

Equivalencia entre representaciones

Biomecatrónica 2025-1



Objetivos de la clase

- Establecer la relación entre la ecuación diferencial, la función de transferencia y la representación en el espacio de estados
- Demostrar la equivalencia matemática entre las raíces de la ecuación diferencial, los polos de la función de transferencia y los eigenvalores de la representación en el espacio de estados

Sistemas SISO

Un sistema **SISO (Single Input, Single Output)** tiene una única entrada y una única salida

Su comportamiento dinámico se describe mediante ecuaciones diferenciales, funciones de transferencia o el espacio de estados


Estas tres representaciones, aunque diferentes, son equivalentes y se puede hacer la transformación entre ellos

FdeT a partir de la SSR

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}u$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$


$$H(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$$

Ejemplo 1

Halle la función de transferencia para el actuador solenoidal cuya SSR es

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -150000 & -400 & 225 \\ 0 & 0 & -500 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 100 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + [0] u$$

FdeT a partir de la ODE

$$\begin{aligned} y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \dot{y} + a_n y \\ = b_0 u^{(n)} + b_1 u^{(n-1)} + \dots + b_{n-1} \dot{u} + b_n u \end{aligned}$$



$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n}$$

SSR a partir de la ODE (Caso 1)

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \dot{y} + a_n y = b_n u$$

$$\begin{aligned} x_1 &= y \\ x_2 &= \dot{y} \\ &\vdots \\ x_n &= y^{(n-1)} \end{aligned} \quad \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_n \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} x$$

SSR a partir de la ODE (Caso 2)

$$\begin{aligned}y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \dot{y} + a_n y \\= b_0 u^{(n)} + b_1 u^{(n-1)} + \dots + b_{n-1} \dot{u} + b_n u\end{aligned}$$

$$x_1 = y - \beta_0 u$$

$$\beta_0 = b_0$$

$$x_2 = \dot{y} - \beta_0 \dot{u} - \beta_1 u$$

$$\beta_1 = b_1 - a_1 \beta_0$$

$$x_3 = \ddot{y} - \beta_0 \ddot{u} - \beta_1 \dot{u} - \beta_2 u$$

$$\beta_2 = b_2 - a_1 \beta_1 - a_2 \beta_0$$

$$\vdots$$
$$\vdots$$

$$x_n = y^{(n-1)} - \beta_0 u^{(n-1)} - \dots - \beta_{n-2} \dot{u} - \beta_{n-1} u$$

$$\beta_{n-1} = b_{n-1} - a_1 \beta_{n-2} - \dots - a_{n-2} \beta_1 - a_{n-1} \beta_0$$

SSR a partir de la ODE (Caso 2)

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \\ \beta_n \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} x + \beta_0 u$$

Ejemplo 2

Considere el sistema descrito mediante la EDO

$$\ddot{y} + 16\dot{y} + 65y = \ddot{u} + 3.5\dot{u} + 2u$$

Obtenga una SSR del sistema