UNIVERSIDAD EIA

BIOMECATRÓNICA

Análisis de estabilidad

Criterios de estabilidad

Un sistema es **estable** si su salida **no crece indefinidamente**

Existen diferentes criterios de estabilidad que tienen campos de aplicación variados

- Estabilidad BIBO
- Estabilidad interna
- Estabilidad de Routh-Hurwitz

× Estabilidad en el sentido de Nyquist

× Estabilidad en el sentido de Lyapunov

Estabilidad BIBO

Un sistema con respuesta al impulso $h(t)$ es estable BIBO si y solo si

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|\, d\tau < \infty$$

esto se traduce en que todos los polos deben tener parte real **estrictamente negativa**

Estabilidad marginal

Se conoce como sistema **marginalmente estable** cuando este es BIBO estable, pero existe respuesta del sistema aun cuando se ha eliminado la respuesta

Esto implica que hay algunas entradas acotadas para las cuales la salida es no acotada y, en términos de polos, que **al menos uno tiene parte real cero**

$$H_1(s) = \frac{1}{s} \qquad H_2(s) = \frac{1}{s^2+1}$$

Estabilidad interna

Un sistema tiene estabilidad interna si y solo si todos los valores propios en la SSR tienen parte real **estrictamente negativa**

Un sistema puede ser internamente inestable, pero estable BIBO

Estabilidad de Routh-Hurwitz

Considere el polinomio característico $a(s)$ de un sistema

$$a(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \cdots + a_{n-1} s + a_n$$

Condición necesaria: todos los coeficientes a_i son positivos

Condición necesaria y suficiente: todos los elementos en la primera columna del arreglo de Routh son positivos

Condición de necesidad

$$\begin{aligned}
a(s) &= s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_{n-1} s + a_n \\
&= (s - r_1)(s - r_2)\dots(s - r_n) \\
&= s^n - (r_1 + r_2 + \dots r_n)s^{n-1} \\
&\quad + (r_1 r_2 + r_1 r_3 + \dots r_1 r_n + r_2 r_3 + \dots)s^{n-2} \\
&\quad - (r_1 r_2 r_3 + r_1 r_2 r_4 + \dots)s^{n-3} + \dots \\
&\quad + (-1)^n (r_1 r_2 \dots r_n)
\end{aligned}$$

Arreglo de Routh

1. Separar los coeficientes de $a(s)$

$$
\begin{array}{llllll}
s^n & : & 1 & a_2 & a_4 & \cdots \\
s^{n-1} & : & a_1 & a_3 & a_5 & \cdots
\end{array}
$$

2. Luego agregamos filas posteriores

$$
\begin{array}{lllllll}
\text{Fila} & n & s^n : & 1 & a_2 & a_4 & \cdots \\
\text{Fila} & n-1 & s^{n-1} : & a_1 & a_3 & a_5 & \cdots \\
\text{Fila} & n-2 & s^{n-2} : & b_1 & b_2 & b_3 & \cdots \\
\text{Fila} & n-3 & s^{n-3} : & c_1 & c_2 & c_3 & \cdots \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
\text{Fila} & 2 & s^2 : & * & * & & \\
\text{Fila} & 1 & s^1 : & * & & & \\
\text{Fila} & 0 & s^0 : & * & & &
\end{array}
$$

Arreglo de Routh

$$b_1 = -\frac{\det\begin{bmatrix} 1 & a_2 \\ a_1 & a_3 \end{bmatrix}}{a_1} = \frac{a_1 a_2 - a_3}{a_1}, \qquad c_1 = -\frac{\det\begin{bmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix}}{b_1} = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1},$$

$$b_2 = -\frac{\det\begin{bmatrix} 1 & a_4 \\ a_1 & a_5 \end{bmatrix}}{a_1} = \frac{a_1 a_4 - a_5}{a_1}, \qquad c_2 = -\frac{\det\begin{bmatrix} a_1 & a_5 \\ b_1 & b_3 \end{bmatrix}}{b_1} = \frac{b_1 a_5 - a_1 b_3}{b_1},$$

$$b_3 = -\frac{\det\begin{bmatrix} 1 & a_6 \\ a_1 & a_7 \end{bmatrix}}{a_1} = \frac{a_1 a_6 - a_7}{a_1}, \qquad c_3 = -\frac{\det\begin{bmatrix} a_1 & a_7 \\ b_1 & b_4 \end{bmatrix}}{b_1} = \frac{b_1 a_7 - a_1 b_4}{b_1}.$$

Arreglo de Routh

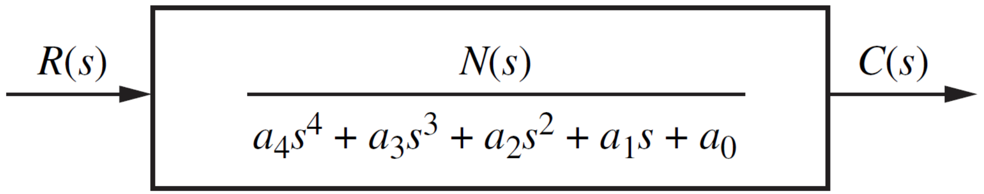


TABLE 6.2 Completed Routh table

s^4	a_4	a_2	a_0
s^3	a_3	a_1	0
s^2	$\dfrac{-\begin{vmatrix} a_4 & a_2 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix}}{a_3} = b_1$	$\dfrac{-\begin{vmatrix} a_4 & a_0 \\ a_3 & 0 \end{vmatrix}}{a_3} = b_2$	$\dfrac{-\begin{vmatrix} a_4 & 0 \\ a_3 & 0 \end{vmatrix}}{a_3} = 0$
s^1	$\dfrac{-\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}{b_1} = c_1$	$\dfrac{-\begin{vmatrix} a_3 & 0 \\ b_1 & 0 \end{vmatrix}}{b_1} = 0$	$\dfrac{-\begin{vmatrix} a_3 & 0 \\ b_1 & 0 \end{vmatrix}}{b_1} = 0$
s^0	$\dfrac{-\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & 0 \end{vmatrix}}{c_1} = d_1$	$\dfrac{-\begin{vmatrix} b_1 & 0 \\ c_1 & 0 \end{vmatrix}}{c_1} = 0$	$\dfrac{-\begin{vmatrix} b_1 & 0 \\ c_1 & 0 \end{vmatrix}}{c_1} = 0$

Ejemplo 1

Aplique el criterio de Routh-Hurwitz a los siguientes polinomios

$$D_1(s) = s^5 + 2s^4 + 4s^3 + 6s^2 + 8s + 12$$

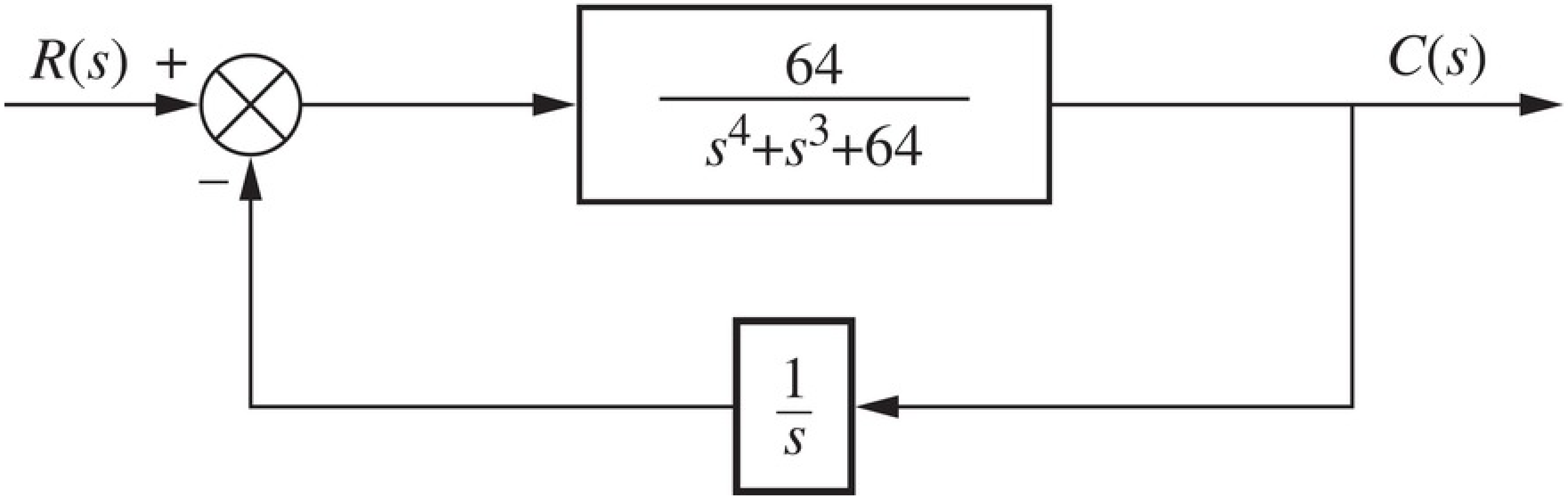
$$D_2(s) = s^3 + 14s^2 + 55s + 42$$

$$D_3(s) = s^5 + 2s^4 + 3s^3 + 6s^2 + 5s + 3$$

$$D_4(s) = s^5 + 7s^4 + 6s^3 + 42s^2 + 8s + 56$$

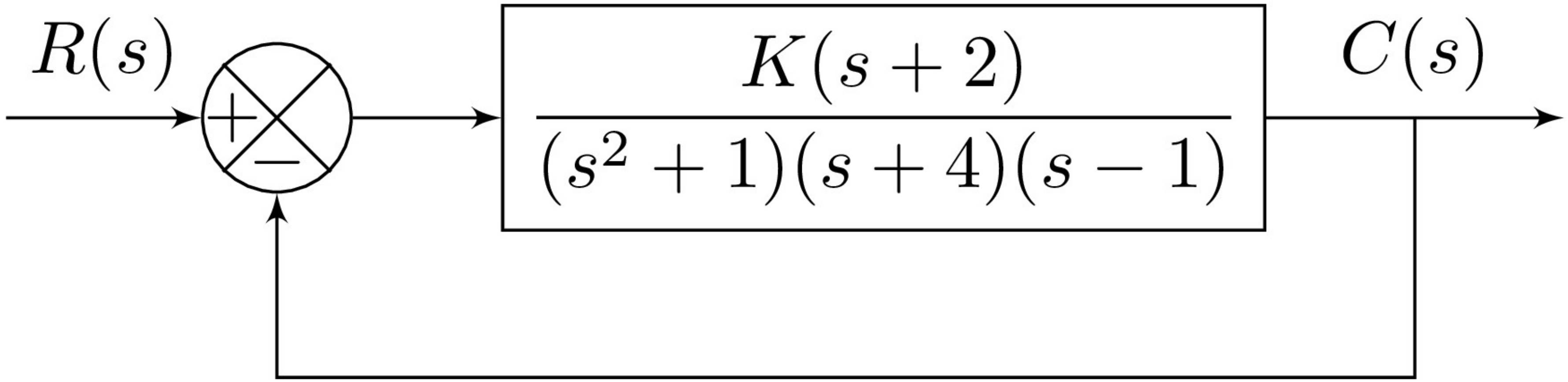
Ejemplo 2

Use el criterio de Routh-Hurwitz para hallar cuántos polos de lazo cerrado tiene el sistema en LHP, RHP y sobre el eje $j\omega$



Ejemplo 3

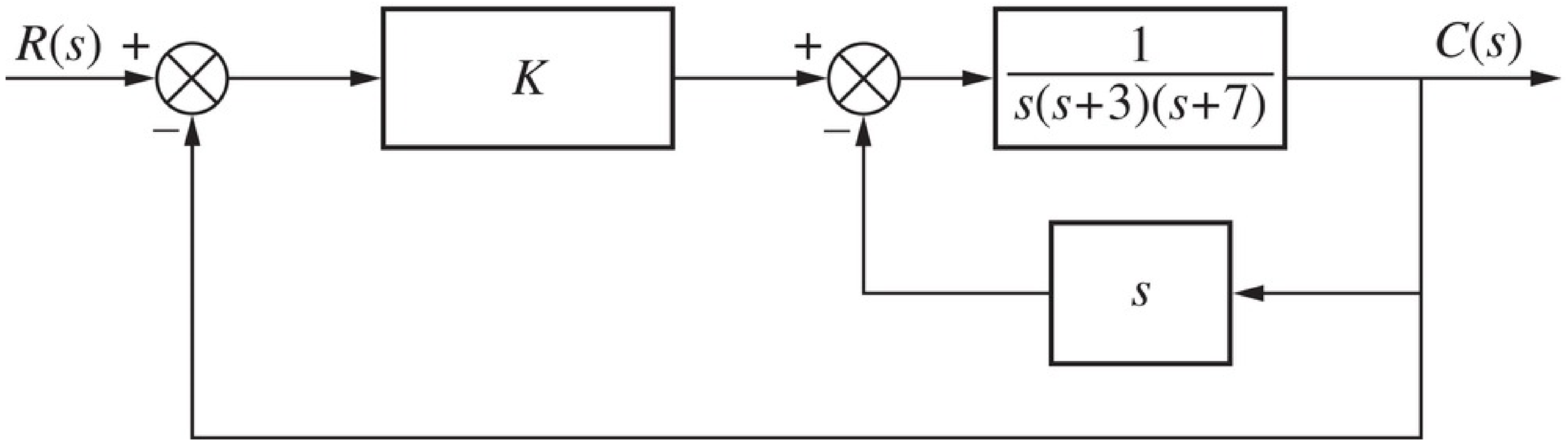
Halle el rango de valores de K que garantizan estabilidad para el sistema en lazo cerrado



Ejemplo 4

Para el sistema mostrado, halle

a. el rango de K para estabilidad en lazo cerrado
b. el valor de K que hace que el sistema oscile y la frecuencia de oscilación



Ejemplo 5

Para el sistema mostrado, halle

a. El valor de K_2 para el que el lazo interno tiene dos polos reales iguales y el valor asociado de K_1 para estabilidad

b. El valor de K_1 para el que hay un polo de lazo cerrado ubicado en $s = -5$. En este caso, ¿es posible aproximar la respuesta a la de un sistema de segundo orden subamortiguado?