Serie 9

Aufgabe 1

a) $\vec{\Lambda} = \dfrac{\vec{p} \times \vec{\ell}}{\alpha \mu} - \dfrac{\vec{r}}{r} \quad (\star) \quad , \quad U = -\alpha / r$

z.z. $d\Lambda / dt = 0$

$$\frac{d\Lambda}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{p} \times \vec{\ell}}{\alpha \mu}\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)$$, hier $\vec{\ell}$ = konstant

$$= \frac{d\vec{p}/dt \times \vec{\ell}}{\alpha \mu} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)$$, $\vec{F} = \dfrac{d\vec{p}}{dt}$ → konservativ: $\dfrac{d\vec{p}}{dt} = -\nabla U(r)$

$$= -\frac{\nabla U(r) \times \vec{\ell}}{\alpha \mu} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)$$, $\vec{\ell} = \mu \vec{r} \times \dot{\vec{r}}$, $\nabla U(r) = \dfrac{\alpha \vec{r}}{r^3}$

$$= -\frac{\vec{r} \times (\vec{r} \times \dot{\vec{r}})}{r^3} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)$$, $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$ (Aufgabe 1, Serie 4)

$$= \frac{\dot{\vec{r}} r^2 - \vec{r}(\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}})}{r^3} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)$$

2

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right) = \underline{\underline{0}}$$ Λ ist eine Erhaltungsgröße ▫

b) z.z. $|\vec{\Lambda}| = \varepsilon$

2 → $\vec{\Lambda}^2$ rechnen:

$$\vec{\Lambda}^2 = \left(\frac{\vec{p} \times \vec{\ell}}{\alpha \mu} - \frac{\vec{r}}{r}\right)^2$$

↳ Hier treten die Produkte:

$$(\vec{p} \times \vec{\ell})^2 = p^2 \ell^2$$

$$\vec{r} \cdot (\vec{p} \cdot \vec{\ell}) = (\vec{r} \times \vec{p}) \cdot \vec{\ell} = \ell^2$$

$$(\vec{r}/r)^2 = 1 \quad , \quad \text{auf}$$

$$= \frac{2\ell^2}{\mu \alpha^2}\left(\frac{p^2}{2\mu} - \frac{\alpha}{r}\right) + 1 = \frac{2E\ell^2}{\mu \alpha^2} + 1 = \underline{\underline{\varepsilon^2}}$$ ▫

c) z. z. $\vec{\Lambda} \parallel \vec{r}_{min}$

1 $\vec{r} = \vec{r}_{min}$ in $\vec{\Lambda}$ einsetzen: (da $\vec{\Lambda}$ konstant ist)

$$\Lambda = \frac{\mu}{\alpha} \dot{\vec{r}}_{min} \times (\vec{r}_{min} \times \dot{\vec{r}}_{min}) - \frac{\vec{r}_{min}}{r} = \frac{\vec{p} \times \vec{\ell}}{\alpha \mu} - \frac{\vec{r}_{min}}{r}$$

Mit $r_{min} \perp \vec{p}$ und $\vec{r}_{min} \perp \vec{\ell}$ erhalten wir dann

$\Rightarrow \vec{r}_{min} \parallel \vec{p} \times \vec{\ell}$.

$\Rightarrow$ daraus folgt $\vec{\Lambda} \parallel \pm \vec{r}_{min}$ ■

d) In Polarkoordinaten wird $\vec{\Lambda} \cdot \vec{r}$ zu:

1 (1) $\vec{\Lambda} \cdot \vec{r} = |\vec{\Lambda}||\vec{r}| \cos\varphi = \varepsilon \rho \cos\varphi$, $\vec{\Lambda}$ legt die Richtung $\varphi = 0$ fest.

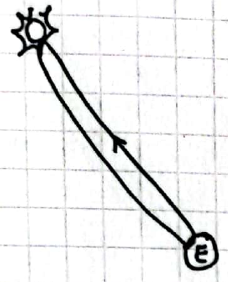
Alternativ berechnen wir $\vec{\Lambda} \cdot \vec{r}$ aus (*) mit
$\vec{r} \cdot (\vec{p} \times \vec{\ell}) = \ell^2$:

(2) $\vec{\Lambda} \cdot \vec{r} = \frac{(\vec{p} \times \vec{\ell}) \cdot \vec{r}}{\mu \alpha} - r = \frac{\ell^2}{\mu \alpha} - \rho = p - \rho$

Aus (1) und (2) folgt die Bahnkurve ■

$\boxed{\Sigma 6}$

Aufgabe 2



a) Wenn die Erde eine ~~unendlich hohe~~ infinitesimale Tangentialgeschwindigkeit hätte, dann wäre die Bahn eine ~~unendliche~~ infinitesimal dünne Ellipse statt einer Geraden sein.

Bei einer dünnen Ellipse liegen die Brennpunkte sehr nahe an den Enden, so dass sich die Sonne (die sich in einem Brennpunkt befindet) am anderen Ende der Ellipse befindet.

1

Dies bedeutet, dass die Hauptachse gleich dem Radius "R" der ursprünglichen Umlaufbahn der Erde ist.
Wir suchen nach der Zeit des Einfallens, die die Hälfte der Periode "T" der elliptischen Umlaufbahn ist.

Die gesuchte Zeit "t" ist also:

$$t = \frac{T}{2} \overset{\text{3. Keplersches Gesetz}}{=} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4\pi^2 (R/2)^3}{GM_\odot}} \approx 65 \text{ Tage}$$

1

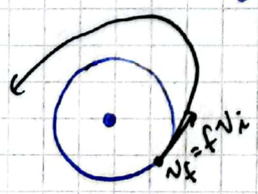
b) ~~Bewegung~~ Aus $\frac{p}{\rho} = 1 + \varepsilon\cos\varphi$ → Gl. 17.7 in Fließbach

Der Mindestwert von ρ wird erreicht wenn die rechte Seite ihren Maximalwert erreicht, d.h. $\frac{1}{p}(1+\varepsilon)$

$$\Rightarrow \rho_{min} = \frac{p}{1+\varepsilon} = \frac{\ell^2}{\mu\alpha(1+\varepsilon)}$$

1

↳ Punkt der größten Annäherung für die Parabel = Schubpunkt } Hinweis



* Vor dem Schub:
Umlaufbahn ist ein Kreis
↳ $\varepsilon = 0$
$$\Rightarrow \rho_{\cancel{min}} = \frac{\ell_i^2}{\mu\alpha(1+0)}$$

* Nach dem Schub:
Umlaufbahn ist eine Parabel
↳ $\varepsilon = 1$
$$\Rightarrow \rho = \frac{\ell_f^2}{\mu\alpha(1+1)}$$

2

Daraus folgt, dass

$$l_f^2 = 2 l_i^2 \Rightarrow (m r v_f)^2 = 2 (m r v_i)^2$$

$$\Rightarrow v_f = \sqrt{2}\, v_i \qquad 1$$

also: $f = \sqrt{2}$

Der Abstand der größten Annährung für die Parabel ist

$$\rho_{min} = \frac{l_f^2}{\mu\alpha(1+1)}$$

Wenn der Schub in die Radiale Richtung zeigt, ändert sich "l" nicht $\Rightarrow \rho_{min} = (l_i^2/\mu\alpha)/2 \Rightarrow$ halber Radius des Kreises, in dem der Schub stattfand.

1

+ Dieses Ergebnis ist davon unabhängig, ob die Schubkraft radial nach innen oder nach außen gerichtet ist.

$\boxed{8.5}$

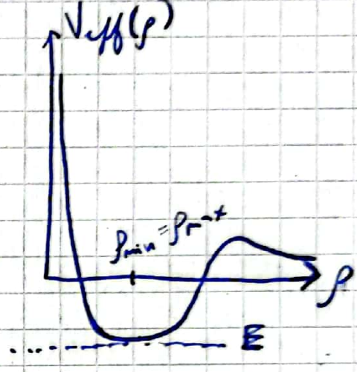
Aufgabe 3

Potenzial: $V(\rho) = -V_0 e^{-\lambda^2\rho^2}$

a) Das effektive Potenzial ist, $U_{eff}(\rho) = U(\rho) + \frac{l^2}{2\mu\rho^2}$ (16.29) Fließbach

$$V_{eff}(\rho) = \frac{l^2}{2\mu\rho^2} - V_0 e^{-\lambda^2\rho^2}$$ 1

Eine Kreisbahn existiert bei den Werten von ρ, für
$V'_{eff}(\rho) = 0$



Aus Gl. (17.6) Fließbach:

$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu\alpha^2}}$ $\quad \varepsilon = 0$ für einen Kreis

$\Rightarrow E = -\mu\alpha^2/2l^2$ → negative Energie
→ das Teilchen ist gefangen in der Potentialtopf

→ $V'_{eff}(\rho) = 0$ 2

$$\Rightarrow l^2 = (2\mu V_0 \lambda^2)\rho^4 e^{-\lambda\rho^2}$$ (implizite Lösung)

b) $l^2 = (2\mu V_0 \lambda^2)\rho^4 e^{-\lambda\rho^2}$ (1)

↳ Da für $\rho \to 0$, $\rho \to \infty$ } gegen Null geht

⇒ hat einen maximalen Wert

Es gibt also einen maximalen Wert von „l", für den eine Lösung für „ρ" existiert

$$\Rightarrow 0 = \frac{d}{d\rho}(\rho^4 e^{-\lambda\rho^2}) = e^{-\lambda^2\rho^2}(4\rho^3 + \rho^4(-2\lambda^2\rho))$$

$$\Rightarrow \rho^2 = \frac{2}{\lambda^2} \equiv \rho_0^2$$ 1

→ "ρ_0" in (1) einsetzen:

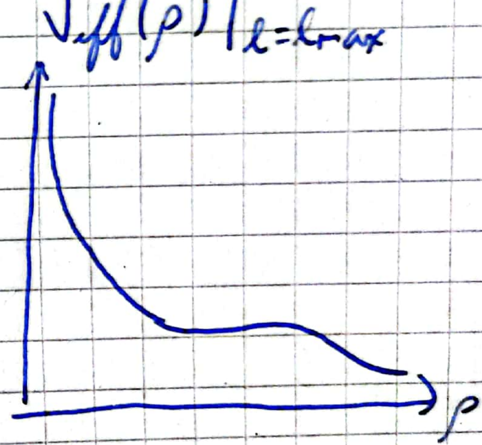
$$l_{max}^2 = \frac{8mV_0}{\lambda^2 e^2} \quad (2)$$

1

↳ "ρ_0" und (2) in $V_{eff}(\rho)$ einsetzen:

$$V_{eff}(\rho_0) = \frac{V_0}{e^2} \quad (\text{für } l = l_{max})$$

⇒ Dies ist der Grenzfall zwischen einem Einbruch in der Kurve und einer monotonen Abnahme gegen Null.



$\boxed{\Sigma 5}$