# Solución de ODEs

Biomecatrónica 2025-1

# Objetivos de la clase

- Comprender la clasificación de soluciones de ODEs lineales: respuesta de entrada cero ($y_{zi}(t)$) y respuesta de estado cero ($y_{zs}(t)$)
- Resolver ODEs lineales de primer y segundo orden con coeficientes constantes
- Aplicar el método de superposición para combinar ambas respuestas y obtener la solución general de una ODE
- Interpretar la relevancia de estas respuestas en sistemas dinámicos

# Modelo de un sistema

- Al estudiar los sistemas de control, se debe ser capaz de modelar sistemas dinámicos y analizar las características dinámicas.
- Un modelo matemático de un sistema dinámico se define como un conjunto de ecuaciones que representan la dinámica del sistema con precisión o, al menos, bastante bien
- La dinámica de muchos sistemas, ya sean mecánicos, eléctricos, térmicos, económicos, biológicos, etc., se describe en términos de ecuaciones diferenciales

# Ecuaciones diferenciales ordinarias

- La dinámica de los sistemas dinámicos que estudiaremos solo dependen del tiempo, por lo que los modelos asociados son ecuaciones diferenciales ordinarias
- Además, si las características propias del sistema no se degradan con el tiempo, estas ecuaciones diferenciales tienen coeficientes constantes

$$\begin{aligned} a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}\dot{y} + a_n y \\ = b_0 x^{(m)} + b_1 x^{(m-1)} + \cdots + b_{m-1}\dot{x} + b_m x \quad (n \geqslant m) \end{aligned}$$

# Solución de la ODE

- En un curso de ecuaciones diferenciales, es normal que se analicen dos tipos de soluciones: homogénea (natural) y particular (forzada)
- Estas dos soluciones (o respuestas) no son muy útiles en el análisis de sistemas dinámicos, por lo que se prefiere recurrir a las respuestas de entrada cero y estado cero

# ODE de entrada única y superposición

- Las ODE de los sistemas de interés para este curso, al ser lineales, obedecen el principio de superposición, por lo que la solución general se puede construir a partir de la solución de una ODE de entrada única y luego aplicar este principio

$$y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_{n-1}\dot{y}(t) + a_n y(t) = x(t)$$

# Respuesta de entrada cero

- En la teoría de sistemas, la respuesta de entrada cero, $y_{zi}(t)$, se refiere a la respuesta del sistema cuando la entrada externa es igual a cero, pero el sistema tiene condiciones iniciales no nulas
- Es decir, es la respuesta que se genera únicamente debido al estado inicial del sistema, sin que haya una entrada externa que lo impulse

$$y_{zi}^{(n)}(t) + a_1 y_{zi}^{(n-1)}(t) + \cdots + a_{n-1}\dot{y}_{zi}(t) + a_n y_{zi}(t) = 0$$

# Respuesta de estado cero

- En teoría de sistemas y control, la respuesta de estado cero, $y_{zs}(t)$, es la respuesta del sistema que se genera únicamente por la entrada externa aplicada al sistema, asumiendo que todas las condiciones iniciales son iguales a cero
- En otras palabras, es la respuesta que resulta de la dinámica del sistema cuando se parte del estado de reposo

$$y_{zs}^{(n)}(t) + a_1 y_{zs}^{(n-1)}(t) + \cdots + a_{n-1}\dot{y}_{zs}(t) + a_n y_{zs}(t) = x(t)$$

# Respuesta al impulso

- En teoría de sistemas y control, la respuesta al impulso, $h(t)$, es la respuesta del sistema cuando se aplica una señal de entrada en forma de un impulso unitario

$$y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_{n-1}\dot{y}(t) + a_n y(t) = \delta(t)$$

- Es una de las respuestas fundamentales que describe completamente las características del sistema, ya que permite determinar la respuesta de estado cero ante cualquier entrada mediante la convolución con la entrada dada

# Problema guiado

- Hallar las respuestas $y_{zs}(t)$, $y_{zi}(t)$ y $h(t)$ para la siguiente ecuación diferencial

$$\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2y(t) = 2\dot{x}(t) + x(t)$$

$$x(t) = 4e^{-3t},\ y(0) = 2,\ \dot{y}(0) = 4$$