

# BIOMECATRÓNICA

Análisis de estabilidad

# Criterios de estabilidad

Un sistema es **estable** si su salida **no crece indefinidamente**

Existen diferentes criterios de estabilidad que tienen campos de aplicación variados

- Estabilidad BIBO
- Estabilidad interna
- Estabilidad de Routh-Hurwitz
- × Estabilidad en el sentido de Nyquist
- × Estabilidad en el sentido de Lyapunov

# Estabilidad BIBO

Un sistema con respuesta al impulso  $h(t)$  es estable BIBO si y solo si

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau < \infty$$

esto se traduce en que todos los polos deben tener parte real  
**estrictamente negativa**

# Estabilidad marginal

Se conoce como sistema **marginalmente estable** cuando este es BIBO estable, pero existe respuesta del sistema aun cuando se ha eliminado la respuesta

Esto implica que hay algunas entradas acotadas para las cuales la salida es no acotada y, en términos de polos, que **al menos uno tiene parte real cero**

$$H_1(s) = \frac{1}{s} \quad H_2(s) = \frac{1}{s^2 + 1}$$

# Estabilidad interna

Un sistema tiene estabilidad interna si y solo si todos los valores propios en la SSR tienen parte real **estrictamente negativa**

Un sistema puede ser internamente inestable, pero estable BIBO

# Estabilidad de Routh-Hurwitz

Considere el polinomio característico  $a(s)$  de un sistema

$$a(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \cdots + a_{n-1} s + a_n$$

**Condición necesaria:** todos los coeficientes  $a_i$  son positivos

**Condición necesaria y suficiente:** todos los elementos en la primera columna del arreglo de Routh son positivos

# Condición de necesidad

$$\begin{aligned}
 a(s) &= s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_{n-1} s + a_n \\
 &= (s - r_1)(s - r_2) \dots (s - r_n) \\
 &= s^n - (r_1 + r_2 + \dots + r_n)s^{n-1} \\
 &\quad + (r_1 r_2 + r_1 r_3 + \dots + r_1 r_n + r_2 r_3 + \dots)s^{n-2} \\
 &\quad - (r_1 r_2 r_3 + r_1 r_2 r_4 + \dots)s^{n-3} + \dots \\
 &\quad + (-1)^n (r_1 r_2 \dots r_n)
 \end{aligned}$$

# Arreglo de Routh

1. Separar los coeficientes de  $a(s)$

$$\begin{array}{lcl} s^n & : & 1 \quad a_2 \quad a_4 \quad \cdots \\ s^{n-1} & : & a_1 \quad a_3 \quad a_5 \quad \cdots \end{array}$$

2. Luego agregamos filas posteriores

$$\begin{array}{lcl} \text{Fila } n & s^n : & 1 \quad a_2 \quad a_4 \quad \cdots \\ \text{Fila } n-1 & s^{n-1} : & a_1 \quad a_3 \quad a_5 \quad \cdots \\ \text{Fila } n-2 & s^{n-2} : & b_1 \quad b_2 \quad b_3 \quad \cdots \\ \text{Fila } n-3 & s^{n-3} : & c_1 \quad c_2 \quad c_3 \quad \cdots \\ & \vdots & \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \text{Fila } 2 & s^2 : & * \quad * \\ \text{Fila } 1 & s^1 : & * \\ \text{Fila } 0 & s^0 : & * \end{array}$$



# Arreglo de Routh

$$b_1 = - \frac{\det \begin{bmatrix} 1 & a_2 \\ a_1 & a_3 \end{bmatrix}}{a_1} = \frac{a_1 a_2 - a_3}{a_1},$$

$$b_2 = - \frac{\det \begin{bmatrix} 1 & a_4 \\ a_1 & a_5 \end{bmatrix}}{a_1} = \frac{a_1 a_4 - a_5}{a_1},$$

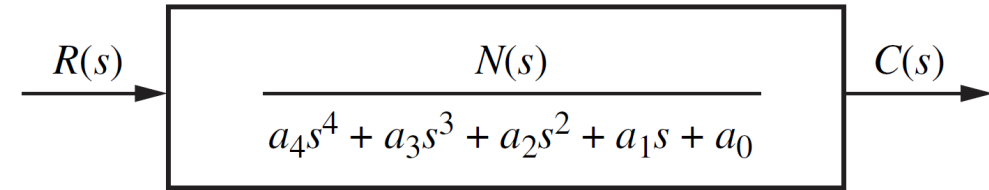
$$b_3 = - \frac{\det \begin{bmatrix} 1 & a_6 \\ a_1 & a_7 \end{bmatrix}}{a_1} = \frac{a_1 a_6 - a_7}{a_1},$$

$$c_1 = - \frac{\det \begin{bmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix}}{b_1} = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1},$$

$$c_2 = - \frac{\det \begin{bmatrix} a_1 & a_5 \\ b_1 & b_3 \end{bmatrix}}{b_1} = \frac{b_1 a_5 - a_1 b_3}{b_1},$$

$$c_3 = - \frac{\det \begin{bmatrix} a_1 & a_7 \\ b_1 & b_4 \end{bmatrix}}{b_1} = \frac{b_1 a_7 - a_1 b_4}{b_1}.$$

# Arreglo de Routh



**TABLE 6.2** Completed Routh table

$s^4$	$a_4$	$a_2$	$a_0$
$s^3$	$a_3$	$a_1$	0
$s^2$	$-\frac{\begin{vmatrix} a_4 & a_2 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix}}{a_3} = b_1$	$-\frac{\begin{vmatrix} a_4 & a_0 \\ a_3 & 0 \end{vmatrix}}{a_3} = b_2$	$-\frac{\begin{vmatrix} a_4 & 0 \\ a_3 & 0 \end{vmatrix}}{a_3} = 0$
$s^1$	$-\frac{\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}{b_1} = c_1$	$-\frac{\begin{vmatrix} a_3 & 0 \\ b_1 & 0 \end{vmatrix}}{b_1} = 0$	$-\frac{\begin{vmatrix} a_3 & 0 \\ b_1 & 0 \end{vmatrix}}{b_1} = 0$
$s^0$	$-\frac{\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & 0 \end{vmatrix}}{c_1} = d_1$	$-\frac{\begin{vmatrix} b_1 & 0 \\ c_1 & 0 \end{vmatrix}}{c_1} = 0$	$-\frac{\begin{vmatrix} b_1 & 0 \\ c_1 & 0 \end{vmatrix}}{c_1} = 0$

# Casos especiales

Pueden ocurrir dos casos especiales

- (1) La tabla de Routh tiene un cero solo en la primera columna de una fila
- (2) la tabla de Routh tiene una fila entera que consta de ceros

# Caso especial I

## MÉTODO ÉPSILON

Se asigna un épsilon,  $\epsilon$ , para reemplazar el cero en la primera columna

Luego se evalúan los entradas con  $\epsilon$  y se evalúan los límites tal que se acerque a cero desde el lado positivo o negativo

## MÉTODO DEL RECÍPROCO

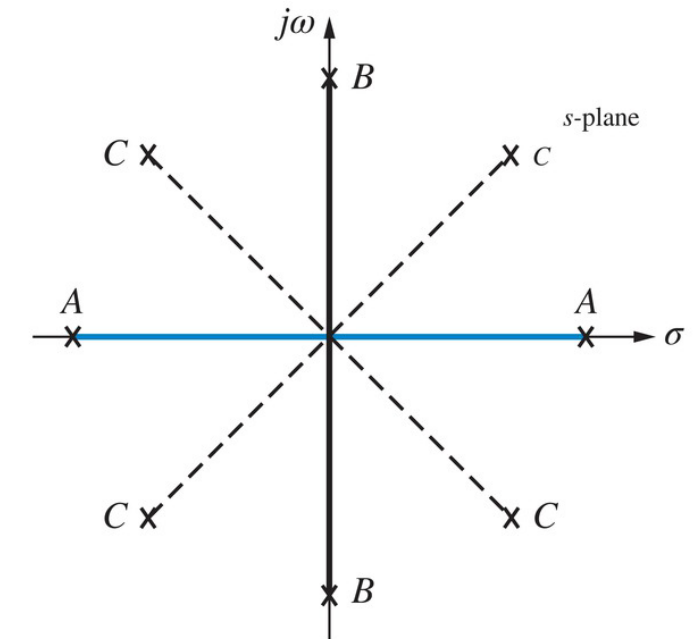
Se construye el arreglo de Routh usando el polinomio recíproco

$$s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0 = 0$$

$$\left(\frac{1}{d}\right)^n \left[1 + a_{n-1}d + \dots + a_1d^{(n-1)} + a_0d^n\right] = 0$$

# Caso especial II

Aparecerá una fila entera de ceros en la tabla de Routh cuando un polinomio puramente par o puramente impar sea un factor del polinomio original. Los polinomios pares solo tienen raíces simétricas y para “desaparecer” esta fila de ceros, se cambia la fila siguiente por el polinomio derivada. A partir de ahí, el arreglo de Routh evalúa las raíces del polinomio par.



- A: Real and symmetrical about the origin ———
- B: Imaginary and symmetrical about the origin ———
- C: Quadrantal and symmetrical about the origin - - - -

Aplique el criterio de Routh-Hurwitz a los siguientes polinomios

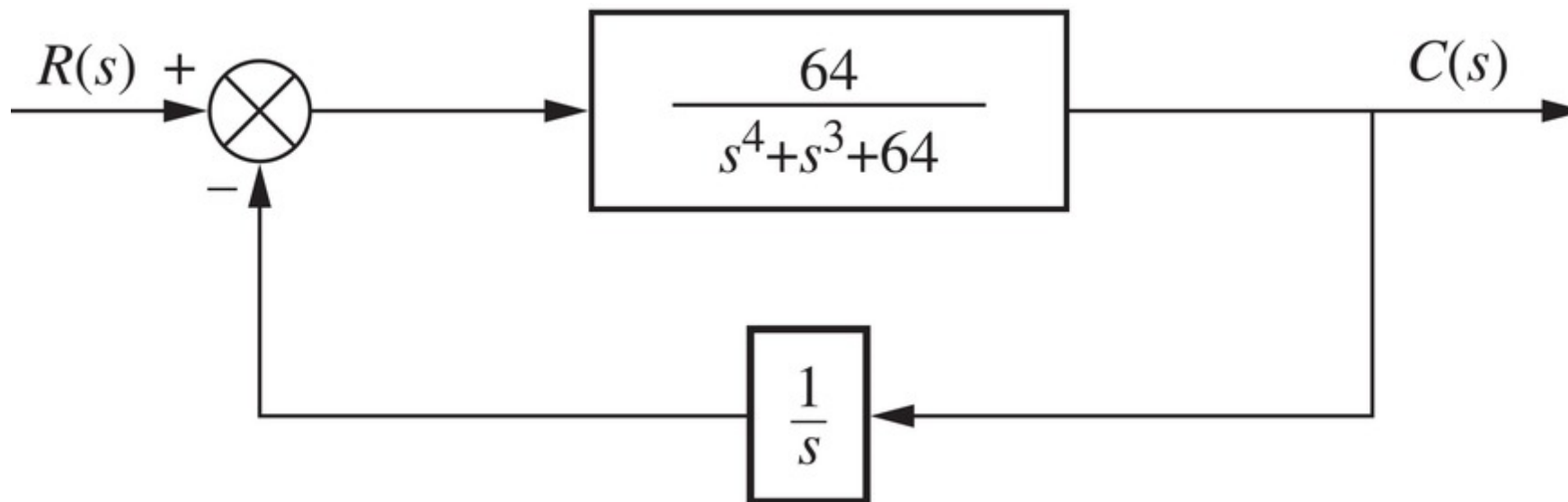
$$D_1(s) = s^5 + 2s^4 + 4s^3 + 6s^2 + 8s + 12$$

$$D_2(s) = s^3 + 14s^2 + 55s + 42$$

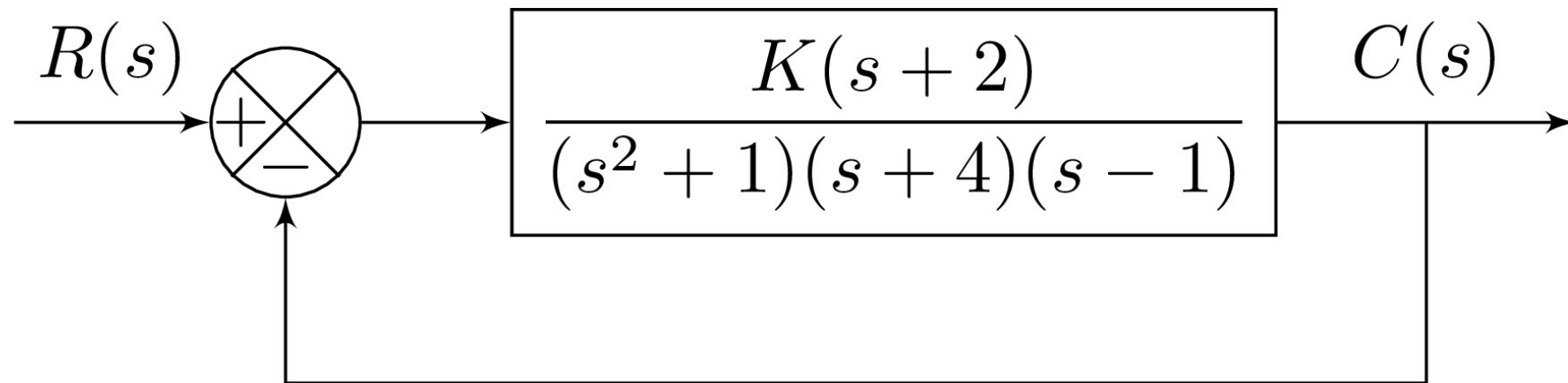
$$D_3(s) = s^5 + 2s^4 + 3s^3 + 6s^2 + 5s + 3$$

$$D_4(s) = s^5 + 7s^4 + 6s^3 + 42s^2 + 8s + 56$$

Use el criterio de Routh-Hurwitz para hallar cuántos polos LHP, RHP y  $j\omega$  de lazo cerrado tiene el sistema



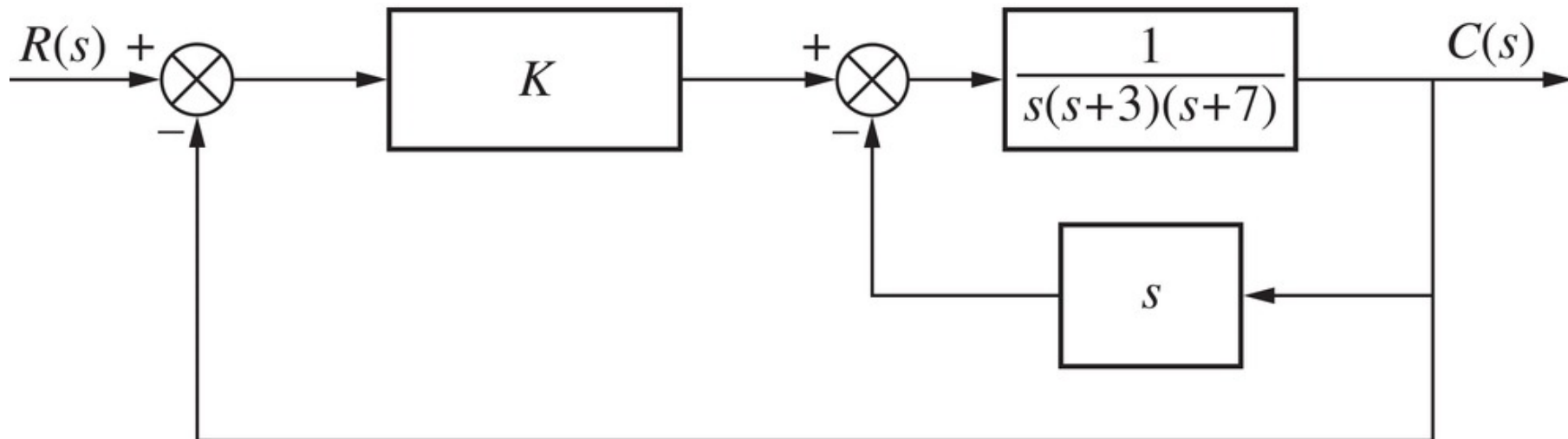
Halle el rango de valores de  $K$  que garantizan estabilidad para el sistema en lazo cerrado





Para el sistema mostrado, halle

- el rango de  $K$  para estabilidad en lazo cerrado
- el valor de  $K$  que hace que el sistema oscile y la frecuencia de oscilación



# Ejemplo 5

Para el sistema mostrado, halle

- El valor de  $K_2$  para que el lazo interno tenga dos polos reales iguales y el valor asociado de  $K_1$  para estabilidad
- El valor de  $K_1$  para que haya un polo de lazo cerrado ubicado en  $s = -5$ .

En este caso, ¿es posible aproximar la respuesta a la de un sistema de segundo orden subamortiguado?

$$G_1(s) = \frac{1}{s(s+2)(s+4)}$$

