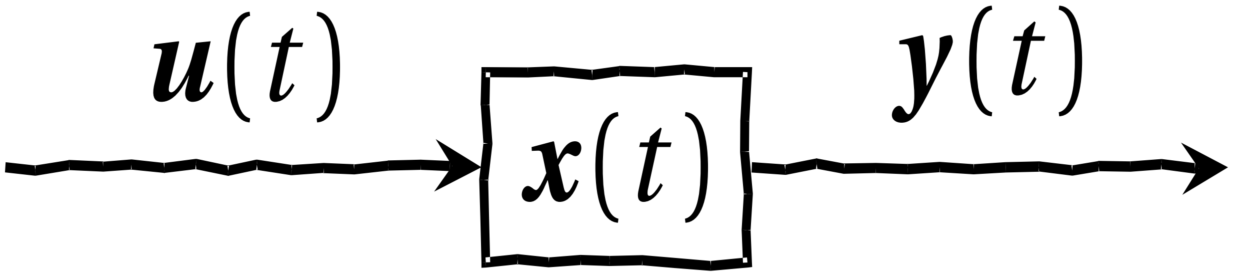
Biomecatrónica

Modelado en el dominio del tiempo

Variables de estado

Son un conjunto de variables dinámicas que definen completamente todas las características de un sistema



Nomenclatura:

$\boldsymbol{x}(t)$: Estados, $\boldsymbol{u}(t)$: Entradas, $\boldsymbol{y}(t)$: Salidas

Ecuaciones de estado

Las ecuaciones de estado son una colección de n ecuaciones diferenciales que son las derivadas de primer orden de cada variable de estado

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, u_1, u_2, \ldots, u_m)$$
$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, u_1, u_2, \ldots, u_m)$$
$$\vdots$$
$$\dot{x}_n = f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, u_1, u_2, \ldots, u_m)$$

Ejemplo 1

Determine las ecuaciones de estado para el sistema modelado por las siguientes EDO, donde z y w son las variables dinámicas y v es la entrada.

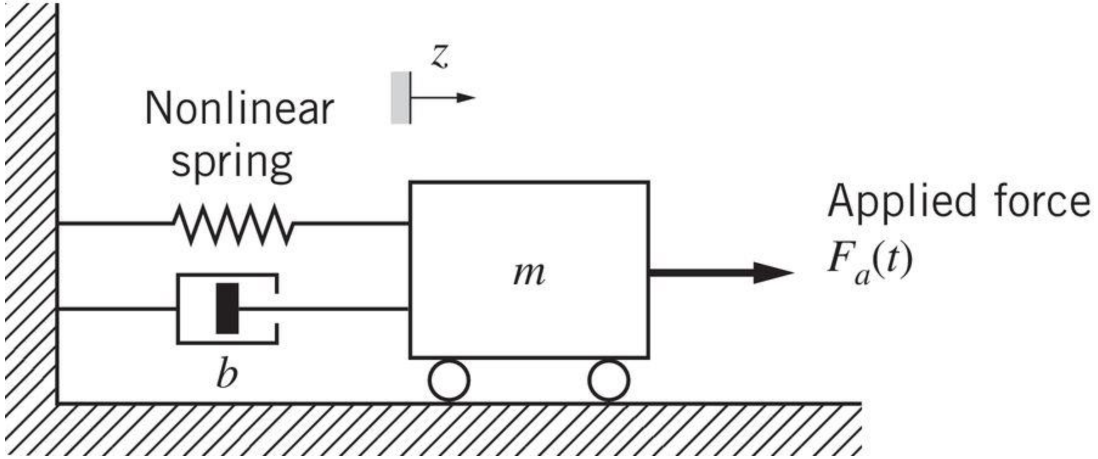
$$2\ddot{z} + 0.8z - 0.4w + 0.2\dot{z}\,w = 0$$

$$4\dot{w} + 3w + 0.1w^3 - 6z = 8v$$

Ejemplo 2

Determine las ecuaciones de estado, si la rigidez se modela mediante un resorte no lineal, que exhibe la siguiente relación fuerza-desplazamiento no lineal

$$f_k(z) = k_1 z + k_3 z^3$$



Representación en espacio de estados

Si las ecuaciones de modelado matemático que representan un sistema son lineales, entonces las ecuaciones de estado resultantes serán EDO lineales de primer orden

En este caso, podemos escribir las ecuaciones de variables de estado en un formato conveniente de matriz-vector llamado representación en espacio de estados **(SSR)**

Modelo SSR

$$\dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + b_{11}u_1 + \cdots + b_{1m}u_m$$
$$\dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + b_{21}u_1 + \cdots + b_{2m}u_m$$
$$\vdots$$
$$\dot{x}_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + b_{n1}u_1 + \cdots + b_{nm}u_m$$

$$y_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1n}x_n + d_{11}u_1 + \cdots + d_{1m}u_m$$
$$y_2 = c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \cdots + c_{2n}x_n + d_{21}u_1 + \cdots + d_{2m}u_m$$
$$\vdots$$
$$y_p = c_{p1}x_1 + c_{p2}x_2 + \cdots + c_{pn}x_n + d_{p1}u_1 + \cdots + d_{pm}u_m$$

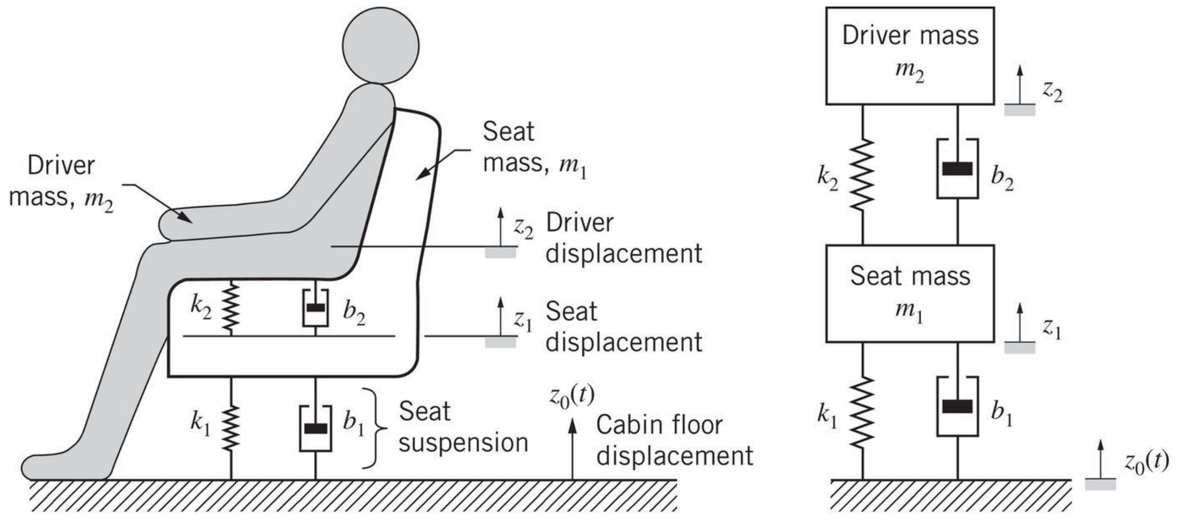
Modelo SSR

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}$$

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}$$

Ejemplo 3

Halle una SSR para el sistema de suspensión del asiento mostrado en la figura, en el que las dos medidas del sensor son el desplazamiento y la aceleración de la masa que representa al conductor



(a) (b)

Ejemplo 4

Halle la SSR para el modelo epidemiológico SIR en una población de tamaño fijo

$$\dot{S} = \mu N - \beta \frac{SI}{N} - \mu S$$

$$\dot{I} = \beta \frac{SI}{N} - (\gamma + \mu) I$$

$$\dot{R} = \gamma I - \mu R$$

Conversión SSR a TF

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}$$
$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}$$

$$G(s) = \boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D}$$

Ejemplo 5

Muestre que las siguientes dos representaciones del espacio de estados darán como resultado la misma función de transferencia

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -1.5 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1.5 & 0.625 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Conversión TF a SSR

Una ventaja de la SSR es que se puede utilizar para la simulación computacional de sistemas físicos, por lo tanto, si queremos simular un sistema representado por una función de transferencia, primero debemos convertir la representación de la función de transferencia al espacio de estados*

Al principio seleccionamos un conjunto de variables de estado, llamadas **variables de fase**, donde cada variable de estado posterior se define como la derivada de la variable de estado anterior

* En lenguajes de programación de propósito general

Ejemplo 6

Halle la SSR en variables de fase del sistema modelado por la función de transferencia

$$G(s) = \frac{24}{s^3 + 9s^2 + 26s + 24}$$

Conversión TF a SSR en variables de fase

$$G(s) = \frac{b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & -a_4 & -a_5 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + [0]\, u$$

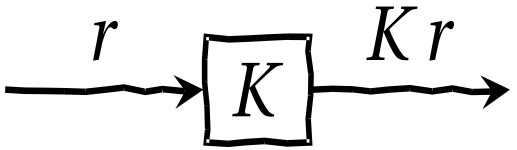
Ejemplo 7

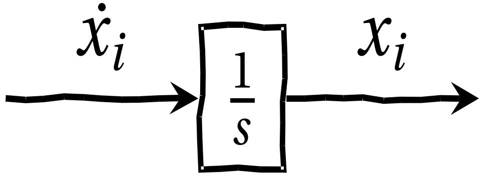
Halle la SSR en variables de fase del sistema modelado por la función de transferencia y halle los valores propios de la matriz de transición de estados

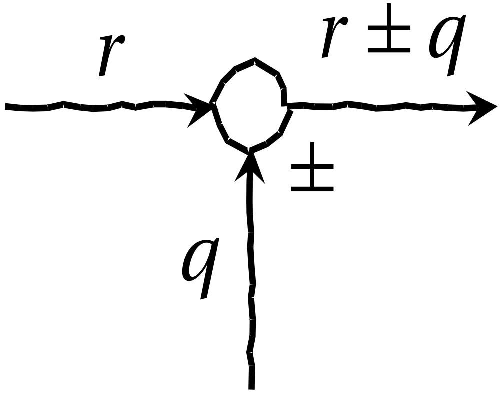
$$G(s) = \frac{s^2 + 7s + 2}{s^3 + 9s^2 + 26s + 24}$$

Diagramas de simulación

Es una forma de representar el modelo en variables de estado es mediante un diagrama que, para el caso de sistemas lineales, contiene tres tipos de bloques







Ejemplo 8

Halle el diagrama de simulación del sistema regido por la ecuación diferencial

$$2\frac{d^2y}{dt^2}+6\frac{dy}{dt}+8y=10\frac{d^2u}{dt^2}+40\frac{du}{dt}+30u$$