UNIVERSIDAD EIA

BIOMECATRÓNICA

Diseño en el espacio de estados

¿Por qué diseñar en el espacio de estado?

One of the drawbacks of frequency domain methods of design, using either root locus or frequency response techniques, is that after designing the location of the dominant second-order pair of poles, we keep our fingers crossed, hoping that the higher-order poles do not affect the second-order approximation. What we would like to be able to do is specify ***all*** closed-loop poles of the higher-order system. Frequency domain methods of design do not allow us to specify all poles in systems of order higher than 2 because they do not allow for a sufficient number of unknown parameters to place all of the closed-loop poles uniquely.

Diseño de controladores

La ecuación característica de un sistema de orden n en lazo cerrado tiene la forma

$$s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0$$

Existe, entonces, la posibilidad de incorporar n parámetros ajustables en el sistema que se relacionen con los coeficientes a_i de la ecuación

Ubicación de polos

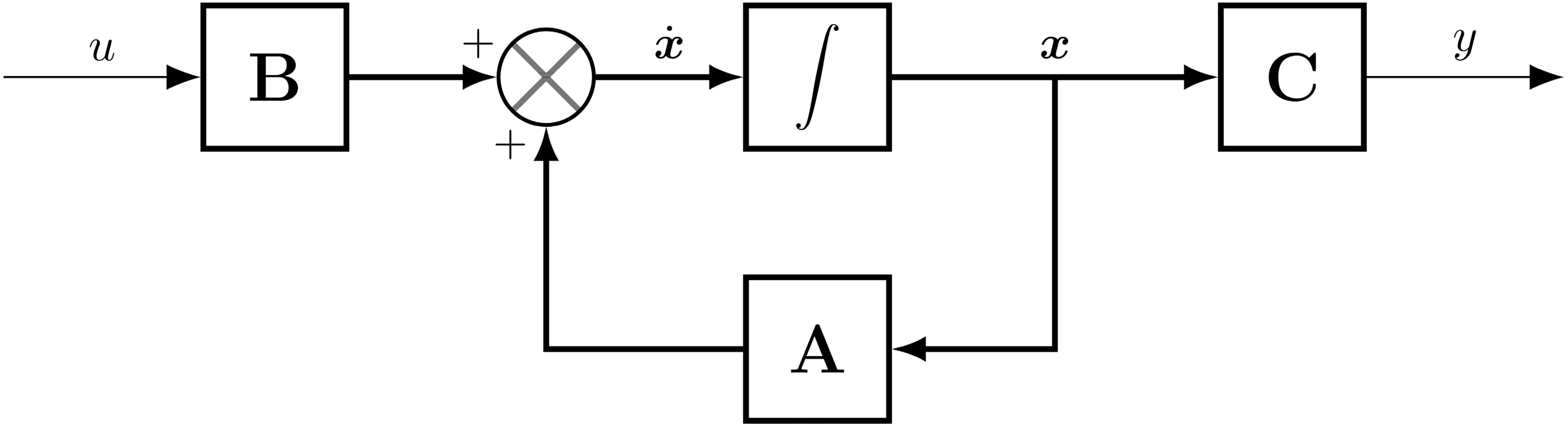
Con el ajuste de los parámetros al interior del sistema, garantizamos la ubicación de **todos** los polos del sistema como un conjunto

Esta técnica se conoce como **diseño por ubicación de polos**

SSR

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \mathbf{A}\boldsymbol{x} + \mathbf{B}u$$

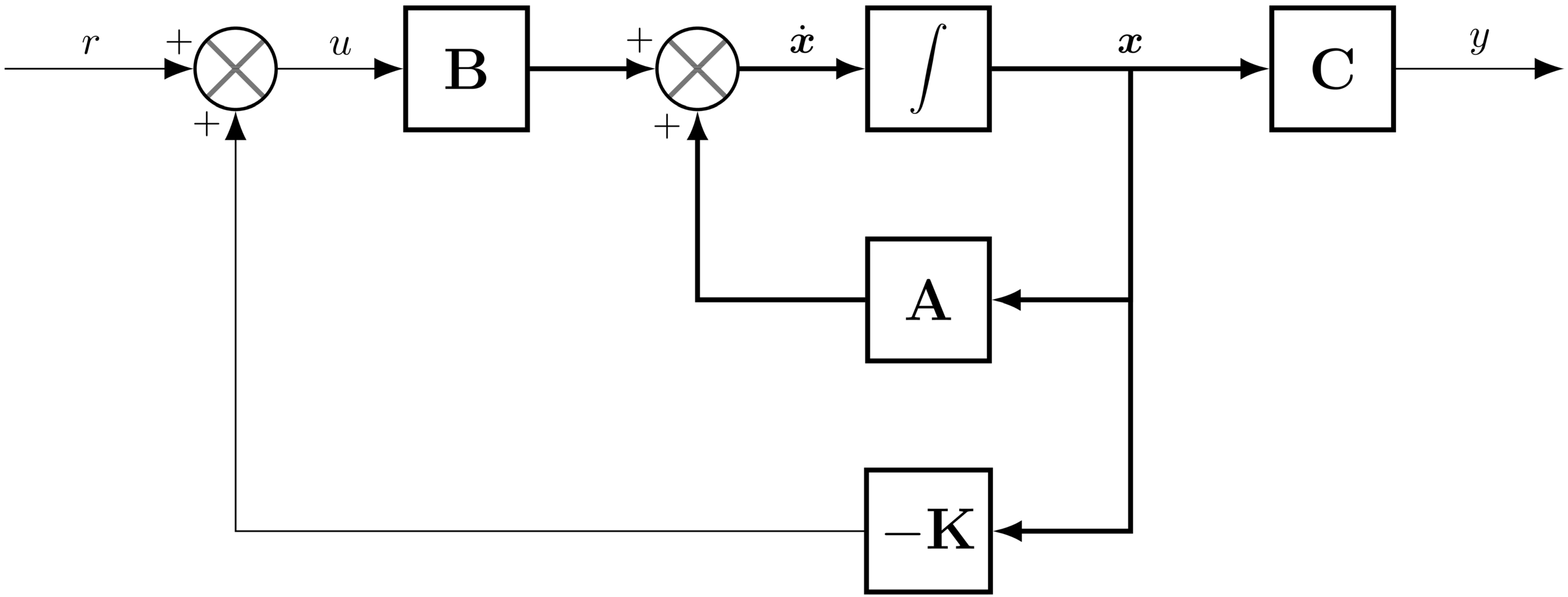
$$y = \mathbf{C}\boldsymbol{x}$$



Realimentación de estado

$$\dot{\boldsymbol{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\boldsymbol{x} + \mathbf{B}r$$

$$y = \mathbf{C}\boldsymbol{x}$$



Ubicación de polos

Aunque se puede usar cualquier SSR, el diseño es más fácil de realizar si se usa una representación de variables de fase o canónica controlable, debido al término $\mathbf{A}-\mathbf{BK}$

Pasos de diseño

1. Representar la planta en forma de **variables de fase** o **canónica controlable**
2. Realimentar cada variable de fase a la entrada de la planta a través de una ganancia, k_i
3. Encontrar la ecuación característica para el sistema de lazo cerrado representado en el Paso 2
4. Determinar las ubicaciones de todos los polos de lazo cerrado y una ecuación característica equivalente
5. Igualar los coeficientes de las ecuaciones características de los Pasos 3 y 4 y resolver para k_i

Ejemplo 1

Dada la planta con función de transferencia

$$G(s) = \frac{20(s+5)}{s(s+1)(s+4)}$$

diseñe un controlador tal que el sistema alcance un sobreimpulso menor al 9.5% y un tiempo de estabilización de 0.74 s

Cálculo de la ganancia en la referencia

El método de ubicación de polos, al ser un control de tipo proporcional, normalmente tiene un error de estado estacionario grande

Para corregir esto se amplifica la entrada por una ganancia k_r que se puede calcular como

$$k_r = -\frac{1}{\mathbf{C}(\mathbf{A}-\mathbf{B}\mathbf{K})^{-1}\mathbf{B}}$$

Ejemplo 2

Una planta tiene una representación en espacios de estados dada por

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -36 & -15 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1000 & 100 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$$

Diseñe las ganancias de realimentación de estados para producir un sobreimpulso del 5 % y un tiempo pico de 0.3 s

Ejemplo 3

Diseñe un controlador por realimentación de estados para el sistema inestable descrito por la SSR, tal que el sistema se estabilice en 4 s y tenga un tiempo de pico menor a 1.57 s

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 15 & 6 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$$

Ejemplo 4

¿Es posible controlar el sistema descrito por la siguiente SSR usando asignación de polos?

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 50 & 30 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$$

Controlabilidad

Si se puede encontrar una entrada a un sistema que lleve cada variable de estado desde un estado inicial deseado a un estado final deseado, se dice que el sistema es controlable; de lo contrario, el sistema es incontrolable

La técnica de ubicación de polos solo funciona en sistemas controlables

Matriz de controlabilidad

Para poder diseñar la realimentación de estados para una planta de orden n, bajo cualquier representación o elección de variables de estado, las variables de transición de estados y entrada deben cumplir con la propiedad de que la matriz de controlabilidad

$$\mathbf{C}_{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} & \dots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \end{bmatrix}$$

sea de rango completo

Ejemplo 5

Determine la controlabilidad de una planta cuya ecuación de estado está dada por

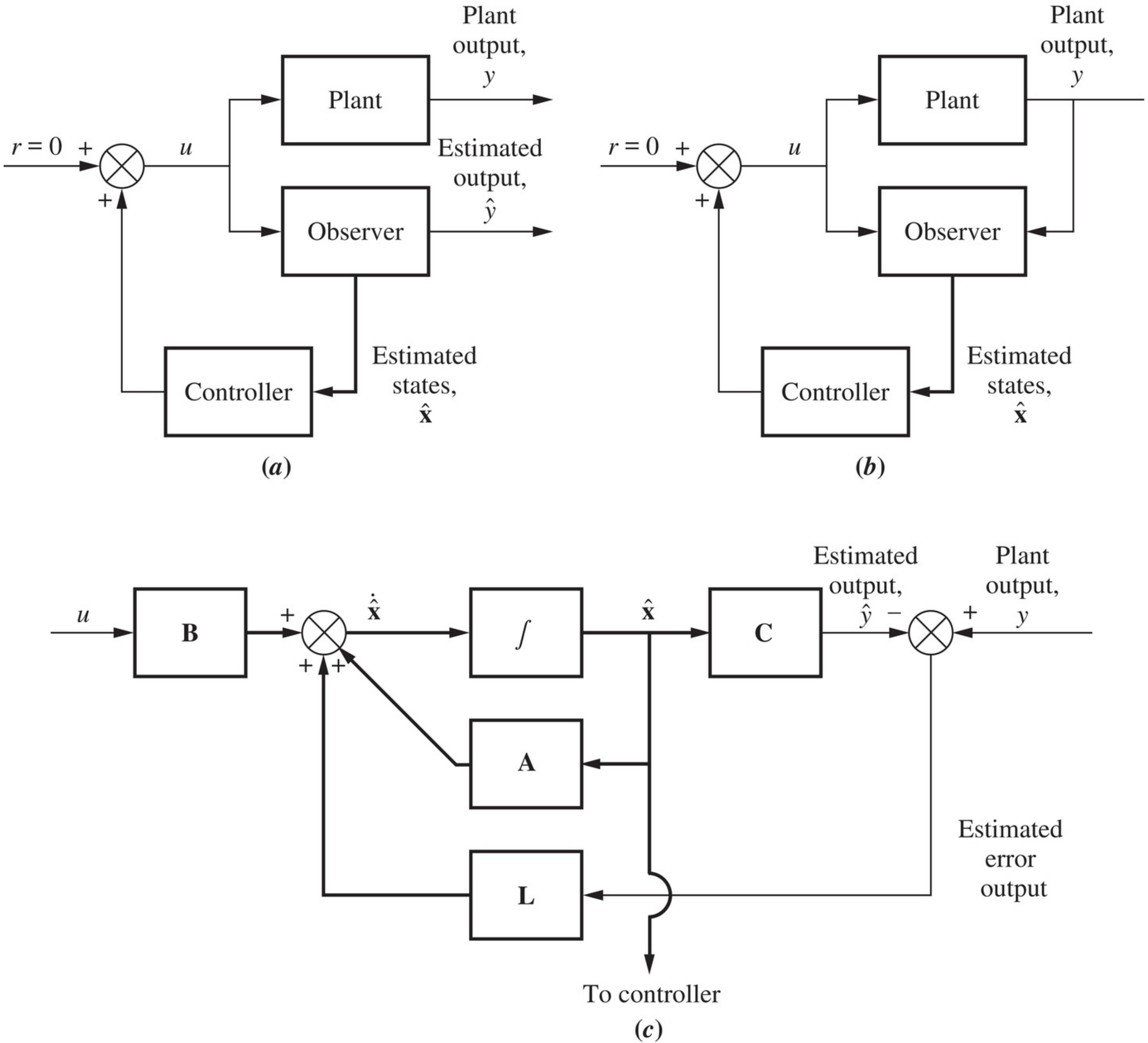
$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

Observadores

El diseño por ubicación de polos se basa en el acceso a las variables de estado para obtener realimentación a través de ganancias ajustables

En algunas aplicaciones, es posible que algunas de las variables de estado no estén disponibles en absoluto o que sea demasiado costoso medirlas o enviarlas al controlador, por lo que se incorporan sistemas que los estiman, llamados observadores

ESTRUCTURAS DE OBSERVADORES



Error de estimación

Las ecuaciones de estado del observador son

$$\dot{\widehat{\boldsymbol{x}}} = \mathbf{A}\widehat{\boldsymbol{x}} + \mathbf{B}u + \mathbf{L}(y - \widehat{y})$$

$$\widehat{y} = \mathbf{C}\widehat{\boldsymbol{x}}$$

por lo que el error en la estimación $\boldsymbol{e_x} = \boldsymbol{x} - \widehat{\boldsymbol{x}}$ se calcula como

$$\dot{\boldsymbol{e}}_{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{LC})\boldsymbol{e_x}$$

Diseño del observador

Las ecuaciones de estado del error de estimación corresponden a un sistema autónomo, por lo que si se escogen valores propios negativos, el error tiende a desaparecer

Esta dinámica de estimación debe ser más rápida que la dinámica del sistema controlado por realimentación de estados

Forma canónica observable

Para un sistema con función de transferencia

$$G(s) = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

La SSR en forma canónica observable corresponde a

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} -a_{n-1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_{n-2} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} b_{n-1} \\ b_{n-2} \\ \vdots \\ b_1 \\ b_0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$$

Diseño del observador

Partiendo de la forma canónica observable, el polinomio característico para el error de estimación es

$$\det\left(s\mathbf{I}-(\mathbf{A}-\mathbf{LC})\right)=s^{n}+\left(a_{n-1}+l_{1}\right)s^{n-1}+\cdots+\left(a_{1}+l_{n-1}\right)s+\left(a_{0}+l_{n}\right)$$

Por lo que las ganancias de observación se pueden calcular fácilmente, una vez conocida la dinámica deseada

Ejemplo 6

Diseñe un observador valores propios $\lambda_{1,2} = -20, -20$ utilizando la forma canónica observable para el sistema con función de transferencia

$$G(s) = \frac{7}{s^2 + 15s + 44}$$

Observabilidad

Si el vector de estado inicial, $x(t_0)$, se puede encontrar a partir de $u(t)$ y $y(t)$ medidos en un intervalo de tiempo finito desde t_0, se dice que el sistema es observable; de lo contrario, se dice que el sistema es inobservable

Matriz de controlabilidad

Un sistema es completamente observable si la matriz de observabilidad

$$\mathbf{O_M} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix}$$

es de rango completo

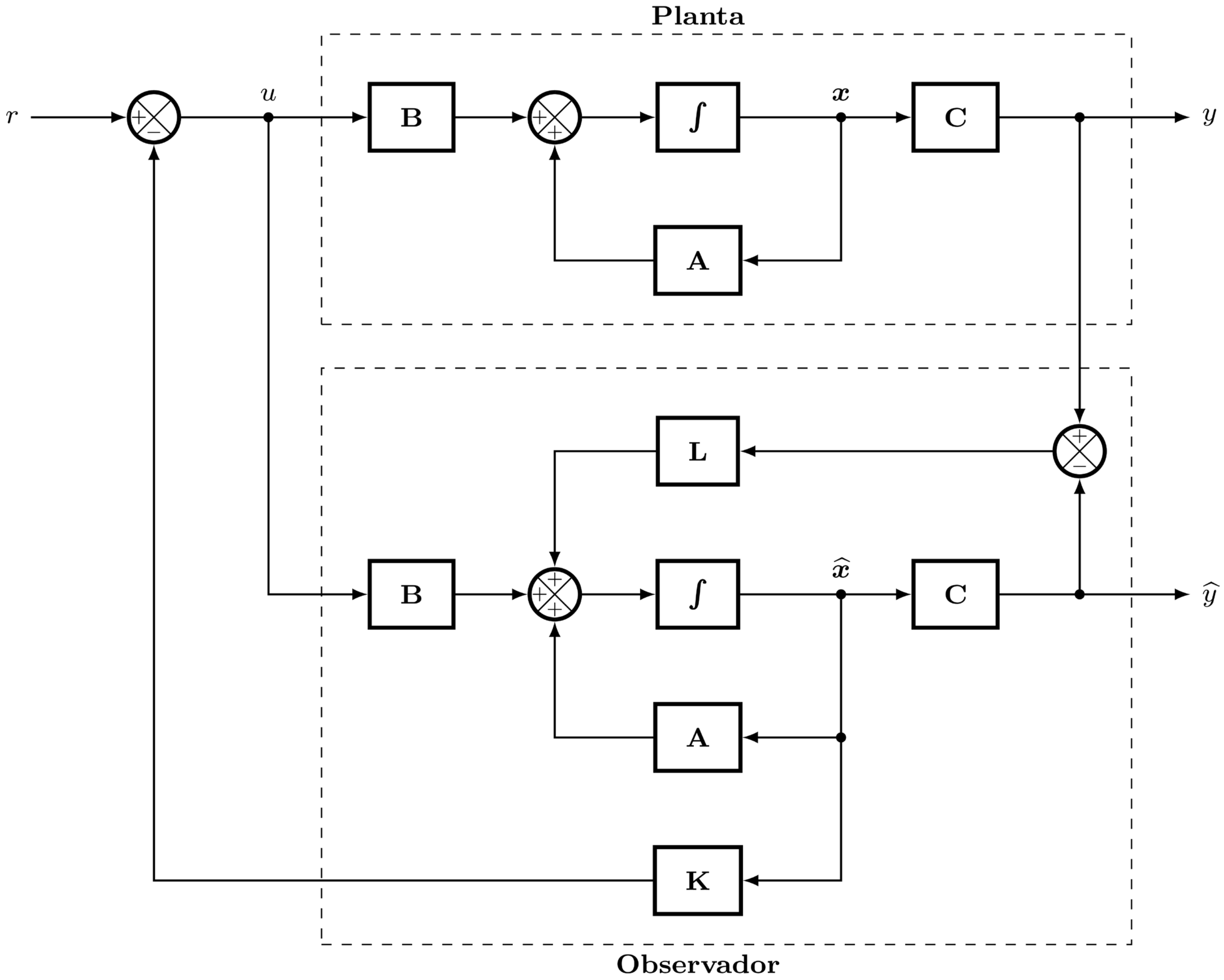
Observador-controlador combinado

Los estados del observador se pueden utilizar para proporcionar un control de realimentación cuando los estados propios de la planta no están disponibles

El observador-controlador combinado es equivalente a un compensador clásico

El sistema combinado tiene el doble de estados que la planta debido a los estados duplicados del observador

Dinámica combinada



Diseño con dinámica combinada

La SSR del sistema completo es entonces

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}} \\ \dot{\boldsymbol{e}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{BK} & \mathbf{BK} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} - \mathbf{LC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{e} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} r$$

$$y = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{e} \end{bmatrix}$$

Y el diseño consiste en la ubicación de los valores propios

$$\{\mathrm{eig}(\mathbf{A} - \mathbf{BK})\} \cup \{\mathrm{eig}(\mathbf{A} - \mathbf{LC})\}$$

Ejemplo 7

Diseñe el sistema controlador-observador para el sistema con SSR

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 5 \\ 0 & -5 & -10 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0.7 \\ 0.7 \\ 0.3 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$$

tal que el sistema se estabilice en 2 s con un máximo sobreimpulso menor al 10%