Biomecatrónica

Modelado en el dominio de la frecuencia

Transformada de Laplace

La transformada de Laplace es una transformación de dominio en la que un sistema dinámico, su entrada y su salida son consideradas entidades separadas y sus relaciones algebraicas

Viene dada por la integral

$$F(s) = \int_{0^-}^{\infty} f(t) e^{-st} \, dt$$

Análisis en el dominio de Laplace

El proceso de análisis del comportamiento dinámico de un sistema en dominio de Laplace implica los siguientes pasos:

1. Conversión de las EDOs a ecuaciones algebraicas
2. Cálculos algebraicos para hallar las soluciones necesarias
3. Inversión de los resultados para llevarlos al dominio del tiempo

Inversión de la transformada de Laplace

El proceso de invertir la transformada de Laplace implica solucionar una integral de Bromwich usando el teorema de los residuos de Cauchy

$$f(t) = \sum \mathrm{Res}\left(F(s)e^{st}\right)$$

Un método alternativo, pero también basado en residuos, es la expansión en fracciones parciales

Ejemplo

Dada la siguiente EDO, solucione para $y(t)$ si las condiciones iniciales son $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$ y la entrada es un escalón de amplitud 32

$$\frac{d^2 y(t)}{d t^2} + 12\frac{d y(t)}{d t} + 32 y(t) = x(t)$$

Ejemplo

Halle la transformada inversa de

$$F(s) = \frac{10}{s(s+2)(s+3)^2}$$

$$G(s) = \frac{s^3}{s^3 + 18s^2 + 104s + 192}$$

Función de transferencia

Función que **relaciona** algebraicamente la salida de un sistema con su entrada, **bajo condiciones iniciales nulas** y permite **separar** la entrada, el sistema y la salida

Representa el **modelo matemático** de un sistema dinámico en el dominio de Laplace

Función de transferencia

$$a_n \frac{d^n c(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} c(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_0 c(t) = b_m \frac{d^m r(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} r(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_0 r(t)$$

$$\Big\downarrow$$

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_0}$$

Ejemplo

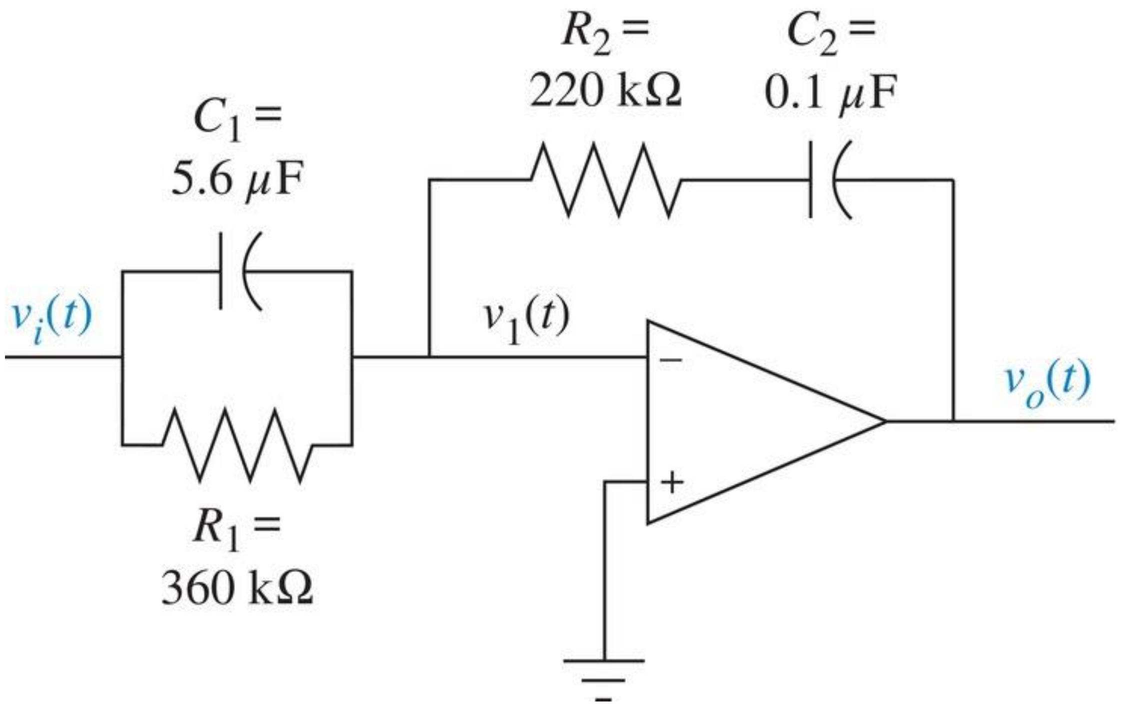
Halle la respuesta al escalón y la rampa del sistema con función de transferencia

$$G(s) = \frac{s}{(s+4)(s+8)}$$

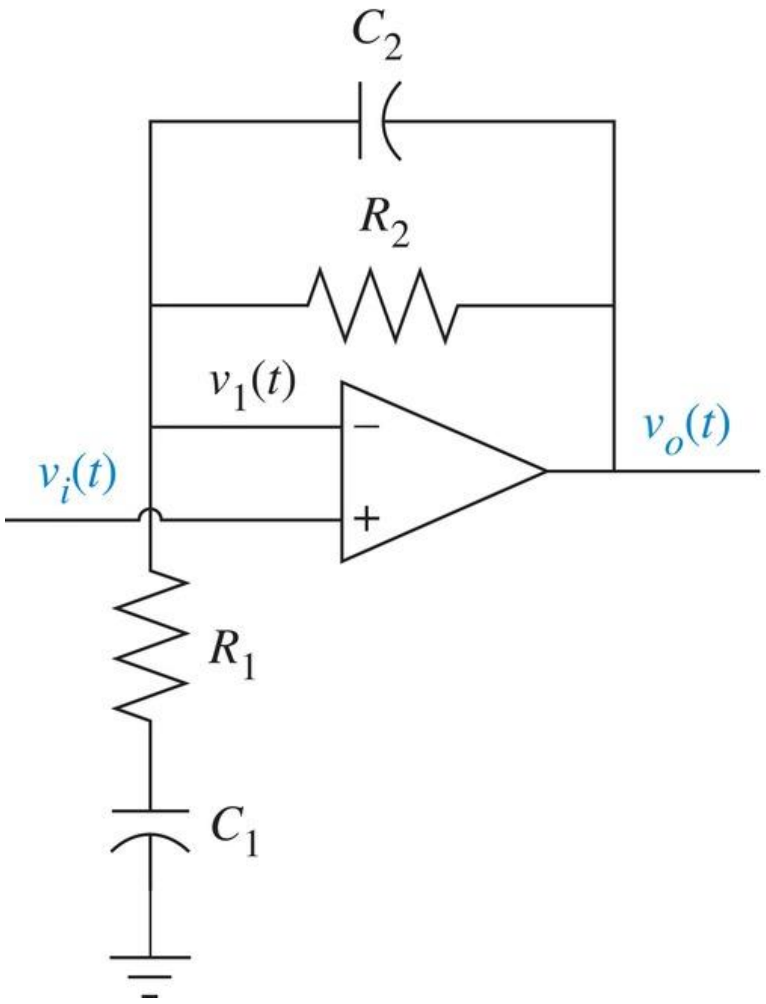
Modelo de circuitos eléctricos

Component	Voltage–current	Current–voltage	Voltage–charge	Impedance $Z(s) = V(s)/I(s)$	Admittance $Y(s) = I(s)/V(s)$
 Capacitor	$v(t) = \frac{1}{C}\int_0^1 i(\tau)d\tau$	$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt}$	$v(t) = \frac{1}{C}q(t)$	$\frac{1}{Cs}$	Cs
 Resistor	$v(t) = Ri(t)$	$i(t) = \frac{1}{R}v(t)$	$v(t) = R\frac{dq(t)}{dt}$	R	$\frac{1}{R} = G$
 Inductor	$v(t) = L\frac{di(t)}{dt}$	$i(t) = \frac{1}{L}\int_0^1 v(\tau)d\tau$	$v(t) = L\frac{d^2q(t)}{dt^2}$	Ls	$\frac{1}{Ls}$

Ejemplos

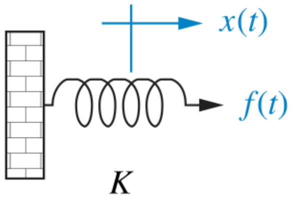
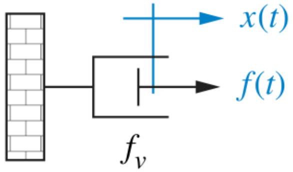
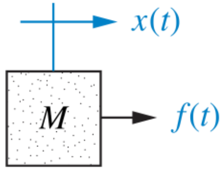


$R_2 =$
220 kΩ
$C_2 =$
0.1 μF
$C_1 =$
5.6 μF
$v_i(t)$
$v_1(t)$
$v_o(t)$
$R_1 =$
360 kΩ

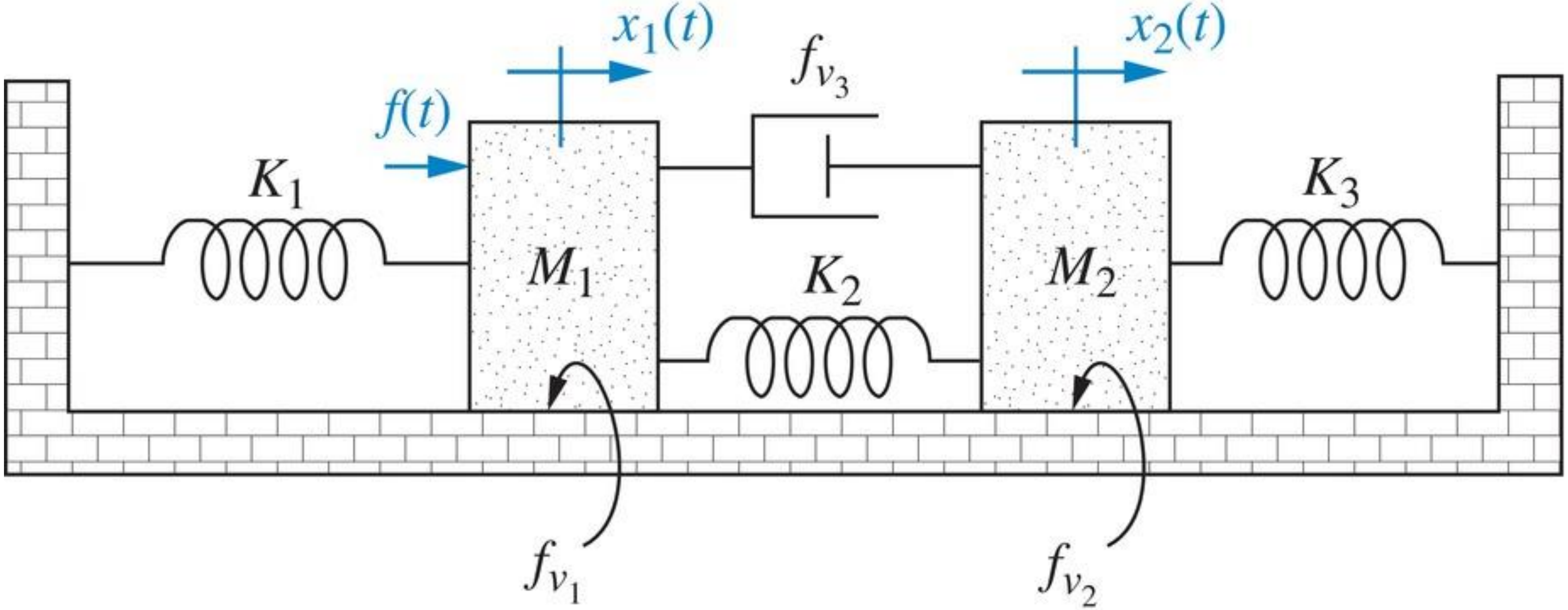


C_2
R_2
$v_1(t)$
$v_o(t)$
$v_i(t)$
R_1
C_1

Modelo de sistemas mecánicos

Component	Force–velocity	Force–displacement	Impedance $Z_M(s) = F(s)/X(s)$
Spring 	$f(t) = K\int_0^t v(\tau)d\tau$	$f(t) = Kx(t)$	K
Viscous damper 	$f(t) = f_v v(t)$	$f(t) = f_v \frac{dx(t)}{dt}$	$f_v s$
Mass 	$f(t) = M\frac{dv(t)}{dt}$	$f(t) = M\frac{d^2x(t)}{dt^2}$	Ms^2

Ejemplo



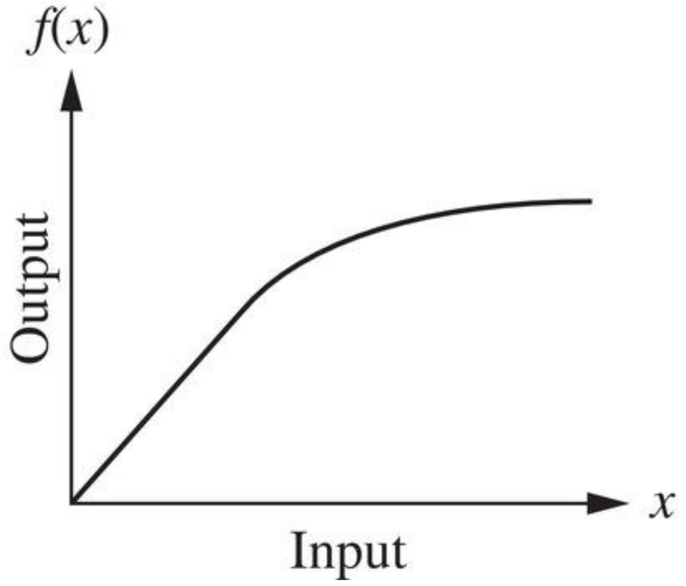
Sistemas no lineales

La mayoría de los sistemas dinámicos de la vida real son **no lineales**, lo que significa que pueden modelarse mediante ecuaciones diferenciales no lineales.

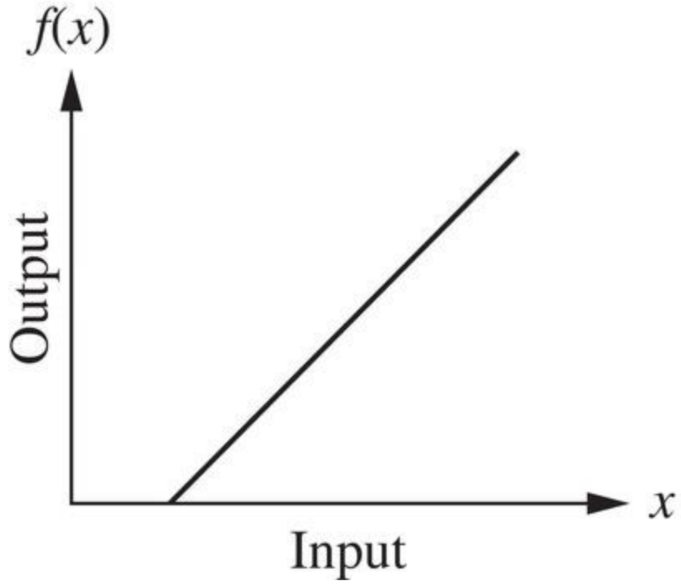
No existe una teoría general unificadora para obtener la solución de un sistema no lineal y en la mayoría de los casos debemos confiar en esquemas de **integración numérica** para obtener la respuesta del sistema.

No linealidades

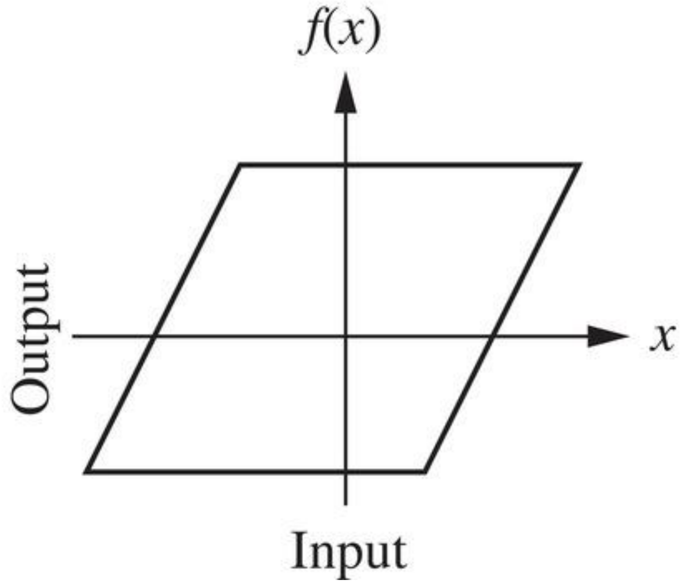
Amplifier saturation



Motor dead zone



Backlash in gears

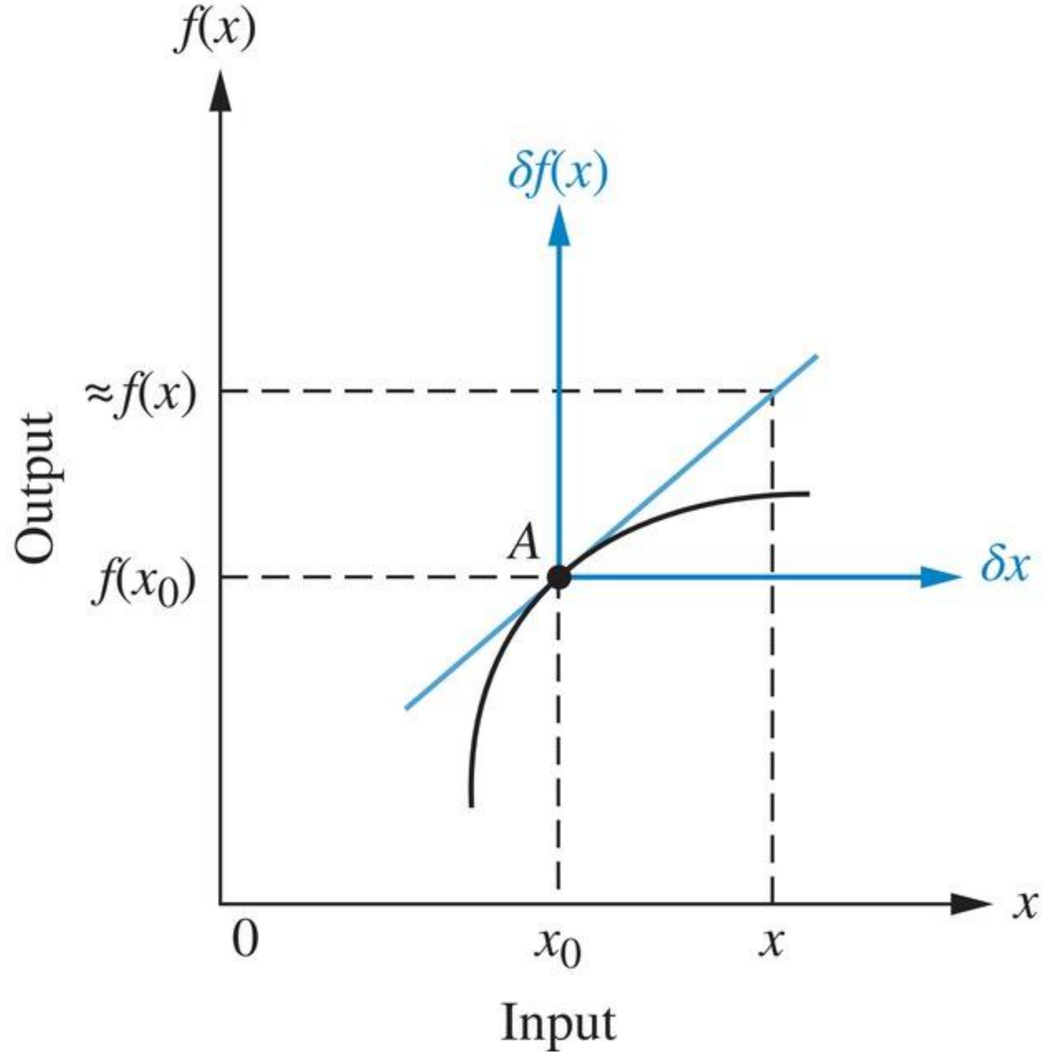


Linealización

Es un método para convertir una ecuación (o modelo) no lineal en un modelo lineal

Se basa en una expansión en serie de Taylor alrededor de un punto de operación nominal (o de referencia), donde solo se retienen los términos de primer orden

Linealización



Serie de Taylor

La técnica más usada para linealizar un modelo de un sistema alrededor de un punto de operación $(\bar{x}, \bar{y})$ es mediante la expansión en series de Taylor de la función no lineal y reteniendo solo hasta el término lineal

$$f(x, y) \approx f(\bar{x}, \bar{y}) + f_x(\bar{x}, \bar{y})(x - \bar{x}) + f_y(\bar{x}, \bar{y})(y - \bar{y})$$

Finalmente, se obtiene un modelo afín

$$\delta f(x, y) = k_x \delta x + k_y \delta y$$

donde las δ indican pequeñas variaciones

Validación de la linealización

1. Sea $(x(t), y(t))$ una solución del sistema no lineal con condición inicial $x(0) = x_0$ cerca de $\bar{x}$ y entrada $u(t)$ cerca a $\bar{u}$
2. Sea $(\delta x(t), \delta y(t))$ una solución de la aproximación lineal con condición inicial $\delta x(0) = x_0 - \bar{x}$ y entrada $\delta u(t) = u(t) - \bar{u}$
3. Desplazar la solución lineal desde las coordenadas de desviación $(\delta x(t), \delta y(t))$ a las originales

$$\left(x_{lin}(t), y_{lin}(t)\right) = (\delta x(t)+\bar{x}, \delta y(t)+\bar{y})$$

Ejemplo

Linealice la siguiente ecuación diferencial alrededor de un punto de equilibrio cuando $u_0 = 2$

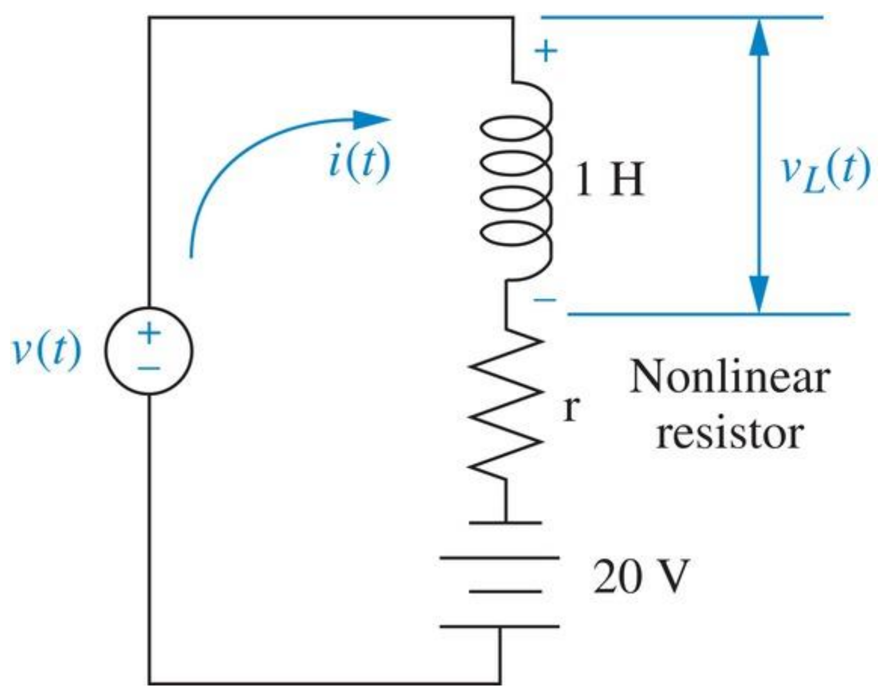
$$\dot{x} = -2x - 0.4x^3 + 0.3u$$

Ejemplo

Encuentre la función de transferencia, $V_L(s)/V(s)$, para la red eléctrica que se muestra en la figura, que contiene una resistencia no lineal cuya relación voltaje-corriente está definida por

$$i_r = 2e^{0.1 v_r}$$

donde i_r y v_r son la corriente y el voltaje de la resistencia, respectivamente.



Ejemplo

a) Linealice el sistema modelado mediante la ecuación diferencial alrededor del punto de operación $\overline{u} = 400$

$$\frac{dv(t)}{dt} = \frac{1}{2085}\left(u(t) - 0.4v^2(t) - 228\right)$$

B) Simule el comportamiento de los sistemas no lineal y linealizado y compare sus salidas alrededor del punto de operación y lejos de este