Representación en el espacio de estados

Biomecatrónica 2025-1

Objetivos de la clase

- Comprender la formulación matemática de la representación en el espacio de estados
- Convertir modelos en función de transferencia y diagramas de bloques a la representación en el espacio de estados

Estado

El estado de un sistema dinámico es el conjunto de variables más pequeño (llamadas variables de estado), de forma que el conocimiento de estas variables en $t = t_0$, junto con el conocimiento de la entrada para $t \geq t_0$, determinan completamente el comportamiento del sistema en cualquier $t \geq t_0$

Variables de estado

- Las variables de un sistema dinámico son las variables que constituyen el menor conjunto de variables que determinan el estado del sistema dinámico
- Si al menos se necesitan n variables $x_1, x_2, \dots, x_n$ para describir completamente el comportamiento de un sistema dinámico, entonces tales n variables son un conjunto de variables de estado.

Sobre las variables de estado

- Se pueden seleccionar como variables de estado variables que no representan cantidades físicas y aquellas que no son medibles ni observables
- Aunque esto es una ventaja de los métodos en el espacio de estados, es conveniente seleccionar para las variables de estado cantidades físicamente medibles, si esto es posible, porque las leyes de control óptimo requerirán realimentar todas las variables de estado con una ponderación adecuada

Vector de estado

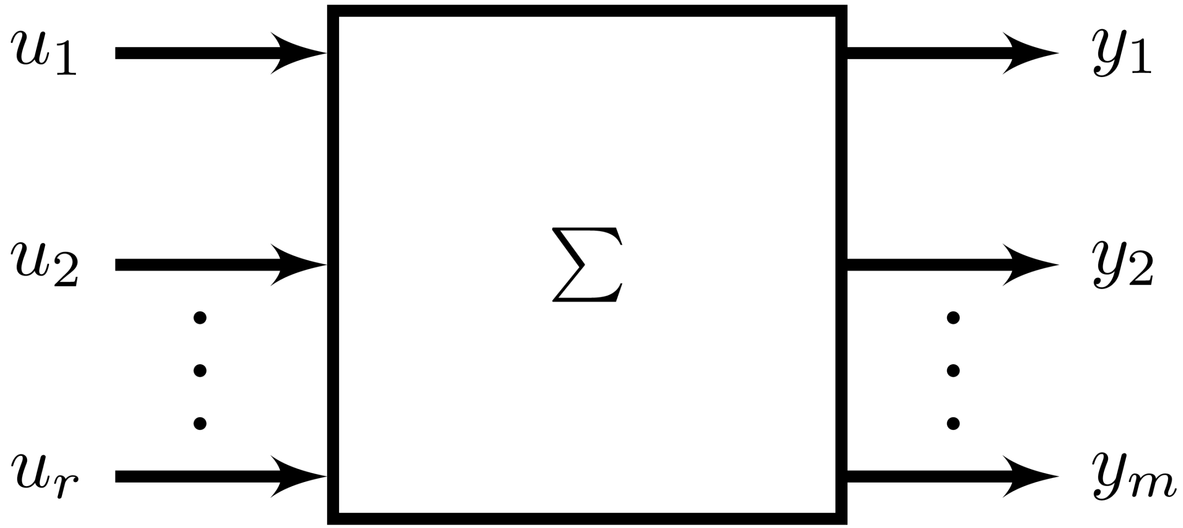
Si se necesitan n variables de estado para describir completamente el comportamiento de un sistema dado, entonces esas n variables de estado se pueden considerar como las n componentes de un vector $\boldsymbol{x}$

Espacio de estados

- El espacio n–dimensional cuyos ejes de coordenadas están formados por el eje x_1, eje x_2, …, eje x_n, donde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son las variables de estado, se denomina espacio de estados
- Cualquier estado se puede representar como un punto en el espacio de estados

Sistema MIMO

El enfoque de variables de estado permite analizar el comportamiento dinámico de un sistema con múltiples entradas y múltiples salidas



Ecuaciones de estado

Las ecuaciones de estado son una colección de n ecuaciones diferenciales que son las derivadas de primer orden de cada variable de estado

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= f_1\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, u_1, u_2, \ldots, u_r\right) \\
\dot{x}_2 &= f_2\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, u_1, u_2, \ldots, u_r\right) \\
&\vdots \\
\dot{x}_n &= f_n\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, u_1, u_2, \ldots, u_r\right)
\end{aligned}
$$

Ecuaciones de salida

Las ecuaciones de salida son una colección de m ecuaciones que relacionan las salidas del sistema con sus estados y entradas

$$y_1 = g_1\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, u_1, u_2, \ldots, u_r\right)$$
$$y_2 = g_2\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, u_1, u_2, \ldots, u_r\right)$$
$$\vdots$$
$$y_m = g_m\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, u_1, u_2, \ldots, u_r\right)$$

Ejemplo 1

Determine las ecuaciones de estado para el sistema modelado por las siguientes EDO, donde z y w son las variables dinámicas y v es la entrada.

$$2\ddot{z} + 0.8z - 0.4w + 0.2\dot{z}w = 0$$

$$4\dot{w} + 3w + 0.1w^3 - 6z = 8v$$

Representación en espacio de estados

Si las ecuaciones de modelado matemático que representan un sistema son lineales, entonces las ecuaciones de estado resultantes serán EDO lineales de primer orden

En este caso, podemos escribir las ecuaciones de variables de estado en un formato conveniente de matriz-vector llamado representación en espacio de estados **(SSR)**

Modelo SSR

$$\dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + b_{11}u_1 + \cdots + b_{1r}u_r$$

$$\dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + b_{21}u_1 + \cdots + b_{2r}u_r$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + b_{n1}u_1 + \cdots + b_{nr}u_r$$

$$y_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1n}x_n + d_{11}u_1 + \cdots + d_{1r}u_r$$

$$y_2 = c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \cdots + c_{2n}x_n + d_{21}u_1 + \cdots + d_{2r}u_r$$

$$\vdots$$

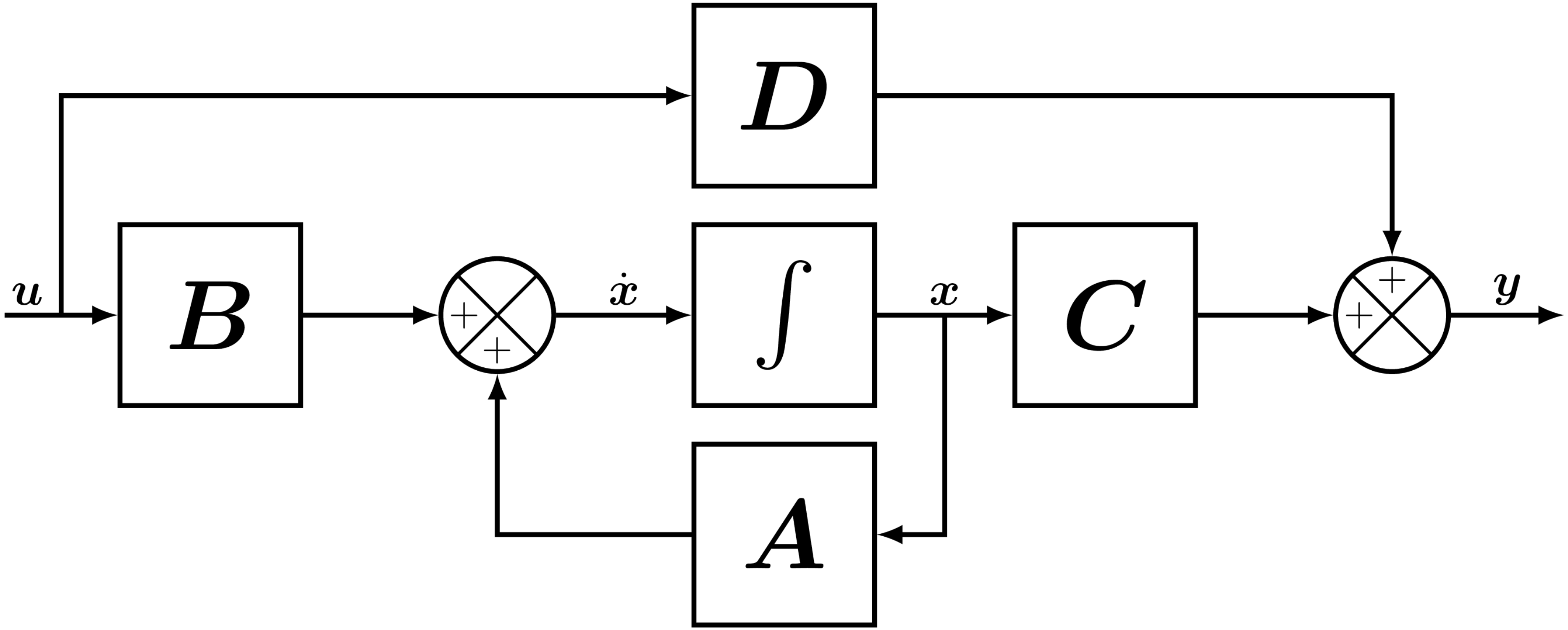
$$y_m = c_{m1}x_1 + c_{m2}x_2 + \cdots + c_{mn}x_n + d_{m1}u_1 + \cdots + d_{mr}u_r$$

Modelo SSR

$$\dot{x} = A x + B u$$

$$y = C x + D u$$

Diagrama de bloques de la SSR



Ejemplo 2

Un modelo simplificado del actuador solenoidal mostrado es

$$0.02\ddot{z} + 8\dot{z} + 3000z = 4.5I$$

$$0.01\dot{I} + 5I = e_{in}(t)$$

La única entrada al sistema es el voltaje $e_{in}(t)$

Obtenga una SSR completa con la posición de la masa (z) como única variable de salida