05 – Respuestas de SLIT de 1° y 2° orden

Biomecatrónica – 2023/II

UNIVERSIDAD EIA
Ser, Saber y Servir

Recapitulando

- Ya hemos visto que el primer paso para analizar un sistema de control es **obtener un modelo** matemático del mismo
- Una vez obtenido tal modelo, existen varios métodos para el **análisis del comportamiento** del sistema.

Señales de prueba típicas

- Las señales de prueba que se usan regularmente son funciones:
  - Escalón
  - Rampa
  - Parábola

- Con estas señales de prueba, es posible realizar con facilidad análisis matemáticos y experimentales de sistemas de control

Respuesta temporal

Consta de dos partes

- respuesta **transitoria**
- respuesta en **estado estacionario**

Sistemas de primer orden

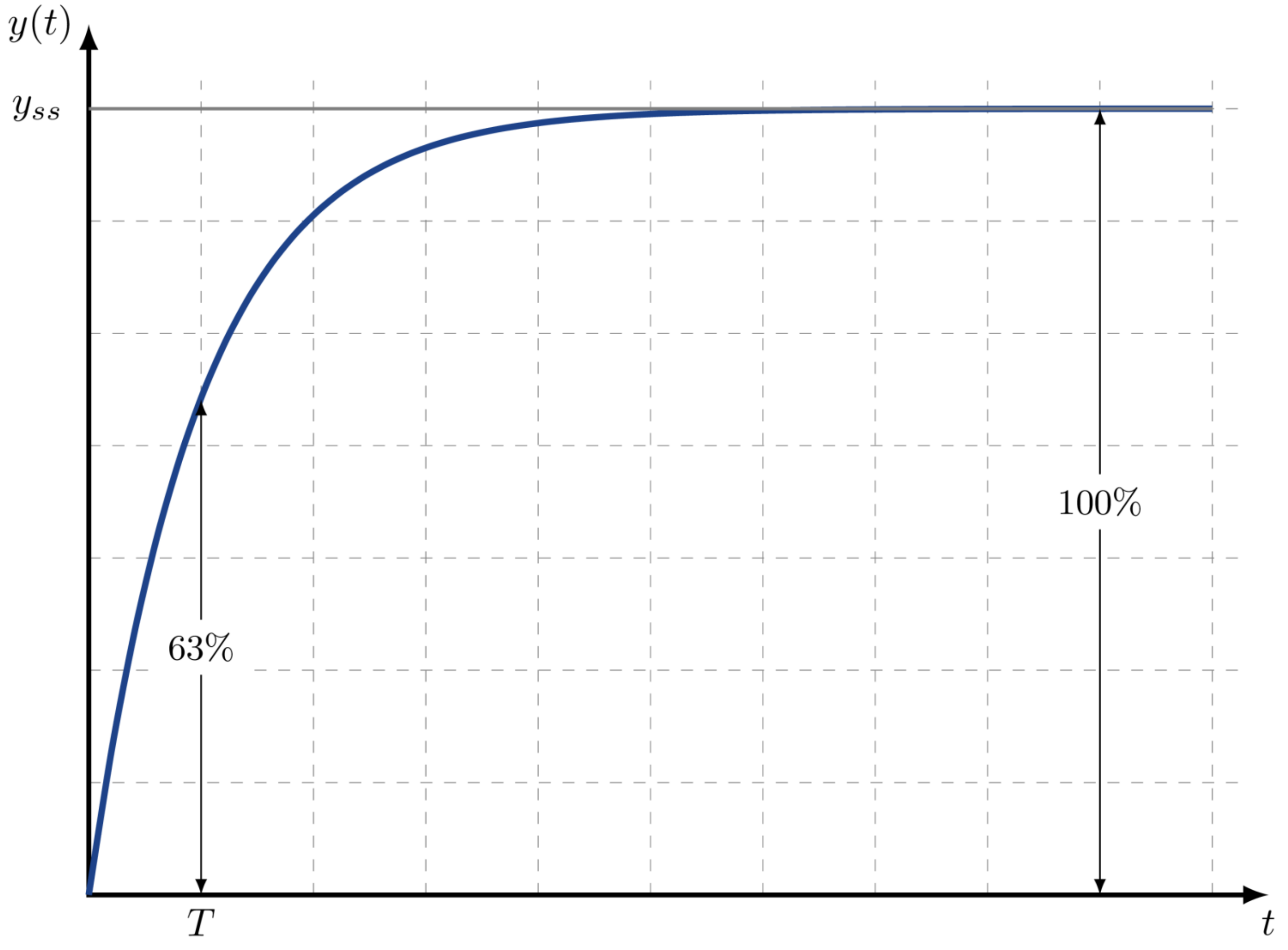
Un sistema de primer orden se caracteriza por tener una función de transferencia de la forma

$$H(s) = \frac{K}{Ts + 1}$$

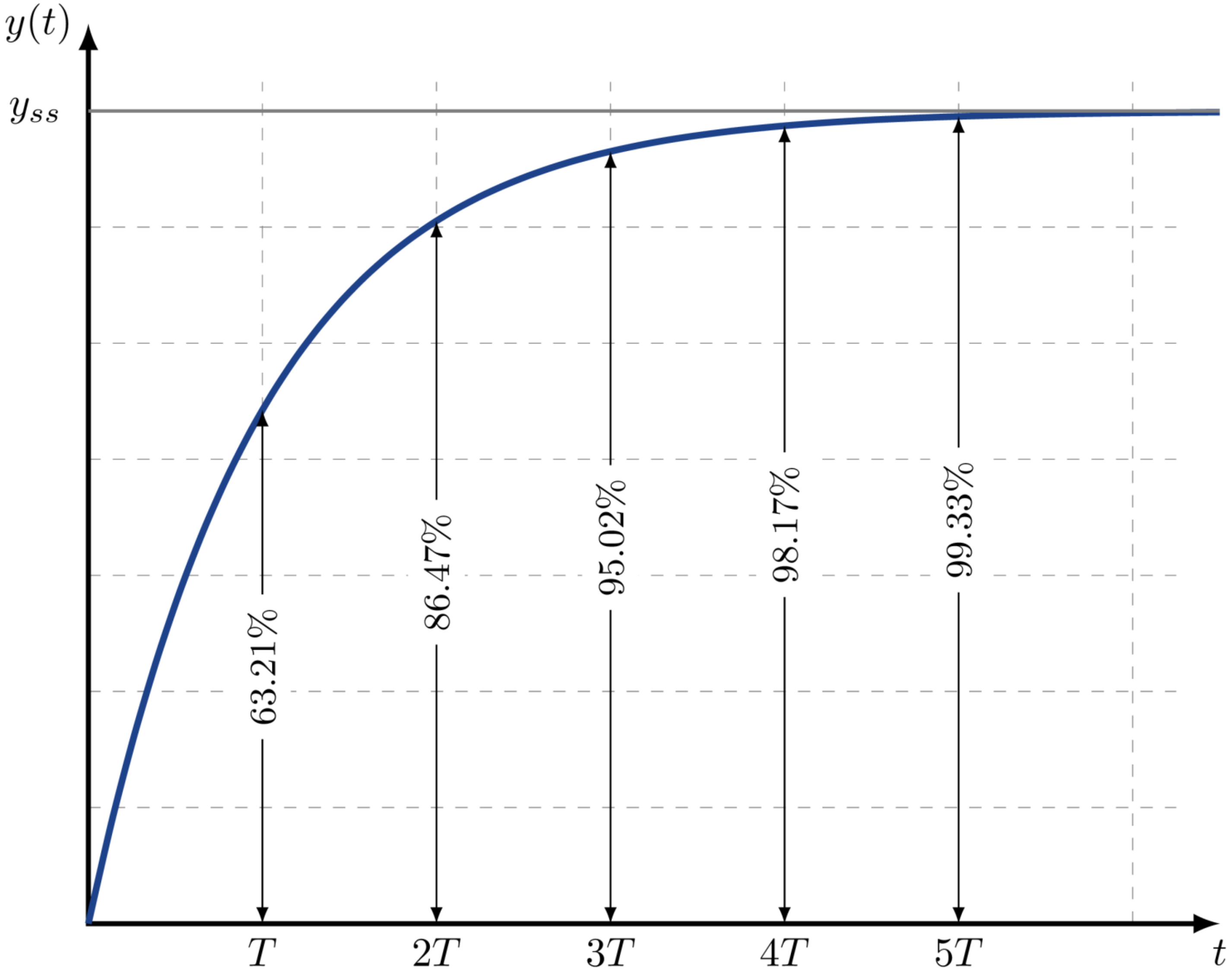
por lo que su respuesta al escalón tiene la forma

$$s(t) = K\left(1 - e^{-t/T}\right)$$

Respuesta temporal de primer orden



Tiempo de estabilización



Sistemas de segundo orden

Un sistema de segundo orden se caracteriza por tener una función de transferencia de la forma

$$H(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

y la forma de su respuesta al escalón dependerá del valor de ζ

Caso críticamente amortiguado: $\zeta = 1$

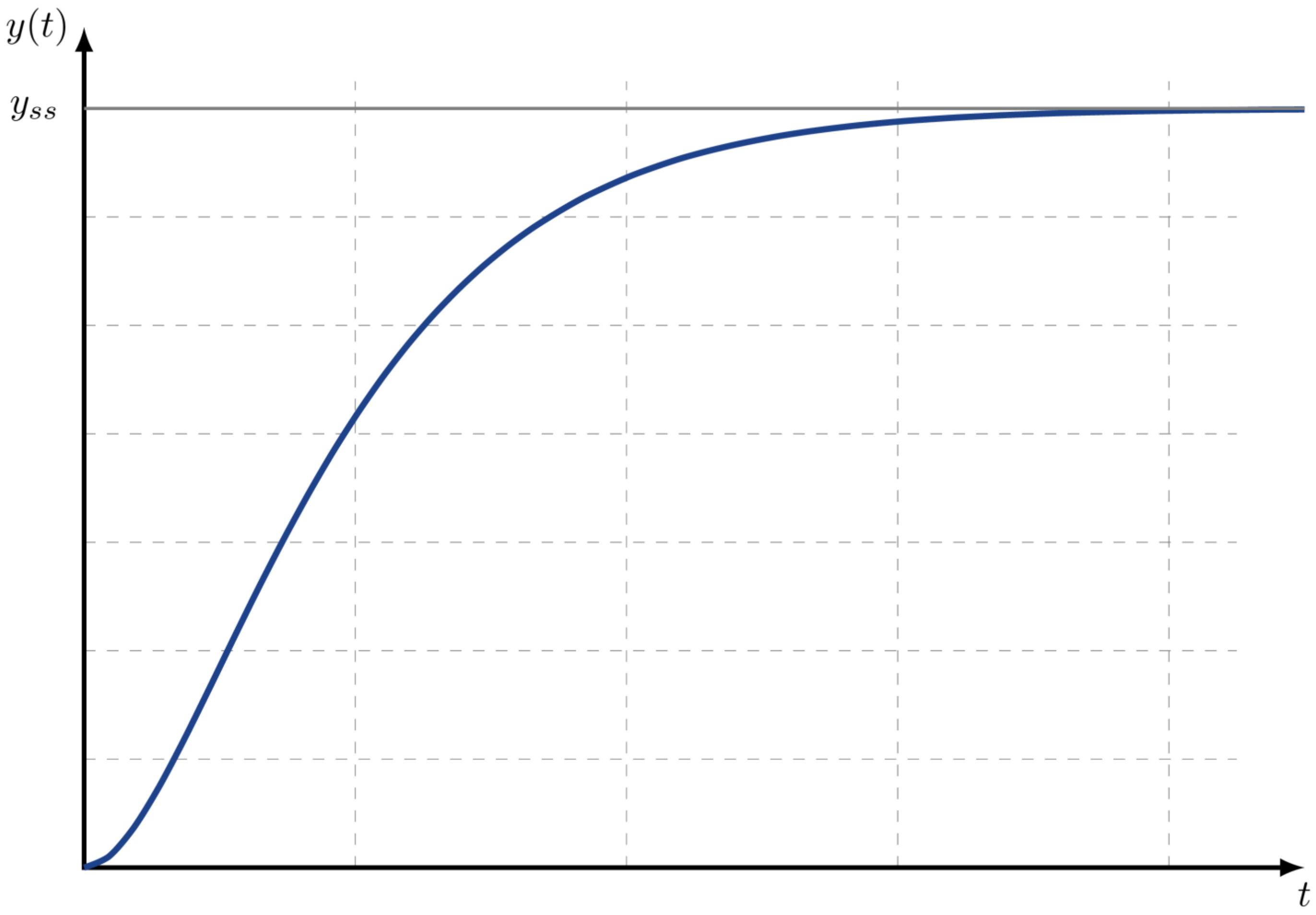
En este caso, las polos del sistema son reales iguales

$$s_{1,2} = -\omega_n$$

y su respuesta al escalón

$$s(t) = K - Ke^{-\omega_n t}(1 - \omega_n t)$$

Ejemplo



$$K = 7$$

$$\zeta = 1$$

$$\omega_n = 2$$

Caso sobreamortiguado: $\zeta > 1$

En este caso, las polos del sistema son reales diferentes

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

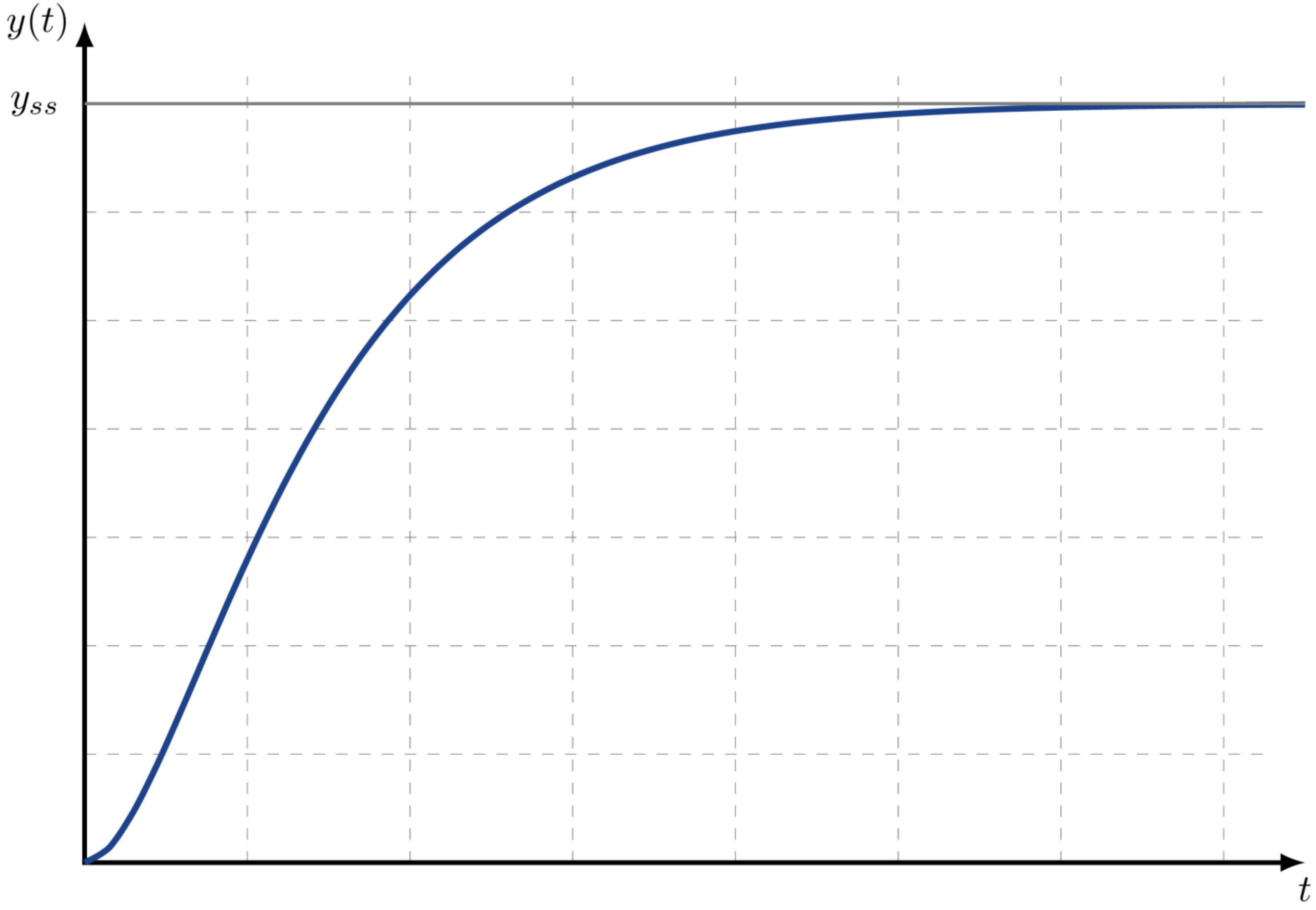
y su respuesta al escalón

$$s(t) = K + \frac{K\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}}\left(\frac{e^{-s_1 t}}{s_1} - \frac{e^{-s_2 t}}{s_2}\right)$$

donde

$$s_1 = \omega_n\left(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}\right) \quad s_2 = \omega_n\left(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)$$

Ejemplo



$$K = 7$$

$$\zeta = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

$$\omega_n = \sqrt{2}$$

Caso subamortiguado: $0 < \zeta < 1$

En este caso, las polos del sistema son complejos conjugados

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

y su respuesta al escalón

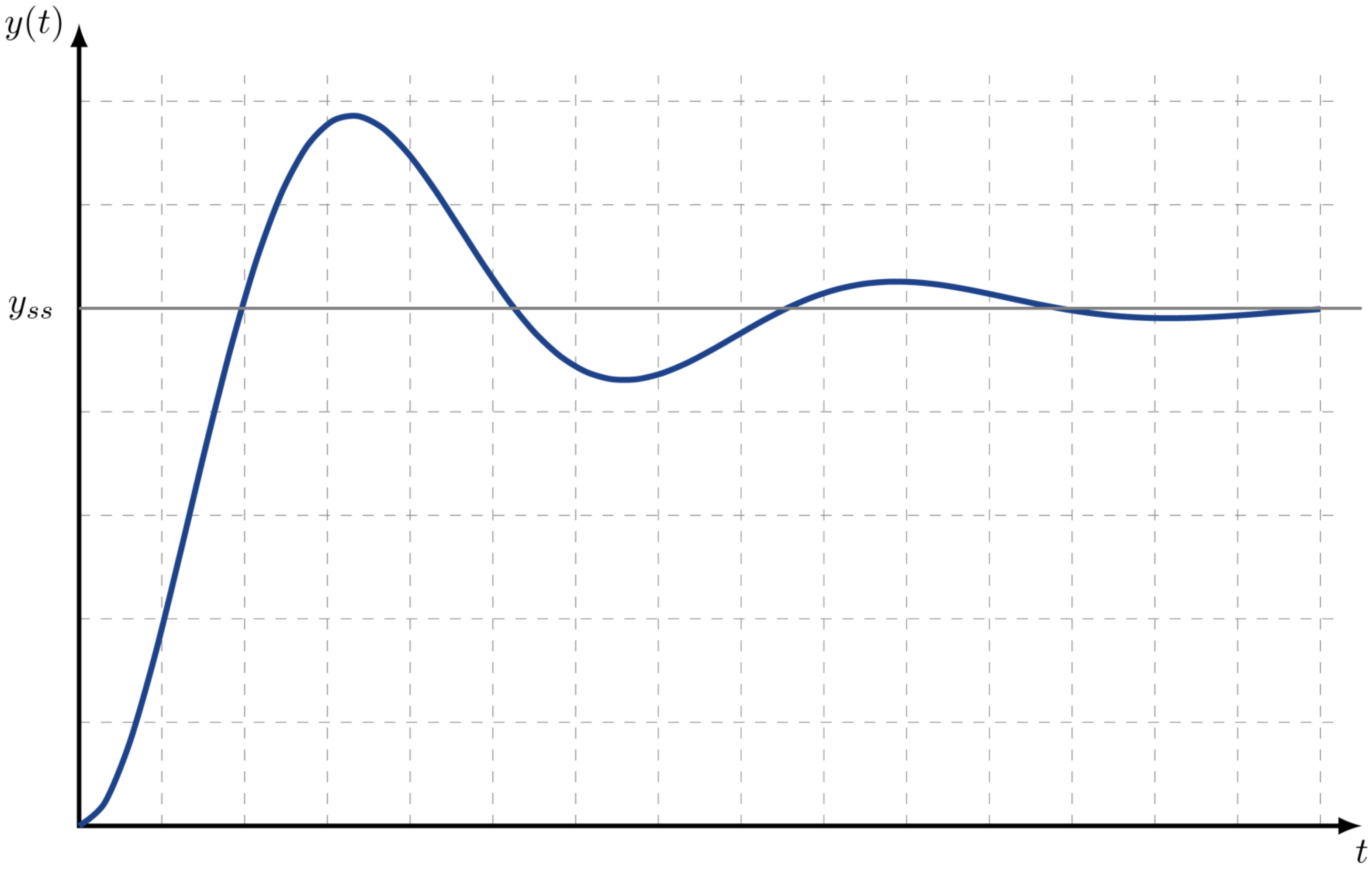
$$s(t) = K - Ke^{-\zeta\omega_n t}\left(\cos(\omega_d t) + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin(\omega_d t)\right)$$

$$= K - \frac{K}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_d t + \phi)$$

donde

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \quad \phi = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right)$$

Ejemplo



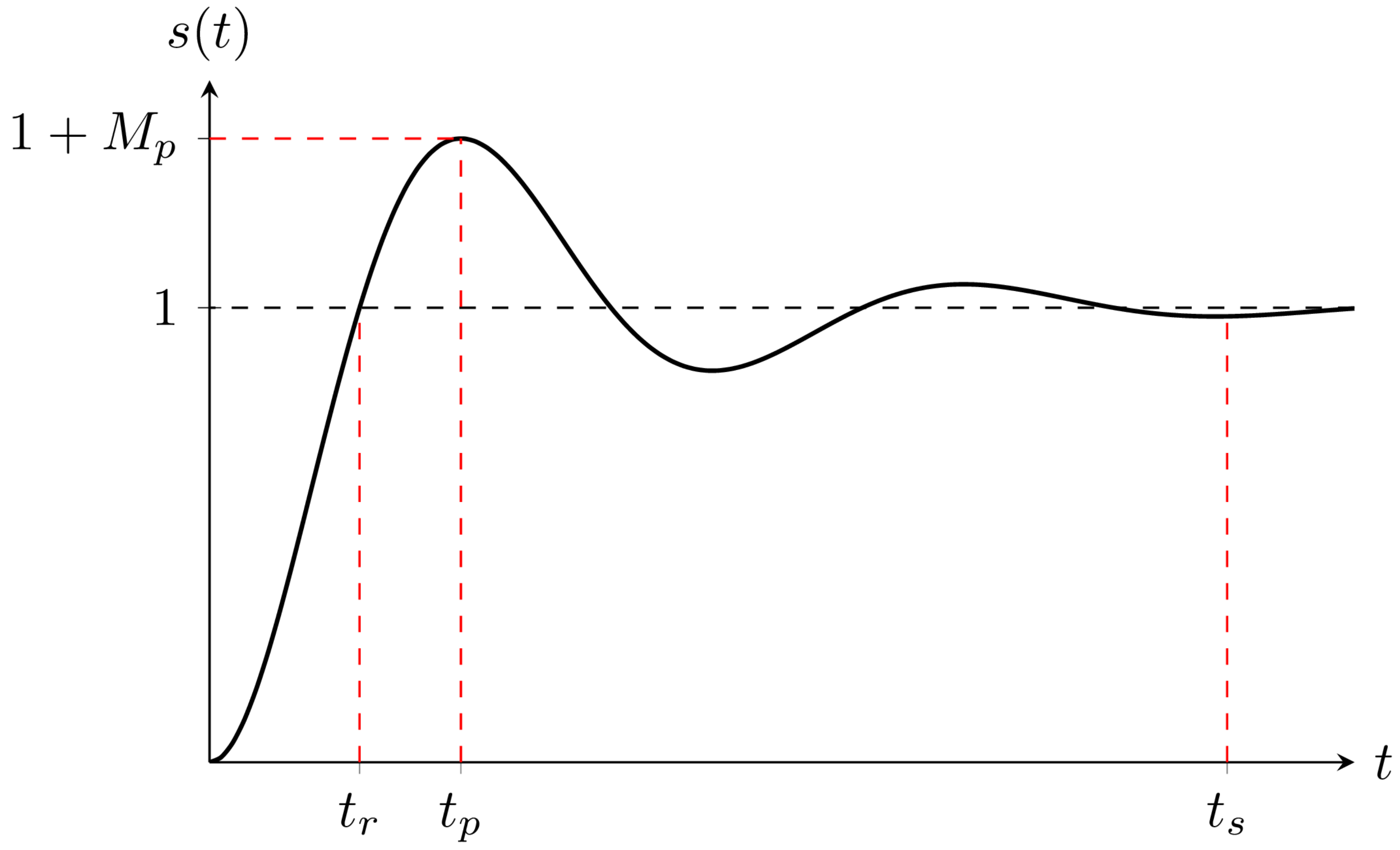
$$K = 5$$
$$\zeta = 0.3$$
$$\omega_n = 1$$

Especificaciones de la respuesta transitoria

Para la respuesta transitoria de un sistema de control ante una entrada escalón unitario, es común especificar lo siguiente:

- Tiempo de subida, t_r
- Tiempo de pico, t_p
- Máximo sobreimpulso, M_p
- Tiempo de estabilización, t_s

Especificaciones de la RT



$$t_r = \frac{\pi - \phi}{\omega_d}$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d}$$

$$M_p = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

$$t_{s_{p\%}} = \frac{-\ln\left(\frac{p}{100}\right)}{\zeta\omega_n}$$