UNIVERSIDAD EIA

BIOMECATRÓNICA

Modelado en el dominio de la frecuencia

Transformada de Laplace

La transformada de Laplace es una transformación de dominio en la que un sistema dinámico, su entrada y su salida son consideradas entidades separadas y sus relaciones algebraicas

Viene dada por la integral

$$F(s) = \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt$$

Análisis en el dominio de Laplace

El proceso de análisis del comportamiento dinámico de un sistema en dominio de Laplace implica los siguientes pasos:

1. Conversión de las EDOs a ecuaciones algebraicas
2. Cálculos algebraicos para hallar las soluciones necesarias
3. Inversión de los resultados para llevarlos al dominio del tiempo

Inversión de la transformada de Laplace

El proceso de invertir la transformada de Laplace implica solucionar una integral de Bromwich usando el teorema de los residuos de Cauchy

$$f(t) = \sum \operatorname{Res}\left(F(s)e^{st}\right)$$

Un método alternativo, pero también basado en residuos, es la expansión en fracciones parciales

Ejemplo 1

Dada la siguiente EDO, solucione para $y(t)$ si las condiciones iniciales son $y(0) = 1, \dot{y}(0) = 2$ y la entrada es un escalón de amplitud 32

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 12\frac{dy(t)}{dt} + 32y(t) = x(t)$$

Ejemplo 2

Halle la transformada inversa de

$$F(s) = \frac{10}{s(s+2)(s+3)^2}$$

$$G(s) = \frac{s^3}{s^3 + 18s^2 + 104s + 192}$$

Función de transferencia

Función que relaciona algebraicamente la salida de un sistema con su entrada, bajo condiciones iniciales nulas y permite separar la entrada, el sistema y la salida

Representa el modelo matemático de un sistema dinámico en el dominio de Laplace

Función de transferencia

$$a_n \frac{d^n c(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} c(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_0 c(t) = b_m \frac{d^m r(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} r(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_0 r(t)$$

$$\Downarrow$$

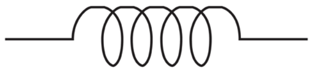
$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_0}$$

Ejemplo 3

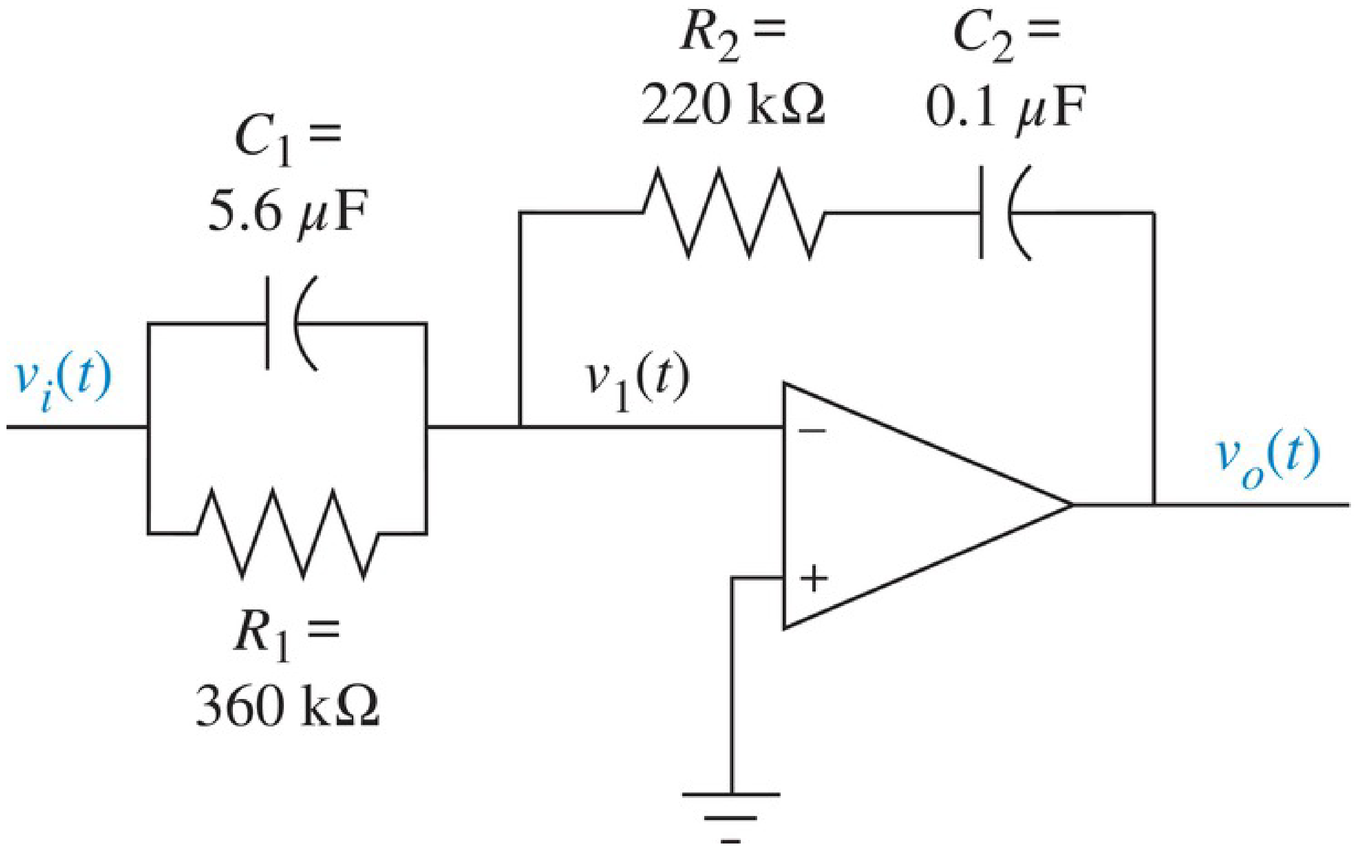
Halle la respuesta al escalón y la rampa del sistema con función de transferencia

$$G(s) = \frac{s}{(s+4)(s+8)}$$

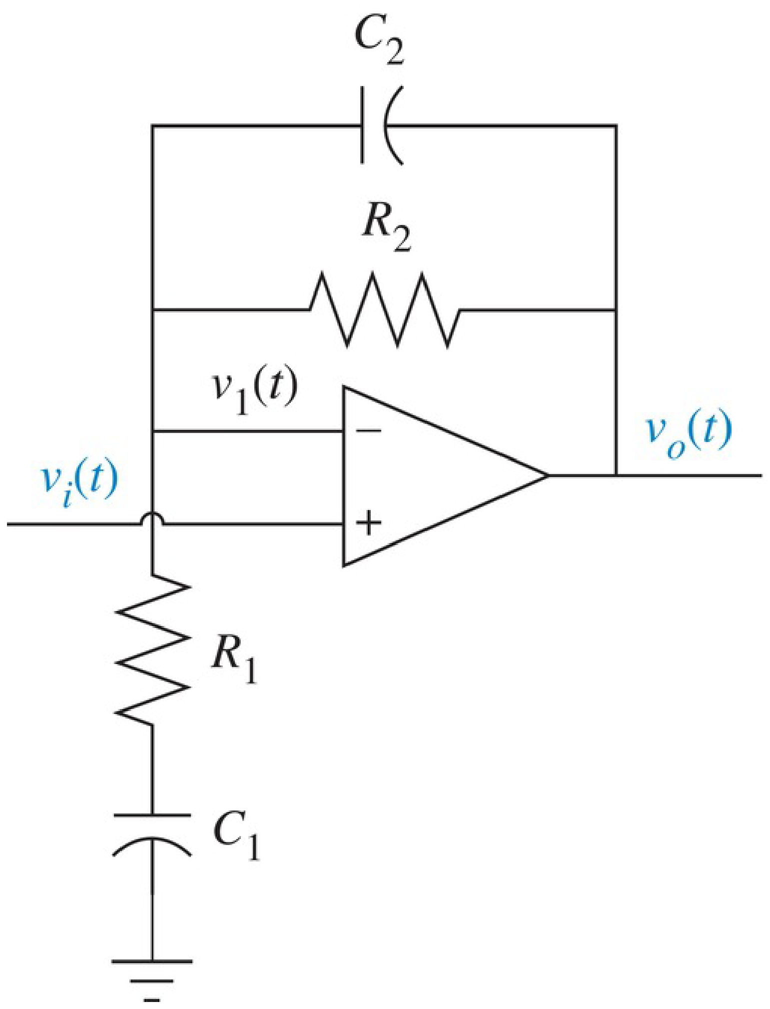
Modelo de circuitos eléctricos

Component	Voltage–current	Current–voltage	Voltage–charge	**Impedance** $Z(s) = V(s)/I(s)$	**Admittance** $Y(s) = I(s)/V(s)$
 Capacitor	$v(t) = \frac{1}{C}\int_0^1 i(\tau)d\tau$	$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt}$	$v(t) = \frac{1}{C}q(t)$	$\frac{1}{Cs}$	Cs
 Resistor	$v(t) = Ri(t)$	$i(t) = \frac{1}{R}v(t)$	$v(t) = R\frac{dq(t)}{dt}$	R	$\frac{1}{R} = G$
 Inductor	$v(t) = L\frac{di(t)}{dt}$	$i(t) = \frac{1}{L}\int_0^1 v(\tau)d\tau$	$v(t) = L\frac{d^2q(t)}{dt^2}$	Ls	$\frac{1}{Ls}$

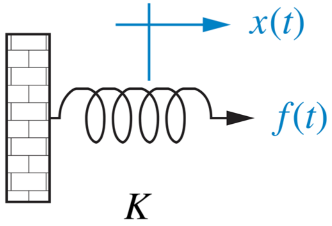
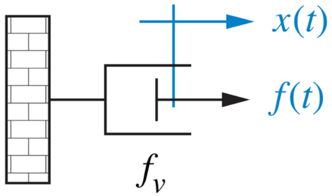
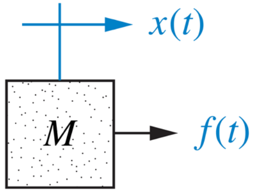
Ejemplo 4



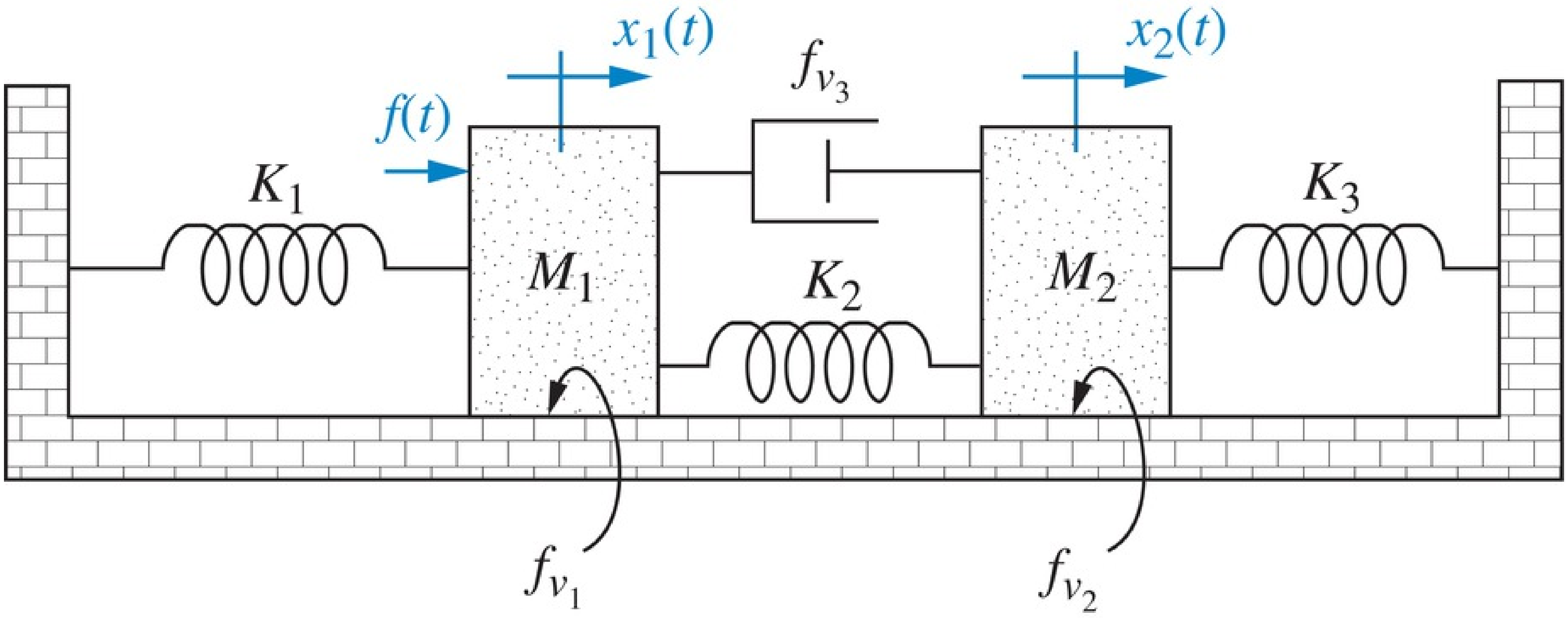
Ejemplo 5



Modelo de sistemas mecánicos

Component	Force–velocity	Force–displacement	Impedance $Z_M(s) = F(s)/X(s)$
Spring 	$f(t) = K\int_0^t v(\tau)d\tau$	$f(t) = Kx(t)$	K
Viscous damper 	$f(t) = f_v v(t)$	$f(t) = f_v \dfrac{dx(t)}{dt}$	$f_v s$
Mass 	$f(t) = M\dfrac{dv(t)}{dt}$	$f(t) = M\dfrac{d^2x(t)}{dt^2}$	Ms^2

Ejemplo 6



Analogías electromecánicas

Mecánico	Eléctrico
Fuerza	Voltaje
Masa	Inductancia
Fricción	Resistencia
Elasticidad	Recíproco de capacitancia
Desplazamiento	Carga
Velocidad	Corriente

Modelos generalizados

Sistemas de **diferente naturaleza** tienen **comportamientos similares**, por lo que los modelos se pueden caracterizar por dos tipos de variables: **esfuerzo** y **flujo**

Las relaciones entre ellas vienen dada por

$$\psi = R\zeta$$

$$\psi = \frac{1}{C}\int_0^t \zeta \; dt$$

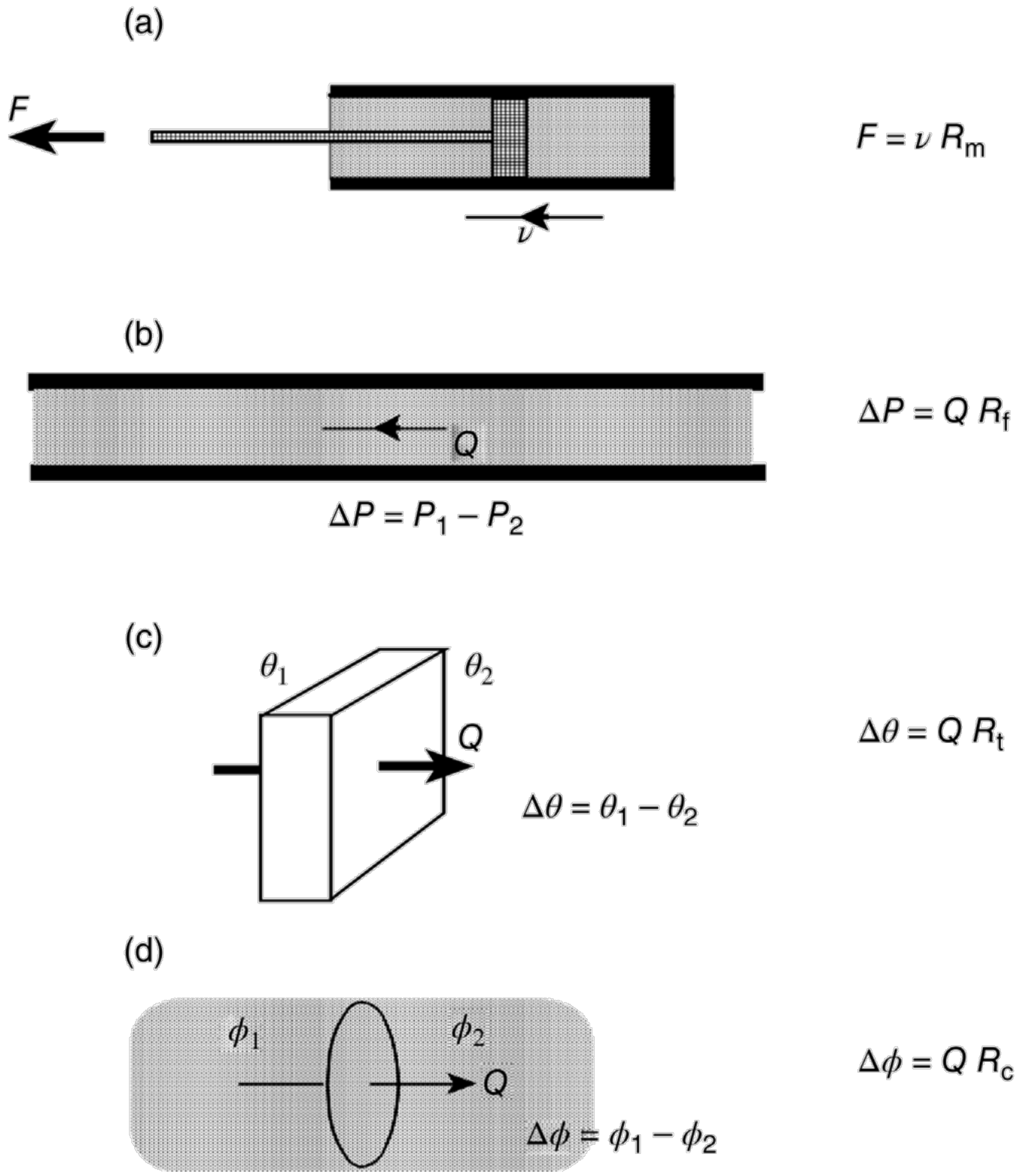
$$\psi = L\frac{d\zeta}{dt}$$

Variables generalizadas

	Eléctrico	Mecánico	Fluídico	Térmico
Esfuerzo	Voltaje	Fuerza	Presión	Temperatura
e	v	F	P	T
Flujo	Corriente	Velocidad	Caudal	Caudal
f	i	v	Q	q

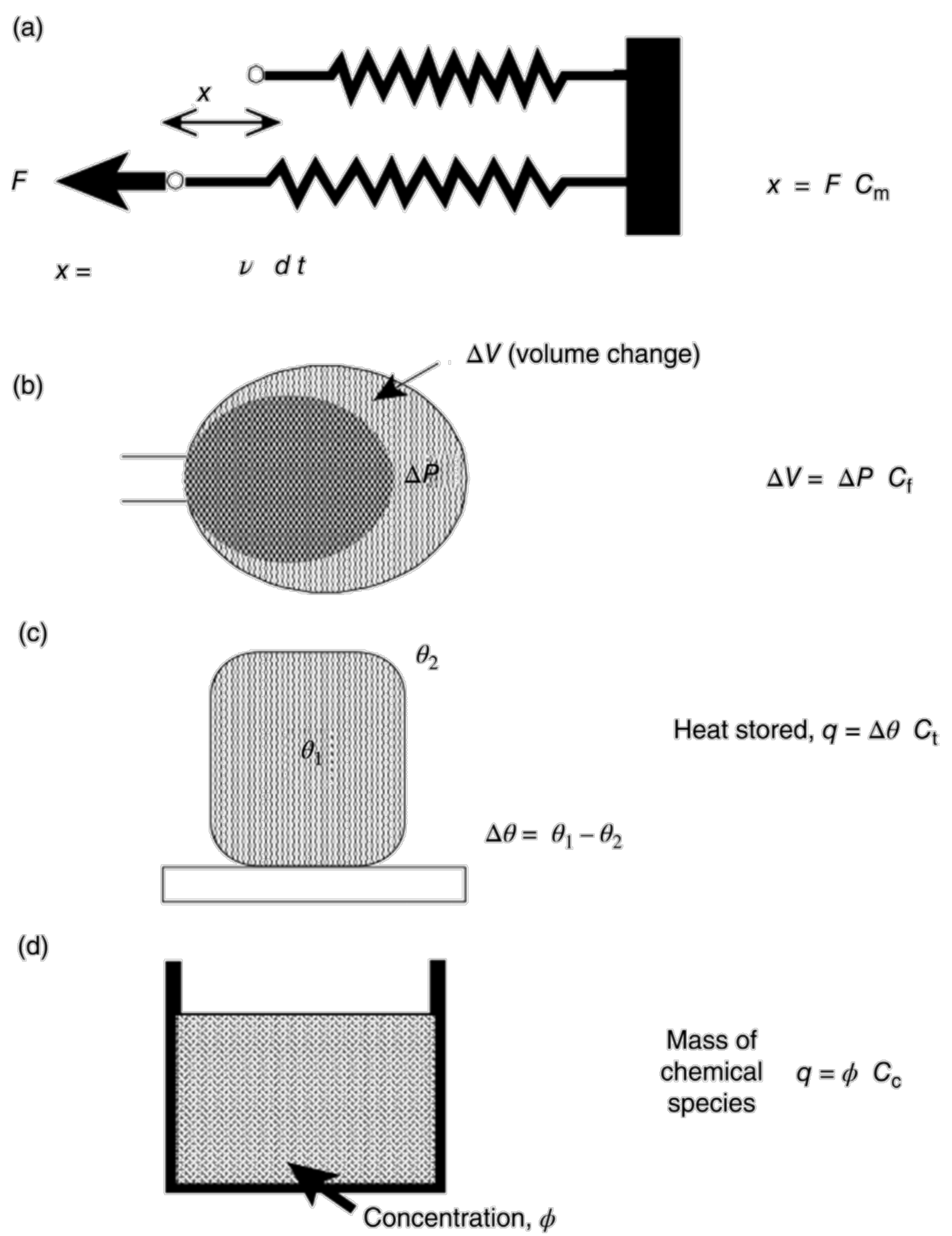
Fuente: Milsum, 1966

Elementos de resistencia

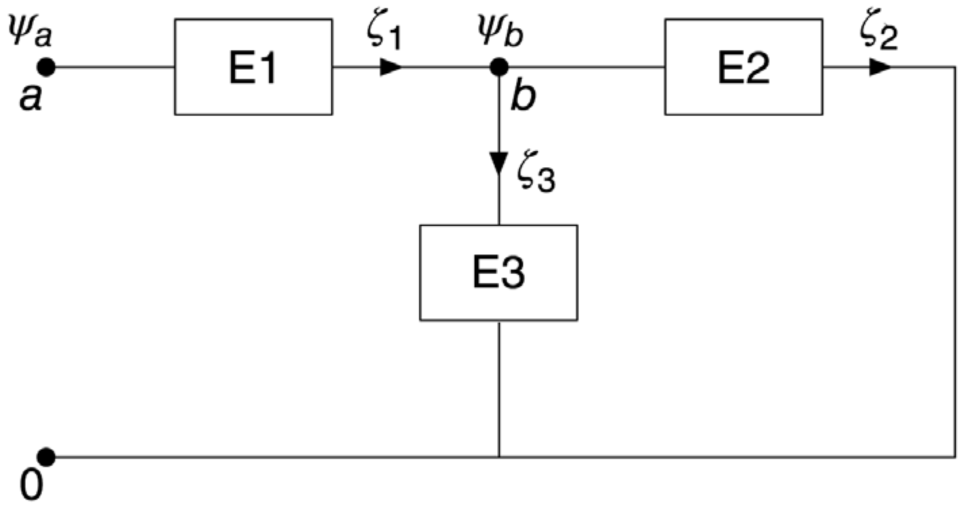


Fuente: Khoo,2018

Elementos de capacitancia



Leyes de conexión

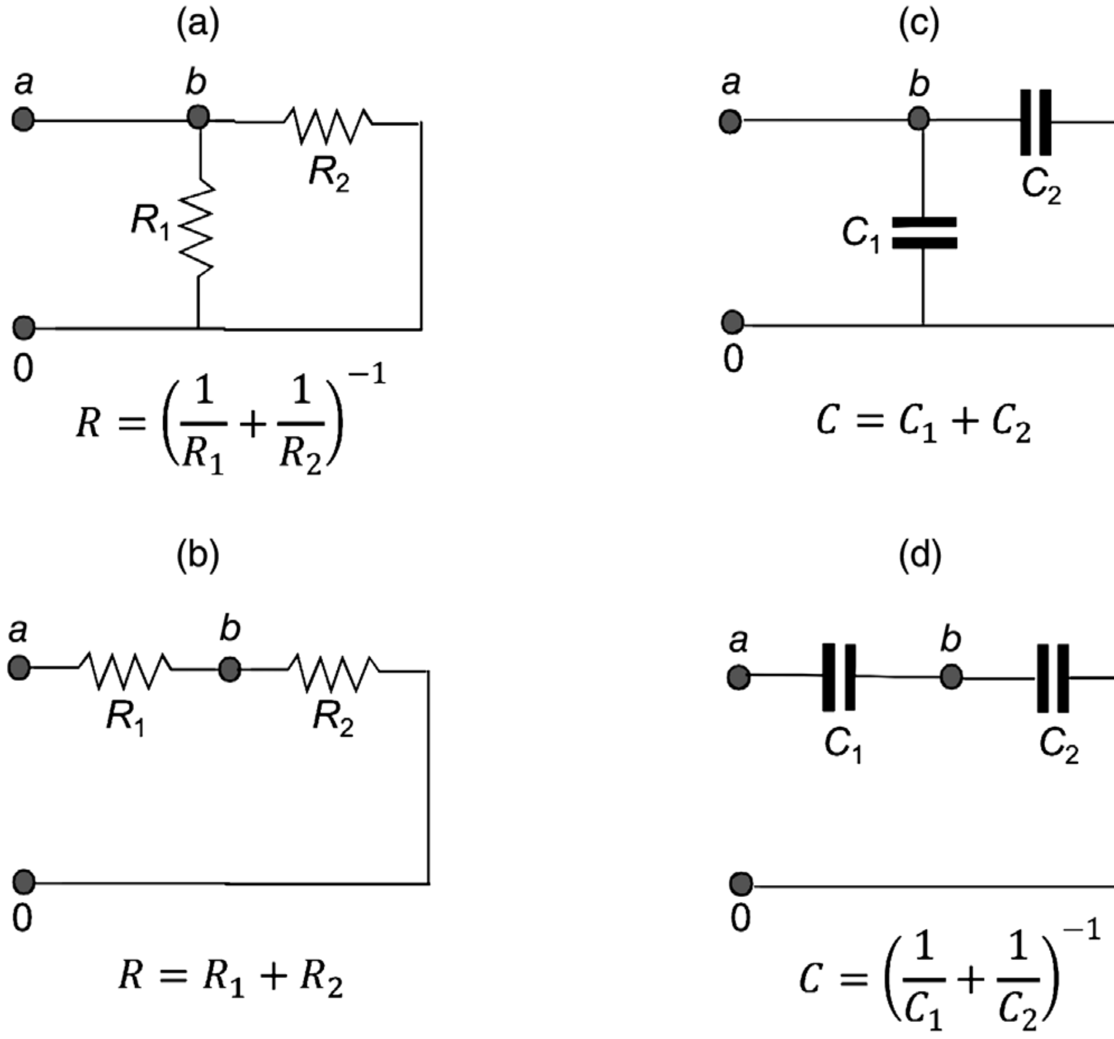


$$(\psi_{\mathrm{a}} - \psi_{\mathrm{b}}) + (\psi_{\mathrm{b}} - 0) + (0 - \psi_{\mathrm{a}}) = 0$$

$$\zeta_1 + (-\zeta_2) + (-\zeta_3) = 0$$

Fuente: Khoo,2018

Elementos eléctricos, fluídicos, térmicos y químicos

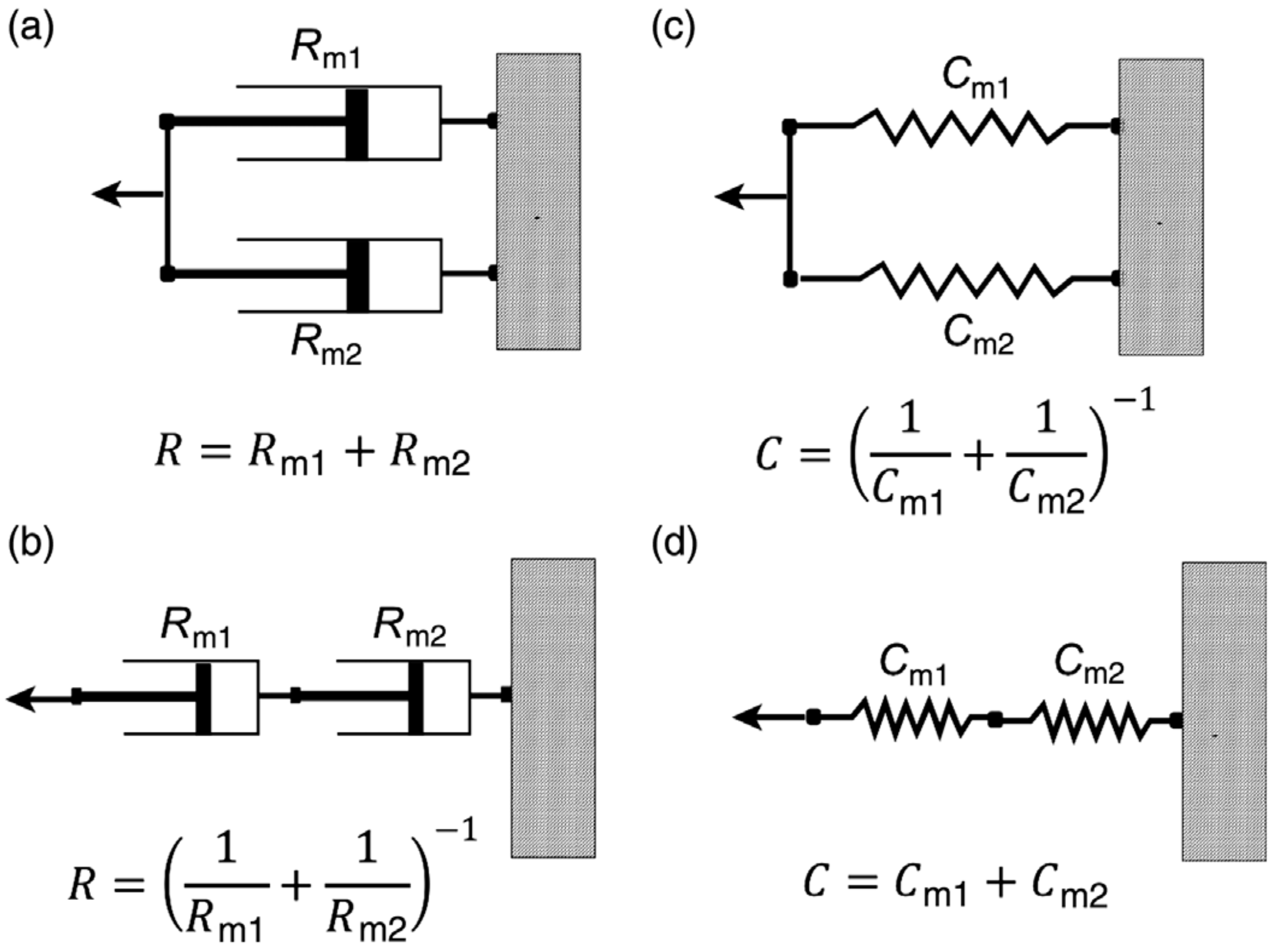


Fuente: Khoo,2018

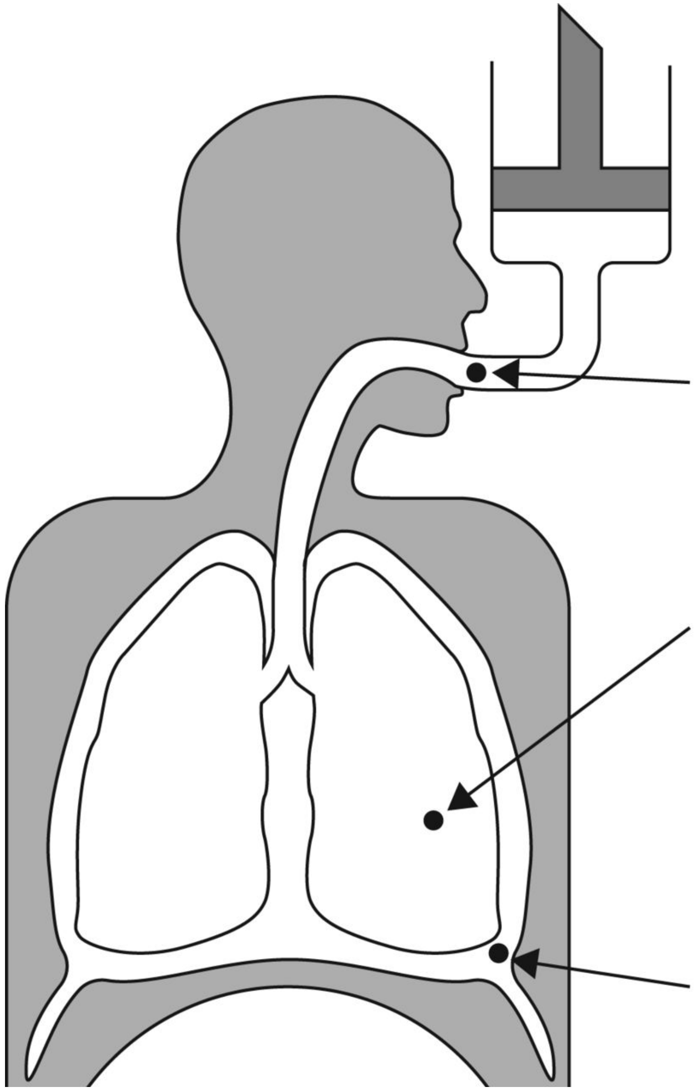
UNIVERSIDAD EIA

VIGILADA MINEDUCACIÓN

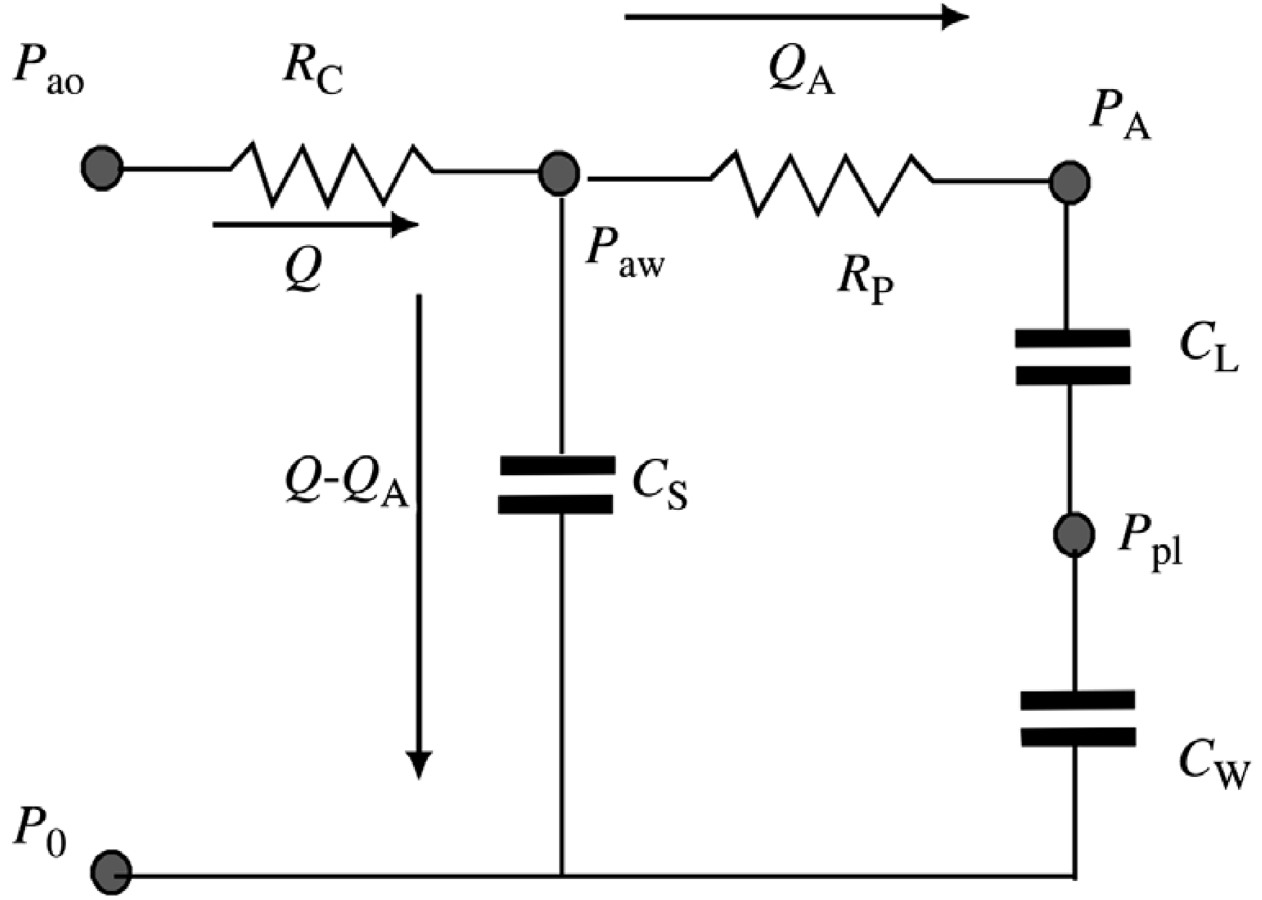
Elementos mecánicos



Ejemplo 7: Modelo lineal del pulmón



Modelo lineal del pulmón



$$R_C = 1, R_P = 0.5, C_L = 0.2, C_W = 0.2, C_S = 0.005$$

Bibliografía

- Enderle, J.D. and Bronzino, J.D. (2012) ***Introduction to biomedical engineering***. Amsterdam: Elsevier/Academic Press.
- Khoo, M.C.K. (2018) ***Physiological control systems: Analysis, simulation, and estimation***. Piscataway, NJ, Hoboken, NJ: IEEE Press ; Wiley.
- Laveneziana, P. *et al.* (2019) ***ERS statement on respiratory muscle testing at rest and during exercise***, *European Respiratory Journal*, 53(6), p. 1801214.
- Milsum, J.H. (1966) ***Biological Control Systems Analysis***. London: McGraw-Hill.