Transformada de Laplace

Biomecatrónica 2025-1

Objetivos de la clase

- Comprender el concepto de la transformada de Laplace como una herramienta matemática para analizar sistemas dinámicos lineales.
- Aprender las propiedades y teoremas fundamentales de la transformada de Laplace.
- Resolver ecuaciones diferenciales ordinarias (ODEs) utilizando la transformada de Laplace.
- Aplicar la transformada inversa de Laplace para encontrar la solución temporal de un sistema.

Definición

La transformada de Laplace es una transformación de dominio en la que un sistema dinámico, su entrada y su salida son consideradas entidades separadas y sus relaciones son algebraicas

Si $f(t)$ es una función definida para todo $t \geq 0$, su transformada de Laplace unilateral es una función de s dada por la integral

$$F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt$$

Linealidad

La transformada de Laplace es una operación lineal, por lo que cumple con el principio de superposición (aditividad y homogeneidad)

$$\mathscr{L}\{af(t)+bg(t)\}=a\mathscr{L}\{f(t)\}+b\mathscr{L}\{g(t)\}$$

Diferenciación real

La transformada de Laplace es un método para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias y problemas de valor inicial

La idea fundamental es que las operaciones de cálculo sobre funciones se sustituyen por operaciones de álgebra sobre transformadas. Esto es posible mediante el uso de la siguiente propiedad

$$\mathscr{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} \dot{f}(0) - \cdots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

Integración real

De forma similar, se pueden transformar las ecuaciones que involucren integrales en el dominio del tiempo mediante el uso de la propiedad

$$\mathscr{L}\left\{\int_0^t f(t)\,dt\right\} = \frac{1}{s}F(s)$$

Diferenciación compleja

Como resultado de la dualidad de la transformada de Laplace, la multiplicación de una función por t (proceso de independencia lineal) conlleva a la propiedad

$$\mathscr{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n}$$

Tiempo muerto

En el análisis de sistemas de control es común encontrar plantas o procesos que tardan un tiempo considerable en responder (en comparación con su dinámica)

Este fenómeno se conoce con el nombre de tiempo muerto y acarrea un retardo de fase creciente con la frecuencia, lo cual puede alterar las características de estabilidad del sistema

$$\mathscr{L}\{f(t-t_0)\} = e^{-t_0 s}F(s)$$

Amortiguamiento real

El comportamiento de desvanecimiento en la respuesta al impulso es una característica clave de sistemas estables

Este desvanecimiento refleja cómo el sistema filtra las altas frecuencias y tiende a su estado de reposo en ausencia de entradas adicionales

En el dominio de Laplace, este desvanecimiento se puede representar como

$$\mathscr{L}\{e^{-at} f(t)\} = F(s-a)$$

Teoremas de valor final e inicial

Es útil porque los teoremas de valor final e inicial permiten predecir el comportamiento asintótico o inicial de un sistema sin necesidad de calcular explícitamente su respuesta temporal completa, a partir de su representación en el dominio de Laplace

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} sF(s)$$

$$\lim_{t \to 0^+} f(t) = \lim_{s \to \infty} sF(s)$$

Convolución

La transformada de Laplace permite calcular fácilmente la integral de convolución mediante la propiedad

$$\mathscr{L}\left\{(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau\right\} = F(s)\, G(s)$$

Transformada inversa

El proceso de invertir la transformada de Laplace implica solucionar la siguiente integral de Bromwich

$$\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)\, e^{st}\, ds$$

cuya solución implica conocimiento avanzado de cálculo en variable compleja y el uso del teorema de residuos de Cauchy

$$f(t) = \sum \mathrm{Res}\Big(F(s)e^{st}\Big)$$

Teorema de residuos de Cauchy

El teorema de residuos de Cauchy en análisis complejo establece que, si $f(z)$ es una función holomorfa (analítica) en un dominio excepto en un conjunto finito de puntos aislados (polos), entonces la integral de $f(z)$ alrededor de una curva cerrada simple Γ se resuelve como

$$\oint_{\Gamma} f(z)\, dz = 2\pi j \sum_{k} \mathrm{Res}(f, z_k)$$

Residuos

El residuo de $f(z)$ en un polo z_k es el coeficiente del término $\frac{1}{z-z_k}$ en la expansión en serie de Laurent de $f(z)$ alrededor de z_k

Si $f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_k)^m}$, con $g(z)$ holomorfa en z_k, entonces el residuo asociado es

$$\mathrm{Res}(f, z_k) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_k} \frac{d^{m-1} g(z)}{dz^{m-1}}$$

Fracciones parciales

En la práctica, rara vez se usa la evaluación de esta integral para hallar la transformada inversa y se recurre a un método alternativo, pero también basado en residuos, conocido como la expansión en fracciones parciales

Problema guiado

Use el enfoque de transformada de Laplace para hallar las respuestas $y_{zs}(t)$, $y_{z_i}(t)$ y $h(t)$ para la siguiente ecuación diferencial

$$\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2y(t) = 2\dot{x}(t) + x(t)$$

$$x(t) = 4e^{-3t},\ y(0) = 2,\ \dot{y}(0) = 4$$