin{vmatrix}1 & 0 & a & 0\\ 0 & 1 & b & 0\\ 0 & 0 & c & 0\\ 0 & 0 & d & 1\end{vmatrix}$。

解：(a) Da=det([4,9,1;1,4,0;2,5,2]), 得 Da=11

(b) Db=det([1,9,4;3,1,7;2,0,9], 得 Db=-116

(c) syms a b, Ac=[a,b,a+b;b,a+b,a;a+b,a,b],Dc=det(Ac),

得：Dc =- 2*a^3 - 2*b^3 ，即 Dc=$-2a^3-2b^3$

3.3 用 randintr(n)函数随机生成两个四阶方阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$。

(a) 验证等式 $\det(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\det(\boldsymbol{A})+\det(\boldsymbol{B})$ 是否成立。

(b) 验证等式 $\det(\boldsymbol{AB})=\det(\boldsymbol{A})\det(\boldsymbol{B})$ 是否成立。

(c) 验证等式 $\det(\boldsymbol{A}^{-1})=(\det(\boldsymbol{A}))^{-1}$ 是否成立。

解：A=randintr(4), B=randintr(4),

(a) Ea=det(A+B)-det(A)-det(B),

(b) Eb=det(A*B)-det(A)*det(B)

(c) Ec=det(inv(A))-inv(det(A))

三式各经三次运行，Ea 的数量级为 4,5 位十进制，Eb 的数量级为小数点后-9,-10 位，很近于零，Ec 更接近于零。故(b,c)两问成立，而(a)则是不成立的。

3.4 根据方程组的系数行列式，判断其解是否存在，是否唯一。再用行阶梯形分解方法或其他方法进行验证。

(a) $\begin{cases} 4x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 + x_4 = 4 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$；(b) $\begin{cases} -7x_1 + 4x_3 + 7x_4 = 8 \\ 3x_1 + x_2 + 7x_3 - 5x_4 = 1 \\ 4x_1 - 7x_2 - 4x_3 + 6x_4 = 1 \\ 4x_1 - x_2 - 5x_3 + 8x_4 = 3 \end{cases}$

解：(a) Aa=[4,-1,1,-1;2,3,7,1;2,2,2,-1;3,-1,2,0], ba=[2;4;0;3], Ua=rref([Aa,ba])

(b) Ab=[A=[2, 1, 3, 1 8; 3,-2, 2, 4, 1; 3, 5, 6, 0,1; -2,-1,-5, 1,3], bb=[8;1;1;3], Ub=rref([Ab,bb])

程序运行结果：

$$Ua = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0 & 0 & -0.5000 & 0 \\ 0 & 1.0000 & 0 & -0.5000 & -1.0000 \\ 0 & 0 & 1.0000 & 0.5000 & 1.0000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Ub = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(a)是欠定方程，解存在但不唯一；(b) 是超定方程，解不存在。

3.5 利用行列式计算面积。

(a) 已知 $A(1,2)$, $B(3,3)$, $C(2,1)$, 画出三角形 ABC 图形并求其面积。

答案： S=0.5*abs(det([3-1,2-1;3-2,1-2])) = 1.5

(b) 已知 $A(0,0)$, $B(1,4)$, $C(5,3)$, $D(4,1)$, 画出四边形 $ABCD$ 图形并求其面积。

答案: S=0.5*(abs(det([1,5;4,3]))+abs(det([5,4;3,1]))), 结果为 S=12

3.6 求一个顶点在原点，相邻顶点在(1,0,2),(1,2,4),(7,1,0)的平行六面体的体积。

解：V=abs(det([1,1,7;0,2,1;2,4,0])), 体积为 30

3.7 由 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ 求 A^2 和 A^{-1} 及 $\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}$ 的行列式，λ 取哪两个数时会导致 $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}|=0$。

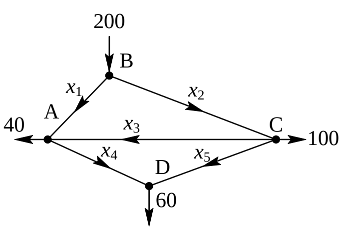
解：A=[4,1;2,3],D1=det(A^2),D2=det(inv(A)), syms lamda, D3=det(A-eye(2)*lamda)

答案： D1=100, D2=0.1, D3= lamda^2 - 7*lamda + 10，令 D3=0，得 lamda=2 和 5 两个数。

3.8 (a) 求描述如题 3-8 图所示的交通流图的方程组并求其解。

(b) 如果 x_4 的路段被封闭，求此方程组的解。

(c) 若 x_4=0，则 x_1 的最大值是多少。



题 3-8 图 交通流图

解：方程组为：x1+x3-x4=40, x1+x2=200, x2-x3-x5=100, x4+x5=60

写成矩阵形式：$\begin{bmatrix}1&0&1&-1&0\\1&1&0&0&0\\0&1&-1&0&-1\\0&0&0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x1\\x2\\x3\\x4\\x5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}40\\200\\100\\60\end{bmatrix}$，显然它是一个欠定方程组，有依赖于常数的无穷个解。

程序为： C=[1,0,1,-1,0,40;1,1,0,0,0,200;0,1,-1,0,-1,100;0,0,0,1,1,60], U=rref(C)

得到：
$$U0=\begin{bmatrix}1&0&1&0&1&100\\0&1&-1&0&-1&100\\0&0&0&1&1&60\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x1=100-x3-x5\\x2=100+x3+x5\\x4=60-x5\\x3=c1\\x5=c2\end{cases}$$

(a) 自由变量 x3=c1,x5=c2 表示了有不受此方程组限制的两个环形车流。

(b) 令 x4=0，得到特解 x5=60=c2，此时方程组的解为

$$\begin{cases}x1=40-x3\\x2=160+x3\\x4=0\\x3=c1\\x5=60\end{cases}$$

(c) 设 x4=0，如果道路不允许逆行，x3 不得取负数，令 x3=0，得 x1 的最大值为 40。

3.9 求一个顶点在原点，相邻顶点在以下三点的平行六面体的体积。

$$(a)\ \begin{bmatrix}1\\0\\-2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\2\\4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}7\\1\\0\end{bmatrix};\qquad(b)\ \begin{bmatrix}1\\4\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-2\\-5\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\2\\-1\end{bmatrix};$$

解： (a) va1=[1,0,-2]', va2=[1,2,4]', va3=[7,1,0]', Vola=abs(det([va1,va2,va3]))

结果为：Vola=22

(b) vb1=[1,4,0]', vb2=[-2,-5,2]', vb3=[-1,2,-1]', Volb=abs(det([vb1,vb2,vb3]))

结果为：Volb=15

3.10 用克莱姆法则解下列方程组：

$$(a)\ \begin{cases}2x_1+2x_2-x_3+x_4=4\\4x_1+3x_2-x_3+2x_4=6\\8x_1+5x_2-3x_3+4x_4=12\\3x_1+3x_2-2x_3+2x_4=6\end{cases};\qquad(b)\ \begin{cases}2x_1+2x_2+11x_3+5x_4=2\\x_1+x_2+5x_3+2x_4=1\\2x_1+x_2+3x_3+2x_4=-3\\x_1+x_2+3x_3+4x_4=-3\end{cases}$$

解：(a)程序：Aa=[2,2,-1,1;4,3,-1,2;8,5,-3,4;3,3,-2,2], ba=[4;6;12;6],Da=det(Aa);

xa1=Da\det([ba,Aa(:,2:4)]), xa2=Da\det([Aa(:,1),ba,Aa(:,3:4)]),

xa3=Da\det([Aa(:,1:2),ba,Aa(:,4)]), xa4=Da\det([Aa(:,1:3),ba]),

得到： xa1=xa2=1, xa3=xa4=-1

(b)程序：Ab=[2,2,11,5;1,1,5,2;2,1,3,2;1,1,3,4], bb=[2;1;-3;-3],Db=det(Ab);

xb1=Db\det([bb,Ab(:,2:4)]), xb2=Db\det([Ab(:,1),bb,Ab(:,3:4)]),

xb3=Db\det([Ab(:,1:2),bb,Ab(:,4)]), xb4=Db\det([Ab(:,1:3),bb]),

得到： xb1= -2, xb2=0, xb3= -1, xb4=1

3.11　用消元法把 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&4&8\\4&3&9\\8&9&0\end{bmatrix}$ 简化成 $\boldsymbol{A=LU}$，求 $\boldsymbol{L, U, A, U^{-1}L^{-1}}$ 及 $\boldsymbol{U^{-1}L^{-1}A}$ 的行列式。

解：A=[2,4,8;4,3,9;8,9,0],　[L,U]=lu(A), detL=det (L), detU=det(U), detA=det(A)

得到：detL = 1,　detU = 222,　detA = 222，det($\boldsymbol{U^{-1}L^{-1}}$)=1/det(LU)=0.0045, det($\boldsymbol{U^{-1}L^{-1}}$A)=1

3.12　设平面三角形的三个顶点坐标为 $z1=[x1,y1]$, $z2=[x2,y2]$, $z3=[x3,y3]$，试写出计算其面积的子程序。规定该子程序的程序头具有以下的基本格式：

function A=triarea(z1,z2,z3)

(注：下面三行是注释语句，在用 help triarea 命令时显示)

%　function A=triarea(z1,z2,z3)

% 根据三角形的三个顶点坐标 z1,z2,z3，计算其面积 A 的子程序

%　z1=[x1,y1],z2=[x2,y2],z3=[x3,y3]各为三个顶点的 1×2 坐标向量

(要写的程序段从此处开始)

解：子程序内容为:　A=0.5*det(z2-z1;z3-z1);

用 3.5 题的数据：z1=[1,2];z2=[3,3];z3=[2,1];赋值后键入 A=triarea(z1,z2,3)，得到 A=1.5，结果正确。

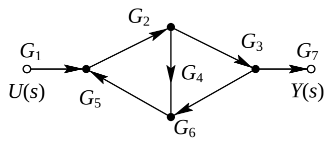
3.13　设某线性系统的信号流图如图 3-8 所示，输入信号为 u，输出信号为 y，请自行在四个中间节点上标注信号 x_1，x_2，x_3，x_4，然后

(a) 列出此系统的线性方程组。

(b) 将此线性方程组写成 $Ax=b$ 的标准矩阵形式。

(c) 用 $\boldsymbol{x=A\backslash B}$ 求此方程，求出输出 y 与输入 u 之比，即系统传递函数。

(提示：要把 G_1，G_2，G_3，G_4，G_5，G_5，G_7 设为符号变量。)



题 3.13 图　某系统的信号流图

解：x1=G1u+G5x4, x2=G2x1, x3=G3x2, x4=G4x2+G6x3, y=G7x3

写成矩阵形式：取 x1,x2,x3,x4,y 五个变量：

$$\left.\begin{array}{l}x1=G1u+G5x4,\\x2=G2x1,\\x3=G3x2,\\x4=G4x2+G6x3,\\y=G7x3\end{array}\right\}\begin{bmatrix}x1\\x2\\x3\\x4\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0&G5&0\\G2&0&0&0&0\\0&G3&0&0&0\\0&G4&G6&0&0\\0&0&G7&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x1\\x2\\x3\\x4\\y\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}G1\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}u\ \Rightarrow X=QX+Pu$$

程序为：

```
syms G1 G2 G3 G4 G5 G6 G7
Q=[0,0,0,G5,0;G2,0,0,0,0;0,G3,0,0,0;0,G4,G6,0,0;0,0,G7,0,0],
P=[G1;0;0;0;0], W=inv(eye(5)-Q)*P
pretty(W(5))
```

运行结果为：

$$Q=\begin{bmatrix} 0,\ 0,\ 0, \mathrm{G5}\ \ 0 \\ \mathrm{G2},\ 0,\ 0,\ 0,\ 0 \\ 0, \mathrm{G3},\ 0,\ 0,\ 0 \\ 0, \mathrm{G4}\ \ \mathrm{G6}\ \ 0\ \ 0 \\ 0,\ 0\ \ \mathrm{G7}\ \ 0\ \ 0 \end{bmatrix},\ P=\begin{bmatrix} G1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$W=\begin{bmatrix} \text{-G1/(G2*G4*G5 + G2*G3*G5*G6 - 1)} \\ \text{-(G1*G2)/(G2*G4*G5 + G2*G3*G5*G6 - 1)} \\ \text{-(G1*G2*G3)/(G2*G4*G5 + G2*G3*G5*G6 - 1)} \\ \text{-(G1*(G2*G4 + G2*G3*G6))/(G2*G4*G5 + G2*G3*G5*G6 - 1)} \\ \text{-(G1*G2*G3*G7)/(G2*G4*G5 + G2*G3*G5*G6 - 1)} \end{bmatrix}$$

从 u 输入，y 为输出的传递函数为 W(4)，其美观显示形式为：

$$W(5)=\begin{bmatrix} \text{-G1 G2 G3 G7} \\ \text{---------------------------------------} \\ \text{G2 G4 G5 + G2 G3 G5 G6 - 1} \end{bmatrix}$$

3.14 设矩阵方程为

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & 7 & -1 \\ 5 & 6 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$，写成X=A*X+B, 求X=$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

解：公式写成：X=A*X+B, X=inv(eye(3)-A)*B

A=[-1,2,4;2,7,-1;5,6,-2], B=[3;2;1], X=inv(eye(3)-A)*B

结果为：

$$X=\begin{bmatrix} -0.0435 \\ -0.4130 \\ -0.5652 \end{bmatrix}$$

3.15 用 3.14 题的 **A**、**B** 和求出的 **X**，求:

(a) E1=B-(eye(3)-A)*X

(b) E2= X-B/(eye(3)-A)

(c) E3= X- (eye(3)-A)\B

解释三个结果不同的原因。

解：(a),(c), E1=E3=~0，因为它们两式都是原题式子移项至左边的结果。

(b),E2 不能运算。因为两矩阵左除的条件是其列数相等，此处 B 为单列，分母为 3*3 矩阵，无解。