UNIVERSIDAD EIA

BIOMECATRÓNICA

Modelado en el dominio del tiempo

Variables de estado

Son un conjunto de variables dinámicas que definen completamente todas las características de un sistema

$$\xrightarrow{u(t)} \boxed{x(t)} \xrightarrow{y(t)}$$

Nomenclatura:

$x(t)$: Estados, $u(t)$: Entradas, $y(t)$: Salidas

Ecuaciones de estado

Las ecuaciones de estado son una colección de n ecuaciones diferenciales que son las derivadas de primer orden de cada variable de estado

$$\dot{x}_1 = f_1\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, u_1, u_2, \ldots, u_m\right)$$
$$\dot{x}_2 = f_2\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, u_1, u_2, \ldots, u_m\right)$$
$$\vdots$$
$$\dot{x}_n = f_n\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, u_1, u_2, \ldots, u_m\right)$$

Ejemplo 1

Determine las ecuaciones de estado para el sistema modelado por las siguientes EDO, donde z y w son las variables dinámicas y v es la entrada.

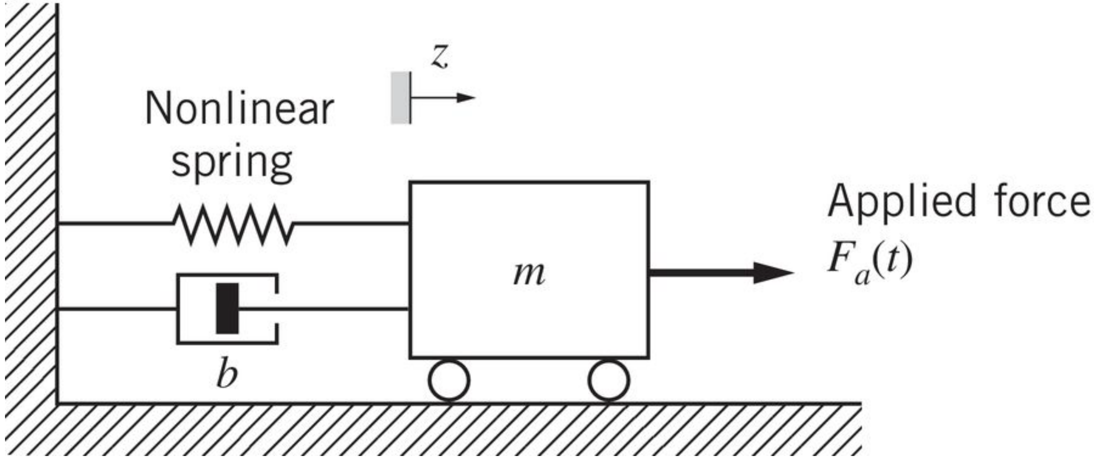
$$2\ddot{z} + 0.8z - 0.4w + 0.2\dot{z}w = 0$$

$$4\dot{w} + 3w + 0.1w^3 - 6z = 8v$$

Ejemplo 2

Determine las ecuaciones de estado, si la rigidez se modela mediante un resorte no lineal, que exhibe la siguiente relación fuerza-desplazamiento no lineal

$$f_k(z) = k_1 z + k_3 z^3$$



Representación en espacio de estados

Si las ecuaciones de modelado matemático que representan un sistema son lineales, entonces las ecuaciones de estado resultantes serán EDO lineales de primer orden

En este caso, podemos escribir las ecuaciones de variables de estado en un formato conveniente de matriz-vector llamado representación en espacio de estados (SSR)

Modelo SSR

$$\dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + b_{11}u_1 + \cdots + b_{1m}u_m$$
$$\dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + b_{21}u_1 + \cdots + b_{2m}u_m$$
$$\vdots$$
$$\dot{x}_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + b_{n1}u_1 + \cdots + b_{nm}u_m$$

$$y_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1n}x_n + d_{11}u_1 + \cdots + d_{1m}u_m$$
$$y_2 = c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \cdots + c_{2n}x_n + d_{21}u_1 + \cdots + d_{2m}u_m$$
$$\vdots$$
$$y_p = c_{p1}x_1 + c_{p2}x_2 + \cdots + c_{pn}x_n + d_{p1}u_1 + \cdots + d_{pm}u_m$$

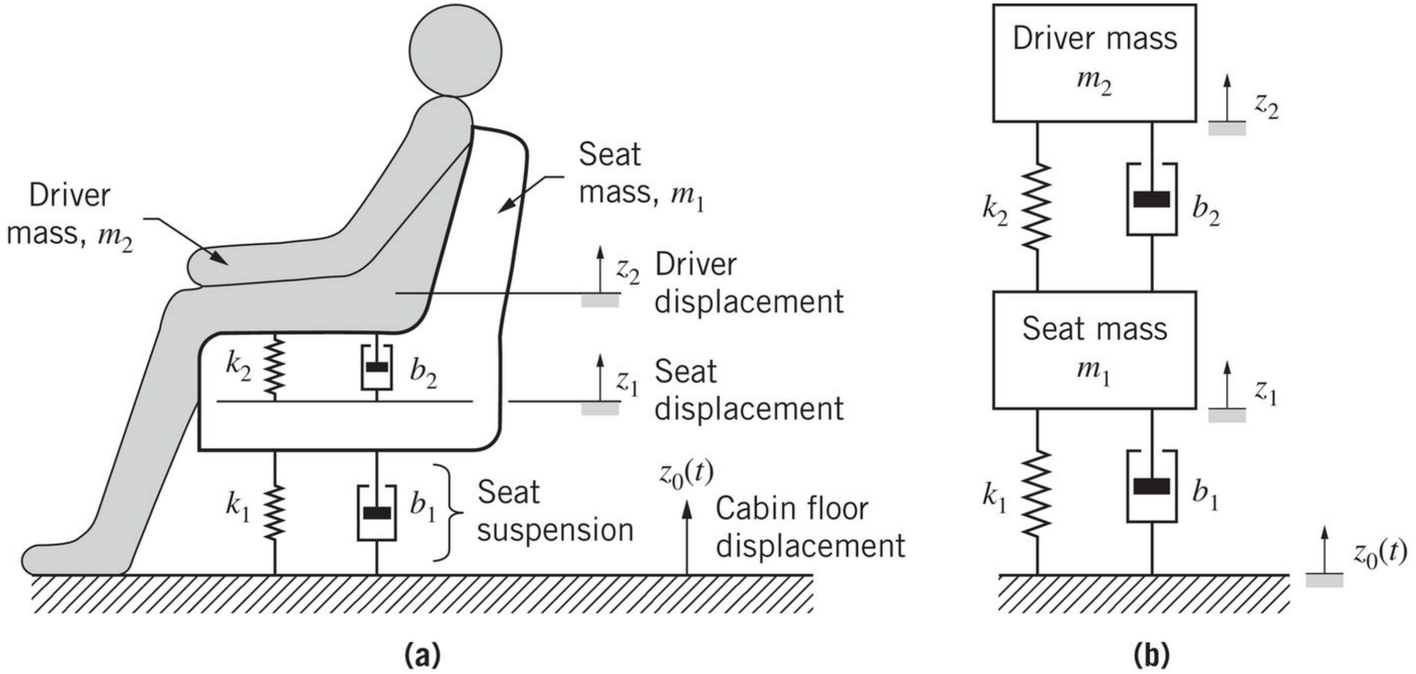
Modelo SSR

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{u} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{u} \end{bmatrix}$$

Ejemplo 3

Halle una SSR para el sistema de suspensión del asiento mostrado en la figura, en el que las dos medidas del sensor son el desplazamiento y la velocidad de la masa que representa al conductor



Conversión SSR a TF

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$

$$\downarrow$$

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

Ejemplo 4

Muestre que las siguientes dos representaciones del espacio de estados darán como resultado la misma función de transferencia

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -1.5 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1.5 & 0.625 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Conversión TF a SSR

Una ventaja de la SSR es que se puede utilizar para la simulación computacional de sistemas físicos, por lo tanto, si queremos simular un sistema representado por una función de transferencia, primero debemos convertir la representación de la función de transferencia al espacio de estados*

Al principio seleccionamos un conjunto de variables de estado, llamadas **variables de fase**, donde cada variable de estado posterior se define como la derivada de la variable de estado anterior

Ejemplo 5

Halle la SSR en variables de fase del sistema modelado por la función de transferencia

$$G(s) = \frac{24}{s^3 + 9s^2 + 26s + 24}$$

Forma canónica en variables de fase

$$G(s) = \frac{b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_n \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u$$

Ejemplo 6

Halle la SSR en variables de fase del sistema modelado por la función de transferencia y halle los valores propios de la matriz de transición de estados

$$G(s) = \frac{s^2 + 7s + 2}{s^3 + 9s^2 + 26s + 24}$$

Forma canónica controlable

$$G(s) = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \cdots + b_{n-1} s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} b_n & b_{n-1} & \cdots & b_2 & b_1 \end{bmatrix} x + b_0 \, u$$

Forma canónica observable

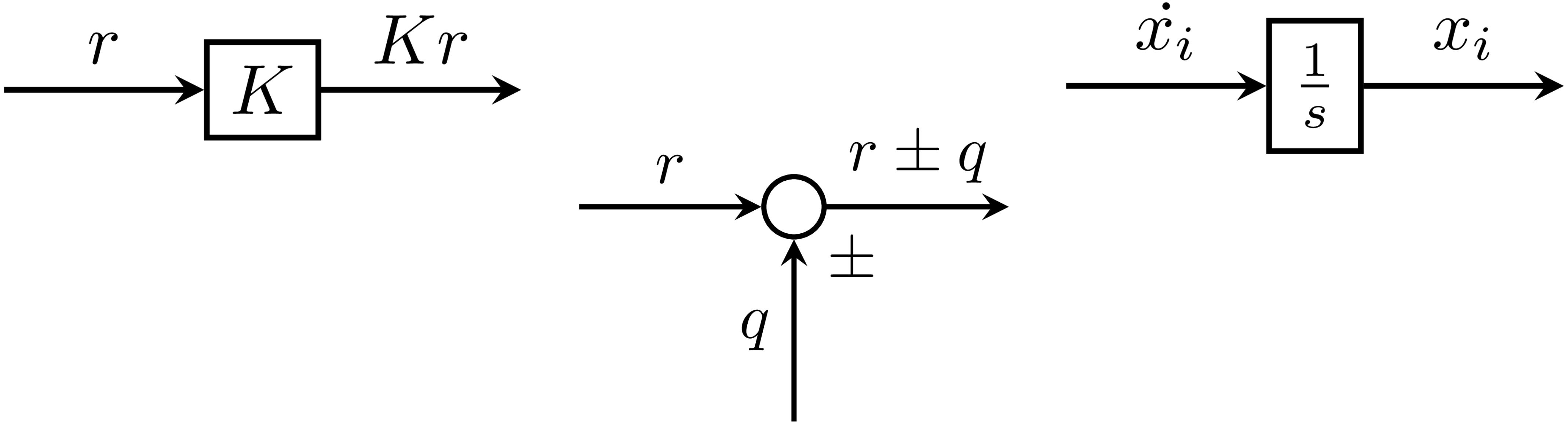
$$G(s) = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \cdots + b_{n-1} s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_n \\ b_{n-1} \\ \vdots \\ b_2 \\ b_1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} x + b_0 \, u$$

Diagramas de simulación

Es una forma de representar el modelo en variables de estado es mediante un diagrama que, para el caso de sistemas lineales, contiene tres tipos de bloques



Ejemplo 7

Halle el diagrama de simulación del sistema regido por la ecuación diferencial

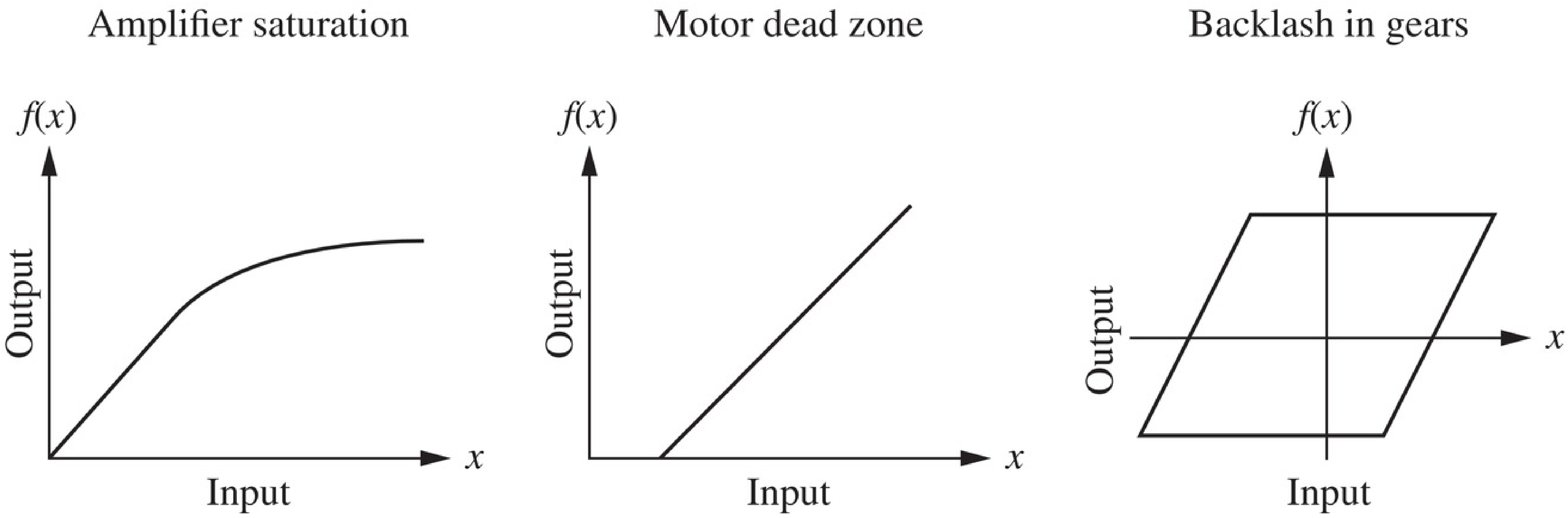
$$2\frac{d^2y}{dt^2} + 6\frac{dy}{dt} + 8y = 10\frac{d^2u}{dt^2} + 40\frac{du}{dt} + 30u$$

Sistemas no lineales

La mayoría de los sistemas dinámicos de la vida real son **no lineales**, lo que significa que pueden modelarse mediante ecuaciones diferenciales no lineales.

No existe una teoría general unificadora para obtener la solución de un sistema no lineal y en la mayoría de los casos debemos confiar en esquemas de **integración numérica** para obtener la respuesta del sistema.

No linealidades

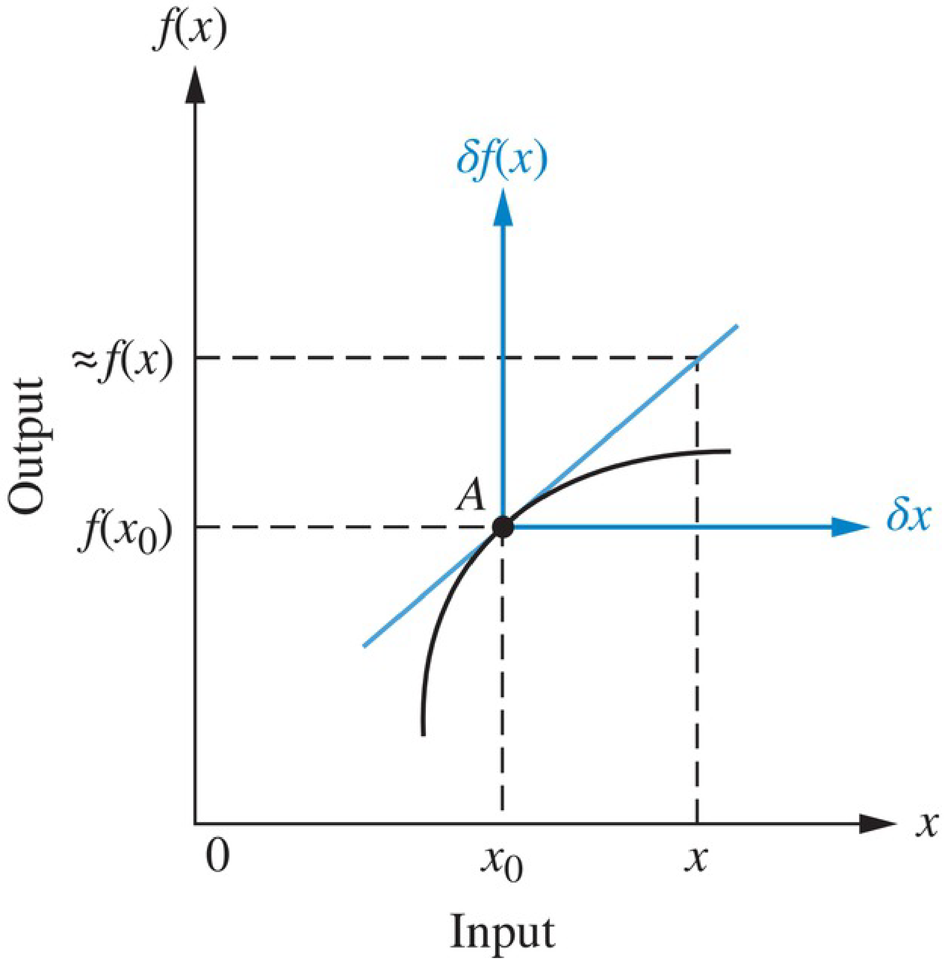


Linealización

Es un método para convertir una ecuación (o modelo) no lineal en un modelo lineal

Se basa en una expansión en serie de Taylor alrededor de un punto de operación nominal (o de referencia), donde solo se retienen los términos de primer orden

Linealización



Serie de Taylor

La técnica más usada para linealizar un modelo de un sistema alrededor de un punto de operación $(\bar{x}, \bar{y})$ es mediante la expansión en series de Taylor de la función no lineal y reteniendo solo hasta el término lineal

$$f(x, y) \approx f(\bar{x}, \bar{y}) + f_x(\bar{x}, \bar{y})(x - \bar{x}) + f_y(\bar{x}, \bar{y})(y - \bar{y})$$

Finalmente, se obtiene un modelo afín

$$\delta f(x, y) = k_x \delta x + k_y \delta y$$

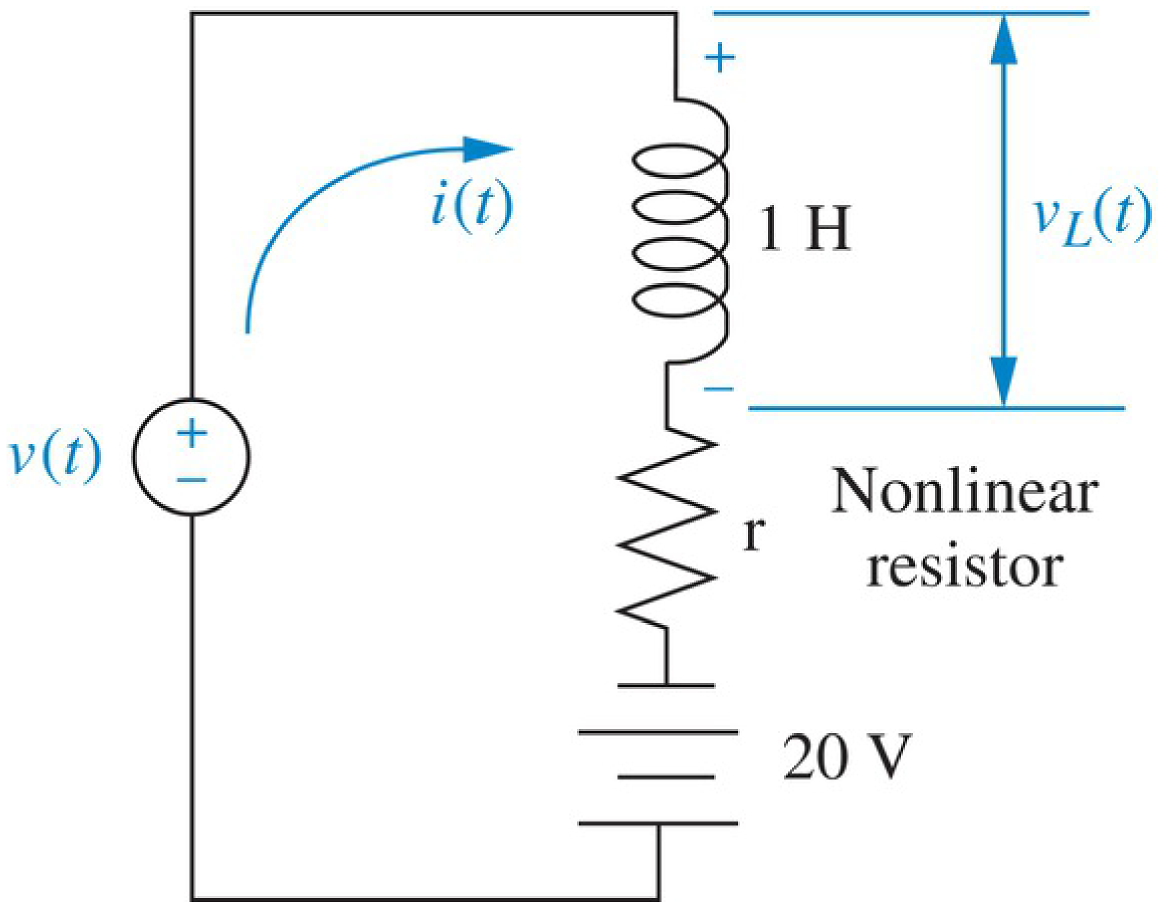
donde las δ indican pequeñas variaciones

Ejemplo 8

Encuentre la función de transferencia para la red eléctrica que se muestra en la figura, que contiene una resistencia no lineal cuya relación voltaje-corriente está definida por

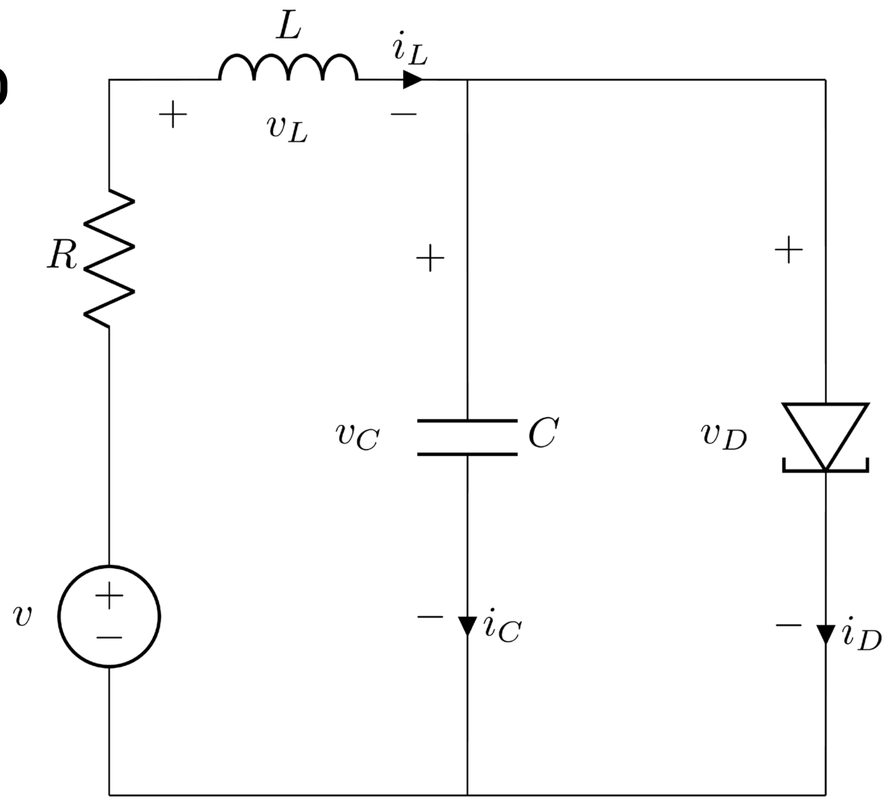
$$i_r = 2e^{0.1v_r}$$

donde i_r y v_r son la corriente y el voltaje de la resistencia, respectivamente.



Ejemplo 9

En la figura se muestra un circuito con un diodo túnel con comportamiento no lineal. Linealice el modelo de ecuaciones de estado, alrededor de un punto de equilibrio para v entre 0.8 y 1.5 V. Tenga en cuenta los siguientes valores numéricos de los parámetros:



$R = 1.5\ \Omega$, $L = 5\ \mathrm{H}$ y $C = 2\ \mathrm{F}$

$$i_D = 17.76v_D - 103.79v_D^2 + 229.62v_D^3 - 226.31v_D^4 + 83.72v_D^5$$

Validación de la linealización

1. Sea $\big(x(t), y(t)\big)$ una solución del sistema no lineal con condición inicial $x(0) = x_0$ cerca de $\bar{x}$ y entrada $u(t)$ cerca a $\bar{u}$
2. Sea $\big(\delta x(t), \delta y(t)\big)$ una solución de la aproximación lineal con condición inicial $\delta x(0) = x_0 - \bar{x}$ y entrada $\delta u(t) = u(t) - \bar{u}$
3. Desplazar la solución lineal desde las coordenadas de desviación $\big(\delta x(t), \delta y(t)\big)$ a las originales

$$(x_{\text{lin}}(t), y_{\text{lin}}(t)) = (\delta x(t) + \bar{x}, \delta y(t) + \bar{y})$$

Ejemplo 10

a) Linealice el sistema modelado mediante la ecuación diferencial alrededor del punto de operación $u = 400$

$$\frac{dv(t)}{dt} = \frac{1}{2085}\left(u(t) - 0.4v^2(t) - 228\right)$$

b) Simule el comportamiento de los sistemas no lineal y linealizado y compare sus salidas alrededor del punto de operación y lejos de este