Equivalencia entre representaciones

Biomecatrónica 2025-1

Objetivos de la clase

- Establecer la relación entre la ecuación diferencial, la función de transferencia y la representación en el espacio de estados
- Demostrar la equivalencia matemática entre las raíces de la ecuación diferencial, los polos de la función de transferencia y los eigenvalores de la representación en el espacio de estados

Sistemas SISO

Un sistema **SISO (Single Input, Single Output)** tiene una única entrada y una única salida

Su comportamiento dinámico se describe mediante ecuaciones diferenciales, funciones de transferencia o el espacio de estados

Estas tres representaciones, aunque diferentes, son equivalentes y se puede hacer la transformación entre ellos

FdeT a partir de la SSR

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}u$$
$$y = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} + Du$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

$$H(s) = \boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} + D$$

Ejemplo 1

Halle la función de transferencia para el actuador solenoidal cuya SSR es

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -150000 & -400 & 225 \\ 0 & 0 & -500 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 100 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + [0]\, u$$

FdeT a partir de la ODE

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}\dot{y} + a_n y$$
$$= b_0 u^{(n)} + b_1 u^{(n-1)} + \cdots + b_{n-1}\dot{u} + b_n u$$

$$\Big\Downarrow$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n}$$

SSR a partir de la ODE (Caso 1)

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}\dot{y} + a_n y = b_n u$$

$$x_1 = y$$
$$x_2 = \dot{y}$$
$$\vdots$$
$$x_n = y^{(n-1)}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_n \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} x$$

SSR a partir de la ODE (Caso 2)

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}\dot{y} + a_n y$$
$$= b_0 u^{(n)} + b_1 u^{(n-1)} + \cdots + b_{n-1}\dot{u} + b_n u$$

$$\begin{aligned}
x_1 &= y - \beta_0 u \\
x_2 &= \dot{y} - \beta_0 \dot{u} - \beta_1 u \\
x_3 &= \ddot{y} - \beta_0 \ddot{u} - \beta_1 \dot{u} - \beta_2 u \\
&\vdots \\
x_n &= y^{(n-1)} - \beta_0 u^{(n-1)} - \cdots - \beta_{n-2}\dot{u} - \beta_{n-1} u
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_0 &= b_0 \\
\beta_1 &= b_1 - a_1\beta_0 \\
\beta_2 &= b_2 - a_1\beta_1 - a_2\beta_0 \\
\beta_3 &= b_3 - a_1\beta_2 - a_2\beta_1 - a_3\beta_0 \\
&\vdots \\
\beta_{n-1} &= b_{n-1} - a_1\beta_{n-2} - \cdots - a_{n-2}\beta_1 - a_{n-1}\beta_0 \\
\beta_n &= b_n - a_1\beta_{n-1} - \cdots - a_{n-1}\beta_1 - a_n\beta_0
\end{aligned}$$

SSR a partir de la ODE (Caso 2)

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \\ \beta_n \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} x + \beta_0 \, u$$

Ejemplo 2

Considere el sistema descrito mediante la EDO

$$\dddot{y} + 16\ddot{y} + 65\dot{y} + 50y = \ddot{u} + 3.5\dot{u} + 2u$$

Obtenga una SSR del sistema