03 – Función de transferencia

Biomecatrónica – 2023/II

Respuesta de un sistema LTI

Si se tiene un sistema LTI con un modelo descrito por una ecuación diferencial

$$\overset{(n)}{y} + a_1 \overset{(n-1)}{y} + \cdots + a_{n-1}\dot{y} + a_n y = b_0 \overset{(n)}{u} + b_1 \overset{(n-1)}{u} + \cdots + b_{n-1}\dot{u} + b_n u$$

la salida del sistema se halla analíticamente mediante la superposición de las respuestas de <u>**entrada cero**</u> y <u>**estado cero**</u>

$$y(t) = y_{\text{zi}}(t) + y_{\text{zs}}(t)$$

Respuesta de un sistema LTI

Respuesta de entrada cero

Es la respuesta del sistema cuando no se encuentra en reposo y no se excita con entrada alguna

Respuesta de estado cero

Es la respuesta del sistema ante una entrada específica, cuando se parte desde el reposo

Ejemplo

Hallar la respuesta completa del SLIT regido por la EDO

$$\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2y(t) = x(t)$$

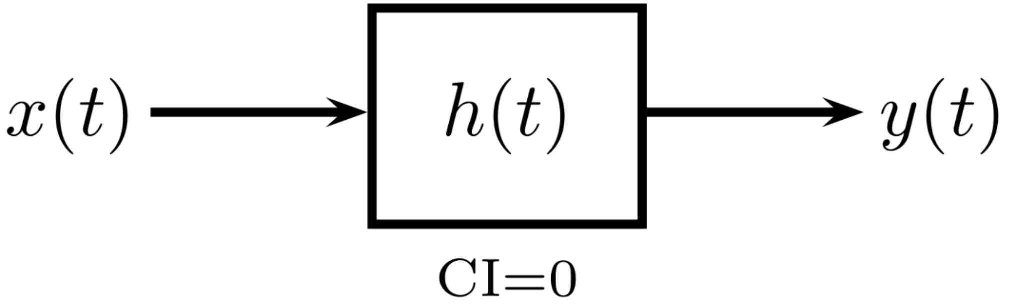
cuando $x(t) = 4e^{-3t}$ y está sujeto a las condiciones iniciales

$$y(0) = 3 \quad \dot{y}(0) = 4$$

¿Qué sucede si $x(t) = 4e^{-3t}\cos(t)$?

Respuesta ZSR de un sistema LTI

Cuando se tiene el caso de múltiples entradas, bien sea porque la EDO involucra alguna de las derivadas de la entrada o porque la entrada es la superposición de varias señales, hallar la solución de estado cero se puede tornar en un procedimiento engorroso



Respuesta $h(t)$ al impulso unitario

El procedimiento para hallar la solución de estado cero se puede facilitar si se conoce la respuesta del SLIT ante una entrada tipo impulso unitario $\delta(t)$

Respuesta ZSR de un sistema LTI

Una vez conocida la respuesta al impulso del SLIT, la ZSR se calcula usando la integral de convolución

$$y(t) = \int_{0^-}^{\infty} u(\tau)h(t-\tau)\, d\tau$$

Transformada de Laplace

- La transformada de Laplace es una herramienta matemática que nos permite considerar la entrada, la salida y el sistema como entidades separadas

- Además, su interrelación será simplemente algebraica

Transformada de Laplace

La transformada de Laplace se define matemáticamente como

$$\mathscr{L}[f(t)] = F(s) = \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

Pares transformados

Table 11.1 A Short Table of Laplace Transforms

Entry	$x(t)$	$X(s)$	Entry	$x(t)$	$X(s)$
1	$\delta(t)$	1	10	$t\cos(\beta t)u(t)$	$\frac{s^2-\beta^2}{(s^2+\beta^2)^2}$
2	$u(t)$	$\frac{1}{s}$	11	$t\sin(\beta t)u(t)$	$\frac{2s\beta}{(s^2+\beta^2)^2}$
3	$r(t)=tu(t)$	$\frac{1}{s^2}$	12	$\cos^2(\beta t)u(t)$	$\frac{s^2+2\beta^2}{s(s^2+4\beta^2)}$
4	$t^2u(t)$	$\frac{2}{s^3}$	13	$\sin^2(\beta t)u(t)$	$\frac{2\beta^2}{s(s^2+4\beta^2)}$
5	$t^n u(t)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	14	$e^{-\alpha t}\cos(\beta t)u(t)$	$\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$
6	$e^{-\alpha t}u(t)$	$\frac{1}{s+\alpha}$	15	$e^{-\alpha t}\sin(\beta t)u(t)$	$\frac{\beta}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$
7	$te^{-\alpha t}u(t)$	$\frac{1}{(s+\alpha)^2}$	16	$te^{-\alpha t}\cos(\beta t)u(t)$	$\frac{(s+\alpha)^2-\beta^2}{[(s+\alpha)^2+\beta^2]^2}$
8	$t^n e^{-\alpha t}u(t)$	$\frac{n!}{(s+\alpha)^{n+1}}$	17	$te^{-\alpha t}\sin(\beta t)u(t)$	$\frac{2\beta(s+\alpha)}{[(s+\alpha)^2+\beta^2]^2}$
9	$\cos(\beta t)u(t)$	$\frac{s}{s^2+\beta^2}$	18	$\sin(\beta t)u(t)$	$\frac{\beta}{s^2+\beta^2}$

Propiedades de la TL

Table 11.2 Operational Properties of the Laplace Transform

Note: $x(t)$ is to be regarded as the *causal* signal $x(t)u(t)$.			
Entry	**Property**	$x(t)$	$X(s)$
1	Superposition	$\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$	$\alpha X_1(s) + \beta X_2(s)$
2	Times-exp	$e^{-\alpha t}x(t)$	$X(s+\alpha)$
3	Times-cos	$\cos(\alpha t)x(t)$	$0.5[X(s+j\alpha) + X(s-j\alpha)]$
4	Times-sin	$\sin(\alpha t)x(t)$	$j0.5[X(s+j\alpha) - X(s-j\alpha)]$
5	Time Scaling	$x(\alpha t),\ \alpha > 0$	$\frac{1}{\alpha}X\left(\frac{s}{\alpha}\right)$
6	Time Shift	$x(t-\alpha)u(t-\alpha),\ \alpha > 0$	$e^{-\alpha s}X(s)$
7	Times-*t*	$tx(t)$	$-\frac{dX(s)}{ds}$
8		$t^n x(t)$	$(-1)^n \frac{d^n X(s)}{ds^n}$
9	Derivative	$x'(t)$	$sX(s) - x(0-)$
10		$x''(t)$	$s^2X(s) - sx(0-) - x'(0-)$
11		$x^{(n)}(t)$	$s^nX(s) - s^{n-1}x(0-) - \cdots - x^{n-1}(0-)$
12	Integral	$\int_{0-}^{t} x(t)\,dt$	$\frac{X(s)}{s}$
13	Convolution	$x(t) \star h(t)$	$X(s)H(s)$
Laplace Transform Theorems			
15	Initial value	$x(0+) = \lim_{s\to\infty}[sX(s)]$ (if $X(s)$ is strictly proper)	
16	Final value	$x(t)\vert_{t\to\infty} = \lim_{s\to 0}[sX(s)]$ (if poles of $X(s)$ lie in LHP)	

Inversión de la TL

La transformación inversa de Laplace requiere resolver una integral de variable compleja conocida como **Integral de Bromwich**, cuya solución se basa en el teorema de los residuos de Cauchy

Una forma de evaluar indirectamente esta integral es el método de **expansión en fracciones parciales** (cada fracción está ligada a un residuo)

Transformadas inversas

Table 11.3 Inverse Laplace Transforms of Partial Fraction Expansion Terms

Entry	Partial Fraction Expansion Term	Inverse Transform
1	$\dfrac{K}{s+\alpha}$	$Ke^{-\alpha t}u(t)$
2	$\dfrac{K}{(s+\alpha)^n}$	$\dfrac{K}{(n-1)!}t^{n-1}e^{-\alpha t}u(t)$
3	$\dfrac{Cs+D}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$	$e^{-\alpha t}\left[C\cos(\beta t)+\dfrac{D-\alpha C}{\beta}\sin(\beta t)\right]u(t)$
4	$\dfrac{A+jB}{s+\alpha+j\beta}+\dfrac{A-jB}{s+\alpha-j\beta}$	$2e^{-\alpha t}[A\cos(\beta t)+B\sin(\beta t)]u(t)$
5	$\dfrac{A+jB}{(s+\alpha+j\beta)^n}+\dfrac{A-jB}{(s+\alpha-j\beta)^n}$	$\dfrac{2}{(n-1)!}t^{n-1}e^{-\alpha t}[A\cos(\beta t)+B\sin(\beta t)]u(t)$
6	$\dfrac{M\angle\theta}{s+\alpha+j\beta}+\dfrac{M\angle-\theta}{s+\alpha-j\beta}$	$2Me^{-\alpha t}\cos(\beta t-\theta)u(t)$
7	$\dfrac{M\angle\theta}{(s+\alpha+j\beta)^n}+\dfrac{M\angle-\theta}{(s+\alpha-j\beta)^n}$	$\dfrac{2M}{(n-1)!}t^{n-1}e^{-\alpha t}\cos(\beta t-\theta)u(t)$

Ejemplo revisitado

Hallar la respuesta completa del SLIT regido por la EDO

$$\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2y(t) = x(t)$$

cuando $x(t) = 4e^{-3t}$ y está sujeto a las condiciones iniciales

$$y(0) = 3 \quad \dot{y}(0) = 4$$

¿Qué sucede si $x(t) = 4e^{-3t}\cos(t)$?

Función de transferencia $H(s)$

Es la relación entre la transformada de Laplace de la salida del sistema y su entrada suponiendo todas las condiciones iniciales cero

Es la transformada de Laplace de la respuesta al impulso unitario $h(t)$

Ejemplos

Hallar las respuestas al impulso de los siguientes dos sistemas

$$H_1(s) = \frac{2s^3 + 8s^2 + 4s + 8}{s(s+1)\left(s^2 + 4s + 8\right)}$$

$$H_2(s) = \frac{s^2 + 4s + 2}{(s+1)(s+2)}$$

Teorema del valor final

Una propiedad especialmente útil de la transformada de Laplace en el control conocida como Teorema del valor final nos permite calcular el valor constante de estado estacionario de una función de tiempo dada su transformada de Laplace

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = \lim_{s \to 0} sY(s)$$

Ejemplo

Halle el valor de estado estacionario de la salida del sistema con función de transferencia $H(s)$ ante una entrada escalón de amplitud 0.5

$$H(s) = \frac{7s + 35}{s^2 + 2s + 3}$$

Ganancia DC de un sistema

La ganancia DC es la relación entre la salida de un sistema y su entrada, cuando esta es de valor constante y después de que todos los transitorios hayan decaído

$$G_{\mathrm{DC}} = \lim_{s \to 0} H(s)$$

Ejemplo

Un sistema con función de transferencia $H(s)$ tiene una ganancia DC de 2.5. Halle el valor de A

$$H(s) = \frac{4(s+A)}{s^2+7s+5}$$

Polos y ceros del sistema

Una función de transferencia racional se puede describir como una relación de dos polinomios en s,

$$H(s) = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \cdots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n}$$

o como una relación en forma factorizada cero polo ganancia

$$H(s) = K \frac{\prod_{i=1}^{n} (s - z_i)}{\prod_{i=1}^{n} (s - p_i)}$$

Polos y ceros del sistema

- Polos: raíces del denominador, constituyen los modos característicos del sistema
- Ceros: raíces del numerador, modifican la combinación lineal de los modos característicos

Diagrama de polos y ceros

Es una representación gráfica sobre el plano s de los polos y ceros de $H(s)$ en la cual:

- La ubicación de un cero se simboliza mediante un círculo (○)
- La ubicación de un polo se simboliza mediante una cruz (×)

$$H(s) = \frac{2s+1}{s^2+3s+2}$$