


A continuación encontrará una serie de preguntas, léalas con atención y asegúrese de entenderlas antes de comenzar a desarrollarlas. Todo el procedimiento debe estar explícito y con el suficiente detalle para poder ser evaluado. Haga los cálculos numéricos y presente los resultados usando **tres** cifras decimales. Todos los archivos necesarios para ejecutar las simulaciones deben estar incluidos en un archivo comprimido con la solución analítica. Además, se deben adjuntar los códigos desarrollados y pantallazos de los resultados para los casos en que sea requerida la simulación en MATLAB, indicados con el ícono .

**Tiempo disponible para el desarrollo del examen: 6 horas**

**1 (20 puntos)**

La postura bípeda humana es inherentemente inestable. Ponerse de pie requiere adaptaciones esqueléticas a los cambios de postura para mantener el equilibrio y prevenir una caída. El control postural o equilibrio es la capacidad de mantener el equilibrio en un campo gravitacional manteniendo el centro de masa de un cuerpo sobre la base en la que se apoya.

El equilibrio debe adaptarse a diferentes situaciones. Tanto la adquisición de información sensorial como el procesamiento a nivel neuronal implican la interpretación, conceptualización, planificación, activación y ejecución de patrones de movimiento que tienen como objetivo reaccionar de forma rápida y coordinada, a través de la activación muscular ante las perturbaciones del entorno.

Desde un punto de vista local, el control del tobillo puede entenderse como una estrategia utilizada al ponerse de pie para mantener el equilibrio. En presencia de pequeñas perturbaciones, el sistema de control actúa llevando el centro de masa a una posición estable moviendo el cuerpo a través de la articulación del tobillo, comportándose como un péndulo invertido.

La Figura 1a representa la interpretación del equilibrio bípedo de una persona con un sistema formado por un cilindro unido por un eje a una base con masa  $M$ . Si la persona se inclina ligeramente, el sistema se puede representar según la Figura 1b. El modelo mecánico del equilibrio bípedo se basa en el equilibrio de fuerzas. La representación de la persona se puede tomar como válida mediante un cilindro con radio despreciable de masa  $m$  y longitud  $2l$ , con su centro de gravedad situado a una distancia  $l$  de los extremos. La Figura 1c representa este modelo, donde se ha identificado una inclinación  $\theta$  en un plano  $xy$  con origen de coordenadas situado en la unión entre el cilindro y la base.

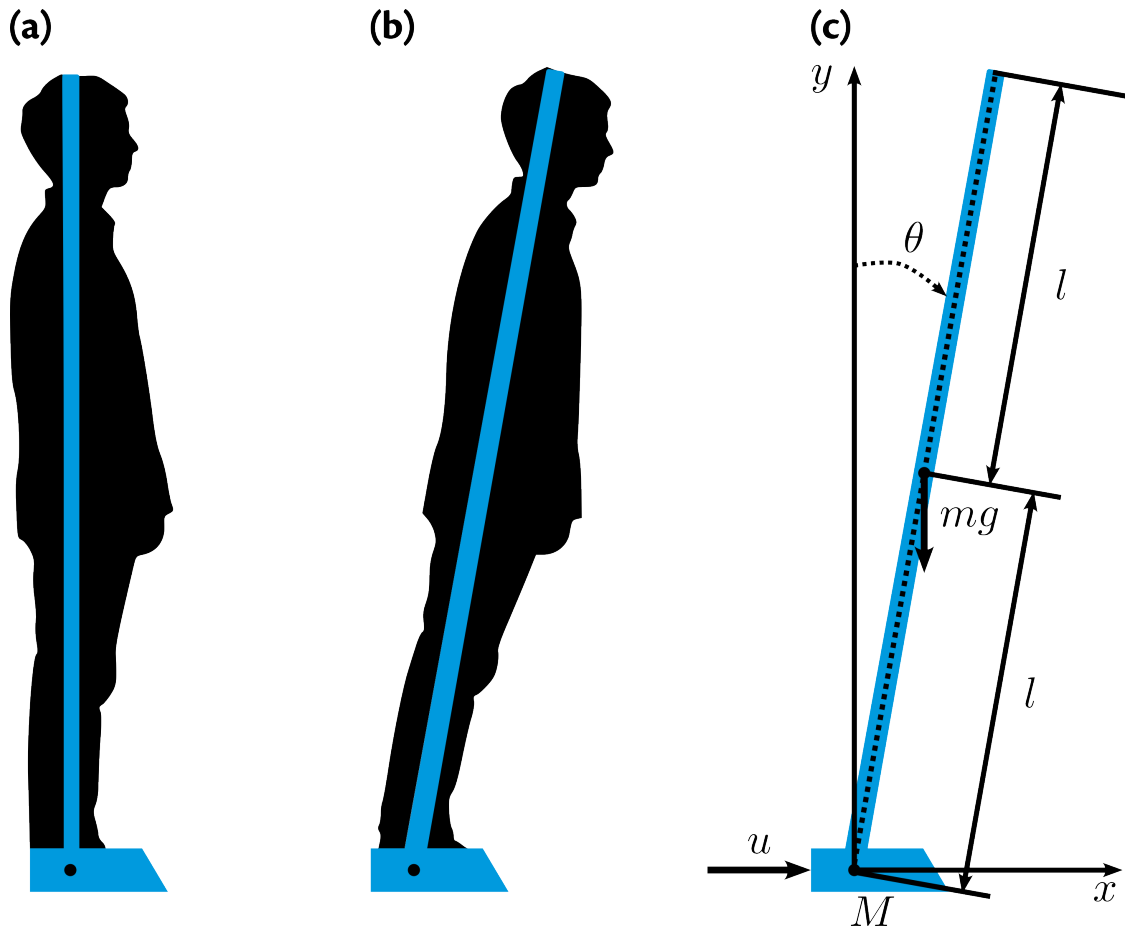


Figura 1: **Postura bípeda humana.** (a) Sin inclinación, (b) con inclinación y (c) modelo mecánico

La balanza puede entenderse como un sistema de control de posición angular,  $\theta$ , con el objetivo de mantener la posición vertical. Este objetivo se puede identificar con el control de un péndulo invertido, cuyo estado predeterminado es inestable ya que puede girar en cualquier momento y en cualquier dirección, a menos que se aplique una fuerza de control conveniente.

Si la persona tiende a realizar un desplazamiento en la dirección  $x$ , se puede entender que ha aplicado, en esa dirección, una fuerza  $u$  mostrada en la Figura 1c. En esta situación, el modelo matemático para este sistema se puede expresar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}(M + m)\ddot{x} + m\ddot{\theta} &= -u \\ (I + ml^2)\ddot{\theta} + m\dot{x} &= mgl\theta\end{aligned}$$

donde  $I$  es el momento de inercia del sistema primario, que puede ser expresado como

$$I = \frac{1}{3}mL^2$$

y  $g = 9.8 \text{ m/s}^2$  es la aceleración gravitacional. Para los demás datos, suponga un modelo cilíndrico de 1.8 m de altura, 70 kg de masa y una masa de la base de 1 kg.

- (a) (5 puntos) Halle la función de transferencia del sistema primario, con entrada  $u(t)$  y salida  $\theta(t)$ , como se muestra en la Figura 2. Posteriormente, aplique las cinco reglas y grafique el lugar de raíces del sistema.

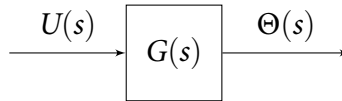


Figura 2: Digrma de bloque del sistema primario de la pregunta 1

- (b) (10 puntos) Diseñe un compensador de la forma

$$G_c(s) = K_c \frac{s - z_c}{s}$$

para que el sistema en lazo cerrado cumpla con los siguientes requisitos: sobreimpulso del 10 %, tiempo de estabilización 2 s y error nulo en estado estacionario ante una entrada escalón unitario. En caso de que la fase a compensar con el cero  $z_c$  sea mayor a  $120^\circ$ , compénsela con un cero doble  $(s - z_c)^2$ , en cuyo caso el compensador tendrá la forma

$$G_c(s) = K_c \frac{(s - z_c)^2}{s}.$$

- (c) (5 puntos) 🚀 Simule el comportamiento del sistema completo y compruebe que cumple con las especificaciones de diseño dadas. En caso de que no se cumpla alguna de las especificaciones, explique las razones para esto.

**2 (15 puntos)**

Una interfaz cerebro-computadora (BCI) es un sistema de comunicación entre un cerebro humano y un dispositivo externo. Los sistemas BCI exógenos dependen de la actividad electrofisiológica evocada por estímulos externos y no necesitan una etapa de entrenamiento intensivo, ya que basa su funcionamiento en el potencial P300. Este es una señal con una amplitud máxima que aparece en la electroencefalografía (EEG) aproximadamente 300 ms después de que se haya producido un estímulo auditivo o visual inusual. Habitualmente, el usuario está expuesto a una serie de estímulos. Entre estos estímulos, hay algunos que están relacionados con la intención del usuario.

En esta situación, los estímulos de interés, al ser poco frecuentes y mezclados con otros mucho más habituales, provocan la aparición de un potencial P300 en la actividad cerebral del usuario. Este potencial se observa principalmente en las áreas central y parietal de la corteza cerebral y puede registrarse mediante un sencillo sensor que desarrolla una medición no invasiva. Estas características podrían usarse para controlar diferentes dispositivos, como la silla de ruedas, como sistema de control para pacientes con parálisis física.

La Figura 3 representa este sistema, donde el usuario quiere mover la silla de ruedas con una velocidad deseada  $v_d(t)$  y el sistema produce una velocidad real  $v(t)$ .

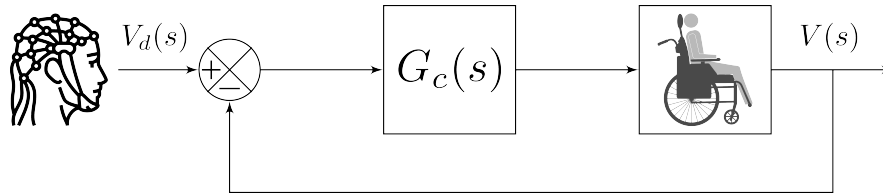


Figura 3: Representación del sistema de control de una BCI para controlar una silla de ruedas de la pregunta 2

La velocidad de la silla de ruedas es producida por un motor DC que puede modelarse, de manera muy simplificada, con un sistema de primer orden. La interpretación de la velocidad deseada se obtiene gracias al registro de la señal P300. Esta señal se modela como una señal de retardo. Por tanto, el sistema en lazo abierto podría describirse según la siguiente ecuación:


$$G(s) = e^{-\theta s} \frac{K}{\tau s + 1},$$

donde  $\theta$  corresponde al retraso de la reacción a los estímulos, normalmente 300 ms.  $K$  y  $\tau$  son los parámetros del modelo de primer orden del motor DC. Estos parámetros podrían medirse experimentalmente basados en la respuesta al escalón. En nuestro caso, suponga  $K = 0.5$  y  $\tau = 0.1$  s. Para controlar el sistema es necesario implementar un controlador PI.

- (a) (5 puntos) Use la aproximación de Padé

$$e^{-\theta s} \approx \frac{1 - \frac{\theta}{2}s}{1 + \frac{\theta}{2}s}$$

para obtener una función de transferencia  $G(s)$  sin retardo.

- (b) (10 puntos)  Para este sistema se propone dos controladores, dados por las siguientes funciones de transferencia:

$$G_{c_1}(s) = \frac{1}{3} \left( 1 + \frac{1}{0.1s} \right) \quad G_{c_2}(s) = 2 \left( 1 + \frac{1}{0.75s} \right).$$

Simule el comportamiento en lazo cerrado del sistema, tanto el original como el aproximado por Padé, con cada uno de los controladores y escoja el que tiene mejor desempeño. Justifique su respuesta argumentando, desde el punto de vista práctico, qué implicación puede tener escoger cada controlador. Además, concluya sobre las implicaciones prácticas de usar el sistema aproximado por Padé versus la versión original del sistema con retardo.

**3 (15 puntos)**

El reflejo fotomotor, también conocido como reflejo pupilar, es una respuesta automática del ojo que regula el tamaño de la pupila en función de la cantidad de luz que incide en la retina. Cuando los niveles de luz aumentan, los receptores de luz en la retina envían señales al cerebro, específicamente al núcleo pretectal del mesencéfalo. Este, a su vez, envía señales al núcleo de Edinger-Westphal, el cual activa el nervio oculomotor que controla los músculos esfínteres del iris, provocando la contracción de la pupila para reducir la cantidad de luz que entra al ojo.

Este reflejo tiene una función protectora crucial, ya que ayuda a prevenir el deslumbramiento y protege la retina de posibles daños causados por la exposición a luz intensa. En condiciones de baja iluminación, el proceso se invierte: los músculos dilatadores del iris se activan, permitiendo que la pupila se expanda y aumente la cantidad de luz que entra en el ojo, mejorando la visión en entornos oscuros. Este mecanismo de ajuste dinámico es esencial para mantener una visión óptima en diferentes condiciones de iluminación.

Se desea diseñar un sistema mimético para recrear el reflejo pupilar en un modelo anatómico que usarán los estudiantes de Medicina. En el proceso de modelado matemático, se identificó que la planta (el esfínter pupilar) puede ser expresada mediante la función de transferencia

$$G_p(s) = \frac{1}{s(s + 20)(s + 40)}.$$

Las características técnicas del modelo en condiciones nominales, bajo las cuales usted hará el diseño, son las siguientes:

- Diámetro pupilar: 5 mm.
- Tiempo de respuesta máximo: 250 ms.
- Máxima deflexión permitida en el diámetro pupilar: 0.2 mm.

Sin pérdida de rigor, para este ejercicio suponga que el esfínter se abre cuando hay un aumento en la intensidad de luz y que el acondicionamiento necesario para la transducción de señal lumínica en señales de voltaje no forma parte del sistema que usted trabajará. Para las pruebas de funcionamiento del modelo, se implementa la estructura mostrada en la Figura 4 y, para un valor específico de  $K$ , se obtiene un punto de operación en lazo cerrado en el que el sistema exhibe una respuesta de estado estacionario aceptable y el porcentaje de sobreimpulso deseado (truncado al entero menor), pero no se estabiliza en el tiempo máximo permitido. En este punto de operación, se identifica que el sistema tiene un polo de lazo cerrado ubicado en  $s = -44.689$ .

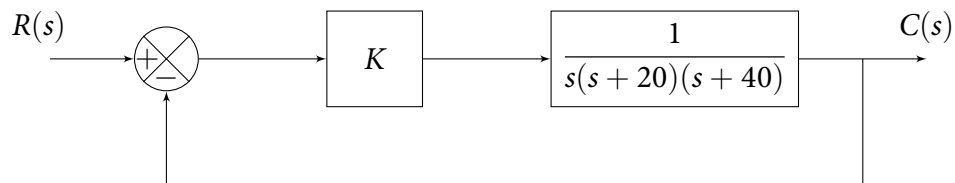



Figura 4: Representación del sistema de control del esfínter pupilar la pregunta 3

- (a) (10 puntos) Diseñe un compensador que reduzca el tiempo de estabilización al máximo permitido, sin afectar el sobreimpulso.
- (b) (5 puntos)  Simule el comportamiento del sistema compensado ante una entrada tipo escalón.