

Función de transferencia

Biomecatrónica 2025-1

Objetivos de la clase

- Definir y comprender el concepto de función de transferencia en SLITs
- Analizar cómo la función de transferencia describe la relación entre la entrada y la salida de un SLIT en el dominio de Laplace.

Modelado matemático

- El análisis de sistemas de control requiere modelar sistemas dinámicos y analizar sus características
- Un modelo matemático es un conjunto de ecuaciones que representan la dinámica del sistema con cierta precisión
- Un mismo sistema puede tener múltiples modelos matemáticos según la perspectiva adoptada

Modelos para SLITs

Los sistemas dinámicos formados por componentes de parámetros concentrados, cuyas propiedades se mantienen en un horizonte de tiempo, se describen mediante ecuaciones diferenciales lineales invariantes en el tiempo de coeficientes constantes

$$\begin{aligned} a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \dot{y} + a_n y \\ = b_0 x^{(m)} + b_1 x^{(m-1)} + \dots + b_{m-1} \dot{x} + b_m x \quad (n \geq m) \end{aligned}$$

Función de transferencia

La función de transferencia es una representación matemática de un sistema dinámico en el dominio de la *frecuencia*

Se define como la relación entre la transformada de Laplace de la salida y la transformada de Laplace de la entrada, cuando el sistema se encuentra en reposo, es decir, bajo *condiciones iniciales nulas*

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

Función de transferencia

Partiendo de la ODE de coeficientes constantes, se puede obtener la función de transferencia de forma fácil, teniendo en cuenta que, al estar ante condiciones iniciales nulas, la propiedad de diferenciación real queda establecida como

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s)$$

Función de transferencia

$$\begin{aligned} a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \dot{y} + a_n y \\ = b_0 x^{(m)} + b_1 x^{(m-1)} + \dots + b_{m-1} \dot{x} + b_m x \end{aligned}$$

$\mathcal{L}\{ \}$



$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n}$$

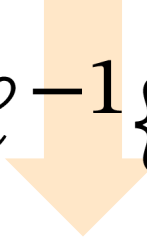
Para tener en cuenta

1. La función de transferencia de un sistema es un modelo matemático porque es un método operacional para expresar la ecuación diferencial que relaciona la variable de salida con la variable de entrada.
2. La función de transferencia es una propiedad de un sistema, independiente de la magnitud y naturaleza de la entrada o función de excitación.
3. La función de transferencia incluye las unidades necesarias para relacionar la entrada con la salida; sin embargo, no proporciona información acerca de la estructura física del sistema. (Las funciones de transferencia de muchos sistemas físicamente diferentes pueden ser idénticas.)
4. Si se conoce la función de transferencia de un sistema, se estudia la salida o respuesta para varias formas de entrada, con la intención de comprender la naturaleza del sistema.
5. Si se desconoce la función de transferencia de un sistema, puede establecerse experimentalmente introduciendo entradas conocidas y estudiando la salida del sistema. Una vez establecida una función de transferencia, proporciona una descripción completa de las características dinámicas del sistema, a diferencia de su descripción física.

Respuesta al impulso

Analicemos la respuesta de un sistema cuando se aplica una entrada de impulso unitario y las condiciones iniciales son cero. Dado que la transformada de Laplace del impulso unitario es 1, la transformada de Laplace de la salida del sistema se expresa como

$$Y(s) = H(s)$$


$$\mathcal{L}^{-1}\{ \}$$

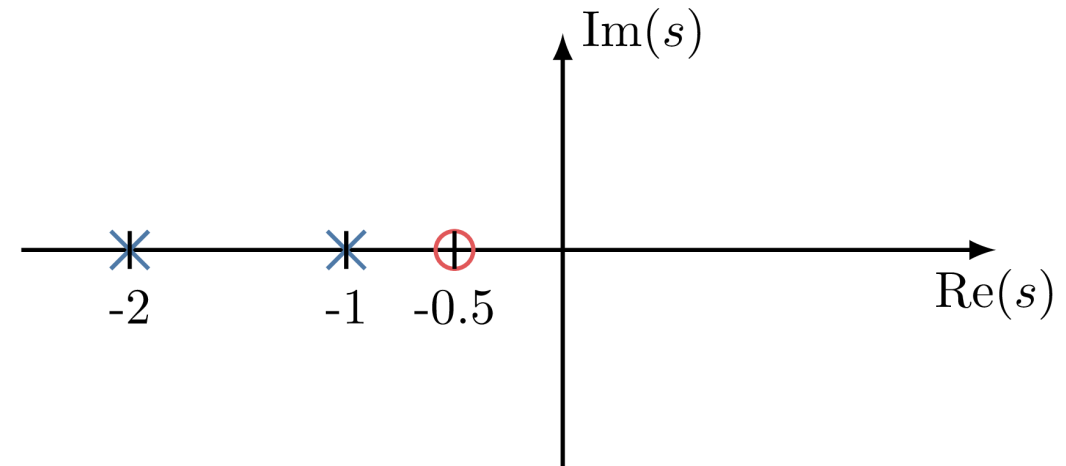
$$y(t) = h(t)$$

Polos y ceros de un SLIT

Los polos y ceros de un SLIT son los valores en el plano complejo donde su función de transferencia se anula o se vuelve infinita:

- Ceros: Valores de s donde $H(s) = 0$. Determinan las frecuencias donde la respuesta del sistema se atenúa completamente.
- Polos: Valores de s donde $H(s) \rightarrow \infty$. Definen la estabilidad y la dinámica de sistema.

$$H(s) = \frac{7(2s + 1)}{(s + 1)(s + 2)}$$



Ejercicio guiado

Describe la forma que tiene la respuesta al escalón del sistema representado por la siguiente función de transferencia. ¿Cuáles son los polos y los ceros del mismo?

$$G(s) = \frac{5.2(s + 1)(s + 5)}{(s + 2)(s^2 + 6s + 13)}$$