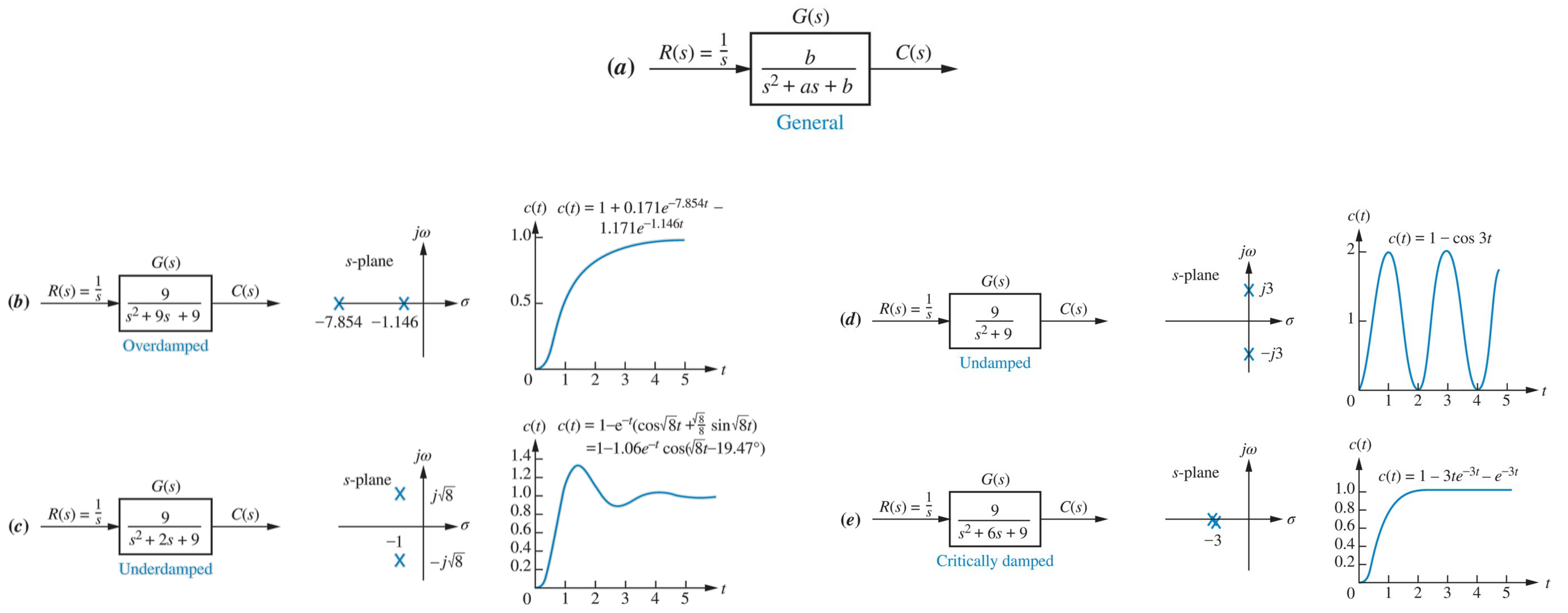
Sistemas dinámicos de segundo orden

Biomecatrónica 2025-1

Sistemas de segundo orden



Parámetros del sistema 2° orden

- La **frecuencia natural** (ω_n) de un sistema de segundo orden es la frecuencia a la que un sistema oscilaría en ausencia de amortiguamiento y excitaciones externas
- El **coeficiente de amortiguamiento** (ζ) es una medida de la rapidez con la que un sistema oscila y pierde energía debido a la fricción o resistencia

Coeficiente de amortiguamiento ζ

Una definición viable para esta cantidad es aquella que compara el decaimiento exponencial de la envolvente con la frecuencia natural

Esta razón es constante independientemente de la escala de tiempo de la respuesta

$$\zeta = \frac{\text{Decaimiento exponencial}}{\text{Frecuencia natural}}$$

Función de transferencia 2° orden

Con base en lo anterior, se define la función de transferencia general de un sistema de segundo orden como

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

y sus polos se ubican en

$$\begin{aligned} s &= -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \\ &= -\sigma \pm \omega_d \end{aligned}$$

Respuesta sobreamortiguada

- Polos: reales diferentes
- Respuesta natural: dos exponenciales con constantes de tiempo igual al recíproco de los polos

$$c(t) = K_1 e^{-\sigma_1 t} + K_2 e^{-\sigma_2 t}$$

Respuesta críticamente amortiguada

- Polos: reales iguales
- Respuesta natural: un término exponencial con constantes de tiempo igual al recíproco del polo y un término exponencial multiplicado por tiempo

$$c(t) = K_1 e^{-\sigma t} + K_2 t e^{-\sigma t}$$

Respuesta subamortiguada

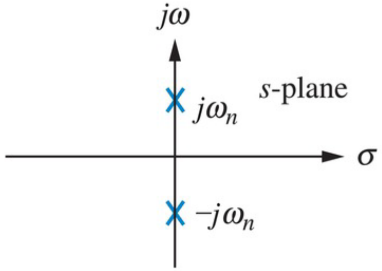
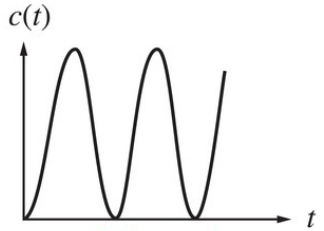
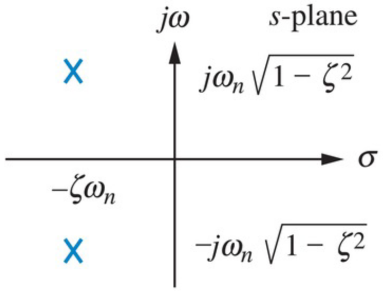
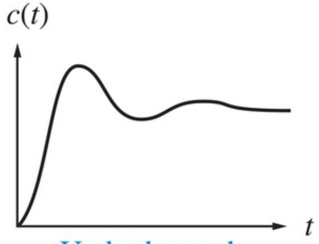
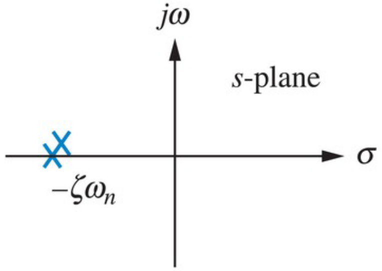
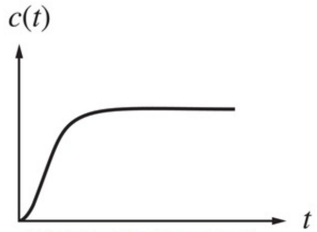
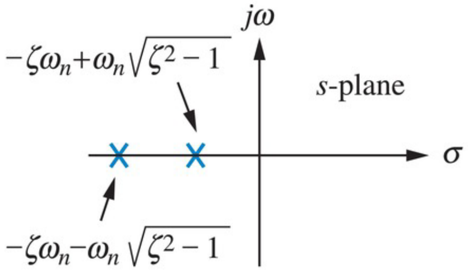
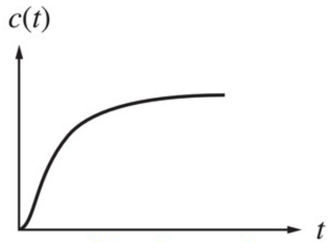
- Polos: complejos conjugados
- Respuesta natural: senoide amortiguada con una envolvente exponencial cuya constante de tiempo es igual al recíproco de la parte real del polo. La frecuencia en radianes de la senoide, la frecuencia amortiguada de oscilación, es igual a la parte imaginaria de los polos.

$$c(t) = Ae^{-\sigma t}\cos\left(\omega_d t - \phi\right)$$

Respuesta no amortiguada

- Polos: imaginarios puros conjugados
- Respuesta natural: senoide no amortiguada con frecuencia en radianes igual a la parte imaginaria de los polos

$$c(t) = A\cos\left(\omega_n t - \phi\right)$$

ζ	Poles	Step response
0		 Undamped
$0 < \zeta < 1$		 Underdamped
$\zeta = 1$		 Critically damped
$\zeta > 1$		 Overdamped

Ejemplo

Utilizando transformadas de Laplace, encuentre la expresión analítica para la salida de un sistema que tiene una ganancia DC de 1, un coeficiente de amortiguamiento de 0.25 y una frecuencia natural de 30 rad/s. El sistema se excita con una entrada de escalón unitario.