离散数学第二次作业

一、选择题

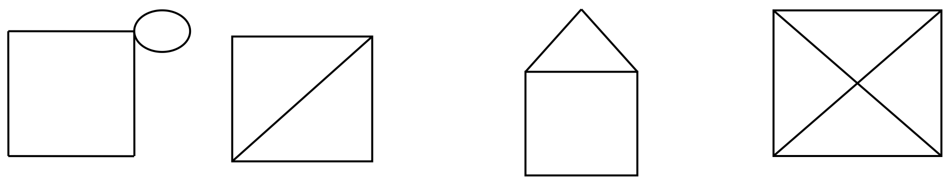
1、设命题公式$G=p\to(p\wedge(q\to r))$，则 G 是（　　）。
A. 恒假的　　　B. 恒真的　　　C. 可满足的　　　D. 析取范式

2、设 A={1，2，3}，则下列关系 R 不是等价关系的是（　　）
A. R={<1，1>，<2，2>，<3，3>}
B. R={<1，1>，<2，2>，<3，3>，<2，3>，<3，2>}
C. R={<1，1>，<2，2>，<3，3>，<1，4>}
D. R={<1，1>，<2，2>，<3，3>，<1，2>，<1，3>，<2，3>，<2，1>，<3，1>，<3，2>}

3、下列二元运算在所给的集合上不封闭的是（　　）

A. S={2x-1|x∈Z^+}，S 关于普通的乘法运算
B. S={0，1}，S 关于普通的乘法运算
C. 整数集合 Z 和普通的减法运算
D. S={x | x=2^n，n∈Z^+}，S 关于普通的加法运算

4、下列图中是欧拉图的是（　　）。



A　　　　B　　　　C　　　　D

5、一棵树有 2 个 4 度顶点，3 个 3 度顶点，其余都是树叶，则该树中树叶的个数是（　　）
A .8　　　B.9　　　C. 10　　　D. 11

6、一个公式在等价意义下，下面哪个写法是唯一的（　　）。
A. 析取范式　　B. 合取范式　　C. 主析取范式　　D. 以上答案都不对

7、设集合 A={1, 2, 3 }，A 上的关系 R={<1, 1 >,<2, 2 > }，则 R 不具有（　　）性质。
A.自反性　B.对称性　C.传递性　D. 反对称性

8、下面给出的一阶逻辑等值式中，（　　）是错的。

A. $\exists x(A(x)\vee B(x))\Leftrightarrow\exists xA(x)\vee\exists xB(x)$;

B. $\forall x(A(x)\vee B(x))\Leftrightarrow\forall xA(x)\vee\forall xB(x)$;

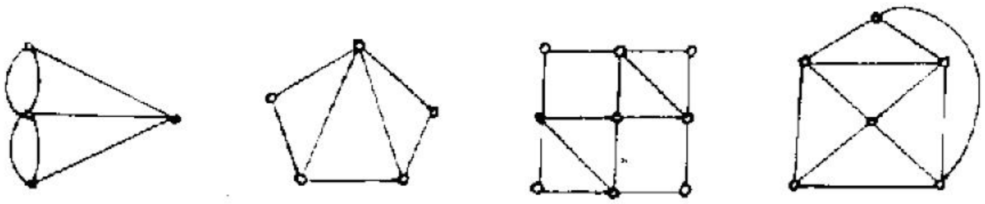
C. $\neg\forall xA(x)\Leftrightarrow\exists x(\neg A(x))$;

D. $A\to\forall xB(x)\Leftrightarrow\forall x(A\to B(x))$.

9、 设图 G 是有 6 个顶点的连通图，总度数为 20，则从 G 中删去（　　）边后使之变成树。
A .10　　B. 5　　C. 3　　D. 2

10、下列图是欧拉图的是（　　）

A.　　B.　　C.　　D.



11、设集合 A={1, 2, 3 }, A 上的关系 R={<1, 1 >,<2, 2 >,<3,3>}, 则 R 不具有下列性质中的(　　)

(A) 自反性　(B) 对称性　(C) 传递性　(D) 反自反性

12、*运算如下表所示，哪个能使<{*a*,*b*}，*>成为含幺元半群（　　）

*	*a*	*b*
a	*a*	*b*
b	*a*	*b*

*	*a*	*b*
a	*a*	*a*
b	*b*	*b*

*	*a*	*b*
a	*a*	*a*
b	*a*	*a*

*	*a*	*b*
a	*a*	*b*
b	*b*	*a*

13、 下列句子中是命题的有（　　）

(A) 上课时请不要说话!　(B) 我在说谎.（C） 你吃饭了吗?　（D） 上海是中国的首都.

14、 以下命题公式中，为永假式的是(　　)

(A) p→(p∨q∨r)　(B) (p→┐p)→┐p

(C) ┐(q→q)∧p　(D) ┐(q∨┐p)→(p∧┐p)

15、 设 A={a,b,c}，则下列是集合 A 的划分的是(　　)

（A） {{b,c},{c}}　（B） {{a,b},{a,c}}　（C） {{a,b},c}　（D） {{a},{b,c}}

16、 下列式子正确的是（　　）

(A) $\varnothing \in \varnothing$　(B)$\varnothing \subseteq \varnothing$　(C)$\{\varnothing\} \subseteq \varnothing$　(D)$\{\varnothing\} \in \varnothing$

17、集合 A={1，2}的幂集 P(A)的基数是（　　）

(A)　0　(B)　1　(C)　2　(D)　4

18、 设集合 A={1，2，3，…，10},下列定义的哪种运算关于集合 A 是不封闭的（　　）

(A) x*y=max{x,y}　(B) x*y=(x,y) 即 x,y 的最大公约数

(C) x*y=min{x,y}　(D) x*y=[x,y] 即 x,y 的最小公倍数

19、 若<*A*,*>是一个代数系统,且满足结合律,则<*A*,*>必为（　　）

(A) 半群　(B) 独异点　(C) 群　(D) 交换群

20、下列哪一组命题公式是等价的（　　）

(A) $\sim P \wedge \sim Q$， $P \vee Q$　(B) $A \rightarrow (B \rightarrow A)$， $\sim A \rightarrow (A \rightarrow \sim B)$

(C) $Q \rightarrow (P \vee Q)$， $\sim Q \wedge (P \vee Q)$　(D) $\sim A \vee (A \wedge B)$， B

二、填空题

1、公式(P∧Q)→(R∨S)真值表中共有__16__种真值指派。

2、无向图 G 如图 1 所示，则 G 的点连通度为____1_____。

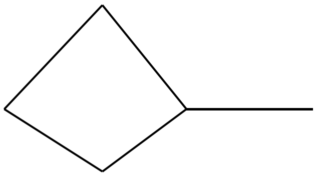


图 1

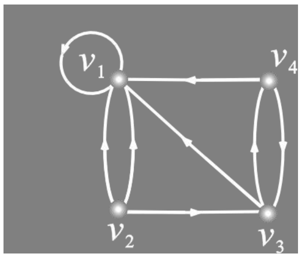


图 2

3、 设有向图 D 的邻接矩阵 A(D)= $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$,则长度为 2 的通路有_10_条.

4、设 $Z_4=\{0,1,2,3\}, x\oplus y=\begin{cases} x+y & x+y<4 \\ x+y-4 & x+y\geq 4 \end{cases}$， 则 $(Z_4,\oplus)$ 的生成元

是___1___ 或 ___3__。

5、具有 16 个结点的完全无向图其边数一定为__120___条。

6、设集合 $A=\{2,3,4,6,8,12,24\}$， R 为 A 上的整除关系，集合 A 中的极大元

是__24_ ；极小元 2， 3;

7、整数加群的幺元是___0___。

8、在一棵根树中，仅有一个结点的入度为 _0_，称为树根，其余结点的入度均为_1__。

9、 设 A={a,b,c},则 A × A 中的元素有____9____个。

10、 设 G 是 m 阶有向完全图,则该图的边数为_m(m-1)

11、设 A，B 是两个集合，A={1, 2, 3, 4}，B={2, 3, 5}，则 A⊕B={1.4.5}.

12、 一个简单连通无向图有 n 个节点，它的边数至少有 _n-1 条。

三、计算题

1、列出命题公式（$((p\to q)\to p)\leftrightarrow p$ 的真值表。

解:

p	q	$p \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \rightarrow p)$	$(p \rightarrow q) \rightarrow p) \leftrightarrow p$
0	0	1	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	1
1	1	1	1	1

2、在偏序集<A,≤>中，其中 A={1,2,3,4,6,8,12,14}，≤是 A 中的整除关系，求集合 D={2,3,4,6}的极大元，极小元，最大元，最小元，上界，下界,最小上界和最大下界。

解:

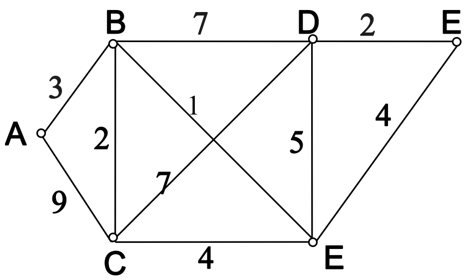
极大元：4，6；极小元：2，3；

最大元：无；最小元：无；

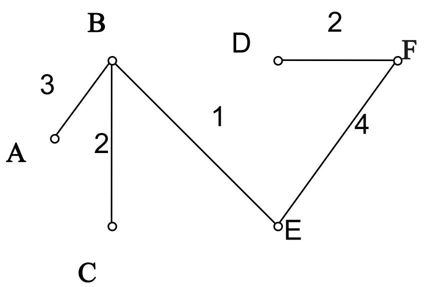
上界：12；下界 1：

最小上界：12;最大下界:1

3、用 Kruskal 算法求下列权图的最小生成树,并求最小生成树的权数,要求写出解的过程.



解：取数的由小到大的排列为 1＜2＜3＜4＜5＜7＜9



最小生成树如图所示：

最小生成树的权数为其权 W(T)=12

4、设 G=＜a＞是 10 阶循环群，求出 G 的所有子群。

解：因为 10 的正因子是 1,2,5，10

所以 G 的子群有 4 个,

分别是

$<a^{10}>=\{e\}$

$<a^5>=\{e, a^5\}$

$<a^2>=\{e, a^2, a^4, a^6, a^8\}$

$<a>=G$

5、A、B、C、D 四个人中要派两个人出差，需满足如下条件：

(1) 若 A 去，则 C 和 D 中要去一人；

(2) B 和 C 不能都去；

(3) C 去则 D 要留下。

问有几种派法？如何派？

解：用 A、B、C、D 分别表示 A 去，B 去，C 去，D 去出差，则命题符号化如下：

(1) $A\rightarrow(C\odot D)$（$\odot$表示异或，可用其它符号）

(2) $(B\wedge\neg C)\vee(\neg B\wedge C)$

(3) $C\rightarrow\neg D$

出差的派法要同时满足上述三个条件，故

$G=(A\rightarrow(C\odot D))\wedge((B\wedge\neg C)\vee(\neg B\wedge C))\wedge(C\rightarrow\neg D)$

列该公式的真值表如下：（可以去掉所有不满足条件的，只剩 6 种情况如下：）

A	B	C	D	(1)	(2)	(3)	G
0	0	1	1	1	1	0	0
0	1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	1	0
1	0	0	1	0	1	1	0
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	1	0

由真值表知有两种派法 A，C 去或 B，D 去。

6、一棵树有 2 个 4 度结点，3 个 3 度结点，其余结点是叶子，求该树的叶子数。

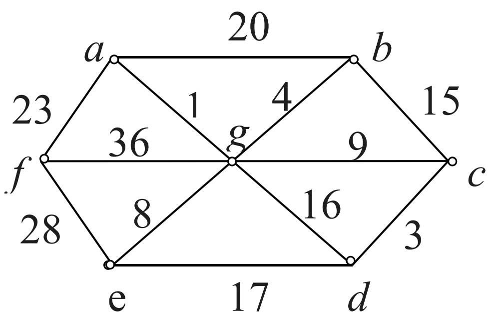
解：设树的叶子数为 x,于是 T 中有 x+2+3 个顶点,有(x+2+3)-1 条边,

由握手定理知 T 中所有顶点的度数之和 $\sum_{i=1}^{x+y} d(v_i)=2[(x+2+3)-1]$

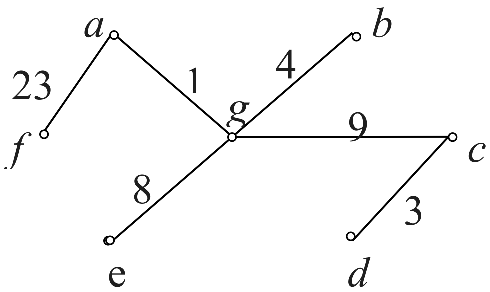
$2*4+3*3+x*1=2*[(2+3+x)-1]$

$X=9$

7、带权无向图 G 如下，求 G 的最小生成树 T 及 T 的权总和，要求写出解的过程。



解：取数的由小到大的排列为 1 < 3 < 4 < 8 < 9 < 15 < 16<17<20<23<28<36



最小生成树如图所示：
最小生成树的权数为其权 W(T)=48
8、某班有学生 60 人，其中有 38 人选修 Visual C++课程，有 l6 人选修 Visual Basic 课程。有 21 人选修 Java 课程；有 3 人这三门课程都选修，有 2 人这三门课程都不选修，问仅选修两门课程的学生人数是多少？

解： 设选修 Visual C++课程的学生为集合 A；选修 Visual Basic 课程的学生为集合 B；选修 Java 课程的学生为集合 C。

由题意可知：

$|A| = 38$　　$|B| = 16$　　$|C| = 21$

$|A\cap B\cap C| = 3$　　$60-|A\cup B\cup C| = 2$

因为$|A\cup B\cup C| = |A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$

所以有：$|A\cap B|+|A\cap C|+|B\cap C|=20$。

所以仅选修两门课程的学生数是

$|A\cap B|+|A\cap C|+|B\cap C|-3|A\cap B\cap C|=11$。

9、设 G=＜a＞是 12 阶循环群，求出 G 的所有子群。

解：因为 12 的正因子是 1,2,5，10

所以 G 的子群有 4 个， 分别是

$<a^{10}>=\{e\}$

$<a^5>=\{e, a^5\}$

$<a^2>=\{e, a^2, a^4, a^6, a^8\}$

$<a>=G$

四、证明题

1、设 R_1，R_2 为 A 上的关系，证明：$(R_1 \cap R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cap R_2^{-1}$。

证明：对任意的 $x, y \in A$，有

$$< x, y > \in (R_1 \cap R_2)^{-1}$$

$$\Leftrightarrow < y, x > \in R_1 \cap R_2$$

$$\Leftrightarrow (< y, x > \in R_1) \wedge (< y, x > \in \cap R_2)$$

$$\Leftrightarrow (< x, y > \in R_1^{-1}) \wedge (< x, y > \in \cap R_2^{-1})$$

$$\Leftrightarrow < x, y > \in R_1^{-1} \cap R_2^{-1}$$

故 $(R_1 \cap R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cap R_2^{-1}$

2、设 C*={a+bi | a,b 为实数，且 a≠0}。其中 i 是虚数单位。在 C*上定义：

R={<a+bi，c+di>| a+bi∈C*∧c+di∈C*∧ac＞0}

（1）证明：R 是 C*上的等价关系；

（2）给出 R 产生的等价类。

证明：（1）对任意的 a+bi∈C^*,

a≠0⇔aa＞0⇔（a+bi）R（a+bi）

所以 R 是自反的。

（2）对任意的 a+bi，c+di∈C^*,

(a+bi）R（c+di）⇔ac＞0 ⇔ ca＞0⇔（c+di）R（a+bi）

所以 R 是对称的。

（3）对任意的 a+bi，c+di， e+fi∈C^*,

(a+bi）R（c+di)，（c+di）R（e+fi）⇔ ac＞0，ce＞0⇔ae＞0

⇔（a+bi）R（e+fi）

所以 R 是传递的。

综上 R 是一个等价关系。

R 有两个不同的等价类。设为 K_1，K_2

K_1={（a+bi）∧a＞0}，K_2={（a+bi）∧a＜0}

3、构造下面推理的证明：

前提：$\neg\exists x(F(x) \wedge H(x)), \forall x(G(x) \to H(x)).$

结论：$\forall x(G(x) \to \neg F(x)).$

证明:

(1) $\neg\exists x(F(x) \wedge H(x))$ 前提引入

(2) $\forall x(\neg F(x) \vee \neg H(x))$ (1)置换

(3) $\forall x(H(x) \to \neg F(x))$ (2)置换

(4) $H(y) \to \neg F(y))$ (3)UI

(5) $\forall x(G(x) \to H(x))$ 前提引入

(6) $G(y) \to H(y))$ (5)UI

(7) $G(y) \to \neg F(y))$ (6)(4)假言三段论

(8) $\forall x(G(x) \to \neg F(x)).$ (7)UG

4、在自然推理系统 F 中，构造下面推理的证明：
任何人如果喜欢音乐就不喜欢体育。每个人或者喜欢体育或者喜欢美术。有的人不喜欢美术，因而有的人不喜欢音乐。(个体域为人类集合)

命题符号化：$F(x)$：x 喜欢音乐

$G(x)$：x 喜欢体育

$H(x)$：x 喜欢美术

前提：$\forall x(F(x) \to \neg G(x))$，$\forall x(G(x) \vee H(x))$

结论：$\exists x \neg H(x) \to \exists x \neg F(x)$

证明：附加前提证明法

① $\exists x \neg H(x)$ 附加前提引入

② $\neg H(c)$ EI 规则

③ $\forall x(G(x) \vee H(x))$ 前提引入

④ $G(c) \vee H(c)$ UI 规则

⑤ $G(c)$ ②④析取三段论

⑥ $\forall x(F(x) \to \neg G(x))$ 前提引入

⑦ $F(c) \to \neg G(c)$ UI 规则

⑧ $\neg F(c)$ ⑤⑦拒取

⑨ $\exists x \neg F(x)$ EG 规则

5、设 Z 为整数集合，在 Z 上定义二元运算$\circ$如下：$\forall x, y \in Z, x \circ y = x + y - 2$

证明：Z 关于$\circ$运算构成群。

证明：

因为对任意的 $x, y \in Z$，有 $x + y - 2 \in Z$，所以整数集合 Z 关于运算$\circ$封闭。

对 $\forall x, y, z \in Z$ 有

$$(x \circ y) \circ z = (x + y - 2) \circ z = x + y + z - 4$$

$$x \circ (y \circ z) = x \circ (y + z - 2) = x + y + z - 4$$

故 $(x \circ y) \circ z = (x \circ y) \circ z$，即运算$\circ$满足结合律。

$2 \in Z$，且对任意的 $x \in Z$ 有 $x \circ 2 = 2 \circ x = x$，所以 2 是 $< Z, \circ >$ 的单位元。

对任意的 $x \in Z$ 有 $4 - x \in Z$，且 $x \circ (4 - x) = (4 - x) \circ x = 2$，即 $x^{-1} = 4 - x$

综合上述可知 Z 关于$\circ$运算构成群。

一、选择题答案

1～5　C、C、D、A、B　　6～10　C、A、B、C、C

11～15　D、D、D、C、D　　16～20　B、D、D、A、B