06 – Criterios de estabilidad

Biomecatrónica – 2023/II

UNIVERSIDAD EIA
Ser, Saber y Servir
45 años

Criterios de estabilidad

Un sistema es estable si su salida no crece indefinidamente

Existen diferentes criterios de estabilidad que tienen campos de aplicación variados

- ○ Estabilidad BIBO
- ○ Estabilidad interna
- ○ Estabilidad de Routh-Hurwitz
- × Estabilidad en el sentido de Nyquist
- × Estabilidad en el sentido de Lyapunov

Estabilidad BIBO

Un sistema con respuesta al impulso $h(t)$ es estable BIBO si y solo si

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| \, d\tau < \infty$$

esto se traduce en que todos los polos deben tener parte real **estrictamente negativa**

Estabilidad marginal

Se conoce como sistema marginalmente estable cuando este es BIBO estable, pero existe respuesta del sistema aun cuando se ha eliminado la respuesta

Esto implica que hay algunas entradas acotadas para las cuales la salida es no acotada y en términos de polos, que al menos uno tiene parte real cero

$$H_1(s) = \frac{1}{s} \qquad H_2(s) = \frac{1}{s^2 + 1}$$

Estabilidad interna

Un sistema tiene estabilidad interna si y solo si todos los valores propios en la SSR tienen parte real **estrictamente negativa**

Un sistema puede ser internamente inestable, pero estable BIBO

Estabilidad de Routh-Hurwitz

Considere el polinomio característico $a(s)$ de un sistema

$$a(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \cdots + a_{n-1}s + a_n$$

Condición necesaria: todos los coeficientes a_i son positivos

Condición necesaria y suficiente: todos los elementos en la primera columna del arreglo de Routh son positivos

Condición de necesidad

$$
\begin{aligned}
a(s) &= s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \cdots + a_{n-1} s + a_n \\
&= (s - r_1)(s - r_2) \ldots (s - r_n) \\
&= s^n - (r_1 + r_2 + \ldots r_n) s^{n-1} \\
&\quad + (r_1 r_2 + r_1 r_3 + \ldots r_1 r_n + r_2 r_3 + \ldots) s^{n-2} \\
&\quad - (r_1 r_2 r_3 + r_1 r_2 r_4 + \ldots) s^{n-3} + \ldots \\
&\quad + (-1)^n (r_1 r_2 \ldots r_n)
\end{aligned}
$$

Arreglo de Routh

1. Separar los coeficientes de $a(s)$

$$\begin{array}{lccccc} s^n & : & 1 & a_2 & a_4 & \cdots \\ s^{n-1} & : & a_1 & a_3 & a_5 & \cdots \end{array}$$

2. Luego agregamos filas posteriores

$$\begin{array}{llllllll} \text{Fila} & n & s^n: & 1 & a_2 & a_4 & \cdots \\ \text{Fila} & n-1 & s^{n-1}: & a_1 & a_3 & a_5 & \cdots \\ \text{Fila} & n-2 & s^{n-2}: & b_1 & b_2 & b_3 & \cdots \\ \text{Fila} & n-3 & s^{n-3}: & c_1 & c_2 & c_3 & \cdots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \text{Fila} & 2 & s^2: & * & * & & \\ \text{Fila} & 1 & s^1: & * & & & \\ \text{Fila} & 0 & s^0: & * & & & \end{array}$$

Arreglo de Routh

$$b_1 = -\frac{\det\begin{bmatrix} 1 & a_2 \\ a_1 & a_3 \end{bmatrix}}{a_1} = \frac{a_1a_2 - a_3}{a_1}, \qquad c_1 = -\frac{\det\begin{bmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix}}{b_1} = \frac{b_1a_3 - a_1b_2}{b_1},$$

$$b_2 = -\frac{\det\begin{bmatrix} 1 & a_4 \\ a_1 & a_5 \end{bmatrix}}{a_1} = \frac{a_1a_4 - a_5}{a_1}, \qquad c_2 = -\frac{\det\begin{bmatrix} a_1 & a_5 \\ b_1 & b_3 \end{bmatrix}}{b_1} = \frac{b_1a_5 - a_1b_3}{b_1},$$

$$b_3 = -\frac{\det\begin{bmatrix} 1 & a_6 \\ a_1 & a_7 \end{bmatrix}}{a_1} = \frac{a_1a_6 - a_7}{a_1}, \qquad c_3 = -\frac{\det\begin{bmatrix} a_1 & a_7 \\ b_1 & b_4 \end{bmatrix}}{b_1} = \frac{b_1a_7 - a_1b_4}{b_1}.$$

Arreglo de routh

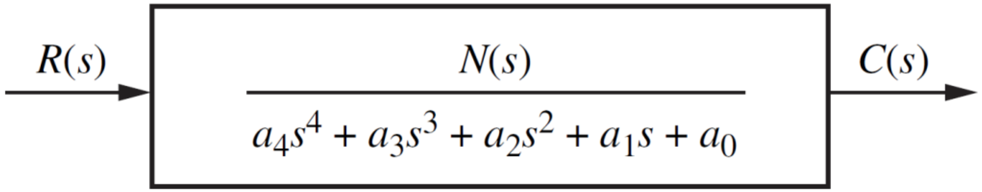


TABLE 6.2 Completed Routh table

s^4	a_4	a_2	a_0
s^3	a_3	a_1	0
s^2	$\dfrac{-\begin{vmatrix} a_4 & a_2 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix}}{a_3} = b_1$	$\dfrac{-\begin{vmatrix} a_4 & a_0 \\ a_3 & 0 \end{vmatrix}}{a_3} = b_2$	$\dfrac{-\begin{vmatrix} a_4 & 0 \\ a_3 & 0 \end{vmatrix}}{a_3} = 0$
s^1	$\dfrac{-\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}{b_1} = c_1$	$\dfrac{-\begin{vmatrix} a_3 & 0 \\ b_1 & 0 \end{vmatrix}}{b_1} = 0$	$\dfrac{-\begin{vmatrix} a_3 & 0 \\ b_1 & 0 \end{vmatrix}}{b_1} = 0$
s^0	$\dfrac{-\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & 0 \end{vmatrix}}{c_1} = d_1$	$\dfrac{-\begin{vmatrix} b_1 & 0 \\ c_1 & 0 \end{vmatrix}}{c_1} = 0$	$\dfrac{-\begin{vmatrix} b_1 & 0 \\ c_1 & 0 \end{vmatrix}}{c_1} = 0$

Ejemplos básicos

Aplique el criterio de Routh-Hurwitz a los siguientes polinomios

- $D_1(s) = s^5 + 2s^4 + 4s^3 + 6s^2 + 8s + 12$
- $D_2(s) = s^3 + 14s^2 + 55s + 42$
- $D_3(s) = s^5 + 2s^4 + 3s^3 + 6s^2 + 5s + 3$
- $D_4(s) = s^5 + 7s^4 + 6s^3 + 42s^2 + 8s + 56$

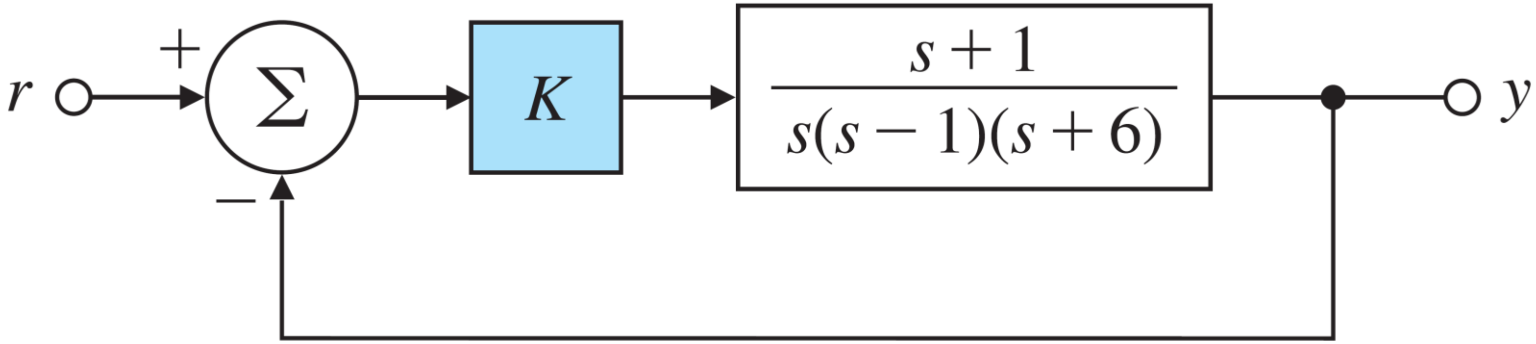
Aplicación al control (1)

¿Qué valor de ganancia K_c hace que el sistema se comporte marginalmente estable (oscilatorio)? ¿Cuál es el periodo al cuál oscila cuando K_c toma este valor?

$$H(s) = \frac{10}{10s^3 + 17s^2 + 8s + K_c}$$

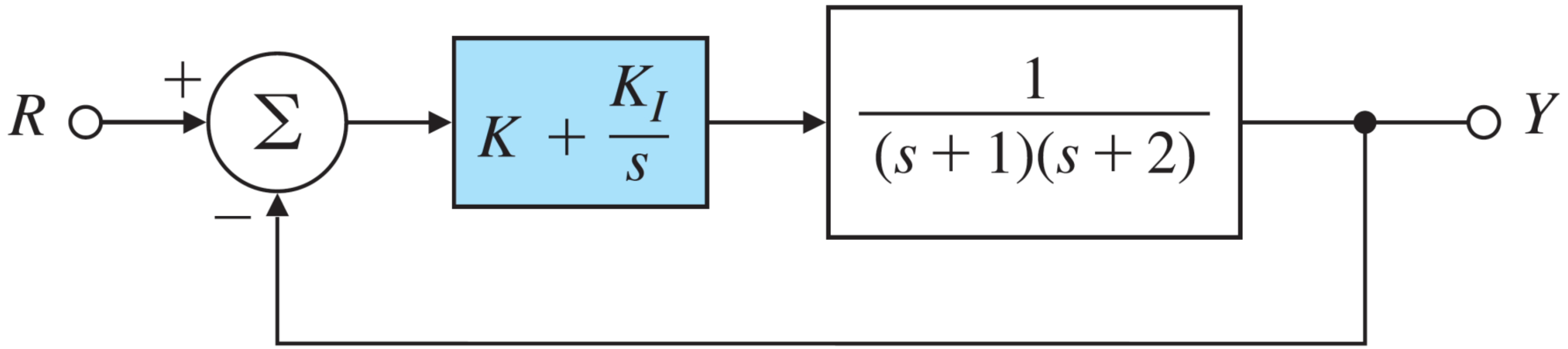
Aplicación al control (2)

Hallar los valores de K para los que el sistema realimentado es estable



Aplicación al control (3)

Hallar los valores de K y K_I para los que el sistema realimentado es estable



Aplicación al control (4)

El modelo de lazo abierto de un sistema de administración automática de insulina es

$$G(s) = \frac{K(s+4)}{s\left[(s+0.5)(s+1)\left(s^2+0.4s+4\right)\right]}$$

halle los valores de K que garantizan que el sistema en lazo cerrado es estable