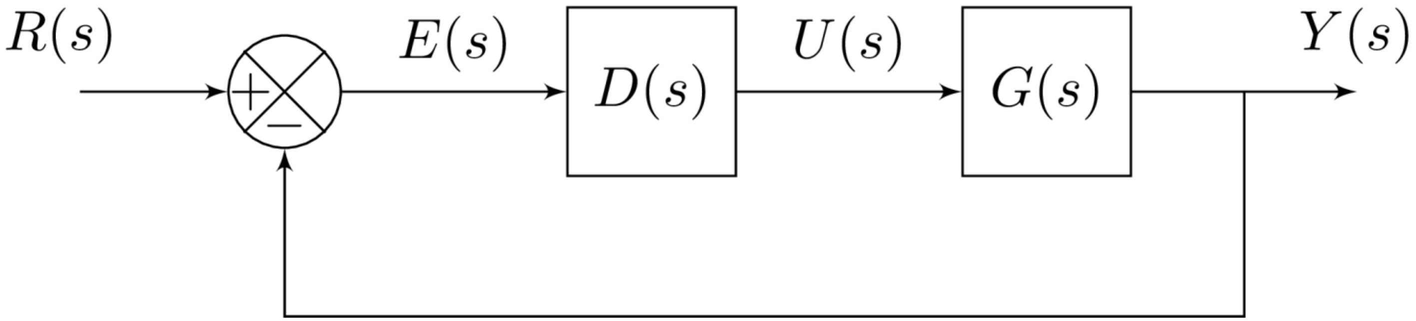
08 - Análisis del estado estacionario

Biomecatrónica – 2023/II

Motivación

Error en estado estacionario



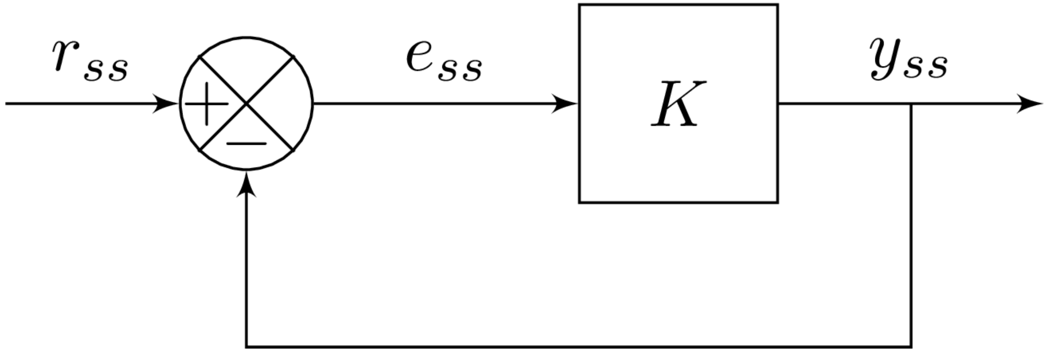
El error es la entrada al controlador y se calcula como la diferencia entre la referencia y la salida

$$E(s) = R(s) - Y(s)$$

e_{ss} para un control proporcional

Considerando el caso en el que:

- Referencia es un escalón
- La planta tiene polos con parte real estrictamente negativa
- El controlador es solo un bloque de ganancia



$$e_{ss} = r_{ss} - y_{ss}$$

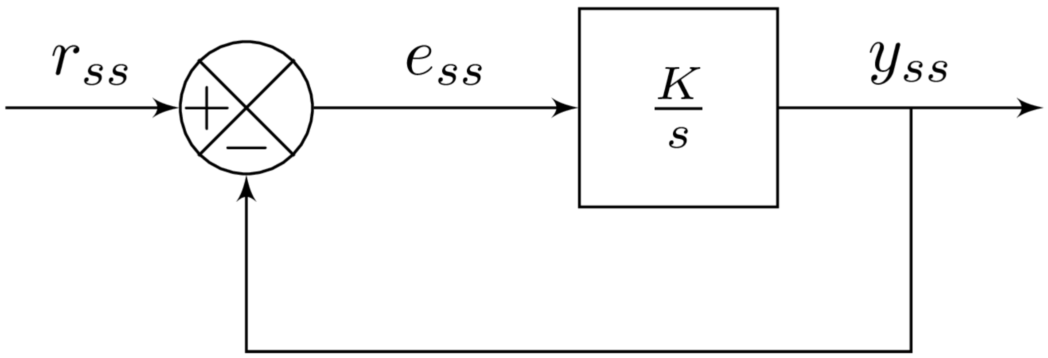
$$e_{ss} = r_{ss} - Ke_{ss}$$

$$e_{ss} = \frac{r_{ss}}{1+K}$$

e_{ss} para un control integral

Considerando el caso en el que:

- Referencia es un escalón
- La planta tiene polos con parte real estrictamente negativa
- El controlador es un integrador



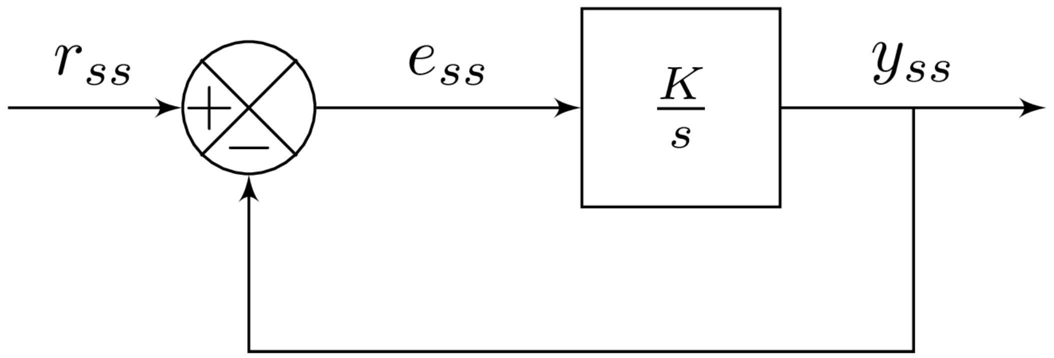
$$E(s) = \frac{1}{s+K}$$

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} \frac{s}{s+K} = 0$$

e_{ss} para un control integral

Considerando el caso en el que:

- Referencia es una rampa
- La planta tiene polos con parte real estrictamente negativa
- El controlador es un integrador



$$E(s) = \frac{1}{s(s+K)} \qquad e_{ss} = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} \frac{s}{s(s+K)} = \frac{1}{K}$$

Tipo de sistema

El grado del polinomio de entrada para el cual el error en estado estacionario es una constante finita y no nula

- **Tipo 0:** error finito y no nulo en respuesta a una entrada de escalón
- **Tipo 1:** error finito y no nulo en respuesta a una entrada de rampa
- **Tipo 2:** error finito y no nulo en respuesta a una entrada parabólica

Tipo de sistema

Tipo 0: sin integradores en lazo abierto

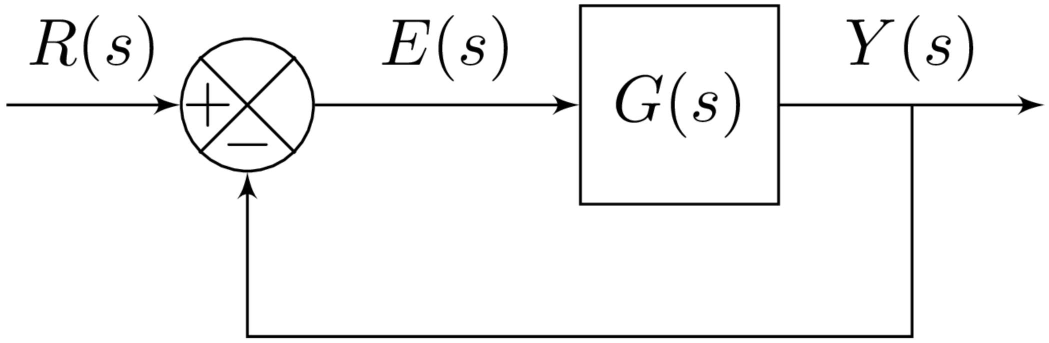
$$G(s) = \frac{s+4}{(s+6)(s^2+4s+9)}$$

Tipo 1: un integrador en lazo abierto

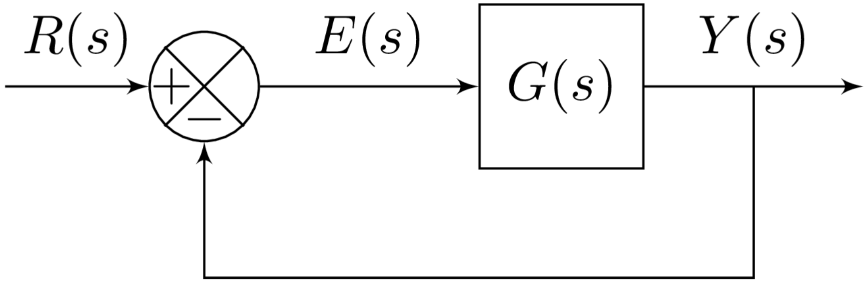
$$G(s) = \frac{15}{s(s^2+3s+12)}$$

Tipo 2: dos integradores en lazo abierto

$$G(s) = \frac{s+3}{s^2(s+5)(s+10)}$$



Error en estado estacionario



El error en estado estacionario se puede expresar en términos de la función de transferencia de lazo abierto

$$\begin{aligned} E(s) &= R(s) - Y(s) \\ &= R(s) - E(s)G(s) \\ &= \frac{R(s)}{1+G(s)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_{ss} &= \lim_{s\to 0} sE(s) \\ &= \lim_{s\to 0} \frac{s\,R(s)}{1+G(s)} \end{aligned}$$

e_{ss} para entrada escalón

Para una entrada escalón unitario

$$r(t) = u_s(t) \longleftrightarrow R(s) = \frac{1}{s}$$

por lo que el error en estado estacionario es

$$\begin{aligned} e_{ss} &= \lim_{s\to 0} \frac{s\,R(s)}{1+G(s)} \\ &= \lim_{s\to 0} \frac{s}{s(1+G(s))} \\ &= \frac{1}{1+\lim_{s\to 0} G(s)} \end{aligned}$$

e_{ss} para entrada escalón

Sistema tipo 0

$$G(s) = \frac{(s+z_1)(s+z_2)\cdots}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots}$$

$$\lim_{s\to 0} G(s) = \frac{z_1 z_2 \cdots}{p_1 p_2 \cdots} \neq \infty$$

Sistemas tipo n $(n \geq 1)$

$$G(s) = \frac{(s+z_1)(s+z_2)\cdots}{s^n (s+p_1)(s+p_2)\cdots}$$

$$\lim_{s\to 0} G(s) \to \infty$$

Constantes de error estático

$$K_p = \lim_{s \to 0} G(s), \quad \text{Tipo } 0$$

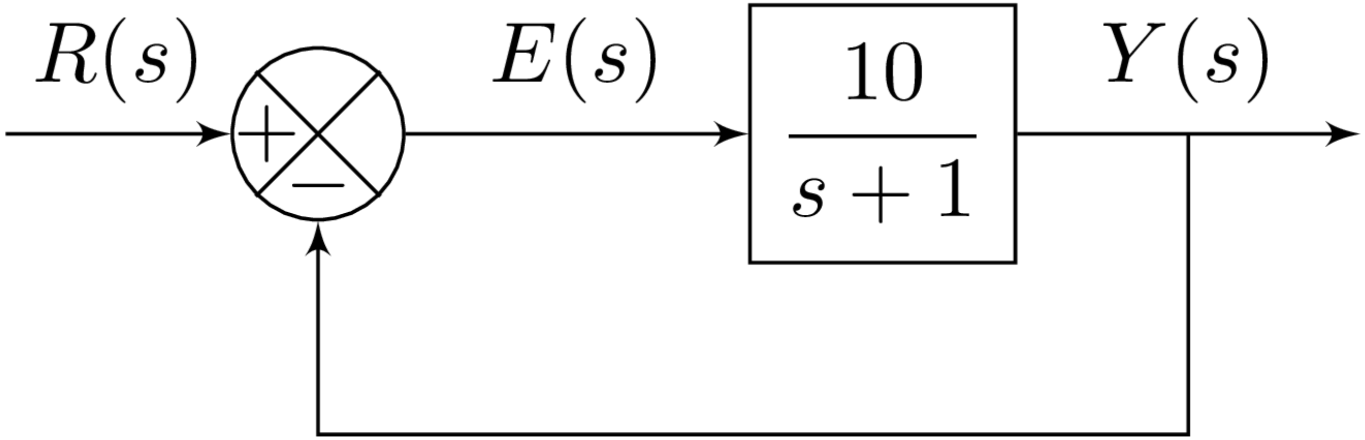
$$K_v = \lim_{s \to 0} s(s), \quad \text{Tipo } 1$$

$$K_a = \lim_{s \to 0} s^2(s), \quad \text{Tipo } 2$$

Tipo de sistema	Entrada		
	Escalón	Rampa	Parábola
0	$\frac{1}{1+K_p}$	∞	∞
1	0	$\frac{1}{K_v}$	∞
2	0	0	$\frac{1}{K_a}$

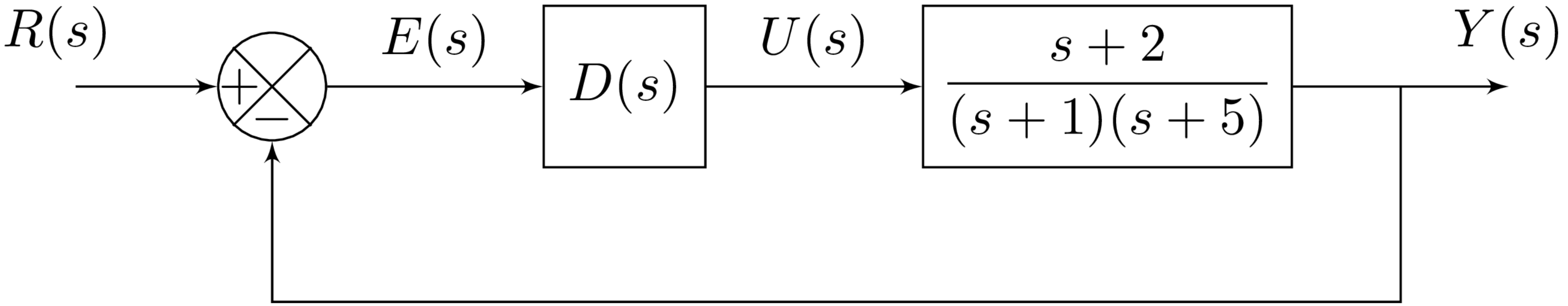
Ejemplo 1

¿Cuál es el error en estado estacionario del sistema mostrado en la figura ante una entrada escalón de amplitud 3?



Ejemplo 2

Diseñe el controlador $D(s)$ tal que el sistema de la figura exponga un error de 0.05 ante una entrada tipo rampa



Ejemplo 3

Determine la ganancia del controlador, K, para que el sistema exhiba un error en estado estacionario del 2% ante una entrada de referencia constante