BIOMECATRÓNICA

Respuesta temporal

Teoremas de valores inicial y final

Para analizar el comportamiento dinámico de un sistema, usaremos repetidamente los teoremas de valor inicial y valor final

$$x(0^+) = \lim_{s \to \infty} sX(s)$$

$$x(\infty) = \lim_{s \to 0} sX(s)$$

Relación ZP con respuesta temporal

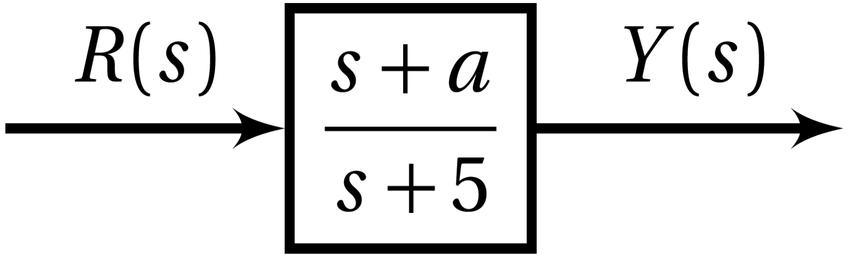
La respuesta de un sistema es la suma de dos respuestas: la respuesta forzada y la respuesta natural

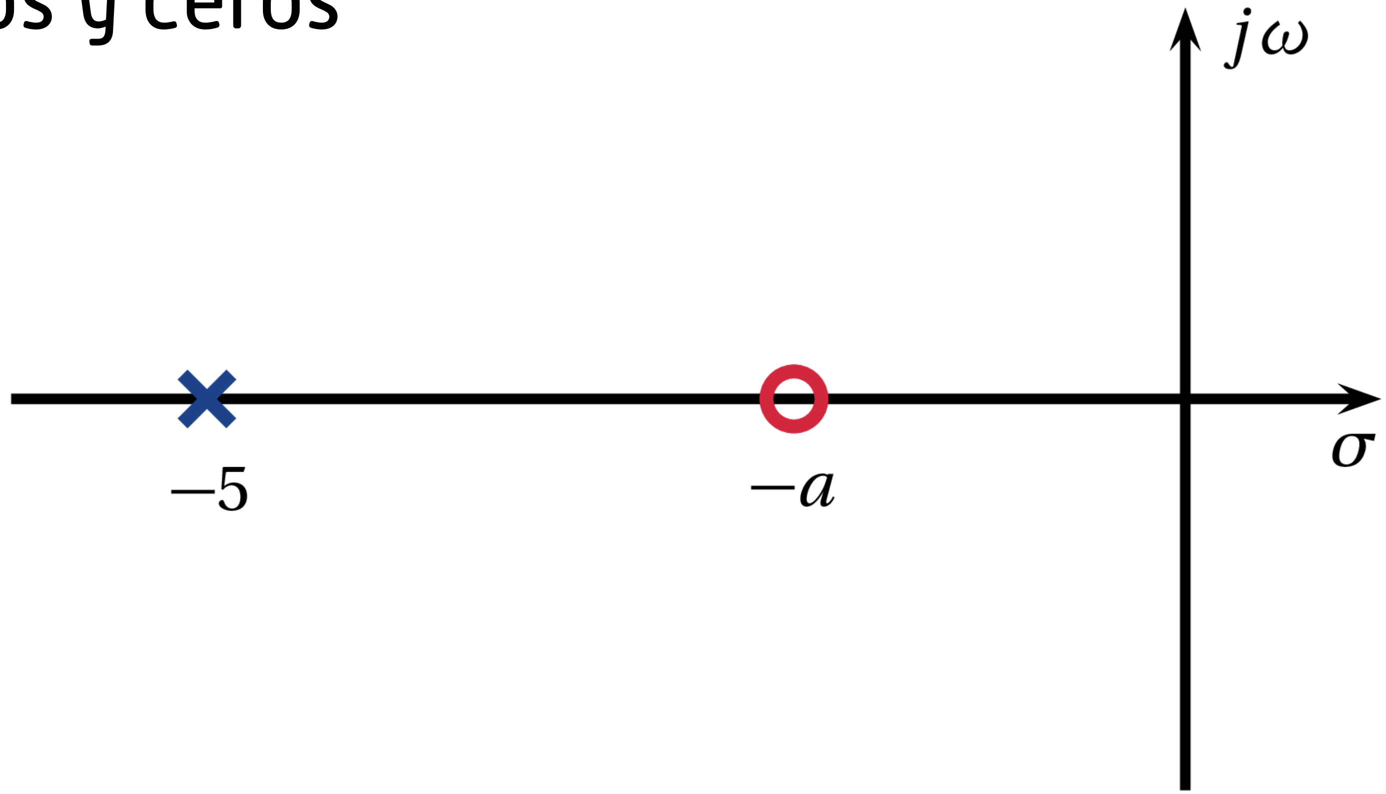
En la mayoría de los casos, solo nos interesa conocer de forma cualitativa cómo responderá el sistema

El uso de polos y ceros y su relación con la respuesta temporal de un sistema es una técnica de análisis cualitativo

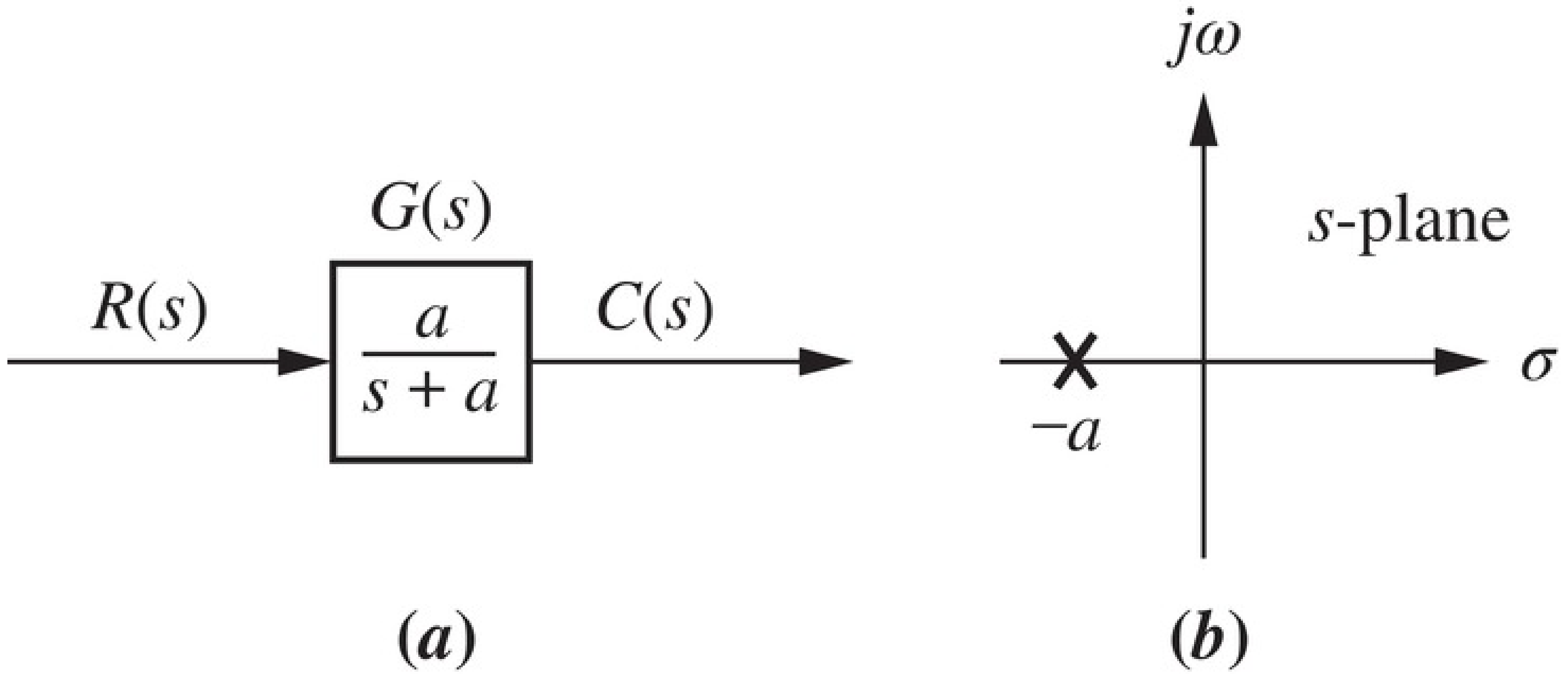
Ilustración

Consideremos el sistema de primer orden mostrado y su respectivo mapa de polos y ceros

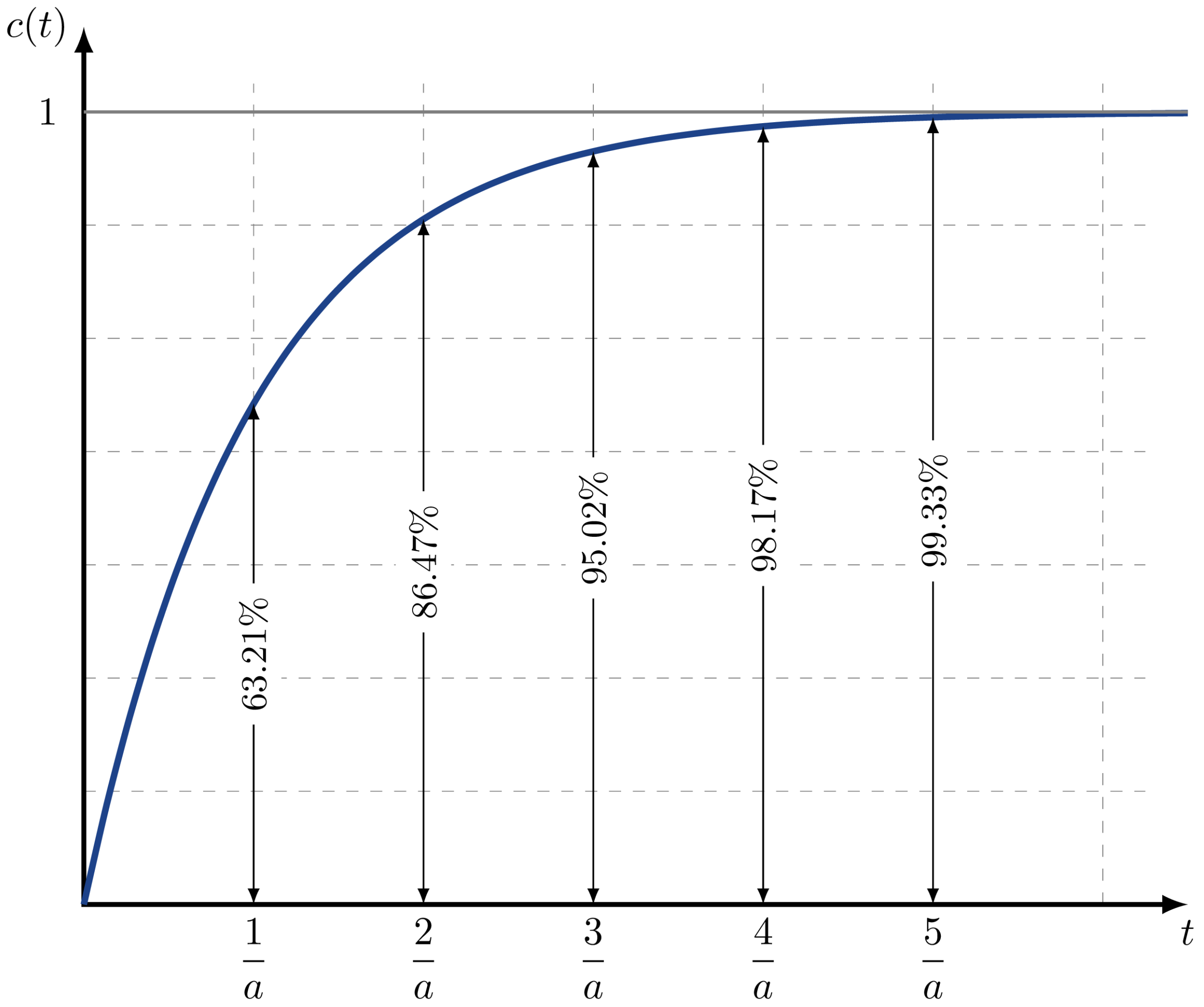




Sistema de primer orden sin ceros



Respuesta al escalón unitario

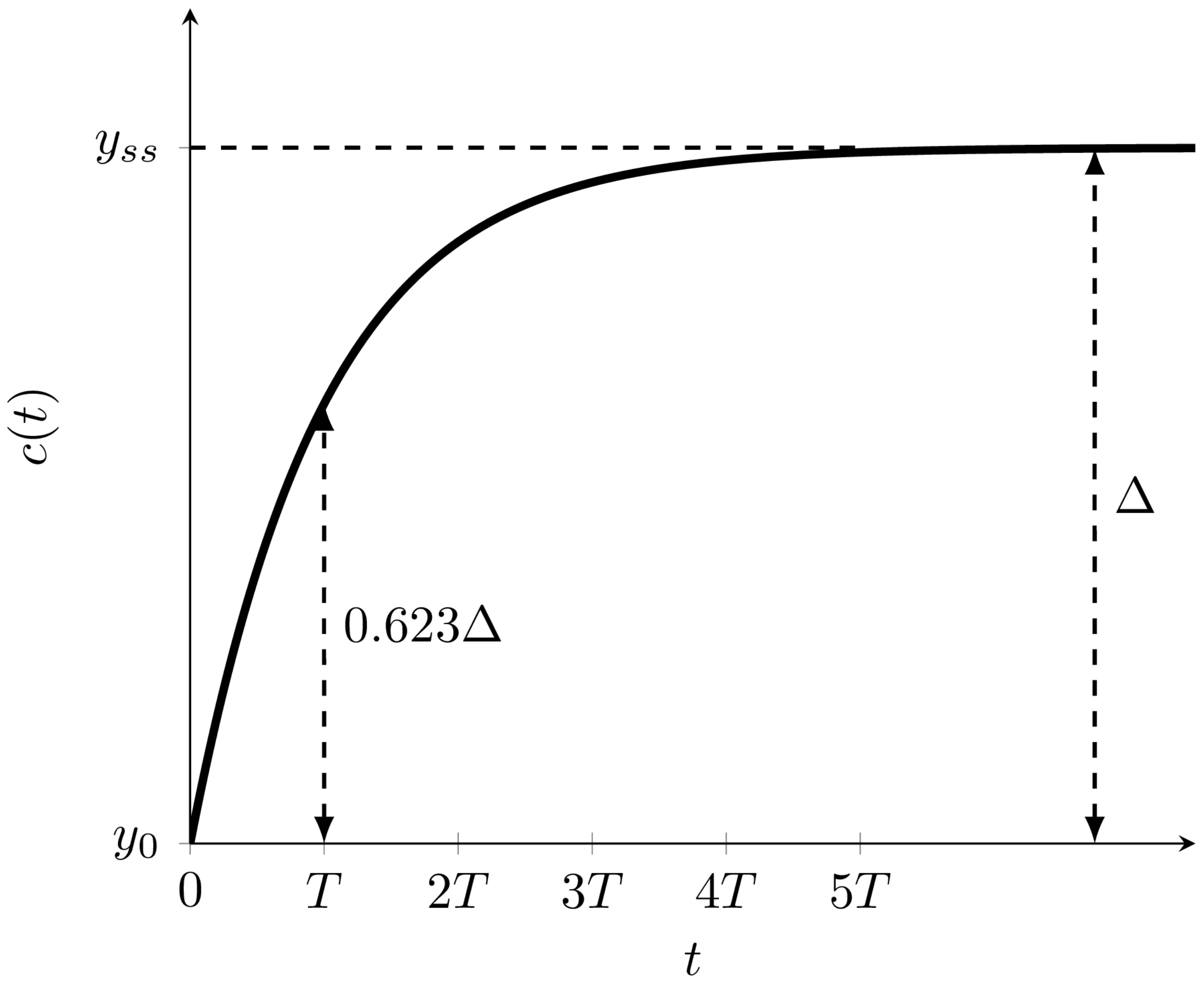


$$c(t) = 1 - e^{-at}$$

$$T_r = \frac{2.2}{a}$$

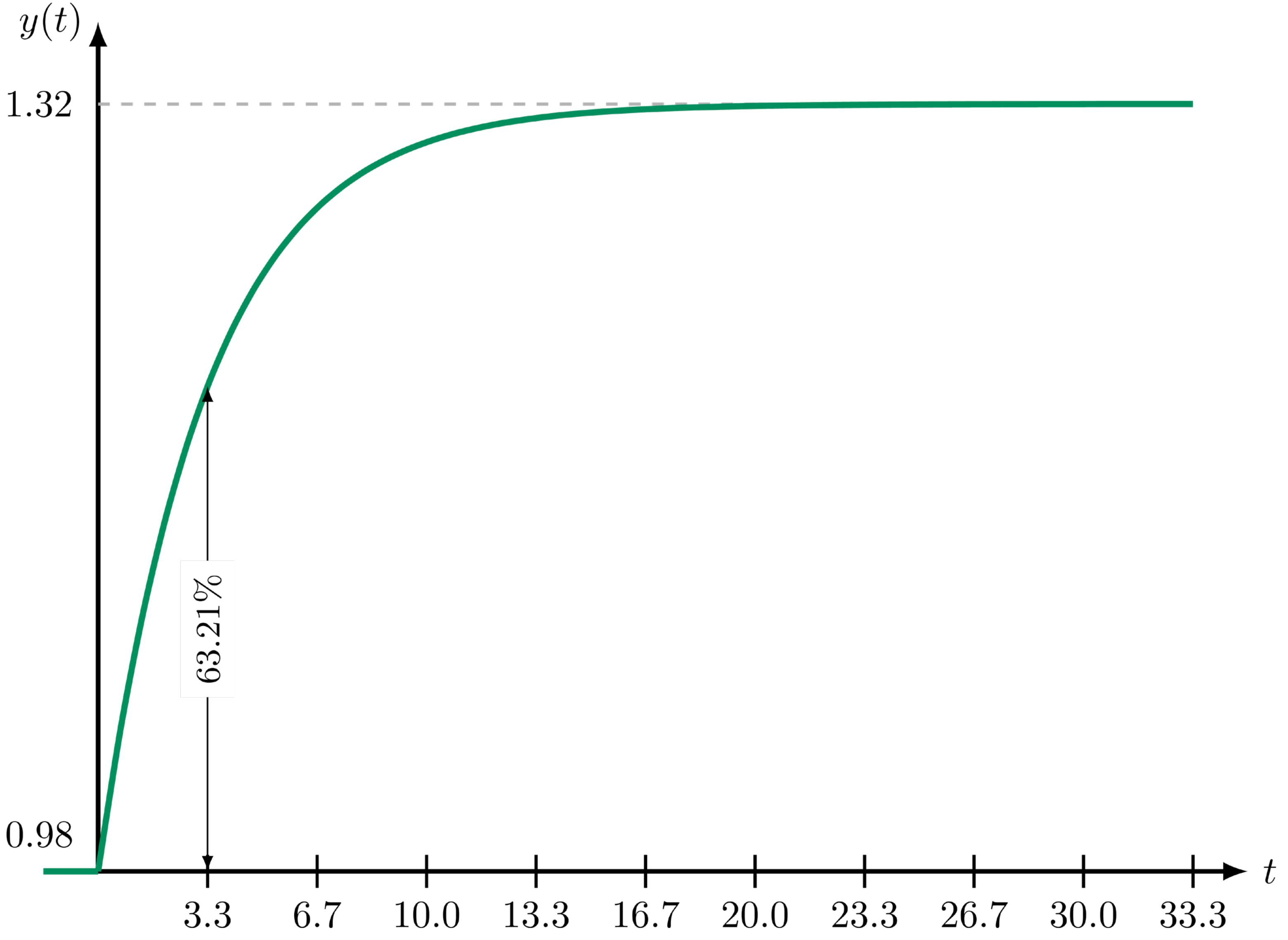
$$T_s = \frac{4}{a}$$

Respuesta al escalón unitario

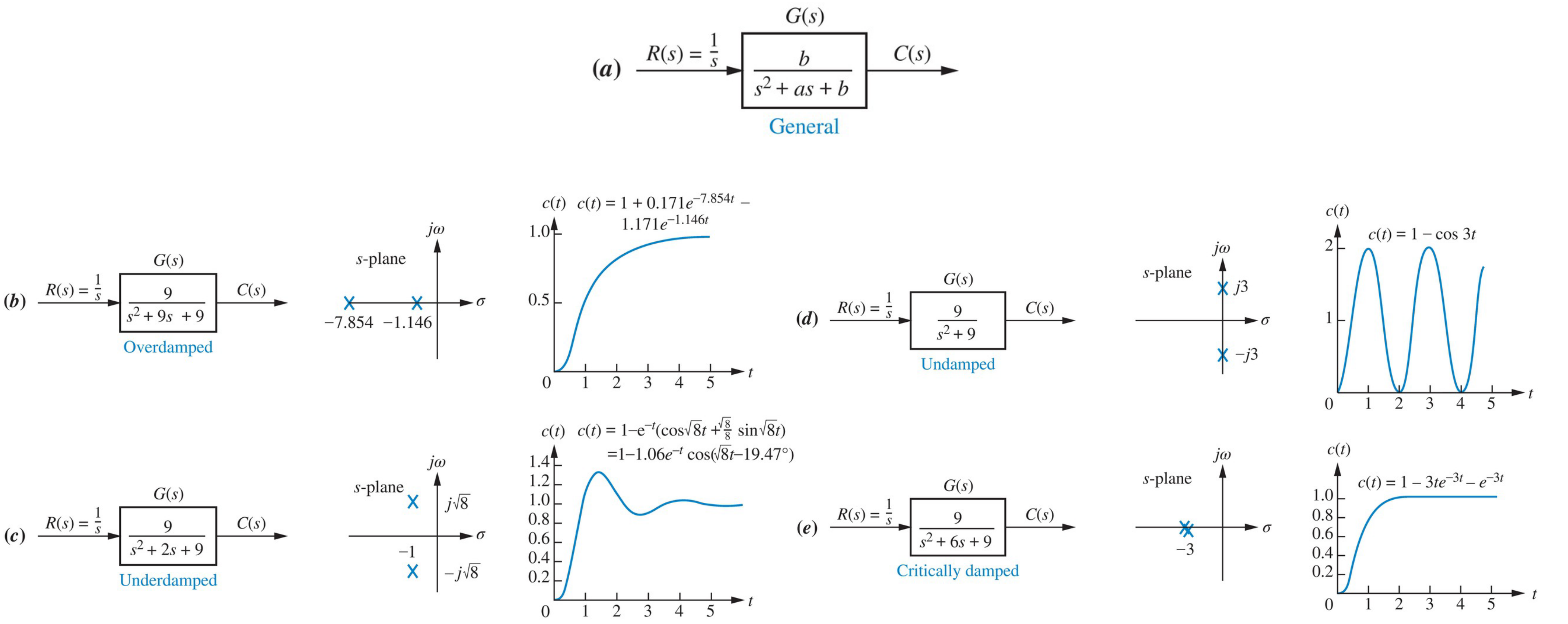


Ejemplo 1

Halle la función de transferencia del sistema cuya respuesta al escalón unitario se muestra en la figura



Sistemas de segundo orden



Parámetros del sistema 2° orden

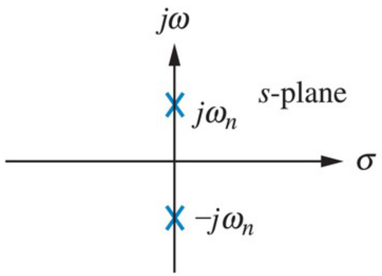
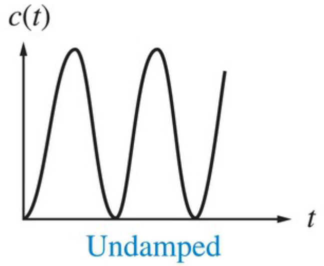
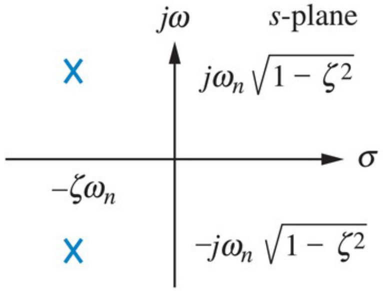
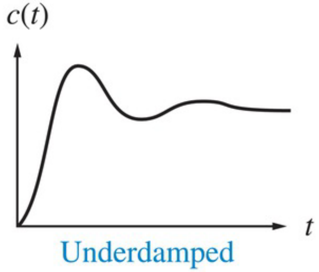
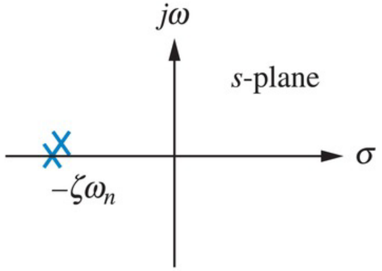
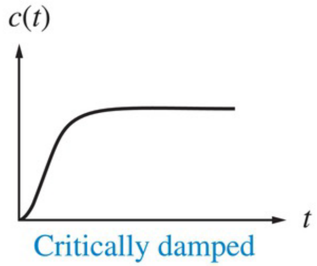
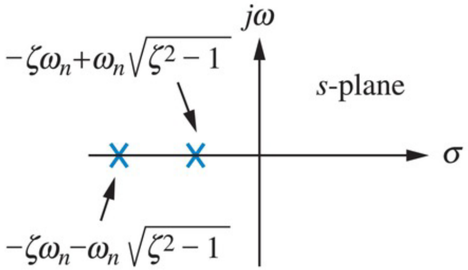
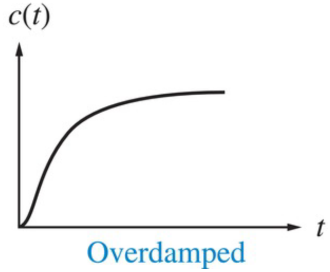
- La frecuencia natural (ω_n) de un sistema de segundo orden es la frecuencia de oscilación del sistema sin amortiguamiento
- El coeficiente de amortiguamiento (ζ) es la razón entre el coeficiente de amortiguamiento real y el coeficiente de amortiguamiento crítico, o entre el decaimiento exponencial y la frecuencia natural

Función de transferencia 2° orden

Con base en lo anterior, se define la función de transferencia general de un sistema de segundo orden como

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

y sus polos se ubican en $s = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$

ζ	Poles	Step response
0		
$0 < \zeta < 1$		
$\zeta = 1$		
$\zeta > 1$		

Ejemplo 2

1. Encuentre las ubicaciones de los polos y los ceros, trácelas en el plano s
2. Escriba una expresión para la forma general de la respuesta al escalón
3. ¿Cuál es el valor de estado estacionario?

$$G_1(s) = \frac{2}{s+2}$$

$$G_2(s) = \frac{5}{(s+3)(s+6)}$$

$$G_3(s) = \frac{20}{s^2+6s+144}$$

$$G_4(s) = \frac{s+2}{s^2+9}$$

Sistemas subamortiguados

El sistema subamortiguado de segundo orden, un modelo común para problemas físicos, muestra un comportamiento único que debe detallarse

Es necesaria una descripción detallada de la respuesta subamortiguada tanto para el análisis como para el diseño

Respuesta al escalón

La expresión de $c(t)$ se puede hallar de forma genérica a partir de la expansión en fracciones parciales

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} = \frac{1}{s} + \frac{(s+\omega_n) + \dfrac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}{(s+\zeta\omega_n)^2 + \omega_n^2(1-\zeta^2)}$$

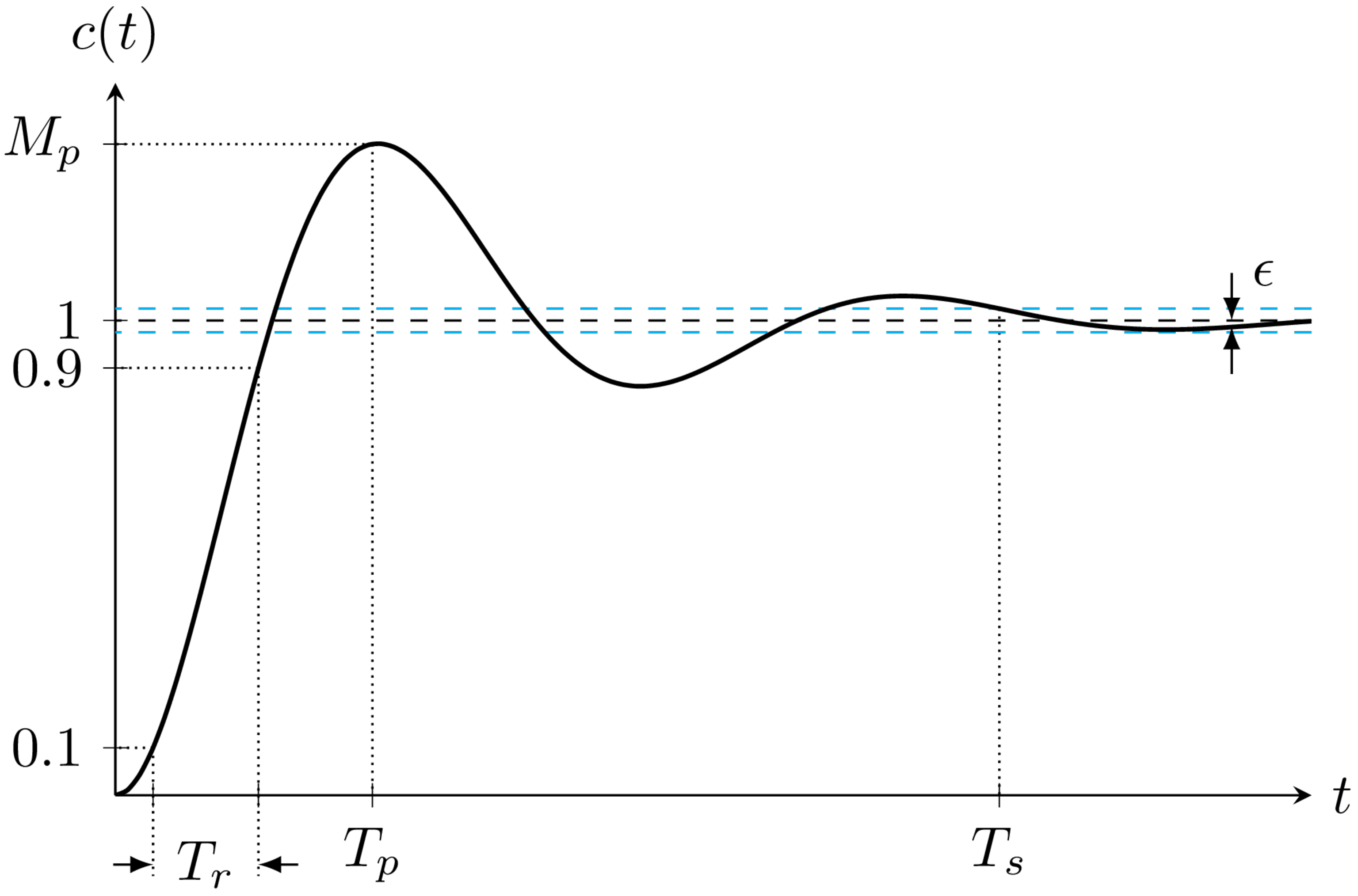
Respuesta al escalón

$$c(t) = 1 - e^{-\zeta\omega_n t}\left(\cos\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t\right)$$

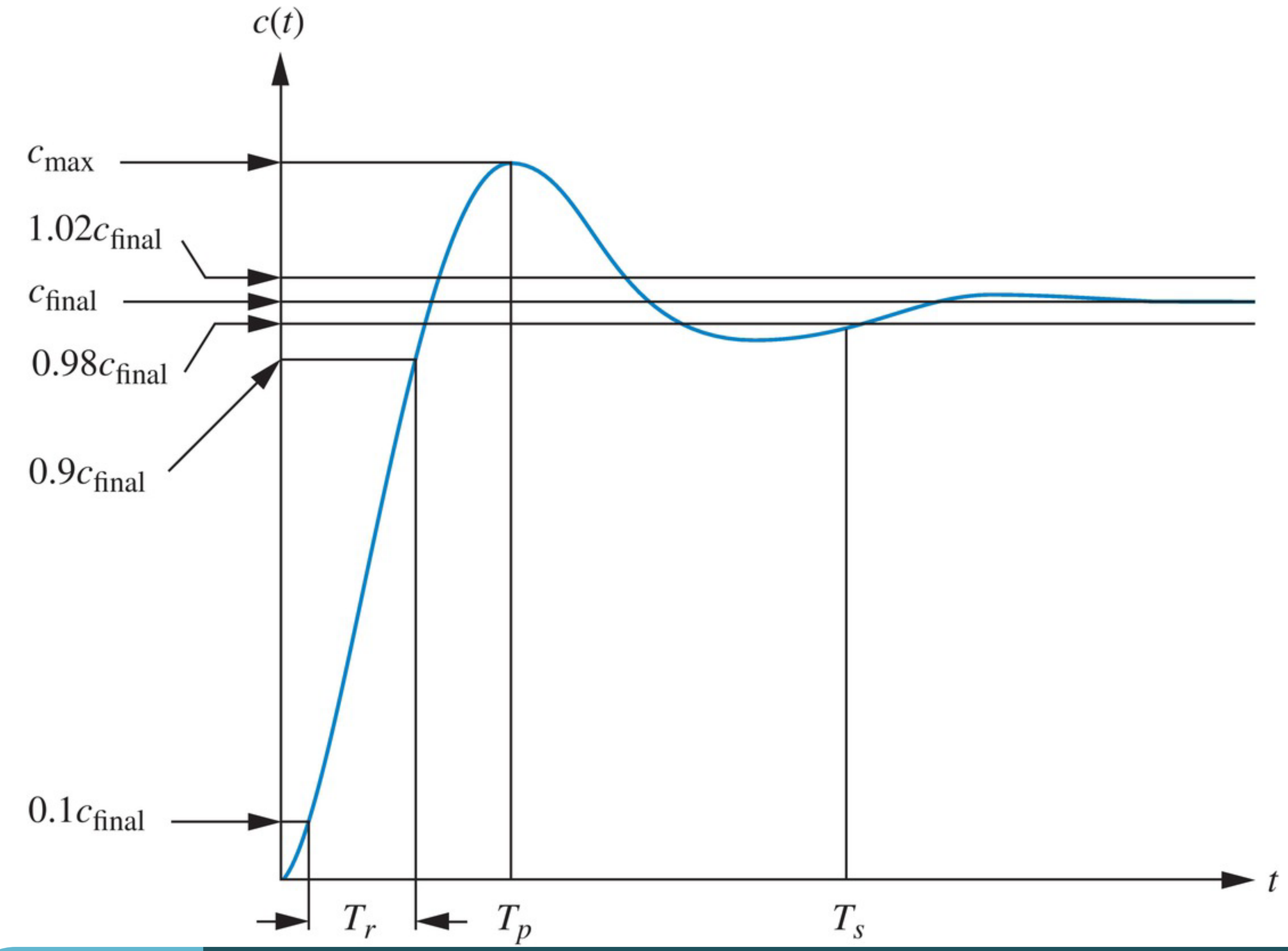
$$= 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\cos\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t - \phi\right)$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)$$

Respuesta al escalón



Respuesta al escalón



Medidas de desempeño

Para describir el comportamiento dinámico de un sistema de segundo orden subamortiguado se usan las cuatro medidas de desempeño mostradas en la gráfica anterior

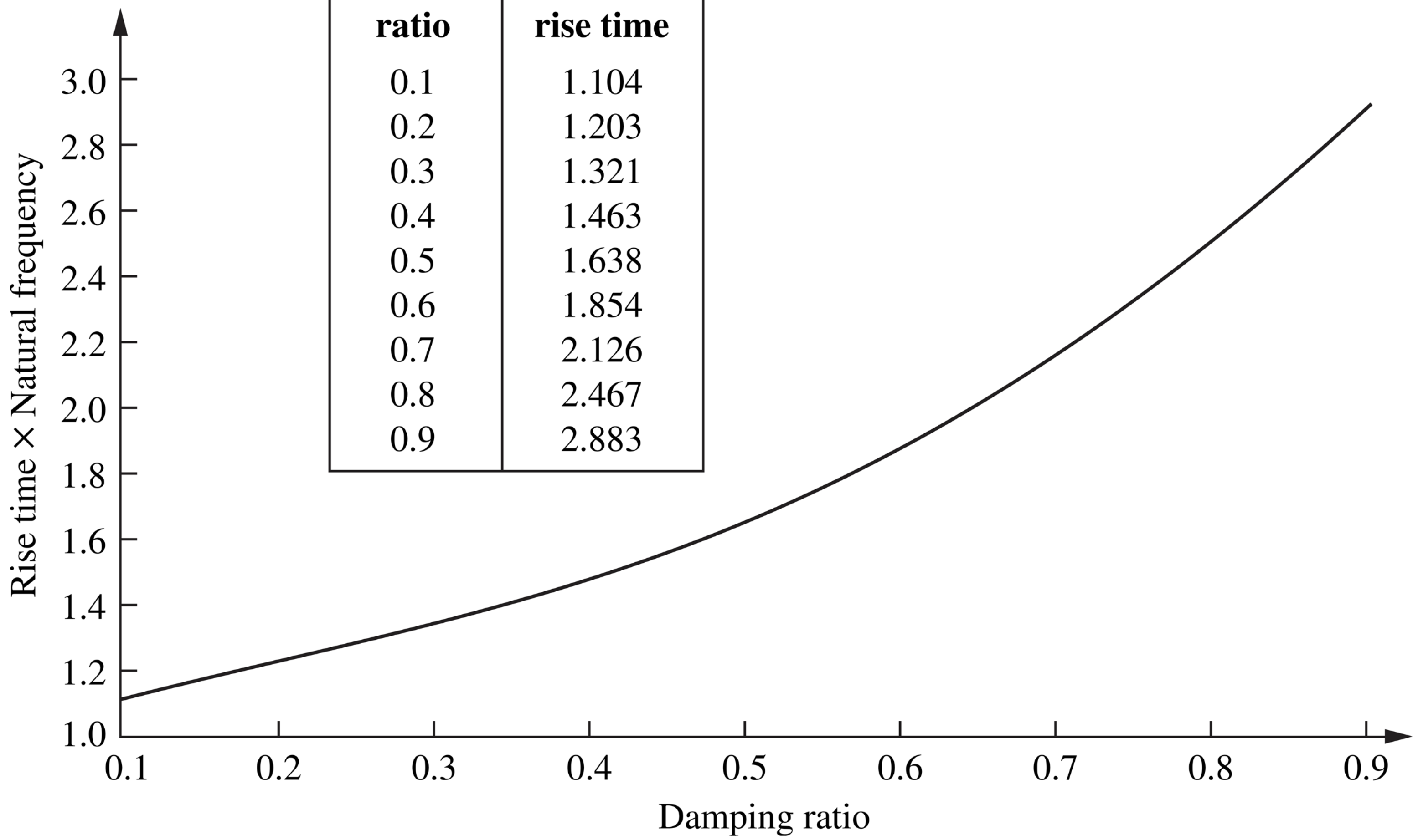
$$T_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$\%OS = 100\ \exp\left(-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)$$

$$T_s = -\frac{\ln\left(\epsilon\sqrt{1-\zeta^2}\right)}{\zeta\omega_n} \approx \frac{4}{\zeta\omega_n}$$

$$\zeta = \frac{-\ln(\%OS/100)}{\sqrt{\pi^2+\ln^2(\%OS)}}$$

Tiempo de subida T_r



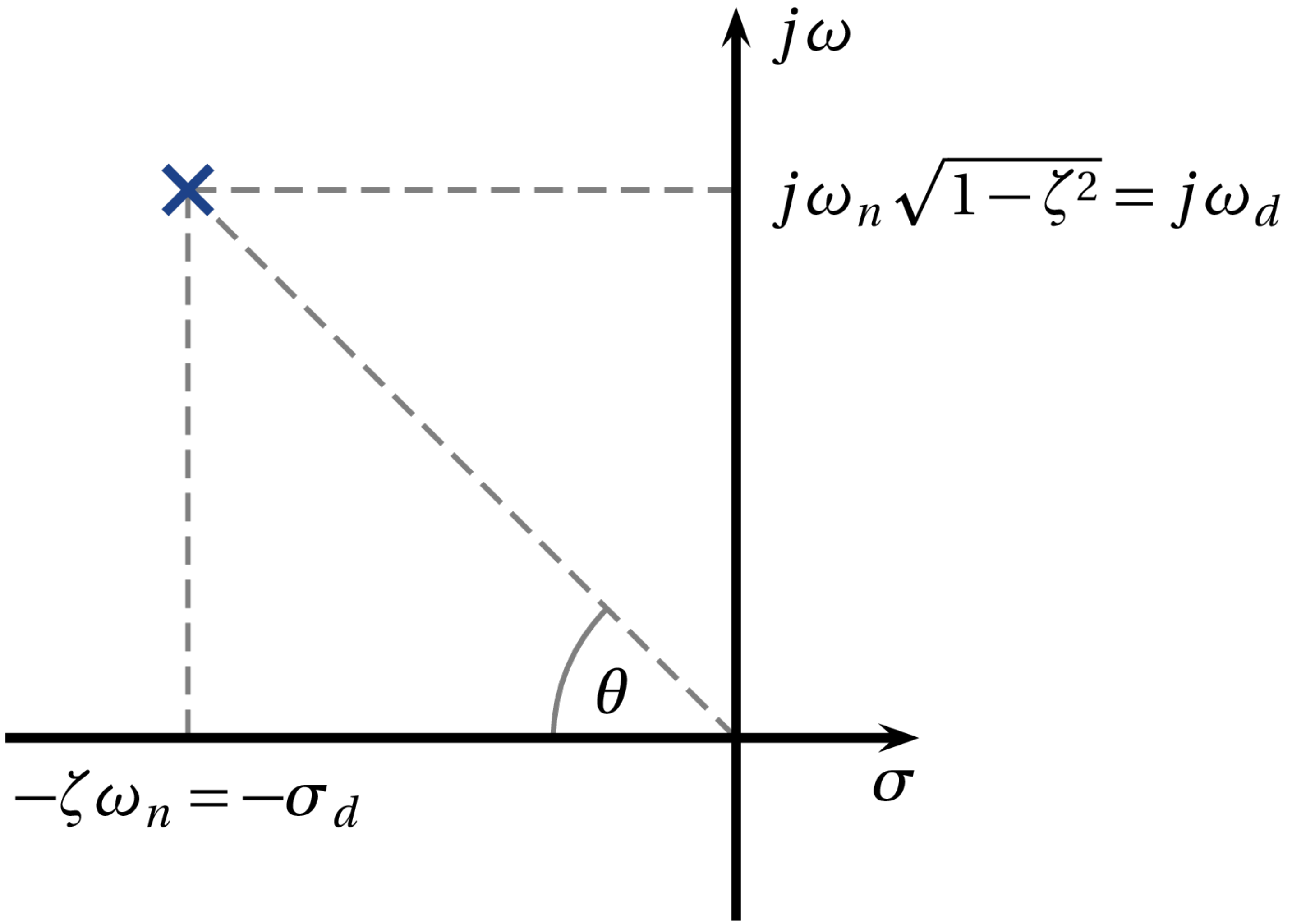
Damping ratio	Normalized rise time
0.1	1.104
0.2	1.203
0.3	1.321
0.4	1.463
0.5	1.638
0.6	1.854
0.7	2.126
0.8	2.467
0.9	2.883

Ejemplo 3

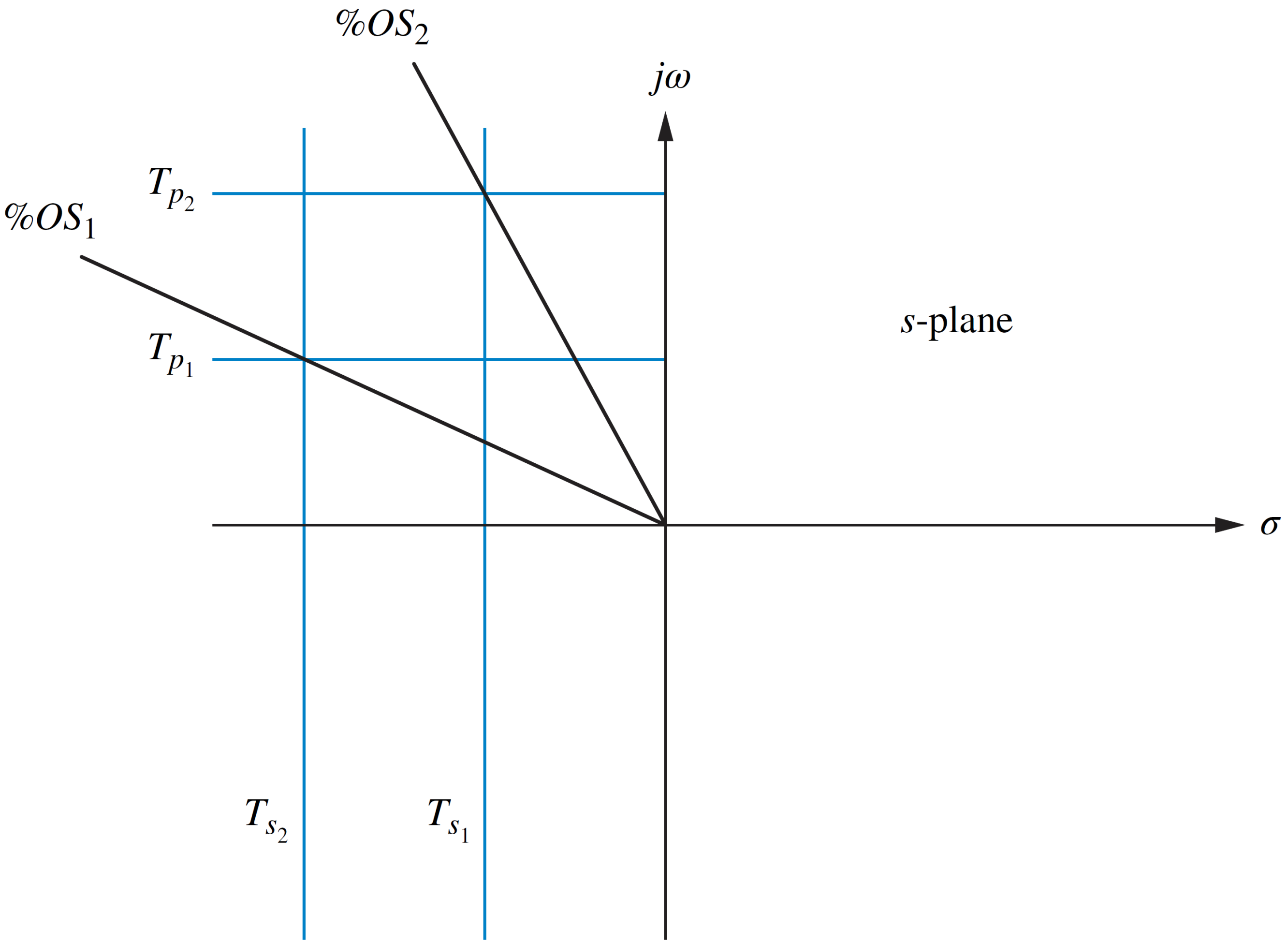
Calcule las medidas de desempeño para el sistema con función de transferencia

$$G(s) = \frac{100}{s^2 + 15s + 100}$$

Relación medidas – ubicación de polos



Relación medidas – ubicación de polos

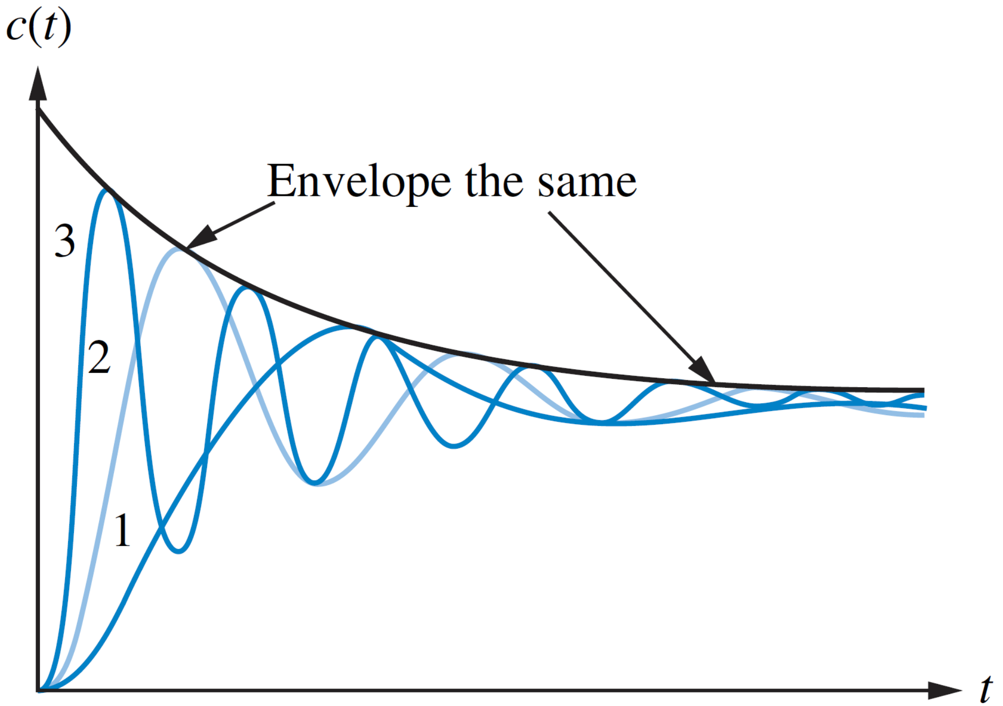


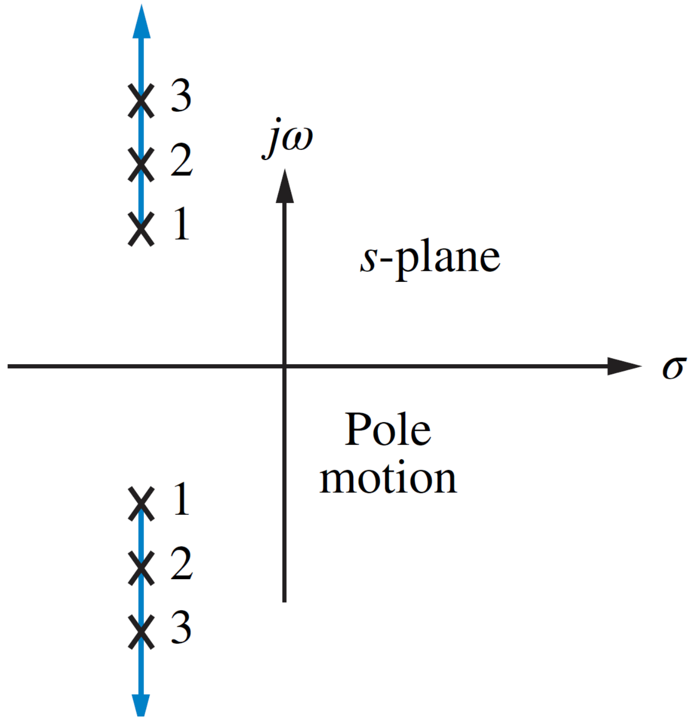
$$T_{s_2} < T_{s_1}$$

$$T_{p_2} < T_{p_1}$$

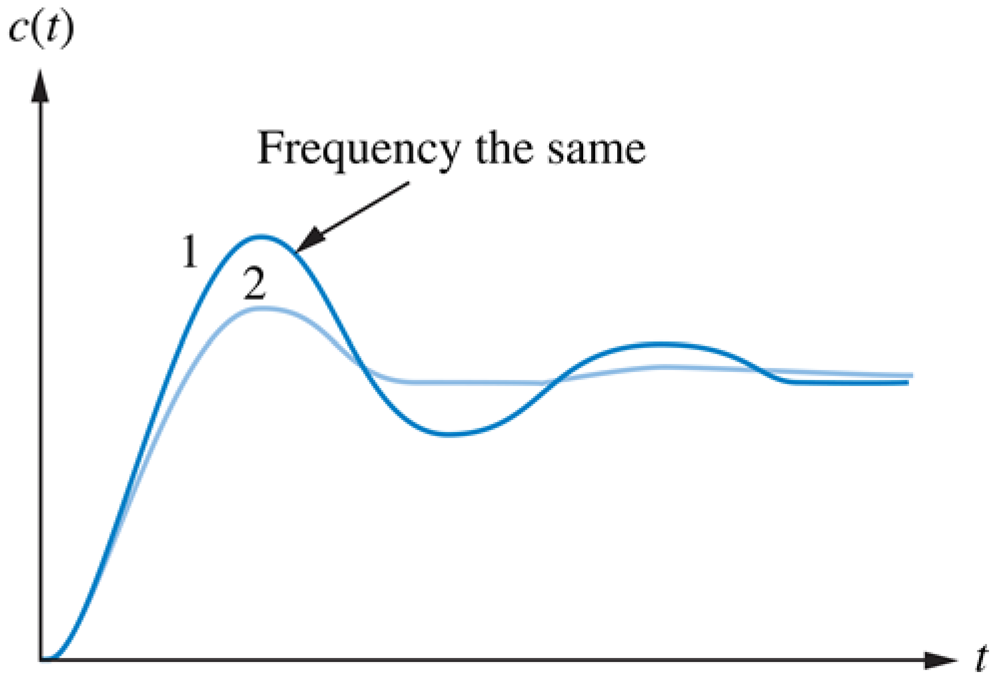
$$\%OS_1 < \%OS_2$$

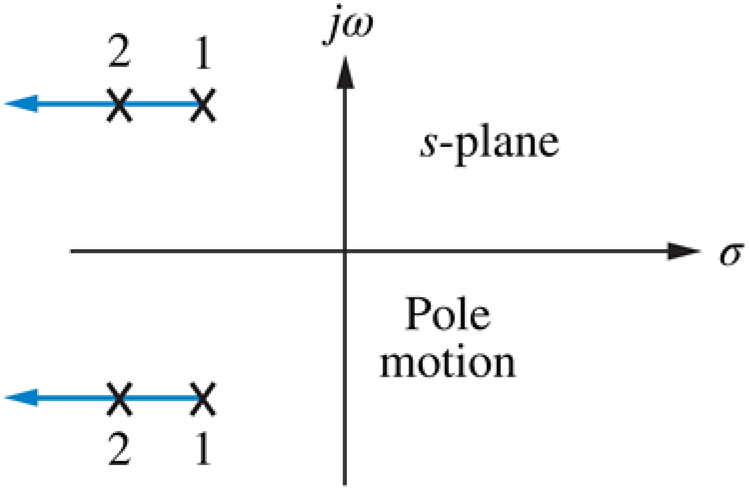
Tiempo de estabilización



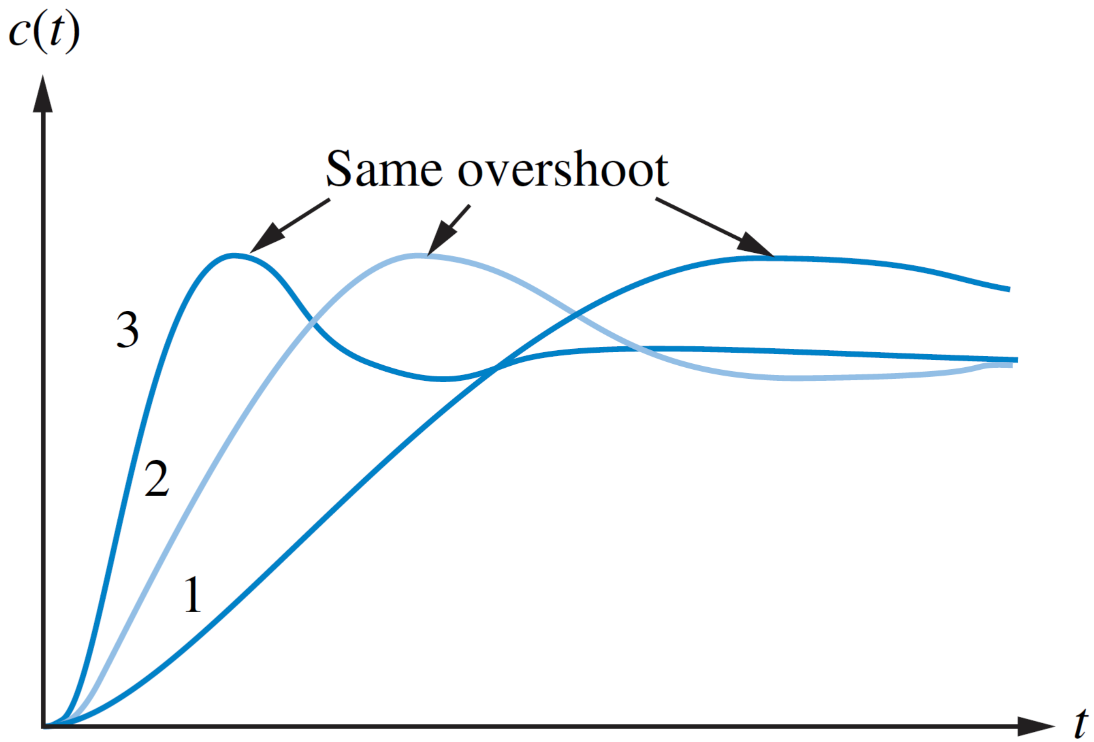


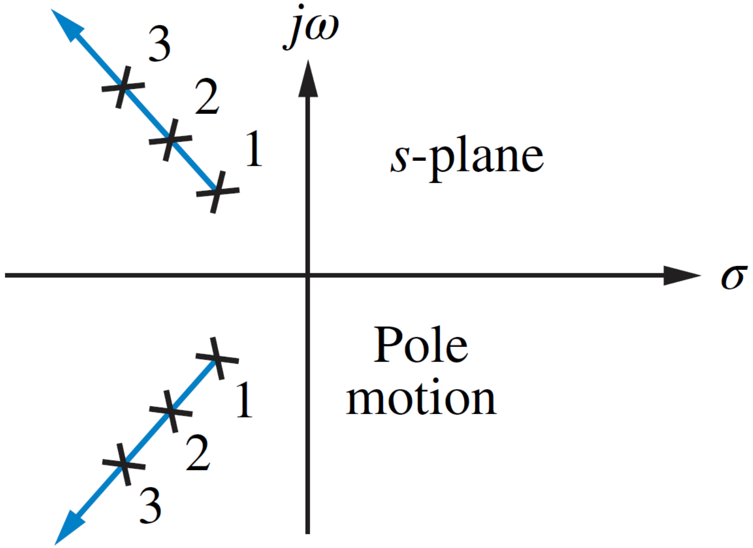
Tiempo de pico





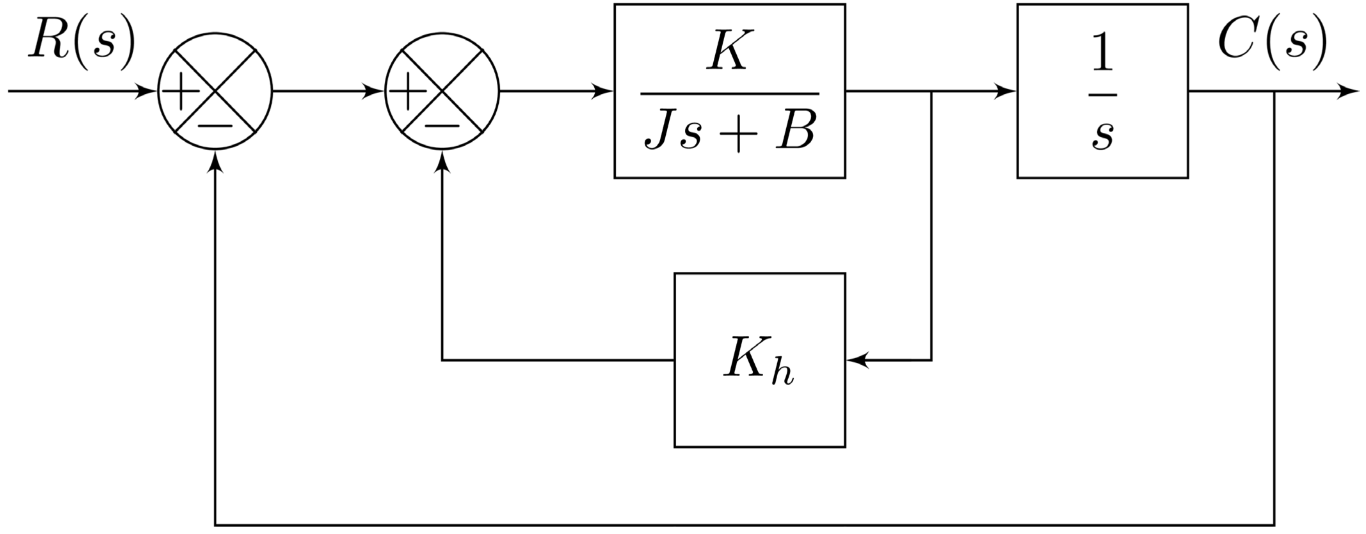
Porcentaje de sobreimpulso





Ejemplo 4

Para el sistema de la figura, determine los valores de la ganancia K y la constante de realimentación de velocidad K_h para que el máximo sobreimpulso en la respuesta escalón unitario sea 20 % y el tiempo pico sea 1 s. Suponga que $J = 1$ kgm^2 y que $B = 1$ Nmrad^{-1}s^{-1}



Sistemas con raíces adicionales

Si un sistema tiene ceros o más de dos polos, no podemos usar las fórmulas para calcular las especificaciones de desempeño de la respuesta dinámica

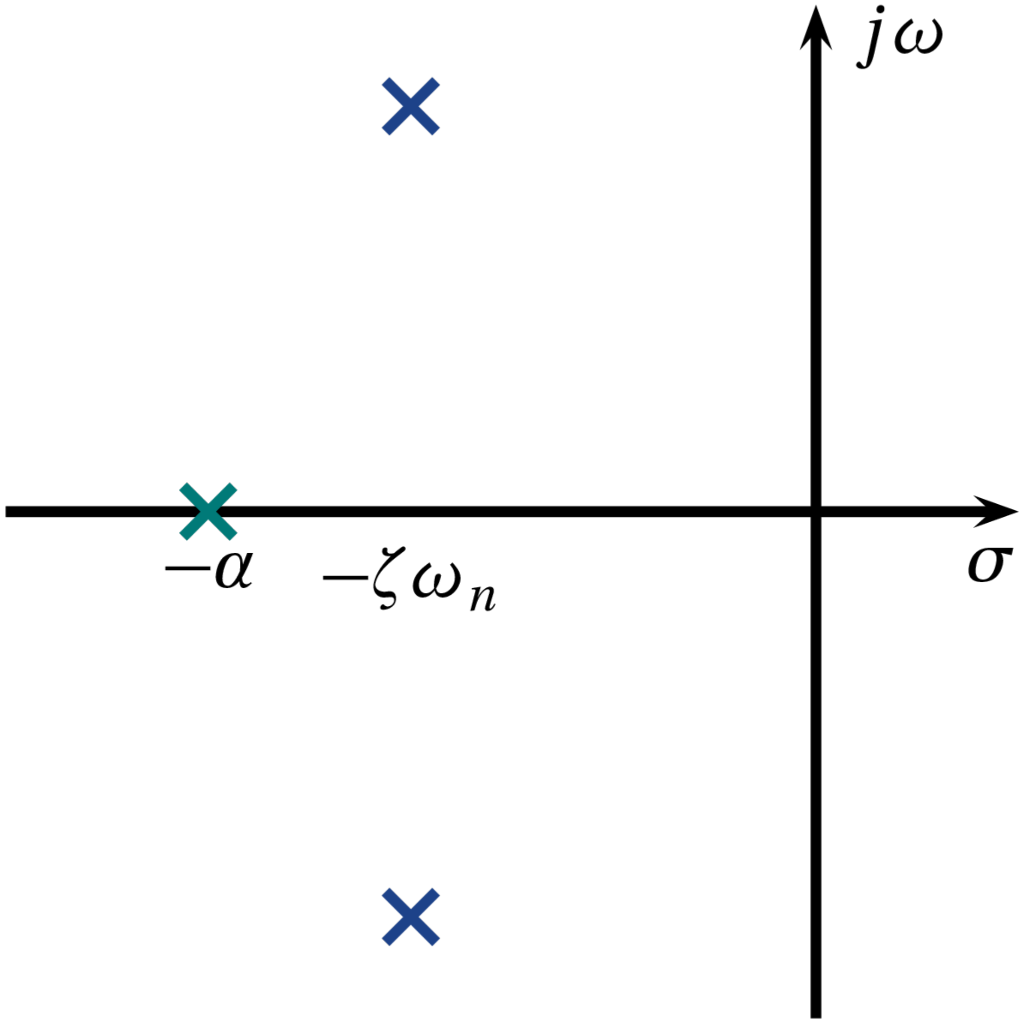
Sin embargo, bajo ciertas condiciones, un sistema con más de dos polos o con ceros puede aproximarse a un sistema de segundo orden que tiene sólo dos polos complejos dominantes

Sistemas con un polo adicional

Veamos ahora las condiciones que tendrían que existir para aproximar el comportamiento de un sistema con tres polos al de un sistema de segundo orden subamortiguado

$$G(s) = \frac{\alpha\omega_n^2}{(s+\alpha)(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)}$$

Mapa de polos



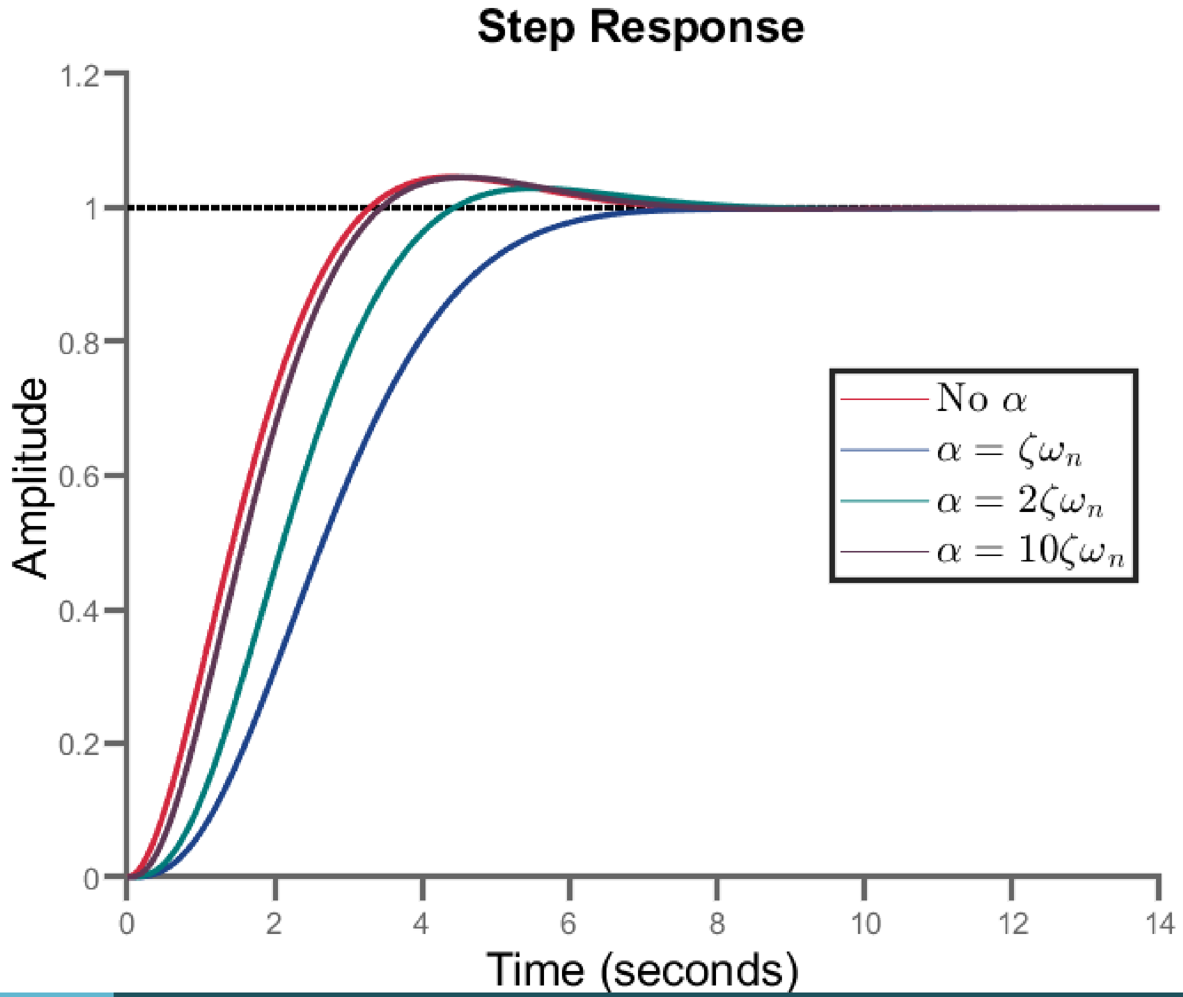
Sistemas con un polo adicional

La respuesta al escalón de este sistema tendrá la forma

$$C(s) = \frac{A}{s} + \frac{B\left(s+\zeta\omega_n\right) + C\omega_d}{\left(s+\zeta\omega_n\right)^2 + \omega_d^2} + \frac{D}{s+\alpha}$$

$$c(t) = Au(t) + e^{-\zeta\omega_n t}\left(B\cos\omega_d t + C\sin\omega_d t\right) + De^{-\alpha t}$$

Respuesta al escalón



Ejemplo 5

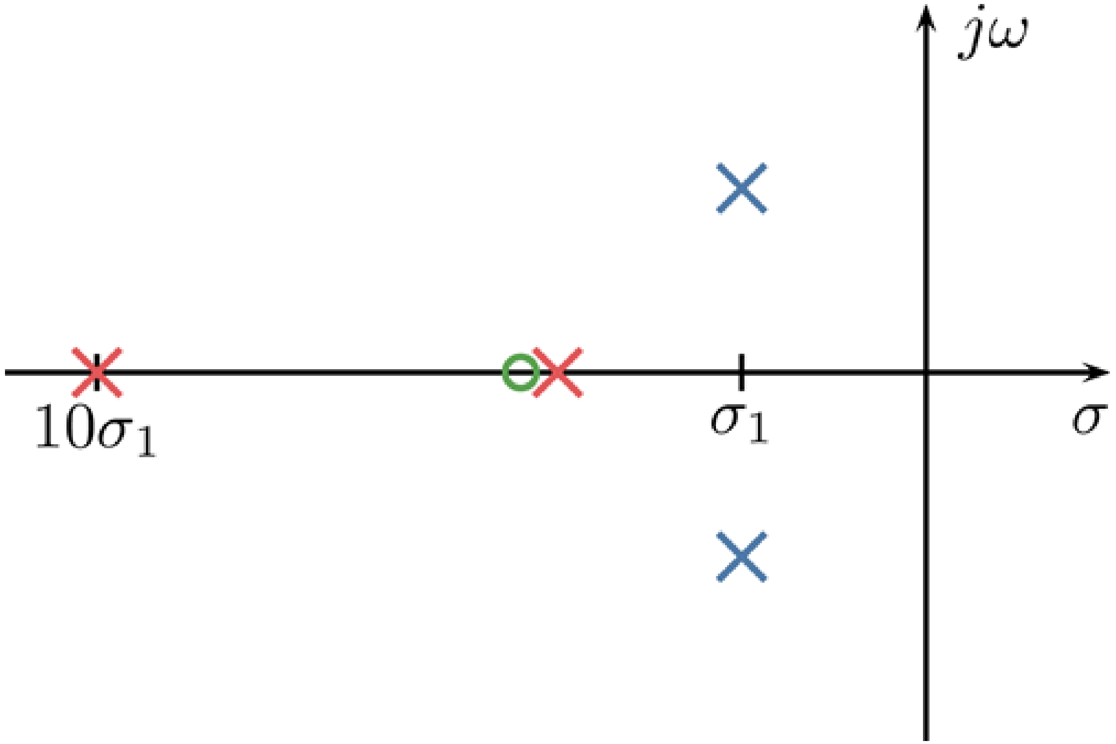
Determine la validez de la aproximación de segundo orden para los siguientes sistemas

$$G_1(s) = \frac{700}{(s+15)\left(s^2+4s+100\right)}$$

$$G_2(s) = \frac{360}{(s+4)\left(s^2+2s+90\right)}$$

Polos dominantes

Los polos de un sistema que están más próximos al eje imaginario son los que determinan, generalmente, la respuesta transitoria



Reducción de orden

Mediante la ubicación de polos en posiciones no dominantes se puede reducir el orden de un sistema

Reducción de orden

Sistema original

$$G\left(s\right)=\frac{\alpha\cdot\omega_n^2}{\left(s+\alpha\right)\left(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2\right)}$$

Sistema reducido

$$G(s)\approx\begin{cases}\dfrac{\alpha}{s+\alpha}, & \alpha\ll\zeta\omega_n\\[2ex] \dfrac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}, & \zeta\omega_n\ll\alpha\end{cases}$$

Ejemplo 6

Para los siguientes sistemas, halle el sistema reducido equivalente y compare las respuestas al escalón de ambos

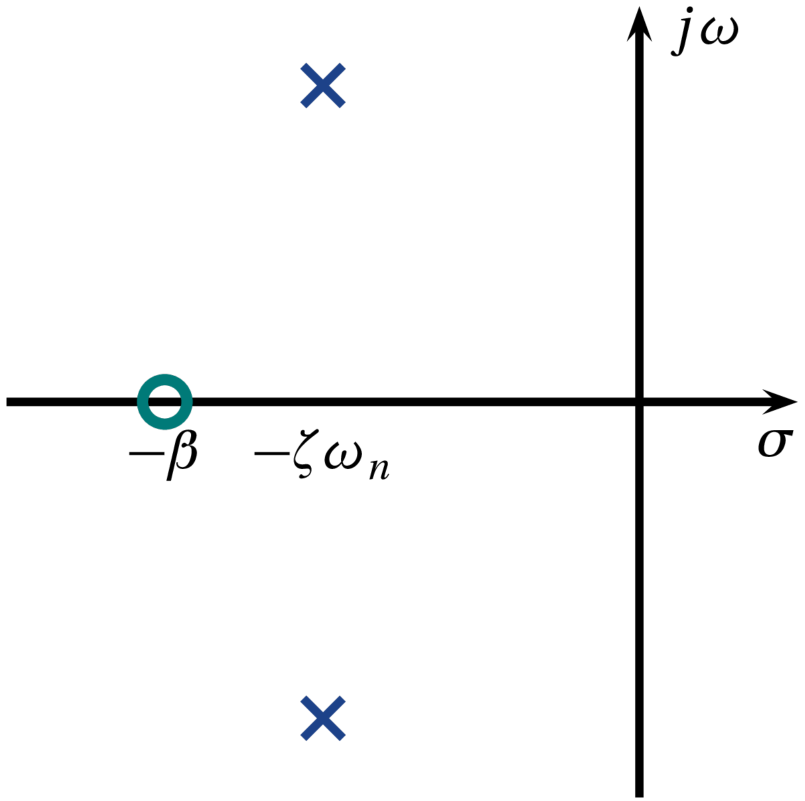
$$G_1(s) = \frac{10}{s^2 + 13s + 12} \qquad G_2(s) = \frac{8}{s^2 + 14s + 24}$$

$$G_3(s) = \frac{5}{s^3 + 7.3s^2 + 27.1s + 7.5} \qquad G_4(s) = \frac{25}{s^3 + 42s^2 + 270s + 875}$$

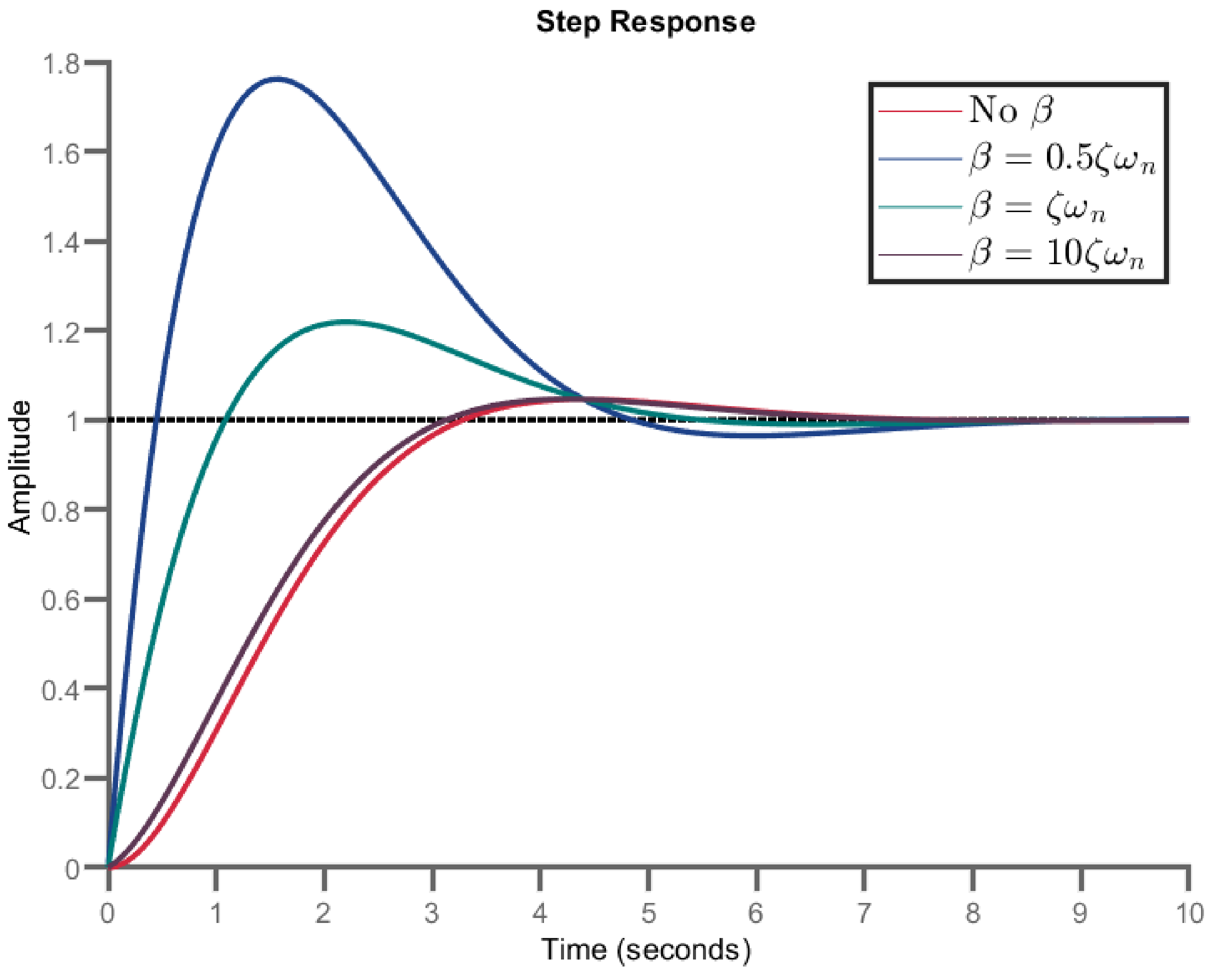
Sistema con cero

Veamos ahora el efecto que tendría la existencia de un cero sobre el comportamiento de un sistema de segundo orden subamortiguado

$$G(s) = \frac{\omega_n^2\left(\dfrac{s}{\beta}+1\right)}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$



Respuesta a escalón



Modelos de sistemas

Para diseñar controladores para un sistema dinámico, es necesario tener un modelo que describa adecuadamente la dinámica del sistema. La información disponible para el diseñador para este propósito suele ser de tres tipos

- Modelo físico

- Modelo de caja negra

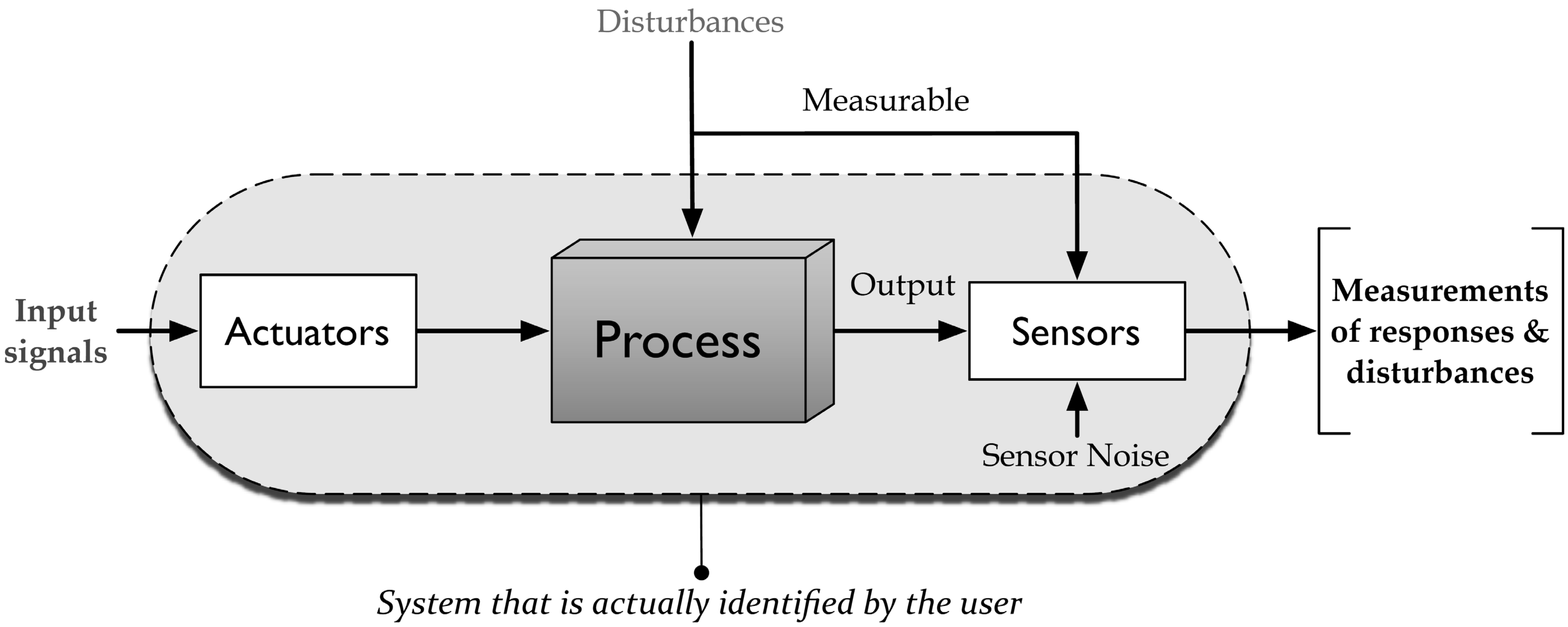
- Modelo de caja gris

Identificación de sistemas

Es el ejercicio de desarrollar una relación matemática (modelo) entre las causas (entradas) y los efectos (salidas) de un sistema (proceso) basado en datos observados o medidos

Dicho de otra manera, la identificación establece un mapa matemático entre los espacios de entrada y salida según lo determinado por los datos

Identificación de sistemas



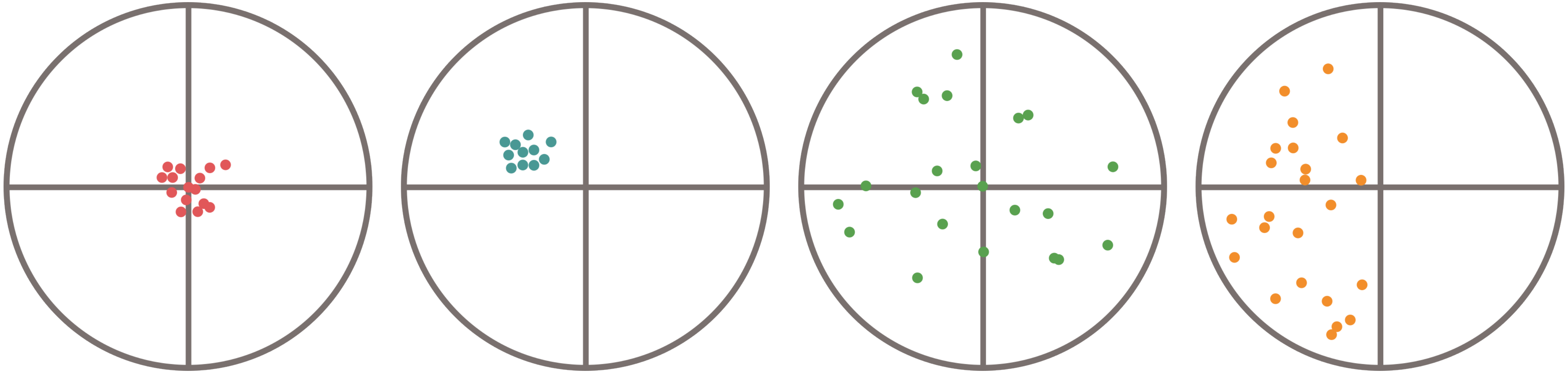
Principios de la identificación

Generalmente no es posible construir un modelo preciso y exacto a partir de datos de muestras finitas

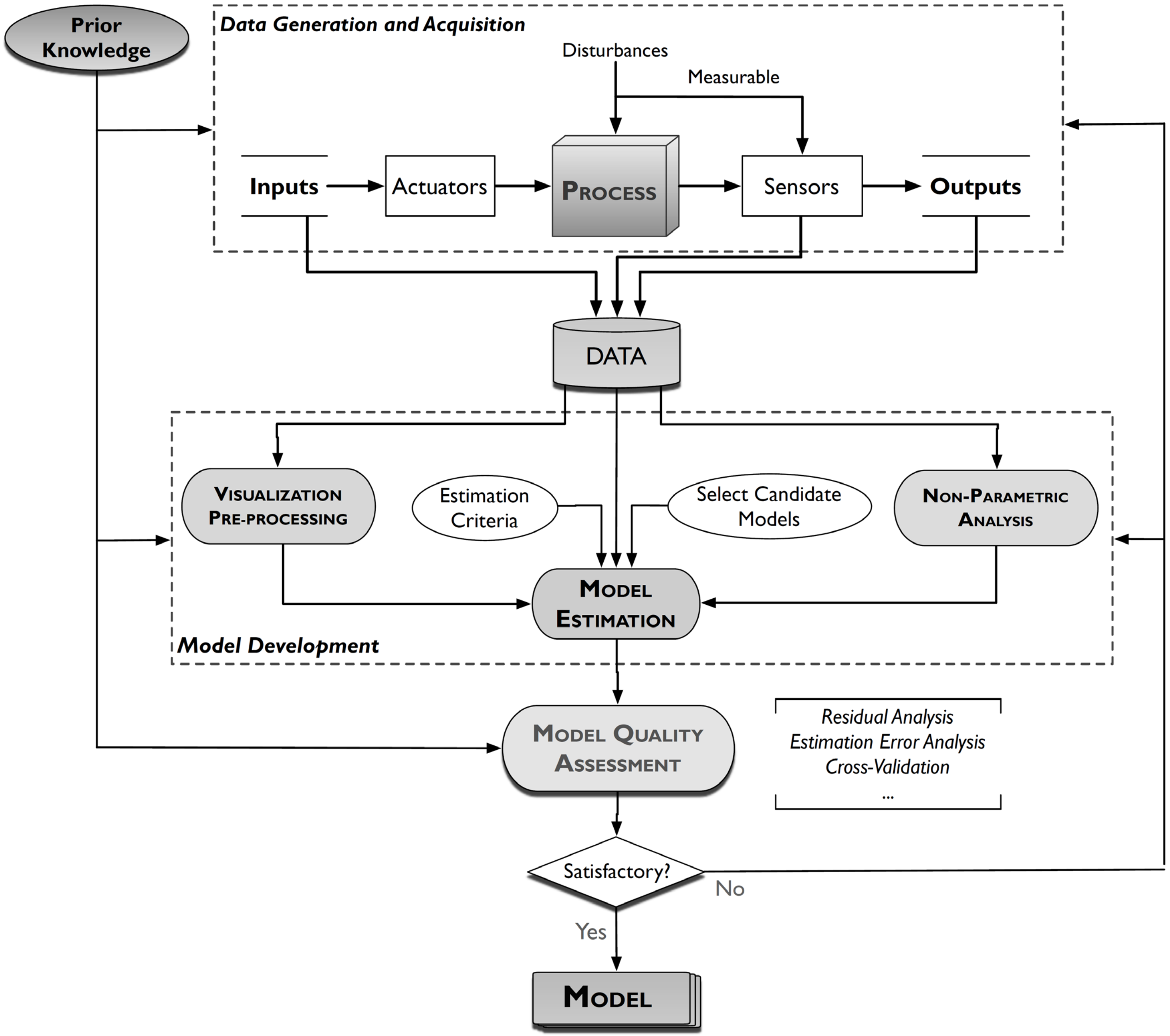
La exactitud y precisión del modelo identificado, entre otros factores, depende críticamente de

- el tipo de entrada (excitación y forma, siendo esta última válida para sistemas no lineales)
- la relación señal-a-ruido lograda en el experimento

Presición vs Exactitud



PROCESO DE IDENTIFICACIÓN



Modelo paramétrico

Un modelo paramétrico es un tipo de modelo en el que se especifica una estructura matemática con un conjunto de parámetros desconocidos que deben ser estimados a partir de los datos

Estos parámetros son variables que controlan el comportamiento del modelo y determinan su forma exacta

Modelos paramétricos

Los modelos paramétricos más usados son los de primer (FO) y segundo orden (SO), con (FOPDT, SOPDT) o sin tiempo muerto

$$G_{FO}(s) = \frac{Ke^{-\theta s}}{\tau s + 1} \qquad G_{SO}(s) = \frac{Ke^{-\theta s}}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

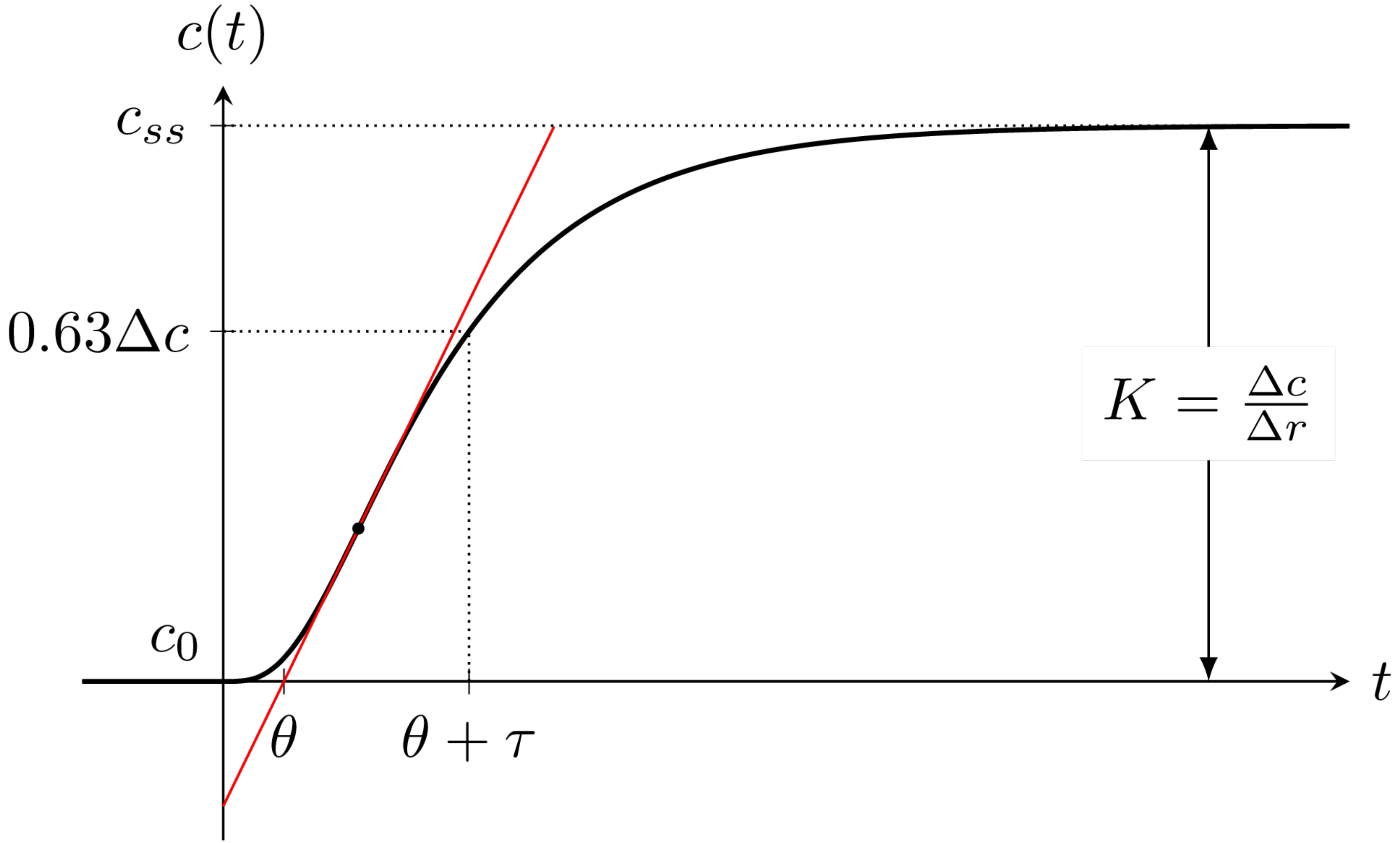
Modelos a partir de la curva de reacción

Para obtener un modelo a partir de datos transientes, asumimos que hay disponible una respuesta al escalón

Si el transitorio es una combinación simple de transitorios elementales, entonces se puede estimar un modelo razonable de orden bajo utilizando cálculos manuales

Sistema FOPDT

$$G_p(s) = \frac{Ke^{-\theta s}}{\tau s + 1}$$



Sistema SOPDT subamortiguado

Para la aproximación a un sistema de segundo orden subamortiguado se establece la función de transferencia

$$G_{\mathrm{p}}(s) = \frac{K(1 + as)e^{-\theta s}}{\tau^2 s^2 + 2\tau\zeta s + 1}$$

Sistema SOPDT adimensional

El proceso de identificación de los sistemas SOPDT se lleva a cabo en un dominio adimensional y normalizado ($K = 1$)

$$\bar{G}_{\bar{\mathrm{p}}}(s) = \frac{(1+\bar{a}\bar{s})e^{-\bar{\theta}\bar{s}}}{\bar{s}^2+2\zeta\bar{s}+1}$$

$$\bar{s} = \tau s$$

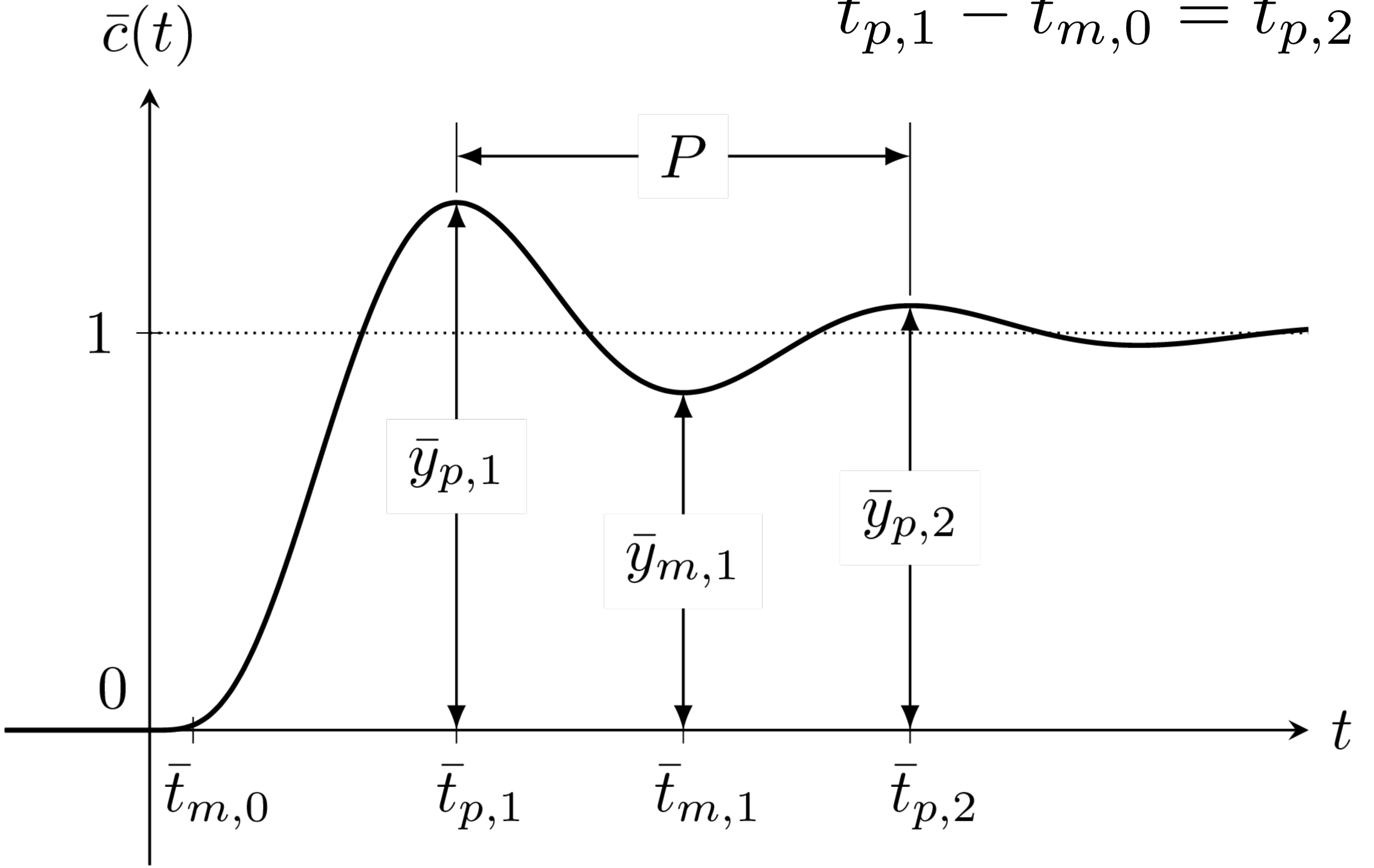
$$\bar{a} = \frac{a}{\tau}$$

$$\bar{\theta} = \frac{\theta}{\tau}$$

$$\bar{C}(s) = \frac{C(s)}{K}$$

Modelo SOPDT

$$t_{p,1} - t_{m,0} = t_{p,2} - t_{m,1} \Rightarrow \bar{a} = 0$$



Paso 1

$$\tau = \frac{P}{\sqrt{4\pi^2 + P^2 x^2}}$$

$$x = \frac{1}{t_{p,1} - t_{p,2}} \ln\left[\frac{\bar{y}_{p,2} - 1}{\bar{y}_{p,1} - 1}\right]$$

Paso 2

$$\zeta = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{\ln^2\left(\bar{y}_{p,1}-1\right)}{\pi^2+\ln^2\left(\bar{y}_{p,1}-1\right)}} & \bar{a}=0 \\ \dfrac{Px}{\sqrt{4\pi^2+P^2x^2}} & \bar{a}\neq 0 \end{cases}$$

Paso 3

Si $a = 0$

$$\theta = t_{p,1} + \frac{\tau}{\zeta} \ln\left(\bar{y}_{p,1} - 1\right)$$

Si $a \neq 0$

$$\bar{a} = \zeta + \sqrt{\zeta^2 + \left[1 - \left(\frac{\bar{y}_{p,1} - 1}{e^{-\zeta \bar{t}_{p,1}}}\right)^2\right]}$$

$$\theta = t_{p,1} - \frac{P}{2\pi}\left[\pi - \tan^{-1}\frac{\bar{a}\sqrt{1-\zeta^2}}{1 - \bar{a}\zeta}\right]$$

Modelo SOPDT sobreamortiguado

Ver ejemplo en apéndice **W3.7** del libro de Franklin