

A continuación encontrará una serie de preguntas, respóndalas en la hoja provista para tal fin. En caso de requerir mayor espacio, puede adjuntar páginas adicionales marcadas adecuadamente. Puede tener a su disposición libro, notas de clase y calculadora.

Todos los procedimientos deben estar expresados de forma explícita y con el suficiente detalle para poder ser evaluado. Si hace alguna suposición, establézcala también de manera explícita.

Haga los cálculos numéricos y presente los resultados usando **dos cifras decimales**, salvo en caso de soluciones enteras. El examen es **individual** y cualquier interacción con algún compañero será considerada intento de fraude y la nota del examen será de cero (0.0).

Tiempo disponible para el desarrollo del examen: 2 horas

1 (10 puntos)

Halle la respuesta de entrada cero y estado cero del sistema que rige su dinámica mediante la ecuación diferencial

$$0.1\ddot{y} + 1.4\dot{y} + 4.8y = u$$

en el caso de que la entrada sea $u(t) = 0.8e^{-6t}$ y las condiciones iniciales $y(0^-) = 1$ y $\dot{y}(0^-) = 2$.

2 (10 puntos)

Un sistema se encuentra descrito por la SSR

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Halle la matriz de transferencia $\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$

3 (10 puntos)

Para el sistema con función de transferencia

$$G(s) = \frac{6s^2 + 15s + 3}{3s^3 + 9s^2 + 15s + 21}$$

(a) (5 puntos) Encuentre una SSR para el sistema.

(b) (5 puntos) Construya el diagrama de simulación de la SSR encontrada

4 (20 puntos)

El modelo dinámico de una pierna humana relaciona la rotación angular de salida (θ) sobre la articulación de la rodilla con el torque de entrada (T_m) aplicado por los músculos del muslo. En la Figura 1 se muestra un modelo mecánico simplificado para una prótesis de pierna. Este modelo supone (a) un torque de entrada, designado como $T_m(t)$, aplicado externamente, (b) amortiguamiento viscoso, B , debido al rozamiento en la articulación de la rodilla (c) e inercia, J , alrededor de esta articulación. Además, un componente del peso, Mg (donde M es la masa de la porción de la prótesis correspondiente a la pierna y el pie y g es la aceleración debida a la gravedad) crea un torque no lineal. Si suponemos que la prótesis tiene una densidad uniforme, el peso se puede aplicar en $L/2$, donde L es la longitud de la pierna, y por tanto el momento de inercia es el de un cilindro rotando alrededor de uno de sus extremos

$$J = \frac{ML^2}{3}$$

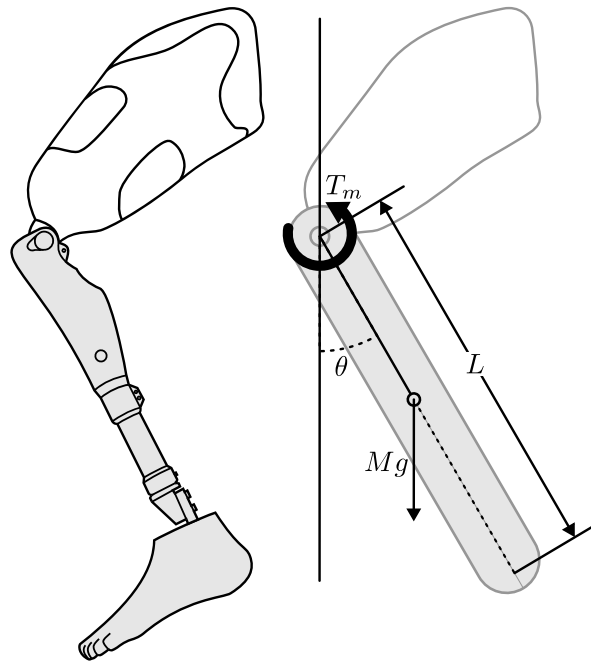


Figura 1: Modelo ideal de una prótesis de pierna y su modelo mecánico simplificado como un péndulo cilíndrico.

Con base en la información anterior, haga lo siguiente:

- (6 puntos) Encuentre la ecuación diferencial no lineal que describe la dinámica del sistema.
- (6 puntos) Defina un conjunto de variables de estado y establezca el modelo en ecuaciones de estado.
- (8 puntos) Linealice el modelo anterior alrededor del punto de equilibrio $\bar{\theta} = 0^\circ$. Para esto, tome los siguientes valores: $L = 50 \text{ cm}$, $M = 6 \text{ kg}$, $B = 4 \text{ N s/m}$ y $g = 9.8 \text{ m/s}^2$.