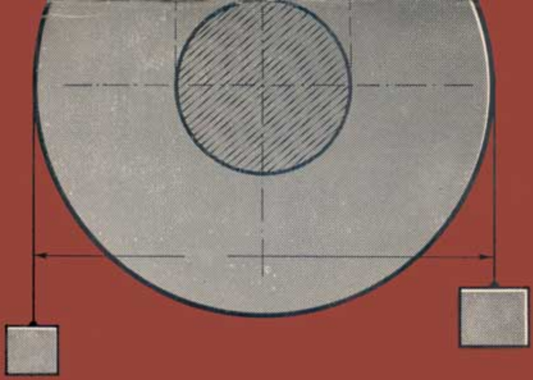
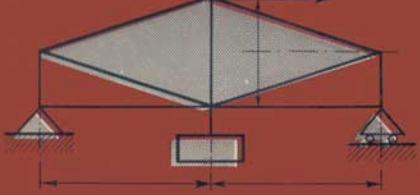


I. MESHERSKI

PROBLEMAS DE MECANICA TEORICA



ИЗДАТЕЛЬСТВО · МИР ·

И. Мещерский

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»

I. Meshersky

PROBLEMAS DE MECÁNICA TEÓRICA

Traducido del ruso
por F. Petrov

EDITORIAL MIR MOSCÚ

Impreso en la URSS 1974

A NUESTROS LECTORES:

"Mir" edita libros soviéticos traducidos al español, inglés, francés y árabe. Entre ellos figuran las mejores obras de las distintas ramas de la ciencia y la técnica: manuales para los centros de enseñanza superior y escuelas tecnológicas; literatura sobre ciencias naturales y médicas. También se incluyen monografías, libros de divulgación científica y ciencia ficción. Dirijan sus opiniones a la Editorial "Mir", Rizhski per., 2, 129820, Moscú, 110, GSP, URSS.

На испанском языке

INDICE

Primera parte
ESTÁTICA DEL CUERPO SÓLIDO

Segunda parte
CINEMÁTICA

Tercera parte
DINÁMICA

PRIMERA PARTE
ESTÁTICA DEL CUERPO SÓLIDO

Capítulo I

SISTEMA PLANO DE FUERZAS

§ 1. FUERZAS QUE ACTÚAN A LO LARGO DE UNA MISMA RECTA

1.1. Dos pesas de 10 N y 5 N, suspendidas a una misma cuerda, están fijadas en ésta en diferentes lugares, hallándose la mayor pesa más baja que la menor.

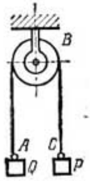
¿Cuál es la tensión de la cuerda?

Respuesta: 10 N y 15 N.

1.2. Un remolcador tira tres barcazas de diferentes dimensiones que marchan una tras otra. La fuerza de tracción de la hélice del remolcador en el instante dado es de 1800 kgf. La resistencia del agua a la marcha del remolcador es de 600 kg, la resistencia del agua al movimiento de la primera barcaza es de 600 kg; de la segunda, 400 kg; de la tercera, 200 kg. El cable disponible soporta sin peligro una fuerza de extensión de 200 kgf.

¿Cuántos cables han de tenderse del remolcador a la primera barcaza, de la primera a la segunda y de ésta a la tercera, si el movimiento es rectilíneo y uniforme?

Respuesta: 6, 3 y 1 cables.



Para el problema 1.3.

1.3. El peso $Q=30$ N se mantiene en equilibrio mediante un contrapeso fijador en el extremo del cable ABC, que pasa por una polea. El peso del cable es de 5 N.

Determinar, sin tomar en cuenta la rigidez del cable, el rozamiento y el radio de la polea, el peso P y los esfuerzos F_A y F_C, que estiran el cable en sus extremos A y C, así como el esfuerzo F_B en la sección media B del cable en los casos, a saber:

1) hallándose los puntos A y C a la misma altura;
2) hallándose el punto A en la posición superior;
3) hallándose el punto A en la posición inferior.

Respuesta: 1) $P=30$ N; $F_A=30$ N; $F_B=32{,}5$ N; $F_C=30$ N;
2) $P=25$ N; $F_A=30$ N; $F_B=27{,}5$ N; $F_C=25$ N;
3) $P=35$ N; $F_A=30$ N; $F_B=32{,}5$ N; $F_C=35$ N.

1.4. En el fondo de un pozo se halla un hombre que pesa 64 kgf; mediante un cable, que pasa por una polea fija, éste mantiene un peso de 48 kgf.

1) ¿Qué presión ejerce el hombre sobre el fondo del pozo? 2) ¿Qué peso máximo puede mantener mediante un cable?

Respuesta: 1) 16 kgf; 2) 64 kgf.

1.5. Un tren marcha por una vía rectilínea horizontal a una velocidad constante; el tren, sin locomotora eléctrica, pesa 1200 t.

¿Cuál es la fuerza de tracción de la locomotora eléctrica, si la resistencia a la marcha del tren es igual a 0,005 de la presión del mismo sobre los rieles?

Respuesta: 6 tf.

1.6. Un tren de viajeros consta de una locomotora eléctrica, un furgón de equipajes, que pesa 40 tf, y 10 coches de 50 tf cada uno.

¿Cuál será la fuerza de tensión de los enganches y la fuerza de tracción de la locomotora si la resistencia a la marcha del tren es igual a 0,005 de su peso? Resolver este problema suponiendo que la resistencia a la marcha se distribuye proporcionalmente al peso entre todos los vagones del tren y que su movimiento es uniforme.

Respuesta: La fuerza de tracción de la locomotora es de 2,7 tf, $T_{11}=0{,}25$ tf, $T_{10}=2\cdot 0{,}25$ tf, etc.

(el subíndice significa el número del vagón, contando desde la locomotora).

§ 2. FUERZAS, CUYAS LÍNEAS DE ACCIÓN SE CORTAN EN UN PUNTO

2.1. En el centro de un hexágono regular están aplicadas las fuerzas de 1, 3, 5, 7, 9 y 11 N, dirigidas hacia sus vértices.

Determinar la magnitud y el sentido de la resultante y de la equilibrante.

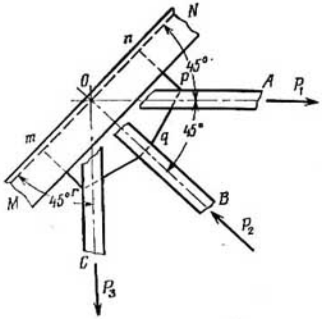
Respuesta: 12 N; el sentido de la equilibrante es contrario al de la fuerza dada de 9 N.

2.2. Determinar el esfuerzo que la chapa *mnpqr* transmite a la barra *MN* si los esfuerzos que actúan según las líneas *OA*, *OB* y *OC* son iguales a: $P_1=P_3=141$ N y $P_2=100$ N.

Los sentidos de los esfuerzos se indican en el dibujo.

Respuesta: 100 N, y actúa por la línea *OB* en el sentido contrario a P_2.

2.3. Descomponer una fuerza de 8 N en dos de 5 N cada una. ¿Es posible descomponer la misma fuerza en dos de 10 N cada



Para el problema 2.2.

una, de 15 N, de 20 N, etc.? ¿En dos de 100 N cada una?

Respuesta: Sí, siempre que no estén dadas las direcciones de descomposición.

2.4. En dirección de un cabio inclinado respecto al horizonte un ángulo $\alpha = 45°$, actúa la fuerza $Q = 250$ kgf.

¿Qué esfuerzo S surge en este caso en la dirección del tirante horizontal y qué fuerza N actúa sobre la pared en dirección vertical?

Respuesta: $S = N = 177$ kgf.

2.5. Dos tractores, que marchan por las orillas de un canal recto a una velocidad constante, sirgan una barca con auxilio de dos cables. Las fuerzas de tensión de los cables son de 80 y 96 kgf; el ángulo entre ellos es de 60°.

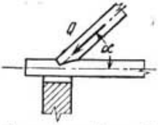
Determinar la resistencia P del agua al movimiento de la embarcación y los ángulos α y β que los cables deben formar con las orillas del canal si la embarcación se mueve paralelamente a éstas.

Respuesta: $P = 153$ kgf; $\alpha = 33°$; $\beta = 27°$.

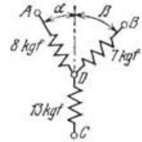
2.6. Los anillos A, B y C de tres balanzas de muelle están fijados en una tabla horizontal. A los ganchos de las balanzas están atadas tres cuerdas tensadas y anudadas en D. Las balanzas indican: 8, 7 y 13 kgf.

Determinar los ángulos α y β que forman las direcciones de las cuerdas, como se muestra en la figura.

Respuesta: $\alpha = 27{,}8^\circ$; $\beta = 32{,}2^\circ$.



Para el problema 2.4.

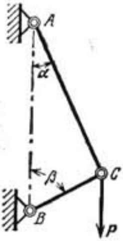


Para el problema 2.6.

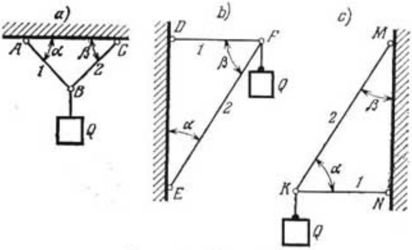
2.7. Las barras AC y BC están articuladas entre sí y a una pared vertical. Sobre el perno de articulación C actúa la fuerza vertical $P = 1000$ N.

Determinar las reacciones de estas barras sobre el perno de articulación C si los ángulos, que las barras forman con la pared, son iguales a: $\alpha = 30^\circ$ y $\beta = 60^\circ$.

Respuesta: 866 N; 500 N.



Para el problema 2.7.



Para el problema 2.8.

2.8. En las figuras a, b y c, igual que en el problema anterior, están representadas esquemáticamente barras articuladas entre sí, al techo y a las paredes. De los pernos de articulación B, F y K penden pesos $Q = 1000$ kgf.

Determinar los esfuerzos en las barras en los casos siguientes:
a) $\alpha = \beta = 45^\circ$;
b) $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 60^\circ$;
c) $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 30^\circ$.

Respuesta: a) $S_1 = S_2 = 707$ kgf; b) $S_1 = 577$ kgf; $S_2 = -1154$ kgf *); c) $S_1 = -577$ kgf; $S_2 = 1154$ kgf.

---

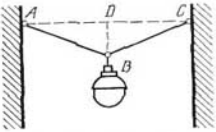
*) El signo menos significa que la barra está comprimida.

2.9. Un farol pende del punto medio B del cable ABC, fijado en sus extremos en los ganchos A y C que se hallan en una misma horizontal.

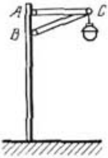
Determinar las tensiones T_1 y T_2 en las partes AB y BC del cable si el farol pesa 15 kgf; el largo del cable ABC es 20 m y la desviación del punto de suspensión de la horizontal es $BD = 0{,}1$ m. El peso del cable se desprecia.

Respuesta: $T_1 = T_2 = 750$ kgf.

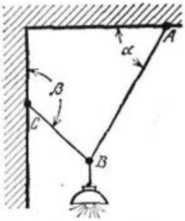
2.10. Un farol de 30 kgf pende de un poste vertical sostenido por un travesaño horizontal $AC = 1{,}2$ m y un jabalcón $BC = 1{,}5$ m.



Para el problema 2.9.



Para el problema 2.10.



Para el problema 2.11.

Determinar los esfuerzos S_1 y S_2 en las barras AC y BC supuesto que están articuladas en A, B y C.

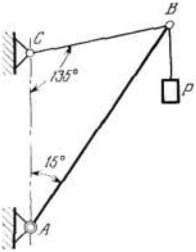
Respuesta: $S_1 = 40$ kgf; $S_2 = -50$ kgf.

2.11. Una lámpara eléctrica de 2 kgf de peso, está suspendida al techo con ayuda del cordón AB y, por medio de la cuerda BC, está desviado hacia la pared.

Determinar las tensiones siguientes: T_A del cordón AB y T_C de la cuerda BC, si se sabe que el ángulo $\alpha = 60°$ y el $\beta = 135°$, sin tomar en cuenta los pesos del cordón y de la cuerda.

Respuesta: $T_A = 1{,}46$ kgf; $T_C = 1{,}04$ kgf.

2.12. Una grúa de mástil consta del brazo AB, articulado al mástil en A, y la cadena CB. Del extremo B del brazo pende el peso $P = 200$ kgf; los ángulos son: $BAC = 15°$, $ACB = 135°$.



Para el problema 2.12.

Determinar la tensión T de la cadena CB y el esfuerzo Q en el brazo AB.

Respuesta: $T = 104$ kgf; $Q = 283$ kgf.

2.13. En un ferrocarril, tendido en montañas, el tramo de la vía que pasa por un desfiladero está suspendido como se muestra en el dibujo.

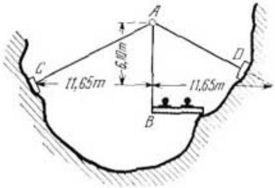
Determinar los esfuerzos en las barras AC y AD suponiendo que la péndola AB está cargada con la fuerza $P=50$ tf.

Respuesta: Las barras AC y AD se hallan comprimidas por el mismo esfuerzo de 53,9 tf.

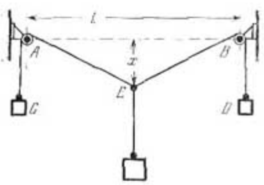
2.14. Por dos poleas A y B, situadas en una misma recta horizontal $AB=l$, pasa una cuerda $CAEBD$. De sus extremos C y D penden pesas de valor p cada una, y del punto E, otra de peso P.

Determinar la distancia x entre el punto E y la recta AB en estado de equilibrio, sin tener en cuenta el rozamiento en las poleas, las dimensiones de éstas y el peso de la cuerda.

Respuesta: $x=\dfrac{Pl}{2\sqrt{4p^2-P^2}}$.



Para el problema 2.13.



Para el problema 2.14.

2.15. Un peso de 25 N se mantiene en equilibrio mediante dos cuerdas que pasan por poleas y están tensadas con auxilio de pesos. Uno de éstos es de 20 N; el seno del ángulo que forma la cuerda correspondiente con la vertical, es de 0,6.

Determinar la magnitud p del segundo peso y el ángulo α formado por la segunda cuerda con la vertical, sin tomar en cuenta el rozamiento en las poleas y el peso de las cuerdas.

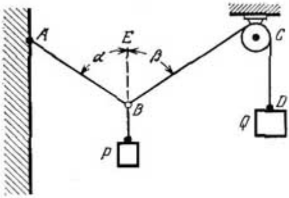
Respuesta: $p=15$ N; $\operatorname{sen}\alpha=0{,}8$.

2.16. A la cuerda AB, uno de cuyos extremos está fijado en el punto A, están atados el peso P, en el punto B, y la cuerda BCD, que pasa por una polea; en su extremo D está atada la pesa Q de 10 kgf.

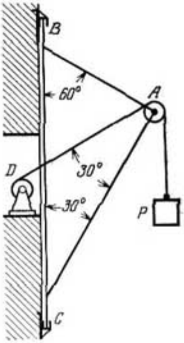
Determinar, despreciando el rozamiento en la polea, la tensión T de la cuerda AB y la magnitud del peso P, si en estado de equilibrio los ángulos que forman las cuerdas con la vertical BE son: $\alpha=45°$, $\beta=60°$.

Respuesta: $T=12{,}2$ kgf; $P=13{,}7$ kgf.

2.17. La grúa para almacenes BAC levanta la carga $P = 2$ tf por medio de una cadena que pasa por las poleas A y D, fijada esta última en la pared de modo que el ángulo $CAD = 30°$. Los



Para el problema 2.16.

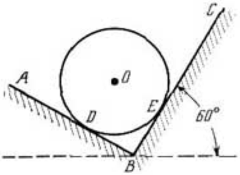


Para el problema 2.17.

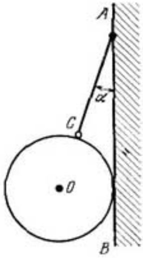
ángulos entre las barras de la grúa son: $ABC = 60°$, $ACB = 30°$. Determinar los esfuerzos Q_1 y Q_2 en las barras BA y AC.

Respuesta: $Q_1 = 0$; $Q_2 = -3{,}46$ tf.

2.18. En dos planos inclinados lisos, AB y BC, perpendiculares recíprocamente, se halla la bola homogénea O de 6 kgf.



Para el problema 2.18.



Para el problema 2.19.

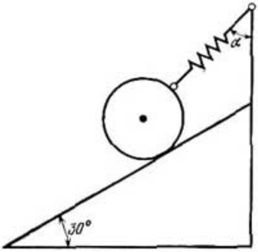
Determinar la presión de la bola sobre cada plano, sabiendo que el plano BC forma un ángulo de 60° con el horizonte.

Respuesta: $N_D = 5{,}2$ kgf; $N_E = 3$ kgf.

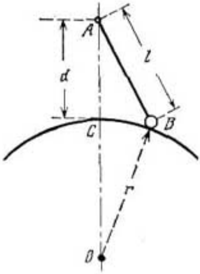
2.19. La bola homogénea O pende por medio del cable AC de una pared vertical lisa AB. El cable forma un ángulo α con la pared. El peso de la bola es igual a P.

Determinar la tension T del cable y la presión de la bola sobre la pared.

Respuesta: $T=\frac{P}{\cos\alpha}$; $Q=P\,\mathrm{tg}\,\alpha$.



Para el problema 2.20.



Para el problema 2.21.

2.20. Una bola homogénea de 20 kgf se mantiene en un plano inclinado liso por un cable atado a una balanza de muelle, fijada por encima del plano; la balanza indica 10 kgf. El ángulo de inclinación del plano al horizonte es 30°.

Determinar el ángulo α, que forma la dirección del cable con la vertical, y la presión Q de la bola sobre el plano, despreciando el peso de la balanza.

Respuesta: $\alpha=60°$; $Q=17{,}3$ kgf.

2.21. La bola B de peso P pende por medio del hilo AB del punto fijo A y descansa sobre la superficie de una esfera lisa de radio r; la distancia entre el punto A y la superficie de la esfera es $AC=d$, el largo del hilo es $AB=l$, la recta AO es vertical.

Determinar la tensión T del hilo y la reacción Q de la esfera, sin tener en consideración el radio de la bola.

Respuesta: $T=P\frac{l}{d+r}$; $Q=P\frac{r}{d+r}$.

2.22. Una bola homogénea que pesa 10 N se mantiene en equilibrio por medio de dos cables, AB y CD, que están situados en un plano vertical y forman entre sí un ángulo de 150°. El cable AB está inclinado 45° al horizonte.

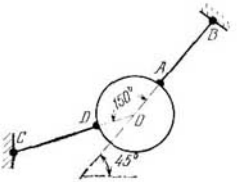
Determinar las tensiones de los cables.

Respuesta: $T_B=19{,}3$ N; $T_C=14{,}1$ N.

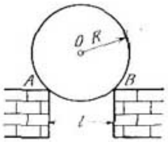
2.23. Una caldera de peso $P=4$ tf, uniformemente distribuido a lo largo de la misma, y radio $R=1$ m reposa en los salientes de una mampostería de piedra. La distancia entre las paredes de la mampostería es $l=1,6$ m.

Determinar la presión de la caldera sobre la mampostería en los puntos A y B, sin tener en cuenta el rozamiento.

Respuesta: $N_A=N_B=3,33$ tf.



Para el problema 2.22.

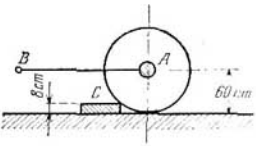


Para el problema 2.23.

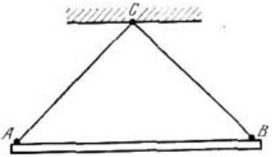
2.24. Un cilindro apisonador homogéneo pesa 2 tf y su radio es de 60 cm.

Determinar el esfuerzo horizontal P necesario para hacerlo pasar por encima de una losa de piedra de 8 cm de altura, colocada en la posición representada en la figura.

Respuesta: $P=1,15$ tf.



Para el problema 2.24.



Para el problema 2.25.

2.25. La barra homogénea AB de 16 kgf y 1,2 m de largo, pende del punto C por medio de dos cables AC y CB, de 1 m de largo cada uno.

Determinar las tensiones de los cables.

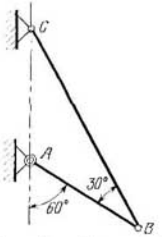
Respuesta: La tensión de cada uno de los cables es igual a 10 kgf.

2.26. La barra homogénea AB, articulada en el punto A a una pared vertical, se mantiene inclinada 60° respecto a la vertical mediante el cable BC que forma con la barra un ángulo de 30°.

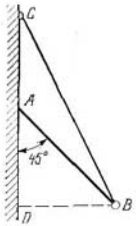
Determinar la magnitud y el sentido de la reacción R en la articulación si se sabe que la barra pesa 2 kgf.

Respuesta: $R = 1$ kgf; el ángulo $(R, AC) = 60°$.

2.27. El extremo superior A de la barra homogénea AB, que tiene 2 m de largo y pesa 5 kgf, va apoyado en una pared vertical lisa. Al extremo inferior B está atado el cable BC.



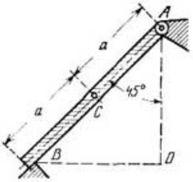
Para el problema 2.26.



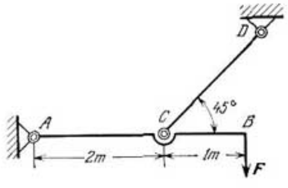
Para el problema 2.27.

Hallar a qué distancia AC ha de fijarse el cable en la pared para que la barra esté en equilibrio y forme un ángulo $BAD = 45°$. Determinar la tensión T del cable y la reacción R de la pared.

Respuesta: $AC = AD = 1{,}41$ m; $T = 5{,}6$ kgf; $R = 2{,}5$ kgf.



Para el problema 2.28.



Para el problema 2.29.

2.28. El bastidor de ventana AB, cuyo corte está representado en el dibujo, puede girar alrededor del eje horizontal de la articulación A y con su borde inferior B está apoyado libremente en el escalón de la ranura.

Hallar las reacciones de los apoyos si se sabe que el peso del bastidor, de 89 kgf, está aplicado en el punto medio C del mismo y $AD = BD$.

Respuesta: $R_A = 70{,}4$ kgf; $R_B = 31{,}5$ kgf.

2.29. La viga AB se mantiene en posición horizontal por la barra CD; las fijaciones en A, C y D son articuladas.

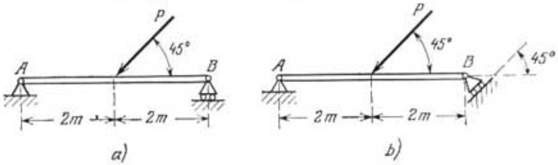
Determinar las reacciones de los apoyos A y D si en el extremo de la viga actúa la fuerza vertical $F=5$ tf. Las dimensiones se indican en el dibujo. No tomar en cuenta el peso.

Respuesta: $R_A=7{,}9$ tf; $R_D=10{,}6$ tf.

2.30. La viga AB está articulada en el apoyo A, mientras que el extremo B descansa sobre rodillos. En el punto medio de la viga actúa la fuerza $P=2$ tf que forma un ángulo de 45° con su eje.

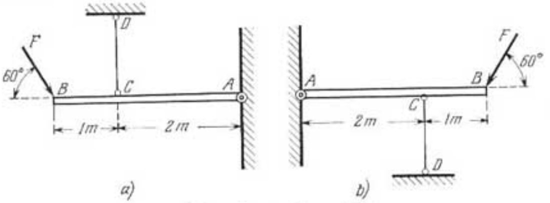
Determinar las reacciones de los apoyos para los casos *a* y *b*, tomando las dimensiones de los dibujos correspondientes y despreciando el peso de la viga.

Respuesta: a) $R_A=1{,}58$ tf; $R_B=0{,}71$ tf;
b) $R_A=2{,}24$ tf; $R_B=1$ tf.



Para el problema 2.30.

2.31. En las figuras están representadas las vigas AB, sostenida en posición horizontal por las barras verticales CD. En los extremos de las vigas actúan las fuerzas $F=3$ tf inclinadas 60° al horizonte.



Para el problema 2.31.

Tomando las dimensiones en los dibujos, determinar los esfuerzos S en las barras CD y las presiones Q de las vigas sobre la pared, si las fijaciones en los puntos A, C y D son articuladas. No tener en cuenta el peso de las barras y las vigas.

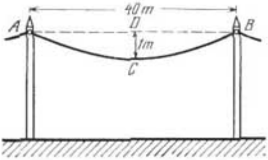
Respuesta: a) $S=3{,}9$ tf; $Q=1{,}98$ tf;
b) $S=3{,}9$ tf; $Q=1{,}98$ tf.

2.32. El cable eléctrico ACB está tendido entre dos postes formando una curva suave cuya flecha $CD=f=1$ m. La distancia entre los postes $AB=l=40$ m. El peso del cable $Q=40$ kgf.

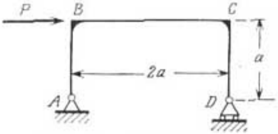
Determinar las tensiones del cable: T_C en el punto medio; T_A y T_B, en los extremos.

Al resolver el problema considerar que el peso de cada mitad del cable está aplicado a la distancia de $\frac{l}{4}$ del poste próximo.

Respuesta: $T_C=\frac{Ql}{8f}=200$ kgf; $T_A=T_B=201$ kgf.



Para el problema 2.32.

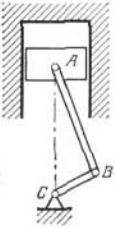


Para el problema 2.33.

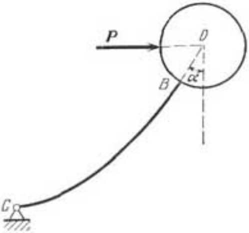
2.33. Para el pórtico representado en la figura, determinar las reacciones en los apoyos R_A y R_D que surgen al actuar una fuerza horizontal P, aplicada en el punto B, despreciando el peso del pórtico.

Respuesta: $R_A=P\frac{\sqrt{5}}{2}$, $R_D=\frac{P}{2}$.

2.34. En un motor de combustión interna, el área del émbolo es de 200 cm², el largo de la biela $AB=30$ cm, el de la manivela



Para el problema 2.34.



Para el problema 2.35.

$BC=6$ cm. En el momento dado, la presión del gas detrás del émbolo $P_1=10$ kgf/cm², delante del mismo, $P_2=2$ kgf/cm².

Hallar la fuerza T que actúa desde la biela AB sobre la manivela BC, producto de la diferencia de presiones del gas, si el ángulo $ABC=90°$. No tener en consideración el rozamiento entre el émbolo y el cilindro.

Respuesta: $T=1,6$ tf.

2.35. Un aeróstato, cuyo peso es G se mantiene en equilibrio por el cable BC. Sobre el aeróstato actúan la fuerza de sustentación Q y la fuerza horizontal de presión del viento igual a P.

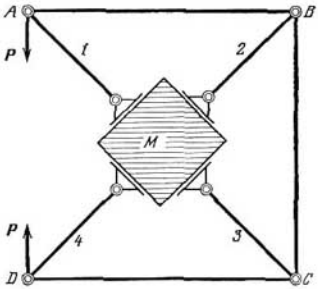
Determinar la tensión del cable en el punto B y el ángulo α.

Respuesta: $T=\sqrt{P^2+(Q-G)^2}$; $\alpha=\operatorname{arctg}\frac{P}{Q-G}$.

2.36. Para comprimir un cubo de cemento M por cuatro caras se utiliza un mecanismo articulado en el cual las barras AB, BC y CD coinciden con los lados del cuadrado $ABCD$ y las barras *1*, *2*, *3* y *4* son iguales entre sí y están dirigidas por las diagonales del mismo cuadrado; dos fuerzas P, de igual módulo, se aplican en los puntos A y D como se representa en el dibujo.

Determinar las fuerzas N_1, N_2, N_3 y N_4 que comprimen el cubo y los esfuerzos S_1, S_2 y S_3 en las barras AB, BC y CD, si la magnitud de las fuerzas aplicadas en los puntos A y D es igual a 5 tf.

Respuesta: $N_1=N_2=N_3=N_4=7,07$ tf. Los esfuerzos de extensión son: $S_1=S_2=S_3=5$ tf.

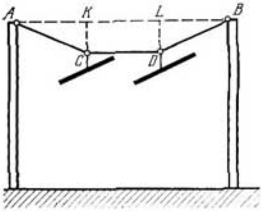


Para el problema 2.36.

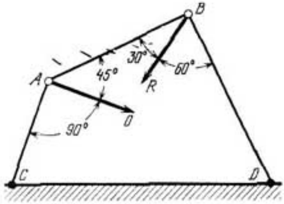
2.37. Dos hilos de contacto de tranvía van suspendidos de cables de alambre transversales, cada uno de los cuales está fijado en dos postes. Los postes se hallan a lo largo de la vía a la distancia de 40 m uno de otro. Las distancias para cada uno de los cables transversales son: $AK=KL=LB=5$ m; $KC=LD=0,5$ m. Despreciando el peso del cable, hallar las tensiones T_1, T_2 y T_3

en sus tramos AC, CD y DB, si el peso de 1 m de hilo de contacto es de 0,75 kgf.

Respuesta: $T_1 = T_3 = 301{,}5$ kgf; $T_2 = 300$ kgf.



Para el problema 2.37.



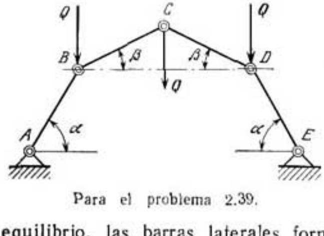
Para el problema 2.38.

2.38. A la articulación A del cuadrilátero de barras articuladas $ABDC$, cuyo lado CD está fijo, se aplica la fuerza $Q = 100$ N bajo el ángulo $BAQ = 45°$.

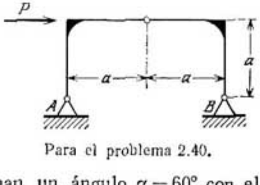
Determinar la magnitud de la fuerza R aplicada en la articulación B bajo el ángulo $ABR = 30°$ de modo que el cuadrilátero $ABCD$ se halle en equilibrio, si los ángulos $CAQ = 90°$ y $DBR = 60°$.

Respuesta: $R = 163$ N.

2.39. Un polígono de barras articuladas consta de cuatro barras iguales; los extremos A y E están articulados; los nudos B, C y D están sometidos a cargas verticales iguales a Q. En posición de



Para el problema 2.39.



Para el problema 2.40.

equilibrio, las barras laterales forman un ángulo $\alpha = 60°$ con el horizonte.

Determinar el ángulo de inclinación β de las barras intermedias al horizonte.

Respuesta: $\beta = 30°$.

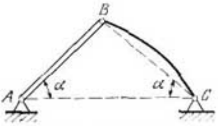
2.40. Para el arco de tres articulaciones, representado en el dibujo, determinar las reacciones de los apoyos A y B, que surgen como resultado de la acción de la fuerza horizontal P. Despreciar el peso del arco.

Respuesta: $R_A = R_B = P\frac{\sqrt{2}}{2}$.

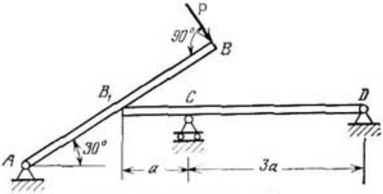
2.41. La barra rectilínea y homogénea AB, cuyo peso es igual a P, y la barra BC imponderable con eje curvilíneo de cualquiera configuración están articuladas en el punto B y en los apoyos A y C, dispuestos en la misma horizontal AC. Las rectas AB y BC forman ángulos $\alpha = 45°$ con la recta AC.

Determinar las reacciones de los apoyos A y C.

Respuesta: $R_A = \frac{\sqrt{10}}{4}P$; $R_C = \frac{\sqrt{2}}{4}P$.



Para el problema 2.41.



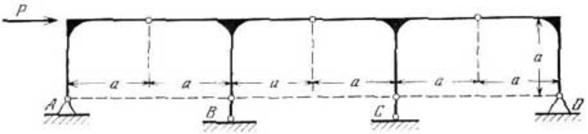
Para el problema 2.42.

2.42. La viga inclinada AB, sobre un extremo de la cual actúa la fuerza P, se apoya con su punto medio B_1 sobre el borde de la consola de la viga CD.

Determinar las reacciones de los apoyos despreciando el peso de las vigas.

Respuesta: $R_A = P$; $R_C = \frac{4\sqrt{3}}{3}P$; $R_D = \frac{\sqrt{3}}{3}P$.

2.43. Viene dado un sistema compuesto de cuatro arcos, cuyas dimensiones están indicadas en el dibujo.



Para el problema 2.43.

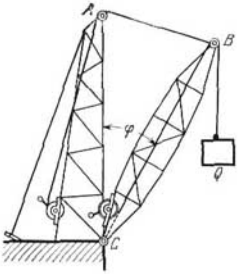
Determinar las reacciones de los apoyos A, B, C y D, que surgen como resultado de la acción de una fuerza horizontal P.

Respuesta: $R_A = P\frac{\sqrt{2}}{2}$; $R_B = P$; $R_C = P$; $R_D = P\frac{\sqrt{2}}{2}$.

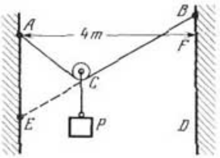
2.44. Una grúa consta de la torre fija AC y la armadura móvil BC, articulada en C y sostenida por el cable AB. El peso $Q = 40$ tf pende de una cadena que pasa por una polea en el punto B y sigue por una recta BC hacia el cabrestante. El largo $AC = BC$.

Determinar, despreciando el peso de la armadura y la fricción en la polea, la tensión T del cable AB y la fuerza P que comprime la armadura por la recta BC como función del ángulo $ACB = \varphi$.

Respuesta: $T = 80 \operatorname{sen} \frac{\varphi}{2}$ tf; $P = 80$ tf independientemente del ángulo φ.



Para el problema 2.44.



Para el problema 2.45.

2.45. Una polea C con el peso $P = 18$ N puede deslizarse a lo largo del cable flexible ACB cuyos extremos A y B están fijados en las paredes. La distancia entre las paredes es de 4 m; el largo del cable es de 5 m.

Determinar la tensión del cable estando la polea con el peso en equilibrio, despreciando el peso del cable y el rozamiento entre la polea y el cable.

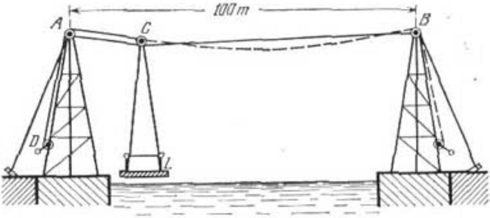
Las tensiones de las partes AC y CB del cable son iguales, y sus valores pueden determinarse de la semejanza del triángulo de fuerzas y del triángulo isósceles, uno de cuyos lados laterales es la recta BCE y la base se halla en la vertical BD.

Respuesta: 15 N, independientemente de la altura BF.

2.46. Para el paso de un río se emplea la cuna L que, mediante el rodillo C, está suspendida del cable de acero AB fijado en las cimas de las torres A y B. Para el desplazamiento del rodillo C hacia la orilla izquierda sirve la cuerda CAD, que pasa por la polea A y se enrolla en el torno D; para el desplazamiento de la cuna hacia la orilla derecha existe otra cuerda análoga. Los puntos A y B se hallan en una misma horizontal a la distancia $AB = 100$ m uno del otro; el largo del cable ACB es de 102 m; el peso de la cuna es de 5 tf.

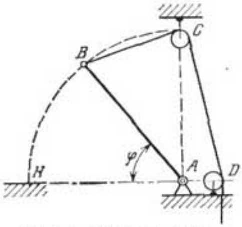
Despreciando el peso del cable y de las cuerdas, así como el rozamiento entre el rodillo y el cable, determinar la tensión de la cuerda CAD y la tensión del cable ACB en el instante en que el largo del tramo $AC = 20$ m.

Respuesta: $S_{CAD} = 0{,}75$ tf; $S_{CB} = S_{CA} = 9{,}56$ tf.

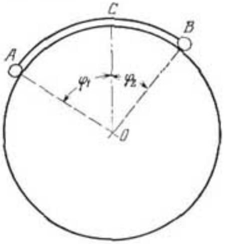


Para el problema 2.46.

2.47. El bastidor de ventana AB, cuyo corte está representado en la figura, pesa 100 kgf y se abre girando alrededor del eje horizontal A mediante el cordón BCD, que pasa por las poleas C y D. La polea C, cuyas dimensiones despreciamos, y el punto A se hallan en una misma vertical; el peso del bastidor está aplicado en el punto medio del mismo, despreciamos también el rozamiento.



Para el problema 2.47.



Para el problema 2.48.

Hallar la tensión T del cordón en función del ángulo φ, que el bastidor AB forma con la horizontal AH, suponiendo que $AB = AC$, así como los valores máximo y mínimo de esa tensión.

Respuesta: $T = 100 \operatorname{sen}\left(45° - \frac{\varphi}{2}\right)$ kgf;
$T_{\text{máx}} = 70{,}7$ kgf en el caso en que $\varphi = 0$;
$T_{\text{mín}} = 0$ siendo $\varphi = 90°$.

2.48. En un cilindro redondo y liso, con eje horizontal y radio $OA = 0{,}1$ m, se hallan dos bolitas A y B; la primera pesa 1 N, la segunda, 2 N. Las bolitas están unidas por el hilo AB de 0,2 m de largo.

Determinar los ángulos φ_1 y φ_2 que los radios OA y OB forman con la recta vertical OC en posición de equilibrio, y las presiones N_1 y N_2 de las bolitas sobre el cilindro en los puntos A y B. No tomar en consideración las dimensiones de las bolitas.

Respuesta: $\varphi_1 = 2 - \varphi_2$; $\quad \operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{\operatorname{sen} 2}{2 + \cos 2}$;

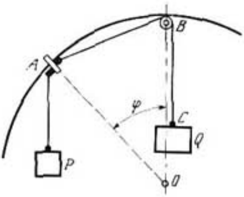
$\varphi_1 = 84°45'$; $\quad \varphi_2 = 29°50'$;

$N_1 = \cos \varphi_1 N = 0{,}092\ N$; $\quad N_2 = 2 \cos \varphi_2 N = 1{,}73\ N$.

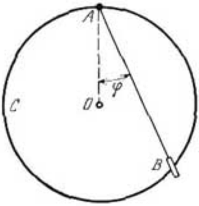
2.49. El anillo liso A puede deslizarse sin fricción por un alambre inmóvil doblado según una circunferencia dispuesta en el plano vertical. Del anillo pende la pesa P y al mismo va atada la cuerda ABC, que pasa por la polea fija B, que se halla en el punto superior de la circunferencia; despreciar las dimensiones de la polea. Del punto C pende la pesa Q.

Determinar el ángulo central φ del arco AB en la posición de equilibrio, despreciando el peso del anillo y el rozamiento en la polea, e indicar la condición con la que el equilibrio es posible.

Respuesta: $\operatorname{sen} \frac{\varphi_1}{2} = \frac{Q}{2P}$; $\varphi_2 = \pi$; la primera de las posiciones de equilibrio indicadas es posible a condición de que $Q < 2P$, la segunda, cualesquiera que sean Q y P.



Para el problema 2.49.



Para el problema 2.50.

2.50. En la circunferencia de alambre ABC de radio R, situada en el plano vertical, se halla un anillo liso B, cuyo peso es p; despreciar las dimensiones del anillo. Mediante un hilo elástico AB el anillo está unido con el punto superior A de la circunferencia.

Determinar el ángulo φ en la posición de equilibrio, sabiendo que la fuerza de tensión T del hilo es proporcional a su alargamiento relativo y que el coeficiente de proporcionalidad es igual a k.

Si denominamos por L y l el largo del hilo en estado extendido y no extendido respectivamente, la magnitud $T=k\frac{L-l}{l}$.

Respuesta: $\cos\varphi=\frac{1}{2}\frac{kl}{kR-pl}$, siendo $k\geqslant\frac{2pl}{2R-l}$; en caso contrario $\varphi=0$.

2.51. El punto M se atrae por tres centros fijos $M(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ y $M_3(x_3, y_3)$ con fuerzas proporcionales a las distancias $F_1=k_1r_1$, $F_2=k_2r_2$, $F_3=k_3r_3$, donde $r_1=MM_1$, $r_2=MM_2$, $r_3=MM_3$ y k_1, k_2 y k_3 son los coeficientes de proporcionalidad. Determinar las coordenadas x, y del punto M en posición de equilibrio.

Respuesta: $x=\frac{k_1x_1+k_2x_2+k_3x_3}{k_1+k_2+k_3}$;

$$y=\frac{k_1y_1+k_2y_2+k_3y_3}{k_1+k_2+k_3}.$$

2.52. Una placa rectangular homogénea, que pesa 5 kgf, va suspendida de tal modo que puede girar libremente alrededor del eje horizontal que pasa a lo largo de uno de sus lados. El viento, que sopla uniformemente, la sostiene inclinada 18° con respecto al plano vertical.

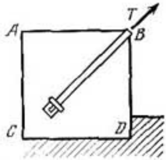
Determinar la resultante de las presiones que el viento ejerce sobre la placa perpendicularmente a su plano.

Respuesta: 5 sen 18° = 1,55 kgf.

2.53. La cadena extrema de un puente de cadena está empotrada en un cimiento de piedras en forma de paralelepipedo rectangular, cuya sección media es $ABDC$. Los lados $AB=AC=5$ m, el peso específico de la mampostería es de 2,5 gf/cm³; la cadena está situada por la diagonal BC.

Hallar el largo necesario a del tercer lado del paralelepipedo, si la tensión de la cadena $T=100$ tf.

La base debe ser calculada contra el vuelco alrededor de la arista D; al realizar el cálculo despreciamos la resistencia del terreno.



Para el problema 2.53

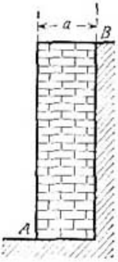
Respuesta: $a\geqslant 2,3$ m.

2.54. Un terraplén se apoya en una pared de piedra vertical AB. Hallar el espesor necesario a de la pared considerando que la presión del terreno sobre la pared va dirigida horizontalmente, está aplicada a 1/3 de su altura y es de 6 tf/m (por un metro de largo de la pared); el peso específico de la mampostería es de 2 gf/cm³.

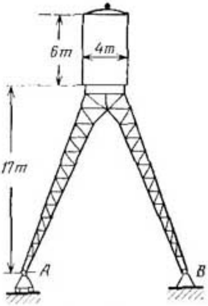
La pared debe ser calculada contra el vuelco alrededor del borde A.

Respuesta: $a\geqslant 1,42$ m.

2.55. Una torre de agua consta de un recipiente cilíndrico de 6 m de altura y de 4 m de diámetro, montado en cuatro postes colocados simétricamente e inclinados respecto al horizonte; el fondo del recipiente se halla a la altura de 17 m sobre el nivel de los apoyos; la torre pesa 8 tf; la presión del viento se calcula para el área de la proyección de la superficie del recipiente sobre el plano



Para el problema 2.54.



Para el problema 2.55.

perpendicular a la dirección del viento, considerando la presión específica del viento igual a 125 kgf/cm². Determinar la distancia necesaria AB entre los apoyos de los postes.

La distancia AB debe ser calculada contra el vuelco por la presión del viento cuando éste sopla en dirección horizontal.

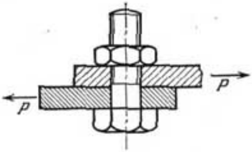
Respuesta: $AB \geqslant 15$ m.

2.56. Determinar el apriete necesario del perno que une dos placas de acero desgarradas por la fuerza $P = 2000$ kgf. El perno está ajustado con holgura y no debe experimentar cizallamiento. El coeficiente de rozamiento entre las placas es de 0,2.

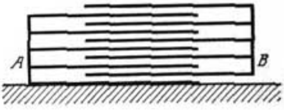
Nota. El perno no debe experimentar cizallamiento y por eso se debe apretar con tal fuerza que el rozamiento, que se desarrolla entre las placas, pueda evitar el deslizamiento de éstas. La fuerza que actúa a lo largo del eje del perno es, precisamente, el apriete buscado.

Respuesta: 10 000 kgf.

2.57. Unas hojas de papel, colocadas como se muestra en el dibujo, se pegan por sus extremos libres las nones con las nones y las pares con las pares de tal modo que se obtienen dos balas independientes A y B. El peso de cada hoja es de 6 gf; el número de hojas es igual a 200; el coeficiente de rozamiento entre las hojas, así como con la mesa, sobre la cual se halla el papel, es de 0,2. Suponiendo que una de las balas se mantiene inmóvil,



Para el problema 2.56.



Para el problema 2.57.

determinar el esfuerzo mínimo horizontal P necesario para sacar la otra bala.

Respuesta: Al sacar A de B la fuerza $P=24,12$ kgf, mientras que al sacar B de A, la fu rza $P=23,88$ kgf.

2.58. Un vagón que desciende por una pendiente e 0,008, al desarrollar cierta velocidad marcha luego uniformemente. Determinar la resistencia R al avance del vagón a esta veloci ad, si su peso es igual a 50 tf.

Se llama pendiente de la vía la tangente del ángulo de inclinación de la vía respecto al horizonte; debido a que la magnitud de esta pendiente es insignificantemente pequeña, el seno puede considerarse igual a la tangente de este ángulo.

Respuesta: $R=400$ kgf.

2.59. Un tren sube por una vía rectilínea, cuya pendiente es de 0,008, a una velocidad constante; el peso del tren, sin locomotora, es de 1200 tf.

¿Cuál es la fuerza de tracción P de la locomotora si la resistencia al avance es de 0,005 de la presión del tren sobre los rieles?

Respuesta: $P=15,6$ tf.

2.60. Un plano inclinado áspero forma con el horizonte tal angulo α que un cuerpo pesado colocado en este plano desciende a la velocidad constante que le fue comunicada al iniciar el movimiento. Determinar el coeficiente de rozamiento f.

Respuesta: $f=\text{tg}\,\alpha$.

2.61. Hallar el talud de reposo del terreno si el coeficiente de rozamiento para este terreno es $f=0,8$.

Se llama talud de reposo el mayor ángulo de inclinación de la pendiente respecto al horizonte, con el cual la partícula de terreno, que se halla en la pendiente, permanece en equilibrio.

Respuesta: 38°40'.

2.62. La cuña A, cuya inclinación es $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}05$, se introduce en la cavidad BB_1 con el esfuerzo $Q = 6$ tf.

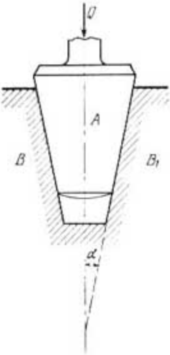
Determinar la presión normal N sobre las caras de la cuña y el esfuerzo P necesario para sacarla si el coeficiente de rozamiento es $f = 0{,}1$.

Respuesta: $N = 20$ tf, $P = 2$ tf.

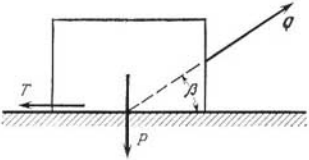
2.63. Un cajón de peso P reposa sobre un plano áspero horizontal con coeficiente de rozamiento f.

Determinar el ángulo β de aplicación de la fuerza Q y la magnitud de ésta a condición de mover el cajón con el valor mínimo de Q.

Respuesta: $\beta = \operatorname{arctg} f$; $Q_{\min} = \dfrac{fP}{\sqrt{1+f^2}}$.



Para el problema 2.62.



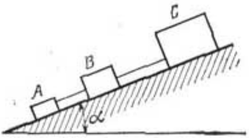
Para el problema 2.63

2.64. Tres pesos, A, B y C, de 10 kg, 30 kg y 60 kg, respectivamente, se hallan sobre un plano inclinado que forma un ángulo α con el horizonte. Los pesos están unidos por medio de cables, como se muestra en el dibujo. Los coeficientes de rozamiento entre los pesos y el plano son: $f_A = 0{,}1$, $f_B = 0{,}25$ y $f_C = 0{,}5$, respectivamente.

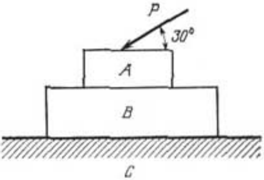
Determinar el ángulo α bajo el cual los cuerpos descienden uniformemente por el plano. Hallar también las tensiones de los cables T_{AB} y T_{BC}.

Respuesta: $\alpha = \operatorname{arctg} 0{,}38$, $T_{AB} = 2{,}7$ kgf, $T_{BC} = 6{,}5$ kgf.

2.65. Sobre la cara superior de la barra rectangular B, que pesa 200 kgf, se halla la barra rectangular A de 100 kgf de peso. La barra B está apoyada con su cara inferior sobre la superficie horizontal C, siendo el coeficiente de rozamiento entre éstas $f_2 = 0,2$.



Para el problema 2.64.



Para el problema 2.65.

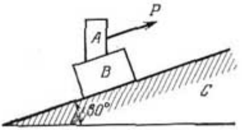
El coeficiente de rozamiento entre las barras A y B $f_1 = 0,5$. Sobre la barra A actúa la fuerza $P = 60$ kgf, que forma el ángulo $\alpha = 30°$ con el horizonte.

¿Se moverá la barra A respecto a la B? ¿Se moverá la barra B respecto a la C?

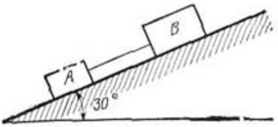
Respuesta: Las barras A y B permanecen en reposo.

2.66. Dos cuerpos, A y B se hallan sobre el plano inclinado C, como está representado en el dibujo. El cuerpo A pesa 100 kgf; el B, 200 kgf. Los coeficientes de rozamiento entre A y B es $f_1 = 0,6$; entre B y C, $f_2 = 0,2$. Analizar el estado del sistema para diferentes valores de la fuerza P aplicada al cuerpo A paralelamente al plano inclinado.

Respuesta: Siendo $P < 98$ kgf, ambos cuerpos descienden sin desplazarse uno respecto al otro; si $98 \text{ kgf} < P < 102$ kgf, ambos cuerpos se hallan en reposo; para $P > 102$ kgf, el cuerpo B queda en reposo, mientras que el cuerpo A se desliza por el B hacia arriba.



Para el problema 2.66.



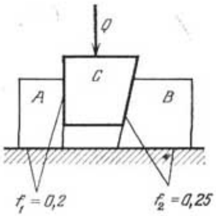
Para el problema 2.67.

2.67. Dos barras rectangulares A y B, dispuestas en un plano inclinado, de 200 kgf y 400 kgf respectivamente, están unidas por un cable y sus coeficientes de rozamiento con el plano inclinado son $f_A = 0{,}5$ y $f_B = 2/3$. ¿Se moverá el sistema o permanecerá en reposo?

Hallar la tensión T del cable y las magnitudes de las fuerzas de fricción que actúan sobre cada uno de los cuerpos.

Respuesta: El sistema quedará en reposo.
$F_A = 86{,}6$ kgf, $F_B = 213{,}4$ kgf, $T = 13{,}4$ kgf.

2.68. La cuña C está introducida entre los cuerpos A y B que descansan sobre un plano áspero horizontal. Una cara de la cuña es vertical, la otra forma el ángulo $\alpha = \operatorname{arctg} 1/3$ con la vertical.



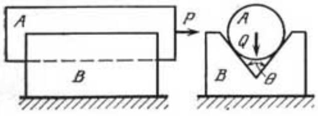
Para el problema 2.68.

El cuerpo A pesa 400 kgf, el B, 300 kgf, los coeficientes de rozamiento entre las superficies están indicados en la figura.

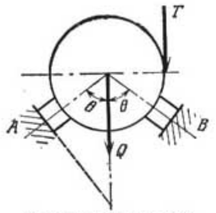
Hallar cuál debe ser la fuerza Q para que uno de los cuerpos se desplace, así como el valor de la fuerza de rozamiento F que actúa en este caso por parte del plano horizontal sobre el cuerpo que queda inmóvil.

Respuesta: $Q = 70$ kgf, en este caso empieza a moverse el cuerpo A;
$F_B = 83$ kgf.

2.69. El cilindro A descansa sobre las guías B cuyo corte transversal es una cuña simétrica con un ángulo de abertura θ. El coeficiente de rozamiento entre el cilindro A y la guía B es igual a f. El peso del cilindro es igual a Q.



Para el problema 2.69.



Para el problema 2.70.

¿Cuál debe ser la fuerza P para que el cilindro se desplace horizontalmente? ¿Cuál debe ser el ángulo θ para que el movimiento empiece siendo el valor de la fuerza P igual al peso del cilindro Q?

Respuesta: $P = \dfrac{Qf}{\operatorname{sen} \frac{\theta}{2}}$; $\theta = 2 \arcsen f$.

2.70. Un cilindro de peso Q descansa sobre los apoyos A y B, dispuestos simétricamente respecto a la vertical que pasa por el centro del cilindro. El coeficiente de rozamiento entre el cilindro y los apoyos es igual a f.

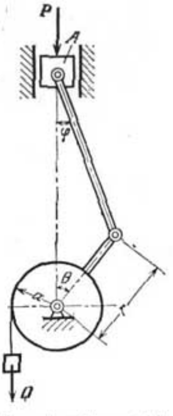
¿Cuál debe ser el valor de la fuerza tangencial T para que el cilindro empiece a girar? ¿Cuál debe ser el ángulo θ para que este dispositivo sea autofrenado?

Respuesta: $T = \frac{fQ}{(1+f)^2 \cos\theta - f}$;

$$\theta \leqslant \arccos \frac{f}{1+f^2}.$$

2.71. Despreciando el rozamiento entre la corredera A y la guía, así como la fricción en todas las articulaciones y cojinetes del mecanismo de manivela, determinar la fuerza P, necesaria para mantener el peso Q estando el mecanismo en la posición representada en el dibujo.

¿Cuáles son los valores mínimo y máximo de P, que aseguran la inmovilidad del peso Q, si el coeficiente de rozamiento entre la corredera A y la guia es igual a f?



Para el problema 2.71.

Respuesta: $P = \frac{Qa \cos\varphi}{r \operatorname{sen}(\varphi+\theta)}$;

$$P_{\text{mín}} = \frac{Qa}{r} \frac{\cos\varphi - f \operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{sen}(\varphi+\theta)};$$

$$P_{\text{máx}} = \frac{Qa}{r} \frac{\cos\varphi + f \operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{sen}(\varphi+\theta)}.$$

§ 3. FUERZAS PARALELAS

3.1. Determinar las reacciones verticales de los apoyos, sobre los cuales descansa libremente con sus extremos una viga de longitud l cargada uniformemente de p N en cada unidad de longitud. El peso de la viga está incluído en la carga uniformemente repartida.

Respuesta: $R_1 = R_2 = \frac{l}{2} pl\ N.$

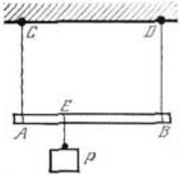
3.2. Determinar las reacciones verticales de los apoyos de una viga horizontal de longitud l, si la carga P está situada a la distancia x del primer apoyo.

Respuesta: $R_1 = P\frac{l-x}{l}$; $\quad R_2 = P\frac{x}{l}$.

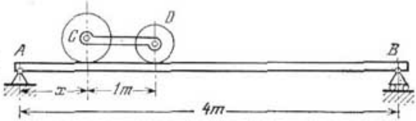
3.3. Una barra homogénea AB de 1 m de longitud y de 2 kgf de peso está suspendida horizontalmente con ayuda de dos cuerdnas paralelas AC y BD. En el punto E de la barra, a la distancia $AE = \frac{1}{4}$ m, está suspendida una carga $P = 12$ kgf.

Determinar las tensiones de las cuerdas T_C y T_D.

Respuesta: $T_C = 10$ kgf; $T_D = 4$ kgf.



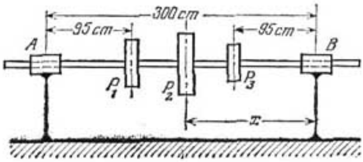
Para el problema 3.3.



Para el problema 3.4.

3.4. Sobre una viga horizontal que descansa sobre dos apoyos distantes entre sí 4 m están puestas dos cargas, la C de 200 kgf y la D de 100 kgf, de tal manera que, si despreciamos el peso de la barra, la reacción del apoyo A es dos veces mayor que la del apoyo B. La distancia CD entre las cargas es igual a 1 m. ¿A qué distancia x se encuentra la carga C del apoyo A?

Respuesta: $x = 1$ m.



Para el problema 3.5.

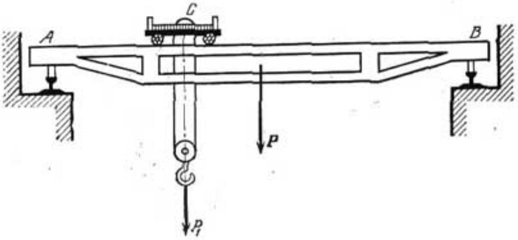
3.5. El árbol de transmisión AB lleva tres poleas cuyos pesos son $P_1 = 300$ kgf, $P_2 = 500$ kgf y $P_3 = 200$ kgf. Las dimensiones están indicadas en el dibujo.

Determinar a qué distancia x del cojinete B hace falta colocar la polea de peso P_2 para que la reacción del cojinete A sea igual a la del cojinete B; el peso del árbol se desprecia.

Respuesta: $x = 139$ cm.

3.6. Hallar las magnitudes de las presiones que ejerce una grúa de puente AB sobre los rieles en función de la posición de la carretilla C en la cual está fijada una cabria. La posición de la carretilla se debe determinar por la distancia desde el centro de ésta hasta el riel izquierdo en partes de la longitud total del puente. El peso del puente es $P=6$ tf, el peso de la carretilla junto con la carga levantada $P_1=4$ tf.

Respuesta: $F_A=(7-4n)$ tf; $F_B=(3+4n)$ tf, donde $n=\frac{AC}{AB}$.

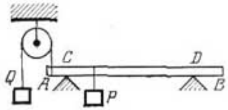


Para el problema 3.6.

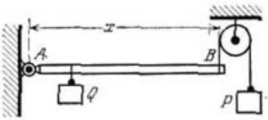
3.7. Una viga AB de 10 m de longitud y de 200 kgf de peso descansa sobre dos apoyos C y D. El apoyo C se encuentra a 2 m del extremo A, el apoyo D está a 3 m del extremo B. El extremo A de la viga se tira verticalmente hacia arriba mediante un cable pasado por una polea y en el cual está suspendida una carga Q de 300 kgf de peso. A 3 m del extremo A de la viga está suspendida una carga P de 800 kgf de peso.

Determinar las reacciones de los apoyos despreciando el rozamiento de la polea.

Respuesta: $R_C=300$ kgf; $R_D=400$ kgf.



Para el problema 3.7.



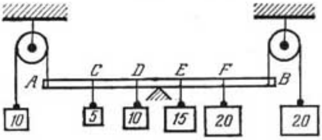
Para el problema 3.8.

3.8. Una barra horizontal AB de 100 N de peso puede girar alrededor del eje inmóvil de la charnela A. El extremo B se tira hacia arriba mediante un hilo pasado por una polea y en el cual está suspendida una pesa $P=150$ N. En un punto que se encuentra a 20 cm del extremo B está suspendida una carga Q de 500 N de peso.

¿Cuál es la longitud x de la barra AB si ésta se encuentra en equilibrio?

Respuesta: $x=25$ cm.

3.9. El extremo A de una viga horizontal AB de 20 kgf de peso y de 5 m de longitud se tira hacia arriba por medio de una cuerda pasada por una polea, en esta cuerda está suspendida una carga de 10 kgf de peso. De la misma manera se tira hacia arriba el extremo B mediante una carga de 20 kgf de peso. En los puntos



Para el problema 3.9.

C, D, E y F, distantes entre si y de los puntos A y B 1 m, están suspendidas las cargas de 5, 10, 15 y 20 kgf de peso respectivamente.

¿En qué lugar hay que apoyar la barra para que ésta se encuentre en equilibrio?

Respuesta: en el centro.

3.10. En una barra homogénea de 3 m de longitud y de 6 N de peso están suspendidas cuatro cargas a distancias iguales entre sí, dos de estas cargas se encuentran en los extremos de la barra. La primera carga de la izquierda pesa 2 N, cada carga siguiente es 1 N más pesada que la anterior.

¿A qué distancia x del extremo izquierdo hay que suspender la barra para que ésta permanezca horizontal?

Respuesta: $x = 1{,}75$ m.

3.11. Una viga homogénea horizontal está unida con la pared mediante una charnela y en el punto situado a 160 cm de la pared está apoyada. La longitud de la viga es de 400 cm, su peso constituye 320 kgf. A las distancias de 120 cm y 180 cm de la pared sobre la viga se han colocado dos cargas de 160 kgf y 240 kgf de peso.

Determinar las reacciones de los apoyos.

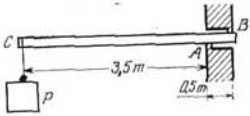
Respuesta: 790 kgf, dirigida hacia arriba; 70 kgf, dirigida hacia abajo.

3.12. Una viga horizontal homogénea de 4 m de longitud y de 0,5 tf de peso va empotrada en una pared de 0,5 m de espesor de tal modo que se apoya en ésta en los puntos A y B.

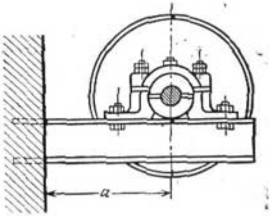
Determinar las reacciones en estos puntos si del extremo libre de la viga está suspendida una carga P de 4 tf de peso.

Respuesta: $R_A = 34$ tf y está dirigida hacia arriba;
$R_B = 29{,}5$ tf y está dirigida hacia abajo.

3.13. Una viga horizontal está empotrada por un extremo en una pared y en el otro extremo se coloca el cojinete de un árbol. A causa del peso del árbol, las poleas y el cojinete, la viga expeimenta una carga vertical Q igual a 120 kgf.



Para el problema 3.12.



Para el problema 3.13.

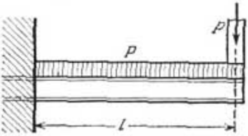
Despreciando el peso de la viga y considerando que la carga Q actuá a la distancia $a = 750$ mm de la pared determinar las reacciones del empotramiento.

Respuesta: La reacción $R = 120$ kgf; el momento de reacción $M = 90$ kgfm.

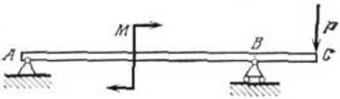
3.14. Una viga horizontal que sostiene un balcón está sometida a la acción de una carga uniformemente repartida con una intensidad $p = 200$ kgf/m. La carga $P = 200$ kgf de la columna se transmite al extremo libre de la viga. La distancia entre el eje de la columna y la pared es $l = 1,5$ m.

Determinar las reacciones del empotramiento.

Respuesta: $R = 500$ kgf; $M = 525$ kgfm.



Para el problema 3.14.



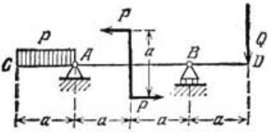
Para el problema 3.15.

3.15. Una viga de consola horizontal está sometida a la acción de un par de fuerzas de momento $M = 6$ tfm y de una carga vertical $P = 2$ tf en el punto C de la viga. La longitud del tramo AB de la viga es igual a 3,5 m, la longitud de la consola $BC = 0,5$ m.

Determinar las reacciones de los apoyos.

Respuesta: $R_A = 2$ tf y está dirigida hacia abajo;
$R_B = 4$ tf y está dirigida hacia arriba.

3.16. Una viga horizontal de dos consolas está sometida a la acción de un par de fuerzas (P, P), de una carga uniformemente repartida sobre la consola izquierda de intensidad p y de una carga vertical Q en el punto D de la consola derecha.

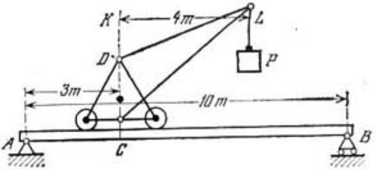


Para el problema 3.16.

Determinar las reacciones de los apoyos, si $P=1$ tf, $Q=2$ tf, $p=2$ tf/m, $a=0{,}8$ m.

Respuesta: $R_A=1{,}5$ tf; $R_B=$ $=2{,}1$ tf.

3.17. Los rieles de una grúa están colocados sobre una viga AB de 10 m de longitud. El peso de la grúa es de 5 tf y su centro de gravedad está situado sobre el eje CD; el peso de la carga es igual a 1 tf; el peso de la viga AB es igual a 3 tf; el voladizo de la grúa $KL=4$m; la distancia $AC=3$m.



Para el problema 3.17.

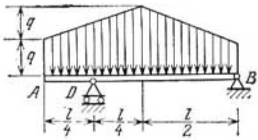
Hallar las reacciones de los apoyos en los puntos A y B cuando el brazo DL de la grúa y la viga AB se encuentran en un mismo plano vertical.

Respuesta: $R_A=5{,}3$ tf; $R_B=3{,}7$ tf.

3.18. La viga AB de l m de longitud porta la carga repartida indicada en el dibujo. La intensidad de carga equivale a q kgf/m en los extremos A y B de la viga y a $2q$ kgf/m en el centro de ésta.

Hallar las reacciones de los apoyos D y B; el peso de la viga se desprecia.

Respuesta: $R_D=ql$ kgf; $R_B=$ $=0{,}5\ ql$ kgf.



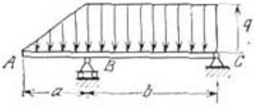
Para el problema 3.18.

3.19. Una viga horizontal AC apoyada en los puntos B y C porta entre éstos una carga uniformemente repartida de intensidad q kgf/m; en el tramo AB la intensidad de carga disminuye hasta cero de acuerdo con la ley lineal.

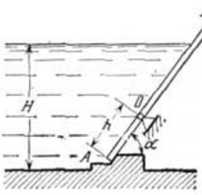
Hallar las reacciones de los apoyos B y C despreciando el peso de la viga.

Respuesta: $R_B = \frac{q}{6}\left(3a + 3b + \frac{a^2}{b}\right)$ kgf;

$R_C = \frac{q}{6}\left(3b - \frac{a^2}{b}\right)$ kgf.



Para el problema 3.19.



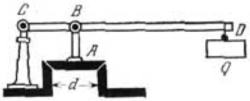
Para el problema 3.20.

3.20. El *tablero rectangular* AB de *un canal de riego puede* girar alrededor del eje O. Si el nivel del agua es bajo el tablero está cerrado, pero cuando el agua alcanza un cierto nivel H el tablero gira alrededor del eje y abre el canal.

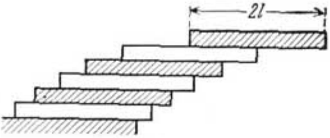
Despreciando el frotamiento y el peso del tablero determinar la altura H a la cual el tablero se abre.

Respuesta: $H = 3h$ sen α.

3.21. La válvula de seguridad A de una caldera de vapor está unida por medio de la barra AB con la palanca homogénea CD de 50 cm de longitud y de 1 kgf de peso, que puede girar alrededor del eje fijo C; el diámetro de la válvula $d = 6$ cm, el brazo $BC = 7$ cm.



Para el problema 3.21.



Para el problema 3.22.

¿Qué carga Q debe ser suspendida del extremo D de la palanca para que la válvula *se abra por sí sola cuando* la presión en la caldera sea 11 atm (1 atm = 1 kgf/cm²)?

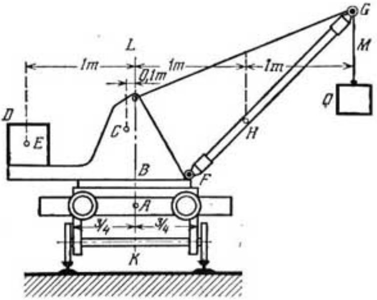
Respuesta: $Q = 43$ kgf.

3.22. Unas placas homogéneas e idénticas de $2l$ de longitud están colocadas una sobre otra de tal modo que parte de cada una de éstas sobresale de la placa inferior.

Determinar las longitudes límites de las partes salientes con las cuales las placas estarán en equilibrio.

Al resolver el problema hace falta adicionar sucesivamente los pesos de las placas a partir de la superior.

Respuesta: l, $\frac{1}{2}l$, $\frac{1}{3}l$, $\frac{1}{4}l$, $\frac{1}{5}l$, etc.



Para el problema 3.23.

3.23. Una grúa locomotora se apoya sobre los rieles distantes 1,5 m uno de otro. El peso del carro de grúa es igual a 3 tf, su centro de gravedad se encuentra en el punto A de la línea KL de intersección del plano de simetría del carro con el plano del dibujo. El peso de la cabria B de la grúa equivale a 1 tf, su centro de gravedad se encuentra en el punto C a la distancia de 0,1 m de la recta KL. El contrapeso D pesa 2 tf, su centro de gravedad se encuentra en el punto E a 1 m de distancia de la recta KL. El brazo FG pesa 0,5 tf, su centro de gravedad se encuentra en el punto H a 1 m de distancia de la recta KL. La ménsula de la grúa $LM = 2$m.

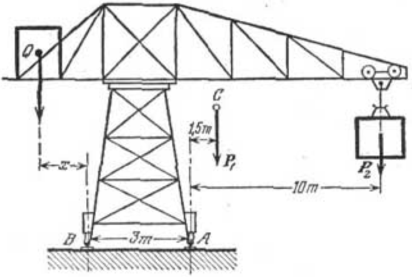
Determinar la carga máxima Q que no volteará la grúa.

Respuesta: $Q = 5{,}18$ tf.

3.24. El centro de gravedad de una grúa móvil sobre vagón de peso (sin el contrapeso) $P_1 = 50$ tf se encuentra en el punto C que está a 1,5 m de distancia del plano vertical, que pasa por el riel derecho. El carro de grúa está calculado para levantar una carga $P_2 = 25$ tf; su ménsula es igual a 10 m.

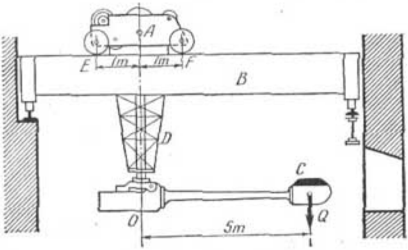
Determinar el peso mínimo Q del contrapeso y la distancia mayor x desde su centro de gravedad hasta el plano vertical, que pasa por el riel izquierdo B de tal modo que la grúa no se volteará cualquiera que sea la posición que ocupe el carro cargado o no. El peso propio del carro se desprecia.

Respuesta: $Q = 33{,}3$ tf; $x = 6{,}75$ m.



Para el problema 3.24.

3.25. La grúa para cargar el horno M. S. se compone de una cabria A que se mueve sobre ruedas por rieles colocados sobre las vigas del puente móvil B. En la parte inferior de la cabria está fijada una columna volteada D que sirve para fijar la pala C.

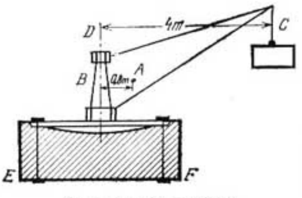


Para el problema 3.25.

¿Cuál debe ser el peso P de la cabria con la columna para que la carga $Q = 1{,}5$ tf que se encuentra en la pala a 5 m de distancia del eje vertical OA de la cabria no la vuelque? El centro de gravedad de la cabria se encuentra sobre el eje OA; la distancia del eje de cada una de las ruedas hasta el eje OA es igual a 1 m.

Respuesta: $P \geqslant 6$ tf.

3.26. Una grúa está montada sobre un fundamento (cimentación) de piedras. El peso de la grúa $Q = 2,5$ tf y está aplicado al centro de gravedad A a la distancia $AB = 0,8$ m del eje de la grúa; la ménsula de la grúa $CD = 4$ m. La base del fundamento tiene forma rectangular cuyo lado $EF = 2$m; el peso específico de la mampostería es de 2 gf/cm³.



Para el problema 3.26.

Calcular la profundidad mínima del fundamento, si la grúa está destinada para levantar cargas de hasta 3 tf, el fundamento debe ser calculado contra el volteo alrededor de la arista F.

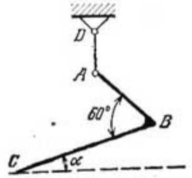
Respuesta: 1,1 m.

3.27. Una aguja magnética está suspendida de un alambre fino y está dispuesta horizontalmente en el meridiano magnético. Las componentes horizontales de la fuerza del campo magnético terrestre que actúan sobre los polos de la aguja en direcciones opuestas son iguales a 2 mgf cada una, la distancia entre los polos es de 10 cm. ¿A qué ángulo hace falta torcer el alambre para que la aguja forme con el merediano magnético un ángulo de 30°, si se sabe que para torcer el alambre a 1° hace falta aplicar un par de momento igual a 5 mgfcm?

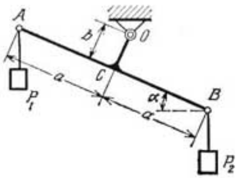
El momento del par de torsión es proporcional al ángulo de torsión.

Respuesta: 32°.

3.28. Dos barras homogéneas AB y BC de igual sección transversal unidas por sus extremos bajo un ángulo de 60° forman una palanca quebrada ABC. La barra AB es dos veces más corta que



Para el problema 3.28.



Para el problema 3.29.

la barra BC. La palanca está suspendida de su extremo A por medio de un hilo AD.

Determinar el ángulo de inclinación α de la barra BC al horizonte, cuando la palanca está en equilibrio. Las dimensiones transversales de las barras se desprecian.

Respuesta: $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{5}\sqrt{3};\quad \alpha=19°5'$.

3.29. Dos barras AB y OC cuyo peso por unidad de longitud es $2p$ están unidas en el punto C bajo un ángulo recto. La barra OC puede girar alrededor del eje horizontal O; $AC=CB=a$, $OC=b$. Dos pesas P_1 y P_2 están suspendidas en los puntos A y B; $P_2>P_1$.

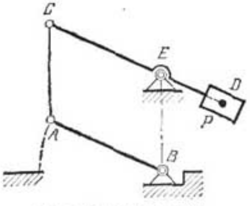
Determinar el ángulo de inclinación α de la barra AB al horizonte en estado de equilibrio.

Respuesta: $\operatorname{tg}\alpha=\frac{a}{b}\,\frac{P_2-P_1}{P_2+P_1+p(4a+b)}$.

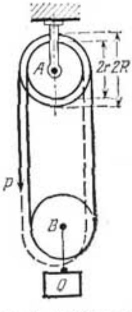
3.30. El puente levadizo AB se eleva mediante dos barras CD de 8 m de longitud y de 400 kgf de peso, una en cada lado del puente; la longitud del puente $AB=CE=5$ m; la longitud de la cadena $AC=BE$; el peso del puente es de 3 tf y se puede considerar que está aplicado en el punto medio de AB.

Calcular el peso de los contrapesos P que equilibran el puente.

Respuesta: $P=1383$ kgf.



Para el problema 3.30.



Para el problema 3.31.

3.31. Dos poleas A unidas invariablemente entre sí, cuyo eje está suspendido a un gancho fijo, forman la parte principal de un aparejo diferencial. Las gargantas de las poleas están dotadas de dientes que arrastran una cadena sin fin que forman dos bucles, en uno de los cuales está colocada la polea móvil B. A esta última está suspendida la carga Q a elevar y al ramal del bucle libre que pende de la polea grande se aplica un esfuerzo P. Los radios de las poleas A son R y r, $r<R$.

Es necesario hallar la dependencia del esfuerzo P de la magnitud de la carga que se eleva Q y determinar este esfuerzo cuando $Q=500$ N, $R=25$ cm, $r=24$ cm. El rozamiento se desprecia.

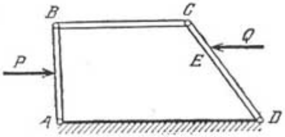
Respuesta: $P=\frac{1}{2}Q\left(1-\frac{r}{R}\right)=10$ N.

3.32. Una palanca diferencial se compone de una barra AB que tiene un prisma de apoyo fijo en el punto C y de un travesaño DE unido con la palanca AB por medio de eslabones pivotantes AD y EF. La carga $Q=1$ tf está suspendida al travesaño en el punto G mediante el prisma. La distancia entre las verticales trazadas por los puntos C y G es igual a 1 mm.

Determinar el peso P que hace falta pender de la palanca AB en el punto H a la distancia $CH=1$ m para equilibrar la carga Q. El rozamiento se desp.ecia.

Respuesta: $P=1$ kgf.

Para el problema 3.32.



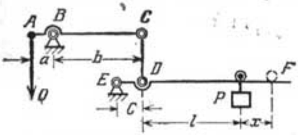
Para el problema 3.33.

3.33. En un mecanismo articulado de cuatro eslabones, el eslabón BC es paralelo al eslabón fijo AD. El eslabón $AB=h$ es perpendicular al AD. Una fuerza horizontal P está aplicada en el punto medio de AB.

¿Qué fuerza horizontal Q debe ser aplicada al eslabón CD en el punto E, si $CE=\frac{CD}{4}$, para que el mecanismo esté en equilibrio? Hallar la reacción en la articulación D. El peso de los eslabones se desprecia.

Respuesta: $Q=\frac{2}{3}P$; $R_D=\frac{1}{6}P$ y está dirigida por AD hacia la derecha.

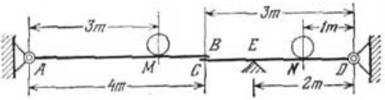
3.34. Para medir grandes esfuerzos Q se ha construido un sistema de dos palancas de brazos desiguales ABC y EDF unidas por un tirante CD. En los puntos B y E hay apoyos fijos. Una carga P de 12,5 kgf de peso puede desplazarse por la palanca EDF. La fuerza Q, aplicada en el punto A, se equilibra con esta carga, situada a la distancia l del punto D.



Para el problema 3.34.

¿A qué distancia x hace falta desplazar la carga P para conservar el equilibrio si la fuerza Q se aumenta en 1000 kgf y las dimensiones indicadas en el dibujo son iguales a: $a=3{,}3$ mm, $b=660$ mm, $c=50$ mm?

Respuesta: $x=2$ cm.



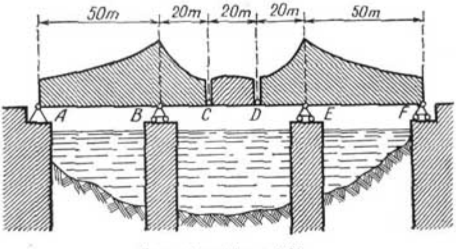
Para el problema 3.35.

3.35. Una viga AB de 4 m de longitud y de 200 kgf de peso puede girar alrededor de un eje horizontal A y su extremo B se apoya en otra viga CD de 3 m de longitud y de 160 kgf de peso, apoyada a su vez en el punto E y unida con el muro mediante una articulación D. Dos cargas de 80 kgf cada una están colocadas en los puntos M y N. Las distancias son: $AM=3$m, $ED=2$m, $ND=1$m.

Determinar las reacciones de los apoyos.

Respuesta: $R_A=120$ kgf, $R_B=160$ kgf, $R_E=400$ kgf, $R_D=0$.

3.36. Un puente cantilever se compone de tres partes: AC, CD y DF, las extremas de las cuales descansan cada una sobre dos apoyos. Las dimensiones son las siguientes: $AC=DF=70$m,



Para el problema 3.36.

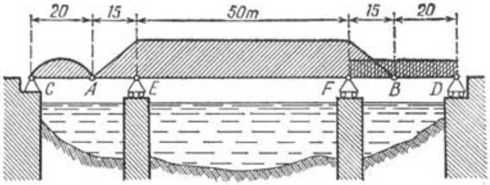
$CD=20$m, $AB=EF=50$m. La carga lineal sobre el puente es de 6 tf/m.

Hallar las presiones que ejerce esta carga sobre los apoyos A y B.

Respuesta: $N_A=102$ tf; $N_B=378$ tf.

3.37. Un puente cantilever se compone de la viga principal AB y dos vigas laterales AC y BD. El peso propio de un metro de longitud de la viga AB es de 1,5 tf y de las vigas AC y BD es igual a 1 tf.

Determinar las reacciones de todos los apoyos en el instante cuando todo el tramo derecho FD está ocupado por un tren, cuyo

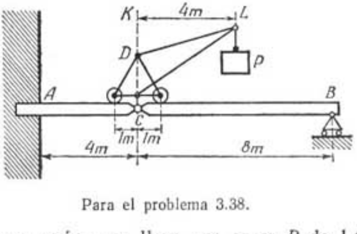


Para el problema 3.37.

peso puede ser sustituido por una carga uniformemente repartida por el tramo FD 3 tf/m de intensidad. Las dimensiones son las siguientes: $AC = BD = 20$m; $AE = BF = 15$m; $EF = 50$m.

Respuesta: $R_C = 10$ tf; $R_D = 40$ tf; $R_E = 54{,}25$ tf; $R_F = 160{,}75$ tf.

3.38. El extremo A de una viga horizontal partida ABC está encastrada en un muro y su extremo B descansa sobre un apoyo móvil; en el punto C la viga tiene una articulación. La viga está



Para el problema 3.38.

cargada por una grúa que lleva una carga P de 1 tf de peso; el peso de la grúa $Q = 5$ tf, su ménsula $KL = 4$m; el centro de gravedad de la grúa está sobre la vertical CD. Las dimensiones están indicadas en el dibujo.

Despreciando el peso de la viga, determinar las reacciones de apoyo en los puntos A y B cuando la grúa y la viga AB se encuentran en el mismo plano vertical.

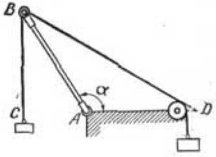
Respuesta: $R_A = 5{,}375$ tf; $R_B = 0{,}625$ tf; $M_A = 20{,}5$ tf.

4.1. Una carga C de 10 N de peso está suspendida por medio de una cuerda al punto B de una barra homogénea AB que puede girar alrededor de la articulación A. Desde el extremo B se ha tendido un cable que pasa por la polea D y soporta una pesa de 20 N.

Hallar la magnitud del ángulo $BAD =$ $= \alpha$ necesario para que la barra se en-
N, cuentre en equilibrio, si se sabe que
$AB = AD$ y el peso de la barra es de 20

El rozamiento en la polea se desprecia.

Respuesta: $\alpha = 120°$.

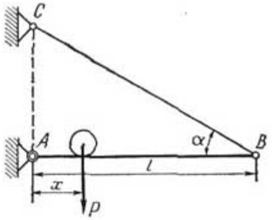


Para el problema 4.1.

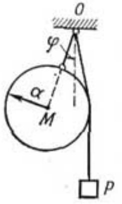
4.2. La viga horizontal de una grúa, cuya longitud es l, está articulada en uno de sus extremos y el otro extremo B está suspendido a un muro con auxilio de un tirante BC que forma con el horizonte un ángulo α. Una carga P puede desplazarse por la viga; la posición de la carga se define por la distancia variable x hasta la articulación A.

Determinar la tensión T del tirante BC en función de la posición de la carga. El peso de la viga se desprecia.

Respuesta: $T = \frac{Px}{l \operatorname{sen} \alpha}$.



Para el problema 4.2.



Para el problema 4.3.

4.3. Una bola homogénea de peso Q y de radio a y una pesa P están suspendidas con cuerdas en el punto O (véase el dibujo). La distancia $OM = b$.

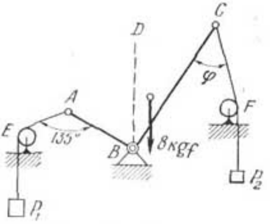
Determinar el ángulo φ que forma la recta OM con la vertical en estado de equilibrio.

Respuesta: $\operatorname{sen} \varphi = \frac{a}{b} \frac{P}{P+Q}$.

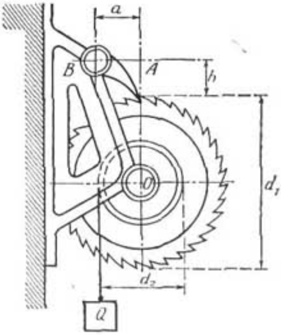
4.4. Una palanca quebrada ABC de 8 kgf de peso tiene el eje fijo B; el brazo $AB=4$ dm, el brazo $BC=1$ m, el centro de gravedad de la palanca se encuentra a 2,12 dm de la recta vertical BD. En los puntos A y C están atadas unas cuerdas que pasan por las poleas E y F y se tensan por medio de las pesas $P_1=31$ kgf y $P_2=10$ kgf.

Despreciando el rozamiento en las poleas, determinar el ángulo $BCF=\varphi$ en estado de equilibrio, si el ángulo $BAE=135°$.

Respuesta: $\varphi_1=45°$; $\varphi_2=135°$.



Para el problema 4.4.



Para el problema 4.5.

4.5. Una cabria está dotada de una rueda de trinquete de diámetro d_1 con un gatillo A. Un cable que sostiene una carga Q está enrollado sobre un cilindro de diámetro d_2 unido fijamente con la rueda.

Determinar la presión R sobre el eje B del gatillo, si se sabe que $Q=50$ kgf, $d_1=420$ mm, $d_2=240$ mm, $h=50$ mm, $a=120$ mm. El peso del gatillo se desprecia.

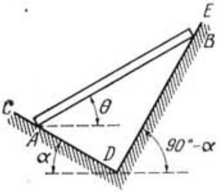
Respuesta: $R=Q\dfrac{d_2}{d_1}\dfrac{\sqrt{a^2+h^2}}{a}=31$ kgf.

4.6. Una viga homogénea AB de peso P se apoya sobre dos rectas oblicuas lisas CD y DE situadas en el plano vertical; la primera de éstas forma con el horizonte un ángulo igual a α, la segunda, un ángulo igual a $90°-\alpha$.

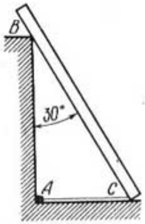
Hallar el ángulo θ de inclinación de la viga al horizonte en el estado de equilibrio y la presión de ésta sobre las rectas de apoyo.

Respuesta: $N_A=P\cos\alpha$; $N_B=P\,\text{sen}\,\alpha$; $\text{tg}\,\theta=\text{ctg}\,2\alpha$;
$\theta=90°-2\alpha$ siendo $\alpha\leqslant 45°$.

4.7. Una viga homogénea de 60 kgf de peso y de 4 m de longitud se apoya por uno de sus extremos sobre un piso liso y en un punto intermediario B, sobre un poste de 3 m de altura formando así un ángulo de 30° con la vertical. La viga se mantiene en esta posición con ayuda de una cuerda AC tendida sobre el piso.



Para el problema 4.6.



Para el problema 4.7.

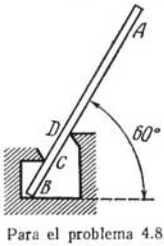
Despreciando el rozamiento, determinar la tensión T de la cuerda y las reacciones R_B del poste y R_C del piso.

Respuesta: $T = 15$ kgf; $R_B = 17{,}3$ kgf; $R_C = 51{,}3$ kgf.

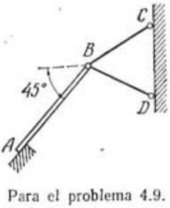
4.8. Una viga homogénea AB de 20 kgf de peso se apoya sobre un piso horizontal liso en el punto B bajo un ángulo de 60° y se sostiene además por dos apoyos C y D.

Determinar las reacciones de los apoyos en los puntos B, C y D, si $AB = 3$ m, $CB = 0{,}5$ m, $BD = 1$ m.

Respuesta: $R_B = 20$ kgf; $R_C = 30$ kgf; $R_D = 30$ kgf.



Para el problema 4.8.



Para el problema 4.9.

4.9. Una placa homogénea AB cuyo peso es $P = 100$ kgf se apoya libremente en el punto A y se mantiene bajo un ángulo de 45° al horizonte por dos barras BC y BD. El triángulo BCD es equilátero. Los puntos C y D están sobre la recta vertical CD.

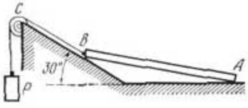
Despreciando los pesos de las barras y suponiendo que las sujeciones en los puntos B, C y D son de articulaciones, determinar la reacción del apoyo A y los esfuerzos en las barras.

Respuesta: $R_A = 35{,}4$ kgf; $S_C = 89{,}5$ kgf; $S_D = -60{,}6$ kgf.

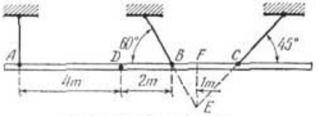
4.10. Una barra homogénea AB de 100 N de peso se apoya con un extremo sobre un piso horizontal liso y con el otro sobre un plano liso inclinado 30° al horizonte. El extremo B de la barra se sostiene con una cuerda que pasa sobre una polea C y porta una carga P; el trozo BC de la cuerda es paralelo al plano inclinado.

Despreciando el rozamiento en la polea, determinar la carga P y las presiones N_A y N_B sobre el piso y el plano inclinado.

Respuesta: $P = 25$ N; $N_A = 50$ N; $N_B = 43{,}3$ N.



Para el problema 4.10.



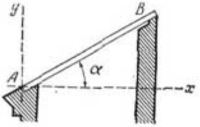
Para el problema 4.11.

4.11. Durante el montaje de un puente fue necesario elevar una parte de la armadura ABC del puente con ayuda de tres cables situados como está indicado en el dibujo. El peso de esta parte de la armadura es de 4200 kgf, el centro de gravedad está en el punto D. Las distancias son las siguientes: $AD = 4$ m, $DB = 2$ m, $BF = 1$ m.

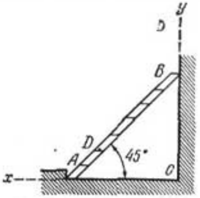
Hallar las tensiones de los cables, si la recta AC es horizontal.

Respuesta: $T_A = 1800$ kgf; $T_B = 1757$ kgf; $T_C = 1243$ kgf.

4.12. Los cabrios de un techo a un agua constan de una viga AB, cuyo extremo superior B descansa libremente sobre un apoyo liso y el extremo inferior A se apoya sobre un muro. La inclinación



Para el problema 4.12.



Para el problema 4.13.

del techo $\operatorname{tg} \alpha = 0{,}5$; la viga AB está sometida a una carga vertical de 900 kgf aplicada en su punto medio.

Determinar las reacciones de los apoyos en los puntos A y B.

Respuesta: $X_A = 180$ kgf; $Y_A = 540$ kgf; $R_B = 402$ kgf.

4.13. Una escalera homogénea AB de 20 kgf de peso está arrimada a un muro bajo un ángulo de 45° al horizonte; en el punto D a una distancia igual a 1/3 de la longitud de la escalera a partir del extremo inferior sa halla un hombre de 60 kgf de peso.

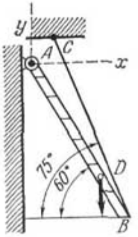
Determinar la presión de la escalera sobre el apoyo A y sobre el muro.

Respuesta: $X_A = 30$ kgf; $Y_A = -80$ kgf; $X_B = -30$ kgf.

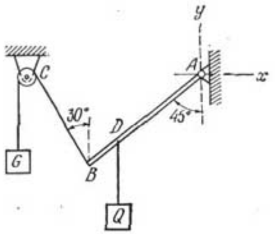
4.14. En una escalera homogénea de 240 kgf de peso y de 6 m de longitud, que puede girar alrededor del eje horizontal A y está inclinada bajo un ángulo de 60° al horizonte, en el punto D a 2 m de distancia del extremo B se encuentra un hombre de 80 kgf de peso. La escalera se sostiene por su extremo B con ayuda de una cuerda BC inclinada 75° al horizonte.

Determinar la tensión T de la cuerda y la reacción A del eje.

Respuesta: $T = 335$ kgf; $X_A = 86{,}7$ kgf; $Y_A = -3{,}44$ kgf.



Para el problema 4.14.



Para el problema 4.15.

4.15. Una viga homogénea AB de peso $P = 100$ kgf está fijada a un muro mediante una articulación A y se sostiene bajo un ángulo de 45° a la vertical por medio de un cable que pasa sobre una polea y porta una carga G. La rama BC del cable forma con la vertical un ángulo de 30°. Una carga Q de 200 kgf de peso está suspendida a la viga en el punto D.

Determinar el peso de la carga G y la reacción de la articulación A, si $BD = \frac{1}{4} AB$. El rozamiento en la polea se desprecia.

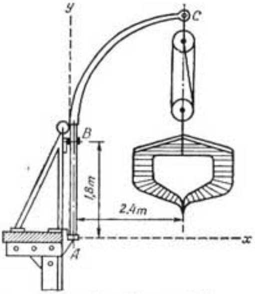
Respuesta: $G = 146$ kgf; $X_A = 73$ kgf; $Y_A = 173$ kgf.

4.16. Un bote está suspendido en dos pescantes, el peso de éste, igual 960 kgf, está repartido igualmente entre los dos pescantes. El pescante ABC se apoya con su extremo semiesférico inferior sobre la quicionera A y a 1,8 m sobre ésta pasa libremente por el cojinete B; el voladizo del pescante de bote es de 2,4 m.

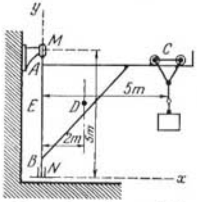
Despreciando el peso del pescante de bote, determinar la presión de éste sobre los apoyos A y B.

Respuesta: $X_A = -640$ kgf; $Y_A = -480$ kgf; $X_B = 640$ kgf.

4.17. Una grúa de fundería ABC de 2 tf de peso tiene un eje de rotación vertical MN; las distancias son: $MN = 5$ m, $AC = 5$ m;



Para el problema 4.16.

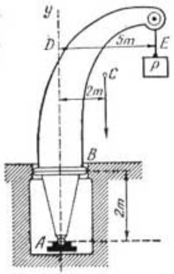


Para el problema 4.17.

el centro de gravedad D de la grúa está a 2 m de distancia del eje de rotación; la carga suspendida en el punto C pesa 3 tf.

Hallar las reacciones del cojinete M y de la quicionera N.

Respuesta: $X_M = -3{,}8$ tf; $X_N = 3{,}8$ tf; $Y_N = 5$ tf.



Para el problema 4.18.

4.18. Una grúa de mina que levanta una carga P de 4 tf de peso tiene la quicionera A y se apoya en el punto B sobre una superficie cilíndrica lisa, cuyo eje Ay es vertical. La longitud de la cola AB es igual a 2 m. El voladizo de la grúa DE es de 5 m. El peso de la grúa equivale a 2 tf y está aplicado en el punto C, cuya distancia de la vertical Ay es igual a 2 m.

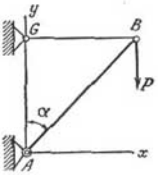
Determinar las reacciones de los apoyos A y B.

Respuesta: $X_A = 12$ tf; $Y_A = 6$ tf; $X_B = -12$ tf.

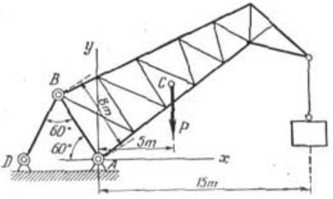
4.19. Una grúa se compone de la viga AB, cuyo extremo inferior está articulado a un muro en el punto A y el extremo superior se sostiene por medio de una cuerda horizontal BC.

Determinar la tensión T de la cuerda BC y la presión sobre el apoyo A, si se sabe que la carga $P = 200$ kgf, el peso de la viga AB es de 100 kgf y está aplicado en el punto medio de ésta. y el ángulo $\alpha = 45°$.

Respuesta: $T = 250$ kgf; $X_A = -250$ kgf; $Y_A = -300$ kgf.



Para el problema 4.19.



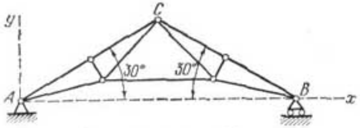
Para el problema 4.20.

4.20. Una grúa tiene articulaciones en los puntos A, B y D; $AB = AD = BD = 8$ m. El centro de gravedad de la armadura de la grúa se encuentra a 5 m de distancia de la vertical que pasa por el punto A. El voladizo de la grúa, contando desde el punto A, es, en este caso, de 15 m. La carga que se levanta pesa 20 tf; el peso de la armadura $P = 12$ tf.

Determinar las reacciones de los apoyos y la tensión de la barra BD para la posición indicada de la grúa.

Respuesta: $X_A = 26$ tf; $Y_A = 77$ tf; $T = 52$ tf.

4.21. La armadura de cubierta simétrica ABC está articulada por un extremo en el punto fijo A y con el otro extremo B se apoya



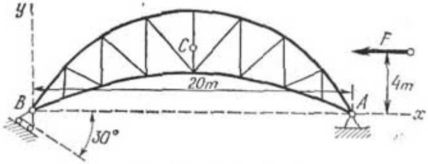
Para el problema 4.21.

por rodillos sobre un plano horizontal liso. El peso de la armadura es de 10 tf. El lado AC está sometido a la presión normal uniformemente repartida del viento; la resultante de las fuerzas de presión del viento constituye 0,8 tf. La longitud $AB = 6$ m, el ángulo $CAB = 30°$.

Determinar las reacciones de los apoyos.

Respuesta: $X_A = -0{,}4$ tf; $Y_A = 5{,}46$ tf; $Y_B = 5{,}23$ tf.

4.22. Una armadura en arco tiene una articulación de apoyo fija en el punto A, y en el punto B, un apoyo liso móvil, cuyo plano forma con el horizonte un ángulo de 30°. El tramo $AB = 20$ m. El centro de gravedad de la armadura, cuyo peso junto con el de la nieve equivale a 10 tf, está en el punto C situado sobre el punto

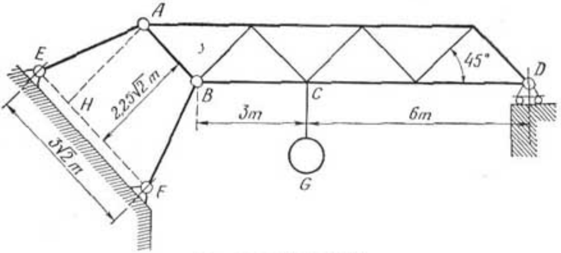


Para el problema 4.22.

medio del tramo AB. La resultante de las fuerzas de presión del viento F es igual a 2 tf y está dirigida paralelamente a AB, su línea de acción dista 4 m de AB.

Determinar las reacciones de los apoyos.

Respuesta: $X_A = -1,12$ tf; $Y_A = 4,6$ tf; $R_B = 6,24$ tf.



Para el problema 4.23.

4.23. La armadura $ABCD$ se apoya en el punto D sobre rodillos y se sostiene en los puntos A y B por las barras inclinadas AE y BF articuladas en los puntos E y F. Las riostras de la armadura y la recta EF forman con el horizonte un ángulo de 45°; la longitud $BC = 3$ m; las barras AE y BF son de igual longitud; la distancia $EF = 3\sqrt{2}$ m; $AH = 2,25\sqrt{2}$ m. El peso de la armadura y de la carga es igual a 7,5 tf y está dirigido a lo largo de la recta CG.

Hallar la reacción de los rodillos R_D.

Respuesta: $R_D = 1,5$ tf.

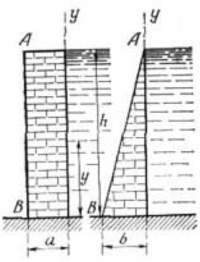
4.24. La presión del agua sobre una área pequeña de una presa crece proporcionalmente a la distancia entre ésta y la superficie libre del agua y es igual al peso de la columna de agua, cuya altura equivale a esta distancia y el área de su base es igual al área considerada. Determinar el espesor de la base de la presa en los dos casos siguientes:

1) la sección transversal de la presa es rectangular;

2) *esta sección es triangular.*

La presa debe ser calculada al vuelco alrededor de la arista B por la presión del agua, el coeficiente de estabilidad debe ser igual a 2. La altura h de la presa es igual a la profundidad del agua y es de 5 m. El peso específico del agua $\gamma = 1$ tf/m³, el peso específico del material de la presa $\gamma_1 = 2,2$ tf/m³.

Se llama coeficiente de estabilidad la relación del momento del peso del macizo al momento de la fuerza de vuelco. La presión del agua sobre el área de la presa de 1 m de longitud y de dy de altura, donde y es la distancia desde esta área hasta el fondo en metros, es igual a $\gamma(h-y)\,dy$, en toneladas. El momento de esta presión respecto al punto B es igual a $\gamma(h-y)\,y\,dy$. El momento de vuelco es igual a $\int_0^h \gamma(h-y)\,y\,dy$.

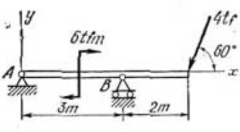


Para el problema 4.24.

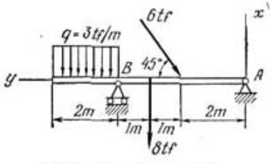
Respuesta: $a = 2,75$ m; $b = 3,37$ m.

4.25. Determinar las reacciones de los apoyos A y B de una viga sometida a la acción de una fuerza concentrada y de un par de fuerzas. La carga y las dimensiones están indicadas en el dibujo.

Respuesta: $X_A = 2$ tf; $Y_A = -4,32$ tf; $Y_B = 7,78$ tf.



Para el problema 4.25.



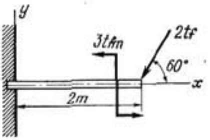
Para el problema 4.26.

4.26. Determinar las reacciones de los apoyos A y B de una viga sometida a la acción de dos fuerzas concentradas y de una carga uniformemente repartida. La intensidad de la carga repartida, las magnitudes de las fuerzas y las dimensiones están indicadas en el dibujo.

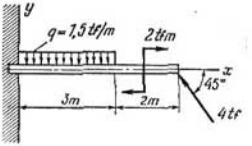
Respuesta: $X_A = 2,6$ tf; $Y_A = 4,2$ tf; $X_B = 15,6$ tf.

4.27. Determinar las reacciones del empotramiento de una viga de consola, mostrada en el dibujo, sometida a la acción de una fuerza concentrada y de un par de fuerzas.

Respuesta: $X = 1$ tf; $Y = 1{,}73$ tf; $M = 0{,}47$ tfm.



Para el problema 4.27.



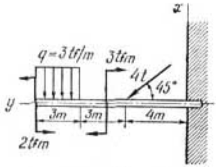
Para el problema 4.28.

4.28. Determinar las reacciones del empotramiento de una viga de consola, mostrada en el dibujo, sometida a la acción de una carga uniformemente repartida, de una fuerza concentrada y de un par de fuerzas.

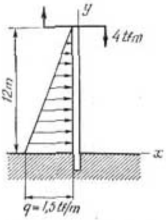
Respuesta: $X = 2{,}8$ tf; $Y = 1{,}7$ tf; $M = -5{,}35$ tfm.

4.29. Determinar las reacciones del empotramiento de una viga de consola, mostrada en el dibujo, sometida a la acción de una carga uniformemente repartida, de una fuerza concentrada y de dos pares de fuerzas.

Respuesta: $X = 11{,}8$ tf; $Y = -2{,}8$ tf; $M = -86{,}8$ tfm.



Para el problema 4.29.



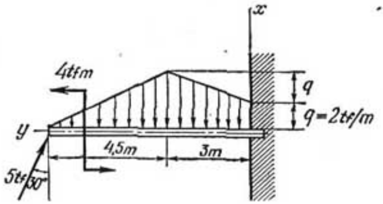
Para el problema 4.30.

4.30. Determinar las reacciones del empotramiento de una viga de consola, mostrada en el dibujo, sometida a la acción de un par de fuerzas y de una carga repartida que se cambia de acuerdo con la ley del triángulo.

Respuesta: $X = -9$ tf; $Y = 0$; $M = 40$ tfm.

4.31. Determinar las reacciones del empotramiento de una viga de consola, mostrada en el dibujo, sometida a la acción de una uerza concentrada, de un par de fuerzas y de una carga repartida que varía de acuerdo con la ley del triángulo y del trapecio.

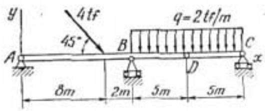
Respuesta: $Y=2{,}5$ tf; $X=13{,}7$ tf; $M=-27$ tfm.



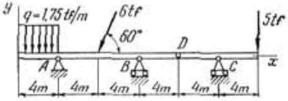
Para el problema 4.31.

4.32. Determinar las reacciones de los apoyos A, B, C y de la articulación D de la viga compuesta mostrada en el dibujo junto con la carga.

Respuesta: $X_A=-2{,}8$ tf; $Y_A=-4{,}4$ tf; $Y_B \doteq 22{,}2$ tf; $Y_C=5$ tf; $X_D=0$; $Y_D=\pm 5$ tf.



Para el problema 4.32.



Para el problema 4.33.

4.33. Determinar las reacciones de los apoyos A, B, C y de la articulación D de la viga compuesta mostrada en el dibujo junto con la carga.

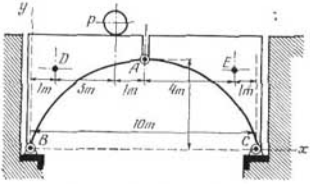
Respuesta: $X_A=3$ tf; $Y_A=13{,}8$ tf; $Y_B=-6{,}6$ tf; $Y_C=10$ tf; $X_D=0$; $Y_D=\pm 5$tf.

4.34. Un puente está compuesto de dos partes enlazadas entre sí por medio de la articulación A y sujetadas a los estribos por medio de las articulaciones B y C. El peso de cada parte del puente es de 4 tf; sus centros de gravedad son D y E; el puente soporta una carga $P=2$ tf; las dimensiones están indicadas en el dibujo.

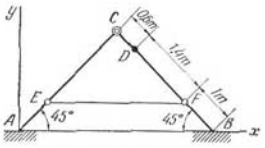
Determinar la presión en la articulación A y las reacciones en los puntos B y C.

Respuesta: $X_A=\pm 2$ tf; $Y_A=\mp 0{,}8$ tf; $X_B=-X_C=2$ tf; $Y_B=5{,}2$ tf; $Y_C=4{,}8$ tf.

4.35. Una escalera portátil puesta sobre un plano horizontal liso se compone de dos partes AC y BC de 3 m de longitud y 12 kgf de peso cada una. Estas partes están articuladas en el punto C y enlazadas entre sí con una cuerda EF; $BF=AE=1$ m;



Para el problema 4.34.



Para el problema 4.35.

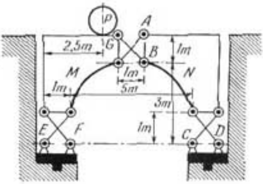
el centro de gravedad de cada una de las partes AC y BC se encuentra en su punto medio. En el punto D de la escalera, a la distancia $CD=0{,}6$ m, se halla un hombre de 72 kgf de peso.

Determinar las reacciones del piso y de la articulación, así como la tensión T de la cuerda EF, si el ángulo $BAC=ABC=45°$.

Respuesta: $R_A=40{,}8$ kgf; $R_B=55{,}2$ kgf; $X_C=\pm 52{,}2$ kgf;

$$Y_C=\pm 28{,}8 \text{ kgf}; \quad T=52{,}2 \text{ kgf}.$$

4.36. Un puente está compuesto de dos partes iguales M y N enlazadas entre sí y con los apoyos fijos por medio de seis barras inclinadas al horizonte bajo un ángulo de 45° que tienen en sus



Para el problema 4.36.

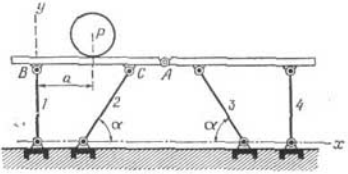
extremos articulaciones. Las dimensiones están indicadas en e dibujo. En el punto G se halla una carga P.

Determinar los esfuerzos en las barras provocados por la acción da la carga.

Respuesta: $R_A=0$; $R_B=P\dfrac{\sqrt{2}}{3}$; $R_C=0$; $R_D=P\dfrac{\sqrt{2}}{3}$;

$$R_E=P\frac{\sqrt{2}}{2}; \quad R_F=P\frac{\sqrt{2}}{6}.$$

4.37. Un puente está compuesto de dos vigas horizontales unidas por una articulación A y articuladas al fundamento por medio de las barras rígidas *1*, *2*, *3*, *4*, las barras extremas son verticales y las intermediarias están inclinadas al horizonte bajo un ángulo $\alpha = 60°$. Las dimensiones correspondientes son: $BC = 6$ m; $AB = 8$ m.

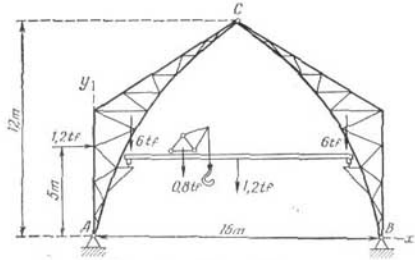


Para el problema 4.37.

Determinar los esfuerzos en las barras y la reacción de la articulación A, si el puente soporta una carga vertical $P = 15$ tf a una distancia $a = 4$ m del punto B.

Respuesta: $S_1 = -6{,}25$ tf; $S_2 = S_3 = -5{,}77$ tf;
$S_4 = 1{,}25$ tf; $X_A = \pm 2{,}89$ tf;
$Y_A = \mp 3{,}75$ tf.

4.38. Una grúa de puente se desplaza sobre rieles a lo largo de un taller, cuyo edificio se sostiene por un arco de tres articulaciones. El peso de la viga transversal que se desplaza sobre los



Para el problema 4.38.

rieles es de 1,2 tf; el peso de la grúa es de 0,8 tf (sin carga) la línea de acción del peso de la grúa dista del riel izquierdo 0,25 de la longitud de la viga transversal. El peso de cada mitad del arco equivale a 6 tf y está aplicado a 2 m de distancia de la vertical que pasa por el apoyo correspondiente A o B; los rieles de apoyo de la grúa de puente se encuentran a 1,8 m de distancia de estas verticales. La altura del edificio es de 12 m; el ancho del tramo es de 16 m. La resultante de las fuerzas de presión del viento es igual a 1,2 tf y está dirigida paralelamente a AB, su línea de acción se encuentra a 5 m de AB.

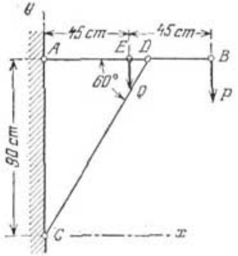
Determinar las reacciones de apoyo de las articulaciones A y B y la presión en la articulación C.

Respuesta: $X_A = 0{,}2$ tf; $Y_A = 6{,}78$ tf; $X_B = -1{,}4$ tf; $Y_B = 7{,}22$ tf; $X_C = \pm 1{,}4$ tf; $Y_C = \mp 0{,}42$ tf.

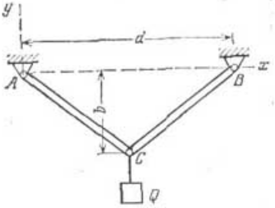
4.39. La carga $P = 25$ kgf está suspendida al extremo de una viga horizontal AB. Su peso $Q = 10$ kgf y está aplicado en el punto E. La viga está articulada al muro en A y se sostiene por la barra CD, con la cual también está articulada. El peso de la barra CD se desprecia. Las dimensiones están indicadas en el dibujo.

Determinar las reacciones de las articulaciones A y C.

Respuesta: $X_A = -30$ kgf; $Y_A = -17$ kgf; $R_C = 60$ kgf.



Para el problema 4.39.



Para el problema 4.40.

4.40. Dos barras homogéneas de una misma longitud están articuladas entre sí en el punto C y en los puntos A y B están articuladas a los apoyos. El peso de cada barra es igual a P. En el punto C está suspendida una carga Q. La distancia $AB = d$. La distancia entre el punto C y la recta horizontal AB es igual a b.

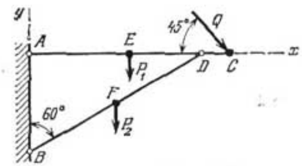
Determinar las reacciones de las articulaciones A y B.

Respuesta: $-X_A = X_B = \frac{d}{4b}(P + Q)$; $Y_A = Y_B = P + \frac{Q}{2}$.

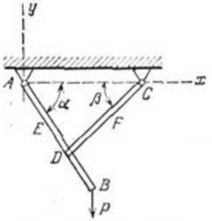
4.41. Dos barras AC y BD de una misma longitud están articuladas en el punto D, y sujetas con articulaciones a un muro vertical en los puntos A y B. La barra AC es horizontal, la barra BD forma un ángulo de 60° con el muro vertical. La barra AC está cargada en el punto E por una fuerza $P_1 = 40$ kgf y en el punto C por una fuerza $Q = 100$ kgf inclinada hacia el horizonte bajo un ángulo de 45°. La barra BD está cargada en el punto F por una fuerza vertical $P_2 = 40$ kgf. Está dado: $AE = EC$; $BF = FD$.

Determinar las reacciones de las articulaciones A y B.

Respuesta: $X_A = -287$ kgf; $Y_A = 6$ kgf; $X_B = 216$ kgf; $Y_B = 145$ kgf.



Para el problema 4.41.



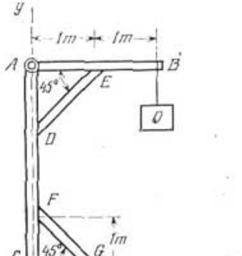
Para el problema 4.42.

4.42. Una suspensión se compone de dos vigas AB y CD articuladas en el punto D y fijadas en el techo mediante las articulaciones A y C. El peso de la viga AB es 60 kgf y está aplicado en el punto E. El peso de la viga CD es de 50 kgf y está aplicado en el punto F. Una fuerza vertical $P = 200$ kgf está aplicada a la viga AB en el punto B.

Determinar las reacciones en las arti laciones A y C para las dimensiones siguientes: $AB = 1$ m; C 0,8 m; $AE = 0,4$ m; $CF = 0,4$ m; los ángulos de inclinación de las vigas AB y CD al horizonte son respectivamente iguales a: $\alpha = 60°$ y $\beta = 45°$.

Respuesta: $-X_A = X_C = 135$kgf; $Y_A = 150$ kgf; $Y_C = 160$ kgf.

4.43. Una viga horizontal AB de 2 m de longitud, sujeta al poste vertical AC en el punto A y sostenida por el jabalcón DE, soporta en su extremo una carga $Q = 500$ kgf; le poste AC está reforzado por le jalbalcón FG, $AE = CG = 1$ m; los jabalcones DE y FG están inclinados bajo un ángulo de 45° al horizonte.



Para el problema 4.43.

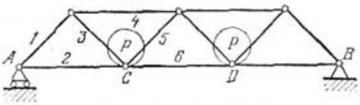
Hallar los esfuerzos S_E y S_F en los jabalcones DE y FG y la reacción del suelo en el punto C, considerando que las sujeciones on de articulación y despreciando los pesos de la viga, el poste y los jabalcones.

Respuesta: $S_E = -1410$ kgf; $S_F = -1410$ kgf; $X_C = 1000$ kgf; $Y_C = -500$ kgf.

4.44. Los nudos C y D de una armadura de puente (véase el dibujo) soportan una misma carga vertical $P = 10$ tf; las barras inclinadas forman con el horizonte un ángulo de 45°.

Hallar los esfuerzos en las barras *1*, *2*, *3*, *4*, *5* y *6* provocados por la carga dada.

Respuesta: $S_1 = -14{,}1$ tf; $S_2 = 10$ tf; $S_3 = 14{,}1$ tf; $S_4 = -20$ tf; $S_5 = 0$; $S_6 = 20$ tf.

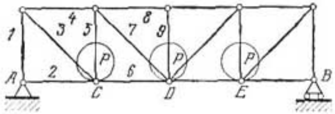


Para el problema 4.44.

4.45. Los nudos C, D y E de una armadura de puente (véase el dibujo) soportan una misma carga vertical $P = 10$ tf. Las barras inclinadas forman con el horizonte un ángulo de 45°.

Hallar los esfuerzos en las barras *1*, *2*, *3*, *4*, *5*, *6*, *7*, *8* y *9* provocados por dicha carga.

Respuesta: $S_1 = -15$ tf; $S_2 = 0$; $S_3 = 21{,}2$ tf; $S_4 = -15$ tf; $S_5 = -5$ tf; $S_6 = 15$ tf; $S_7 = 7{,}1$ tf; $S_8 = -20$ tf; $S_9 = 0$.



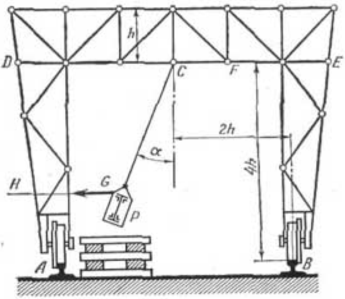
Para el problema 4.45.

4.46. Para el montaje de un puente se ha construido una grúa de madera provisional que rueda sobre los rieles A y B. En el nudo medio C del cordón inferior DE de la grúa está fijada una polea que sirve para levantar cargas con ayuda de una cadena. La carga que se levanta de la plataforma es igual a $P = 5$ tf, en el instante, cuando la carga se separa de la plataforma, la dirección de la cadena forma con la vertical un ángulo $\alpha = 20°$; para evitar oscilaciones de la carga, ésta se sostiene con un cable horizontal GH.

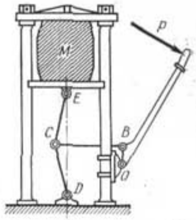
Suponiendo que la componente horizontal de la tensión de la cadena se percibe solamente por el riel derecho B, determinar el esfuerzo S_1 en la barra horizontal CF en el instante cuando la carga se separa de la plataforma, y compararlo con el esfuerzo S_2 que se obtendría si $\alpha = 0$. Las dimensiones están indicadas en el dibujo.

Respuesta: $S_1 = 10{,}46$ tf; $S_2 = 5$ tf.

4.47. Hallar la magnitud del esfuerzo que comprime el objeto M en una prensa, si: el esfuerzo $P = 20$ kgf y está dirigido perpendicularmente a la palanca OA que tiene un eje fijo O; en la po-



Para el problema 4.46.

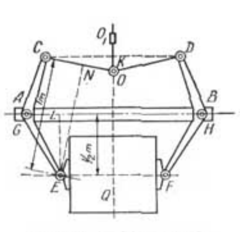


Para el problema 4.47.

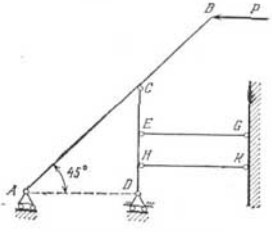
ición considerada de la prensa el tiro BC es perpendicular a OB y divide el ángulo ECD en dos partes iguales; $\angle CED = \operatorname{arctg} 0{,}2 = 11°20'$; $OA = 1$ m; $OB = 10$ cm.

Respuesta: 500 kgf.

4.48. La cadena OO_1 de un dispositivo autoagarrador de carga está articulada en O con las barras $OC = OD = 60$ cm. Las barras están articuladas con dos palancas quebradas iguales CAE y DBF



Para el problema 4.48.



Para el problema 4.49.

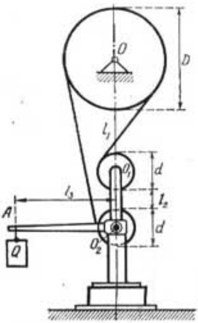
que pueden girar alrededor de los puntos A y B de la barra de conexión GH. Unas zapatas especiales sostienen por frotamiento la carga $Q = 1$ tf en las articulaciones E y F. La distancia entre el punto E y la barra GH es $EL = 50$ cm, del punto E a la barra OC es $EN = 1$ m. La altura del triángulo COD es $OK = 10$ cm.

Hallar la fuerza que extiende la barra de conexión GH, despreciando el peso de las piezas del dispositivo.

Respuesta: 6 tf.

4.49. Determinar las reacciones de las articulaciones A, C, D, E y H en el sistema de barras representado en el dibujo, si $CE = EH = HD$ y $AC = CB$.

Respuesta: $R_A = R_D = R_H = P$; $R_E = 2P$; $R_C = P\sqrt{2}$. La barra EG está extirada, la barra HK está comprimida.



Para el problema 4.50.

4.50. La tensión de una correa de transmisión, que se realiza por medio de la palanca quebrada $AO_2\ O_1$ y el rodillo tensor O_1 es, por los dos lados del rodillo, igual a P kgf.

Hallar la magnitud de la carga Q cuando el sistema está en equilibrio, si se sabe que: $\angle AO_2O_1 = 90°$; $D = 55$ cm; $d = 15$ cm; $l_1 = 35$ cm; $l_2 = 15$ cm; $l_3 = 45$ cm; $P = 18$ kgf.

Respuesta: $Q = 12$ kgf.

4.51. Una carga P de 480 kgf de peso se sostiene sobre un plano inclinado liso mediante una cuerda paralela al plano y enrollada sobre el árbol fijo de la cabria ABC. El ángulo formado por el plano inclinado con el horizonte es de 60°. El peso de la cabria Q es igual a 240 kgf, su centro de gravedad se encuentra sobre la recta CO; la cabria se apoya en el punto A sobre un piso liso, y en el punto B está fijada en el piso por medio de un perno.

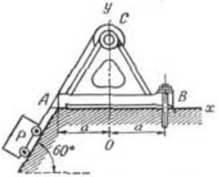
Hallar las reacciones de apoyo, despreciando la distancia entre la cuerda y el plano.

Respuesta: $Y_A = 480$ kgf; $X_B = 208$ kgf; $Y_B = 120$ kgf.

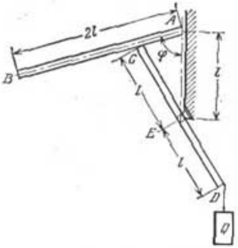
4.52. Una barra homogénea AB de $2l$ de longitud y de peso P puede girar alrededor de un eje horizontal en el extremo A de la barra. Esta se apoya sobre una barra homogénea CD de la misma longitud $2l$, que puede girar alrededor de un eje horizontal que pasa por su punto medio E. Los puntos A y E se encuentran en la misma vertical a la distancia $AE = l$. Una carga $Q = 2P$ está suspendida en el extremo D.

Determinar la magnitud del ángulo φ formado por la barra AB con la vertical en el estado de equilibrio. El rozamiento se desprecia.

Respuesta: $\varphi = \arccos\frac{1}{8} = 82°50'$.



Para el problema 4.51.

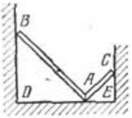


Para el problema 4.52.

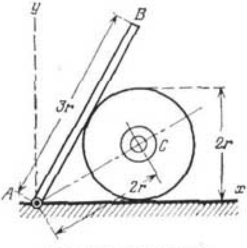
4.53. Dos barras homogéneas AB y AC se apoyan sobre un piso horizontal liso en el punto A y una sobre la otra por sus planos verticales lisos, y en los puntos B y C, sobre muros verticales lisos.

Determinar la distancia DE entre los dos muros cuando las barras están en equilibrio formando entre sí un ángulo de 90°, si se sabe que: $AB = a$, $AC = b$, el peso de AB es P_1, el peso de AC es P_2.

Respuesta: $DE = \frac{a\sqrt{P_2} + b\sqrt{P_1}}{\sqrt{P_1 + P_2}}$.



Para el problema 4.53.



Para el problema 4.54.

4.54. Una barra homogénea AB que puede girar alrededor de un eje horizontal A se apoya sobre la superficie de un cilindro liso de radio r, colocado sobre un plano horizontal liso y sostenido por un hilo inextensible AC. El peso de la barra es de 16 kgf, su longitud $AB = 3r$, $AC = 2r$.

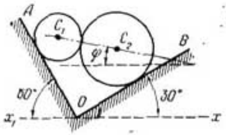
Determinar la tensión T del hilo y la presión de la barra sobre la articulación A.

Respuesta: $T = 6{,}9$ kgf; $X_A = -6$ kgf; $Y_A = -12{,}5$ kgf.

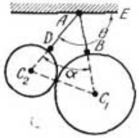
4.55. Dos cilindros homogéneos lisos tangentes están puestos entre dos planos inclinados lisos OA y OB. El peso del cilindro de centro C_1 es $P_1 = 10$ N y el de centro C_2 es $P_2 = 30$ N.

Determinar el ángulo φ que forma la recta C_1C_2 con el eje horizontal xOx_1, las presiones N_1 y N_2 de los cilindros sobre los planos, y la magnitud N de la presión mutua de los cilindros, si el ángulo $AOx_1 = 60°$ y el ángulo $BOx = 30°$.

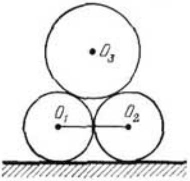
Respuesta: $\varphi = 0$; $N_1 = 20$ N; $N_2 = 34{,}6$ N; $N = 17{,}3$ N.



Para el problema 4.55.



Para el problema 4.56.



Para el problema 4.57.

4.56. Dos bolas homogéneas lisas C_1 y C_2, cuyos radios son R_1 y R_2 y sus pesos P_1 y P_2, están suspendidas con auxilio de las cuerdas AB y AD en el punto A; $AB = l_1$; $AD = l_2$; $l_1 + R_1 = l_2 + R_2$; el ángulo $BAD = \alpha$.

Determinar el ángulo θ que forma la cuerda AD con el plano horizontal AE, las tensiones T_1 y T_2 de las cuerdas y la presión de una bola sobre la otra.

Respuesta: $\operatorname{tg}\theta = -\dfrac{P_2 + P_1\cos\alpha}{P_1 \operatorname{sen}\alpha}$;

$$T_1 = P_1 \frac{\operatorname{sen}\left(\theta - \frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\frac{\alpha}{2}};$$

$$T_2 = P_2 \frac{\operatorname{sen}\left(\theta - \frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\frac{\alpha}{2}};$$

$$N = P_2 \frac{\cos\theta}{\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

4.57. Un cilindro homogéneo de radio R y de peso Q descansa sobre dos cilindros circulares homogéneos idénticos de radio r y de peso P que se hallan sobre un plano horizontal y sus centros están enlazados por un hilo inextensible de $2r$ de longitud.

Determinar la tensión del hilo, la presión de los cilindros sobre el plano y la presión mutua de éstos. El rozamiento se desprecia.

Respuesta: La presión de cada cilindro inferior sobre el plano es

$$P+\frac{Q}{2}.$$

La presión entre el cilindro superior y cada uno de los cilindros inferiores es

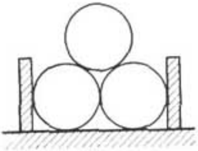
$$\frac{Q(R+r)}{2\sqrt{R^2+2rR}}.$$

La tensión del hilo es igual a

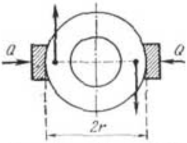
$$\frac{Qr}{2\sqrt{R^2+2rR}}.$$

4.58. Tres tubos idénticos de peso $M=120$ kgf cada uno están puestos tal como se representa en el dibujo. Determinar la presión de cada tubo inferior sobre la tierra y sobre los muros laterales que los retienen. El rozamiento se desprecia.

Respuesta: la presión sobre la tierra es 180 kgf. La presión sobre cada muro es de 34,6 kgf.



Para el problema 4.58.



Para el problema 4.59.

4.59. Un par de fuerzas de momento $M=100$ kgfm está aplicado a un árbol, sobre el cual está fijada por chaveta una rueda de freno de radio $r=25$ cm.

Hallar la fuerza Q con la cual hace falta apretar las zapatas de freno contra la rueda para que ésta permanezca en reposo, si el coeficiente de rozamiento estático f entre la rueda y las zapatas es igual a 0,25.

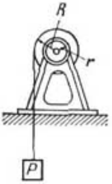
Respuesta: $Q=800$ kgf.

4.60. La puerta de un tranvía se desliza con rozamiento en la ranura inferior. El coeficiente de rozamiento f no es mayor de 0,5.

Determinar la mayor altura h, a la que se puede colocar la manija de puerta para que ésta no se vuelque durante el deslizamiento. El ancho de la puerta es $l=0,8$ m; el centro de gravedad de la puerta se encuentra sobre su eje vertical de simetría.

Respuesta: $h=\frac{l}{2f}=0,8$ m.

4.61. Un árbol cilíndrico de peso Q y de radio R se pone en rotación por medio de una carga de peso P suspendida a éste con ayuda de una cuerda. El radio de los golletes del árbol $r=R/2$. El coeficiente de rozamiento en los cojinetes es igual a 0,05.



Para el problema 4.61.

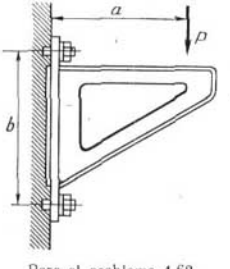
Determinar para que relación de pesos Q y P este último baja uniformemente.

Respuesta: $\frac{Q}{P}=39$.

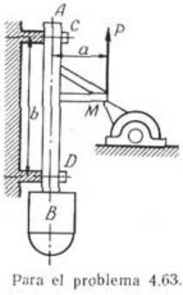
4.62. Un soporte sometido a una fuerza vertical $P=600$ kgf está fijado a un muro con dos pernos. Determinar la fuerza con la cual hace falta apretar los pernos para fijar el soporte en el muro. El coeficiente de rozamiento entre el soporte y el muro $f=0,3$. Para mayor seguridad el calculo se debe realizar suponiendo que solamente el perno superior está apretado y que los pernos están puestos con juego y no deben experimentar cizalladura. Se sabe que $\frac{b}{a}>f$.

Indicación. Se llama apretura el esfuerzo que actúa a lo largo del eje del perno. La apretura total del perno superior se compone de dos partes: la primera elimina la posibilidad de separación del soporte y de su vuelco alrededor del perno inferior, la segunda asegura la presión normal de la parte superior del soporte sobre el muro que engendra la fuerza de rozamiento necesaria.

Respuesta: 2 000 kgf.



Para el problema 4.62.



Para el problema 4.63.

4.63. Una machaca AB de 180 kgf de peso se pone en movimiento por los bulones M encajados en un árbol. La distancia b entre las guías C y D es igual a 1,5 m. La distancia entre el punto de contacto del bulón con el saliente y el eje de la machaca es $a = 0,15$ m.

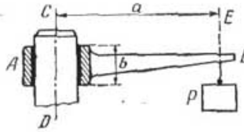
Hallar la fuerza P necesaria para elevar la machaca si se tiene en cuenta la fuerza de rozamiento entre las guías C y D y la machaca igual a 0,15 de la presión entre las piezas rozantes.

Respuesta: $P = 186$ kgf.

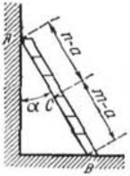
4.64. La barra horizontal AB posee en su extremo A un agujero mediante el cual va encajado sobre un montante circular vertical CD; la longitud del casquillo es $b = 2$ cm; en el punto E a la distancia a del eje del montante está suspendida una carga P a esta barra.

Despreciando el peso de la barra AB, determinar la distancia a de tal manera que bajo la acción de la carga P la barra se mantenga en equilibrio, si el coeficiente de rozamiento entre la barra y el montante es $f = 0,1$.

Respuesta: $a \geqslant 10$ cm.



Para el problema 4.64.



Para el problema 4.65.

4.65. La escalera AB está apoyada contra un muro vertical, su extremo inferior está puesto sobre un piso horizontal. El coeficiente de rozamiento de la escalera con el muro es f_1, con el piso es f_2. El peso de la escalera con el hombre que se halla en ésta es p y está aplicado en el punto C que divide la escalera en la relación $m:n$.

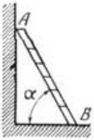
Determinar el mayor ángulo α que forma la escalera con el muro en la posición de equilibrio, así como las componentes normales de las reacciones N_A del muro y N_B del piso para este valor de α.

Respuesta: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{(m+n) f_2}{m - n f_1 f_2}$; $\quad N_A = \frac{p f_2}{1 + f_1 f_2}$; $\quad N_B = \frac{p}{1 + f_1 f_2}$.

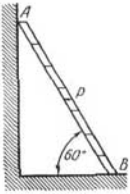
4.66. La escalera AB de peso P se apoya en un muro liso y en un piso horizontal áspero. El coeficiente de rozamiento de la escalera sobre el piso es igual a f.

¿Bajo qué ángulo α respecto al piso hace falta poner la escalera para que un hombre de peso p pueda subir hasta arriba?

Respuesta: $\operatorname{tg}\alpha \geqslant \frac{P+2p}{2f(P+p)}$.



Para el problema 4.66.



Para el problema 4.67.

4.67. La escalera AB se apoya en un muro y un piso ásperos, formando con el último un ángulo de 60°. La escalera soporta una carga P.

Determinar gráficamente la mayor distancia BP para la cual la escalera permanece en reposo. El peso de la escalera se desprecia. El ángulo de rozamiento para el muro y el piso es igual a 15°.

Respuesta: $BP = \frac{1}{2} AB$.

4.68. Una barra homogénea pesada AB descansa sobre dos apoyos C y D, la distancia entre éstos es $CD = a$, $AC = b$. El coeficiente de rozamiento de la barra con los apoyos es igual a f. El ángulo de inclinación de la barra respecto al horizonte equivale a α.

¿Cuál condición debe satisfacer la longitud $2l$ de la barra para que ésta se encuentre en equilibrio, si se puede despreciar su grosor?

Respuesta: $2l \geqslant 2b + a + \frac{a}{f}\operatorname{tg}\alpha$, $l > a + b$. La primera condición incluye la segunda cuando $\alpha > \varphi$, donde $\varphi = \operatorname{arctg} f$ es el ángulo de rozamiento; si $\alpha < \varphi$ es suficiente satisfacer la segunda condición. Cuando $l < a + b$ el equilibrio, para la disposición del apoyo C indicada en el dibujo, es imposible.

4.69. Una viga homogénea se apoya en el punto A en un piso horizontal áspero y se sostiene en el punto B por una cuerda. El coeficiente de rozamiento de la viga con el piso es igual a f. El ángulo α formado por la viga con el piso equivale a 45°.

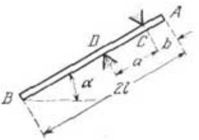
¿Para qué ángulo de inclinación φ de la cuerda hacia el horizonte la viga empezará a deslizarse?

Respuesta: $\operatorname{tg}\varphi = 2 + \frac{1}{f}$.

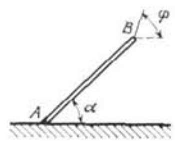
4.70. Los extremos A y B de una barra homogénea pueden deslizarse sobre una circunferencia áspera de radio a. La distancia OC de la barra hasta el centro O de la circunferencia, situada en un plano vertical, es igual a b. El coeficiente de rozamiento entre la barra y la circunferencia es f.

Determinar para la posición de equilibrio de la barra el ángulo φ formado por la recta OC con el diámetro vertical de la circunferencia.

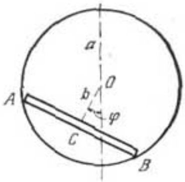
Respuesta: $\operatorname{ctg}\varphi \geqslant \frac{b^2(1+f^2)}{a^2 f} - f$.



Para el problema 4.68.

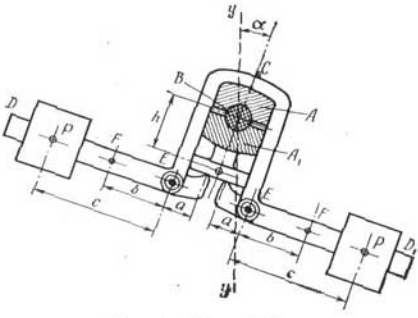


Para el problema 4.69.



Para el problema 4.70.

4.71. Para determinar el coeficiente de rozamiento se utiliza un instrumento compuesto de un cojinete AA_1 montado sobre el gollete B que gira alrededor del eje horizontal. Las dos mitades del cojinete están apretadas contra el gollete con ayuda de una grapa C y dos palancas D y D_1, cuyos brazos cortos de longitud $a = 30$ mm ejercen sobre la mitad inferior A_1 del cojinete una presión creada por las



Para el problema 4.71.

cargas P y los pesos de las palancas. El peso de todo el instrumento, es decir del cojinete, la grapa, palancas y cargas, es $Q = 40$ kgf, su centro de gravedad está situado por debajo del eje del gollete a una distancia $h = 120$ mm; el peso de cada palanca es $p=7$ kgf y está aplicado al punto F a una distancia $b=510$ mm del eje de la palanca E; las cargas P, cada una de las cuales pesa 8 kgf, actúan en los puntos situados a una distancia $c=900$ mm de los ejes E. El peso q de la mitad inferior del cojinete es igual a 6 kgf. Al girar el gollete el eje del instrumento se desvía de la vertical yy a un ángulo $\alpha=5°$.

Determinar el coeficiente de rozamiento f entre el gollete y el cojinete, si el diámetro del gollete es $d=100$ mm.

Respuesta: $f=0{,}0057$. El coeficiente de rozamiento se halla de la ecuación

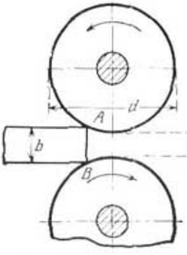
$$\left\{\left(2\frac{pb+Pc}{a}-q\right)+\left[2\frac{pb+Pc}{a}+(Q-q)\right]\right\} f\frac{d}{2}=Qh\operatorname{tg}\alpha.$$

4.72. Un laminador está compuesto de dos árboles de diámetro $d=50$ cm que giran en sentidos opuestos indicados con flechas en el dibujo; la distancia entre los árboles es $a=0{,}5$ cm.

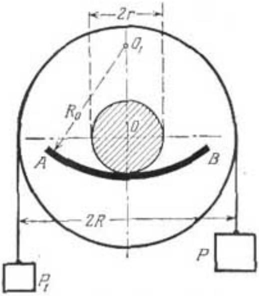
Hallar el grosor b de las hojas que pueden ser laminadas por este laminador, si el coeficiente de rozamiento para l hierro candente y los árboles de hierro colado es $f=0{,}1$.

Para que el laminador funcione hace falta que la hoja sea agarrada por los árboles en rotación, es decir, es necesario que la resultante de las reacciones normales aplicadas a la hoja y de las fuerzas de rozamiento en los puntos A y B esté dirigida por la línea horizontal hacia la derecha.

Respuesta: $b\leqslant 0{,}75$ cm.



Para el problema 4.72.



Para el problema 4.73.

4.73. Una polea de radio R está dotada de dos pivotes de radio r situados simétricamente respecto a su plano medio. Los pivotes se apoyan sobre dos superficies cilíndricas AB de generatrices horizontales. Sobre la polea va arrollado un cable del que penden dos cargas P y P_1, $P>P_1$.

Determinar la magnitud mínima de la carga P_1 para la cual la polea estará en equilibrio. Se supone que el coeficiente de rozamiento de los pivotes con las superficies cilíndricas AB es igual a f, el peso de la polea con los pivotes es Q.

La posición del sistema indicada en el dibujo no puede ser una posición de equilibrio, esta última debe ser hallada previamente.

Respuesta: En la posición de equilibrio el plano que pasa por los ejes del cilindro AB y de la polea forma con la vertical un ángulo igual al ángulo de rozamiento:

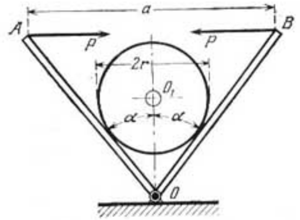
$$P_1 = \frac{P\,(R\sqrt{1+f^2}-fr)-frQ}{R\sqrt{1+f^2}+fr}.$$

4.74. Un cilindro homogéneo está colocado entre dos placa AO y BO articuladas en O, el eje O_1 del cilindro es paralelo al eje de la articulación; ambos ejes son horizontales y están situados en un mismo plano vertical. Las placas comprimen el cilindro bajo la acción de dos fuerzas horizontales P iguales y directamente opuestas aplicadas a los puntos A y B. El peso del cilindro es Q, su radio es r, el coeficiente de rozamiento del cilindro con las placas es igual a f, el ángulo $AOB=2\alpha$, la distancia $AB=a$.

¿Cuál condición debe satisfacer la magnitud de las fuerzas P para que el cilindro esté en equilibrio?

Respuesta: 1) $\operatorname{tg}\alpha > f$; $\quad \frac{r}{a}\frac{Q}{\operatorname{sen}\alpha+f\cos\alpha} \leqslant P \leqslant \frac{r}{a}\frac{Q}{\operatorname{sen}\alpha-f\cos\alpha}$

2) $\operatorname{tg}\alpha \leqslant f$; $\quad P \geqslant \frac{r}{a}\frac{Q}{\operatorname{sen}\alpha+f\cos\alpha}$.

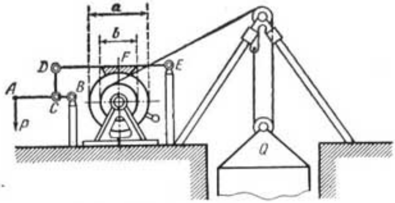


Para el problema 4.74.

4.75. Para bajar las cargas a un pozo se utiliza el cabrestante con freno representado en el dibujo. Con el tambor, sobre el cual está enrrollada una cadena, va fijada una rueda concéntrica de madera que se frena ejerciendo presión sobre el extremo A de la palanca AB unida por medio de la cadena CD con el extremo D de la palanca de freno ED. El diámetro de la rueda es $a=50$ cm; el diámetro del tambor es $b=20$ cm; $ED=120$ cm; $FE=60$ cm; $AB=1$ m; $BC=10$ cm.

Determinar la fuerza P que equilibra la carga $Q=800$ kgf suspendida a la polea móvil, si el coeficiente de rozamiento entre la madera y el acero $f=0,4$; las dimensiones de la zapata F se desprecian.

Respuesta: $P=20$ kgf.

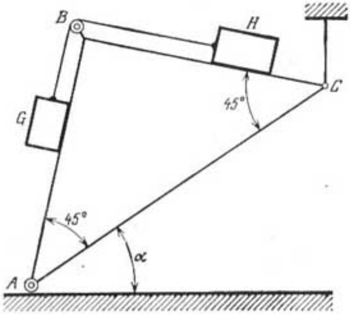


Para el problema 4.75.

4.76. Dos cuerpos idénticos G y H de peso P, enlazados con un hilo pasado sobre una polea B, están colocados sobre las caras AB y BC del prisma ABC. El coeficiente de rozamiento entre los cuerpos y las caras del prisma es igual a f. Los ángulos BAC y BCA son iguales a 45°.

Determinar la magnitud del ángulo α de inclinación de la cara AC respecto al horizonte para que la carga G comience a descender. El rozamiento en la polea se desprecia.

Respuesta: $\operatorname{tg}\alpha=f$.



Para el problema 4.76.

4.77. La profundidad de ubicación de los estribos de un puente ferroviario que pasa un río está calculada considerando que el peso del estribo con la carga que éste soporta se equilibra por la presión del suelo sobre el fondo del estribo y por el rozamiento lateral; el suelo, arena fina saturada de agua, se considera como un cuerpo líquido.

Calcular la profundidad h de ubicación de estos estribos, si la carga sobre el estribo es de 150 tf, el peso de 1 m de su altura es de 8 tf, la altura del estribo a partir del fondo del río es de 9 m, la altura del agua sobre el fondo del río es de 6 m, el área de la base del estribo es de 3,5 m^2, su superficie lateral para un metro de altura es de 7 m^2, el peso de 1 m^3 de arena saturada de agua es igual a 1,8 tf, el peso de 1 m^3 de agua es igual a 1 tf y el coeficiente de rozamiento entre la arena y la funda de acero, en la cual se encuentra el estribo de piedra, es igual a 0,18.

Al calcular el rozamiento se toma en consideración que la presión lateral media sobre 1 m^2 es igual a $6+0,9\,h$ toneladas.

Respuesta: $h=11$ m.

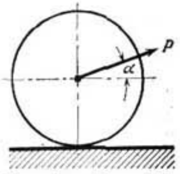
4.78. Determinar el ángulo α de inclinación del plano al horizonte para el cual un rodillo de radio $r=50$ mm rueda uniformemente por el plano. El material de los cuerpos en rozamiento es acero, el coeficiente de rozamiento de rodadura $k=0,05$ mm.

El ángulo α es tan pequeño que se puede considerar que $\alpha=\operatorname{tg}\alpha$.

Respuesta: $\alpha=3'26''$.

4.79. Determinar la fuerza P necesaria para que un cilindro de 60 cm de diámetro y de 300 kgf de peso ruede uniformemente sobre un plano horizontal, si el coeficiente de rozamiento de rodadura $k=0,5$ cm, y el ángulo α formado por la fuerza P con el plano horizontal es igual a 30°.

Respuesta: $P=5,72$ kgf.



Para el problema **4.79.**

4.80. Una bola de radio R y de peso Q está situada sobre un plano horizontal. El coeficiente de rozamiento de deslizamiento de la bola sobre el plano es f, el coeficiente de rozamiento de rodadura es k.

¿Cuáles deben ser las condiciones para que la fuerza horizontal P aplicada al centro de la bola le comunique a ésta rodadura uniforme?

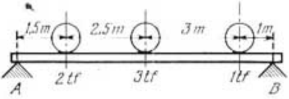
Respuesta: $\frac{k}{R}<f$; $P=Q\,\frac{k}{R}$.

§ 5. ESTÁTICA GRÁFICA

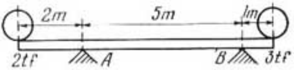
En las respuestas de los problemas de la estática gráfica los números con el signo + indican esfuerzos de tracción y los números con el signo —, esfuerzos de compresión.

5.1. Determinar gráficamente y verificar analíticamente las reacciones de apoyo de una viga con un tramo de 8 m, provocadas por tres cargas de 2 tf, 3 tf y de 1 tf dispuestas tal como está indicado en el dibujo. El peso de la viga no se toma en consideración.

Respuesta: $R_A = 3{,}25$ tf; $R_B = 2{,}75$ tf.



Para el problema 5.1.



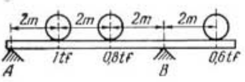
Para el problema 5.2.

5.2. Determinar gráficamente y verificar analíticamente las reacciones de apoyo de una viga de consola de 8 m de longitud con un tramo de 5 m, provocadas por las cargas de 2 tf y de 3 tf dispuestas en los extremos tal como está indicado en el dibujo. El peso de la viga no se toma en consideración.

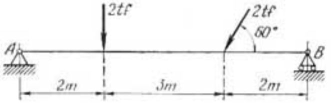
Respuesta: $R_A = 2{,}2$ tf; $R_B = 2{,}8$ tf.

5.3. Determinar gráficamente y verificar analíticamente las reacciones de apoyo de una viga de consola de 8 m de longitud con un tramo de 6 m, provocadas por tres cargas de 1 tf, 0,8 tf y de 0,6 tf dispuestas tal como está indicado en el dibujo. El peso de la viga no se toma en consideración.

Respuesta: $R_A = 0{,}73$ tf; $R_B = 1{,}67$ tf.



Para el problema 5.3.



Para el problema 5.4.

5.4. Una viga imponderable AB está sometida a la acción de dos fuerzas tal como está indicado en el dibujo.

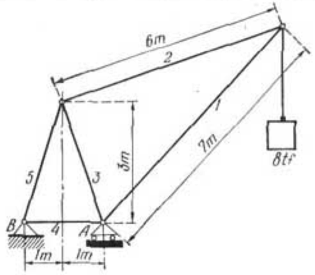
Determinar gráficamente y verificar analíticamente las reacciones de apoyo.

Respuesta: $R_A = 2{,}17$ tf; $R_B = 1{,}81$ tf.

5.5. Determinar las reacciones de apoyo y los esfuerzos en las barras de la grúa representada en el dibujo, si la carga que soporta la grúa es de 8 tf. El peso de las barras se desprecia.

Respuesta: $R_A = 26$ tf; $R_B = 18$ tf y está dirigida hacia abajo.

Número de la barra	1	2	3	4	5
Esfuerzo en tf	−16,4	+11,5	−14,3	−6	+19

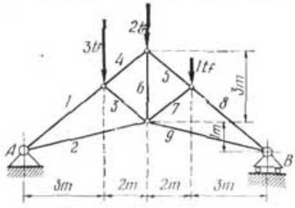


Para el problema 5.5.

5.6. Determinar gráficamente y verificar analíticamente las reacciones de apoyo y los esfuerzos en las barras de la armadura de cubierta representada en el dibujo junto con las fuerzas aplicadas a ésta.

Respuesta: $R_A = 3,4$ tf; $R_B = 2,6$ tf.

Número de la barra	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Esfuerzo en tf	−7,3	+5,8	−2,44	−4,7	−4,7	+3,9	−0,81	−5,5	+4,4

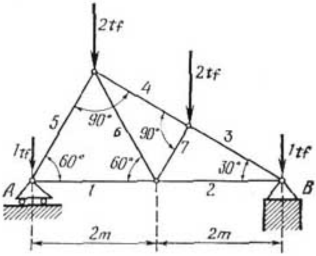


Para el problema 5.6.

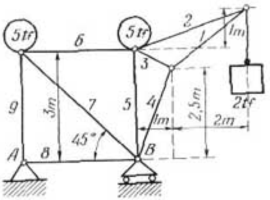
5.7. Determinar las reacciones de apoyo y los esfuerzos en las barras de la armadura representada en el dibujo junto con las fuerzas que actúan sobre ésta.

Respuesta: $R_A=3{,}25$ tf; $R_B=2{,}75$ tf.

Número de la barra	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
Esfuerzo en tf	+1,3	+3,03	−3,5	−2,5	−2,6	+1,73	−1,73



Para el problema 5.7.



Para el problema 5.8.

5.8. Determinar gráficamente y verificar analíticamente las reacciones de apoyo y los esfuerzos en las barras de la armadura de la grúa representada en el dibujo junto con las fuerzas aplicadas a ésta.

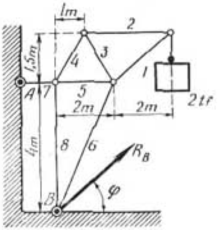
Respuesta: $R_A=3$ tf; $R_B=9$ tf.

Número de la barra	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
Esfuerzo en tf	−6,0	+5,1	−3,13	−5,4	−2,0	+2,0	−2,83	0	−3,0

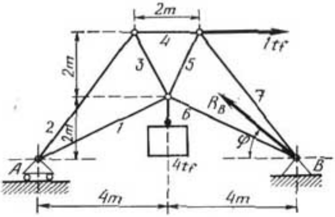
5.9. Determinar gráficamente y verificar analíticamente las reacciones de apoyo y los esfuerzos en las barras de la armadura de la grúa representada en el dibujo, con una carga de 2 tf.

Respuesta: $R_A = 2$ tf; $R_B = 2{,}83$ tf; $\varphi = 45°$

Número de la barra	1	2	3	4	5	6	7	8
Esfuerzo en tf	−3,33	+2,67	−2,4	+2,4	+0,67	−4,47	+2	+2



Para el problema 5.9.



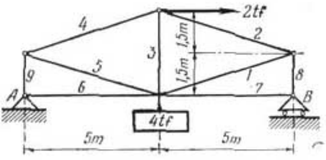
Para el problema 5.10.

5.10. Determinar gráficamente y verificar analíticamente las reacciones de apoyo y los esfuerzos en las barras de la construcción representada en el dibujo junto con las fuerzas que actúan sobre ésta.

Respuesta: $R_A = 1{,}5$ tf; $R_B = 2{,}7$ tf; $\varphi = 68°$.

Número de la barra	1	2	3	4	5	6	7
Esfuerzo en tf	+2	−3	+2,7	−3	+3,6	+1,57	−4

5.11. Determinar gráficamente y verificar analíticamente las reacciones de apoyo y los esfuerzos en las barras de la construcción representada en el dibujo junto con las fuerzas que actúan sobre ésta.



Para el problema 5.11.

En este problema, como en los que siguen a continuación, el eje Ox está dirigido por la recta horizontal AB hacia la derecha y el eje Oy, por la vertical hacia arriba.

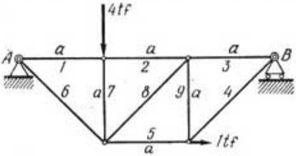
Respuesta: $X_A = -2$ tf; $Y_A = 1{,}4$ tf; $Y_B = 2{,}6$ tf.

Número de la barra	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Esfuerzo en tf	+4,5	−4,5	+2	−2,44	+2,44	+2	0	−2,6	−1,4

5.12. Determinar las reacciones de apoyo y los esfuerzos en las barras de la armadura representada en el dibujo junto con la carga.

Respuesta: $X_A = -1$ tf; $Y_A = 3$ tf; $Y_B = 1$ tf.

Número de la barra	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Esfuerzo en tf	−2	−2	−1	+1,41	+2	+4,24	−4	+1,41	−1



Para el problema 5.12.

5.13. Determinar las reacciones de apoyo y los esfuerzos en las barras de la armadura de puente representada en el dibujo junto con las fuerzas aplicadas a ésta.

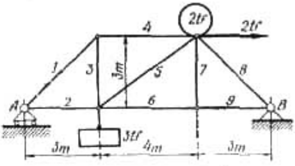
Respuesta: $Y_A = 2{,}1$ tf; $X_B = -2$ tf; $Y_B = 2{,}9$ tf.

Número de la barra	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Esfuerzo en tf	−2,97	+2,1	+2,1	−2,1	+1,5	+0,9	0	−4,1	+0,9

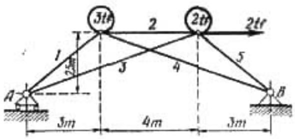
5.14. *Determinar gráficamente y verificar analíticamente* las reacciones de apoyo y los esfuerzos en las barras de la construcción representada en el dibujo junto con las fuerzas aplicadas a ésta. Las barras *3* y *4* no están articuladas en el punto de su intersección.

Respuesta: $Y_A=2{,}2$ tf; $X_B=-2$ tf; $Y_B=2{,}8$ tf.

Número de la barra	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
Esfuerzo en tf	−6	−7	+4,9	+2,53	−5,7



Para el problema 5.13.

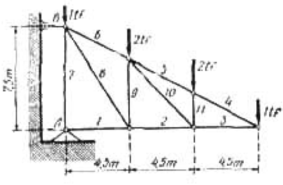


Para el problema 5.14.

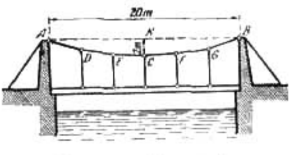
5.15. Determinar las reacciones de apoyo y los esfuerzos en la barras de la armadura suspendida y representada en el dibujo junto con las fuerzas que actúan sobre ésta.

Respuesta: $X_A=5{,}4$ tf; $Y_A=6$ tf; $X_B=-5{,}4$ tf.

Número de la barra	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*
Esfuerzo en tf	−5,4	−3,6	−1,8	+2,06	+2,06	+4,1	−6	+3,5	−3	+2,7	−2



Para el problema 5.15.



Para el problema 5.16.

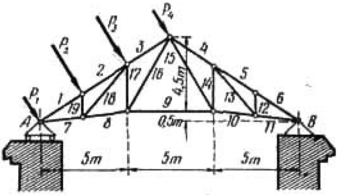
5.16. Un puente de cadena de longitud $AB=20$ m se sostiene por dos cadenas; la flecha de las cadenas $CK=2$m; la carga sobre el puente es 1,6 tf por metro lineal.

Determinar la tensión de la cadena en el punto medio C sabiendo que la curva, sobre la cual están situados los vértices del polígono funicular $ADECFGB$ es una parábola.

Respuesta: 20 tf.

5.17. En los nudos de la armadura de cubierta de paneles iguales, a causa de la presión del viento surgen fuerzas perpendiculares a la cubierta: $P_1=P_4=312{,}5$ kgf y $P_2=P_3=625$ kgf.

Determinar las reacciones de apoyo y los esfuerzos en las barras de la armadura engendrados por la presión del viento; las dimensiones de la armadura están indicadas en el dibujo.



Para el problema 5.17.

Respuesta: $Y_A=997$ kgf; $X_B=1040$ kgf; $Y_B=563$ kgf; $S_1=-1525$ kgf; $S_2=-1940$ kgf; $S_3=-1560$ kgf; $S_4=S_5=S_6=-970$ kgf; $S_7=+1100$ kgf; $S_8=$ $=440$ kgf; $S_9=-215$ kgf; $S_{10}=S_{11}=-230$ kgf; $S_{12}=S_{13}=S_{14}=0$; $S_{15}=-26$ kgf; $S_{16}=+1340$ kgf; $S_{17}=-1130$ kgf; $S_{18}=+1050$ kgf; $S_{19}=-750$ kgf;

Capítulo II

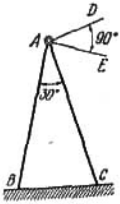
SISTEMA TRIDIMENSIONAL DE FUERZAS

§ 6. FUERZAS, CUYAS LÍNEAS DE ACCIÓN SE CRUZAN EN UN PUNTO (FUERZAS CONCURRENTES)

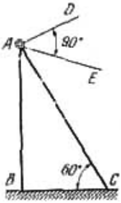
6.1. Un poste angular está compuesto de dos barras AB y BC igualmente inclinadas y unidas en su vértice por medio de una articulación. El ángulo BAC es igual a 30°. El poste sostiene dos cables horizontales AD y AE que forman entre sí un ángulo recto. La tensión de cada cable es igual a 100 kgf.

Determinar los esfuerzos en las barras, suponiendo que el plano BAC divida al ángulo DAE por la mitad, sin tomar en cuenta el peso de las barras.

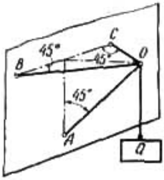
Respuesta: $S_B = -S_C = 273$ kgf.



Para el problema 6.1.



Para el problema 6.2.



Para el problema 6.3.

6.2. Los hilos horizontales de una línea telegráfica están suspendidos a un poste telegráfico AB con un puntal AC, y forman entre sí un ángulo $DAE = 90°$. Las tensiones de los hilos AD y AE son iguales a 120 N y 160 N respectivamente. La unión en el punto A es de articulación.

Hallar el ángulo α entre los planos BAC y BAE, con el cual el poste no sufre flexión lateral y determinar el esfuerzo S en el puntal, si éste forma con el horizonte un ángulo de 60°. Despreciar el peso del poste y del puntal.

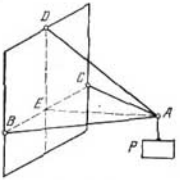
Respuesta: $\alpha = \arcsen\frac{3}{5} = 36°50'$; $S = -400$ N.

6.3. La carga $Q = 100$ kgf se sostiene por una barra AO fijada, por medio de una articulación, en el punto A e inclinada 45° respecto al horizonte y por dos cadenas horizontales BO y CO de igual longitud; $\angle CBO = \angle BCO = 45°$. Hallar el esfuerzo S en l barra y la tensión T de las cadenas.

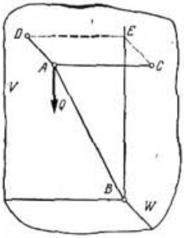
Respuesta: $S = -141$ kgf; $T = 71$ kgf.

6.4. Determinar los esfuerzos S_1 y S_2 en las barras AB y AC y el esfuerzo T en el cable AD, si está dado que $\angle CBA = \angle BCA = 60°$; $\angle EAD = 30°$. El peso de la carga P es igual a 300 kgf. El plano ABC es horizontal. Las sujeciones de las barras en los puntos A, B y C son articuladas.

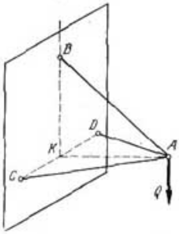
Respuesta: $T = 600$ kgf; $S_1 = S_2 = -300$ kgf.



Para el problema 6.4.



Para el problema 6.5.



Para el problema 6.6.

6.5. Determinar los esfuerzos en la barra AB y en las cadenas AC y AD que sostienen una carga Q de 42 kgf de peso, si $AB = 145$ cm, $AC = 80$ cm, $AD = 60$ cm, el plano del rectángulo $CADE$ es horizontal y los planos V y W son verticales. La unión en el punto B es articulada.

Respuesta: $T_C = 32$ kgf; $T_D = 24$ kgf; $T_B = -58$ kgf.

6.6. Determinar los esfuerzos en el cable AB y en las barras AC y AD que sostienen una carga Q de 180 N de peso, si $AB = 170$ cm, $AC = AD = 100$ cm, $CD = 120$ cm, $CK = KD$ y el plano del ΔCDA es horizontal.

Las fijaciones de las barras en los puntos A, C y D son articuladas.

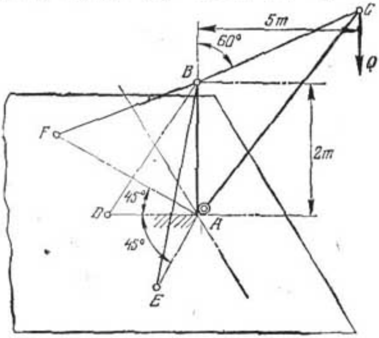
Respuesta: 204 N; -60 N.

6.7. Una grúa transportable que levanta una carga Q de 2 toneladas, tiene la construcción mostrada en el dibujo;

$AB = AE = AF = 2$ m; el ángulo $EAF = 90°$, el plano de la grúa ABC divide al ángulo diedro recto $EABF$ por la mitad.

Determinar la fuerza P_1 que comprime el montante vertical AB, así como las fuerzas P_2, P_3, P_4 que estiran la cuerda BC y los cables BE y BF, sin tomar en cuenta el peso de las piezas de la grúa.

Respuesta: $P_1=4{,}2$ tf; $P_2=5{,}8$ tf; $P_3=P_4=5$ tf.

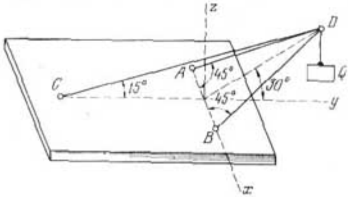


Para el problema 6.7.

6.8. Una carga Q que pesa 1 tf está suspendida en el punto D, tal como se muestra en el dibujo. Las uniones de las barras en los puntos A, B y D son articuladas.

Determinar las reacciones de los apoyos A, B y C.

Respuesta: $R_A=R_B=2{,}64$ tf; $R_C=3{,}35$ tf.



Para el problema 6.8.

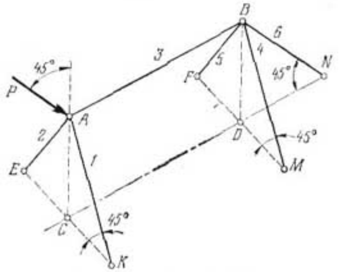
6.9. Un globo sostenido por dos cables, se encuentra bajo la acción del viento. Los cables forman entre sí un ángulo recto: el plano en que ellos se encuentran forma un ángulo de 60° con el plano del horizonte. La dirección del viento es perpendicular a la línea de intersección de estos planos y es paralela a la superficie de la tierra. El peso del globo con el gas que éste contiene es de 250 kgf. El volúmen del globo es 215,4 m³. El peso de 1 m³ de aire es igual a 1,3 kgf.

Determinar las tensiones T_1 y T_2 de los cables y la resultante P de las fuerzas de presión del viento sobre el globo, teniendo en cuenta que las líneas de acción de todas las fuerzas aplicadas al globo convergen en el centro del mismo.

Respuesta: $T_1 = T_2 = 24{,}5$ kgf; $P = 17{,}3$ kgf.

6.10. En el dibujo está representada una armadura espacial compuesta de seis barras *1*, *2*, *3*, *4*, *5*, *6*. La fuerza P actúa sobre el nudo A en el plano del rectángulo $ABCD$, y su línea de acción forma con la vertical CA un ángulo de 45°. $\Delta EAK = \Delta FBM$. Los ángulos en los vértices A, B y D de los triángulos isósceles EAK, FBM y NDB son rectos.

Determinar los esfuerzos en las barras si $P = 1$ tf.



Para el problema 6.10.

Respuesta: $S_1 = -0{,}5$ tf; $S_2 = -0{,}5$ tf;
$S_3 = -0{,}707$ tf; $S_4 = +0{,}5$ tf;
$S_5 = +0{,}5$ tf; $S_6 = -1$ tf.

6.11. Determinar los esfuerzos en el montante vertical y las patas de la grúa representada en el dibujo, en dependencia del ángulo α, si está dado: $AB = BC = AD = AE$. Las uniones en los puntos A, B, D y E son articuladas.

Respuesta: $S_{BD} = P(\cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha)$;
$S_{BE} = P(\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha)$;
$S_{AB} = -P\sqrt{2}\cos\alpha$.

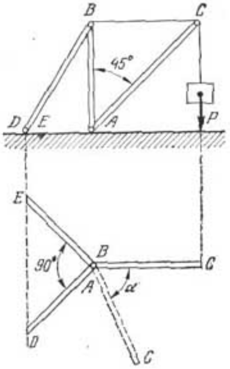
6.12. Para sostener un cable aéreo se utiliza un poste angular AB con dos tensores AC y AD, el ángulo $CBD = 90°$.

Determinar los esfuerzos en el poste y los tensores en dependencia del ángulo φ formado por una de las ramas del cable con el plano CBA. Las ramas del cable son horizontales y perpendiculares entre sí, las tensiones en ellas son idénticas e iguales a T.

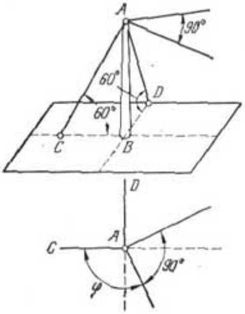
Respuesta: $S_{AC} = 2T(\operatorname{sen}\varphi - \cos\varphi)$;

$S_{AD} = 2T(\operatorname{sen}\varphi + \cos\varphi)$;

$S_{AB} = -2\sqrt{3}\,T\operatorname{sen}\varphi$.



Para el problema 6.11.



Para el problema 6.12.

Los tensores serán extirados simultáneamente si $\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{3\pi}{4}$.

Cuando $f < \frac{\pi}{4}$ ó $\varphi > \frac{3\pi}{4}$ uno de los tensores debe ser sustituido por una barra.

6.13. Un mástil AB se sostiene en posición vertical con ayuda de cuatro tensores situados simétricamente. El ángulo entre cada dos tensores adyacentes es igual a 60°.

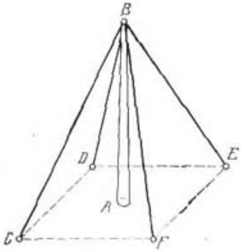
Determinar la presión que ejerce el mástil sobre la tierra si la tensión de cada uno de los tensores es igual a 100 kgf y el peso del mástil es igual a 200 kgf.

Respuesta: 483 kgf.

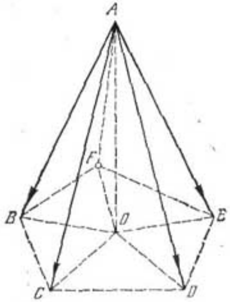
6.14. Cuatro aristas AB, AC, AD y AE de una pirámide pentagonal regular expresan la magnitud y dirección de cuatro fuerzas en la escala de 1 N en un metro.

Sabiendo que la altura de la pirámide AO es igual a 10 m y el radio de la circunferencia circunscrita a la base es $OC = 4{,}5$ m, hallar la resultante R y la distancia x desde el punto O hasta el punto de intersección de la resultante con la base.

Respuesta: $R = 40{,}25$ N; $x = 1{,}125$ m.



Para el problema 6.13.

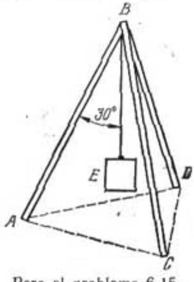


Para el problema 6.14.

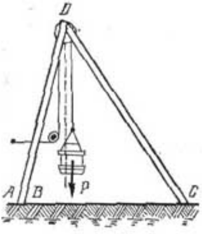
6.15. Una carga E, cuyo peso es igual a 10 kgf está colgada en un trípode $ABCD$. Los pies tienen una misma longitud, están sujetos en el piso horizontal y forman entre sí ángulos iguales.

Determinar el esfuerzo en cada pie, si se sabe que éstos forman ángulos de 30° con la vertical BE.

Respuesta: 3,85 kgf.



Para el problema 6.15.



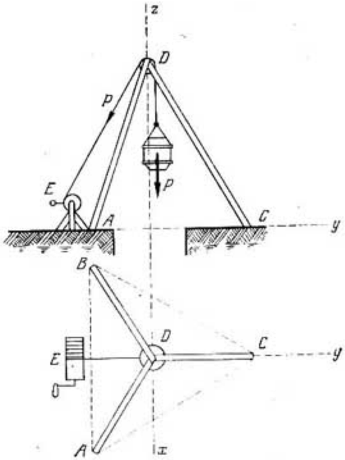
Para el problema 6.16.

6.16. Hallar los esfuerzos S en los pies AD, BD y CD de un trípode que forman ángulos de 60° con el plano horizontal, si el peso P de una carga levantada uniformemente es igual a 3 tf y $AB = BC = AC$.

Respuesta: $S = 2{,}3$ tf.

6.17. El trípode $ABCD$ y la cabria E están instalados para elevar una carga P de 3 tf de peso desde el pozo de una mina.

Determinar los esfuerzos en los pies del trípode, durante el levantamiento uniforme de la carga, si el triángulo ABC es equi-



Para el problema 6.17.

látero y los ángulos formados por los pies y el cable DE con el plano horizontal son iguales a 60°. La situación de la cabria con respecto al trípode se ve en el dibujo.

Respuesta: $S_A = S_B = 3{,}15$ tf; $S_C = 0{,}155$ tf.

6.18. Un trípode se encuentra sobre un piso liso. Los extremos inferiores de sus pies están atados con cordones de tal modo que los pies y los cordones del trípode forman un tetraedro regular. Una carga de peso P cuelga del punto superior del trípode.

Determinar la reacción R del piso en los puntos de apoyo y la tensión T de los cordones, expresando las magnitudes buscadas en función de P.

Respuesta: $R = \frac{1}{3} P$; $T = \frac{P}{3\sqrt{6}}$.

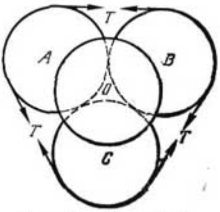
6.19. Resolver el problema anterior para el caso cuando los pies del trípode están atados con cordones no en los extremos, sino en los puntos medios, tomando en cuenta que el peso de cada pie es igual a p y está aplicado a su centro.

Respuesta: $R=\frac{1}{3}P+p;\quad T=\frac{2P+3p}{18}\sqrt{6}.$

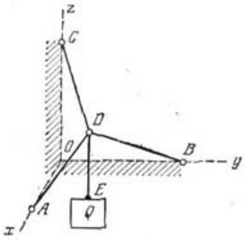
6.20. Tres bolas homogéneas A, B y C de radios iguales están situadas sobre un plano horizontal, se tocan entre sí y están atadas con un cordón que las abarca por el plano ecuatorial. La cuarta bola O del mismo radio y también homogénea de un peso de 10 N descansa sobre las tres.

Determinar la tensión T del cordón provocada por la presión de la bola de arriba. Despreciar el rozamiento de las bolas entre sí y con el plano horizontal.

Respuesta: $T=1,36$ N.



Para el problema 6.20.



Para el problema 6.21.

6.21. En los puntos A, B y C, que se encuentran en los ejes de coordenadas rectangulares a la misma distancia l del origen de coordenadas, están fijados los hilos $AD=BD=CD=L$ atados en el punto D, cuyas coordenadas son:

$$x=y=z=\frac{1}{3}\left(l-\sqrt{3L^2-2l^2}\right).$$

En este punto está suspendida la carga Q.

Determinar las tensiones de los hilos T_A, T_B y T_C suponiendo que $\sqrt{\frac{2}{3}}\,l<L<l$.

Respuesta: $T_A=T_B=\frac{l-\sqrt{3L^2-2l^2}}{3l\sqrt{3L^2-2l^2}}LQ;$

$$T_C=\frac{l+2\sqrt{3L^2-2l^2}}{3l\sqrt{3L^2-2l^2}}LQ.$$

§ 7. REDUCCIÓN DE UN SISTEMA DE FUERZAS A LA FORMA MÁS SIMPLE

7.1. A los vértices de un cubo y en dirección de sus aristas están aplicadas unas fuerzas, tal como se indica en el dibujo.

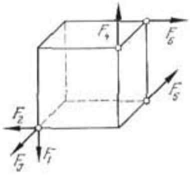
¿Cuáles condiciones deben satisfacer las fuerzas F_1, F_2, F_3, F_4, F_5 y F_6 para que éstas se encuentren en equilibrio?

Respuesta: $F_1=F_2=F_3=F_4=F_5=F_6$.

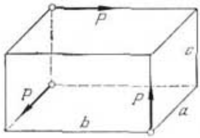
7.2. Tres fuerzas iguales P actúan por tres aristas de un paralelepípedo rectangular; estas aristas ni se cruzan ni son paralelas.

¿Cuál correlación debe existir entre las aristas a, b, c para que este sistema se reduzca a una resultante?

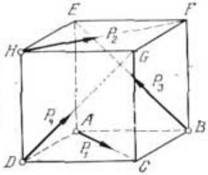
Respuesta: $a=b-c$.



Para el problema 7.1.



Para el problema 7.2.



Para el problema 7.3.

7.3. A los cuatro vértices A, H, B y D de un cubo están aplicadas cuatro fuerzas iguales $P_1=P_2=P_3=P_4=P$, la fuerza P_1 está orientada a lo largo de AC, la P_2, a lo largo de HF, la P_3, a lo largo de BE y la P_4, a lo largo de DG.

Reducir este sistema a la forma más simple.

Respuesta: La resultante es igual a $2P$ y está dirigida por la diagonal DG.

7.4. A un tetraedro regular $ABCD$, cuyas aristas son iguales a a, están aplicadas unas fuerzas: F_1, dirigida por la arista AB, F_2, dirigida por la arista CD y F_3, al punto medio E de la arista BD. Las magnitudes de las fuerzas F_1 y F_2 pueden ser cualesquiera y las proyecciones de la fuerza F_3 sobre los ejes x, y, z son iguales a

$$+F_3\frac{5\sqrt{3}}{6};\quad -\frac{F_3}{2};\quad -F_3\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

¿Puede ser reducido este sistema de fuerzas a una resultante? Si se reduce, hace falta hallar las coordenadas x y z del punto de intersección de la línea de acción de la resultante con el plano Oxz.

Respuesta: Se reduce, puesto que las proyecciones del vector principal y del momento principal sobre los ejes de coordenadas son:

$$V_x = F_2\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad V_y = F_1 - 0{,}5F_2; \quad V_z = 0;$$

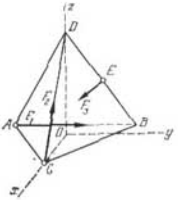
$$M_x = 0; \quad M_y = 0; \quad M_z = -a\frac{\sqrt{3}}{6}(F_1 + F_2).$$

Las *coordenadas* son: $x = \dfrac{M_z}{V_y} = -\dfrac{a\sqrt{3}(F_1+F_2)}{6F_1 - 3F_2}$; $z = 0$.

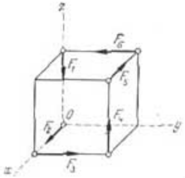
7.5. Seis fuerzas iguales de 2 N cada una están aplicadas a lo vértices de un cubo con aristas de 5 cm de longitud, así como está indicado en el dibujo.

Reducir este sistema a la forma más simple.

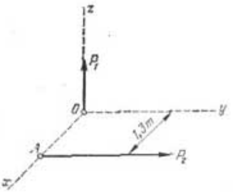
Respuesta: El sistema se reduce a un par, cuyo momento equivale a $20\sqrt{3}$ N·cm y forma con los ejes coordenados los ángulos: $\cos\alpha = -\cos\beta = \cos\gamma = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.



Para el problema 7.4.



Para el problema 7.5.



Para el problema 7.6.

7.6. Un sistema de fuerzas: $P_1 = 8$ kgf, dirigida a lo largo de Oz, y $P_2 = 12$ kgf, dirigida paralelamente a Oy, como se indica en el dibujo, donde $OA = 1{,}3$ m, debe ser reducido a la forma canónica, al determinar el valor del vector principal V de todas estas fuerzas y el valor de su momento principal M respecto a un punto arbitrario tomado en el eje espiral central.

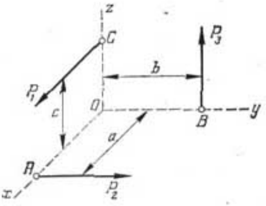
Hallar los ángulos α, β y γ formados por el eje espiral central con los ejes coordenados, así como las coordenadas x y y del punto de su encuentro con el plano Oxy.

Respuesta: $V = 14{,}4$ kgf; $M = 8{,}65$ kgfm; $\alpha = 90°$;

$$\beta = \operatorname{arctg}\frac{2}{3}; \quad \gamma = \operatorname{arctg}\frac{3}{2};$$

$$x = 0{,}9 \text{ m}; \quad y = 0.$$

7.7. Tres fuerzas P_1, P_2, P_3 se encuentran en los planos coordenados y son paralelas a los ejes de coordenadas, pero pueden ser dirigidas en uno u otro sentido. Los puntos A, B y C de aplicación de estas fuerzas se encuentran a las distancias dadas a, b y c del origen de coordenadas.

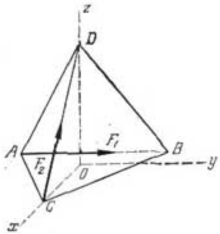


Para el problema 7.7.

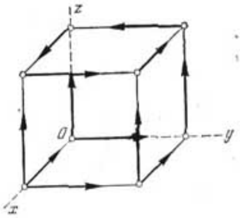
¿Cuál condición deben satisfacer las magnitudes de estas fuerzas para que se reduzcan a una resultante? ¿Cuál condición deben satisfacer las magnitudes de estas fuerzas para que exista un eje espiral central, que pasa por el origen de coordenadas.

Respuesta: $\frac{a}{P_1}+\frac{b}{P_2}+\frac{c}{P_3}=0$; $\frac{P_1}{bP_3}=\frac{P_2}{cP_1}=\frac{P_3}{aP_2}$.

En la primera respuesta P_1, P_2, P_3 son las magnitudes algebraicas de las fuerzas.



Para el problema 7.8.



Para el problema 7.9.

7.8. Al tetraedro regular $ABCD$ con aristas iguales a a están aplicadas la fuerza F_1, por la arista AB, y la fuerza F_2, por la arista CD.

Hallar las coordenadas x e y del punto de intersección del eje espiral central con el plano Oxy.

Respuesta: $x=\frac{a\sqrt{3}}{6}\,\frac{2F_2^2-F_1^2}{F_1^2-F_2^2}$;

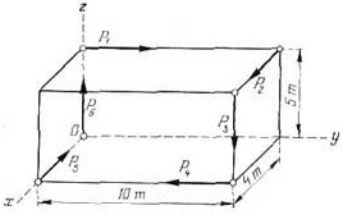
$$y=-\frac{a}{2}\,\frac{F_1F_2}{F_1^2+F_2^2}.$$

7.9 Doce fuerzas iguales P actúan según las aristas iguales a a de un cubo, como está indicado en el dibujo.

Reducir ese sistema de fuerzas a la forma canónica y determinar las coordenadas x e y del punto de intersección del eje espiral central con el plano Oxy.

Respuesta: $V=2P\sqrt{6}$; $M=\frac{2}{3}Pa\sqrt{6}$;

$$\cos\alpha=-\cos\beta=-\frac{1}{2}\cos\gamma=-\frac{1}{6}\sqrt{6};\quad x=y=\frac{2}{3}a.$$



Para el problema 7.10.

7.10. Seis fuerzas indicadas en el dibujo: $P_1=4$ N, $P_2=6$ N, $P_3=3$ N, $P_4=2$ N, $P_5=6$ N, $P_6=8$ N actúan según las aristas de un paralelepipedo rectangular de longitudes respectivamente iguales a 10 m, 4 m y 5 m.

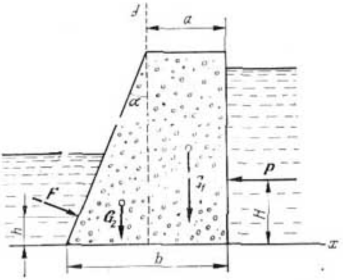
Reducir este sistema a la forma canónica y determinar las coordenadas x e y del punto de intersección del eje helicoidal central con el plano Oxy.

Respuesta: $V=5{,}4$ N; $M=47{,}5$ J; $\cos\alpha=0$; $\cos\beta=0{,}37$; $\cos\gamma=0{,}93$; $x=-11{,}9$ m; $y=-10$ m.

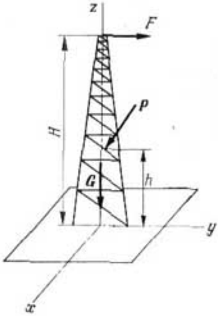
7.11. Las resultantes $P=8000$ tf y $F=5200$ tf de las fuerzas de presión del agua sobre la presa están aplicadas en el plano medio vertical perpendicularmente a las caras correspondientes a las distancias $H=4$ m y $h=2{,}4$ m de la base. El peso $G_1=12\,000$ tf de la parte rectangular de la presa está aplicado a su centro, el peso $G_2=6000$ tf de la parte triangular de ésta está aplicado a la distancia de una tercera parte de la longitud de la base inferior de la sección triangular a partir de la cara vertical de esta sección. El ancho de la presa en su base es $b=10$ m, en su parte superior es $a=5$ m; $\operatorname{tg}\alpha=\frac{5}{12}$.

Determinar la resultante de las fuerzas de reacción repartidas del suelo, sobre el cual está construida la presa.

Respuesta: $R_x=3200$ tf; $R_y=20\,000$ tf; la ecuación de la línea de acción de la resultante: $125x-20y+53=0$.



Para el problema 7.11.



Para el problema 7.12.

7.12. El peso de un mástil de antena con fundamento de hormigón es $G=14$ tf. El mástil está sometido a la fuerza de tensión de la antena $F=2$ tf y a la resultante de las fuerzas de presión del viento $P=5$ tf; ambas fuerzas son horizontales y están situadas en planos perpendiculares entre sí; $H=15$ m, $h=6$ m. Determinar la reacción resultante del suelo, en el cual está puesto el fundamento del mástil.

Respuesta: Las fuerzas de reacción del suelo se reducen a una dinama izquierda compuesta de la fuerza $V=15$ tf dirigida por el eje central

$$\frac{-30+14y+2z}{5}=\frac{30-5z-14x}{2}=\frac{-2x+5y}{-14}$$

hacia arriba y de un par de fuerzas de momento $M=6$ tfm. El eje de la dinama interseca el plano del fundamento en el punto $x=2{,}2$ m, $y=2$ m, $z=0$.

§ 8. EQUILIBRIO DE UN SISTEMA DE FUERZAS ARBITRARIO

8.1. Un cuerpo de 400 kgf de peso está fijado en el punto B de una plataforma redonda inclinada que puede girar alrededor del eje ACD; éste está inclinado respecto a la vertical bajo un ángulo de 20°.

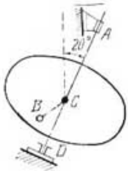
Determinar el momento de rotación creado por la fuerza de la gravedad del cuerpo, si el radio $CB = 3$m, en el instante dado, es horizontal.

Respuesta: 410 kgfm.

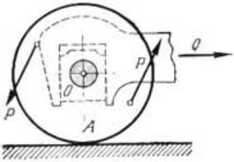
8.2. Un motor eólico tiene cuatro alas inclinadas bajo un ángulo $\alpha = 15° = \arcsin 0{,}259$ respecto al plano perpendicular al eje de rotación; la resultante de las fuerzas de presión del viento sobre cada ala es igual a 100 kgf, está dirigida por la perpendicular al plano del ala y está aplicada al punto distante 3 m del eje de rotación.

Hallar el momento de rotación.

Respuesta: 311 kgfm.



Para el problema 8.1.



Para el problema 8.3.

8.3. Un motor eléctrico, montado en el eje O del tren de ruedas de un vagón de tranvía, trata de girar el eje en sentido contrario a las agujas del reloj; la magnitud del momento del par de fuerzas (P, P) de rotación es igual a 600 kgfm y el radio de las ruedas equivale a 60 cm.

Determinar la fuerza de tracción Q del tren de ruedas suponiendo que éste está colocado sobre rieles horizontales.

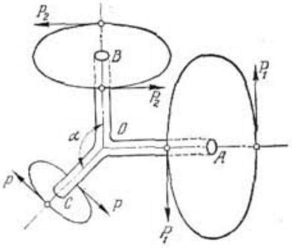
Primero hallamos la suma de las fuerzas de rozamiento entre las ruedas y los rieles tomando los momentos de fuerzas respecto al eje O. Luego proyectemos todas las fuerzas, aplicadas al tren de ruedas sobre la dirección horizontal.

Respuesta: $Q = 1$ tf.

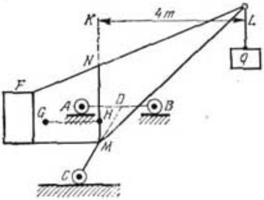
8.4. Unos pares de fuerzas están aplicados a las circunferencias de tres discos: A de 15 cm de radio, B de 10 cm de radio y C de 5 cm de radio. Las magnitudes de las fuerzas que forman dichos pares son $P_1 = 10$ N, $P_2 = 20$ N y P respectivamente. Los ejes OA, OB y OC son coplanares; el ángulo AOB es recto.

Determinar la magnitud de la fuerza P y el ángulo $BOC = \alpha$ para que el sistema de tres discos, siendo completamente libre, permanezca en equilibrio.

Respuesta: $P = 50$ N; $\alpha = \text{arctg}\,(-0{,}75) = 143°10'$.



Para el problema 8.4.



Para el problema 8.5.

8.5. Una grúa está montada sobre un carro de tres ruedas ABC. Las dimensiones de la grúa son conocidas: $AD = DB = 1$ m, $CD = 1{,}5$ m, $CM = 1$ m, $KL = 4$ m. La grúa se equilibra por medio de un contrapeso F. El peso de la grúa junto con el contrapeso es $P = 10$ tf y está aplicado al punto G del plano $LMNF$ a la distancia $GH = 0{,}5$ m del eje de la grúa MN. La carga Q que se eleva equivale a 3 tf.

Hallar la presión de las ruedas sobre los rieles para la situación de la grúa cuando su plano LMN es paralelo a AB.

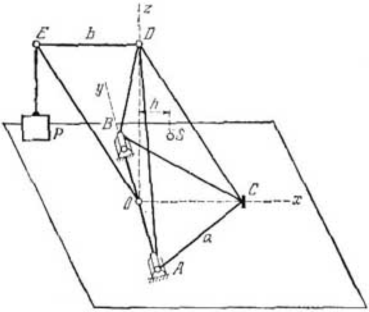
Respuesta: $N_A = \frac{5}{6}$ tf; $N_B = 7\frac{5}{6}$ tf; $N_C = 4\frac{1}{3}$ tf.

8.6. Una grúa provisional está compuesta de una pirámide con la base horizontal en forma de un triángulo equilátero ABC y con una cara vertical en forma de un triángulo isósceles ADB. En los puntos O y D está articulado el eje vertical de la grúa, alrededor del cual puede girar el aguilón OE con su carga P. La base ABC está fijada en el fundamento por medio de dos cojinetes A y B, y un perno vertical C.

Determinar las reacciones de los apoyos cuando el aguilón esté en el plano de simetría de la grúa; la carga $P = 1200$ kgf, el peso de la grúa $Q = 600$ kgf, la distancia entre su centro de gravedad S y el eje OD es igual a $h = 1$ m, $a = 4$ m, $b = 4$ m.

Respuesta: $Z_A = Z_B = 1506$ kgf; $Z_C = -1212$ kgf; $X_A = X_B = 0$

8.7. La tapa de la lumbrera de la sala de máquinas se mantiene en posición horizontal por medio de un montante FG que se apoya en la tapa en el punto F a la distancia $EF = 1,5$ m del eje de la tapa. El peso de la tapa $P = 180$ kgf, su longitud

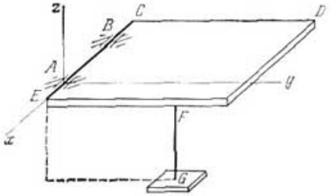


Para el problema 8.6.

$CD = 2,3$ m, el ancho $CE = 0,75$ m, las distancias desde las articulaciones A y B hasta los bordes de la tapa $AE = BC = 0,15$ m.

Hallar las reacciones de las articulaciones A y B y el esfuerzo S en el montante FG.

Respuesta: $Z_A = -94$ kgf; $Z_B = 136$ kgf; $Y_A = Y_B = 0$; $S = 138$ kgf.



Para el problema 8.7.

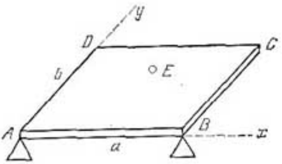
8.8. Una placa homogénea rectangular $ABCD$ de peso P se mantiene horizontalmente sobre tres apoyos puntiformes, dos de los cuales están situados en los vértices A y B del rectángulo y el tercero en cierto punto E. El peso de la placa es igual a P. Las presiones sobre los apoyos A y B son respectivamente $\frac{P}{4}$ y $\frac{P}{5}$.

Hallar la presión N_E sobre el apoyo en el punto E y las coordenadas de este punto, si las longitudes de los lados de la placa son a y b.

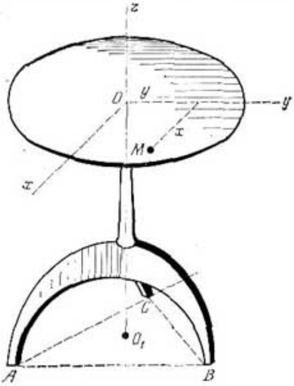
Respuesta: $N_E = \frac{11}{20} P$; $x = \frac{6}{11} a$; $y = \frac{10}{11} b$.

8.9. Una mesa descansa sobre tres patas, cuyas extremidades A, B y C forman un triángulo equilatero de lado a. El peso de la mesa es igual a P, su centro de gravedad está situado sobre la vertical zOO_1 que pasa por el centro O_1 del triángulo ABC. Una carga p está puesta sobre la mesa en el punto M, cuyas coordenadas son x, y; el eje Oy es paralelo a AB.

Determinar la presión de cada pata sobre el piso.



Para el problema 8.8.



Para el problema 8.9.

Respuesta:
$$N_A = \frac{P+p}{3} + \left(\frac{\sqrt{3}}{3} x - y\right) \frac{p}{a};$$
$$N_B = \frac{P+p}{3} + \left(y + \frac{\sqrt{3}}{3} x\right) \frac{p}{a};$$
$$N_C = \frac{P+p}{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3} \frac{x}{a} p.$$

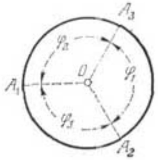
8.10. Una mesa circular descansa sobre tres patas A_1, A_2 y A_3; una carga está puesta en su centro O.

¿Cuál condición deben satisfacer los ángulos centrales φ_1, φ_2 y φ_3 para que las presiones sobre las patas A_1, A_2 y A_3 sean entre si como $1:2:\sqrt{3}$?

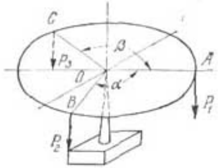
Durante la solución del problema se toman los momentos de las fuerzas con *respecto a dos de los radios* OA_1, OA_2 y OA_3.

Respuesta: $\varphi_1 = 150°$; $\varphi_2 = 90°$; $\varphi_3 = 120°$.

8.11. Una placa circular de peso despreciable, descansa en posición horizontal apoyándose por su centro sobre el punto O. Sin perturbar el equilibrio se han distribuido por la periferia de la



Para el problema 8.10.

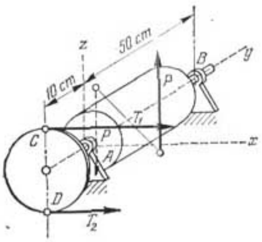


Para el problema 8.11.

placa las cargas: P_1 de 1,5 kgf de peso, P_2 de 1 kgf de peso y P_3 de 2 kgf de peso.

Determinar los ángulos α y β.

Respuesta: $\alpha = 75°30'$; $\beta = 151°$.



Para el problema 8.12.

8.12. El radio de la polea de correa CD de una dinamo es igual a 10 cm; las dimensiones del árbol AB están indicadas en el dibujo. La tensión del ramal superior conductor de la correa $T_1 = 10$ kgf, la del ramal inferior conducido $T_2 = 5$ kgf.

Determinar el momento de rotación M y las reacciones de los cojinetes A y B cuando la rotación es uniforme. El peso de las piezas de la máquina se desprecia; (P, P) es el par formado por las fuerzas de resistencia.

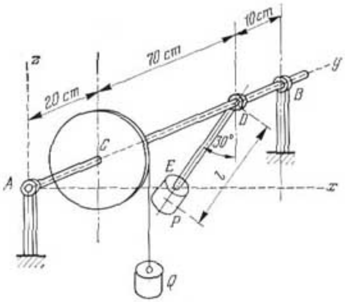
Respuesta: $M = 50$ kgfcm; $X_A = -18$ kgf; $X_B = 3$ kgf; $Z_A = Z_B = 0$.

8.13. El árbol horizontal colocado sobre dos cojinetes A y B está sometido a las acciones del peso $Q = 25$ kgf ligado a la polea C de 20 cm de radio por medio de un cable y del peso $P = 100$ kgf fijado sobre la barra DE unida invariablemente con el árbol AB bajo un ángulo recto. Las distancias son: $AC = 20$ cm, $CD = 70$ cm, $BD = 10$ cm. En el estado de equilibrio la barra DE está desviada de la vertical a un ángulo de 30°.

Determinar la distancia l entre el centro de gravedad del cuerpo P y el eje del árbol AB y las reacciones de los cojinetes A y B.

Respuesta: $l = 10$ cm; $Z_A = 30$ kgf; $Z_B = 95$ kgf; $X_A = X_B = 0$.

8.14. Una rueda dentada C de 1 m de radio y un piñón D de 10 cm de radio están montados sobre un árbol horizontal AB. Otras dimensiones están indicadas en el dibujo. Una fuerza horizontal $P = 10$ kgf está aplicada, en dirección de la tangente, a la

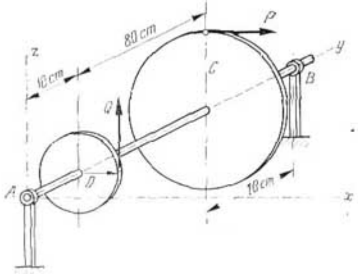


Para el problema 8.13.

rueda C y una fuerza vertical Q está aplicada, también en dirección de la tangente, al piñón D.

Determinar la fuerza Q y las reacciones de los cojinetes A y B en el estado de equilibrio.

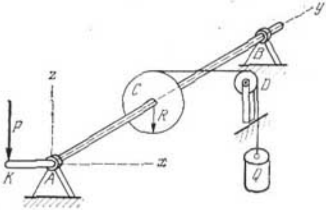
Respuesta: $Q = 100$ kgf; $X_A = -1$ kgf; $X_B = -9$ kgf; $Z_A = -90$ kgf; $Z_B = -10$ kgf.



Para el problema 8.14.

8.15. Un obrero levanta uniformemente con ayuda de un cabrestante una carga $Q = 80$ kgf. El esquema del cabrestante está dado en el dibujo. El radio del tambor $R = 5$ cm; la longitud de la manivela $AK = 40$ cm; $AC = CB = 50$ cm.

Determinar la presión P sobre la manivela y las presiones del eje del cabrestante sobre los apoyos A y B cuando la manivela AK está en posición horizontal; la fuerza P es vertical.



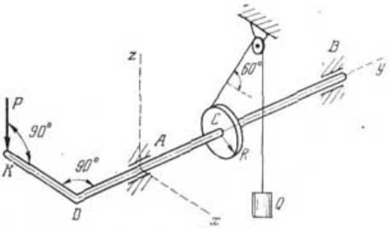
Para el problema 8.15.

Respuesta: $P=10$ kgf; $X_A=40$ kgf; $Z_A=-10$ kgf; $X_B=40$ kgf; $Z_B=0$.

8.16. Con ayuda de un cabrestante, representado esquemáticamente en el dibujo, se efectúa el levantamiento uniforme de la carga $Q=100$ kgf. El radio del tambor $R=5$ cm. La longitud de la manivela $KD=40$ cm; $AD=30$ cm; $AC=40$ cm; $CB=60$ cm. La cuerda sale del tambor por la tangente inclinada al horizonte bajo un ángulo de 60°.

Determinar la presión P sobre la manivela y las reacciones de los apoyos A y B en la posición del cabrestante cuando la manivela KD está en posición horizontal.

Respuesta: $P=12{,}5$ kgf; $X_A=-30$ kgf; $Z_A=-35{,}7$ kgf; $X_B=-20$ kgf; $Z_B=-38{,}4$ kgf.

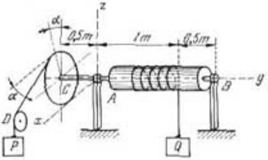


Para el problema 8.16.

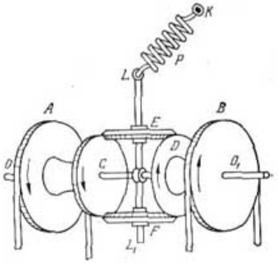
8.17. Una cuerda que soporta la carga Q, está enrollada sobre el árbol AB de un cabrestante. El radio de la rueda C montada sobre el árbol es seis veces mayor que el radio del último; las otras dimensiones están indicadas en el dibujo. La cuerda enrollada sobre la periferia de la rueda y estirada por la carga P de 6 kgf de peso sale de la rueda por la tangente inclinada al horizonte bajo un ángulo $\alpha = 30°$.

Determinar el peso de la carga Q con la cual el cabrestante permanece en equilibrio, así como las reacciones de los cojinetes A y B; el peso del árbol y el rozamiento en la polea D se desprecian.

Respuesta: $Q = 36$ kgf; $X_A = -6{,}93$ kgf; $Z_A = 16$ kgf; $X_B = 1{,}73$ kgf; $Z_B = 23$ kgf.



Para el problema 8.17.



Para el problema 8.18.

8.18. Para medir la fuerza que se transmite por la polea de correa A a la polea B sirve un dinamómetro mostrado esquemáticamente en el dibujo. Las poleas A y B giran libremente sobre el eje fijo OO_1; la polea A y la rueda dentada C forman una sola pieza; la polea B y la rueda dentada D también constituyen una sola pieza. Estas dos ruedas dentadas engranan con las ruedas dentadas E y F que giran libremente alrededor del eje vertical LL_1. Los diámetros de las ruedas dentadas C, D, E y F son iguales y equivalen a 20 cm. El momento de la fuerza que hace girar la polea A es de 1200 kgfcm y equivale al momento de la fuerza que frena la polea B. La rotación del eje LL_1 alrededor del eje OO_1 se retiene por medio de una balanza de resorte P fijada en un punto inmóvil K.

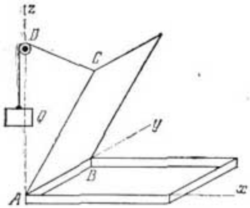
Hallar las presiones que ejercen las ruedas dentadas E y F sobre el eje LL_1 y determinar la indicación P de la balanza, si $LE = 50$ cm, la dirección LK es perpendicular al plano OLO_1.

Respue : : $N_E = N_F = 120$ kgf; $P = 40$ kgf.

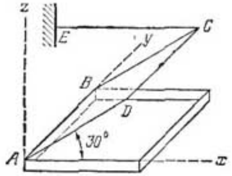
8.19. Una tapa homogénea rectangular de peso $P = 40$ N se mantiene, mediante un contrapeso Q, en posición semiabierta formando con el horizonte un ángulo de 60°.

Despreciando el rozamiento en la polea D determinar el peso Q y las reacciones de las articulaciones A y B, si la polea D está fijada sobre la vertical que pasa por A y $AD = AC$.

Respuesta: $Q = 10{,}4$ N; $X_A = 10$ N; $Z_A = 17{,}3$ N;
$X_B = 0$; $Z_B = 20$ N.



Para el problema 8.19.

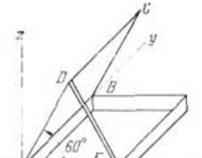


Para el problema 8.20.

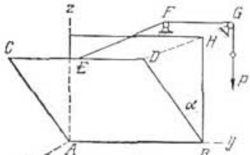
8.20. Una tapa homogénea rectangular $ABCD$ de un cajón puede girar alrededor del eje horizontal AB sobre bisagras en los puntos A y B. La cuerda horizontal CE, paralela a Ax, sostiene la tapa bajo un ángulo $DAx = 30°$.

Determinar la reacciones en las bisagras, si el peso de la tapa es de 2 kgf.

Respuesta: $X_A = 0$; $Z_A = 1$ kgf; $X_B = 1{,}73$ kgf; $Z_B = 1$ kgf.



Para el problema 8.21.



Para el problema 8.22.

8.21. La tapa de un cajón rectangular $ABCD$ está sostenida por un lado mediante un palo DE. El peso de la tapa es de 12 kgf; $AD = AE$; el ángulo $DAE = 60°$.

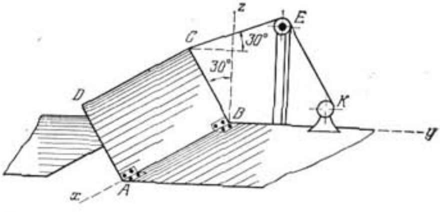
Determinar las reacciones de las articulaciones A y B, así como el esfuerzo S en el palo; el peso de éste se desprecia.

Respuesta: $X_A = 1{,}73$ kgf; $Z_A = 3$ kgf; $X_B = 0$;
$Z_B = 6$ kgf; $S = 3{,}45$ kgf.

8.22. La ventanilla $ABDC$ de peso $Q = 10$ kgf está abierta un ángulo $\alpha = 60°$. Se sabe que $BD = BH$; $CE = ED$; la cuerda EF es paralela a la recta DH.

Determinar el esfuerzo P necesario para mantener la ventanilla en equilibrio, y las reacciones de las bisagras A y B.

Respuesta: $P = 5$ kgf; $X_A = X_B = 2{,}17$ kgf; $Z_A = Z_B = 3{,}75$ kgf.

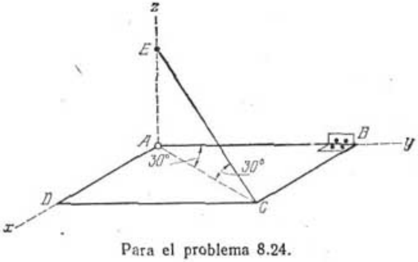


Para el problema 8.23.

8.23. La parte levadiza $ABCD$ de un puente de 1500 kgf de peso está levantada con ayuda de una cadena CE que pasa sobre una polea E y va enrollada sobre un cabrestante K. El punto E se encuentra en el plano vertical CBy.

Determinar, para la posición presentada en el dibujo, la tensión de la cadena CE y las reacciones en los puntos A y B. El centro de gravedad de la parte levadiza coincide con el centro del rectángulo $ABCD$.

Respuesta: $T = 375$ kgf; $Y_A = 0$; $Z_A = 750$ kgf;
$Y_B = -325$ kgf; $Z_B = 562{,}5$ kgf.



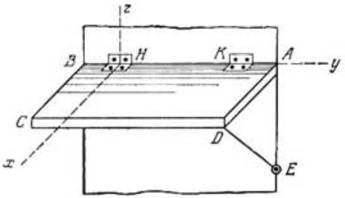
Para el problema 8.24.

8.24. Un cuadro homogéneo rectangular de 20 N de peso está fijado al muro con ayuda de una articulación esférica A y de una bisagra B, y se retiene en posición horizontal con auxilio de la cuerda CE atada al punto C del cuadro y al clavo E enclavado en la pared en la misma vertical que A; $\angle ECA = \angle BAC = 30°$.

Determinar la tensión de la cuerda y las reacciones de apoyo.

Respuesta: $T = 20$ N; $X_A = 8{,}66$ N; $Y_A = 15$ N; $Z_A = 10$ N; $X_B = Z_B = 0$.

8.25. La cama $ABCD$ de un coche, que puede girar alrededor del eje AB, se retiene en posición horizontal por la barra ED

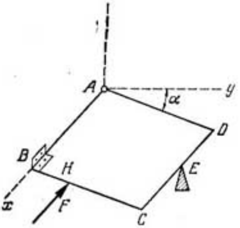


Para el problema 8.25.

articulada en E a la pared vertical BAE. El peso de la cama con la carga P que se encuentra sobre ésta es igual a 80 kgf y está aplicado al punto de intersección de las diagonales del rectángulo $ABCD$. Las dimensiones son: $AB = 150$ cm; $AD = 60$ cm; $AK = BH = 25$ cm. La longitud de la barra $ED = 75$ cm.

Determinar el esfuerzo S en la barra ED, despreciando su peso, y las reacciones de las bisagras K y H.

Respuesta: $S = 66\frac{2}{3}$ kgf; $X_K = -66\frac{2}{3}$ kgf; $Z_K = -10$ kgf; $X_H = 13\frac{1}{3}$ kgf; $Z_H = 50$ kgf.



Para el problema 8.26.

8.26. Una placa cuadrada homogénea $ABCD$ de lado $a = 30$ cm y de peso $P = 5$ kgf está fijada en el punto A con ayuda de una articulación esférica, y en el punto B, con ayuda de una articulación cilíndrica. El lado AB es horizontal. En el punto E la placa está apoyada sobre un punto. En el punto H sobre la placa actúa una fuerza F paralelamente al lado AB.

Hallar las reacciones en los puntos A, B y E, si $CE = ED$,

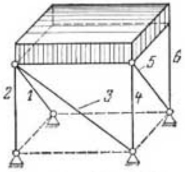
$BH = 10$ cm, $F = 10$ kgf y la placa forma con el plano horizontal un ángulo $\alpha = 30°$.

Respuesta: $X_A = 10$ kgf; $Y_A = 2,35$ kgf; $Z_A = -0,11$ kgf; $Y_B = -3,43$ kgf; $Z_B = 3,23$ kgf; $R_E = 2,17$ kgf.

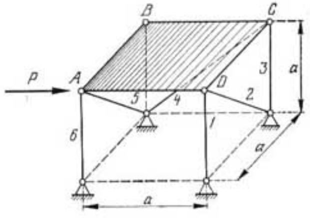
8.27. Una placa homogénea horizontal de peso P que tiene la forma de un paralelepípedo rectangular está fijada en el suelo por seis barras rectilíneas.

Determinar los esfuerzos en las barras de apoyo, provocados por el peso de la placa, si los extremos de las barras están fijados en la placa y en los estribos fijos por medio de articulaciones esféricas.

Respuesta: $S_1 = S_3 = S_4 = S_5 = 0$; $S_2 = S_6 = -\frac{P}{2}$.



Para el problema 8.27.



Para el problema 8.28.

8.28. Determinar los esfuerzos en las seis barras de apoyo que sostienen una placa rectangular $ABCD$ sometida a la acción de una fuerza horizontal P a lo largo del lado AD. Las dimensiones están indicadas en el dibujo.

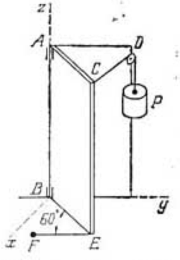
Respuesta: $S_1 = P$; $S_2 = -P\sqrt{2}$; $S_3 = -P$; $S_4 = P\sqrt{2}$; $S_5 = P\sqrt{2}$; $S_6 = -P$.

8.29. Una puerta rectangular que tiene el eje vertical de rotación AB está abierta un ángulo $CAD = 60°$ y se retiene en esta posición por dos cuerdas, una de las cuales, la CD, pasa sobre una polea y está retesada por la carga $P = 32$ kgf, la otra, la EF, está atada en el punto F del piso. El peso de la puerta es de 64 kgf; su ancho $AC = AD = 18$ dm; la altura $AB = 24$ dm.

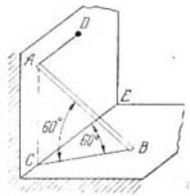
Determinar la tensión T de la cuerda EF y las reacciones de la articulación cilíndrica en el punto A y de la quicionera en el punto B. El rozamiento de la polea se desprecia.

Respuesta: $T = 32$ kgf; $X_A = 6,9$ kgf; $Y_A = -28$ kgf; $X_B = 20,8$ kgf; $Y_B = 44$ kgf; $Z_B = 64$ kgf.

8.30. La barra AB se retiene en posición inclinada por dos cuerdas horizontales AD y BC. En el punto A la barra se apoya en una pared vertical, en la cual se encuentra también el punto D, y en el punto B está apoyada sobre el piso horizontal. Los pun-



Para el problema 8.29.



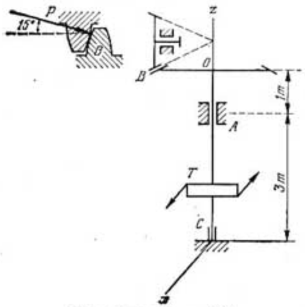
Para el problema 8.30.

tos A y C están sobre una misma vertical. El peso de la barra es de 8 N. El rozamiento en los puntos A y B se desprecia.

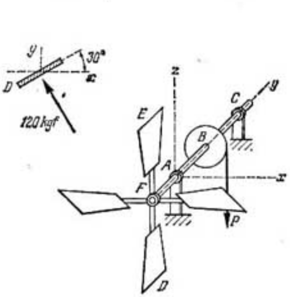
Verificar, si la barra puede quedarse en equilibrio y determinar las tensiones T_A y T_B de las cuerdas y las reacciones de los planos de apoyo, si $\angle ABC = \angle BCE = 60°$.

Respuesta: $T_A = 1{,}15$ N; $T_B = 2{,}3$ N; $R_A = 2$ N; $R_B = 8$ N.

8.31. Un par de fuerzas que hace girar la turbina hidráulica T y tiene el momento de 120 kgfm, está equilibrado por la presión contra el diente B de un piñón OB y por las reacciones de los apoyos. La presión contra el diente es perpendicular al radio $OB = 0{,}6$ m y forma con el horizonte un ángulo $\alpha = 15° = \text{arctg}\, 0{,}268$.



Para el problema 8.31.



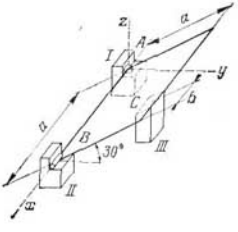
Para el problema 8.32.

Determinar las reacciones de la quicionera C y del cojinete A, si el peso de la turbina junto con el árbol y la rueda es igual a 1,2 tf y está dirigido a lo largo del eje OC; $AC=3$ m, $AO=1$ m.

Respuesta: $X_A=266\frac{2}{3}$ kgf; $X_C=-66\frac{2}{3}$ kgf; $Y_A=-Y_C=$ $=10{,}7$ kgf; $Z_C=1254$ kgf.

8.32. Un motor eólico con el eje horizontal AC posee cuatro alas dispuestas simétricamente, cuyos planos forman con el plano vertical, que es perpendicular al eje AC, ángulos iguales de 30°. La resultante de las fuerzas de presión del viento equivalente a 120 kgf, (la proyección del ala D sobre el plano xy está representada a parte) está aplicada a cada ala a 2 m de distancia del eje según la normal al plano del ala. El eje del motor se apoya en el punto A sobre un cojinete, y en el punto C, sobre una quicionera, y se mantiene en estado de reposo por la presión vertical P sobre el diente de la rueda B producida por un piñón no indicado en el dibujo. El radio de la rueda B es igual a 1,2 m; $BC=0{,}5$ m; $AB=1$ m; $AF=0{,}5$ m.

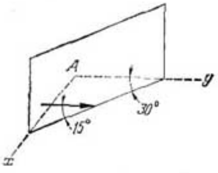
Determinar la presión P y las reacciones de los apoyos en dos casos: 1) cuando el viento ejerce presión sobre las cuatro alas y 2) cuando el ala D está desmontada y la línea DE es vertical.



Respuesta: 1) $P=400$ kgf; $Z_A=$ $=133\frac{1}{3}$ kgf; $Y_C=-416$ kgf; $Z_C=266\frac{2}{3}$ kgf; $X_A=X_C=0$.

2) $P=300$ kgf; $X_A=$ $=80$ kgf; $Z_A=$ $=-38{,}6$ kgf; $X_C=-20$ kgf; $Y_C=-312$ kgf; $Z_C=339$ kgf.

8.33. Un cobertizo homogéneo rectangular, cuyo lado AB es horizontal, está inclinado hacia el horizonte bajo un ángulo de 30°. El cobertizo está unido con el poste I mediante una articulación esférica A, y con el poste II mediante una articulación cilíndrica B; además, el cobertizo se apoya libremente en el punto C sobre la superficie inclinada del poste III. Las dimensiones son: $a=3$ m, $d=6$ m, $b=2$ m. El peso de 1 m² de cobertizo es igual



Para el problema 8.33.

a 20 kgf. El cobertizo está sometido a la presión uniformemente repartida del viento de una intensidad de 50 kgf por 1 m² de superficie del cobertizo. Esta presión está dirigida bajo un ángulo de 15° respecto al horizonte y actúa en el plano vertical que forma con el eje Ay un ángulo de 30°.

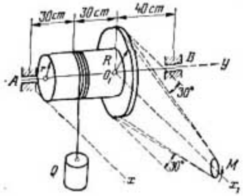
Determinar las reacciones de apoyo.

Respuesta: $R_C = 445$ kgf; $X_A = 435$ kgf; $Y_A = -208$ kgf; $Z_A = 222$ kgf; $Y_B = -323$ kgf; $Z_B = -14{,}8$ kgf.

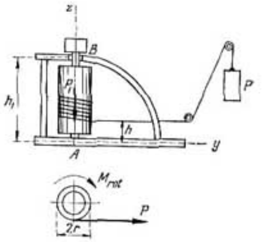
8.34. Un motor M levanta uniformemente la carga Q con ayuda de una cadena sin fin.

Determinar las reacciones de los apoyos A y B y la tensión en la cadena, si las ramas de la cadena forman con el horizonte ángulos de 30° (el eje O_1x_1 es paralelo al eje Ax). Se sabe que $r = 10$ cm, $R = 20$ cm, $Q = 1$ tf, la tensión de la parte conductora de la cadena es dos veces mayor que la de la parte conducida, es decir, $T_1 = 2T_2$.

Respuesta: $T_1 = 1$ tf; $T_2 = 0{,}5$ tf; $X_A = -0{,}52$ tf; $Z_A = 0{,}6$ tf; $X_B = -0{,}78$ tf; $Z_B = 0{,}15$ tf.



Para el problema 8.34.



Para el problema 8.35.

8.35. Para levantar una maza de martinete de peso $P = 300$ kgf sirve un cabrestante vertical, cuyo árbol de radio $r = 20$ cm se apoya con su extremo inferior en la quicionera A, y se retiene en el cojinete B por su extremo superior. El árbol se pone en rotación por medio de un motor.

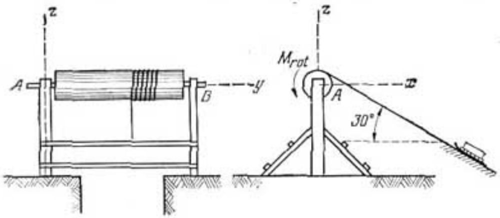
Hallar el momento de rotación del motor, necesario para levantar uniformemente la maza de martinete, así como las reacciones en la quicionera A y en el cojinete B. Viene dado: $h_1 = 1$ m; $h = 30$ cm y el peso de las piezas en rotación del cabrestante $P_1 = 100$ kgf.

Respuesta: $M_{rot} = 60$ kgfm; $X_A = 0$; $Y_A = -210$ kgf; $Z_A = 100$ kgf; $X_B = 0$; $Y_B = -90$ kgf.

8.36. Un cabrestante, que sirve para levantar rocas de un pozo a mano inclinado, está compuesto de un árbol de 0,25 m de radio y de 1,5 m de longitud. El árbol se pone en rotación por medio de un motor (no indicado en el dibujo).

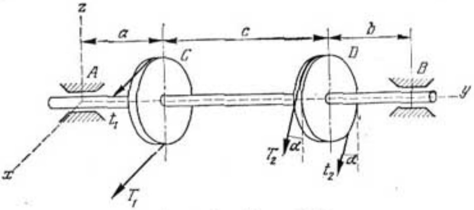
Determinar las reacciones de los apoyos y el momento de rotación M_{rot} del motor, si el peso del árbol es igual a 80 kgf, el peso de la carga es de 400 kgf, el coeficiente de rozamiento entre la carga y la superficie del pozo es igual a 0,5, el ángulo de inclinación del pozo respecto al horizonte es igual a 30°, y el lugar de salida del cable del árbol se encuentra a 50 cm del cojinete B. La rotación del árbol se considera uniforme.

Respuesta: $M_{rot}=93$ kgfm; $X_A=-108$ kgf; $Z_A=102$ kgf; $X_B=-215$ kgf; $Z_B=165$ kgf.



Para el problema 8.36.

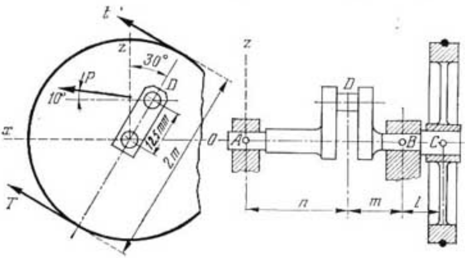
8.37. Un árbol de transmisión horizontal, que lleva dos poleas C y D de transmisión por correa, puede girar en los cojinetes A y B. Los radios de las poleas son $r_C=20$ cm, $r_D=25$ cm; las distancias entre las poleas y los cojinetes son $a=b=50$ cm; la distancia entre las poleas $c=100$ cm. Las tensiones T_1 y t_1 de las ramas de la correa montada sobre la polea C son horizontales; $T_1=2t_1=$ $=500$ kgf. Las tensiones T_2 y t_2 de las ramas de la correa montada sobre la polea D forman con la vertical un ángulo $\alpha=30°$; $T_2=2t_2$.



Para el problema 8.37.

Determinar las tensiones T_2 y t_2 en el estado de equilibrio y las reacciones de los cojinetes provocadas por las tensiones de las correas.

Respuesta: $T_2 = 400$ kgf; $t_2 = 200$ kgf; $X_A = -637{,}5$ kgf; $Z_A = 130$ kgf; $X_B = -412{,}5$ kgf; $Z_B = 390$ kgf.



Para el problema 8.38.

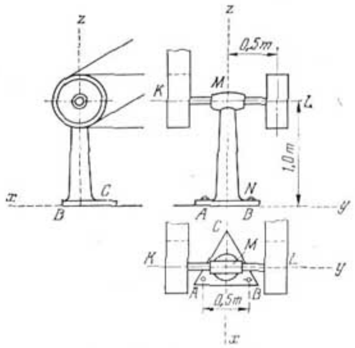
8.38. La presión de la biela de un motor, concentrada en el punto medio D del muñón del cigüeñal es igual a $P = 2000$ kgf y está dirigida bajo un ángulo de 10° al horizonte; el plano ODO_1 que pasa por los ejes del árbol OO_1 y del muñón D forma con la vertical un ángulo de 30°. El esfuerzo se transmite del volante al motor de arranque con ayuda de una cuerda, cuyas ramas son paralelas y están inclinadas hacia el horizonte bajo un ángulo de 30°. La acción de la fuerza P se equilibra por las tensiones T y t de las ramas de la cuerda y por las reacciones de los cojinetes A y B. El peso del volante es de 1300 kgf, su diámetro $d = 2$m, la suma de las tensiones de las ramas de la cuerda $T + t = 750$ kgf; las distancias indicadas en el dibujo son iguales a: del punto D al eje OO_1 $r = 125$ mm, $l = 250$ mm, $m = 300$ mm, $n = 450$ mm.

Determinar las reacciones de los cojinetes A y B y las tensiones t y T.

Respuesta: $X_A = -571$ kgf; $Z_A = -447$ kgf; $X_B = -2048$ kgf; $Z_B = 1025$ kgf; $T = 492$ kgf; $t = 258$ kgf.

8.39. Para transmitir la rotación de un árbol a otro paralelo, se han montado dos poleas idénticas auxiliares, acuñadas sobre el eje horizontal KL. El eje puede girar en el cojinete M fijado sobre la columna MN. La base triangular de ésta está sujeta al piso mediante dos pernos A y B y se apoya libremente en el punto C. El perno A pasa por un orificio redondo en la base, el perno B pasa por un orificio alargado que tiene la dirección por la línea AB. El eje de la columna pasa por el centro del triángulo ABC.

Determinar las reacciones en los puntos A, B y C, si la distancia entre el eje KL y el piso es igual a 1m, las distancias entre los centros de las poleas y el eje de la columna son iguales a 0,5 m y las tensiones de los cuatro ramales de las correas son



Para el problema 8.39.

iguales y equivalen a 60 kgf. Los ramales de la correa derecha son horizontales y los de la izquierda están inclinados respecto al horizonte bajo un ángulo de 30°. El peso de toda la instalación es de 300 kgf y está aplicado al punto situado en el eje de la columna. Están dadas las dimensiones: $AB = BC = CA = 50$ cm.

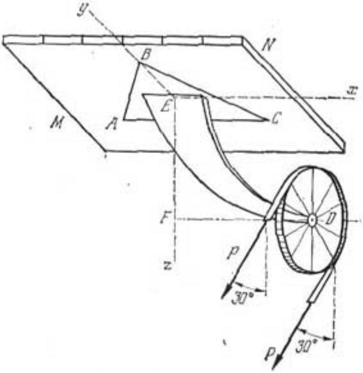
Respuesta: $X_A = 96$ kgf; $Y_A = 0$; $Z_A = -289$ kgf;
$X_B = 128$ kgf; $Z_B = -119$ kgf; $Z_C = 597$ kgf.

8.40. La suspensión de la polea de correa D está fijada a un techo horizontal liso MN por medio de dos cojinetes en los puntos A y C y en el punto B se apoya en el techo.

Estos puntos se encuentran en los vértices de un triángulo equilátero ABC de lado igual a 30 cm. La posición del centro de la polea de correa D se determina por la vertical $EF = 40$ cm, bajada del centro E del triángulo ABC, y la horizontal $FD = 50$ cm paralela al lado AC. El plano de la polea es perpendicular a la recta FD. La tensión P de cada ramal de la correa es igual a 120 kgf y está inclinada respecto a la vertical bajo un ángulo de 30°. Determinar las reacciones de los apoyos A, B y C, despreciando el peso de las piezas.

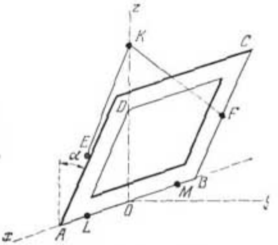
Respuesta: $Y_A = 140$ kgf; $Z_A = 185$ kgf; $Z_B = 115$ kgf;
$Y_C = -260$ kgf; $Z_C = -508$ kgf.

8.41. Un cuadro de forma del rectángulo $ABCD$ está suspendido en una pared vertical con ayuda de un cordón EKF colgado de un gancho K de tal modo que el borde AB es horizontal;

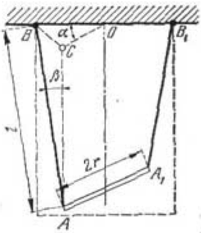


Para el problema 8.40.

E y F son los puntos medios de los lados AD y BC. El cuadro está inclinado respecto a la pared bajo un ángulo $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{3}{4}$ y se apoya en dos clavos L y M clavados en la pared; $AL = MB$.



Para el problema 8.41.



Para el problema 8.42.

Las dimensiones del cuadro son: $AB = 60$ cm, $AD = 75$ cm, el peso del cuadro es de 20 kgf y está aplicado al centro del rectángulo $ABCD$; la longitud del cordón es de 85 cm.

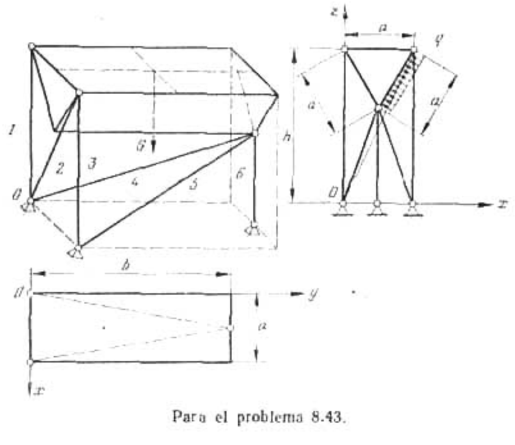
Determinar la tensión T del cordón y las presiones sobre los clavos L y M.

Respuesta: $T=8{,}5$ kgf; $Y_L=Y_M=-4{,}5$ kgf;
$Z_L=Z_M=-6$ kgf.

8.42. Un bifilar está compuesto de una barra homogénea AA_1 suspendida de dos hilos inextensibles de longitud l fijados en los puntos B y B_1. La longitud de la barra $AA_1=BB_1=2r$, su peso es P. La barra está virada alrededor del eje vertical un ángulo α. Determinar el momento M del par que hace falta aplicar a la barra para mantenerla en equilibrio, así como la tensión T de los hilos.

Respuesta: $M=\dfrac{Pr^2 \operatorname{sen}\alpha}{\sqrt{l^2-4r^2\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}}}$;

$$T=\frac{lP}{2\sqrt{l^2-4r^2\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}}}.$$



Para el problema 8.43.

8.43. Una tolva que tiene la forma de un prisma triangular está fijada a la base por medio de seis barras. Determinar los esfuerzos en las barras provocados por la fuerza de la gravedad de la tolva cargada $G=30$ tf y por la presión del viento sobre la cara delantera inclinada de intensidad $q=50$ kgf/m^2. Las dimensiones de la tolva son: $a=4$ m, $b=12$ m, $h=8$ m.

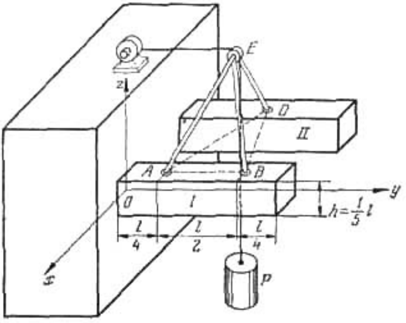
Respuesta: $S_1=-7,49$ tf; $S_2=-2,33$ tf; $S_3=-4,82$ tf; $S_4=-3,37$ tf; $S_5=3,37$ tf; $S_6=-14,4$ tf.

8.44. Un trípode *ABDE* de la forma de una pirámide regular *está articulado* en dos vigas de consola. Un cable que pasa sobre una polea fijada en el vértice *E* del trípode, levanta uniformemente con ayuda de un cabrestante una carga de peso *P*. Entre la polea y el cabrestante el cable es paralelo a la consola.

Determinar las reacciones del empotramiento de la primera consola despreciando su peso y el peso del trípode. La altura del trípode es igual a $\frac{l}{2}$.

Respuesta: $X_0=-\frac{\sqrt{3}}{9}P$; $Y_0=P$; $Z_0=\frac{2}{3}P$;

$M_x=-\frac{4}{15}Pl$; $M_y=-\frac{\sqrt{3}}{90}Pl$; $M_z=-\frac{\sqrt{3}}{36}Pl$.



Para el problema 8.44.

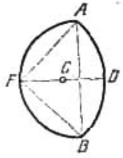
§ 9. CENTRO DE GRAVEDAD

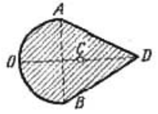
9.1. Determinar la posición del centro de gravedad *C* del contorno de barras *AFBD* compuesto del arco *ADB* de una cuarta parte de la circunferencia de radio $FD=R$ y del arco de una semicircunferencia *AFB* construido sobre la cuerda *AB* como diámetro. Las densidades lineales de las barras son iguales.

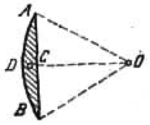
Respuesta: $CF=R(\sqrt{2}-1)+\frac{2R}{\pi}(3-2\sqrt{2})=0,524R$.

9.2. Determinar la posición del centro de gravedad C de una área limitada por la semicircunferencia AOB de radio R y dos rectas de igual longitud AD y DB; $OD=3R$.

Respuesta: $OC=\frac{3\pi+16}{3\pi+12}R=1,19R.$







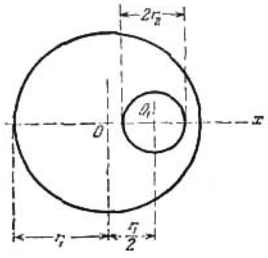
Para el problema 9.1. Para el problema 9.2. Para el problema 9.3.

9.3. Hallar el centro de gravedad C del área de un segmento circular ADB de radio $AO=30$ cm, si el ángulo $AOB=60°$.

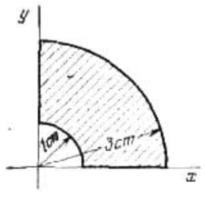
Respuesta: $OC=27,7$ cm.

9.4. Determinar la posición del centro de gravedad de un disco homogéneo que tiene un orificio circular. El radio del disco es igual a r_1, el radio del orificio es igual a r_2 y el centro del orificio se encuentra a la distancia $\frac{r_1}{2}$ del centro del disco.

Respuesta: $x_C=-\frac{r_1 r_2^2}{2(r_1^2-r_2^2)}$.



Para el problema 9.4.



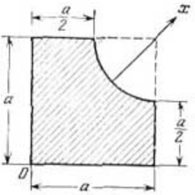
Para el problema 9.5.

9.5. Determinar las coordenadas del centro de gravedad de una *cuarta parte del anillo representado en el dibujo.*

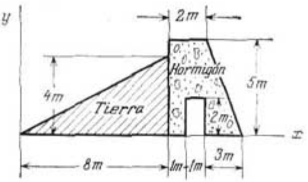
Respuesta: $x_C=y_C=1,38$ cm.

9.6. Hallar las coordenadas del centro de gravedad de la figura representada en el dibujo.

Respuesta: $x_C = 0{,}61a$.



Para el problema 9.6.

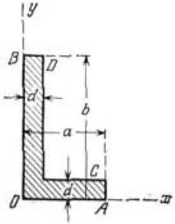


Para el problema 9.7.

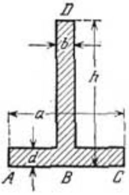
9.7. Hallar el centro de gravedad de la sección transversal de la presa representada en el dibujo, teniendo en cuenta que el peso específico del hormigón es igual a 2,4 tf/m³ y el del suelo equivale a 1,6 tf/m³.

Respuesta: $x_C = 8{,}19$ m; $y_C = 1{,}9$ m.

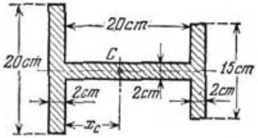
9.8. Hallar las coordenadas del centro de gravedad de la sección transversal de un angular inequilatero, la anchura de cuyas alas es $OA = a$, $OB = b$, y su espesor es $AC = BD = d$.



Para el problema 9.8.



Para el problema 9.9.



Para el problema 9.10.

Respuesta: $x = \dfrac{a^2 + bd - d^2}{2(a + b - d)}$;

$$y = \frac{b^2 + ad - d^2}{2(b + a - d)}.$$

9.9. Hallar la distancia entre el centro de gravedad de una sección en T $ABCD$ y su lado AC, si su altura $BD = h$, el ancho del ala $AC=a$, el grosor del ala es igual a d y el grosor de la pared equivale a b.

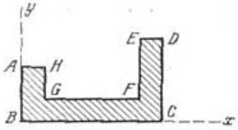
Respuesta: $\frac{ad^2+bh^2-bd^2}{2(ad+bh-bd)}$.

9.10. Hallar el centro de gravedad de un perfil en doble T, cuyas dimensiones están indicadas en el dibujo.

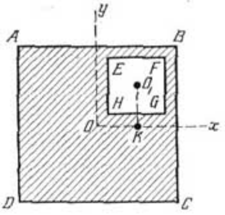
Respuesta: $x_C=9$ cm.

9.11. Hallar las coordenadas del centro de gravedad de una placa homogénea, representada en el dibujo, sabiendo que $AH=2$ cm, $HG=1{,}5$ cm, $AB=3$ cm, $BC=10$ cm, $EF=4$ cm, $ED=2$ cm.

Respuesta: $x=5\frac{10}{13}$ cm; $y=1\frac{10}{13}$ cm.



Para el problema 9.11.



Para el problema 9.12.

9.12. En una tabla cuadrada homogénea $ABCD$ de lado $AB=2$ m se ha hecho un orificio cuadrado $EFGH$, cuyos lados son respectivamente paralelos a los de la tabla $ABCD$ y son iguales a 0,7 m cada uno.

Determinar las coordenadas x e y del centro de gravedad de la parte restante de la tabla, sabiendo que $OK=O_1K=0{,}5$ m, donde O y O_1 son los centros de los cuadrados, OK y O_1K son respectivamente paralelos a los lados de los cuadrados.

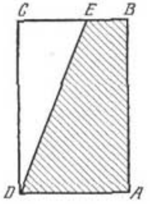
Respuesta: $x=y=-0{,}07$ m.

9.13. Trazar por el vértice D de un rectángulo homogéneo $ABCD$ una recta DE de tal modo que si se cuelga el trapecio $ABED$, cortado por la recta, por el vértice E, el lado AD equivalente a a sea horizontal.

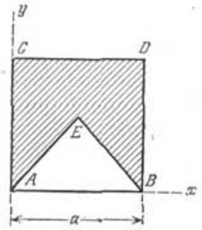
Respuesta: $BE=0{,}366\,a$.

9.14. Viene dado el cuadrado $ABDC$ de lado a. Hallar dentro de éste el punto E que sea el centro de gravedad del área que se obtiene, si se corta del cuadrado el triángulo isósceles AEB.

Respuesta: $x_E=\frac{a}{2}$; $y_E=0{,}634\,a$.



Para el problema 9.13.

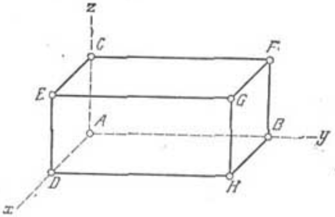


Para el problema 9.14.

9.15. Cuatro hombres portan una placa homogénea triangular. Dos de ellos la cogieron por los vértices y los otros dos, por los lados adyacentes al tercer vértice.

¿A cuál distancia del tercer vértice deben situarse ellos para ue cada uno de los cuatro soporte una cuarta parte del peso otal de la placa?

Respuesta: a la distancia igual a $\frac{1}{3}$ de la longitud del lado correspondiente.



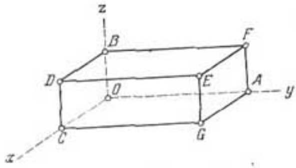
Para el problema 9.16.

9.16. Determinar las coordenadas del centro de gravedad del sistema de cargas situadas en los vértices de un paralelepípedo rectangular, cuyas aristas son respectivamente iguales a: $AB = 20$ cm, $AC = 10$ cm, $AD = 5$ cm. Los pesos de las cargas en los vértices A, B, C, D, E, F, G, H son respectivamente iguales a 1 kgf, 2 kgf, 3 kgf, 4 kgf, 5 kgf, 3 kgf, 4 kgf, 3 kgf.

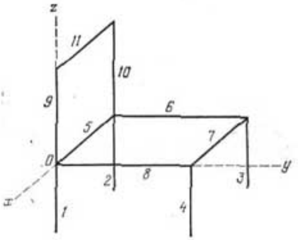
Respuesta: $x = 3{,}2$ cm; $y = 9{,}6$ cm, $z = 6$ cm.

9.17. Determinar las coordenadas del centro de gravedad del contorno de un paralelepípedo rectangular, cuyas aristas son varas homogéneas de longitud: $OA = 8$ dm, $OB = 4$ dm, $OC = 6$ dm. Los pesos de las varas son respectivamente iguales a: $OA = 250$ N $OB = OC = CD = 75$ N, $CG = 200$ N, $AF = 125$ N, $AG = GF = 50$ N, $BD = BF = DE = EF = 25$ N.

Respuesta: $x = 2{,}625$ dm; $y = 4$ dm; $z = 1{,}05$ dm.



Para el problema 9.17.

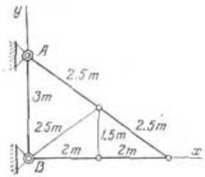


Para el problema 9.18.

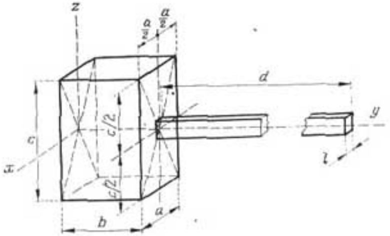
9.18. Hallar las coordenadas del centro de gravedad de un cuerpo que tiene la forma de una silla compuesto de varillas de igual longitud y peso. La longitud de una varilla es igual a 44 cm.

Respuesta: $x = -22$ cm; $y = 16$ cm; $z = 0$.

9.19. Hallar las coordenadas del centro de gravedad de una armadura plana compuesta de siete barras, cuyas longitudes están



Para el problema 9.19.



Para el problema 9.20.

indicadas en el dibujo, si el peso de 1 m de longitud es el mismo para todas las barras.

Respuesta: $x = 1{,}47$ m; $y = 0{,}94$ m.

9.20. Hallar las coordenadas del centro de gravedad de un martillo de madera compuesto de un paralelepípedo rectangular y de una manija de sección cuadrada. Viene dado: $a=10$ cm, $b=8$ cm, $c=18$ cm, $d=40$ cm, $l=3$ cm.

Respuesta: $x=0$; $y=8{,}8$ cm; $z=0$.

9.21. El casco de un crucero ligero pesa 1900 tf. En centro de gravedad del casco está situado por la vertical sobre la quilla a la altura $y_1=6$ m. Después de la botada del crucero al agua dentro del casco fueron instaladas las máquinas principales y las calderas. Las máquinas principales pesan 450 tf y la ordenada del centro de gravedad de éstas es $y_2=3$ m. El peso de las calderas es igual a 500 tf y la ordenada de su centro de gravedad es $y_3=4{,}6$ m.

Determinar la ordenada y_C del centro de gravedad común del casco, máquinas y calderas.

Respuesta: $y_C=5{,}28$ m.

9.22. En un buque de 4500 tf de desplazamiento, se ha trasladado una carga de 30 tf del compartimiento de proa al de popa a la distancia de 60 m.

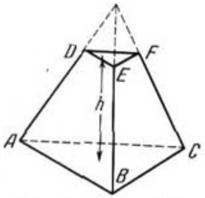
¿A qué distancia se traslada el centro de gravedad común del buque y la carga?

Respuesta: A 0,4 m.

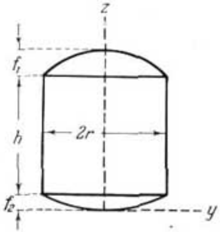
9.23. Viene dado: el área $ABC=a$, y el área $DEF=b$ de un tetraedro homogéneo $ABCDEF$ truncado paralelamente a la base. La distancia entre las áreas es igual a h.

Hallar la distancia z entre el centro de gravedad del tetraedro truncado y la base ABC.

Respuesta: $z=\frac{h}{4}\frac{a+2\sqrt{ab}+3b}{a+\sqrt{ab}+b}$,



Para el problema 9.23.



Para el problema 9.24.

9.24. El cuerpo de una mina anclada submarina tiene forma de cilindro con fondos esféricos convexos. El radio del cinturón cilíndrico es $r=0{,}4$ m, su altura es $h=2r$; las alturas de los segmentos esféricos son respectivamente iguales a: $f_1=0,5\ r$ y $f_2=0,2\ r$.

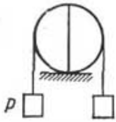
Hallar el centro de gravedad de la superficie del cuerpo de la mina.

Respuesta $x_C=y_C=0$; $z_C=1,267\ r=0,507$ m.

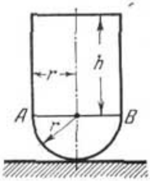
9.25. Dos mitades de un cilindro circular homogéneo están unidas por un hilo que pasa sobre el cilindro: en los extremos del hilo están suspendidas dos pesas de P kgf cada una. El peso del cilindro es Q kgf. El plano de contacto de las dos mitades del cilindro es vertical.

Determinar el menor valor del peso P para que las dos mitades del cilindro estén en reposo sobre el plano horizontal.

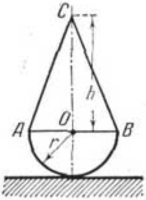
Respuesta: $P=\frac{2}{3}\frac{Q}{\pi}$ kgf.



Para el problema 9.25.



Para el problema 9.26.



Para el problema 9.27

9.26. Hallar la altura límite h del cilindro para la cual un cuerpo formado por este cilindro y una semiesfera de la misma densidad y del mismo radio r pierde su estabilidad en estado de equilibrio cuando se apoya con la superficie de la semiesfera sobre un plano horizontal liso.

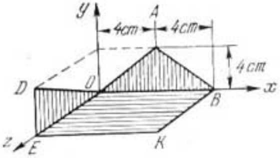
El centro de gravedad de todo el cuerpo debe coincidir con el centro de la semiesfera. La distancia entre el centro de gravedad del cilindro homogéneo y la base de éste es igual $\frac{3}{8}r$.

Respuesta: $h=\frac{r}{\sqrt{2}}$.

9.27. Hallar la altura límite h de un cono para la cual el cuerpo compuesto del cono y una semiesfera de la misma densidad y del mismo radio r pierde su estabilidad en la posición de equilibrio en las condiciones del problema anterior.

Respuesta: $h=r\sqrt{3}$.

9.28. Una hoja fina homogénea está doblada en forma de dos triángulos y un cuadrado, así como se muestra en el dibujo; el triángulo isósceles OAB está situado en el plano xy, el triángulo



Para el problema 9.28.

rectángulo ODE, en el plano yz (el vértice del ángulo recto es el punto E), y el cuadrado $OBKE$, en el plano horizontal.

Determinar las coordenadas del centro de gravedad de la hoja doblada.

Respuesta: $x_C = 3{,}33$ cm; $y_C = 0{,}444$ cm; $z_C = 3{,}55$ cm.

SEGUNDA PARTE
CINEMÁTICA

Capítulo III
CINEMÁTICA DEL PUNTO

§ 10. TRAYECTORIA Y ECUACIONES DEL MOVIMIENTO DEL PUNTO

10.1. De acuerdo con la ecuación dada del movimiento de un punto por una trayectoria arbitrariamente elegida construir, para iguales intervalos de tiempo, seis posiciones del punto, hallar la distancia s por la trayectoria desde la posición inicial hasta la posición final del punto y el camino σ recorrido por éste durante el intervalo de tiempo indicado (s y σ se expresan en cm, t, en segundos).

1) $s=5-4t+t^2$, $0\leqslant t\leqslant 5$.

Respuesta: $s=10$ cm, $\sigma=13$ cm.

2) $s=1+2t-t^2$, $0\leqslant t\leqslant 2{,}5$.

Respuesta: $s=-0{,}25$ cm, $\sigma=3{,}25$ cm.

3) $s=4\operatorname{sen} 10t$, $\frac{\pi}{20}\leqslant t\leqslant \frac{3\pi}{10}$.

Respuesta: $s=0$, $\sigma=20$ cm.

10.2. De acuerdo con las ecuaciones dadas del movimiento de un punto hallar las ecuaciones de su trayectoria en forma de coordenadas e indicar en el dibujo la dirección del movimiento.

1) $x=3t-5$, $y=4-2t$.

Respuesta: La semirecta $2x+3y-2=0$ con origen en el punto $x=-5$, $y=4$.

2) $x=2t$, $y=8t^2$.

Respuesta: La rama derecha de la parábola $y=2x^2$ con el punto inicial $x=0$, $y=0$.

3) $x=5\operatorname{sen} 10t$, $y=3\cos 10t$.

Respuesta: La elipse $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ con el punto de origen $x=0$, $y=3$.

4) $x=2-3\cos 5t$, $y=4\operatorname{sen} 5t-1$.

Respuesta: La elipse $\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y+1)^2}{16}=1$ con el punto de origen $x=-1$, $y=-1$.

5) $x=\frac{1}{2}(e^t+e^{-t})$, $y=\frac{1}{2}(e^t-e^{-t})$.

Respuesta: La parte superior de la rama derecha de la hipérbola $x^2-y^2=1$ con el punto de origen $x=1$, $y=0$.

10.3. Construir la trayectoria de un punto, cuyo radio vector varía de acuerdo con la ecuación ($\boldsymbol{r}_0$ y $\boldsymbol{e}$ son vectores constantes dados, $\boldsymbol{i}$ y $\boldsymbol{j}$ son vectores coordenados):

1) $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0=t\cdot\boldsymbol{e}$.

Respuesta: La semirecta que pasa por el punto de origen $M_0(\boldsymbol{r}_0)$ paralelamente al vector $\boldsymbol{e}$.

2) $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+\cos t\cdot\boldsymbol{e}$.

Respuesta: El segmento M_0M_1 de la recta que pasa por el punto $M(\boldsymbol{r}_0)$ paralelamente al vector $\boldsymbol{e}$. El punto de origen es $M_0(\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{e})$; el segundo punto límite es $M_1(\boldsymbol{r}_0-\boldsymbol{e})$. Cuando $t\to\infty$ el extremo del radio vector pasará una infinidad de veces por cada punto de la trayectoria.

3) $\boldsymbol{r}=a\cos\frac{\pi}{1+t^2}\boldsymbol{i}+b\operatorname{sen}\frac{\pi}{1+t^2}\boldsymbol{j}$.

Respuesta: El segmento de la parte superior de la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. El punto inicia el movimiento desde el vértice izquierdo de la elipse aproximándose uniformemente a su vértice derecho.

10.4. Con ayuda de las ecuaciones del movimiento de un punto dadas, hallar la ecuación de su trayectoria, así como indicar la ley del movimiento del punto por la trayectoria, calculando la distancia a partir de la posición inicial del punto.

1) $x=3t^2$, $y=4t^2$.

Respuesta: La semirecta $4x-3y=0$; $s=5t^2$.

2) $x=3\operatorname{sen} t$, $y=3\cos t$.

Respuesta: La circunferencia $x^2+y^2=9$; $s=3t$.

3) $x=a\cos^2 t$, $y=a\operatorname{sen}^2 t$.

Respuesta: El segmento de la recta $x+y-a=0$, siendo $0\leqslant x\leqslant a$; $s=a\sqrt{2}\operatorname{sen}^2 t$.

4) $x=5\cos 5t^2$, $y=5\,\text{sen}\,5t^2$.

Respuesta: La circunferencia $x^2+y^2=25$; $s=25t^2$.

10.5. Una grúa de puente se desplaza a lo largo del taller de acuerdo con la ecuación $x=t$; una carretilla rueda sobre esta grúa en dirección transversal de acuerdo con la ecuación $y=1{,}5t$ (x e y se expresan en metros, t, en segundos).

La cadena se reduce con la velocidad $v=0{,}5$ m/s.

Determinar la trayectoria del centro de gravedad de la carga; en la posición inicial el centro de gravedad de la carga se encontraba en el plano horizontal Oxy, el eje Oz está dirigido verticalmente hacia arriba.

Respuesta: La trayectoria es la recta: $y=1{,}5x$; $z=0{,}5x$.

10.6. El movimiento del punto que describe una figura de Lissajous está determinado por las ecuaciones $x=3\,\text{sen}\,t$, $y=2\cos 2t$ (t se expresa en segundos).

Hallar la ecuación de la trayectoria, dibujarla e indicar la dirección del movimiento del punto en diversos instantes de tiempo. Indicar también el instante t_1 inmediato al instante inicial del movimiento cuando la trayectoria interseca el eje Ox.

Respuesta: Una parte de la parábola $4x^2+9y=18$ a lo largo de la cual $|x|\leqslant 3$, $|y|\leqslant 2$; $t_1=\frac{\pi}{4}$ s.

10.7. Eligiendo correspondientemente los ejes de coordenadas, las ecuaciones del movimiento de un electrón en un campo magnético continuo se determinan por las igualdades

$$x=a\,\text{sen}\,kt,\quad y=a\cos kt,\quad z=vt,$$

donde a, k y v son constantes que dependen de la intensidad del campo magnético, de la masa, de la carga y de la velocidad del electrón.

Determinar la trayectoria del electrón y la ley de su movimiento por la trayectoria.

Respuesta: El electrón se desplaza por una línea helicoidal. El punto de origen es $x=0$, $y=a$, $z=0$; el paso de hélice es $h=\frac{2\pi}{k}v$. La ley del movimiento del electrón por la línea helicoidal es: $s=\sqrt{a^2k^2+v^2}\,t$.

10.8. Las oscilaciones harmónicas de un punto se determinan por la ley $x=a\,\text{sen}\,(kt+\varepsilon)$ donde $a>0$ es la amplitud de oscilaciones, $k>0$ es la frecuencia circular de oscilaciones y ε $(-\pi\leqslant\varepsilon\leqslant\pi)$ es la fase inicial.

Determinar el centro de oscilaciones a_0, la amplitud, la frecuencia circular, el período T, la frecuencia de oscilaciones f en hertzios y la fase inicial con ayuda de las ecuaciones de movimiento siguientes (x se expresa en centímetros, t, en segundos):

Ecuaciones de movimiento	Respuesta					
	a_0 (cm)	a (cm)	k (s^{-1})	T (s)	f (Hz)	ε
1. $x=-7\cos 12t$	0	7	12	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{6}{\pi}$	$-\frac{\pi}{2}$
2. $x=4\operatorname{sen}\frac{\pi t}{20}-3\cos\frac{\pi t}{20}$	0	5	$\frac{\pi}{20}$	40	0,025	$-\operatorname{arctg}\frac{3}{4}$
3. $x=2-4\operatorname{sen}140t$	2	4	140	$\frac{\pi}{70}$	$\frac{70}{\pi}$	π
4. $x=6\operatorname{sen}^2 18t$	3	3	36	$\frac{\pi}{18}$	$\frac{18}{\pi}$	$-\frac{\pi}{2}$
5. $x=1-4\cos^2\frac{\pi}{60}t$	-1	2	$\frac{\pi}{30}$	60	$\frac{1}{60}$	$\frac{\pi}{2}$

10.9. La carga levantada por un cable elástico oscila de acuerdo con la ecuación $x=a\operatorname{sen}\left(kt+\frac{3\pi}{2}\right)$, donde a se expresa en centímetros, k, en s^{-1}.

Determinar la amplitud y la frecuencia circular de oscilaciones de la carga, si el período de oscilaciones es igual a 0,4 s y en el momento inicial $x=-4$ cm. Construir también la curva de distancias.

Respuesta: $a=4$ cm; $k=5\pi s^{-1}$.

10.10. Determinar la trayectoria de un punto que realiza simultáneamente dos oscilaciones harmónicas de una misma frecuencia, pero de amplitudes y fases diferentes, si las oscilaciones se efectúan por dos ejes mutuamente perpendiculares:

$$x=a\operatorname{sen}(kt+\alpha),\quad y=b\operatorname{sen}(kt+\beta).$$

Respuesta: La elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{2xy}{ab}\cos(\alpha-\beta)=\operatorname{sen}^2(\alpha-\beta)$.

10.11. Hallar la ecuación de la trayectoria del movimiento de un punto, que se obtiene al adicionar oscilaciones mutuamente perpendiculares de diferente frecuencia:

1) $x=a\operatorname{sen}2\omega t$, $y=a\operatorname{sen}\omega t$;

2) $x=a\cos 2\omega t$, $y=a\cos\omega t$;

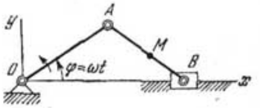
Respuesta: 1) $x^2a^2=4y^2(a^2-y^2)$;

2) $2y^2-ax-a^2=0$, aquí $|x|\leqslant a$, $|y|\leqslant a$.

10.12. La manivela OA gira con una velocidad angular constante $\omega=10s^{-1}$. La longitud $OA=AB=80$ cm.

Hallar la ecuación de movimiento y la trayectoria del punto medio M de la biela, así como la ecuación de movimiento de la corredera B, si en el instante inicial la corredera ocupaba la posición extrema derecha; los ejes de coordenadas están indicados en el dibujo.

Respuesta: 1) La trayectoria del punto M es la elipse $\frac{x^2}{120^2}+\frac{y^2}{40^2}=1$; 2) La ecuación de movimiento de la corredera B es $x=$ $=160\cos 10t$.



Para el problema 10.12.

10.13. La ecuación de movimiento de un punto de la llanta de una rueda que se mueve sin deslizamiento por un riel rectilíneo, tiene la forma

$$x=a\,(kt-\operatorname{sen} kt),\qquad y=a\,(1-\cos kt).$$

Determinar los instantes en los que el punto ocupa las posiciones inferior, media y superior de la trayectoria, considerando que el eje y está dirigido hacia arriba.

Respuesta: 1) $\frac{2\pi}{k}\lambda$ s; 2) $\left(\frac{\pi}{2k}+\frac{\pi}{k}\lambda\right)$ s; 3) $\left(\frac{\pi}{k}+\frac{2\pi}{k}\lambda\right)$ s, donde $\lambda=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$

10.14. Determinar la ecuación de movimiento y la trayectoria de un punto de la llanta de la rueda de radio $R=1$ m de un vehículo, si éste marcha por un camino rectilíneo con una velocidad constante de 20 m/s. Se considera que la rueda se desplaza sin deslizamiento; por origen de coordenadas se toma la posición inicial del punto en el camino que se considera como eje Ox.

Respuesta: La cicloide $x=20t-\operatorname{sen} 20t$; $y=1-\cos 20t$.

10.15. Vienen dadas las ecuaciones de movimiento de un proyectil:

$$x=v_0\cos\alpha\cdot t,\quad y=v_0\operatorname{sen}\alpha\cdot t-\frac{gt^2}{2},$$

donde v_0 es la velocidad inicial del proyectil, α es el ángulo formado por $\boldsymbol{v}_0$ con el eje horizontal x, y g es la aceleración de la fuerza de gravedad.

Determinar la trayectoria de movimiento del proyectil, la altura H, la distancia L y el tiempo T de vuelo del proyectil.

Respuesta: La trayectoria es la parábola $y=\operatorname{tg}\alpha\cdot x-\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}\,x^2$;

$$H=\frac{v_0^2}{2g}\operatorname{sen}^2\alpha;\quad L=\frac{v_0^2}{g}\operatorname{sen} 2\alpha;\quad T=2\frac{v_0}{g}\operatorname{sen}\alpha.$$

10.16. Para los datos del problema anterior, determinar el ángulo de proyección α para que la distancia de vuelo L sea máxima. Hallar la altura y el tiempo de vuelo correspondientes.

Respuesta: $\alpha = 45°$, $L_{\text{máx}} = \frac{v_0^2}{g}$; $H = \frac{v_0^2}{4g}$; $T = \sqrt{2}\frac{v_0}{g}$.

10.17. Para los datos del problema 10.15 determinar el ángulo de proyección α para que el proyectil haga impacto en el punto A con coordenadas x e y.

Respuesta: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_0^2 \pm \sqrt{v_0^4 - 2v_0^2 gy - g^2x^2}}{gx}$.

10.18. Determinar la parábola de seguridad (todos los puntos que se encuentran fuera de esta parábola no pueden ser alcanzados por el proyectil teniendo éste la velocidad inicial v_0 dada y cualquier ángulo de proyección α).

Respuesta:

$$y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g}{2v_0^2}x^2.$$

10.19. Un punto se desplaza por la línea helicoidal

$$x = a\cos kt,\ y = a \operatorname{sen} kt,\ z = \mathrm{v}t.$$

Hallar la ecuación de movimiento del punto en las coordenadas cilíndricas.

Respuesta: $r = a$, $\varphi = kt$, $z = \mathrm{v}t$.

10.20. Están dadas las ecuaciones de movimiento de un punto:

$$x = 2a\cos^2\frac{kt}{2};\quad y = a \operatorname{sen} kt,$$

donde a y k son constantes positivas. Determinar la trayectoria y la ley de movimiento del punto por la trayectoria, contando la distancia desde la posición inicial del punto.

Respuesta: La circunferencia $(x-a)^2 + y^2 = a^2$; $s = akt$.

10.21. Para los datos del problema anterior, determinar las ecuaciones de movimiento del punto en las coordenadas polares.

Respuesta: $r = 2a\cos\frac{kt}{2}$; $\varphi = \frac{kt}{2}$.

10.22. Valiéndose de las ecuaciones de movimiento del punto, dadas en las coordenadas cartesianas

$$x = R\cos^2\frac{kt}{2},\quad y = \frac{R}{2}\operatorname{sen} kt,\quad z = R\operatorname{sen}\frac{kt}{2}$$

hallar su trayectoria y las ecuaciones de movimiento en las coordenadas esféricas.

Respuesta: La línea de intersección de la esfera $x^2+y^2+z^2=R^2$ y el cilindro $\left(x-\frac{R}{2}\right)^2+y^2=\frac{R^2}{4}$. Las ecuaciones de movimiento en las coordenadas esféricas:

$$r=R, \quad \varphi=\frac{kt}{2}, \quad \theta=\frac{kt}{2}.$$

10.23. Un punto participa al mismo tiempo en dos oscilaciones amortiguadas, mutuamente perpendiculares, cuyas ecuaciones tienen la forma

$x=Ae^{-ht}\cos(kt+\varepsilon)$, $y=Ae^{-ht}\operatorname{sen}(kt+\varepsilon)$, donde $A>0$, $h>0$, $k>0$ y ε son ciertas constantes.

Determinar las ecuaciones de movimiento en las coordenadas polares y hallar la trayectoria del punto.

Respuesta: $r=Ae^{-ht}$, $\varphi=kt+\varepsilon$; la trayectoria es la espiral logarítmica $r=Ae^{-\frac{h}{k}(\varphi-\varepsilon)}$.

§ 11. VELOCIDAD DEL PUNTO

11.1. Un punto realiza oscilaciones harmónicas de acuerdo con la ley $x=a\operatorname{sen}kt$.

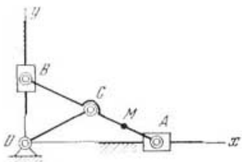
Determinar la amplitud a y la frecuencia circular k de oscilaciones, si cuando $x=x_1$, la velocidad $v=v_1$ y cuando $x=x_2$, la velocidad $v=v_2$.

Respuesta: $a=\sqrt{\frac{v_1^2x_2^2-v_2^2x_1^2}{v_1^2-v_2^2}}$;

$$k=\sqrt{\frac{v_1^2-v_2^2}{x_2^2-x_1^2}}.$$

11.2. La longitud de la regla de un elipsógrafo es $AB=40$ cm, la longitud de la manivela es $OC=20$ cm, $AC=CB$. La manivela gira uniformemente alrededor del eje O con una velocidad angular ω.

Hallar las ecuaciones de la trayectoria y el hodógrafo de la velocidad del punto M de la regla situada a la distancia $AM=10$cm del extremo A.



Para el problema 11.2.

Respuesta: $\frac{x^2}{900}+\frac{y^2}{100}=1$; $\frac{x_1^2}{900\omega^2}+\frac{y_1^2}{100\omega^2}=1$.

11.3. Un punto describe la figura de Lissajous de acuerdo con las ecuaciones

$$x = 2\cos t,\ y = 4\cos 2t.$$

(x e y se expresan en centímetros, t, en segundos).

Determinar la magnitud y la dirección de la velocidad del punto cuando éste se encuentra sobre el eje Oy.

Respuesta: 1) $v = 2$ cm/s; $\cos(v,\ x) = -1$

2) $v = 2$ cm/s; $\cos(v,\ x) = 1$.

11.4. Un punto se mueve de acuerdo con las ecuaciones

$$x = 4\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}t;\quad y = 3\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}t$$

(t, se expresa en segundos, x e y, en centímetros).

Determinar la magnitud y la dirección de la velocidad del punto cuando $t = 0$, $t = 1$ s; $t = 2$ s.

Respuesta: 1) $v_0 = \frac{5}{2}\pi$ cm/s; $\cos(v_0,\ x) = \frac{4}{5}$;

$\cos = (v_0,\ y) = \frac{3}{5}$.

2) $v_1 = 0$.

3) $v_2 = \frac{5}{2}\pi$ cm/s; $\cos(v_2,\ x) = -\frac{4}{5}$;

$\cos(v_2,\ y) = -\frac{3}{5}$.

11.5. La manivela OA gira con una velocidad angular constante ω. Hallar la velocidad de la parte media M de la biela de un mecanismo de biela y manivela y la velocidad de la corredera B en función del tiempo, si $OA = AB = a$ (véase el dibujo del problema 10.12).

Respuesta: 1) $v_M = \frac{a}{2}\omega\sqrt{8\operatorname{sen}^2\omega t + 1}$.

2) $v_B = 2a\omega\operatorname{sen}\omega t$.

11.6. El movimiento de un punto está dado por las ecuaciones

$$x = v_0 t\cos\alpha_0,\ y = v_0 t\operatorname{sen}\alpha - \frac{1}{2}gt^2,$$

el eje Ox es horizontal, el eje Oy está dirigido por la vertical hacia arriba, v_0, g y $\alpha_0 < \frac{\pi}{2}$ son magnitudes constantes.

Hallar: 1) la trayectoria del punto, 2) las coordenadas de su posición superior, 3) las proyecciones de la velocidad sobre los ejes coordenados en el instante cuando el punto está sobre el eje Ox.

Respuesta: 1) la parábola $y = x\,\mathrm{tg}\,\alpha_0 - \dfrac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha_0}x^2$.

$$2)\quad x = \frac{v_0^2}{2g}\,\mathrm{sen}\,2\alpha_0; \quad y = \frac{v_0^2}{2g}\,\mathrm{sen}^2\,\alpha_0.$$

$$3)\quad v_x = v_0\cos\alpha_0; \quad v_y = \pm v_0\,\mathrm{sen}\,\alpha_0,$$

el signo superior corresponde al instante inicial y el inferior al momento

$$t = \frac{2v_0\,\mathrm{sen}\,\alpha_0}{g}.$$

11.7. El movimiento de un punto está dado por las mismas ecuaciones que en el problema anterior; se sabe que $v_0 = 20$ m/s, $\alpha_0 = 60°$, $g = 9.81$ m/s².

Hallar con qué velocidad v_1 el segundo punto debe partir del origen de coordenadas en el instante $t = 0$ para que éste desplazándose uniformemente por el eje Ox se encuentre con el primer punto, y determinar la distancia x_1 hasta el lugar de encuentro.

Respuesta: $v_1 = 10$ m/s; $x_1 = 35{,}3$ m.

11.8. Determinar las alturas h_1, h_2, h_3 sobre la superficie del agua de tres puntos de una costa vertical, si se sabe que tres balas disparadas simultáneamente desde estos puntos con las velocidades de 50, 75 y 700 m/s cayeron simultáneamente al agua; la primera bala cayó a 100 m de distancia de la costa. Hay que tomar en cuenta solamente la aceleración de la fuerza de gravedad $g = 9{,}81$ m/s².

Hace falta determinar también la duración del vuelo T de las balas y sus velocidades v_1, v_2 y v_3 en el instante de su caída al agua.

Respuesta: $h_1 = h_2 = h_3 = 19{,}62$ m; $T = 2$s; $v_1 = 53{,}71$ m/s; $v_2 = 77{,}52$ m/s, $v_3 = 101{,}95$ m/s.

11.9. Con un cañón, cuyo eje forma con el horizonte un ángulo de 30°, se ha disparado un proyectil con la velocidad de 500 m/s.

Considerando que el proyectil tiene solamente la aceleración de la fuerza de gravedad $g = 9{,}81$ m/s² hallar el hodógrafo de la velocidad del proyectil y la velocidad del punto que traza el hodógrafo.

Respuesta: El hodógrafo es una recta vertical distante del origen de coordenadas 432 m: $v_1 = 9{,}81$ m/s².

11.10. Determinar las ecuaciones de movimiento y la trayectoria de un punto de la rueda de una locomotora eléctrica de radio $R = 1$m situado a la distancia $a = 0{,}5$m del eje, si la rueda se desplaza sin deslizamiento por un tramo de vía rectilíneo horizontal; la velocidad del eje de la rueda es $v = 10$ m/s. El eje Ox

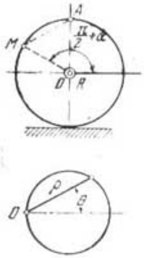
coincide con el riel, el eje Oy coincide con el radio del punto cuando éste ocupa su posición inicial inferior.

Determinar también la velocidad de este punto en los instantes cuando el diámetro de la rueda, sobre la cual está situado el punto, ocupe las posiciones horizontal y vertical.

Respuesta: La cicloide acortada

$x = 10t - 0{,}5 \operatorname{sen} 10t, \quad y = 1 - 0{,}5 \cos 10t.$

La velocidad: 1) 11,18 m/s; 2) 5 m/s; 15 m/s.



Para el problema 11.11.

11.11. La velocidad de una locomotora eléctrica es $v_0 = 72$ km/h; el radio de su rueda es $R = 1$m. La rueda se desplaza por el riel rectilíneo sin deslizamiento.

1) Determinar la magnitud y la dirección de la velocidad v del punto M de la llanta de la rueda en el momento cuando el radio del punto M forma con la dirección de v_0 un ángulo de $\frac{\pi}{2} + \alpha$.

2) Construir el hodógrafo de la velocidad del punto M y determinar la velocidad v_1 del punto que traza el hodógrafo.

Respuesta: 1) la velocidad $v = 40 \cos \frac{\alpha}{2}$ m/s y está dirigida por la recta MA.

2) La circunferencia $\rho = 2v_0 \cos \theta$, donde $\theta = \frac{\alpha}{2}$, de radio $r = v_0$ (véase el dibujo); $v_1 = \frac{v_0^2}{R} = 400$ m/s².

11.12. Determinar las ecuaciones de movimiento y la trayectoria de un punto M de la rueda de un vagón de radio $R = 0{,}5$ m situado a la distancia $a = 0{,}6$ m del eje y que en el instante inicial se encuentra a 0,1 m debajo del riel, si el vagón se desplaza por una vía rectilínea con la velocidad $v = 10$ m/s. Hallar también los momentos de tiempo cuando este punto pasará por sus posiciones inferior y superior y las proyecciones de su velocidad sobre los ejes Ox y Oy en los mismos momentos de tiempo. El eje Ox coincide con el riel, el eje Oy pasa por la posición inicial inferior del punto.

Respuesta: La cicloide alargada

$$x = 10t - 0{,}6 \operatorname{sen} 20t; \quad y = 0{,}5 - 0{,}6 \cos 20t;$$

cuando $t = \frac{\pi k}{10}$ s — la posición inferior del punto, $v_x = -2$ m/s, $v_y = 0$; cuando $t = \frac{\pi}{20}(1 + 2k)$ s — la posición superior del punto, $v_x = 22$ m/s, $v_y = 0$, donde $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$

11.13. Un punto participa al mismo tiempo en dos oscilaciones amortiguadas mutuamente perpendiculares de acuerdo con las ecuaciones

$$x = Ae^{-ht}\cos(kt+\varepsilon), \quad y = Ae^{-ht}\operatorname{sen}(kt+\varepsilon).$$

Determinar las proyecciones de la velocidad del punto sobre el eje de las coordenadas cartesianas y polares y hallar el módulo de la velocidad del punto.

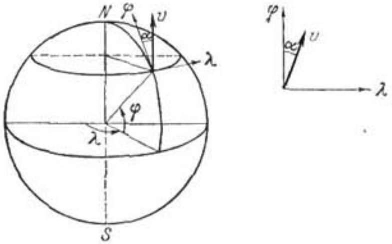
Respuesta: 1) $v_x = -Ae^{-ht}[h\cos(kt+\varepsilon)+k\operatorname{sen}(kt+\varepsilon)]$;

$v_y = -Ae^{-ht}[h\operatorname{sen}(kt+\varepsilon)-k\cos(kt+\varepsilon)]$;

2) $v_r = -Ahe^{-ht}$, $v_\varphi = Ake^{-ht}$;

3) $v = A\sqrt{h^2+k^2}\,e^{-ht} = \sqrt{h^2+k^2}\,r$.

11.14. ¿Qué curva describirá un barco que navega bajo un ángulo de rumbo α constante respecto al meridiano geográfico? Considerar el barco como un punto que se mueve por la superficie del globo terráqueo.



Para el problema 11.14.

Respuesta: $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi_0}{2}\right)e^{(\lambda-\lambda_0)\operatorname{cotg}\alpha}$, donde φ es la latitud y λ es la longitud de la posición actual del barco (esta curva se llama loxodromia).

Indicación. Utilizar las coordenadas esféricas r, λ y φ.

11.15. La ecuación de movimiento de un punto M en el sistema de coordenadas cilíndricas tiene la forma (véase el problema 10.19).

$$r = a, \quad \varphi = kt, \quad z = vt.$$

Hallar las proyecciones de la velocidad del punto M sobre los ejes del sistema de coordenadas cilíndricas, las ecuaciones de movimiento del punto M_1 que describe el hodógrafo de la velocidad y las proyecciones de la velocidad del punto M_1.

Respuesta: 1) $v_r=0,\ v_\varphi=ak,\ v_z=v$;

2) $r_1=ak,\ \varphi_1=\frac{\pi}{2}+kt,\ z_1=v$;

3) $v_{r_1}=0,\ v_{\varphi_1}=ak^2,\ v_{z_1}=0$.

11.16. El punto M se desplaza sobre una circunferencia de acuerdo con las ecuaciones

$$r=2a\cos\frac{kt}{2},\quad \varphi=\frac{kt}{2}$$

(r, φ son las coordenadas polares).

Hallar las proyecciones de la velocidad del punto M sobre el eje del sistema de coordenadas polares, las ecuaciones de movimiento del punto M_1 que describe el hodógrafo de la velocidad, y las proyecciones de la velocidad del punto M_1.

Respuesta: 1) $v_r=-ak\operatorname{sen}\frac{kt}{2},\ v_\varphi=ak\cos\frac{kt}{2}$;

2) $r_1=ak,\ \varphi_1=\frac{\pi}{2}+kt$;

3) $v_{r_1}=0,\ v_{\varphi_1}=ak^2$.

11.17. Un punto se desplaza por la línea de intersección de una esfera con un cilindro de acuerdo con las ecuaciones

$$r=R,\quad \varphi=\frac{kt}{2},\quad \theta=\frac{kt}{2}$$

(r, φ, θ son las coordenadas esféricas; véase el problema 10.22).

Hallar el módulo y las proyecciones de la velocidad del punto sobre el eje del sistema de coordenadas esféricas.

Respuesta: $v_r=0;\quad v_\varphi=\frac{Rk}{2}\cos\frac{kt}{2},\ v_\theta=\frac{Rk}{2}$;

$$v=\frac{Rk}{2}\sqrt{1+\cos^2\frac{kt}{2}}.$$

11.18. Hallar, en las coordenadas polares (r, φ), la ecuación de la curva que describe un barco, cuyo ángulo de marcación α respecto a un punto fijo es constante (el ángulo formado por la dirección de la velocidad con la dirección a este punto), si se conoce α y $r_{\varphi=0}=r_0$. El barco se considera como un punto que se desplaza en un plano y por el polo se toma un punto fijo arbitrario en este plano. Estudiar los casos particulares: $\alpha=0$, $\pi/2$ y π.

Respuesta: La espiral logarítmica $r=r_0e^{-\varphi\operatorname{cotg}\alpha}$. Para $\alpha=\frac{\pi}{2}$ es la circunferencia $r=r_0$; para $\alpha=0$ ó $\alpha=\pi$ es una recta.

§ 12. ACELERACIÓN DEL PUNTO

12.1. Un tren marcha con la velocidad de 72 km/h, durante el frenado él obtiene una retardación de 0,4 m/s^2.

Hallar el tiempo que pasa y la distancia recorrida por el tren desde el inicio del frenado hasta que llega a la estación.

Respuesta: 50 s; 500 m.

12.2. La maza de martinete al golpear el pilote se desplaza con éste durante 0,02 s hasta la parada; el pilote penetra en la tierra a 6 cm. Determinar la velocidad inicial de movimiento del pilote, considerando que este movimiento es uniformemente retardado.

Respuesta: 6 m/s.

12.3. Unas gotas de agua salen del orificio de un tubo vertical con el intervalo de 0,1 s y caen con una aceleración de 981 cm/s^2.

Determinar la distancia entre la primera y la segunda gota pasado 1 s después de salir la primera gota.

Respuesta: 93,2 cm.

12.4. El movimiento de un tranvía por una vía rectilínea durante el tiempo de aceleración se caracteriza por el hecho de que el camino recorrido por el tranvía es proporcional al cubo del tiempo; en el transcurso del primer minuto el tranvía pasó 90 m. Hallar la velocidad y la aceleración en los instantes $t=0$, y $t=5$ s. Construir las curvas de distancias, velocidades y aceleraciones.

Respuesta: $v_0=0$; $w_0=0$; $v_5=\frac{15}{8}$ m/min; $w_5=45$ m/min^2.

12.5. La velocidad de aterrizaje de un avión es igual a 400 km/h.

Determinar su retardación durante el aterrizaje en el camino $l=1200$ m; la retardación se considera uniforme.

Respuesta: $w=5,15$ m/s^2.

12.6. La maza de martinete cae desde una altura de 2,5 m; para levantarla a esta altura es necesario gastar un tiempo tres veces mayor que para la caída. ¿Cuántos golpes hace ésta en un minuto, si la aceleración de la caída libre de la maza de martinete es de 9,81 m/s^2?

Respuesta: 21 golpes.

12.7. Una corredera se desplaza por una guía rectilínea con una aceleración $w_x=-\pi^2 \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}t$ m/s^2.

Hallar la ecuación de movimiento de la corredera, si su velocidad inicial es $v_{0x}=2\pi$ m/s, y la posición inicial de la corredera coincide con su posición media tomada por origen de coordenadas.

Construir las curvas de distancias, de velocidades y de aceleraciones.

Respuesta: $x = 4 \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} t$ m.

12.8. Un tren, cuya velocidad inicial es de 54 km/h, recorrió 600 m durante los primeros 30 s.

Considerando que el movimiento del tren es uniformemente alternativo determinar su velocidad y aceleración al expirar los 30 s, si el tren marcha por un redondeo de radio $R = 1$ km.

Respuesta: $v = 25$ m/s; $w = 0{,}708$ m/s².

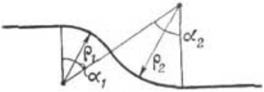
12.9. *Al partir de la estación la velocidad del tren crece uniformemente* y al cabo de 3 min alcanza el valor de 72 km/h; la vía es un arco de circunferencia de 800 m de radio. Determinar las aceleraciones tangencial, normal y total del tren 2 min después de su partida de la estación.

Respuesta: $w_t = \frac{1}{9}$ m/s²; $w_n = \frac{2}{9}$ m/s²; $w = 0{,}25$ m/s².

12.10. Un tren se desplaza con desaceleración uniforme por un arco de circunferencia de radio $R = 800$ y recorre el camino $s = 800$ m con una velocidad inicial $v_0 = 54$ km/h y una velocidad terminal $v = 18$ km/h.

Determinar la aceleración total del tren al comienzo y al final del arco, así como el tiempo de marcha por este arco.

Respuesta: $w_0 = 0{,}308$ m/s²; $w = 0{,}129$ m/s²; $T = 80$ s.



Para el problema *12.11.*

12.11. La curvatura de la vía de tranvía se compone de dos arcos de radios $\rho_1 = 300$ m y $\rho_2 = 400$ m. Los ángulos centrales son $\alpha_1 = \alpha_2 = 60°$.

Construir el gráfico de la aceleración normal del vagón que se mueve por la curvatura con la velocidad $v = 36$ km/h.

12.12. Un punto se desplaza por un arco de circunferencia de radio $R = 20$ cm. La ley de su movimiento por la trayectoria es: $s = 20 \operatorname{sen} \pi t$, ($t$ se expresa en segundos, s, en centímetros).

Hallar la magnitud y la dirección de la velocidad, las aceleraciones tangencial, normal y total del punto en el instante $t = 5$ s.

Construir también el gráfico de velocidad, y de las aceleraciones tangencial y normal.

Respuesta: La magnitud de la velocidad es igual a 20π cm/s y está dirigida en dirección contraria al sentido positivo de lectura del arco s; $w = w_t = 0$; $w_n = 20\pi^2$ cm/s^2.

12.13. La ley del movimiento rectilíneo de un punto es: $s = \frac{g}{a^2}(at + e^{-at})$, donde a y g son magnitudes constantes.

Hallar la velocidad inicial del punto y determinar su aceleración en función de la velocidad.

Respuesta: $v_0 = 0$; $w = g - av$.

12.14. El movimiento de un punto está dado por las ecuaciones.

$$x = 10 \cos 2\pi \frac{t}{5}; \quad y = 10 \operatorname{sen} 2\pi \frac{t}{5}$$

(x e y se expresan en centímetros, t, en segundos).

Hallar la trayectoria del punto, la magnitud y la dirección de la velocidad y la magnitud y la dirección de la aceleración.

Respuesta: La circunferencia de 10 cm de radio; la velocidad $v = 4\pi$ cm/s y está dirigida por la tangente en el sentido del paso del eje Qx al eje Oy girando 90°; la aceleración $w = 1{,}6\pi^2$ cm/s^2 y está dirigida hacia el centro.

12.15. Las ecuaciones de movimiento del gorrón de manivela de un motor Diésel durante el período de arranque son: $x = 75 \cos 4t^2$, $y = 75 \operatorname{sen} 4t^2$ (x e y se expresan en centímetros, t, en segundos).

Hallar la velocidad y las aceleraciones tangencial y normal del gorrón.

Respuesta: $v = 600t$ cm/s, $w_t = 600$ cm/s^2; $w_n = 4800t^2$ cm/s^2.

12.16. El movimiento de un punto está dado por las ecuaciones

$$x = a(e^{kt} + e^{-kt}), \quad y = a(e^{kt} - e^{-kt}),$$

donde a y k son magnitudes constantes dadas.

Hallar la ecuación de la trayectoria, la velocidad y la aceleración del punto en función del radio vector $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Respuesta: La hipérbola $x^2 - y^2 = 4a^2$; $v = kr$; $w = k^2 r$.

12.17. Hallar la aceleración y el radio de curvatura de la trayectoria de un punto en el instante $t = 1$s, si las ecuaciones del movimiento del punto tienen la forma

$$x = 4 \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} t, \quad y = 3 \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} t$$

(t se expresa en segundos, x e y, en centímetros).

Respuesta: $w = 1{,}25\pi^2$ cm/s^2, $\rho = \infty$.

12.18. Hallar el radio de curvatura para $x=y=0$ de la trayectoria de un punto que describe la figura de Lissajous de acuerdo con las ecuaciones

$$x=-a \operatorname{sen} 2\omega t, \quad y=-a \operatorname{sen} \omega t.$$

Respuesta: $\rho=\infty$.

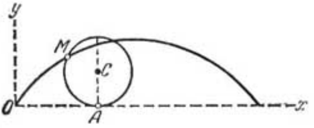
12.19. Hallar la magnitud y la dirección de la aceleración, así como el radio de curvatura de la trayectoria de un punto de una rueda que se desplaza sin deslizamiento por el eje horizontal Ox, si el punto describe una cicloide de acuerdo con las ecuaciones

$$x=20t-\operatorname{sen} 20t, \quad y=1-\cos 20t$$

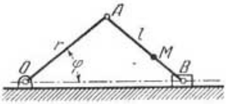
(t se expresa en segundos, x e y, en metros).

Determinar también el valor del radio de curvatura ρ para $t=0$.

Respuesta: La aceleración $w=400$ m/s^2 y está dirigida a lo largo de MC hacia el centro C del círculo en rodadura, $\rho=2MA$; $\rho_0=0$.



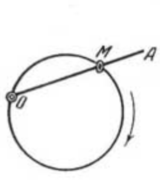
Para el problema 12.19.



Para el problema 12.20.

12.20. Hallar la trayectoria del punto M de la biela de un mecanismo de biela y manivela, si $r=l=60$ cm, $MB=\frac{1}{3}l$, $\varphi=4\pi t$ (t se expresa en segundos), y determinar la velocidad, la aceleración y el radio de curvatura de la trayectoria del punto en el instante cuando $\varphi=0$.

Respuesta: La elipse $\frac{x^2}{100^2}+\frac{y^2}{20^2}=1$; $v=80\pi$ cm/s;
$w=1600\pi^2$ cm/s^2; $\rho=4$ cm.



Para el problema 12.21.

12.21. Un anillo M está puesto en una circunferencia de alambre de 10 cm de radio, la varilla OA pasa por este anillo y gira uniformemente alrededor del punto O situado en la misma circunferencia; la velocidad angular de la varilla es tal que ésta gira 90° en 5 s.

Determinar la velocidad v y la aceleración w del anillo.

Respuesta: $v=2\pi$ cm/s; $w=0{,}4\pi^2$ cm/s^2.

12.22. El movimiento de un proyectil está dado por las ecuaciones

$$x = v_0 t \cos\alpha_0, \qquad y = v_0 t \operatorname{sen}\alpha_0 - \frac{1}{2} g t^2,$$

donde v_0 y α_0 son magnitudes constantes.

Hallar el radio de curvatura de la trayectoria para $t=0$ y en el instante de caída a la tierra.

Respuesta: $\rho = \dfrac{v_0^2}{g\cos\alpha_0}$.

12.23. Un proyectil se mueve en el plano vertical de acuerdo con las ecuaciones $x = 300t$, $y = 400t - 5t^2$ (t se expresa en segundos, x e y, en metros).

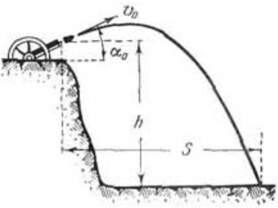
Hallar: 1) la velocidad y la aceleración en el instante inicial, 2) la altura y la distancia de tiro, 3) el radio de curvatura de la trayectoria en los puntos inicial y de altura máxima.

Respuesta: $v_0 = 500$ m/s; $w_0 = 10$ m/s²; $h = 8$ km; $s = 24$ km; $\rho_0 = 41{,}67$ km; $\rho = 9$ km.

12.24. Un cañón de artillería de costa, situado a la altura $h = 30$ m sobre el nivel del mar, hizo un disparo bajo un ángulo $\alpha_0 = 45°$ respecto al horizonte con una velocidad inicial del proyectil $v_0 = 1000$ m/s.

Determinar a qué distancia del cañón el proyectil dará en el blanco situado al nivel del mar. La resistencia del aire se desprecia.

Respuesta: 102 km.



Para el problema 12.24.

12.25. Hallar las aceleraciones tangencial y normal de un punto, cuyo movimiento se expresa por las ecuaciones

$$x = \alpha t, \quad y = \beta t - \frac{gt^2}{2}.$$

Respuesta: $w_t = -\dfrac{g(\beta - gt)}{v}$; $w_n = \dfrac{g\alpha}{v}$, donde v es la velocidad del punto.

12.26. Un punto se desplaza por una línea helicoidal de acuerdo con las ecuaciones $x = 2\cos 4t$, $y = 2\operatorname{sen} 4t$, $z = 2t$; por unidad de longitud se toma el metro. Determinar el radio de curvatura ρ de la trayectoria.

Respuesta: $\rho = 2\frac{1}{8}$ m.

12.27. El movimiento de un punto está dado en las coordenadas polares por las ecuaciones $r = ae^{kt}$ y $\varphi = kt$, donde a y k son magnitudes constantes dadas. Hallar la ecuación de la trayectoria, la velocidad, la aceleración y el radio de curvatura de la trayectoria del punto en función de su radio vector r.

Respuesta: $r = ae^{\varphi}$ es una espiral logarítmica; $v = kr\sqrt{2}$; $w = 2k^2r$; $\rho = r\sqrt{2}$.

12.28. El movimiento de un punto está dado por las ecuaciones

$$x = 2t; \quad y = t^2.$$

(t se expresa en segundos, x e y, en centímetros).

Determinar las magnitudes y direcciones de la velocidad y la aceleración del punto en el instante $t = 1$ s.

Respuesta: $v = 2\sqrt{2}$ cm/s; $w = 2$ cm/s²; $(\widehat{v, x}) = 45°$, $(\widehat{\boldsymbol{w}, x}) = 90°$.

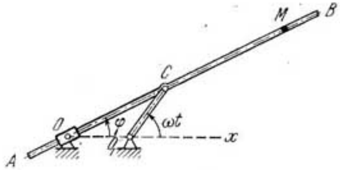
12.29. Construir la trayectoria de un punto, el hodógrafo de la velocidad y determinar el radio de curvatura de la trayectoria en el momento inicial, si el punto se mueve de acuerdo con las ecuaciones

$$x = 4t, \quad y = t^3$$

(t se expresa en segundos, x e y, en centímetros).

Respuesta: La ecuación de la trayectoria es $y = \frac{x^3}{64}$ (una parábola cúbica); el hodógrafo de la velocidad es una recta paralela al eje v_y; $\rho_0 = \infty$ (el punto inicial de la trayectoria es el punto de inflexión).

12.30. La manivela O_1C de longitud $a/2$ gira con una velocidad angular constante w alrededor del eje O_1. La manivela está articulada en el punto C con una regla AB que pasa siempre por un



Para el problema 12.30.

acoplamiento oscilante O situado a la distancia $a/2$ del eje de rotación O_1.

Tomando el punto O como polo, hallar, en las coordenadas polares, las ecuaciones de movimiento del punto M de la regla, situado a la distancia a de la articulación C, la trayectoria, la velocidad y la aceleración de éste (en el instante inicial el ángulo $\varphi=\angle COO_1=0$).

Respuesta: 1) $r=a\left(1+\cos\frac{\omega t}{2}\right)$; $\varphi=\frac{\omega t}{2}$;

2) $r=a(1+\cos\varphi)$ es una cardioide;

3) $v=a\omega\cos\frac{\omega t}{4}$;

4) $w=\frac{a\omega^2}{4}\sqrt{5+4\cos\frac{\omega t}{2}}$.

12.31. Para los datos del problema anterior determinar la posición del punto M, su velocidad y aceleración en el instante inicial y en el instante cuando la manivela hace una vuelta completa.

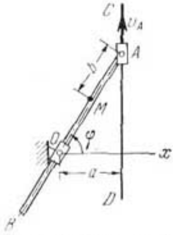
Respuesta: 1) Cuando $t=0$ el punto M se halla en la posición extrema derecha a la distancia de $2\boldsymbol{a}$ del punto O; la velocidad v es perpendicular al eje x e igual a $a\omega$; la aceleración está dirigida hacia el punto O y es igual a $\frac{3}{4}a\omega^2$.

2) Después de una vuelta completa de la manivela, el punto M pasará por el punto O, $v=0$, la aceleración está dirigida hacia el punto O_1 y es igual a $\frac{a\omega^2}{4}$.

12.32. Para los datos del problema 12.31 determinar el radio de curvatura de la cardioide para $r=2a$, $\varphi=0$.

Respuesta: $\rho_0=\frac{4}{3}a$.

12.33. El extremo A de la barra AB se desplaza por la guía rectilínea CD con una velocidad constante v_A. El vástago AB pasa siempre por el acoplamiento oscilante O situado a la distancia $\boldsymbol{a}$ de la guía CD. Tomando el punto O como polo hallar, en las coordenadas polares $\boldsymbol{r}$, φ, la velocidad y la aceleración del punto M de la barra situado a la distancia $\boldsymbol{b}$ de la corredera A.



Para el problema 12.33.

Respuesta: $v=\frac{v_A}{a}\sqrt{a^2\operatorname{sen}^2\varphi+r^2\cos^4\varphi}$;

$$w=\frac{v_A^2}{a}\cos^2\varphi\left(1-\frac{r}{a}\cos\varphi\right)\sqrt{\cos^2\varphi+4\operatorname{sen}^2\varphi}.$$

12.34. El punto M se desplaza por una línea helicoidal. Las ecuaciones de movimiento de este punto, en el sistema de coordenadas cilíndricas, son

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a},\quad \varphi=kt,\ z=vt.$$

Hallar las proyecciones de la aceleración del punto sobre los ejes del sistema de coordenadas cilíndricas, las componentes tangencial y normal de la aceleración y el radio de curvatura de la línea helicoidal.

Respuesta: 1) $w_r = -ak^2, \quad w_\varphi = 0, \quad w_z = 0;$

2) $w_\tau = 0, \quad w_n = ak^2;$

3) $\rho = \frac{a^2k^2 + v^2}{ak^2}$.

12.35. El punto M se desplaza por la línea de intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ con el cilindro $\left(x - \frac{R}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{R^2}{4}$. Las ecuaciones de movimiento del punto en las coordenadas esféricas son (véase el problema 10.22):

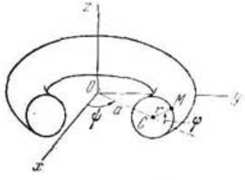
$$r = R, \quad \varphi = \frac{kt}{2}, \quad \theta = \frac{kt}{2}.$$

Hallar las proyecciones y el módulo de la aceleración del punto en las coordenadas esféricas.

Respuesta: $w_r = -\frac{Rk^2}{4}(1 + \cos^2\theta), \quad w_\varphi = -\frac{Rk^2}{2}\operatorname{sen}\theta,$

$$w_\theta = -\frac{Rk^2}{4}\operatorname{sen}\theta\cos\theta; \quad w = \frac{Rk^2}{4}\sqrt{4 + \operatorname{sen}^2\theta}.$$

12.36. Un barco navega bajo un ángulo de rumbo α constante respecto al meridiano geográfico, describiendo una loxodromia (véase el problema 11.14). Considerando que el módulo de la velocidad v del barco no varía, determinar las proyecciones de la aceleración del barco sobre el eje de coordenadas esféricas r, λ y φ (λ es la longitud, φ es la latitud del lugar de navegación), el módulo de la aceleración y el radio de curvatura de la loxodromia.



Para el problema 12.37.

Respuesta: $w_r = -\frac{v^2}{R}$,

$$w_\lambda = -\frac{v^2}{R}\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\operatorname{tg}\varphi,$$

$$w_\varphi = -\frac{v^2}{R}\operatorname{sen}^2\alpha\operatorname{tg}\varphi;$$

$$w = \frac{v^2}{R}\sqrt{1 + \operatorname{sen}^2\alpha\operatorname{tg}^2\varphi};$$

$$\rho = \frac{R}{\sqrt{1 + \operatorname{sen}^2\alpha\operatorname{tg}^2\varphi}},$$

donde R es el radio de la Tierra.

12.37. Expresar las coordenadas cartesianas de un punto en función de las coordenadas toroidales $r = CM$, ψ y φ y determinar los coeficientes de Lamé.

Respuesta: 1) $x=(a+r\cos\varphi)\cos\psi$,
$y=(a+r\cos\varphi)\operatorname{sen}\psi$,
$z=r\operatorname{sen}\varphi$;
2) $H_r=1,\ H_\psi=a+r\cos\varphi,\ H_\varphi=r$.

12.38. El movimiento de un punto está dado en el sistema de *coordenadas toroidales* r, ψ y φ.

Hallar las proyecciones de la velocidad y de la aceleración del punto sobre los ejes de este sistema de referencia.

Respuesta: 1) $v_r=\dot r, v_\psi=(a+r\cos\varphi)\dot\psi,\ v_\varphi=r\dot\varphi$;
2) $w_r=\ddot r-(a+r\cos\varphi)\cos\varphi\dot\psi^2-r\dot\varphi^2$,
$w_\psi=(a+r\cos\varphi)\ddot\psi+2\cos\varphi\dot r\dot\psi-2r\operatorname{sen}\varphi\dot\psi\dot\varphi$,
$w_\varphi=r\ddot\varphi+2\dot r\dot\varphi+(a+r\cos\varphi)\operatorname{sen}\varphi\dot\psi^2$.

12.39. Un punto se desplaza por una línea helicoidal enrollada sobre un toro de acuerdo con la ley

$$r=R=\text{const},\quad \psi=\omega t,\quad \varphi=kt.$$

Determinar las proyecciones de la velocidad y de la aceleración del punto en el sistema de coordenadas toroidales ($\omega=\text{const}$, $k=\text{const}$).

Respuesta: $v_r=0,\quad v_\psi=(a+R\cos\varphi)\,\omega,\ v_\varphi=Rk$;
$w_r=-[(a+R\cos\varphi)\cos\varphi\omega^2+Rk^2]$,
$w_\psi=-2R\omega k\operatorname{sen}\varphi$,
$w_\varphi=\omega^2(a+R\cos\varphi)\operatorname{sen}\varphi$.

Capítulo IV

MOVIMIENTOS ELEMENTALES DEL CUERPO SÓLIDO

§ 13. ROTACIÓN DEL CUERPO SÓLIDO ALREDEDOR DE UN EJE FIJO

13.1. Determinar la velocidad angular: 1) de la aguja segundera de un reloj, 2) de la aguja minutera de un reloj, 3) del horario de un reloj, 4) de la rotación de la Tierra alrededor de su eje, considerando que la Tierra efectúa una vuelta en 24 horas, 5) de la turbina de vapor de Laval que hace 15 000 r. p. m.

Respuesta: 1) $\omega=\frac{\pi}{30}\,s^{-1}=0{,}1047\,s^{-1}$;

2) $\omega=\frac{\pi}{1800}\,s^{-1}=0{,}001745\,s^{-1}$;

3) $\omega=\frac{\pi}{21\,600}\,s^{-1}=0{,}0001455\,s^{-1}$;

4) $\omega=\frac{\pi}{43\,200}\,s^{-1}=0{,}0000727\,s^{-1}$;

5) $\omega=1571\,s^{-1}$.

13.2. Escribir la ecuación del movimiento rotativo del disco de una turbina de vapor durante su puesta en marcha, si se sabe que el ángulo de giro es proporcional al cubo del tiempo y que para $t=3s$ la velocidad angular del disco corresponde a $n=810$ r. p. m.

Respuesta: $\varphi=\pi t^3$ rad.

13.3. El péndulo de un regulador centrífugo, gira alrededor del eje vertical AB, hace 120 r. p. m. En el instante inicial el ángulo de giro era igual a $\frac{\pi}{6}$ rad.

Hallar el ángulo de giro y el desplazamiento angular del péndulo en el transcurso del tiempo igual a $t=1/2$ s.

Respuesta: $\varphi=\frac{13}{6}\pi$ rad, $\Delta\varphi=2\pi$ rad.

13.4. Un cuerpo que se encuentra en estado de reposo comienza a girar con aceleración uniforme haciendo 3600 revoluciones durante los primeros dos minutos. Determinar la aceleración angular.

Respuesta: $\varepsilon=\pi\,s^{-2}$

13.5. Un árbol que se encuentra en estado de reposo comienza a girar con aceleración uniforme: durante los primeros 5 s él hace 12,5 revoluciones.

Determinar su velocidad angular al pasar estos 5 s.

Respuesta: $\omega = 5$ *r. p. s.* $= 10\pi\ s^{-1}$.

13.6. Un volante que se encuentra en estado de reposo comienza a girar con aceleración uniforme; a los 10 minutos, después del inicio del movimiento, su velocidad angular es de 120 r. p. m.

Calcular el número de revoluciones hechas por el volante durante estos 10 minutos.

Respuesta: 600 revoluciones.

13.7. La velocidad angular inicial de una rueda, cuyo eje es fijo, es $2\pi\,s^{-1}$; después de efectuar 10 revoluciones ésta se paró a causa del rozamiento en los cojinetes.

Determinar la aceleración angular ε de la rueda considerándola constante.

Respuesta: $\varepsilon = 0,1\pi\,s^{-2}$, la rotación es retardada.

13.8. Desde el instante de desconexión del motor la hélice del avión, que gira con una velocidad angular correspondiente a $n = 1200$ r. p. m. ha efectuado hasta pararse 80 revoluciones.

Calcular el tiempo que ha pasado desde el instante de desconexion del motor hasta su parada, si la rotación de la hélice se considera uniformemente retardada.

Respuesta: 8 s.

13.9. Un cuerpo efectúa un movimiento oscilatorio alrededor de un eje fijo, el ángulo de giro se expresa por la ecuación

$$\varphi = 20^\circ \operatorname{sen} \psi,$$

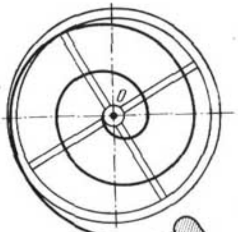
donde el ángulo ψ se expresa en grados angulares por la relación $\psi = (2t)^\circ$, t significa segundos.

Determinar la velocidad angular del cuerpo en el instante $t = 0$, los instantes inmediatos son t_1 y t_2, en los cuales varía el sentido de rotación y el período de oscilación T.

Respuesta: $\omega = \frac{1}{810}\pi^2\,s^{-1}$; $t_1 = 45$ s; $t_2 = 135$ s; $T = 180$s.

13.10. El balancin de reloj efectúa oscilaciones harmónicas de torsión de período $T = 1/2$ s. El mayor ángulo de desviación de la posición de equilibrio de un punto de la llanta del balancin es $\alpha = \pi/2$ rad.

Hallar la velocidad y la aceleración angulares del balancin den-



Para el problema 13.10.

tro de 2 s después del instante cuando el balancín pasa por la posición de equilibrio.

Respuesta: $\omega = 2\pi^2\ s^{-1}$; $\varepsilon = 0$.

13.11. Un péndulo oscila en el plano vertical alrededor de un eje fijo horizontal O. Al salir en el instante inicial del estado de equilibrio el péndulo alcanza la desviación máxima $\alpha = \pi/16$ rad al cabo de 2/3 s.

1) Escribir la ley de oscilaciones del péndulo suponiendo que éstas son harmónicas.

2) ¿En cuál posición el péndulo tendrá la mayor velocidad angular y cuál será su valor?

Respuesta: 1) $\varphi = \frac{\pi}{16} \operatorname{sen} \frac{3}{4} \pi t$ rad.

2) en la posición vertical; $\omega_{\text{máx}} = \frac{3}{64} \pi^2 s^{-1}$.

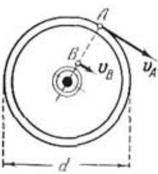
13.12. Determinar la velocidad v y la aceleración w de un punto de la superficie de la Tierra en Leningrado, tomando en consideración solamente la rotación de la Tierra alrededor de su eje; la latitud de Leningrado es 60°; el radio de la Tierra es igual a 6370 km.

Respuesta: $v = 0{,}232$ km/s; $w = 0{,}0169$ m/s².

13.13. Un volante de 0,5 m de radio gira uniformemente alrededor de su eje; la velocidad de los puntos de su llanta es igual a 2 m/s.

Calcular el número de revoluciones que hace el volante en un minuto.

Respuesta: $n = 38{,}2$ r. p. m.



Para el problema 13.14.

13.14. El punto A de la llanta de una polea se desplaza con la velocidad de 50 cm/s, y cierto punto B situado sobre el mismo radio que el punto A se desplaza con la velocidad de 10 cm/s; la distancia $AB = 20$ cm.

Determinar la velocidad angular ω y el diámetro de la polea.

Respuesta: $\omega = 2 s^{-1}$; $d = 50$ cm.

13.15. Un volante de radio $R = 2$ m, que se encuentra en estado de reposo, comienza a girar con una aceleración uniforme, dentro de $t = 10$ s la velocidad lineal de los puntos de la llanta del volante es $v = 100$ m/s.

Hallar la velocidad, las aceleraciones normal y tangencial de los puntos de la llanta del volante para el instante $t = 15$ s.

Respuesta: $v = 150$ m/s; $w_n = 11\,250$ m/s²; $w_\tau = 10$ m/s².

13.16. Hallar la velocidad horizontal v que debe ser comunicada a un cuerpo situado sobre el ecuador para que éste desplazándose uniformemente alrededor de la Tierra a lo largo del ecuador en unas guías especiales tenga la aceleración de la caída libre. Determinar también el tiempo T al expirar el cual el cuerpo regresará a su posición inicial. El radio de la Tierra $R=637\cdot10^6$ cm, la aceleración de la fuerza de gravedad en el ecuador $g=978$ cm/s^2.

Respuesta: $v=7{,}9$ km/s; $T=1{,}4$ h.

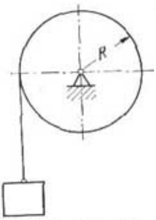
13.17. La aceleración total de un punto de la llanta de un volante forma con el radio un ángulo de 60°. La aceleración tangencial de este punto en el instante dado $w_\tau=10\sqrt{3}$ m/s^2.

Hallar la aceleración normal del punto situado a la distancia $r=0{,}5$ m del eje de rotación. El radio del volante es $R=1$ m.

Respuesta: $w_n=5$ m/s^2.

13.18. Un árbol de radio $R=10$ cm gira bajo la acción de la pesa P suspendida a éste mediante un hilo. El movimiento de la pesa está dado por la ecuación $x=100t^2$, donde x es la distancia entre la pesa y el punto de salida del hilo de la superficie del árbol, expresada en centímetros, t es el tiempo en segundos.

Determinar la velocidad angular ω y la aceleración angular ε del árbol, así como la aceleración total w del punto sobre la superficie del árbol en el instante t.



Para el problema 13.18.

Respuesta: $\omega=20t$ s^{-1}; $\varepsilon=20$ s^{-2};

$$w=200\sqrt{1+400t^4}\ \text{cm/s}^2.$$

13.19. Resolver el problema anterior en la forma general, expresando la aceleración de los puntos de la llanta de la rueda en función de la distancia x recorrida por la pesa, del radio de la rueda R y de la aceleración de la pesa $\ddot{x}=w_0=\text{const}$.

Respuesta: $w=w_0\sqrt{1+4\frac{x^2}{R^2}}$.

13.20. La aguja de un galvanómetro de 3 cm de longitud oscila alrededor de un eje fijo de acuerdo con la ley

$$\varphi=\varphi_0 \operatorname{sen} kt.$$

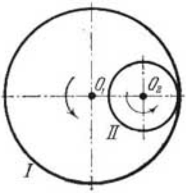
Determinar la aceleración del extremo de la aguja en sus posiciones media y extremas, así como los instantes en los que la velocidad angular ω y la aceleración angular ε se hacen iguales a cero, si el periodo de oscilaciones es igual a 0,4 s y la amplitud angular $\varphi_0=\frac{\pi}{30}$.

Respuesta: 1) En la posición media de la aguja $w=8,1$ cm/s².
2) En las posiciones extremas de la aguja $w=$ $=77,5$ cm/s².
3) $\omega=0$ cuando $t=(0,1+0,2n)$ s $(n=0, 1, 2, \ldots)$.
4) $\varepsilon=0$ cuando $t=0,2n$ s $(n=0, 1, 2, \ldots)$.

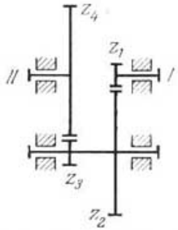
§ 14. TRANSFORMACIÓN DE LOS MOVIMIENTOS ELEMENTALES DEL CUERPO SÓLIDO

14.1. Una rueda dentada I de diámetro $D_1=360$ mm efectúa $n_1=100$ r. p. m. ¿Cuál deberá ser el diámetro de la rueda dentada II que se encuentra en engrane interior con la rueda I y que efectúa $n_2=300$ r. p. m.?

Respuesta: $D_2=120$ mm.



Para el problema 14.1.



Para el problema 14.2.

14.2. Un reductor de velocidad que sirve para retardar la rotación del árbol I y que transmite el movimiento de rotación al árbol II consta de cuatro ruedas dentadas con el número de dientes correspondiente: $z_1=10$, $z_2=60$, $z_3=12$, $z_4=70$.

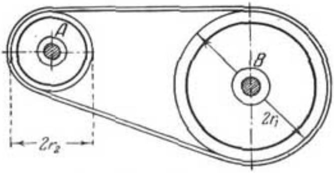
Determinar la relación de transmisión del mecanismo.

Respuesta: $i_{I\,II}=\frac{\omega_I}{\omega_{II}}=35$.

14.3. Un torno con la polea A se pone en movimiento a partir del estado de reposo por medio de una correa sin fin de la polea B del motor eléctrico; los radios de las poleas son: $r_1=75$ cm, $r_2=30$ cm; después de arrancar el motor eléctrico su aceleración angular es igual a $0,4\pi$ s⁻².

Despreciando el deslizamiento de la correa por las poleas, determinar dentro de qué tiempo el torno hará 300 r. p. m.

Respuesta: 10 s.

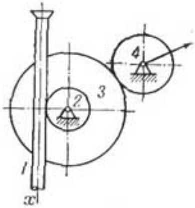


Para el problema 14.3.

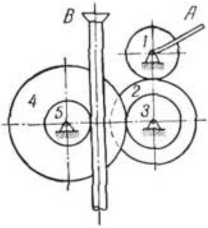
14.4. En el mecanismo del indicador de aguja el movimiento de la cremallera de la clavija de medición *1* se transmite al piñón *2*, sobre cuyo eje está fijada la rueda dentada *3* engranada con el piñón *4* que lleva la aguja.

Determinar la velocidad angular de la aguja, si el movimiento de la clavija está dado por la ecuación $x = a \operatorname{sen} kt$ y los radios de las ruedas dentadas son respectivamente iguales a r_2, r_3, r_4.

Respuesta: $\omega_4 = \frac{r_3}{r_2 r_4} ak \cos kt$.



Para el problema 14.4.



Para el problema 14.5.

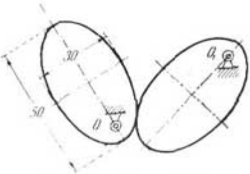
14.5. En el mecanismo de un gato el movimiento de rotación de la palanca *A* se transmite a los piñones *1, 2, 3, 4* y *5* que transmiten el movimiento a la cremallera *B* del gato.

Determinar la velocidad de la cremallera, si la palanca *A* efectúa 30 r. p. m. Los números de dientes de los piñones son: $z_1 = 6$, $z_2 = 24$, $z_3 = 8$, $z_4 = 32$; el radio del quinto piñón es $r_5 = 4$ cm.

Respuesta: $v_B = 7{,}8$ mm/s.

14.6. Para obtener las velocidades angulares que varían periódicamente se utiliza un engranaje de dos ruedas dentadas elípticas e idénticas, una de las cuales gira uniformemente alrededor del eje O haciendo 270 r. p. m, y la otra se pone por la primera en movimiento de rotación alrededor del eje O_1. Los ejes O y O_1 son paralelos y pasan por los focos de las elipses. La distancia OO_1 es igual a 50 cm; los semiejes de las elipses son de 25 y 15 cm.

Determinar las velocidades angulares máxima y mínima de la rueda O_1.



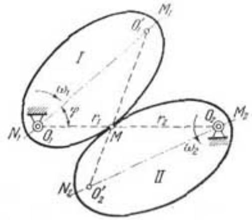
Para el problema 14.6.

Respuesta: $\omega_{\text{mín}} = \pi\ s^{-1}$; $\omega_{\text{máx}} = 81\pi\ s^{-1}$.

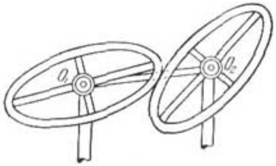
14.7. Deducir la ley de transmisión del movimiento de rotación de un par de ruedas dentadas elípticas con semiejes a y b. La velocidad angular de la rueda I es $\omega_1 = \text{const}$. La distancia entre los ejes $O_1O_2 = 2a$; φ es el ángulo formado por la recta que une los ejes de rotación con el eje mayor de la rueda elíptica I. Los ejes pasan por los focos de las elipses.

Respuesta: $\omega_2 = \dfrac{a^2 - c^2}{a^2 - 2ac\cos\varphi + c^2}\,\omega_1$,

donde c es la excentricidad lineal de las elipses: $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.



Para el problema 14.7.



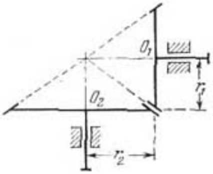
Para el problema 14.8.

14.8. Hallar las velocidades angulares máxima y mínima de la rueda ovalada O_2 embragada con la rueda O_1 que efectúa 240 r. p. m. Los ejes de rotación de las ruedas están situados en los centros de los óvalos. La distancia entre los ejes es de 50 cm. Los semiejes de los óvalos son iguales a 40 y 10 cm.

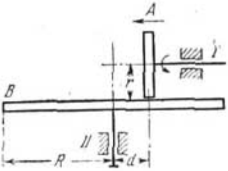
Respuesta: $\omega_{\text{mín}} = 2\pi\ s^{-1}$; $\omega_{\text{máx}} = 32\pi\ s^{-1}$.

14.9. Determinar el intervalo de tiempo necesario para que la rueda dentada cónica O_1 de radio $r_1 = 10$ cm tenga la velocidad angular correspondiente a $n_1 = 4320$ r. p. m, si ella se pone en movimiento de rotación a partir del estado de reposo por una rueda idéntica O_2 de radio $r_2 = 15$ cm que gira con una aceleración angular uniforme de $2r/s^2$.

Respuesta: $t = 24$ s.



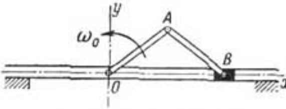
Para el problema 14.9.



Para el problema 14.10.

14.10. El árbol motor I de una transmisión por fricción hace 600 r.p.m. y durante su movimiento se desplaza (la dirección está indicada por la flecha) de tal modo que la distancia d varía de acuerdo con la ley $d = (10 - 0{,}5t)$ cm (t se expresa en segundos).

Determinar: 1) la aceleración angular del árbol II en función de la distancia d; 2) la aceleración de un punto sobre la llanta de la rueda B en el instante cuando $d = r$; los radios de las ruedas de fricción son: $r = 5$ cm, $R = 15$ cm.

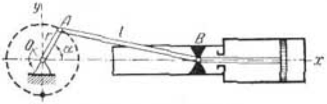


Para el problema 14.11.

Respuesta: 1) $\varepsilon = \frac{50\pi}{d^2}\ s^{-2}$; 2) $\omega = 30\pi\sqrt{40\,000\pi^2 + 1}$ cm/s².

14.11. Hallar la ley de movimiento, la velocidad y la aceleración de la corredera B del mecanismo de biela y manivela OAB, si las longitudes de la biela y de la manivela son idénticas: $AB = OA = r$, la rotación de la manivela alrededor del eje O es uniforme: $\omega = \omega_0$. El eje x está dirigido a lo largo de la guía de la corredera. Las distancias se calculan a partir del centro O de la manivela.

Respuesta: $x = 2r\cos\omega_0 t$;
$v_x = -2r\omega_0 \operatorname{sen}\omega_0 t$;
$w_x = -\omega_0^2 x$.



Para el problema 14.12.

14.12. Determinar la ley de movimiento, la velocidad y la aceleración de la corredera de un mecanismo de biela y manivela, si la manivela OA gira con una velocidad angular constante ω_0. La longitud de la manivela es $OA=r$, la longitud de la biela es $AB=l$.

El eje Ox está dirigido por la guía de la corredera. El origen de referencia es el centro O de la manivela. La relación $\frac{r}{l}=\lambda$ es muy pequeña ($\lambda \ll 1$); $\alpha=\omega_0 t$.

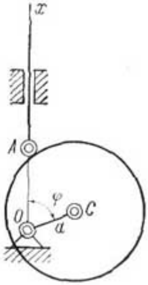
Respuesta: $x=r\left(\cos\omega_0 t+\frac{\lambda}{4}\cos 2\omega_0 t\right)+l-\frac{\lambda}{4}r;$

$$v_x=-r\omega_0\left(\operatorname{sen}\omega_0 t+\frac{\lambda}{2}\operatorname{sen}2\omega_0 t\right);$$

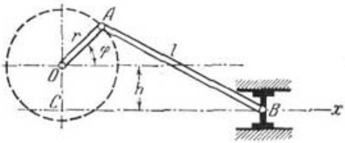
$$w_x=-r\omega_0^2(\cos\omega_0 t+\lambda\cos 2\omega_0 t).$$

14.13. Hallar la ley de movimiento del vástago, si el diámetro del excéntrico es $d=2r$, la distancia entre el eje de rotación O y el eje C del disco es $OC=a$; el eje Ox está dirigido por el vástago, el origen de referencia está sobre el eje de rotación, $\frac{a}{r}=\lambda$.

Respuesta: $x=a\cos\varphi+r\sqrt{1-\lambda^2\operatorname{sen}^2\varphi}$.



Para el problema 14.13.



Para el problema 14.14.

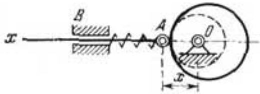
14.14. Escribir la ecuación de movimiento del pistón de un mecanismo de biela y manivela excéntrico. La distancia entre el eje de rotación de la manivela y la regla de guía es h, la longitud de la manivela es r, la de la biela es l; el eje Ox está dirigido por la guía de la corredera. Las distancias se cuentan a partir de la posición extrema derecha de la corredera; $\frac{l}{r}=\lambda$, $\frac{h}{r}=k$, $\varphi=\omega_0 t$.

Respuesta: $x=r\left[\sqrt{(\lambda+1)^2-k^2}-\sqrt{\lambda^2-(\operatorname{sen}\varphi+k)^2}-\cos\varphi\right]$.

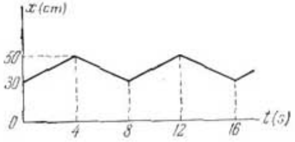
14.15. Una leva girando uniformemente alrededor del eje O engendra movimiento de avance y retroceso uniforme del vástago AB. La leva efectúa una vuelta completa en 8 s; las ecuaciones de movimiento del vástago durante este tiempo son

$$x=\begin{cases} 30+5t & 0\leqslant t\leqslant 4. \\ 30+5(8-t), & 4\leqslant t\leqslant 8. \end{cases}$$

(x se expresa en centímetros, t, en segundos).



Para el problema 14.15.



Para la respuesta del problema 14.15.

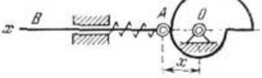
Determinar las ecuaciones del perfil de la leva y construir el gráfico de movimiento del vástago.

Respuesta: $r=\begin{cases} 30+\frac{20}{\pi}\varphi, & 0\leqslant\varphi\leqslant\pi, \\ 30+\frac{20}{\pi}(2\pi-\varphi), & \pi\leqslant\varphi\leqslant 2\pi. \end{cases}$

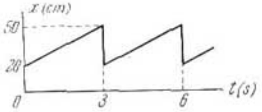
14.16. Hallar la ley de movimiento y construir el gráfico de movimiento de avance y retroceso del vástago AB, si se conoce la ecuación del perfil de la leva

$$r=\left(20+\frac{15}{\pi}\varphi\right)\text{cm}, \quad 0<\varphi<2\pi.$$

La leva gira uniformemente y hace 20 r.p.m.



Para el problema 14.16.



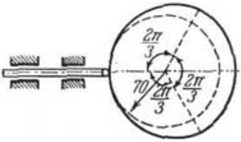
Para la respuesta del problema 14.16

Respuesta: $x=20+10t$ durante una vuelta de la leva (3 s), luego el movimiento se repite periódicamente.

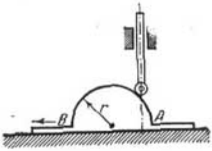
14.17. Escribir la ecuación del perfil de una leva, para la cual el recorrido total $h=20$ cm del vástago corresponda a una tercera parte de una vuelta, los desplazamientos del vástago en este intervalo de tiempo deben ser proporcionales al ángulo de rotación. En el siguiente tercio de vuelta el vástago debe permanecer inmóvil y, por último, durante el último tercio de vuelta el vástago debe efectuar la carrera de retroceso en las mismas condiciones que en el primer tercio de vuelta. La distancia mínima del extremo del vástago al centro de la leva es de 70 cm. La leva efectúa 20 r.p.m.

Respuesta: El perfil de la leva correspondiente al primer tercio de vuelta es la espiral de Arquímedes

$$r=\left(\frac{30}{\pi}\varphi+70\right)\text{ cm}.$$



Para el problema 14.17.



Para el problema 14.18.

Al segundo tercio de vuelta le corresponde una circunferencia de radio $r=90$ cm. Para el último tercio de vuelta el perfil de la leva es también una espiral de Arquímedes:

$$r=\left(90-\frac{30}{\pi}\varphi\right)\text{ cm}.$$

14.18. Determinar la longitud a la que desciende el vástago que se apoya con su extremo en el perfil circular de radio $r=30$ cm de una leva; esta última efectúa movimiento de avance y retroceso con una velocidad $v=5$ cm/s. El tiempo de descenso del vástago es $t=3$ s. En el instante inicial el vástago se encuentra en su posición extrema superior.

Respuesta: $h=4{,}020$ cm.

14.19. Hallar la aceleración de una leva circular que se encuentra en movimiento de avance, si durante su movimiento uniformemente acelerado sin velocidad inicial el vástago ha descendido en el curso de 4 s a la distancia $h=4$ cm de la posición extrema superior. El radio del perfil circular de la leva es $r=10$ cm (véase el dibujo para el problema 14.18).

Respuesta: $w=1$ cm/s^2.

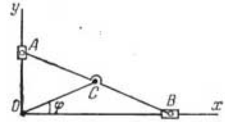
MOVIMIENTO PLANO DEL CUERPO SÓLIDO

§ 15. ECUACIÓN DE MOVIMIENTO DE UNA FIGURA PLANA

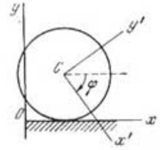
15.1 La regla de un elipsógrafo se pone en movimiento por la biela OC, que gira con una velocidad angular constante ω_0 alrededor del eje O.

Tomando la corredera B como polo, escribir la ecuación de movimiento plano de la regla del elipsógrafo, si $OC = BC = AC = r$. En el momento inicial la regla AB estaba situada horizontalmente.

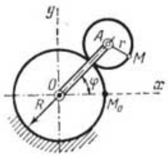
Respuesta: $x_B = 2r \cdot \cos \omega_0 t$; $y_B = 0$; $\varphi = -\omega_0 t$.



Para el problema 15.1.



Para el problema 15.2.



Para el problema 15.3.

15.2. Una rueda de radio R, se mueve sin resbalamiento por una recta horizontal. La velocidad del centro C de la rueda es constante e igual a v.

Determinar la ecuación de movimiento de la rueda, si en el momento inicial el eje y', rígidamente acoplado con la rueda, se encontraba en posición vertical y el eje inmóvil y pasaba en este instante por el centro de la rueda C. Como polo se debe tomar el punto C.

Respuesta: $x_C = vt$; $y_C = -R$; $\varphi = \frac{v}{R}t$.

15.3. Un engranaje de radio r, que se desplaza por otro inmóvil de radio R, se pone en movimiento por una biela OA, que gira con aceleración angular uniforme ε_0 alrededor del eje O del engranaje inmóvil.

Escribir la ecuación de movimiento del engranaje móvil, tomando como polo de éste el centro A, si siendo $t = 0$, la velocidad angular de la biela es $\omega_0 = 0$ y el ángulo de giro inicial es $\varphi_0 = 0$.

Respuesta: $x_A=(R+r)\cos\frac{\varepsilon_0 t^2}{2}$;

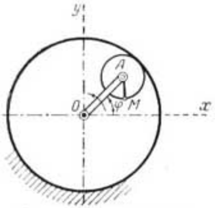
$$y_A=(R+r)\operatorname{sen}\frac{\varepsilon_0 t^2}{2};$$

$$\varphi_1=\left(\frac{R}{r}+1\right)\frac{\varepsilon_0 t^2}{2},$$

donde φ_1 es el ángulo de giro del engranaje móvil.

15.4. Un piñón de radio r, que gira dentro de otro inmóvil de radio R, se pone en movimiento por una biela OA, que gira uniformemente alrededor del eje O del piñón inmóvil con una velocidad angular ω_0. Siendo $t=0$, el ángulo $\varphi_0=0$.

Plantear la ecuación de movimiénto del piñón móvil, tomando su centro A omo polo.



Para el problema 15.4.

Respuesta: $x_A=(R-r)\cos\omega_0 t$;

$$y_A=(R-r)\operatorname{sen}\omega_0 t;$$

$$\varphi_1=-\left(\frac{R}{r}-1\right)\omega_0 t,$$

donde φ_1 es el ángulo de giro del piñón móvil; el signo menos indica que el piñón gira en sentido contrario a la biela.

15.5. Hallar la ecuación de movimiento de la biela de una máquina de vapor, si la manivela gira uniformemente; como polo se toma el punto A sobre el eje del gorrón de manivela; r es la longitud de la manivela, l es el largo de la biela, ω_0 es la velocidad angular de la manivela. Si $t=0$, el ángulo $\alpha=0$ (véase el dibujo del problema 14.12).

Respuesta: $x=r\cos\omega_0 t$; $\quad y=r\operatorname{sen}\omega_0 t$;

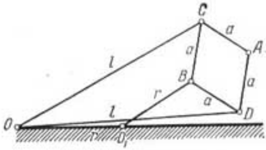
$$\varphi=-\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{r}{l}\operatorname{sen}\omega_0 t\right).$$

15.6. El inversor o mecanismo de Posele—Lipkin es un mecanismo articulado que consta de un rombo $ADBC$ con lados de longitud a; los vértices C y D se desplazan por una misma circunferencia con ayuda de las barras OC y OD de longitud l, y el vértice B, por otra circunferencia con ayuda de la barra O_1B de longitud $r=OO_1$.

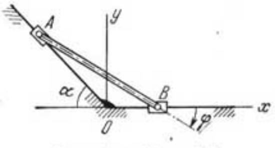
Hallar la trayectoria del vértice A.

Respuesta: Una recta perpendicular a OO_1 y que se encuentra a la distancia $x=\frac{l^2-a^2}{2r}$ del punto O.

15.7. Los embragues A y B que se deslizan a lo largo de guías rectilíneas están unidos por medio de la barra AB de longitud l. El embrague A se mueve con una velocidad constante v_A.



Para el problema 15.6.



Para el problema 15.7.

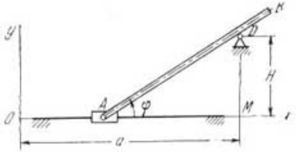
Escribir la ecuación de movimiento de la barra AB suponiendo que el embrague A inició su movimiento desde el punto O. Como polo se toma el punto A. El ángulo BOA es igual a $\pi-\alpha$.

Respuesta: $x_A=-v_At\cos\alpha;\quad y_A=v_At\operatorname{sen}\alpha;$

$$\varphi=-\operatorname{arcsen}\frac{v_At}{l}\operatorname{sen}\alpha.$$

15.8. El extremo A de la barra AB se desliza por una guía rectilínea con una velocidad constante v; durante su movimiento la barra se apoya en la clavija D.

Escribir las ecuaciones de movimiento de la barra y de su extremo B. La longitud de la barra es igual a l, la altura desde la guía rectilínea hasta la clavija D es igual a H. En el momento inicial del movimiento el extremo A de la barra coincidía con el punto O, que es el origen del sistema fijo de coordenadas; $OM=a$. Como polo se toma el punto A.



Para el problema 15.8.

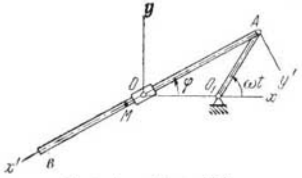
Respuesta: $x_A=vt;\quad y_A=0;\quad \varphi=\operatorname{arctg}\frac{H}{a-vt};$

$$x_B=vt+l\frac{a-vt}{\sqrt{H^2+(a-vt)^2}};$$

$$y_B=\frac{Hl}{\sqrt{H^2+(a-vt)^2}}.$$

15.9. La manivela O_1A de longitud $a/2$ gira con una velocidad angular constante ω. A la manivela en el punto A está articulada la barra AB, que pasa todo el tiempo a través del embrague oscilante O; $OO_1=a/2$.

Hallar la ecuación de movimiento de la barra AB y la trayectoria (en coordenadas polares y cartesianas) del punto M que se encuentra en la barra a la distancia a de la articulación A. Como polo se toma el punto A.



Para el problema 15.9.

Respuesta: 1) $x_A=\frac{a}{2}(1+\cos\omega t)$, $\quad y_A=\frac{a}{2}\operatorname{sen}\omega t$, $\quad \varphi=\frac{\omega t}{2}$;

2) la cardioide $\rho=a(\cos\varphi-1)$,

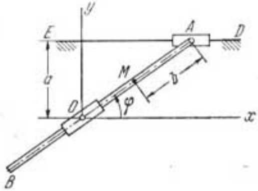
$x^2+y^2=a\left(x-\sqrt{x^2+y^2}\right)$.

15.10. Un concoidrógrafo consta de una regla AB articulada en el punto A con una corredera que se desliza por la guía rectilínea ED que pasa a través de un embrague que oscila alrededor del punto fijo O. La corredera realiza movimiento oscilatorio de acuerdo con la ecuación $x=c\operatorname{sen}\omega t$, donde c y ω son números constantes dados (los ejes de coordenadas se muestran en el dibujo).

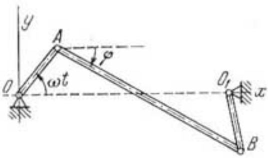
Hallar las ecuaciones de movimiento de la regla AB y las ecuaciones en las coordenadas polares y cartesianas de la curva que describe el punto M de la regla AB, si $AM=b$.

Respuesta: 1) $x_A=c\operatorname{sen}\omega t$; $\quad y_A=a$; $\quad \varphi=\operatorname{arctg}\frac{a}{c\operatorname{sen}\omega t}$;

2) $\rho=\frac{a}{\operatorname{sen}\varphi}-b$, $\quad (x_M^2+y_M^2)(y_M-a)^2=b^2y_M^2$.



Para el problema 15.10.



Para el problema 15.11.

15.11. La manivela OA del antiparalelogramo $OABO_1$, puesto sobre el eslabón mayor OO_1, gira uniformemente con una velocidad angular ω. Tomando el punto A como polo, plantear las ecuaciones de movimiento del eslabón AB, si $OA = O_1B = a$ y $OO_1 = AB = b\ (a < b)$; en el momento inicial la manivela OA estaba dirigida por OO_1.

Respuesta: $x_A = a\cos\omega t$; $y_A = a\,\mathrm{sen}\,\omega t$;

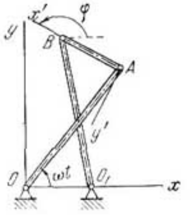
$$\varphi = -2\,\mathrm{arctg}\,\frac{a\,\mathrm{sen}\,\omega t}{b - a\cos\omega t}.$$

15.12. La manivela OA del antiparalelogramo $OABO_1$, *puesto sobre el eslabón* pequeño OO_1 gira uniformemente con una velocidad angular ω.

Tomando el punto A como polo, plantear las ecuaciones de movimiento del eslabón AB, si $OA = O_1B = a$ y $OO_1 = AB = b\ (a > b)$; en el momento inicial la manivela OA estaba dirigida por OO_1.

Respuesta: $x_A = a\cos\omega t$; $y_A = a\,\mathrm{sen}\,\omega t$;

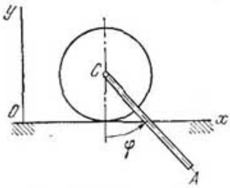
$$\varphi = 2\,\mathrm{arccotg}\,\frac{\cos\omega t - b/a}{\mathrm{sen}\,\omega t}.$$



Para el problema 15.12.

§ 16. VELOCIDADES DE LOS PUNTOS DEL CUERPO SÓLIDO EN EL MOVIMIENTO PLANO. CENTRO INSTANTÁNEO DE VELOCIDADES

16.1. Orientando el eje perpendicularmente a la velocidad de cualquier punto de una figura plana, demostrar, que las proyecciones sobre este eje de las velocidades de todos los puntos situados en él son iguales a cero.



Para el problema 16.2.

16.2. El centro C de una rueda que se desplaza por un riel rectilíneo horizontal se mueve de acuerdo con la ley $x_C = 2t^2$ cm. La barra AC de longitud $l = 12$ cm oscila alrededor del eje horizontal C, perpendicular al plano del dibujo, según la ecuación $\varphi = \frac{\pi}{6}\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{2}t$ rad.

Determinar la velocidad del extremo A de la barra AC en el instante $t = 0$.

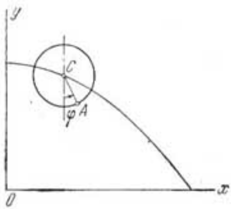
Respuesta: La velocidad está dirigida por la horizontal hacia la derecha y su módulo es igual a 9,86 cm/s.

16.3. Conservando los datos del problema anterior, determinar la velocidad del extremo A de la barra AC en el instante $t = 1$ s.

Respuesta: La velocidad está dirigida por la horizontal hacia la derecha y su módulo es igual a 4 cm/s.

16.4. Al moverse un disco de radio $r=20\,\text{cm}$ en el plano vertical xy su centro C se mueve de acuerdo con las ecuaciones $x_C=10t$ m, $y_C=(100-4{,}9t^2)$ m. Al mismo tiempo el disco gira alrededor del eje horizontal C, que es perpendicular al plano del disco, con una velocidad angular constante $\omega=\pi/2\,\text{s}^{-1}$.

Determinar en el momento $t=0$ la velocidad del punto A situado en la llanta del disco. La posición del punto A en el disco está determinada por el ángulo $\varphi=\omega t$, que se cuenta a partir de la vertical en sentido contrario a las agujas del reloj.



Para el problema 16.4.

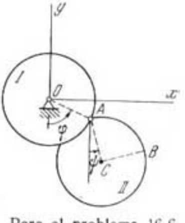
Respuesta: La velocidad está dirigida por la horizontal hacia la derecha y su módulo es igual a 10,31 m/s.

16.5. Conservando los datos del problema anterior, determinar la velocidad del punto A en el momento $t=1$s.

Respuesta: $v_{A_x}=10\,\text{m/s}$; $v_{A_y}=-9{,}49\,\text{m/s}$;

$$v_A=13{,}8\,\text{m/s}.$$

16.6. Dos discos iguales de radio r cada uno están unidos con ayuda de una articulación cilíndrica A. El disco I gira alrededor del eje horizontal fijo O de acuerdo con la ley $\varphi=\varphi(t)$. El disco II gira alrededor del eje horizontal A según la ecuación $\psi=\psi(t)$. Los ejes O y A son perpendiculares al plano del dibujo. Los ángulos φ y ψ se miden a partir de la vertical en sentido contrario a las agujas del reloj.



Para el problema 16.6.

Hallar la velocidad del centro C del disco II.

Respuesta: $v_{C_x}=r(\dot\varphi\cos\varphi+\dot\psi\cos\psi)$;

$$v_{C_y}=r(\dot\varphi\,\text{sen}\,\varphi+\dot\psi\,\text{sen}\,\psi);$$

$$v_C=r\sqrt{\dot\varphi^2+\dot\psi^2+2\dot\varphi\dot\psi\cos(\varphi-\psi)}.$$

16.7. Conservando los datos del problema anterior, determinar la velocidad del punto B del disco II, si $\angle ACB=\pi/2$.

Respuesta: $v_{B_x}=r[\dot\varphi\cos\varphi+\sqrt{2}\,\dot\psi\cos(45^\circ+\psi)]$;

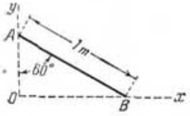
$$v_{B_y}=r[\dot\varphi\,\text{sen}\,\varphi+\sqrt{2}\,\dot\psi\,\text{sen}\,(45^\circ+\psi)];$$

$$v_B=r\sqrt{\dot\varphi^2+2\dot\psi^2+2\sqrt{2}\,\dot\varphi\dot\psi\cos[45^\circ-(\varphi-\psi)]}.$$

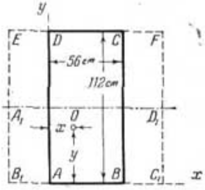
16.8. Una barra AB de 1 m de longitud se desplaza apoyándose todo el tiempo con sus extremos en dos rectas perpendiculares entre sí Ox y Oy.

Hallar las coordenadas x e y del centro instantáneo de velocidades en el instante en que el ángulo $OAB = 60°$.

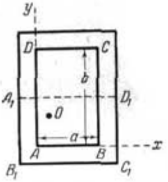
Respuesta: $x = 0{,}866$ m; $y = 0{,}5$ m.



Para el problema 16.8.



Para el problema 16.9.



Para el problema 16.10.

16.9. El tablero de una mesa plegable que tiene la forma del rectángulo $ABCD$ con los lados $AB = 56$ cm y $AD = 112$ cm, gira alrededor del eje de la espiga O de tal manera que ocupa la posición $A_1B_1C_1D_1$, donde $AB_1 = BC_1$. Al desplegarse se obtiene el cuadrado B_1EFC_1.

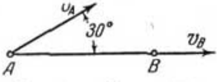
Hallar la posición del eje de la espiga.

Respuesta: $x = 14$ cm; $y = 42$ cm.

16.10. El tablero de una mesa plegable de forma rectangular con los lados a y b, al girar alrededor del eje de la espiga O pasa de la posición $ABCD$ a la $A_1B_1C_1D_1$ y al ser desplegado se forma un rectángulo con los lados b y $2a$.

Hallar la posición del eje de la espiga O con relación a los lados AB y AD.

Respuesta: $x_o = \frac{a}{4}$; $y_o = \frac{b}{2} - \frac{a}{4}$.



Para el problema 16.11.

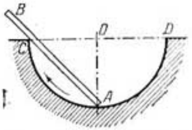
16.11. La recta AB se mueve en el plano del dibujo. En un instante determinado la velocidad v_A del punto A forma con la recta AB un ángulo de 30° y es igual a 180 cm/s. La dirección de la velocidad del punto B en este instante coincide con la dirección de la recta AB.

Determinar la velocidad v_B del punto B.

Respuesta: $v_B = 156$ cm/s.

16.12. La recta AB se mueve en el plano del dibujo, además su extremo A se encuentra permanentemente en la semicircunferencia CAD y la propia recta pasa constantemente por el punto inmóvil C del diámetro CD.

Determinar la velocidad v_C del punto de la recta, que coincide con el punto C, en el instante cuando el radio OA es perpendicular a CD, si se conoce que la velocidad del punto A en este instante es de 4 m/s.



Para el problema 16.12

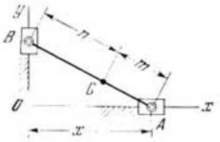
Respuesta: $v_C = 2{,}83$ m/s.

16.13. La regla del elipsógrafo AB de longitud l se mueve con su extremo A por el eje Ox, y con el extremo B por el eje Oy. El extremo A de la regla efectúa movimiento oscilatorio armónico según la ecuación $x = a \operatorname{sen} \omega t$, donde $a < l$.

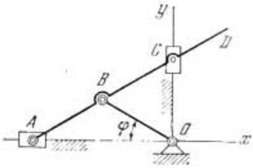
Determinar la magnitud de la velocidad v del punto C, si se sabe que $CA = m$; $BC = n$, $\omega = \text{const}$.

Respuesta:

$$v_C = \frac{a\omega}{l} \cos \omega t \sqrt{n^2 - m^2 + \frac{m^2 l^2}{l^2 - a^2 \operatorname{sen}^2 \omega t}}.$$



Para el problema 16.13.



Para el problema 16.14.

16.14. La barra OB gira alrededor del eje O con una velocidad angular constante $\omega = 2s^{-1}$ y transmite el movimiento a la barra AD, los puntos A y C de la cual se mueven por los ejes: el A por el eje horizontal Ox, el C por el eje vertical Oy.

Determinar la velocidad del punto D de la barra cuando $\varphi = 45°$ y hallar la ecuación de la trayectoria de este punto si $AB = OB = BC = CD = 12$ cm.

Respuesta: $v_D = 53{,}66$ cm/s.

$$\left(\frac{x}{12}\right)^2 + \left(\frac{y}{36}\right)^2 = 1.$$

16.15. En un mecanismo de biela y manivela el largo de la manivela $OA=40\,cm$, el largo de la biela $AB=2\,m$; la manivela gira uniformemente con una velocidad angular que corresponde a 180 r.p.m.

Hallar la velocidad angular ω de la biela y la velocidad de su punto medio M en cuatro posiciones distintas de la manivela para las cuales el ángulo AOB es igual a 0, $\frac{\pi}{2}$, π; $\frac{3\pi}{2}$ respectivamente.

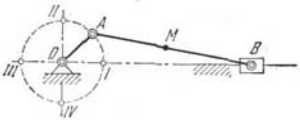
Respuesta: $I.\ \omega=-\frac{6}{5}\pi\ s^{-1}$; $v_M=377$ cm/s.

$II.\ \omega=0$; $v_M=754$ cm/s.

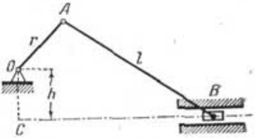
$III.\ \omega=\frac{6}{5}\pi s^{-1}$; $v_M=377$ cm/s.

$IV.\ \omega=0$; $v_M=754$ cm/s.

El signo menos en la expresión ω indica que la biela se mueve en sentido contrario a la manivela.



Para el problema 16.15.



Para el problema 16.16.

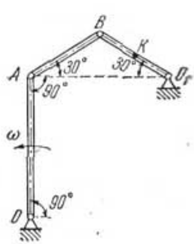
16.16. Hallar la velocidad de la corredera B de un mecanismo de biela y manivela excéntrico, para dos posiciones verticales y dos horizontales de la manivela que gira alrededor del eje O con una velocidad angular $\omega=1{,}5\,s^{-1}$ si $OA=40$ cm, $AB=200$ cm, $OC=20$ cm.

Respuesta: $v_1=v_3=6{,}03$ cm/s;

$v_2=v_4=60$ cm/s.

16.17. Determinar la velocidad del punto K de un mecanismo de cuatro eslabones $OABO_1$ en la posición indicada en el dibujo, si el eslabón OA de 20 cm de longitud en el momento dado tiene una velocidad angular de $2s^{-1}$. El punto K está ubicado en el centro de la barra BO_1.

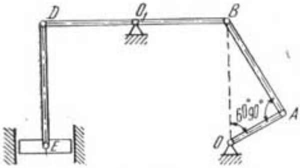
Respuesta: 20 cm/s.



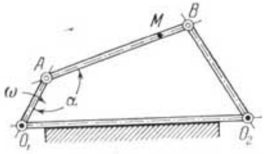
Para el problema 16.17.

16.18. Determinar la velocidad del pistón E del mecanismo impulsor de una bomba en la posición indicada en el dibujo, si $OA = 20\,\text{cm}$, $O_1B = O_1D$. La manivela OA gira uniformemente con una velocidad angular de 2s^{-1}.

Respuesta: 46,25 cm/s.



Para el problema 16.18.



Para el problema 16.19.

16.19. Las barras O_1A y O_2B, unidas con la barra AB por medio de las articulaciones A y B, pueden girar alrededor de los puntos fijos O_1 y O_2 permaneciendo en un mismo plano y formando un mecanismo de cuatro barras articuladas. Viene dado: el largo de la barra $O_1A = a$ y su velocidad angular ω.

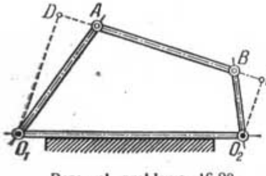
Determinar gráficamente el punto M de la barra AB cuya velocidad está dirigida a lo largo de esta barra, y hallar la magnitud de la velocidad v del punto M en el momento cuando el ángulo O_1AB tiene la magnitud dada α.

Respuesta: $v_M = a\omega \operatorname{sen} \alpha$.

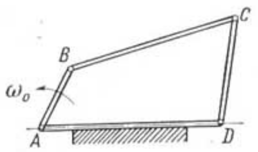
16.20. La velocidad angular de la barra O_1A de un mecanismo de cuatro barras articuladas es ω_1.

Expresar la velocidad angular ω_2 de la barra O_2B en función de ω_1 y las distancias mínimas O_1D y O_2E desde los ejes de rotación de las barras O_1A y O_2B hasta la biela AB.

Respuesta: $\omega_2 = \omega_1 = \dfrac{O_1D}{O_2E}$.



Para el problema 16.20.



Para el problema 16.21.

16.21. En un mecanismo de cuatro elementos articulados $ABCD$, la manivela conductora AB gira con una velocidad angular constante $\omega_0 = 6\pi\text{s}^{-1}$.

Determinar las velocidades angulares instantáneas de la manivela CD y de la barra BC en el instante cuando la manivela AB y la barra BC forman una recta, si $BC = 3AB$.

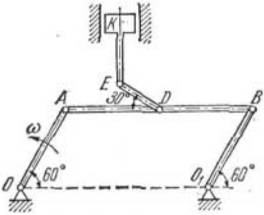
Respuesta: $\omega_{BC} = 2\pi s^{-1}$; $\omega_{CD} = 0$.

16.22. En el centro D de la barra AB de un paralelogramo articulado $OABO_1$ va unida por medio de la articulación D la barra DE que comunica movimiento alternativo a la corredera K.

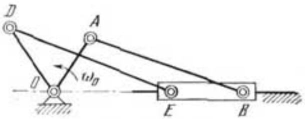
Determinar la velocidad de la corredera K y la velocidad angular de la barra DE en la posición indicada en el dibujo, si $OA = O_1B = 2DE = 20$ cm, y la velocidad angular de la barra OA es igual en el momento dado a $1 s^{-1}$.

Respuesta: $v_K = 40$ cm/s;

$\omega_{DE} = 3{,}46\ s^{-1}$.



Para el problema 16.22.



Para el problema 16.23.

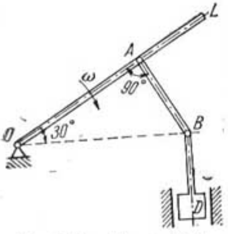
16.23. Las correderas B y E de un mecanismo de biela y manivela doble están unidas por medio de la barra BE. La manivela motriz OA y la manivela conducida OD oscilan alrededor de un eje fijo común O perpendicular al plano del dibujo.

Determinar las velocidades angulares instantáneas de la manivela conducida OD y de la biela DE en el instante cuando la manivela motriz OA, que posee una velocidad angular instantánea $\omega_0 = 12 s^{-1}$, es perpendicular a la guía de las correderas. Vienen dadas las dimensiones: $OA = 10$ cm; $OD = 12$ cm; $AB = 26$ cm; $EB = 12$ cm; $DE = 12\sqrt{3}$ cm.

Respuesta: $\omega_{OD} = 10\sqrt{3}\ s^{-1}$;

$\omega_{DE} = \frac{10}{3}\sqrt{3}\ s^{-1}$.

16.24. El pistón D de una prensa hidráulica se pone en movimiento por medio de un mecanismo de palancas articuladas $OABD$



Para el problema 16.24.

En la posición indicada en el dibujo, la palanca OL tiene una velocidad angular $\omega = 2 s^{-1}$.

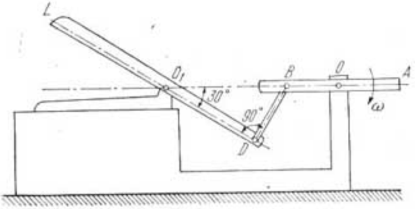
Determinar la velocidad del pistón D y la velocidad angular de la palanca AB, si $OA = 15$ cm.

Respuesta: $v_D = 34{,}6$ cm/s; $\omega_{AB} = 2 s^{-1}$.

16.25. Una cuchilla móvil L de unas tijeras para cortar metales se pone en movimiento por medio de un mecanismo de palancas articuladas $AOBD$.

Determinar la velocidad de la articulación D y la velocidad angular de la palanca BD, si en la posición indicada en el dibujo, la velocidad angular de la palanca AB es igual a $2 s^{-1}$, $OB = 5$ cm. $O_1D = 10$ cm.

Respuesta: $v_D = 8{,}65$ cm/s; $\omega_{BD} = 0{,}87 s^{-1}$.

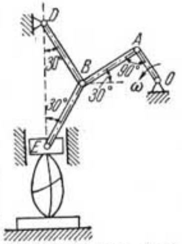


Para el problema 16.25.

16.26. Determinar la velocidad del pistón E y las velocidades angulares de las barras AB y BE del mecanismo de una prensa en la posición indicada en el dibujo, si el elemento OA posee en el instante dado una velocidad angular $\omega = 4 s^{-1}$, $OA = 10$ cm, $BD = BE = 20$ cm.

Respuesta: $v_E = 40$ cm/s;

$\omega_{AB} = 0$; $\omega_{BE} = 2 s^{-1}$.



Para el problema 16.26.

16.27. En una máquina con un cilindro oscilante la longitud de la manivela es $OA = 12$ cm, la distancia entre el eje del árbol y el eje de los gorrones del cilindro es $OO_1 = 60$ cm, la longitud de la biela es $AB = 60$ cm.

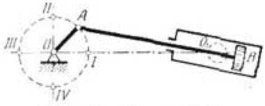
Determinar la velocidad del émbolo para las cuatro posiciones de la manivela indicadas en el dibujo, si la velocidad angular de la manivela $\omega = 5\,s^{-1} = \text{const}$.

Respuesta: $v_I = 15$ cm/s; $v_{III} = 10$ cm/s; $v_{II} = v_{IV} = 58{,}88$ cm/s.

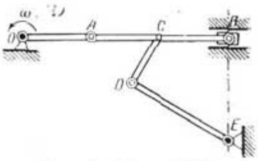
16.28. En una máquina con cilindro oscilante la longitud de la manivela es $OA = 15$ cm, la velocidad angular de ésta es $\omega_0 = 15\,s^{-1} = const$.

Hallar la velocidad del émbolo y la velocidad angular del cilindro en el momento cuando la manivela es perpendicular a la biela (véase el dibujo del problema 16.27).

Respuesta: $v = 225$ cm/s, $\omega = 0$.



Para el problema 16.27.



Para el problema 16.29.

16.29. Un mecanismo de manivela está articulado en el punto medio C de la biela con la barra CD y esta última, con la barra DE que puede girar alrededor del eje E.

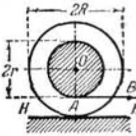
Determinar la velocidad angular de la barra DE en la posición del mecanismo de manivela indicada en el dibujo, si los puntos B y E están situados en una misma vertical; la velocidad angular ω de la manivela OA es igual a $8\,s^{-1}$; $OA = 25$ cm, $DE = 100$ cm, $\angle CDE = 90°$ y $\angle BED = 30°$.

Respuesta: $\omega_{DE} = 0{,}5\,s^{-1}$.

16.30. Un carrete de radio R rueda por el plano horizontal HH sin resbalamiento. Sobre la parte cilíndrica media del carrete de radio r va enrollado un hilo cuyo extremo B posee en este movimiento una velocidad u en dirección horizontal.

Determinar la velocidad v de desplazamiento del eje del carrete

Respuesta: $v = u\dfrac{R}{R-r}$.



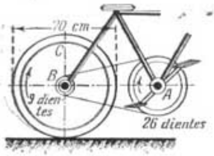
Para el problema 16.30.

16.31. La transmisión de cadena de una bicicleta consta de la cadena que abraza la rueda dentada A con 26 dientes y el piñón B con 9 dientes. El piñón B va unido invariablemente con la rueda trasera C de 70 cm de diámetro.

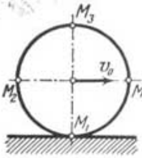
Determinar la velocidad de la bicicleta cuando la rueda A hace una vuelta por segundo y la rueda C se desplaza por un camino rectilíneo sin resbalamiento.

Respuesta: 22,87 km/h.

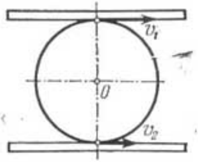
16.32. Una rueda de radio $R = 0{,}5$ m se desplaza por el tramo rectilíneo de un camino sin resbalamiento; la velocidad de su centro es constante e igual a $v_0 = 10$ m/s.



Para el problema 15.31.



Para el problema 16.32.



Para el problema 16.33.

Hallar las velocidades de los extremos M_1, M_2, M_3 y M_4 de los diámetros horizontal y vertical de la rueda. Determinar su velocidad angular.

Respuesta: $v_1 = 0$; $v_2 = 14{,}14$ m/s; $v_3 = 20$ m/s;
$v_4 = 14{,}14$ m/s; $\omega = 20\ s^{-1}$.

16.33. Dos listones paralelos se desplazan en una misma dirección con velocidades constantes $v_1 = 6$ m/s y $v_2 = 2$ m/s. Entre los listones va apretado un disco de radio $a = 0{,}5$ m que rueda por los listones sin deslizamiento.

Hallar la velocidad angular del disco y la velocidad de su centro.

Respuesta: $\omega = 4\ s^{-1}$; $v_o = 4$ m/s.

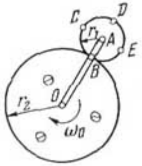
16.34. La manivela OA, al girar con una velocidad angular $\omega_0 = 2{,}5\ s^{-1}$ alrededor del eje O de un piñón fijo de radio $r_2 = 15$ cm, pone en movimiento el piñón de radio $r_1 = 5$ cm, encajado sobre su extremo A.

Determinar la magnitud y dirección de las velocidades de los puntos A, B, C, D y E del piñón móvil, si $CE \perp BD$.

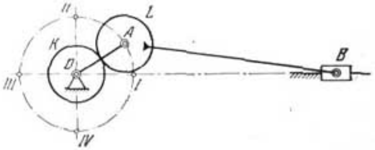
Respuesta: $v_A = 50$ cm/s; $v_B = 0$; $v_D = 100$ cm/s;
$v_C = v_E = 70{,}7$ cm/s.

16.35. Sobre el eje O van montados: la rueda dentada K de 20 cm de diámetro y la manivela OA de 20 cm de longitud, no enlazadas entre sí. Con la biela AB va acoplada fijamente la rueda dentada L de 20 cm de diámetro, la longitud de la biela es $AB = 1$ m.

La rueda K gira uniformemente con una velocidad angular correspondiente a $n=60$ r. p.m. y, arrastrando los dientes de la rueda L, pone en movimiento la biela AB y la manivela OA.



Para el problema 16.34.



Para el problema 16.35.

Determinar la velocidad angular ω_1 de la manivela OA en cuatro de sus posiciones: dos horizontales y dos verticales.

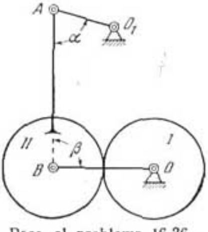
Respuesta: $I.\ \omega_1=\frac{10}{11}\pi s^{-1}$; $III.\ \omega_1=\frac{10}{9}\pi s^{-1}$.

$II.\ \omega_1=\pi s^{-1}$. $IV.\ \omega_1=\pi s^{-1}$.

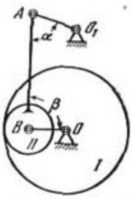
16.36. El mecanismo de Watt consta del balancín O_1A que, oscilando sobre el eje O_1 transmite por intermedio de la biela AB el movimiento a la manivela OB, montada libremente sobre el eje O. Sobre el mismo eje O se encuentra la rueda I; al extremo B de la biela AB va acoplada fijamente la rueda II.

Determinar las velocidades angulares de la manivela OB y la rueda I en el momento cuando $\alpha=60°$; $\beta=90°$, si $r_1=r_2=30\sqrt{3}$ cm, $O_1A=75$ cm, $AB=150$ cm y la velocidad angular del balancín $\omega_0=6\ s^{-1}$.

Respuesta: $\omega_{OB}=3{,}75\ s^{-1}$; $\omega_1=6\ s^{-1}$.



Para el problema 16.36.



Para el problema 16.37.

16.37. Un mecanismo planetario consta de la manivela O_1A, que pone en movimiento a la biela AB, el balancín OB y el piñón I de radio $r_1=25$ cm; la biela AB termina con el piñón II de radio $r_2=10$ cm, unido a ésta fijamente.

Determinar la velocidad angular de la manivela O_1A y el piñón I en el momento cuando $\alpha=45°$, $\beta=90°$, si $O_1A=30\sqrt{2}$ cm, $AB=150$ cm, la velocidad angular del balancín OB es $\omega=8\ s^{-1}$.

Respuesta: $\omega_1=5{,}12\ s^{-1}$; $\omega_0=4\ s^{-1}$.

16.38. En una máquina con cilindro oscilante, la longitud de la manivela es $OA=r$ y la distancia $OO_1=a$. La manivela gira con una velocidad angular constante ω_0.

Determinar la velocidad angular ω_1 de la biela AB en función del ángulo de giro φ de la manivela. Determinar los valores máximo y mínimo de ω_1, y el valor del ángulo φ, para el cual $\omega_1=0$ (véase el dibujo del problema 16.27).

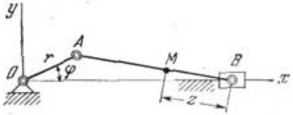
Respuesta: $\omega_1=\dfrac{\omega_0 r(a\cos\varphi-r)}{a^2+r^2-2ar\cos\varphi}$;

$$\omega_{1\,\text{máx}}=\frac{\omega_0 r}{a-r}\quad \text{para}\quad \varphi=0;$$

$$\omega_{1\,\text{mín}}=-\frac{\omega_0 r}{a+r}\quad \text{siendo}\quad \varphi=\pi;$$

$\omega_1=0$ cuando $\varphi=\arccos\dfrac{r}{a}$.

16.39. Hallar la expresión aproximada para las proyecciones de la velocidad de un punto arbitrario M de la biela AB de un mecanismo de manivela sobre los ejes coordenados, si el árbol gira uniformemente con una velocidad angular ω, y suponiendo que la longitud r de la manivela es una magnitud insignificante en comparación con la longitud l de la biela. La posición del punto M se expresa por su distancia $MB=z$.



Para el problema 16.39.

Nota. En la fórmula que se obtiene al resolver el problema figura $\sqrt{1-\left(\frac{r}{l}\operatorname{sen}\varphi\right)^2}$, donde $\varphi=\omega t$ significa el ángulo BOA. Esta expresión se desarrolla en serie y se toman sólo los dos primeros términos.

Respuesta: $v_x=-\omega\left[r\operatorname{sen}\varphi+\dfrac{(l-z)\,r^2}{2l^2}\operatorname{sen}2\varphi\right]$;

$$v_y=\frac{zr}{l}\omega\cos\varphi.$$

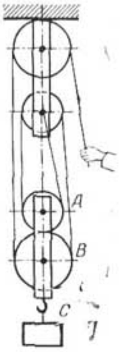
§ 17. CENTROIDES FIJO Y MÓVIL

17.1. Hallar los centroides durante el movimiento del vástago AB indicado en el problema 16.8.

Respuesta: El centroide móvil es una circunferencia de radio 0,5 m con centro en el punto medio de AB; el centroide fijo es una circunferencia de 1 m de radio con centro en el punto O.

17.2. Determinar los centroides fijos y móviles de las poleas A y B de un polipasto, cuyos radios son respectivamente iguales a r_A y r_B; suponiendo que el cargador C tiene movimiento de avance.

Respuesta: Centroides móviles: el de la polea A es una circunferencia de radio r_A, el de la polea B es una circunferencia de radio $\frac{1}{3} r_B$; centroides fijos: tangentes verticales a los centroides móviles por el lado derecho de éstos.



Para el problema 17.2.

17.3. Hallar geométricamente los centroides fijo y móvil de la biela AB, cuya longitud es igual a la de la manivela:

$$AB = OA = r.$$

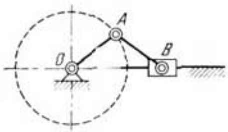
Respuesta: El centroide fijo es una circunferencia de radio $2r$ con centro en el punto O, el centroide móvil es una circunferencia de radio r con centro en el punto A del gorrón de manivela.

17.4. Construir gráficamente los centroides móvil y fijo de la biela de un mecanismo de manivela en el que la longitud de la biela es igual a la longitud duplicada de la manivela:

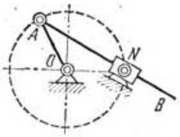
$$\frac{r}{l} = \frac{1}{2}.$$

17.5. La barra AB se mueve de tal modo que uno de sus puntos A describe una circunferencia de radio r con centro en el punto O, y la propia barra pasa constantemente por el punto dado N situado en la misma circunferencia. Hallar sus centroides.

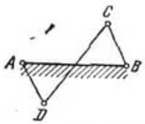
Respuesta: El centroide fijo es una circunferencia de radio r con centro en el punto O; el centroide móvil es una circunferencia de radio $2r$ con centro en el punto A.



Para el problema 17.3.



Para el problema 17.5.



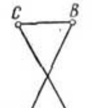
Para el problema 7.6.

17.6. Hallar los centroides fijo y móvil del elemento CD de un antiparalelogramo colocado sobre el elemento mayor AB, si $AB = CD = b$, $AD = BC = a$ y $a < b$.

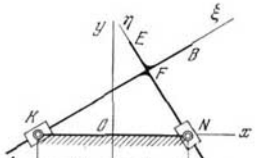
Respuesta: El centroide fijo es una hipérbola con focos en los puntos A y B, el centroide móvil es una hipérbola con focos en los puntos C y D. Los semiejes reales de las hipérbolas son iguales a $\frac{a}{2}$.

17.7. Hallar los centroides fijo y móvil del elemento BC de un antiparalelogramo colocado sobre el elemento menor AD, si $AB = CD = b$, $AD = CB = a$, y $a < b$.

Respuesta: El centroide fijo es una elipse con focos en los puntos A y D y de semiejes $\frac{b}{2}$ y $\frac{1}{2}\sqrt{b^2 - a^2}$. El centroide móvil es una elipse idéntica con focos en los puntos B y C.



Para el problema 17.7.



Para el problema 17.8.

17.8. Dos barras AB y DE unidas fijamente en el punto F bajo un ángulo de 90° se desplazan de tal modo que la barra AB pasa siempre por el punto fijo K, y la otra barra DE pasa siempre por el punto fijo N; la distancia $KN = 2a$.

Hallar las ecuaciones de los centroides en este movimiento; los ejes de coordenadas están indicados en el dibujo.

Respuesta: $x_C^2 + y_{C_1}^2 = a^2$; $\xi_C^2 + \eta_C^2 = 4a^2$.

17.9. Dos listones paralelos AB y DE se desplazan en sentidos contrarios con velocidades constantes v_1 y v_2. Entre los listones se encuentra un disco de radio a que, gracias al movimiento de los listones y al rozamiento, rueda sobre éstas sin deslizamiento.

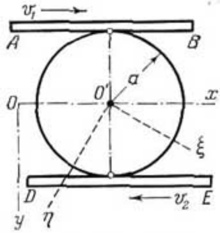
Hallar: 1) las ecuaciones de los centroides del disco; 2) la velocidad $v_{O'}$ del centro O' del disco; 3) la velocidad angular ω del disco. Los ejes de coordenadas están indicados en el dibujo.

Respuesta: 1) $y_C = a\frac{v_1 - v_2}{v_1 + v_2}$;

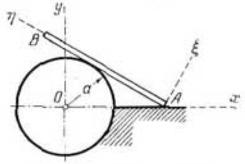
$$\xi_C^2 + \eta_C^2 = a^2\left(\frac{v_1 - v_2}{v_1 + v_2}\right)^2;$$

2) la velocidad del centro del disco está dirigida en el sentido de la mayor de las velocidades dadas; la magnitud $v_{O'}$ es igual a la semidiferencia de las magnitudes de las velocidades dadas;

3) $\omega = \frac{v_1 + v_2}{2a}$.



Para el problema 17.9.



Para el problema 17.10.

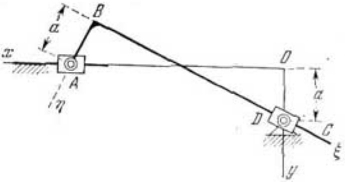
17.10. Hallar las ecuaciones de los centroides fijo y móvil de la barra AB que, apoyándose en la circunferencia de radio a, se desliza con su extremo A a lo largo de la recta Ox que pasa por el centro de esta circunferencia; los ejes de coordenadas están indicados en el dibujo.

Respuesta: $x_C^2(x_C^2 - a^2) - a^2y_C^2 = 0$; $\eta_C^2 = a\xi_C$.

17.11. El ángulo recto ABC se desplaza de tal modo que el punto A se desliza por el eje x, y el lado BC pasa por el punto fijo D del eje y.

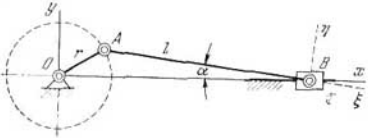
Hallar las ecuaciones de los centroides fijo y móvil, si se sabe que $AB = OD = a$.

Respuesta: $x_C^2 = a(2y_C - a)$; $\xi_C^2 = a(2\eta_C - a)$.



Para el problema 17.11.

17.12. Hallar las ecuaciones aproximadas de los centroides fijo y móvil de la biela AB de un mecanismo de manivela, suponiendo que la longitud de la biela $AB = l$ es tan grande en comparación



Para el problema 17.12.

con la de la manivela $OA = r$, que para el ángulo $ABO = \alpha$ se puede aceptar $\operatorname{sen} \alpha = \alpha$ y $\cos \alpha = 1$; los ejes de coordenadas están indicados en el dibujo.

Respuesta: $(x_C - l)^2 (x_C^2 + y_C^2) = r^2 x_C^2$; $\quad l^2 \xi_C^2 (l^2 + \eta_C^2) = r^2 \eta_C^4$.

§ 18. ACELERACIÓN DE LOS PUNTOS DEL CUERPO SÓLIDO EN EL MOVIMIENTO PLANO. CENTRO INSTANTÁNEO DE ACELERACIONES

18.1. El centro C de una rueda, que se desplaza sobre un riel rectilíneo horizontal, se mueve de acuerdo con la ley $x_C = 2t^2$ cm·

La barra AC de longitud $l = 12$ cm efectúa oscilaciones alrededor del eje horizontal C, perpendicular al plano del dibujo, de acuerdo con la ecuación $\varphi = \frac{\pi}{6} \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} t$ rad (véase el dibujo del problema 16.2.).

Determinar la aceleración del extremo A de la barra AC en el instante $t = 0$.

Respuesta: $w_{A_x} = 4$ cm/s²; $\quad w_{A_y} = 8{,}1$ cm/s²; $\quad w_A = 9{,}07$ cm/s².

18.2. Conservando los datos del problema anterior, determinar la aceleración del extremo A de la barra AC en el instante $t = 1$s.

Respuesta: $w_{A_x} = -9{,}44$ cm/s²; $\quad w_{A_y} = -7{,}73$ cm/s²; $\quad w_A = 12{,}20$ cm/s².

18.3. Durante el movimiento de un disco de radio $r=20$ cm en el plano vertical xy su centro C se desplaza de acuerdo con la ecuación $x_C=10\,t$ m, $y_C=(100-4{,}9\,t^2)$ m. Al mismo tiempo el disco gira alrededor del eje horizontal C, perpendicular al plano del disco, con una velocidad angular constante $\omega=\pi/2\ \text{s}^{-1}$ (véase el dibujo del problema 16.4).

Determinar la aceleración del punto A, situado sobre la llanta del disco, en el instante $t=0$. La posición del punto A sobre el disco se determina por el ángulo $\varphi=\omega t$ que se cuenta a partir de la vertical en sentido contrario a las agujas del reloj.

Respuesta: La aceleración está dirigida verticalmente hacia abajo y su módulo es igual a $9{,}31\ \text{m/s}^2$.

18.4. Conservando los datos del problema anterior determinar la aceleración del punto A en el instante $t=1$ s.

Respuesta: $w_{A_x}=-0{,}49\ \text{m/s}^2$; $w_{A_y}=-9{,}8\ \text{m/s}^2$; $w_A=9{,}81\ \text{m/s}^2$.

18.5. Dos discos idénticos de radio r están unidos por una articulación cilíndrica A. El disco I gira alrededor del eje horizontal fijo O de acuerdo con la ley $\varphi=\varphi(t)$. El disco II gira alrededor del eje horizontal A de acuerdo con la ecuación $\psi=\psi(t)$. Los ejes O y A son perpendiculares al plano del dibujo. Los ángulos φ y ψ se cuentan a partir de la vertical en sentido contrario a las agujas del reloj (véase el dibujo del problema 16.6.).

Hallar la aceleración del centro C del disco II.

Respuesta: $w_C=\sqrt{w_{C_x}^2+w_{C_y}^2}$, donde $w_{C_x}=r(\ddot{\varphi}\cos\varphi-\dot{\varphi}^2\operatorname{sen}\varphi+\ddot{\psi}\cos\psi-\dot{\psi}^2\operatorname{sen}\psi)$, $w_{C_y}=r(\ddot{\varphi}\operatorname{sen}\varphi+\dot{\varphi}^2\cos\varphi+\ddot{\psi}\operatorname{sen}\psi+\dot{\psi}^2\cos\psi)$.

18.6. Conservando los datos del problema anterior hallar la aceleración del punto B del disco II, si $\angle ACB=\frac{\pi}{2}$.

Respuesta: $w_B=\sqrt{w_{B_x}^2+w_{B_y}^2}$, donde $w_{B_x}=r[\ddot{\varphi}\cos\varphi-\dot{\varphi}^2\operatorname{sen}\varphi+\sqrt{2}\ddot{\psi}\cos(45^\circ+\psi)-\sqrt{2}\dot{\psi}^2\operatorname{sen}(45^\circ+\psi)]$,

$w_{B_y}=r[\ddot{\varphi}\operatorname{sen}\varphi+\dot{\varphi}^2\cos\varphi+\sqrt{2}\ddot{\psi}\operatorname{sen}(45^\circ+\psi)+\sqrt{2}\dot{\psi}^2\cos(45^\circ+\psi)]$.

18.7. La regla de un elipsógrafo se desliza con su extremo B sobre el eje Ox y con su extremo A sobre el eje Oy; $AB=20$ cm (véase el dibujo para el problema 15.1.).

Determinar la velocidad y la aceleración del punto A en el instante cuando el ángulo φ de inclinación de la regla respecto al eje Ox es igual a 30° y las proyecciones de la velocidad y de la aceleración del punto B sobre el eje x son: $v_{B_x} = -20$ cm/s, $w_{B_x} = -10$ cm/s².

Respuesta: $v_{A_y} = 34{,}64$ cm/s; $w_{A_y} = -142{,}68$ cm/s².

18.8. Los manguitos A y B que se deslizan a lo largo de generatrices rectilíneas están acoplados por medio de la barra AB de longitud l. El manguito A se desplaza con una velocidad constante v_A (véase el dibujo para el problema 15.7).

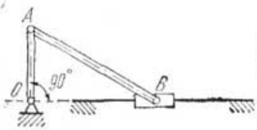
Determinar la aceleración del manguito B y la velocidad angular de la barra AB en la posición cuando ésta forma con la recta OB el ángulo dado φ.

Respuesta: $w_B = \frac{v_A^2 \operatorname{sen}^2 \alpha}{l \cos^3 \varphi}$; $\varepsilon_{AB} = \frac{v_A^2}{l^2} \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^3 \varphi} \operatorname{sen} \varphi$.

18.9. Hallar la aceleración de la corredera B y el centro instantáneo de aceleraciones K de la biela AB del mecanismo de biela y manivela representado en el dibujo del problema 16.39. para dos posiciones horizontales y una posición vertical de la manivela OA que gira alrededor del árbol O con una velocidad angular constante $\omega_0 = 15$ s⁻¹. La longitud de la manivela $OA = 40$ cm, la longitud de la biela $AB = 200$ cm.

Respuesta: El centro instantáneo de aceleraciones K para $\varphi = 0°$ y $\varphi = 180°$ se encuentra sobre el eje de la guía de la corredera.

1) $\varphi = 0$; $w_B = 108$ m/s², $BK = 12$ m.
2) $\varphi = 90°$; $w_B = 18{,}37$ m/s², $BK = 40$ cm; $AK = 196$ cm.
3) $\varphi = 180°$; $w_B = 72$ m/s², $BK = 8$ m.



Para el problema 18.10.

18.10. La longitud de la biela AB de un mecanismo de biela y manivela es dos veces mayor que la longitud de la manivela OA.

Determinar la posición del punto de la biela AB, cuya aceleración está dirigida a lo largo de la biela en el instante cuando la manivela es perpendicular a la guia de la corredera; la manivela OA gira uniformemente.

Respuesta: El punto está situado a una cuarta parte de la longitud de la biela, contando a partir de la corredera B.

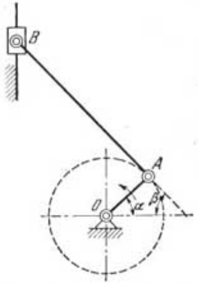
18.11. Determinar la aceleración del pistón D y la aceleracion angular del elemento AB del mecanismo de accionamiento de la prensa hidráulica examinada en el problema 16.24, si en la posión indicada en el dibujo la palanca OL gira aceleradamente con na aceleración angular $\varepsilon = 4$ cm/s^{-2}.

Respuesta: $w_D = 29{,}4$ cm/s^2; $\varepsilon_{AB} = 5{,}24$ s^{-2}.

18.12. La manivela OA de 20 cm de longitud gira uniformemente con una velocidad angular $\omega_0 = 10\ s^{-1}$ y pone en movimiento la biela AB de 100 cm de longitud; la corredera B se desplaza por la vertical.

Hallar la velocidad y la aceleración angulares de la biela, así como la aceleración de la corredera B en el instante cuando la manivela y la biela son mútuamente perpendiculares y forman con el eje horizontal los ángulos $\alpha = 45°$ y $\beta = 45°$.

Respuesta: $\omega = 2$ s^{-1}; $\varepsilon = 16$ s^{-2};
$w_B = 565{,}6$ cm/s^2.



Para el problema 18.12.

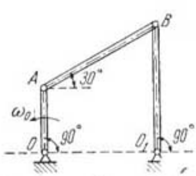
18.13. Determinar la velocidad y la aceleración angulares de la biela de un mecanismo de biela y manivela excéntrico, así como la velocidad y la aceleración de la corredera B cuando la manivela OA ocupa 1) la posición horizontal derecha y 2) la posición vertical superior. La manivela gira alrededor del extremo O con una velocidad angular constante ω_0, además se sabe que: $OA = r$, $AB = l$, la distancia entre el eje O de la manivela y la línea de movimiento de la corredera es $OC = h$ (véase el dibujo para el problema 16.16.).

Respuesta: 1) $\omega = \dfrac{r\omega_0}{\sqrt{l^2 - h^2}}$; $\varepsilon = \dfrac{hr^2\omega_0^2}{(l^2 - h^2)^{3/2}}$;

$$v_B = \frac{hr\omega_0}{\sqrt{l^2 - h^2}}; \quad w_B = r\omega_0^2\left[1 + \frac{rl^2}{(l^2 - h^2)^{3/2}}\right].$$

2) $\omega = 0$; $\varepsilon = \dfrac{r\omega_0^2}{\sqrt{l^2 - (r+h)^2}}$,

$$v_B = r\omega_0; \quad w_B = \frac{r(r+h)\,\omega_0^2}{\sqrt{l^2 - (r+h)^2}}.$$



Para el problema 18.14.

18.14. La barra OA del mecanismo de cuatro barras articuladas $OABO_1$ gira con la velocidad angular constante ω_0.

Determinar la velocidad y la aceleración angulares de la barra AB, así como la aceleración de la articulación B en la posición indicada en el dibujo, si $AB = 2OA = 2a$.

Respuesta: $\omega = 0$; $\varepsilon = \dfrac{\sqrt{3}}{6}\,\omega_0^2$; $w_B = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\,a\omega_0^2$.

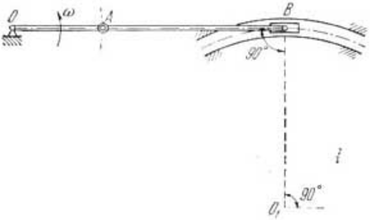
18.15. Determinar la aceleración de la articulación D y la aceleración angular del elemento BD del mecanismo examinado en el problema 16.25, si en la posición indicada en el dibujo la palanca AB gira aceleradamente con una aceleración angular $\varepsilon = 4\ s^{-2}$.

Respuesta: $w_D = 32{,}4$ cm/s^2; $\varepsilon_{BD} = 2{,}56\ s^{-2}$.

18.16. Determinar la aceleración del pistón E y la aceleración angular del vástago BE del mecanismo examinado en el problema 16.26, si en el instante considerado la aceleración angular del elemento OA es igual a cero.

Respuesta: $w_E = 138{,}4$ cm/s^2; $\varepsilon_{BE} = 0$.

18.17. La corredera B del mecanismo de biela y manivela OAB se desplaza por una guía en forma de arco.



Para el problema 18.17.

Determinar las aceleraciones tangencial y normal de la corredera B en la posición indicada en el dibujo, si $OA = 10$ cm, $AB = 20$ cm. En el instante dado la manivela OA gira con la velocidad angular $\omega = 1\ s^{-1}$, la aceleración angular es $\varepsilon = 0$.

Respuesta: $w_{B\tau} = 15$ cm/s^2; $w_{Bn} = 0$.

18.18. Determinar la aceleración angular de la biela AB del mecanismo examinado en el problema anterior, si en la posición indicada en el dibujo la aceleración angular de la manivela OA es igual a $2\ s^{-2}$.

Respuesta: $1\ s^{-2}$.

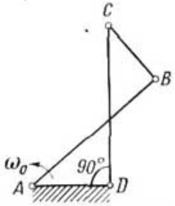
18.19. Un antiparalelogramo está compuesto de dos manivelas AB y CD de 40 cm de longitud cada una y de la barra BC de 20 cm de longitud articulada a estas manivelas. La distancia entre los ejes fijos A y D es igual a 20 cm. La manivela AB gira con una velocidad angular constante ω_0.

Determinar la velocidad y la aceleración angulares de la barra BC en el instante cuando el ángulo $ADC = 90°$.

Respuesta: $\omega_{BC} = \frac{8}{3}\omega_0$, la rotación es retardada;

$$\varepsilon_{BC} = \frac{20}{9}\omega_0^2.$$

18.20. En una máquina con cilindro oscilante que descansa sobre los gorrones O_1O_1, la longitud de la manivela $OA = 12$ cm y la de la biela $AB = 60$ cm; la distancia entre el eje del árbol y el eje de los gorrones del cilindro $OO_1 = 60$ cm.



Para el problema 18.19.

Determinar la aceleración del pistón B y el radio de curvatura de su trayectoria para dos posiciones del cilindro: 1) cuando la manivela y la biela son mútuamente perpendiculares y 2) cuando la manivela ocupa la posición III; la velocidad angular de la manivela $\omega_0 = \text{const} = 5\ s^{-1}$. (Véase el dibujo para el problema (16.27).

Respuesta: 1) $w = 6{,}12$ cm/s²; $\rho = 589$ cm;
2) $w = 258{,}3$ cm/s²; $\rho = 0{,}39$ cm.

18.21. El centro de una rueda, que se desplaza sin deslizamiento sobre un riel rectilíneo, se mueve uniformemente con la velocidad v.

Determinar la aceleración de cualquier punto situado sobre la lanta de la rueda, si el radio de ésta es igual a r.

Respuesta: La aceleración está dirigida hacia el centro de la rueda y es igual a $\frac{v^2}{r}$.

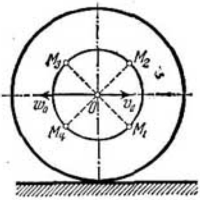
18.22. Un vagón de tranvía se desplaza sobre un tramo rectilíneo horizontal de la vía con una deceleración $w_0 = 2$ m/s², su velocidad en el instante considerado es $v_0 = 1$ m/s. Las ruedas se mueven sobre los rieles sin deslizamiento.

Hallar las aceleraciones de los extremos de dos diámetros del rotor que forman con la vertical ángulos de 45° cada uno. El radio de la rueda es $R = 0{,}5$ m y el del rotor es $r = 0{,}25$ m.

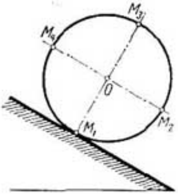
Respuesta: $w_1 = 2{,}449$ m/s²; $w_2 = 3{,}414$ m/s²;
$w_3 = 2{,}449$ m/s²; $w_4 = 0{,}586$ m/s².

18.23. Una rueda gira sin deslizamiento en el plano vertical sobre un camino rectilíneo inclinado.

Hallar las aceleraciones de los extremos de dos diámetros mútuamente perpendiculares de la rueda, si en el instante examinado



Para el problema 18.22.



Para el problema 18.23.

a velocidad del centro de la rueda es $v_0 = 1$ m/s y su aceleración es $w_0 = 3$ m/s², el radio de la rueda es $R = 0{,}5$ m.

Respuesta: $w_1 = 2$ m/s²; $w_2 = 3{,}16$ m/s²;
$w_3 = 6{,}32$ m/s²; $w_4 = 5{,}83$ m/s².

18.24. Una rueda de radio $R = 0{,}5$ m se desplaza sin deslizamiento sobre un riel rectilíneo; en el instante que se examina la velocidad del centro O es $v_0 = 0{,}5$ m/s y su deceleración $w_0 = 0{,}5$ m/s².

Hallar: 1) el centro instantáneo de la aceleración de la rueda, 2) la aceleración w_C del punto de la rueda que coincide con el centro instantáneo C de velocidades, 3) la aceleración del punto M y 4) el radio de curvatura de su trayectoria, si $OM = MC = 0{,}5\,R$.

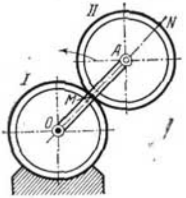
Respuesta: 1) $r = 0{,}3536$ m, $\theta = -\frac{\pi}{4}$; 2) $w_C = 0{,}5$ m/s²;
3) $w_M = 0{,}3536$ m/s²; 4) $\rho = 0{,}25$ m.

18.25. Un piñón de radio $R = 12$ cm se pone en movimiento mediante la manivela OA que gira alrededor del eje O de un piñón fijo del mismo radio; la manivela gira con una aceleración angular $\varepsilon_0 = 8$ s⁻², su velocidad angular en el instante que se examina es $\omega = 2$ s⁻¹.

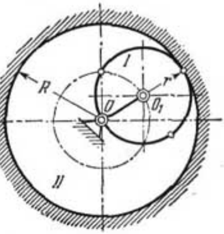
Determinar: 1) la aceleración del punto del piñón móvil que en este instante coincide con el centro instantáneo de velocidades, 2) la aceleración del punto N diametralmente opuesto y 3) la posición del centro instantáneo K de aceleraciones.

Respuesta: 1) $w_M = 96$ cm/s²; 2) $w_N = 480$ cm/s²;
3) $MK = 4{,}24$ cm; $\angle AMK = 45°$.

18.26. Hallar la posición del centro instantáneo de aceleraciones y la velocidad v_K del punto del dibujo que coincide con éste en el instante considerado, así como la aceleración w_C del punto del dibujo, con el cual en el instante considerado coincide el centro instantáneo de velocidades, si el piñón I de radio r rueda dentro del piñón II de radio $R=2r$ y la manivela OO_1 que pone en movimiento al piñón móvil, posee una velocidad angular constante ω_0.



Para el problema 18.25.



Para el problema 18.26.

Respuesta: El centro instantáneo de aceleraciones coincide con el centro O del piñón fijo; $v_K=2r\omega_0$; $w_C=2r\omega_0^2$.

18.27. Hallar las aceleraciones de los extremos B, C, D, E de dos diámetros de un piñón de radio $r_1=5$ cm que rueda por el exterior de un piñón fijo de radio $r_2=15$ cm. El piñón móvil se pone en movimiento mediante la manivela OA que gira con una velocidad angular constante $\omega_0=3\ s^{-1}$ alrededor del eje O del piñón fijo; uno de los diámetros coincide con la línea OA, el otro es perpendicular a ésta (véase el dibujo para el problema 16.34).

Respuesta: $w_B=540$ cm/s²; $w_C=w_E=742$ cm/s²; $w_D=900$ cm/s².

18.28. Demostrar que en el instante cuando la aceleración angular $\varepsilon=0$ las proyecciones de las aceleraciones de los extremos de un segmento, que realiza movimiento plano, sobre la dirección perpendicular al segmento son iguales entre sí.

18.29. Las aceleraciones de los extremos de una barra AB de 10 cm de longitud, que efectúa movimiento plano, están dirigidas a lo largo de la barra en sentido opuesto, $w_A=10$ cm/s², $w_B=20$ cm/s².

Determinar la velocidad y la aceleración angulares de la barra.

Respuesta: $\omega=\sqrt{3}\ s^{-1}$; $\varepsilon=0$.

18.30. Las aceleraciones de los extremos de una barra homogénea AB de 12 cm de longitud, que efectúa movimiento plano, son perpendiculares a AB y están dirigidas en un mismo sentido; $w_A=24$ cm/s², $w_B=12$ cm/s².

Determinar la velocidad y la aceleración angulares de la barra así como la aceleración de su centro de gravedad C.

Respuesta: $\omega=0$, $\varepsilon=1\ s^{-2}$, la aceleración del punto C es perpendicular a AB, está dirigida en el sentido de las aceleraciones de los puntos A y B y es igual a $18\ cm/s^2$.

18.31. Resolver el problema anterior suponiendo que las aceleraciones de los puntos A y B están dirigidas en sentidos opuestos.

Respuesta: $\omega=0$, $\varepsilon=3\ s^{-2}$, la aceleración del punto C es perpendicular a AB, está dirigida en el sentido de la aceleración del punto A y es igual a $6\ cm/s^2$.

18.32. Los vectores aceleraciones de los vértices A y B del triángulo ABC, que efectúa movimiento plano, son iguales: $\boldsymbol{w}_B=\boldsymbol{w}_A=\boldsymbol{a}$.

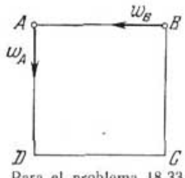
Determinar la velocidad y la aceleración angulares del triángulo, así como la aceleración del vértice C.

Respuesta: $\omega=0$; $\varepsilon=0$; $\boldsymbol{w}_C=\boldsymbol{a}$.

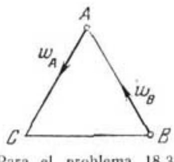
18.33. Un cuadrado $ABCD$ de lado $a=10$ cm efectúa movimiento en el plano del dibujo.

Hallar la posición del centro instantáneo de aceleraciones y las aceleraciones de los vértices C y D, si se sabe que en el instante dado las magnitudes de las aceleraciones de dos vértices A y B son iguales a $10\ cm/s^2$. Las aceleraciones de los puntos A y B están dirigidas por los lados del cuadrado como está indicado en el dibujo.

Respuesta: $w_C=w_D=10\ cm/s^2$ y están dirigidas por los lados del cuadrado. El centro instantáneo de aceleraciones se encuentra en el punto de intersección de las diagonales del cuadrado.



Para el problema 18.33.



Para el problema 18.34.

18.34. Un triángulo equilátero ABC se desplaza en el plano del dibujo. Las aceleraciones de los vértices A y B en el instante dado son iguales a $16\ cm/s^2$ y están dirigidas por los lados del triángulo (véase el dibujo).

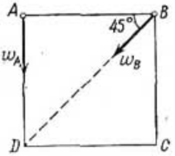
Determinar la aceleración del tercer vértice C del triángulo.

Respuesta: $w_C=16\ cm/s^2$ y está dirigida por CB de C a B.

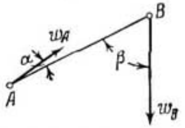
18.35. Un cuadrado $ABCD$ de lado $a=2$ cm efectúa movimiento plano. En el instante dado las aceleraciones de sus vértices A y B son respectivamente iguales a $w_A=2$ cm/s², $w_B=4\sqrt{2}$ cm/s² y están dirigidas como se indica en el dibujo.

Hallar la velocidad y la aceleración angulares instantáneas del cuadrado, así como la aceleración del punto C.

Respuesta: $\omega=\sqrt{2}\ \mathrm{s}^{-1}$; $\varepsilon=1\ \mathrm{s}^{-2}$; $w_C=6$ cm/s² y está dirigida por el lado CD de C a D.



Para el problema 18.35.



Para el problema 18.36.

18.36. Hallar la aceleración del punto medio de la barra AB, si se sabe que las magnitudes de las aceleraciones de sus extremos son $w_A=10$ cm/s², $w_B=20$ cm/s², los ángulos formados por las aceleraciones con la recta AB son $\alpha=10°$ y $\beta=70°$.

Respuesta: $w=\frac{1}{2}\sqrt{w_A^2+w_B^2-2w_Aw_B\cos(\beta-\alpha)}=8{,}66$ cm/s².

Capítulo VI

MOVIMIENTO DEL CUERPO SÓLIDO QUE TIENE UN PUNTO FIJO. ORIENTACIÓN ESPACIAL

§ 19. MOVIMIENTO DEL CUERPO SÓLIDO QUE TIENE UN PUNTO FIJO

19.1. El eje z de una peonza describe uniformemente alrededor de la vertical $O\zeta$ un cono circular con un ángulo de abertura de 2θ. La velocidad angular de rotación del eje de la peonza alrededor del eje ζ es igual a $\boldsymbol{\omega}_1$, la velocidad angular constante de la rotación propia de la peonza es igual a $\boldsymbol{\omega}$.

Determinar la magnitud y la dirección de la velocidad angular absoluta $\boldsymbol{\Omega}$ de la peonza.

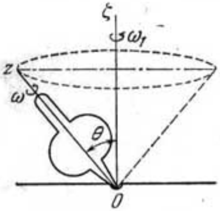
Respuesta: $\Omega = \sqrt{\omega^2 + \omega_1^2 + 2\omega\omega_1 \cos\theta}$,

$$\cos(\boldsymbol{\Omega},\ z) = \frac{\omega + \omega_1 \cos\theta}{\sqrt{\omega^2 + \omega_1^2 + 2\omega\omega_1 \cos\theta}}\,.$$

19.2. Un proyectil, durante su movimiento en la atmósfera, gira alrededor del eje z con la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$. El eje del proyectil z gira simultáneamente con la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}_1$ alrededor del eje ζ dirigido por la tangente a la trayectoria del centro de gravedad C del proyectil.

Determinar la velocidad del punto M del proyectil en su movimiento de rotación, si $CM = r$ y el segmento CM es perpendicular al eje z; el ángulo entre los ejes z y ζ es igual a γ.

Respuesta: $v_M = (\omega + \omega_1 \cos\gamma)\, r$.



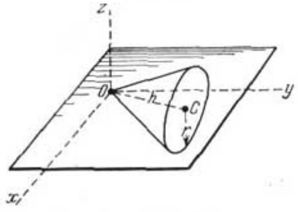
Para el problema 19.1.

Para el problema 19.2.

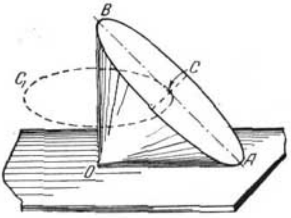
19.3. Un cono de altura $h = 4$ cm y de radio de la base $r = 3$ cm rueda sin deslizamiento sobre un plano, teniendo su vértice fijo en el punto O.

Determinar la velocidad angular del cono, las coordenadas de punto que describe el hodógrafo de la velocidad angular, y la aceleración angular del cono, si la velocidad del centro de la base del cono $v_C = 48$ cm/s $=$ const.

Respuesta: $\omega = 20\ \mathrm{s}^{-1}$; $x_1 = 20\cos 15t$, $y_1 = 20\,\mathrm{sen}\,15t$, $z_1 = 0$; $\varepsilon = 300\ \mathrm{s}^{-1}$.



Para el problema 19.3.



Para el problema 19.4.

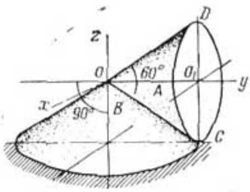
19.4. Un cono, cuyo vértice O está fijo, rueda sin deslizamiento sobre un plano. La altura del cono es $CO = 18$ cm, el ángulo en el vértice es $AOB = 90°$. El punto C, el centro de la base del cono, se desplaza *uniformemente* y regresa a su posición inicial dentro de 1 s.

Determinar la velocidad del extremo B del diámetro AB, la aceleración angular del cono y las aceleraciones de los puntos A y B.

Respuesta: $v_B = 36\pi\sqrt{2}$ cm/s $= 160$ cm/s; $\varepsilon = 39{,}5\ \mathrm{s}^{-2}$ y está dirigida perpendicularmente a OA y OB; $w_A = 1000\ \mathrm{cm/s^2}$ y está dirigida paralelamente a OB; $w_B = 1000\sqrt{2}\ \mathrm{cm/s^2}$, se encuentra en el plano AOB y forma con OB un ángulo de 45°.

19.5. El cono A recorre 120 veces en 1 min el cono fijo B. La altura del cono es $OO_1 = 10$ cm.

Determinar la velocidad angular de transporte ω_e del cono alrededor del eje z, la velocidad angular relativa ω_r del cono alrededor del eje OO_1, la velocidad angular absoluta ω_a y la aceleración angular absoluta ε_a del cono.



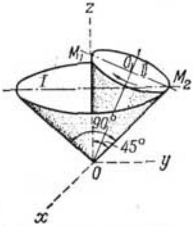
Para el problema 19.5.

Respuesta: $\omega_e = 4\pi\ \mathrm{s}^{-1}$; $\omega_r = 6{,}92\pi\ \mathrm{s}^{-1}$; $\omega_a = 8\pi\ \mathrm{s}^{-1}$ y está dirigida por el eje OC; $\varepsilon_a = 27{,}68\pi^2\ \mathrm{s}^{-2}$ y está dirigida paralelamente al eje x.

19.6. Con los mismos datos del problema anterior determinar las velocidades y las aceleraciones de los puntos C y D del cono móvil.

Respuesta: $v_C = 0$; $v_D = 80\pi$ cm/s y está dirigida paralelamente al eje x; $w_C = 320\pi^2$ cm/s^2 y está dirigida perpendicularmente a OC en el plano Oyz; las proyecciones de la aceleración del punto D son:

$$w_{D_y} = -480\pi^2 \text{ cm/s}^2, \quad w_{D_z} = -160\sqrt{3}\,\pi^2 \text{ cm/s}^2.$$



Para el problema 19.7.

19.7. El cono II con un ángulo en el vértice $\alpha_2 = 45°$ rueda sin deslizamiento por el lado interior del cono fijo I con un ángulo en el vértice $\alpha_1 = 90°$. La altura del cono móvil es $OO_1 = 100$ cm. El punto O_1, el centro de la base del cono móvil, describe una circunferencia en 0,5 s.

Determinar las velocidades angulares de transporte (alrededor del eje z), relativa (alrededor del eje OO_1) y absoluta del cono II, así como su aceleración angular absoluta.

Respuesta: $\omega_e = 4\pi$ s^{-1} está dirigida por el eje z;
$\omega_r = 7{,}39\pi$ s^{-1} y está dirigida por el eje O_1O;
$\omega_a = 4\pi$ s^{-1} y está dirigida por el eje OM_2;
$\varepsilon_a = 11{,}3\pi^2$ s^{-2} y está dirigida por el eje x.

19.8. Para los datos del problema anterior determinar las velocidades y las aceleraciones de los puntos O_1, M_1, M_2 del cono móvil.

Respuesta: $v_0 = 153{,}2\pi$ cm/s y está dirigida paralelamente al eje negativo Ox; $v_1 = 306{,}4\pi$ cm/s y está dirigida paralelamente al eje negativo Ox; $v_2 = 0$, $w_0 = 612{,}8\pi^2$ cm/s^2 y está dirigida del eje O_1 por la perpendicular a Oz; las proyecciones de la aceleración del punto M_1 son:

$$w_{1y} = -362\pi^2 \text{ cm/s}^2, \quad w_{1z} = -865\pi^2 \text{ cm/s}^2;$$

$$w_2 = 1225\pi^2 \text{ cm/s}^2,$$

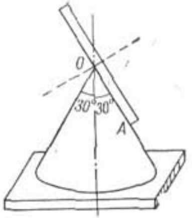
se encuentra en el plano OO_1M_2 y está dirigida perpendicularmente a OM_2.

19.9. Un disco OA de radio $R = 4\sqrt{3}$ cm, girando alrededor del punto fijo O, rueda el cono fijo con un ángulo en el vértice igual a 60°. Hallar la velocidad angular de rotación del disco alrededor de su eje de simetría, si la magnitud de la aceleración w_A del punto A del disco es constante e igual a 48 cm/s^2.

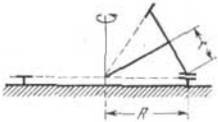
Respuesta: $\omega = 2$ s^{-1}.

19.10. Un cuerpo se mueve alrededor de un punto fijo. En cierto instante su velocidad angular se representa por un vector, cuyas proyecciones sobre los ejes de coordenadas son iguales a $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$. Hallar en este instante la velocidad v del punto del cuerpo determinado por las coordenadas $\sqrt{12}$, $\sqrt{20}$, $\sqrt{28}$.

Respuesta: $v = 0$.



Para el problema 19.9.



Para el problema 19.11.

19.11. Una rueda dentada cónica, cuyo eje se interseca con el eje geométrico de un piñón plano de apoyo en el centro del último, recorre cinco veces en 1 minuto el piñón de apoyo.

Determinar la velocidad angular ω_r de rotación de la rueda alrededor de su eje y la velocidad angular ω de rotación alrededor del eje instantáneo, si el radio del piñón de apoyo es dos veces mayor que el radio de la rueda: $R = 2r$.

Respuesta: $\omega_r = 1{,}047\ s^{-2}$; $\omega = 0{,}907\ s^{-1}$.

19.12. La velocidad angular de un cuerpo es $\omega = 7\ s^{-1}$; su eje instantáneo en el instante dado forma con los ejes fijos de coordenadas los ángulos agudos α, β y γ.

Hallar la magnitud de la velocidad v y sus proyecciones v_x, v_y, v_z sobre los ejes de coordenadas del punto del cuerpo, cuyas coordenadas, expresadas en metros, en el instante dado son iguales a 0, 2, 0, así como la distancia d entre este punto y el eje instantáneo, si $\cos\alpha = \frac{2}{7}$, $\cos\gamma = \frac{6}{7}$.

Respuesta: $v_x = -12$ m/s; $v_y = 0$; $v_z = 4$ m/s;
$v = 12{,}65$ m/s; $d = 1{,}82$ m.

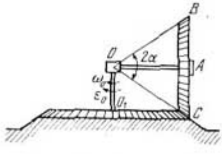
19.13. Hallar las ecuaciones del eje instantáneo y la magnitud de la velocidad angular ω de un cuerpo, si se sabe que las proyecciones de la velocidad del punto M_1 (0, 0, 2) sobre los ejes de coordenadas enlazados con el cuerpo son iguales a

$$v_{x1} = 1\ m/s; \quad v_{y1} = 2\ m/s; \quad v_{z1} = 0,$$

y la dirección de la velocidad del punto M_2 (0, 1, 2) se determina por los cosenos de los ángulos formados con los ejes de coordenadas:

$$-\frac{2}{3},\ +\frac{2}{3},\ -\frac{1}{3}.$$

Respuesta: $x+2y=0$; $3x+z=0$; $\omega=3{,}2\ s^{-1}$.



Para el problema 19.14.

19.14. Una rueda dentada cónica montada libremente sobre la manivela OA, gira sobre una base dentada cónica fija.

Determinar la velocidad angular ω y la aceleración angular ε de la rueda en movimiento, si los módulos de la velocidad y de la aceleración angulares (sus direcciones están indicadas en el dibujo) de la manivela OA, que gira alrededor del eje fijo O_1O, son respectivamente iguales a ω_0 y ε_0.

Respuesta: $\boldsymbol{\omega}=\frac{\omega_0}{\operatorname{sen}\alpha}\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{\varepsilon}=\frac{\varepsilon_0}{\operatorname{sen}\alpha}\boldsymbol{e}_1+\omega_0^2\operatorname{cotg}\alpha\boldsymbol{e}_2$,

donde $\boldsymbol{e}_1$ es el vector unitario dirigido del punto O hacia el punto C, $\boldsymbol{e}_2$ es el vector unitario perpendicular al plano OAC y dirigido hacia el lector.

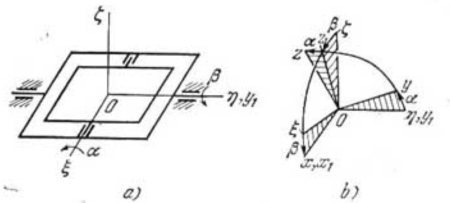
19.15. Para los datos del problema anterior determinar la aceleración de los puntos C y B, si el radio de la base es igual a R.

Respuesta: $\boldsymbol{w}_C=\frac{R\omega_0^2}{\operatorname{sen}\alpha}\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{w}_B=2R\varepsilon_0\boldsymbol{e}_2+\frac{R\omega_0^2}{\operatorname{sen}\alpha}(\boldsymbol{e}_4-2\boldsymbol{e}_3)$,

donde $\boldsymbol{e}_3$ y $\boldsymbol{e}_4$ son los vectores unitarios que se encuentran en el plano del dibujo y son respectivamente perpendiculares a las rectas OC y OB (ambos versores están dirigidos hacia arriba).

§ 20. ORIENTACIÓN EN EL ESPACIO; FÓRMULAS CINEMÁTICAS DE EULER Y SUS MODIFICACIONES; AXOIDES

20.1. Una plataforma horizontal artificial sobre un barco en balanceo se crea con ayuda de una suspensión cardánica. El eje y_1 de rotación del anillo exterior es paralelo al eje longitudinal del barco; el ángulo de rotación del anillo exterior se designa por β (ángulo de balanceo). El ángulo de rotación del cuadro interior se designa por α. Para la orientación de los anillos se introducen tres sistemas de coordenadas: el sistema $\xi\eta\zeta$ enlazado con el barco (el eje ξ está dirigido hacia el estribor, el eje η hacia la proa, el eje ζ es perpendicular a la cubierta); el sistema $x_1y_1z_1$ está enlazado con el anillo exterior (el eje y_1 coincide con el eje η); el sistema xyz está relacionado con el anillo interior (el eje x coincide con el x_1). Los sentidos positivos para el cálculo de los ángulos están indicados en el dibujo; cuando $\alpha = \beta = 0$ todos los sistemas de referencia coinciden.



Para el problema 20.1.

Determinar la orientación (los cosenos directrices correspondientes) del anillo interior de la suspensión respecto del barco.

Respuesta:

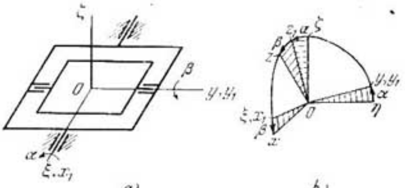
	ξ	η	ζ
x	$\cos\beta$	0	$-\operatorname{sen}\beta$
y	$\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta$	$\cos\alpha$	$\operatorname{sen}\alpha\cos\beta$
z	$\cos\alpha\operatorname{sen}\beta$	$-\operatorname{sen}\alpha$	$\cos\alpha\cos\beta$

20.2. En el segundo método de fijación de la suspensión cardánica, descrito en el problema anterior, el eje de rotación del anillo exterior es paralelo al eje transversal del barco. Con este método de suspensión el eje ξ, relacionado con el barco, coincide con el eje x_1 de rotación del anillo exterior; el eje y de rotación del anillo interior coincide con el eje y_1 enlazado rigidamente con el anillo exterior. El ángulo de rotación del anillo exterior se designa por α (ángulo de cabeceo), el ángulo de rotación del anillo interior se designa por β.

Determinar la orientación del anillo interior de la suspensión respecto del barco.

Respuesta:

	ξ	η	ζ
x	$\cos\beta$	$\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta$	$-\cos\alpha \operatorname{sen}\beta$
y	0	$\cos\alpha$	$\operatorname{sen}\alpha$
z	$\operatorname{sen}\beta$	$-\operatorname{sen}\alpha\cos\beta$	$\cos\alpha\cos\beta$



Para el problema 20.2.

20.3. La posición de un cuerpo sólido que tiene un punto fijo O se define por tres ángulos de Euler: el ángulo de precisión ψ, el ángulo de nutación θ y el ángulo de rotación propia φ (véase el dibujo). Determinar los cosenos directrices del sistema de referencia móvil $Oxyz$.

Respuesta:

	ξ	η	ζ
x	$\cos\psi\cos\theta\cos\varphi - \operatorname{sen}\psi \operatorname{sen}\varphi$	$\operatorname{sen}\psi\cos\theta\cos\varphi + \cos\psi \operatorname{sen}\varphi$	$-\operatorname{sen}\theta\cos\varphi$
y	$-\cos\psi\cos\theta \operatorname{sen}\varphi -$ $-\operatorname{sen}\psi\cos\varphi$	$-\operatorname{sen}\psi\cos\theta \operatorname{sen}\varphi +$ $+\cos\psi\cos\varphi$	$\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi$
z	$\cos\psi \operatorname{sen}\theta$	$\operatorname{sen}\psi \operatorname{sen}\theta$	$\cos\theta$

20.4. Conociendo las velocidades de variación de los ángulos de Euler determinar la velocidad angular del cuerpo y sus proyecciones sobre los ejes de los sistemas de referencia fijo $O\xi\eta\zeta$ y móvil $Oxyz$.

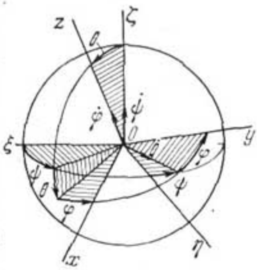
Respuesta: $\omega = \sqrt{\dot\psi^2 + \dot\theta^2 + \dot\varphi^2 + 2\dot\psi\dot\varphi\cos\theta}$;

$$\omega_\xi = \dot\varphi \operatorname{sen}\theta\cos\psi - \dot\theta\operatorname{sen}\psi, \quad \omega_\eta = \dot\varphi\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\psi + \dot\theta\cos\psi,$$

$$\omega_\zeta = \dot\varphi\cos\theta + \dot\psi; \quad \omega_x = -\dot\psi\operatorname{sen}\theta\cos\varphi + \dot\theta\operatorname{sen}\varphi,$$

$$\omega_y = \dot\psi\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi + \dot\theta\cos\varphi, \quad \omega_z = \dot\psi\cos\theta + \dot\varphi.$$

20.5. Para determinar el movimiento de rotación de un avión, con éste se enlaza el sistema de coordenadas ortogonales $Cxyz$; el eje x está dirigido por el eje del avión, de la cola a la cabina del piloto, el eje y está dispuesto en el plano de simetría del avión, y el eje z está dirigido por la envergadura del ala a la derecha del piloto (C es el centro de gravedad del avión). Los desplazamientos angulares del avión respecto de los ejes $C\xi\eta\zeta$ (el eje horizontal ξ está dirigido por el rumbo del avión, el eje η, verticalmente hacia arriba, el eje horizontal ζ es perpendicular a los ejes ξ y η) se determinan como se muestra en el dibujo, por tres ángulos del avión: ángulo de guiñada ψ, ángulo de inclinación longitudinal θ y ángulo de inclinación lateral φ.



Para los problemas 20.3 y 20.4.

Determinar la orientación del avión (del sistema de referencia $Cxyz$ respecto al triedro $C\xi\eta\zeta$.

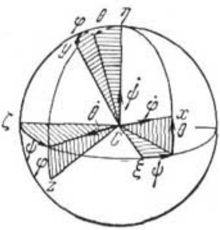
Respuesta:

	ξ	η	ζ
x	$\cos\psi\cos\theta$	$\operatorname{sen}\theta$	$-\operatorname{sen}\psi\cos\theta$
y	$\operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\varphi - \cos\psi\operatorname{sen}\theta\cos\varphi$	$\cos\theta\cos\varphi$	$\cos\psi\operatorname{sen}\varphi + \operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\theta\cos\varphi$
z	$\operatorname{sen}\psi\cos\varphi + \cos\psi\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi$	$-\cos\theta\operatorname{sen}\varphi$	$\cos\psi\cos\varphi - \operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi$

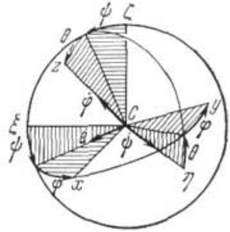
20.6. Conociendo las velocidades de variación de los ángulos del avión determinar las proyecciones de la velocidad angular del avión sobre los ejes de los sistemas de coordenadas $Cxyz$ y $C\xi\eta\zeta$ (véase el dibujo del problema anterior)

Respuesta: $\omega_x = \dot{\psi} \operatorname{sen} \theta + \dot{\varphi}$,

$$\omega_y = \dot{\psi} \cos \theta \cos \varphi + \dot{\theta} \operatorname{sen} \varphi,$$
$$\omega_z = -\dot{\psi} \cos \theta \operatorname{sen} \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi;$$
$$\omega_\xi = \dot{\varphi} \cos \psi \cos \theta + \dot{\theta} \operatorname{sen} \psi,$$
$$\omega_\eta = \dot{\varphi} \operatorname{sen} \theta + \dot{\psi},$$
$$\omega_\zeta = -\dot{\varphi} \operatorname{sen} \psi \cos \theta + \dot{\theta} \cos \psi.$$



Para los problemas 20.5. y 20.6.



Para los problemas 20.7. y 20.8.

20.7. Para estudiar el balanceo de un barco y su estabilidad de rumbo se introducen tres ángulos de barco: de diferencia de calados ψ, de escora θ y de guiñada φ. El sistema de referencia $Cxyz$ está rígidamente ligado con el barco; C es el centro de gravedad del barco; el eje x está dirigido de popa a proa, el eje y, hacia el babor, el eje z es perpendicular a la cubierta; el sistema de coordenadas $C\xi\eta\zeta$ está orientado respecto del rumbo del barco: el eje ζ es vertical, el eje horizontal ξ está dirigido por el rumbo, el eje horizontal η, hacia la izquierda del rumbo (en el dibujo se muestran los sistemas de ejes introducidos por A. N. Krylov).

Determinar la orientación del barco (de los ejes coordenados $Cxyz$) respecto del triedro $C\xi\eta\zeta$.

Respuesta:

	ξ	η	ζ
x	$\cos \psi \cos \varphi + \operatorname{sen} \psi \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi$	$\cos \theta \operatorname{sen} \varphi$	$-\operatorname{sen} \psi \cos \varphi + \cos \psi \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi$
y	$-\cos \psi \operatorname{sen} \varphi + \operatorname{sen} \psi \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi$	$\cos \theta \cos \varphi$	$\operatorname{sen} \psi \operatorname{sen} \varphi + \cos \psi \operatorname{sen} \theta \cos \varphi$
z	$\operatorname{sen} \psi \cos \theta$	$-\operatorname{sen} \theta$	$\cos \psi \cos \theta$

20.8. Conociendo las velocidades de variación de los ángulos del barco determinar las proyecciones de la velocidad angular del barco sobre los ejes de los sistemas de referencia $Cxyz$ y $C\xi\eta\zeta$ (véase el dibujo para el problema anterior).

Respuesta: $\omega_x = \dot\psi \cos\theta \operatorname{sen}\varphi + \dot\theta \cos\varphi$,

$\omega_\xi = \dot\theta \cos\psi + \dot\varphi \operatorname{sen}\psi \cos\theta$,

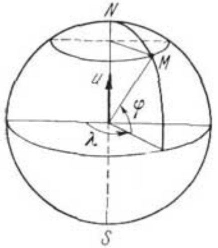
$\omega_y = \dot\psi \cos\theta \cos\varphi - \dot\theta \operatorname{sen}\varphi$, $\omega_\eta = \dot\psi - \dot\varphi \operatorname{sen}\theta$,

$\omega_z = -\dot\psi \operatorname{sen}\theta + \dot\varphi$; $\omega_\zeta = -\dot\theta \operatorname{sen}\psi + \dot\varphi \cos\psi \cos\theta$.

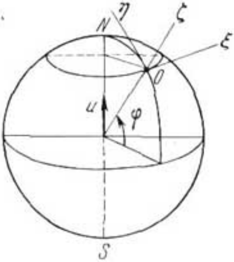
20.9. El punto M (el centro de gravedad de un avión o de un barco) se desplaza sobre la superficie de la Tierra que se considera como un globo de radio R*); la componente oriental de la velocidad del punto es igual a v_E y la componente norte equivale a v_N.

Calcular la velocidad de variación de la latitud φ y la longitud λ de la posición actual del punto M.

Respuesta: $\dot\varphi = \frac{v_N}{R}$, $\dot\lambda = \frac{v_E}{R\cos\varphi}$; cuando v_E y v_N son positivas la componente $\dot\varphi$ está dirigida hacia el oeste y la $\dot\lambda$, a lo largo del eje SN de rotación de la Tierra del Polo Sur al Polo Norte.



Para el problema 20.9.



Para el problema 20.10.

20.10. Para estudiar el movimiento cerca de la superficie de la tierra de los cuerpos (aviones, cohetes, barcos) y de los instrumentos instalados en éstos, se introduce un triedro de coordenadas móvil llamado triedro de Darboux. Durante la orientación geográfica del triedro de Darboux $O\xi\eta\zeta$ el eje horizontal ξ se dirige hacia el este, el eje horizontal η, hacia el norte y el eje ζ, verticalmente hacia arriba.

*) Aquí y en adelante el achatamiento de la Tierra se desprecia.

Determinar las proyecciones de la velocidad angular del triedro $O\xi\eta\zeta$ sobre los ejes ξ, η, ζ, si las proyecciones de la velocidad de su origen (del punto O) respecto a la Tierra son iguales a $v_\xi = v_E$, $v_\eta = v_N$, $v_\zeta = 0$; la velocidad angular de rotación de la Tierra es igual a U; el radio de la Tierra es R.

Respuesta: $\omega_\xi = -\dot{\varphi} = -\frac{v_N}{R}$;

$$\omega_\eta = (U + \dot{\lambda}) \cos\varphi = \left(U + \frac{v_E}{R\cos\varphi}\right)\cos\varphi;$$

$$\omega_\zeta = (U + \dot{\lambda}) \operatorname{sen}\varphi = \left(U + \frac{v_E}{R\cos\varphi}\right)\operatorname{sen}\varphi.$$

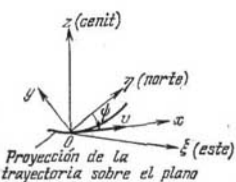
20.11. El triedro de Darboux $Oxyz$ sobre la superficie de la Tierra no está orientado geográficamente, como se hizo en el problema anterior, sino por la trayectoria de la base del triedro respecto de la Tierra, el eje x está dirigido horizontalmente por la velocidad $\boldsymbol{v}$ del vértice O (centro de gravedad de un avión, barco) del triedro respecto de la Tierra, el eje y se dirige horizontalmente a la izquierda del eje x y el eje z, verticalmente hacia arriba.

Determinar las proyecciones de la velocidad angular del triedro $Oxyz$, si la velocidad del punto O es igual a v, su rumbo se determina por el ángulo ψ (el ángulo entre la dirección hacia el norte y la velocidad relativa del punto O).

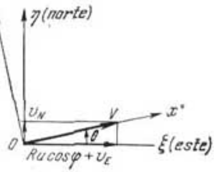
Respuesta: $\omega_x = U\cos\varphi\cos\psi$; $\quad \omega_y = U\cos\varphi\operatorname{sen}\psi + \frac{v}{R}$;

$$\omega_z = (U + \dot{\lambda})\operatorname{sen}\varphi + \dot{\psi} = U\operatorname{sen}\varphi + \frac{v}{\rho}.$$

Aquí R, U, φ y λ tienen los valores introducidos en los problemas 20.9. y 20.10, ρ es el radio de curvadura geodésica de la trayectoria ($\rho > 0$ para $\psi < 0$, $\rho < 0$ para $\psi > 0$).



Para el problema 20.11.



Para el problema 20.12.

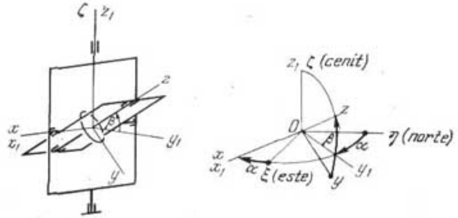
20.12. El triedro de Darboux $Ox^0y^0z^0$ sobre la superficie de la Tierra está orientado del modo siguiente: el eje x^0 se dirige por la velocidad absoluta $\boldsymbol{V}$ del punto O (se supone que el punto se desplaza sobre la superficie de la Tierra), el eje horizontal y^0 se dirige a la izquierda del eje x^0, el eje z^0 es vertical.

Determinar las proyecciones de la velocidad angular del triedro $Ox^0y^0z^0$, si las componentes de la velocidad del punto O respecto de la Tierra son iguales a v_E y v_N.

Respuesta: $\omega_{x^0}=0$; $\omega_{y^0}=\frac{V}{R}$, $\omega_{z^0}=(U+\dot{\lambda})\operatorname{sen}\varphi+\dot{\theta}$, donde R, U, φ y λ tienen los valores introducidos en los problemas 20.9. y 20.10.

$$V=\sqrt{(v_E+RU\cos\varphi)^2+v_N^2} \quad \text{y} \quad \operatorname{tg}\theta=\frac{v_N}{v_E+RU\cos\varphi}.$$

20.13. Un giroscopio de dirección está montado sobre una suspensión cardánica. El sistema de coordenadas $x_1y_1z_1$ está ligado con el cuadro exterior (su eje de rotación es vertical), el sistema xyz está ligado con el cuadro interior (su eje x de rotación es horizontal). El eje z del cuadro interior es, al mismo tiempo, el eje de rotación propia del giroscopio.



Para el problema 20.13.

Determinar: 1) la orientación del eje z de rotación del giroscopio respecto de los ejes $\xi\eta\zeta$ orientados geográficamente (véase el problema 20.10), si la rotación del cuadro exterior (del eje y_1) se cuenta a partir del plano meridiano (el plano $\eta\zeta$) en el sentido de las agujas del reloj, y se define por el ángulo α, la elevación del eje z sobre el horizonte se determina por el ángulo β;

2) las proyecciones de la velocidad angular de rotación del triedro xyz sobre los ejes x, y, z, suponiendo que el punto O de suspensión del giroscopio es fijo respecto de la Tierra.

Respuesta: 1)

	ξ	μ	ζ
z	$\operatorname{sen}\alpha\cos\beta$	$\cos\alpha\cos\beta$	$\operatorname{sen}\beta$

2) $\omega_x = \dot{\beta} - U \cos\varphi \operatorname{sen}\alpha$,
$\omega_y = \dot{\alpha} \cos\beta + U (\cos\varphi \cos\alpha \operatorname{sen}\beta - \operatorname{sen}\varphi \cos\beta)$,
$\omega_z = \dot{\alpha} \operatorname{sen}\beta + U (\cos\varphi \cos\alpha \cos\beta + \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\beta)$,
donde U es la velocidad de rotación de la Tierra, φ es la latitud del lugar.

20.14. Para los datos del problema anterior determinar las proyecciones de la velocidad angular de rotación del triedro xyz, si las componentes norte y oriental de la velocidad del punto de la suspensión son respectivamente iguales a v_N y v_E.

Respuesta: $\omega_x = \dot{\beta} - \left(U + \frac{v_E}{R\cos\varphi}\right)\cos\varphi \operatorname{sen}\alpha - \frac{v_N}{R}\cos\alpha$,

$\omega_y = \dot{\alpha}\cos\beta + \left(U + \frac{v_E}{R\cos\varphi}\right)(\cos\varphi\cos\alpha\operatorname{sen}\beta -$

$- \operatorname{sen}\varphi\cos\beta) - \frac{v_N}{R}\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$,

$\omega_z = \dot{\alpha}\operatorname{sen}\beta + \left(U + \frac{v_E}{R\cos\varphi}\right)(\cos\varphi\cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\varphi \times$
$\times \operatorname{sen}\beta)$, donde R es el radio de la Tierra.

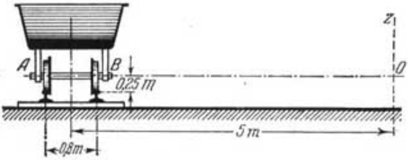
20.15. El movimiento de un cuerpo alrededor de un punto fijo está dado por los ángulos de Euler:

$$\varphi = 4t, \quad \psi = \frac{\pi}{2} - 2t, \quad \theta = \frac{\pi}{3}.$$

Determinar las coordenadas del punto que describe el hodógrafo de la velocidad angular, la velocidad y la aceleración angulares del cuerpo respecto de los ejes fijos x, y, z.

Respuesta: $x = \omega_x = 2\sqrt{3}\cos 2t$, $\quad y = \omega_y = -2\sqrt{3}\operatorname{sen} 2t$,
$z = \omega_z = 0$; $\quad \omega = 2\sqrt{3}s^{-1}$; $\quad \varepsilon = 4\sqrt{3}s^{-2}$.

20.16. Hallar los axoides fijo y móvil de la rueda exterior de un vagón que se mueve sobre una vía horizontal, cuyo radio medio de curvatura es igual a 5 m, el radio de la rueda es de 0,25 m, el ancho de la vía es de 0,80 m.



Para el problema 20.16.

Nota. La rueda gira junto con el vagón alrededor del eje vertical Oz que pasa por el centro de curvadura de la vía y respecto del vagón alrededor del eje AB, es decir, gira alrededor del punto fijo O.

Respuesta: El axoide fijo es un cono, cuyo eje coincide con el eje Oz y cuyo ángulo en el vértice $\alpha = 2 \operatorname{arctg} 21{,}6 = 174°42'$. El axoide móvil es un cono con el eje AB y el ángulo en el vértice $\beta = 2 \operatorname{arctg} 0{,}0463 = 5°18'$.

20.17. El movimiento de un cuerpo alrededor de un punto fijo está dado con ayuda de los ángulos de Euler por las ecuaciones siguientes: $\varphi = nt$, $\psi = \pi/2 + ant$, $\theta = \pi/3$. Determinar las proyecciones de la velocidad y de la aceleración angulares del cuerpo sobre los ejes fijos, si a y n son magnitudes constantes. Indicar también el valor del parámetro a para el cual el axoide fijo del cuerpo será el plano Oxy.

Respuesta: $\omega_x = \frac{n\sqrt{3}}{2} \cos ant$, $\quad \omega_y = \frac{n\sqrt{3}}{2} \operatorname{sen} ant$,

$$\omega_z = n\left(a + \frac{1}{2}\right); \quad \varepsilon_x = -\frac{an^2\sqrt{3}}{2} \operatorname{sen} ant,$$

$$\varepsilon_y = \frac{an^2\sqrt{3}}{2} \cos ant, \quad \varepsilon_z = 0; \; a = -\frac{1}{2}.$$

20.18. Los ángulos de Euler que determinan la posición del cuerpo, varían de acuerdo con la ley (la precesión regular) $\psi = \psi_0 + n_1 t$, $\theta = \theta_0$, $\varphi = \varphi_0 + n_2 t$, *donde* ψ_0, θ_0, φ_0, *son los valores iniciales de* los ángulos, n_1 y n_2 son números constantes equivalentes a las velocidades angulares correspondientes.

Determinar la velocidad angular ω del cuerpo, los axoides fijo y móvil.

Respuesta: 1) $\omega = \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + 2n_1 n_2 \cos \theta_0}$;

2) el axoide fijo es el cono circular $\xi^2 + \eta^2 - \frac{n_2^2 \operatorname{sen}^2 \theta_0}{(n_2 \cos \theta_0 + n_1)^2} \zeta^2 = 0$ con el eje ζ y el ángulo de abertura $2 \arcsen \frac{n_2 \operatorname{sen} \theta_0}{\omega}$;

3) el axoide móvil es el cono circular $x^2 + y^2 - \frac{n_1^2 \operatorname{sen}^2 \theta_0}{(n_1 \cos \theta_0 + n_2)^2} z^2 = 0$ con el eje z y el ángulo de abertura $2 \arcsen \frac{n_1 \operatorname{sen} \theta_0}{\omega}$.

Capítulo VII

MOVIMIENTO COMPUESTO DEL PUNTO

§ 21. ECUACIONES DE MOVIMIENTO DEL PUNTO

21.1. Determinar la ecuación del movimiento rectilíneo del punto compuesto de dos oscilaciones harmónicas:

$$x_1 = 2\cos(\pi t + \pi/2), \quad x_2 = 3\cos(\pi t + \pi).$$

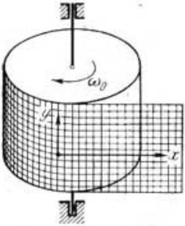
Respuesta: $x = \sqrt{13}\cos(\pi t + \alpha)$, donde $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{2}{3} = 33°40'$.

21.2. El tambor de un registrador gira uniformemente con la velocidad $\omega_0\ s^{-1}$. El radio del tambor es r. El autorregistrador está unido con la pieza que se desplaza por la vertical de acuerdo con la ley

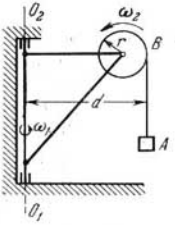
$$y = a \operatorname{sen} \omega_1 t.$$

Hallar la ecuación de la curva que escribirá la pluma sobre la cinta de papel.

Respuesta: $y = a \operatorname{sen}\frac{\omega_1 x}{\omega_0 r}$.



Para el problema 21.2.



Para el problema 21.3.

21.3. Durante el giro de una grúa giratoria alrededor del eje O_1O_2 con una velocidad angular constante ω_1 la carga A se eleva con ayuda de un cable enrollado sobre el tambor B. El tambor B de radio r gira con la velocidad angular constante ω_2.

Determinar la trayectoria absoluta de la carga, si la longitud de la flecha de la grúa es igual a d.

Respuesta: La línea helicoidal, cuya ecuación es

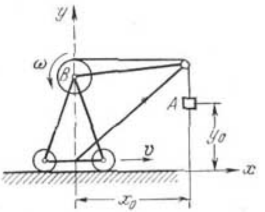
$$x = d\cos\frac{\omega_1}{\omega_2}\cdot\frac{z}{r}, \quad y = d\operatorname{sen}\frac{\omega_1}{\omega_2}\cdot\frac{z}{r},$$

el eje x pasa por el eje O_1O_2 y por la posición inicial de la carga el eje z está dirigido hacia arriba a lo largo del eje de rotación de la grúa.

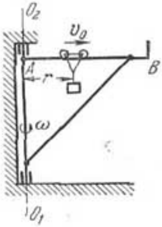
21.4. Durante el funcionamiento simultáneo de los mecanismos de elevación de la carga y de desplazamiento de la grúa, la carga A se desplaza en las direcciones horizontal y vertical. El tambor B de radio $r=50$ cm, sobre el cual está enrollado el cable que sostiene la carga A, gira al ponerse en marcha con la velocidad angular $\omega=2\pi\ s^{-1}$. La grúa se desplaza en sentido horizontal con una velocidad constante $v=0{,}5$ m/s.

Determinar la trayectoria absoluta de la carga, si las coordenadas iniciales de la carga son $x_0=10$ m, $y_0=6$ m.

Respuesta: $y=\frac{x-x_0}{v}\omega r+y_0=6{,}28x-56{,}8$.



Para el problema 21.4.



Para el problema 21.5.

21.5. El brazo AB de una grúa giratoria gira alrededor del eje O_1O_2 con una velocidad angular constante ω. Un carro se desplaza sobre este brazo horizontal de A hacia B con una velocidad constante v_0.

Determinar la trayectoria absoluta del carro, si en el instante inicial el carro se encontraba sobre el eje O_1O_2.

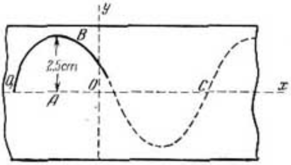
Respuesta: La trayectoria es una espiral de Arquímedes

$$r=\frac{v_0}{\omega}\varphi,$$

donde r es la distancia entre el carro y el eje de rotación, φ es el ángulo de rotación de la grúa alrededor del eje O_1O_2.

21.6. La cinta de un aparato registrador de movimientos oscilatorios se desplaza en la dirección Ox con la velocidad de 2 m/s. El cuerpo que oscila a lo largo del eje Oy describe en la cinta una sinusoide, cuya ordenada máxima es $AB=2{,}5$ cm, su longitud O_1C es igual a 8 cm.

Hallar la ecuación del movimiento oscilatorio del cuerpo, suponiendo que el punto O de la sinusoide corresponde a la posición del cuerpo para $t=0$.



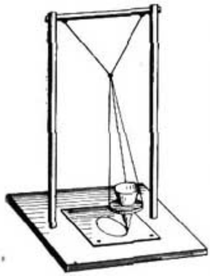
Para el problema 21.6.

Respuesta: $y=2{,}5\,\mathrm{sen}\,(50\pi t)$ cm.

21.7. Un tranvía se desplaza uniformemente por un tramo rectilíneo horizontal de la vía con la velocidad $v=18$ km/h, la carrocería efectúa sobre las ballestas oscilaciones harmónicas de amplitud $a=0{,}8$ cm y de período $T=0{,}5$ s.

Hallar la ecuación de la trayectoria del centro de gravedad de la carrocería, si su distancia media del asiento de la vía es $h=1{,}5$ m. Para $t=0$ el centro de gravedad se encuentra en la posición media y la velocidad de oscilación está dirigida hacia arriba. El eje Ox se dirige horizontalmente por el asiento de la vía en el sentido del movimiento, el eje Oy, verticalmente hacia arriba por la posición del centro de gravedad cuando $t=0$.

Respuesta: $y=1{,}5+0{,}008\,\mathrm{sen}\,0{,}8\pi x$.



Para el problema 21.8.

21.8. Determinar las ecuaciones de la trayectoria del movimiento compuesto del extremo de un péndulo doble que efectúa simultáneamente dos oscilaciones harmónicas mutuamente perpendiculares de la misma frecuencia, pero de amplitudes y fases distintas, si las ecuaciones de las oscilaciones indicadas son

$$x=a\,\mathrm{sen}\,(\omega t+\alpha), \quad y=b\,(\mathrm{sen}\,\omega t+\beta).$$

Respuesta: La elipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{2xy}{ab}\cos(\alpha-\beta)=\mathrm{sen}^2(\alpha-\beta).$$

21.9. El extremo de un péndulo doble describe una figura de Lissajoux obtenida al adicionar dos oscilaciones harmónicas mutuamente perpendiculares

$$x = a \operatorname{sen} 2\omega t, \quad y = a \operatorname{sen} \omega t.$$

Hallar la ecuación de la trayectoria.

Respuesta: $a^2x^2 = 4y^2(a^2 - y^2)$.

21.10. Un tren se desplaza uniformemente con la velocidad de 30 km/h; la linterna de señales, colgada en el último vagón, cae de su soporte.

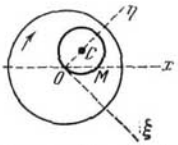
Determinar la trayectoria del movimiento absoluto de la linterna y la longitud del camino s recorrido por el tren durante el tiempo de caída de la linterna, si ésta se encontraba de la tierra a la altura de 4,905 m. Los ejes de coordenadas deben ser trazados por la posición inicial de la linterna, el eje Ox, horizontalmente en el sentido del movimiento del tren, el eje Oy, verticalmente hacia abajo.

Respuesta: Una parábola con eje vertical $y = 0{,}0706x^2$, $s = 8\frac{1}{3}$ m (x, y se expresan en metros, t, en segundos).

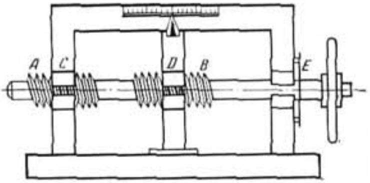
21.11. La cuchilla M efectúa movimiento alternativo transversal de acuerdo con la ley $x = a \operatorname{sen} \omega t$.

Hallar la ecuación de la trayectoria del extremo de la cuchilla M respecto del disco que gira uniformemente con la velocidad angular ω alrededor del eje O que interseca la trayectoria absoluta de la cuchilla.

Respuesta: $\xi^2 + (\eta - a/2)^2 = a^2/4$, que es una circunferencia de radio $a/2$ con centro en el punto C (véase el dibujo).



Para el problema 21.11.



Para el problema 21.12.

21.12. En ciertos aparatos de medida y de división, para desplazar el indicador se utiliza un tornillo diferencial compuesto del eje AB que tiene en su parte A un filete de tornillo de paso h_1 mm, y en la parte B, un roscado de paso $h_2 < h_1$. La parte A gira en una tuerca fija C, la parte B está abarcada por el elemento D, privado de movimiento de rotación y ligado con el indicador que se desliza por la escala fija.

1) Determinar el desplazamiento del indicador si el volante del eje hace $1/n$ parte de vuelta (la escala correspondiente está marcada sobre el disco E), si $n=200$, $h_1=0{,}5$ mm y $h_2=0{,}4$ mm. Ambos filetes son a la derecha o a la izquierda.

2) ¿Cómo variará la indicación del aparato, si el filete de tornillo en la parte A es a la izquierda y en la parte B, a la derecha?

Respuesta: 1) $s=\frac{1}{n}(h_1-h_2)=0{,}0005$ mm,

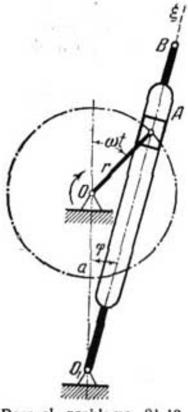
2) $s=\frac{1}{n}(h_1+h_2)=0{,}0045$ mm.

21.13. El mecanismo de aceleración de una cepilladora se compone de dos árboles paralelos O y O_1, la manivela OA y la colisa O_1B. El extremo de la manivela OA está articulado con la corredera que se desliza a lo largo de la ranura de la colisa O_1B.

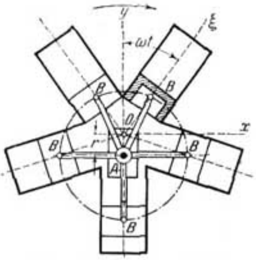
Hallar la ecuación del movimiento relativo de la corredera en la ranura de la colisa y la ecuación de rotación de la colisa, si la manivela OA de longitud r gira con una velocidad angular constante ω, la distancia entre los ejes de los árboles es $OO_1=a$.

Respuesta: $\xi=\sqrt{a^2+r^2+2ar\cos\omega t}$;

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{r\operatorname{sen}\omega t}{a+r\cos\omega t}.$$



Para el problema 21.13.



Para el problema 21.14.

21.14. En el motor rotativo, representado esquemáticamente en el dibujo, los cilindros, fijados al cárter, giran con éste alrededor del eje fijo del árbol O, las bielas de los pistones giran alrededor del gorrón A de la manivela fija OA.

Indicar: 1) la trayectoria del movimiento absoluto de los puntos B de los pistones y 2) la ecuación aproximada de su movimiento relativo respecto de los cilindros, si éstos giran con la velocidad angular ω. Viene dado: $OA=r$ y $AB=l$. El origen de los ejes Ox y Oy se encuentra en el centro del árbol. Se considera que $\lambda=r/l$ es pequeño.

Respuesta: 1) La circunferencia $x^2+(y+r)^2=l^2$,

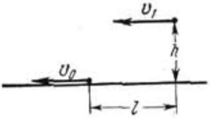
2) $\xi=l\left(1-\lambda\cos\omega t-\frac{\lambda^2}{2}\operatorname{sen}^2\omega t\right)$.

§ 22. ADICIÓN DE LAS VELOCIDADES DEL PUNTO

22.1. Un barco se desplaza rectilíneamente con la velocidad v_0. A la altura h sobre el nivel del mar vuela un avión con la velocidad v_1 en la misma dirección.

Determinar la distancia l, contada por la horizontal, a la que hace falta lanzar un gallardete para que éste caiga sobre el barco. La resistencia del aire al movimiento del gallardete se desprecia.

Respuesta: $l=(v_1-v_0)\sqrt{\frac{2h}{g}}$.



Para el problema 21.1.

22.2. Resolver el problema anterior si el avión vuela con la misma velocidad al encuentro del barco en movimiento.

Respuesta: $l=(v_1+v_2)\sqrt{\frac{2h}{g}}$.

22.3. *Un barco, que pasa por el punto A, se mueve con una* velocidad v_0 constante en módulo y dirección.

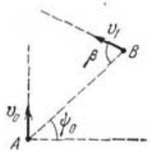
Determinar el ángulo β que debe formar con la recta AB una lancha al iniciar su movimiento desde el punto B para encontrarse con el barco, si la velocidad de la lancha es constante en módulo y dirección y es igual a v_1. La línea AB forma el ángulo ψ_0 con la perpendicular al rumbo del barco.

Respuesta: $\operatorname{sen}\beta=\frac{v_0}{v_1}\cos\psi_0$.

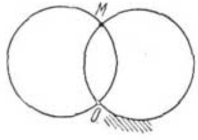
22.4. En el problema anterior determinar el tiempo T, durante el cual la lancha se encuentra con el barco, si la distancia inicial entre ellos era igual a $AB=l$.

Respuesta: $T=\frac{l}{v_0\operatorname{sen}\psi_0+\sqrt{v_1^2-v_0^2\cos^2\psi_0}}=\frac{l}{v_0}\times$

$$\times\frac{\operatorname{sen}\beta}{\cos(\psi_0-\beta)}=\frac{l}{v_1}\frac{\cos\psi_0}{\cos(\psi_0-\beta)}.$$



Para el problema 22.3.



Para el problema 22.5.

22.5. Una circunferencia de alambre gira en su plano alrededor de la articulación fija O con una velocidad angular constante ω.

¿Cómo se desplazará el punto M de intersección de esta circunferencia con una circunferencia fija del mismo radio R que pasa también por la articulación O?

Respuesta: El punto de intersección recorre cada una de las circunferencias con una velocidad constante igual a ωR.

22.6. El rumbo de un barco que se desplaza con la velocidad de a nudos es SE; la veleta en el mástil indica viento E. El barco disminuye su velocidad hasta $a/2$ nudos, la veleta indica viento NE.

Determinar: 1) la dirección y 2) la velocidad del viento.

Nota: la denominación del rumbo indica hacia dónde marcha el barco, la denominación del viento, de dónde éste sopla.

Respuesta: 1) Del norte; 2) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ nudos.

22.7. Para determinar la velocidad propia de un avión en el caso de viento, en la tierra se marca una línea recta de longitud conocida l, cuyos extremos deben ser bien vistos desde arriba. La dirección de esta recta debe coincidir con la del viento. Primeramente el avión vuela a lo largo de esta recta a favor del viento durante t_1s, luego contra el viento en el curso de t_2s.

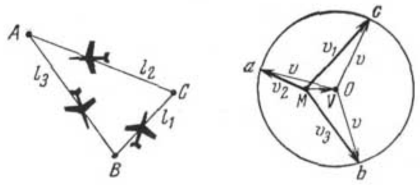
Determinar la velocidad propia v del avión y la velocidad V del viento.

Respuesta: $v=\frac{l}{2}\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}\right)$ m/s $=1{,}8l\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}\right)$ km/h;

$$V=\frac{l}{2}\left(\frac{1}{t_1}-\frac{1}{t_2}\right) \text{ m/s}.$$

22.8. Para determinar la velocidad propia v de un avión en el caso de viento, en la tierra se marca un polígono triangular ABC de lados $BC=l_1$, $CA=l_2$, $AB=l_3$ metros. Para cada lado del polígono se determina el tiempo de vuelo: t_1, t_2, t_3s.

Determinar la velocidad propia del avión v suponiendo que ésta es constante en magnitud, y la velocidad $\bar{V}$ del viento. *El problema debe ser resuelto gráficamente.*



Para el problema 22.8.

Explicación. Se llama velocidad propia del avión su velocidad respecto del aire.

Respuesta: Desde un punto arbitrario M se trazan tres vectores respectivamente iguales l_1/t_1, l_2/t_2, l_3/t_3 y paralelos a los lados BC, CA y AB del polígono. La magnitud de la velocidad v del avión se determina por el radio de la circunferencia que pasa por los extremos de estos vectores. La velocidad del viento se determina por el vector $\overline{MO}$.

22.9. El pasajero de un automóvil, que se desplaza con la velocidad de 72 km/h sobre una carretera horizontal, ve a través de la ventana lateral de la cabina las trayectorias de las gotas de lluvia inclinadas a 40° respecto de la vertical.

Determinar la velocidad absoluta de caída de las gotas de lluvia que cae verticalmente; el rozamiento de las gotas con el vidrio se desprecia.

Respuesta: $v=\frac{v_e}{\operatorname{tg} 40^\circ}=23{,}8$ m/s.

22.10. Las orillas de un río son paralelas; un bote partió del punto A y desplazándose perpendicularmente a las orillas llegó al punto C de la orilla opuesta 10 min después de la partida. El punto C se encuentra a 120 m río abajo del punto A.

Para que el bote, moviéndose con la misma velocidad relativa, pueda llegar del punto A al punto B, situado en la recta AB perpendicular a las orillas, éste debe desplazarse contra la corriente *bajo cierto ángulo respecto de la recta AB. En este caso el bote* alcanza la orilla opuesta en 12,5 min.

Determinar el ancho l del río, la velocidad relativa u del bote respecto del agua y la velocidad v de la corriente del río.

Respuesta: $l=200$ m; $u=20$ m/min; $v=12$ m/min.

22.11. Un barco navega hacia el sur con la velocidad de $30\sqrt{2}$ km/h. Un segundo barco mantiene rumbo hacia el sudeste con la velocidad de 30 km/h.

Hallar la magnitud y la dirección de la velocidad del segundo barco determinadas por un observador que se encuentra sobre la cubierta del primer barco.

Respuesta: $v_r = 30$ km/h y está dirigida hacia el noreste.

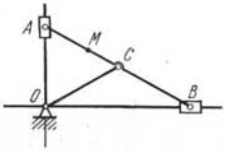
22.12. La regla AB de un elipsógrafo se pone en movimiento por medio de la barra OC que gira alrededor del eje O con una velocidad angular constante ω_0. Además, todo el mecanismo junto con las guías gira alrededor de un eje perpendicular al dibujo y que pasa por el punto O con una velocidad angular constante igual también a ω_0.

Hallar la velocidad absoluta de un punto arbitrario M de la regla en función de la distancia $AM = l$ suponiendo que la barra OC y todo el mecanismo giran en sentidos opuestos.

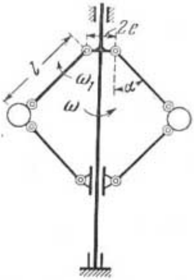
Respuesta: $v_M = (AB - 2l)\,\omega_0$.

22.13. Resolver el problema anterior para el caso cuando ambas rotaciones se efectúan en un mismo sentido.

Respuesta: v_M no depende de la posición del punto M y es igual a $AB \cdot \omega_0$.



Para el problema 22.12.



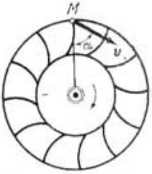
Para el problema 22.14.

22.14. Las bolas de un regulador centrífugo de Watt, que giran alrededor del eje vertical con la velocidad angular $\omega = 10$ s^{-1}, como resultado de la variación del régimen de trabajo de la máquina se alejan de este eje, poseyendo para sus barras en esta posición dada la velocidad angular $\omega_1 = 1{,}2$ s^{-1}.

Hallar la velocidad absoluta de las bolas del regulador en el instante examinado, si la longitud de las barras es $l = 50$ cm, la distancia entre los ejes de sus articulaciones es $2e = 10$ cm, los ángulos formados por las barras con el eje del regulador son $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha = 30°$.

Respuesta: $v = 306$ cm/s.

22.15. En una turbina hidráulica el agua al salir del aparato directriz va a parar a la rueda motriz giratoria, cuyas paletas, para evitar el choque del agua, cuando ésta entra, están instaladas de tal manera que la velocidad relativa v_r sea tangente a la paleta.



Para el problema 22.15.

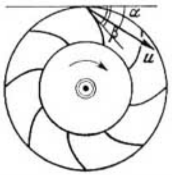
Hallar la velocidad relativa de la partícula de agua situada sobre la llanta exterior de la rueda (en el instante de entrada), si su velocidad absoluta a la entrada es $v = 15$ m/s; el ángulo entre la velocidad absoluta y el radio es $\alpha = 60°$, el radio de entrada es $R = 2$m, la velocidad angular de la rueda corresponde a $n = 30$ r.p.m.

Respuesta: $v_r = 10{,}06$ m/s; $(\widehat{v_r, R}) = 41°50'$.

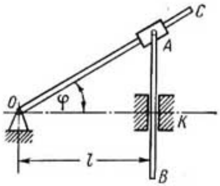
22.16. Las partículas de agua entran en la turbina con la velocidad $\boldsymbol{u}$. El ángulo entre la velocidad $\boldsymbol{u}$ y la tangente al rotor, trazado en el punto de entrada de la partícula, es igual a α. El diámetro exterior del rotor es D, su número de revoluciones por minuto es n.

Determinar el ángulo entre la paleta del rotor y la tangente en el punto de entrada del agua, con el cual el agua entrará sin choque (en este caso la velocidad relativa de las partículas debe estar dirigida a lo largo de las paletas).

Respuesta: $\operatorname{tg} \beta = \dfrac{60u \operatorname{sen} \alpha}{60u \cos \alpha - \pi D n}$



Para el problema 22.16.



Para el problema 22.17.

22.17. En un mecanismo de colisa, al oscilar la manivela OC alrededor del eje O, perpendicular al plano del dibujo, la corredera A, desplazándose por la manivela OC, pone en movimiento a la barra AB que se desliza en las guías verticales K. La distancia $OK=l$.

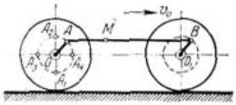
Determinar la velocidad de movimiento de la corredera A respecto a la manivela OC en función de la velocidad angular ω y del ángulo de rotación φ de la manivela.

Respuesta: $v_r=\frac{l\omega\,\mathrm{tg}\,\varphi}{\cos\varphi}$.

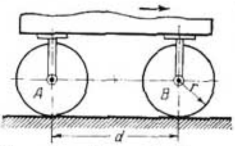
22.18. Hallar la velocidad absoluta de un punto cualquiera M de la biela de conexión AB que une las manivelas OA y O_1B de los ejes O y O_1, si los radios de las ruedas son iguales: $R=1$ m; los radios de las manivelas son $OA=O_1B=0{,}5$ m. La velocidad del carro es $v_0=20$ m/s.

Determinar la velocidad del punto M para cuatro instantes, cuando las manivelas OA y O_1B se encuentran en posición vertical u horizontal. Las ruedas giran sobre los rieles sin deslizamiento.

Respuesta: $v_1=10$ m/s; $v_2=30$ m/s; $v_3=v_4=22{,}36$ m/s.



Para el problema 22.18.



Para el problema 22.19.

22.19. Las ruedas A y B de un vagón, que se desplaza con la velocidad v por un riel rectilíneo, se mueven por éste sin deslizamiento. Los radios de las ruedas son iguales a r, la distancia entre los ejes es d.

Determinar la velocidad del centro de la rueda A respecto del sistema de coordenadas unido invariablemente con la rueda B.

Respuesta: La velocidad es igual a $\frac{vd}{r}$, es perpendicular a AB y está dirigida hacia abajo.

22.20. Un mecanismo está compuesto de dos árboles paralelos O y O_1, de la manivela OA y la colisa O_1B; el extremo A de la manivela OA se desliza a lo largo de la ranura de la colisa O_1B; la distancia OO_1 entre los ejes de los árboles es igual a a; la longitud de la manivela OA es igual a l, $l>a$. El árbol O gira con una velocidad angular constante ω.

Hallar: 1) la velocidad angular ω_1 del árbol O_1 y la velocidad relativa del punto A respecto de la colisa O_1B, expresándolas en función de la magnitud variable $O_1A=s$; 2) los valores máximos y mínimos de estas magnitudes; 3) las posiciones de la manivela, cuando $\omega_1=\omega$.

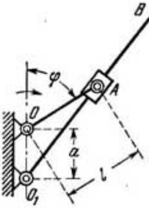
Respuesta: 1) $\omega_1 = \frac{\omega}{2}\left(1 + \frac{l^2 - a^2}{s^2}\right)$;

$$v_r = \frac{\omega}{2s}\sqrt{(l+s+a)(l+s-a)(a+l-s)(a+s-l)};$$

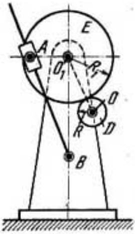
2) $\omega_{1\ \text{máx}} = \omega\frac{l}{l-a}$; $\omega_{1\ \text{mín}} = \omega\frac{l}{l+a}$;

$v_{r\ \text{máx}} = a\omega$; $v_{r\ \text{mín}} = 0$;

3) $\omega_1 = \omega$ siendo $O_1B \perp O_1O$.



Para el problema 22.20.



Para el problema 22.21.

22.21. El dado A de la colisa oscilante del mecanismo de una cepilladora se pone en movimiento por un engranaje compuesto de la rueda dentada D y de la rueda dentada E que porta el eje del dado A en forma de bulón. Los radios de las ruedas dentadas son $R = 100$ mm, $R_1 = 350$ mm, $O_1A = 300$ mm, la distancia entre el eje O_1 de la rueda dentada E y el centro B de oscilación de la colisa es $O_1B = 700$ mm.

Determinar la velocidad angular de la colisa en los instantes cuando el segmento O_1A se encuentra en posición vertical (las posiciones superior e inferior) o es perpendicular a la colisa AB (las posiciones derecha e izquierda), si la velocidad angular de la rueda dentada es $\omega = 7\text{s}^{-1}$. Los puntos O_1 y B están situados sobre una misma vertical.

Respuesta: $\omega_{\text{I}} = 0{,}6\ \text{s}^{-1}$; $\omega_{\text{II}} = \omega_{\text{IV}} = 0$;

$\omega_{\text{III}} = 1{,}5\ \text{s}^{-1}$.

22.22. Determinar la velocidad angular de rotación de la colisa de un mecanismo de colisa y manivela para cuatro posiciones de la manivela, dos verticales y dos horizontales, si $a = 60$ cm, $l = 80$ cm, la velocidad angular de la manivela corresponde a $n = 30$ r. p. m. (véase el dibujo para el problema 22.20).

Respuesta: $\omega_{\text{I}} = \frac{4}{7}\pi\ \text{s}^{-1}$; $\omega_{\text{II}} = \omega_{\text{IV}} = 0{,}64\pi\ \text{s}^{-1}$;

$\omega_{\text{III}} = 4\pi\ \text{s}^{-1}$.

22.23. Determinar la velocidad absoluta del pistón de un motor rotativo para dos posiciones verticales y dos posiciones horizontales de la biela AB, si la longitud de la manivela $OA = r = 80$ mm, la longitud de la biela $AB = l = 240$ mm, el número de revoluciones del cilindro con el cárter es $n = 1200$ r. p. m. (véase el dibujo para el problema 21.14).

Respuesta: $v_{I} = 20{,}11$ m/s; $v_{II} = v_{IV} = 33{,}51$ m/s;
$v_{III} = 40{,}21$ m/s.

22.24. Las componentes oriental, norte y vertical de la velocidad del punto M respecto de la Tierra son respectivamente v_E, v_N, v_h. En el instante examinado la altura del punto sobre la superficie de la Tierra es h, la latitud del lugar es φ. El radio de la Tierra es R, su velocidad angular es ω.

Determinar las componentes de la velocidad absoluta del punto.

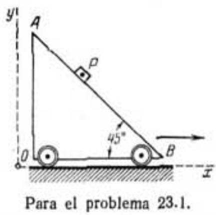
Respuesta: $v_x = v_E + (R + h)\,\omega\cos\varphi$; $v_y = v_N$; $v_z = v_h$ (el eje x está dirigido hacia el este, el eje y, hacia el norte, el eje z, verticalmente hacia arriba).

§ 23. ADICIÓN DE LAS ACELERACIONES DEL PUNTO

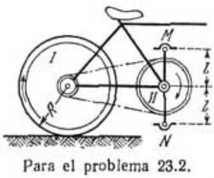
23.1. Un plano inclinado AB, que forma con el horizonte un ángulo de 45°, realiza un movimiento rectilíneo paralelo al eje Ox con una aceleración constante de 1 dm/s². El cuerpo P desciende por este plano con una aceleración relativa constante de $\sqrt{2}$ dm/s², las velocidades iniciales del cuerpo y del plano son iguales a cero, la posición inicial del cuerpo se determina por las coordenadas $x = 0$, $y = h$.

Determinar la trayectoria, la velocidad y la aceleración del movimiento absoluto del cuerpo.

Respuesta: $y = h - \frac{x}{2}$; $v = \sqrt{5}\,t$ dm/s; $w = \sqrt{5}$ dm/s².



Para el problema 23.1.



Para el problema 23.2.

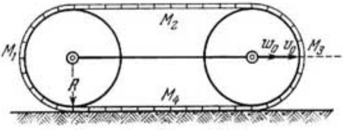
23.2. Un ciclista se desplaza sobre un tramo de vía rectilínea horizontal de acuerdo con la ley $s = 0{,}1t^2$ (s se expresa en metros, t, en segundos). Viene dado: $R = 350$ mm, $l = 180$ mm, $z_1 = 18$ dientes, $z_2 = 48$ dientes.

Determinar la aceleración absoluta de los ejes M y N de los pedales de la bicicleta (se supone que las ruedas se mueven sin deslizamiento) para $t = 10$ s, si en este instante la manivela MN se encuentra en posición vertical.

Respuesta: $w_M = 0{,}860$ m/s²; $w_N = 0{,}841$ m/s².

23.3. Determinar la aceleración absoluta de un punto cualquiera M de la biela de conexión AB que une las manivelas de los ejes O y O_1, si el carro se desplaza uniformemente sobre un tramo rectilíneo del camino con la velocidad $v_0 = 36$ km/h. Los radios de las ruedas $R = 1$ m, los radios de las manivelas $r = 0{,}75$ m (véase el dibujo para el problema 22.18).

Respuesta: $\omega = 75$ m/s².



Para el problema 23.4.

23.4. Hallar las velocidades y las aceleraciones de los puntos M_1, M_2, M_3 y M_4 de la oruga de un tractor que se desplaza sin deslizamiento sobre un camino rectilíneo con la velocidad v_0 y la aceleración w_0; los radios de las ruedas del tractor son iguales a R; el deslizamiento de la oruga sobre las llantas de las ruedas se desprecia.

Respuesta: $v_1 = v_3 = v_0\sqrt{2}$; $\quad v_2 = 2v_0$; $\quad v_4 = 0$.

$$w_1 = \sqrt{w_0^2 + \left(w_0 + \frac{v_0^2}{R}\right)^2}; \quad w_2 = 2w_0;$$

$$w_3 = \sqrt{w_0^2 + \left(w_0 - \frac{v_0^2}{R}\right)^2}; \quad w_4 = 0.$$

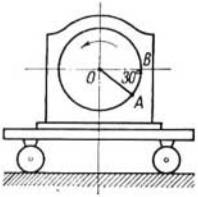
23.5. Sobre una carretilla que se desplaza horizontalmente hacia la derecha con una aceleración $w = 49{,}2$ cm/s², va instalado un motor eléctrico, cuyo rotor durante la puesta en marcha gira de acuerdo con la ecuación $\varphi = t^2$, el ángulo φ se mide en radianes. El radio del rotor es igual a 20 cm.

Determinar la aceleración absoluta del punto A de la llanta del rotor para $t = 1$ s, si en este instante el punto A se halla en la posición indicada en el dibujo.

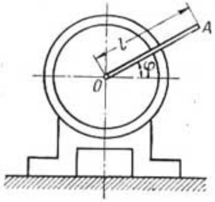
Respuesta: $w_A = 74{,}6$ cm/s² y está dirigida verticalmente hacia arriba.

23.6. Determinar en el problema anterior la velocidad angular de rotación uniforme del rotor, a la cual la aceleración absoluta del punto A en la posición B es igual a cero.

Respuesta: $\omega = 1{,}57\ s^{-1}$.



Para el problema 23.5.



Para el problema 23.7.

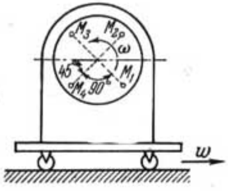
23.7. Una barra OA de longitud l está fijada bajo un ángulo recto al árbol de un motor eléctrico que gira de acuerdo con la ecuación $\varphi = \omega t$ ($\omega = \text{const}$); el motor eléctrico colocado sin sujeción alguna efectúa oscilaciones horizontales harmónicas en su cimentación de acuerdo con la ley $x = a \operatorname{sen} \omega t$.

Determinar la aceleración absoluta del punto A en el instante $t = \frac{\pi}{2\omega}$ s.

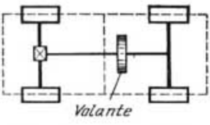
Respuesta: $w_A = \omega^2 \sqrt{a^2 + l^2}$.

23.8. Un motor está instalado sobre una carretilla que se desplaza horizontalmente a la derecha con una aceleración constante $w = 4$ cm/s². El motor gira de acuerdo con la ley $\varphi = \frac{1}{2} t^2$.

Determinar la aceleración absoluta en el instante $t = 1$ s de los cuatro puntos M_1, M_2, M_3, M_4 del rotor situados a una distancia $l = 2\sqrt{2}$ cm del eje del rotor y que en este instante ocupan la posición indicada en el dibujo.



Para el problema 23.8.



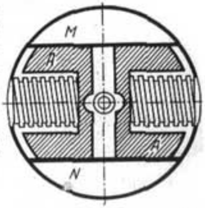
Para el problema 23.9.

Respuesta: $w_1 = 4\sqrt{2}$ cm/s²; $w_2 = 0$; $w_3 = 4\sqrt{2}$ cm/s²;
$w_4 = 8$ cm/s².

23.9. Un automóvil se desplaza con la aceleración $w_0 = 2$ m/s² sobre un tramo rectilíneo del camino. Sobre el árbol longitudinal va enmangado un volante giratorio de radio $R = 0{,}25$ m que en el instante examinado posee la velocidad angular $\omega = 4$ s^{-1} y la aceleración angular $\varepsilon = 4$s^{-2}.

Hallar la aceleración absoluta de los puntos de la llanta del volante en el instante examinado.

Respuesta: $w = 4{,}58$ m/s².



Para el problema 23.11.

23.10. Un avión vuela por una trayectoria rectilínea con una aceleración $w_0 = \text{const} = 4$ m/s², la hélice de diámetro $d = 1{,}8$ m gira uniformemente con una velocidad angular correspondiente a $n = 1800$ r.p.m.

Hallar las ecuaciones de movimiento, la velocidad y la aceleración del extremo de la hélice en el sistema de coordenadas fijo respecto de la Tierra, el eje Ox de este sistema de coordenadas coincide con el eje de la hélice. La velocidad inicial del avión es $v_0 = 0$.

Respuesta: $x = 2t^2$ m, $y = 0{,}9\cos 60\pi t$ m, $z = 0{,}9 \operatorname{sen} 60\pi t$ m;
$v = \sqrt{16t^2 + 2916\pi^2}$ m/s;
$w = 31945$ m/s².

23.11. En un regulador que gira alrededor del eje vertical con una velocidad angular constante $n = 180$ r. p. m., las pesas A fijadas a los extremos de un resorte efectúan oscilaciones harmónicas a lo largo de la ranura MN de tal modo que la distancia de su centro de gravedad del eje de rotación varía de acuerdo con la ley $x = (10 + 5 \operatorname{sen} 8\pi t)$ cm.

Determinar la aceleración del centro de gravedad de las pesas en el instante cuando la aceleración de Coriolis alcanza su valor máximo, e indicar los valores de la aceleración de Coriolis para las posiciones extremas de la pesa.

Respuesta: $w_a = 600\pi^2$ cm/s²; $w_c = 0$.

23.12. Un chorro de agua corre en un tubo horizontal OA que gira uniformemente alrededor del eje vertical con la velocidad angular correspondiente a $n = 60$ r.p.m.

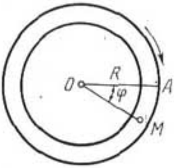
Determinar la aceleración de Coriolis w_c en el punto del chorro donde la velocidad relativa $v_r = 21/11$ m/s y está dirigida a lo largo de OA. Considerar que el valor aproximado de π es igual a 22/7.

Respuesta: $w_c = 24$ m/s^2.

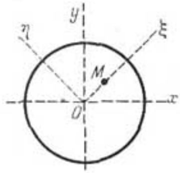
23.13. Un tubo circular de radio $R = 1$ m gira alrededor del eje horizontal O en el sentido de las agujas del reloj con una velocidad angular constante $\omega = 1 s^{-1}$. En el tubo cerca de su punto A oscila una bolita M de tal modo que el ángulo $\varphi = \operatorname{sen} \pi t$.

Determinar las aceleraciones absolutas de la bolita: la tangencial w_τ y la normal w_n en el instante $t = 2\frac{1}{6}$ s.

Respuesta: $w_\tau = -4{,}93$ m/s^2; $w_n = 13{,}84$ m/s^2.



Para el problema 23.13.



Para el problema 23.14.

23.14. Un disco gira alrededor de un eje perpendicular a su plano en el sentido de las agujas del reloj con una aceleración angular uniforme igual a 1 s^{-2}; en el instante $t = 0$ su velocidad angular es igual a cero. Un punto M oscila por uno de los diámetros del disco de tal modo que su coordenada $\xi = \operatorname{sen} \pi t$ dm, t se toma en segundos.

Determinar en el instante $t = 1\frac{2}{3}$ s las proyecciones de la aceleración absoluta del punto M sobre los ejes ξ, η enlazado con el disco.

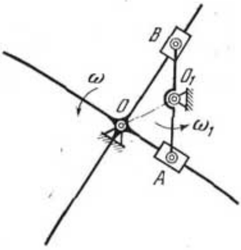
Respuesta: $w_\xi = 10{,}95$ dm/s^2; $w_\eta = -4{,}37$ dm/s^2.

23.15. Un punto se desplaza uniformemente con la velocidad relativa v_r por la cuerda de un disco que gira alrededor de su eje O, perpendicular al plano del disco, con la velocidad angular constante ω.

Determinar la velocidad y la aceleración absolutas del punto en el instante cuando éste se encuentra a la distancia más corta h del eje, se supone que el movimiento relativo del punto se efectúa en el sentido de rotación del disco.

Respuesta: $v = v_r + h\omega$; $w = \omega^2 h + 2\omega v_r$.

23.16. Para transmitir la rotación de un árbol a otro, paralelo al primero, se utiliza un manguito que representa un compás elíptico inverso, cuya manivela OO_1 está fijada. La manivela AB gira con la velocidad angular ω_1 alrededor del eje O_1 y hace girar la cruceta alrededor del eje O junto con el segundo árbol.



Para el problema 23.16.

Determinar la velocidad angular de rotación de la cruceta, así como las velocidades de transporte y relativa (respecto de la cruceta) y las aceleraciones (de transporte, relativa y de Coriolis) del punto A de la corredera para $\omega_1 = \text{const}$, si $OO_1 = AO_1 = O_1B = a$.

Respuesta: $\omega = \frac{\omega_1}{2}$; $v_e = a\omega_1 \operatorname{sen} \frac{\omega_1}{2} t$;

$$v_r = a\omega_1 \cos \frac{\omega_1}{2} t;$$

$$w_e = w_r = -\frac{a\omega_1^2}{2} \operatorname{sen} \frac{\omega_1}{2} t; \quad w_c = a\omega_1^2 \cos \frac{\omega_1}{2} t.$$

23.17. Un ciclista se desplaza por una plataforma horizontal que gira alrededor del eje vertical con una velocidad angular constante $\omega = \frac{1}{2}\ s^{-1}$; la distancia entre el ciclista y el eje de rotación de la plataforma es constante e igual a $r = 4$ m. La velocidad relativa del ciclista es $v_r = 4$ m/s y está dirigida en sentido contrario a la velocidad de transporte del punto correspondiente de la plataforma.

Determinar la aceleración absoluta del ciclista. Hallar también la velocidad relativa, con la cual él debe desplazarse para que su aceleración absoluta sea igual a cero.

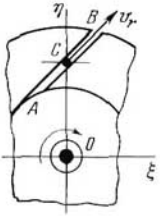
Respuesta: 1) $w = 1$ m/s^2 *y está dirigida por el radio hacia el centro del disco;*

2) $v_r = 2$ m/s.

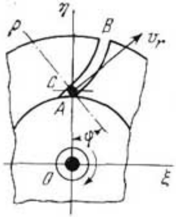
23.18. Un compresor con canales rectilíneos gira uniformemente con la velocidad angular ω alrededor del eje O perpendicular al plano del dibujo. El aire circula en los canales con una velocidad relativa constante v_r.

Hallar las proyecciones sobre los ejes de coordenadas, de la velocidad y de la aceleración absolutas de una partícula de aire situada en el punto C del canal AB, conociendo los datos siguientes: el canal AB forma con el radio OC un ángulo de 45°, $OC=0{,}5$ m, $\omega=4\pi$ s^{-1}, $v_r=2$ m/s.

Respuesta: $v_\xi=7{,}7$ m/s; $v_\eta=1{,}414$ m/s;
$w_\xi=35{,}54$ m/s^2;
$w_\eta=-114{,}5$ m/s^2.



Para el problema 23.18.



Para el problema 23.19.

23.19. Resolver el problema anterior para el caso de un canal curvilíneo, si el radio de curvatura del canal en el punto C es igual a ρ, el ángulo entre la normal a la curva AB en el punto C y el radio OC es igual a φ. El radio CO es igual a r.

Respuesta: $v_\xi=v_r\cos\varphi+r\omega$; $v_\eta=v_r\operatorname{sen}\varphi$;

$$w_\xi=\left(2v_r\omega-\frac{v_r^2}{\rho}\right)\operatorname{sen}\varphi;$$

$$w_\eta=-\left[r\omega^2+\left(2v_r\omega-\frac{v_r^2}{\rho}\right)\cos\varphi\right].$$

23.20. Expresar en función del tiempo la aceleración angular ε pe la colisa oscilante de una limadora, si la manivela de longitud r gira uniformemente con la velocidad angular ω; la distancia entre los ejes de rotación de la manivela y de la colisa $a>r$. Véase el dibujo para el problema 21.13).

Respuesta: $\varepsilon=\dfrac{(r^2-a^2)\,ar\omega^2\operatorname{sen}\omega t}{(a^2+r^2+2ar\cos\omega t)^2}$.

23.21. El taco A efectúa movimiento de transporte junto con la colisa, que gira con la velocidad angular ω y la aceleración angular ε alrededor del eje O_1 perpendicular al plano de la colisa, y movimiento relativo rectilíneo a lo largo de la ranura de la colisa con la velocidad v_r y la aceleración ω_r.

Determinar las proyecciones de la aceleración absoluta deltaco sobre los ejes móviles de coordenadas, unidos con la colisa, expre.

sándolas en función de la distancia variable $O_1A=s$. (Véase el dibujo para el problema 22.20.).

Respuesta: $w_\xi=w_r-s\omega^2$; $w_\eta=s\varepsilon+2v_r\omega$, los ejes ξ y η están dirigidos respectivamente a lo largo de la ranura y perpendicularmente a ésta.

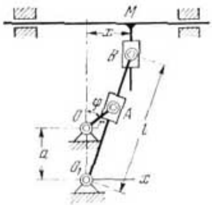
23.22. Determinar la aceleración angular de la colisa giratoria del mecanismo de colisa y manivela de una cepilladora para dos posiciones verticales y dos horizontales de la manivela, si la longitud de la manivela es $l=40$ cm, la distancia entre los ejes de la manivela y de la colisa es $a=30$ m, la velocidad angular de rotación uniforme de la manivela es $\omega=3$ s^{-1}. (Véase el dibujo para el problema 22.20).

Respuesta: $\varphi=0$ y $\varphi=180°$, $\varepsilon=0$; $\varphi=90°$; $\varepsilon=1{,}21$ s^{-2}; $\varphi=270°$; $\varepsilon=1{,}21$ s^{-2} (la rotación es retenida).

23.23. En el problema anterior, hallar la aceleración del movimiento relativo del taco de la colisa a lo largo de su ranura para las cuatro posiciones indicadas de la manivela.

Respuesta: $\varphi=0$, $w_r=154{,}3$ cm/s^2; $\varphi=90°$ y $\varphi=270°$; $w_r=103{,}7$ cm/s^2; $\varphi=180°$; $w_r=-1080$ cm/s^2.

23.24. Hallar la ecuación de movimiento, la velocidad y la aceleración del carro M de una cepilladora que se pone en movimiento por medio del mecanismo de colisa y manivela con la colisa oscilante O_1B. El esquema está indicado en el dibujo. La colisa está acoplada con el carro M con ayuda de la corredera B que se desliza respecto del carro a lo largo de una guía perpendicular al eje de su movimiento.



Para el problema 23.24.

Se conoce: $O_1B=l$, $OA=r$, $O_1O=a$, $r<a$; la manivela OA gira con una velocidad angular constante ω; el ángulo de rotación de la manivela se cuenta a partir del eje vertical.

Respuesta: $x=l\dfrac{r\,\text{sen}\,\omega t}{\sqrt{a^2+r^2+2ar\cos\omega t}}$;

$$v=rl\omega\frac{(a+r\cos\omega t)(a\cos\omega t+r)}{(a^2+r^2+2ar\cos\omega t)^{3/2}};$$

$$w=rl\omega^2\frac{a(r^2-a^2)(a+r\cos\omega t)-r^2(a\cos\omega t+r)^2}{(a^2+r^2+2ar\cos\omega t)^{5/2}}\,\text{sen}\,\omega t.$$

Nota: La coordenada se cuenta a partir de la vertical que pasa por el punto O.

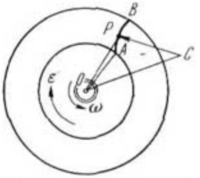
23.25. Hallar la aceleración de la cuchilla de una cepilladora de colisa oscilante para dos posiciones verticales y dos horizontales de la manivela, si la longitud de la manivela es $r=10$ cm, la distancia entre los centros de rotación de la manivela y de la colisa es $a=30$ cm, la longitud de la colisa es $l=60$ cm, la velocidad angular de rotación de la manivela es $\omega=4\ s^{-1}=\text{const}$. (Véase el dibujo para el problema 23.24).

Respuesta: Para $\varphi=0$ y $\varphi=180°$ $w_x=0$;
para $\varphi=90°$ y $\varphi=270°$ $w_x=\mp 221$ cm/s².

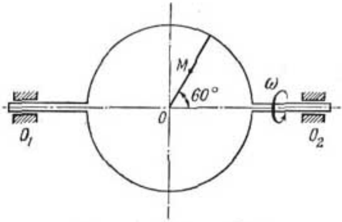
23.26. El radio de curvatura de la paleta AB de una turbina, que gira en sentido contrario de las agujas del reloj con una deceleración angular igual a 3 s^{-2}, es de 20 cm, el centro de curvatura se encuentra en un punto C, $OC=10\sqrt{10}$ cm. Una partícula de agua P que dista $OP=20$ cm del eje O de la turbina se desplaza por la paleta hacia el exterior con la velocidad de 25 cm/s y la aceleración tangencial de 50 cm/s² respecto de la paleta.

Determinar la aceleración absoluta de la partícula P en el instante cuando la velocidad angular de la turbina es igual a $2s^{-1}$.

Respuesta: $w_a=52$ cm/s².



Pa a el problema 23.26.



Para el problema 23.27.

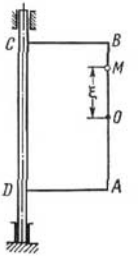
23.27. El punto M se desplaza por el radio de un disco en dirección del centro del disco a su llanta de acuerdo con la ley $OM=4t^2$ cm. El disco gira alrededor del eje O_1O_2 con una velocidad angular $\omega=2t\ s^{-1}$. El radio OM forma con el eje O_1O_2 un ángulo de 60°. Determinar la magnitud de la aceleración absoluta del punto M en el instante $t=1$ s.

Respuesta: $w_M=35{,}56$ m/s².

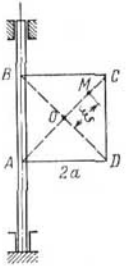
23.28. Un rectángulo $ABCD$ gira alrededor del lado CD con una velocidad angular $\omega=\frac{\pi}{2}s^{-1}=\text{const}$. El punto M se desplaza a lo largo del lado AB de acuerdo con la ley $\xi=a\,\text{sen}\,\frac{\pi}{2}t$ cm. Están dadas las dimensiones: $DA=CB=a$ cm.

Determinar la magnitud de la aceleración absoluta del punto en el instante $t = 1$ s.

Respuesta: $w_a = \frac{a\pi^2}{4}\sqrt{2}$ cm/s².



Para el problema 23.28.



Para el problema 23.29.

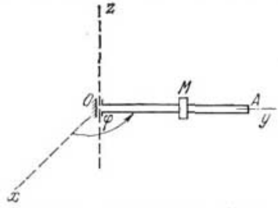
23.29. Un cuadrado *ABCD* de lado $2a$ cm gira alrededor del lado *AB* con una velocidad angular constante $\omega = \pi\sqrt{2}$ s⁻¹. El punto *M* efectúa a lo largo de la diagonal *AC* una oscilación armónica de acuerdo con la ley $\xi = a\cos\frac{\pi}{2}t$ cm.

Determinar la magnitud de la aceleración absoluta del punto para $t = 1$ s y $t = 2$ s.

Respuesta: $w_{a_1} = a\pi^2\sqrt{5}$ cm/s²;
$w_{a_2} = 0{,}44\ a\pi^2$ cm/s².

23.30. La barra *OA* gira alrededor del eje *z*, que pasa por el punto *O*, con una deceleración angular de 10 s⁻². Una arandela *M* se desliza a lo largo de esta barra a partir del punto *O*.

Determinar la aceleración absoluta de la arandela en el instante cuando ésta se encuentra a 60 cm de distancia del punto *O* y su velocidad y aceleración de movimiento a lo largo de la



Para los problemas 23.30. y 23.31.

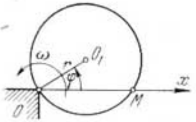
barra son respectivamente iguales a 120 cm/s y 90 cm/s², si en este instante la velocidad angular de la barra es igual a 5 s^{-1}.

Respuesta: $w_a = 1533$ cm/s² y forma con la dirección MO un ángulo de 23°.

23.31. La arandela M se desplaza a lo largo de una barra horizontal OA de tal modo que $OM = 0,5t^2$ cm. Simultáneamente la barra gira alrededor del eje vertical, que pasa por el punto O, de acuerdo con la ley $\varphi = t^2 + t$.

Determinar los componentes radial y transversal de la velocidad absoluta y de la aceleración absoluta de la arandela en el instante $t = 2$ s.

Respuesta: $v_r = 2$ cm/s, $v_\varphi = 10$ cm/s; $w_r = -49$ cm/s², $w_\varphi = 24$ cm/s².



Para el problema 23.32.

23.32. Un círculo de radio r gira con una velocidad angular constante ω alrededor del punto fijo O situado sobre su circunferencia. Durante la rotación el círculo interseca una recta fija horizontal, el eje x que pasa por el punto O.

Hallar la velocidad y la aceleración del punto M de intersección del círculo con el eje x en los movimientos de este punto respecto del círculo y del eje x. Expresar las magnitudes buscadas en función de la distancia $OM = x$.

Respuesta: Respecto de la recta Ox el punto M se desplaza con la velocidad de $-\omega\sqrt{4r^2 - x^2}$ y la aceleración de $-\omega^2 x$. Respecto del círculo el punto se desplaza en el sentido contrario a la rotación del círculo con la velocidad constante de $2\omega r$ y la aceleración de $4\omega^2 r$.

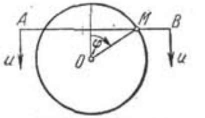
23.33. La recta horizontal AB se desplaza paralelamente a sí misma en sentido vertical con una velocidad constante u e interseca un círculo fijo de radio r.

Hallar la velocidad y la aceleración del punto M de intersección de la recta con la circunferencia en los movimientos de este punto respecto del círculo y respecto de la recta AB en función del ángulo φ (véase el dibujo).

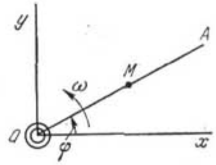
Respuesta: 1) Durante el movimiento por la circunferencia la velocidad del punto M es igual a $\frac{u}{\operatorname{sen}\varphi}$ y la aceleración tangencial equivale a $-\frac{u^2\cos\varphi}{r\operatorname{sen}^3\varphi}$, la aceleración normal es igual a $\frac{u^2}{r\operatorname{sen}^2\varphi}$.

2) Respecto a la recta AB el punto M se desplaza con la velocidad $\frac{u\cos\varphi}{\operatorname{sen}\varphi}$ y la aceleración $-\frac{u^2}{r\operatorname{sen}^3\varphi}$.

23.34. La semirrecta OA gira en el plano del dibujo alrededor del punto fijo O con una velocidad angular constante ω. El punto M se desplaza a lo largo de OA. En el instante cuando la semirrecta coincidía con el eje x el punto M se hallaba en el origen de coordenadas.



Para el problema 23.33.



Para el problema 23.34.

Determinar el movimiento del punto M respecto de la semirrecta OA, si se sabe que la magnitud de la velocidad absoluta v del punto M es constante.

Determinar también la trayectoria absoluta y la aceleración absoluta del punto M.

Respuesta: El punto M se desplaza por OA con la velocidad $v_r = v\cos\omega t$. La trayectoria absoluta del punto M es una circunferencia, su ecuación en coordenadas polares es $r = \frac{v}{\omega}\operatorname{sen}\varphi$, en coordenadas cartesianas es $x^2 + \left(y - \frac{v}{2\omega}\right)^2 = \left(\frac{v}{2\omega}\right)^2$. La aceleración absoluta del punto M es $w_a = 2\omega v$.

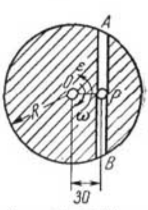
23.35. Un punto se desplaza con una velocidad constante v por el radio de un disco que gira con una velocidad angular constante ω alrededor del eje perpendicular al plano del disco y que pasa por el centro de éste.

Determinar la aceleración absoluta del punto en el instante cuando el punto se encuentre del centro del disco a la distancia r.

Respuesta: $w_a = \omega\sqrt{r^2\omega^2 + 4v^2}$.

23.36. Una bolita P se desplaza con la velocidad de 120 cm/s de A a B por la cuerda AB de un disco que gira alrededor del eje perpendicular al plano del disco y que pasa por su centro.

Hallar la aceleración absoluta de la bolita cuando su distancia hasta el centro del disco es la más corta e igual a 30 cm. En este instante la velocidad angular del disco es igual a 3 s^{-1}, su deceleración angular es igual a 8 s^{-2}.



Para el problema 23.36.

Respuesta: $w_a = 1018$ cm/s².

23.37. Resolver el problema anterior suponiendo que el disco gira alrededor del diámetro paralelamente a la cuerda.

Respuesta: $w_a = 361{,}2$ cm/s².

23.38. Resolver el problema 23.36 con la condición de que el eje de rotación del disco es el diámetro perpendicular a la cuerda.

Respuesta: $w_a = 720$ cm/s².

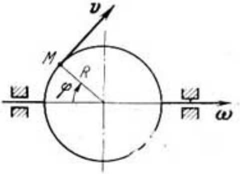
23.39. Un barco que se encuentra sobre el ecuador mantiene rumbo hacia el nordeste. La velocidad de movimiento del barco es de 20 nudos.

Hallar la velocidad absoluta y la aceleración de Coriolis del barco teniendo en cuenta la rotación de la Tierra, el radio de la Tierra es $R = 6378$ km $\left(\text{el nombre del rumbo indica hacia donde va el barco; } 1 \text{ nudo} = 1\,\frac{\text{milla marina}}{\text{hora}} = 1852 \text{ m/h}\right)$.

Respuesta: $v_a = 470{,}4$ m/s; $w_c = 1{,}06 \cdot 10^{-3}$ m/s².

23.40. Para los datos del problema anterior hallar la aceleración absoluta del barco suponiendo que su velocidad es constante.

Respuesta: $w_a = 347{,}766 \cdot 10^{-4}$ m/s².



Para el problema 23.41.

23.41. El punto M se desplaza sobre la llanta de un disco de radio R con una velocidad v de módulo constante. El disco gira alrededor de su diámetro con una velocidad angular constante ω.

Hallar la aceleración absoluta del punto M en función del ángulo φ formado por el radio vector del punto con el eje de rotación del disco.

Respuesta; $w_a = \sqrt{\frac{v^4}{R^2} + \omega^4 R^2 \operatorname{sen}^2 \varphi + 2\omega^2 v^2 (1 + \cos^2 \varphi)}$.

23.42. Un disco de radio R gira con una velocidad angular constante ω alrededor del eje que pasa por su centro perpendicularmente al plano del disco. Un punto M se desplaza por uno de los diámetros del disco de tal modo que su distancia hasta el centro del disco varía de acuerdo con la ley

$$OM = R \operatorname{sen} \omega t.$$

Hallar la trayectoria absoluta, la velocidad y la aceleración absolutas del punto M.

Respuesta: Si tomamos la posición inicial del punto M como origen de coordenadas y el eje y lo dirigimos por la posición inicial del diámetro, a lo largo del cual se desplaza el punto M, la ecuación de la trayectoria será

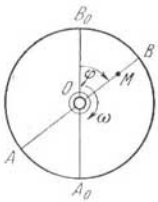
$$\left(x - \frac{R}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{R^2}{4}$$

(una circunferencia de semirradio con el centro en la parte media del radio). La velocidad absoluta es $v_a = \omega R$. La aceleración absoluta es $w_a = 2\omega^2 R$.

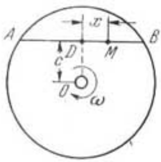
23.43. Un disco gira con una velocidad angular constante ω alrededor del eje que pasa por su centro y es perpendicular al plano del disco. Un punto M se desplaza por la cuerda AB a partir de su punto medio D con una velocidad relativa constante u. La distancia entre la cuerda y el centro del disco es igual a c.

Hallar la velocidad y la aceleración absolutas del punto M en función de la distancia $DM = x$.

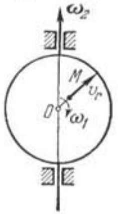
Respuesta: $v_a \sqrt{\omega^2 x^2 + (u + \omega c)^2}$; $\quad w_a = \omega \sqrt{\omega^2 x^2 + (2u + \omega c)^2}$.



Para el problema 23.42.



Para el problema 23.43.



Para el problema 23.44.

23.44. Un punto M se desplaza por el radio móvil de un disco, a partir de su centro hacia la llanta, con una velocidad constante v_r. El radio móvil gira en el plano del disco con una velocidad angular constante ω_1. El plano del disco gira alrededor de su diámetro con una velocidad angular constante ω_2.

Hallar la velocidad absoluta del punto M considerando que en el instante $t = 0$ el punto M se encontraba en el centro del disco, y el radio móvil estaba dirigido por el eje de rotación del disco.

Respuesta: $v_a = v_r \sqrt{1 + t^2 (\omega_1^2 + \omega_2^2 \operatorname{sen}^2 \omega_1 t)}$.

23.45. Un punto se desplaza con la velocidad de 2 m/s por la circunferencia de la llanta de un disco de 4 m de diámetro. El disco gira en el sentido contrario y en este instante su velocidad angular es de 2 s^{-1}, la aceleración angular es 4 s^{-2}. Determinar la aceleración absoluta del punto.

Respuesta: $w_a = 8{,}24$ m/s^2 y está dirigida bajo un ángulo de 76° respecto del radio.

23.46. Un disco gira alrededor del eje perpendicular a su plano y que pasa por su centro, de acuerdo con la ley $\varphi = \frac{2}{3} t^3$. Un punto empieza a desplazarse por el radio del disco de acuerdo con la ley $s = 4t^2 - 10t + 8$ (cm). La distancia s se mide a partir del centro del disco.

Determinar la velocidad y la aceleración absolutas del punto en el instante $t = 1$ s.

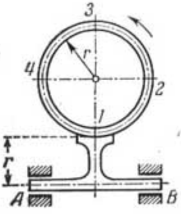
Respuesta: $v_a = 4{,}47$ cm/s; $w_a = 0$.

23.47. Un anillo hueco de radio r está rígidamente unido con el árbol AB de tal modo que el eje del árbol está situado en el plano del eje del anillo. El anillo está llenado de líquido que circula dentro del anillo en el sentido de la flecha con una velocidad relativa constante u. El árbol AB gira en el sentido de las agujas del reloj, si se mira por el eje de rotación de A hacia B. La velocidad angular ω del árbol es constante.

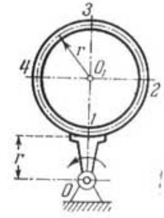
Determinar las magnitudes de las aceleraciones absolutas de las partículas de líquido situadas en los puntos *1*, *2*, *3* y *4*.

Respuesta: $w_1 = r\omega^2 - \frac{u^2}{r}$, $w_3 = 3r\omega^2 + \frac{u^2}{r}$;

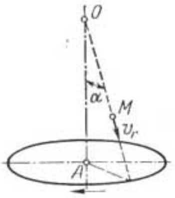
$$w_2 = w_4 = 2r\omega^2 + \frac{u^2}{r}.$$



Para el problema 23.47.



Para el problema 23.48.



Para el problema 23.49.

23.48. Para los datos del problema anterior a excepción solamente de que el plano del eje del anillo es perpendicular al eje del árbol AB, determinar las mismas magnitudes en dos casos:

1) los movimientos relativo y de transporte son del mismo sentido;

2) las componentes del movimiento son de sentidos contrarios.

Respuesta: 1) $w_1 = r\omega^2 - \frac{u^2}{r} - 2u\omega$; $\quad w_3 = 3r\omega^2 + \frac{u^2}{r} + 2\omega u$;

$$w_2 = w_4 = \sqrt{\left(\frac{u^2}{r} + 2\omega u + \omega^2 r\right)^2 + 4\omega^4 r^2};$$

2) $w_1 = r\omega^2 - \frac{u^2}{r} + 2u\omega$; $w_3 = 3r\omega^2 + \frac{u^2}{r} - 2\omega u$;

$$w_2 = w_4 = \sqrt{\left(\omega^2 r + \frac{u^2}{r} - 2\omega u\right)^2 + 4\omega^4 r^2}.$$

23.49. El punto M se desplaza uniformemente por la generatriz de un cono circular con eje OA, a partir del vértice hacia la base con la velocidad relativa v_r; el ángulo $MOA = \alpha$. En el instante $t = 0$ la distancia $OM_0 = a$. El cono gira uniformemente alrededor de su eje con la velocidad angular ω.

Hallar la aceleración absoluta del punto M.

Respuesta: La aceleración está situada en el plano perpendicular al eje de rotación y representa la hipotenusa del triángulo de catetos

$$w_{en} = \omega^2 (a + v_r t) \operatorname{sen} \alpha \ \text{ y } \ w_c = 2v_r \omega \operatorname{sen} \alpha.$$

23.50. En el problema anterior determinar la magnitud de la aceleración absoluta del punto M en el instante $t = 1$ s en el caso cuando el punto se desplaza por la generatriz del cono con una aceleración relativa constante w_r dirigida del vértice del cono hacia su base, disponiendo de los datos siguientes: $\alpha = 30°$, $a = 15$ cm, $w_r = 10$ cm/s^2, $\omega = 1$ s^{-1}, en el instante $t = 0$ la velocidad relativa del punto v_r es igual a cero.

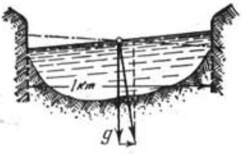
Respuesta: $w = 14{,}14$ cm/s^2.

23.51. Admitiendo en el problema 23.49 que la rotación del cono alrededor de su eje es uniformemente acelerada con una aceleración angular ε, determinar la magnitud de la aceleración absoluta w del punto M en el instante $t = 2$ s, disponiendo de los datos siguientes: $\alpha = 30°$, $a = 18$ cm, $v_r = 3$ cm/s, $\varepsilon = 0{,}5$ s^{-2}, en el instante $t = 0$ la velocidad angular ω es igual a cero.

Respuesta: $w = 15$ cm/s^2.

23.52. Un río de 1 km de anchura corre del sur al norte con la velocidad de 5 km/h.

Determinar la aceleración de Coriolis w_c de las partículas de agua situadas a 60° de latitud boreal.



Para el problema 23.52.

Determinar luego cerca de cuál orilla el nivel de agua es más elevado y en cuánto, si se sabe que la superficie del agua debe ser perpendicular a la dirección del vector compuesto por la aceleración de la fuerza de gravedad g y un vector igual y opuesto a la aceleración de Coriolis.

Respuesta: La aceleración de Coriolis $w_c = 0{,}0175$ cm/s² y está dirigida al oeste. El nivel de agua es más elevado en la orilla derecha en 1,782 cm.

23.53. La línea principal de los ferrocarriles del sur al norte de la ciudad de Melitópol va exactamente por el meridiano. Una locomotora Diesel se desplaza con la velocidad $v = 90$ km/h hacia el norte; la latitud del lugar es $\varphi = 47°$.

Hallar la aceleración de Coriolis de la locomotora Diesel.

Respuesta: $w_c = 0{,}266$ cm/s².

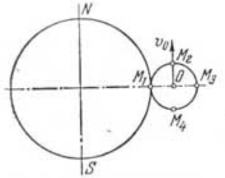
23.54. Una locomotora Diesel se desplaza del oeste al este, por una vía tendida a lo largo de un paralelo de latitud boreal, con la velocidad $v_r = 20$ m/s.

Hallar la aceleración de Coriolis w_c de la lomotora Diesel.

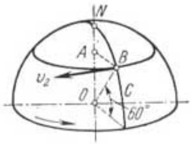
Respuesta: $w_c = 0{,}291$ cm/s².

23.55. Determinar la aceleración de Coriolis de los puntos M_1, M_2, M_3, M_4 de la rueda de una locomotora eléctrica que se desplaza por el meridiano, en el instante cuando ésta interseca el ecuador. La velocidad del centro de la rueda de la locomotora eléctrica es $v_0 = 144$ km/h.

Respuesta: Para los puntos M_1 y M_3 $w_c = 0$;
para los puntos M_2 y M_4 $w_c = 0{,}581$ cm/s².



Para el problema 23.55.



Para el problema 23.56.

23.56. El río Neva corre del este al oeste por el paralelo de 60° de latitud boreal con la velocidad $v_r = 4$ km/h.

Determinar la suma de las proyecciones sobre la tangente BC al meridiano correspondiente de las componentes de aceleraciones de las partículas de agua que dependen de la velocidad de la corriente. El radio de la Tierra es $R = 64 \cdot 10^5$ m.

Respuesta: $w_{BC} = 1396 \cdot 10^{-5}$ cm/s².

23.57. El río Neva corre del este al oeste por el paralelo de 60° de latitud boreal con la velocidad $v_r = 4$ km/h.

Hallar las componentes de la aceleración absoluta de la partícula de agua. El radio de la Tierra es $R = 64 \cdot 10^5$ m.

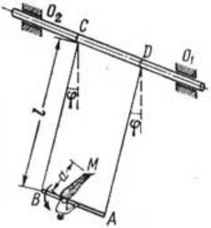
Respuesta: $w_e = 1692 \cdot 10^{-3}$ cm/s²; $w_r = 386 \cdot 10^{-7}$ cm/s²; $w_c = 1616 \cdot 10^{-5}$ cm/s².

23.58. Hallar la aceleración absoluta de las bolas del regulador centrífugo de Watt, si éste gira alrededor de su eje vertical y en el instante considerado su velocidad angular es $\omega = \pi/2$ s⁻¹, su aceleración angular es $\varepsilon = 1$ s⁻², la velocidad angular de divergencia de las bolas es $\omega_1 = \pi/2$ s⁻¹, con la aceleración angular de $\varepsilon_1 = 0{,}4$ s⁻². La longitud de las palancas de las bolas es $l = 50$ cm, la distancia entre los ejes de su articulación es $2e = 10$ cm, el ángulo de abertura del regulador en el instante considerado es igual a $2\alpha = 90°$. Despreciar las dimensiones de las bolas considerándolas como puntos (véase el dibujo para el problema 22.14)

Respuesta: $w = 293{,}7$ cm/s².

23.59. Hallar la aceleración absoluta de las bolas del regulador centrífugo de Watt, si después de cambiar el régimen de funcionamiento de la máquina el regulador comienza a girar con la velocidad angular $\omega = \pi$ s⁻¹, las bolas continúan descendiendo, en el instante dado, con la velocidad $v_r = 100$ cm/s y con la aceleración tangencial $w_{r\tau} = 10$ cm/s². El ángulo de abertura del regulador es $2\alpha = 60°$, la longitud de las palancas de las bolas es $l = 50$ cm; se puede despreciar la distancia de $2e$ entre sus ejes de articulación. Considerar las bolas como puntos (véase el dibujo para el problema 22.14).

Respuesta: $w = 671$ cm/s².



Para el problema 23.60.

23.60. El trapecio aéreo $ABCD$ efectúa oscilaciones alrededor del eje horizontal O_1O_2 de acuerdo con la ley $\varphi = \varphi_0 \operatorname{sen} \omega t$. El gimnasta que hace ejercicio sobre la barra AB gira alrededor de ésta con una velocidad angular relativa $\omega = \text{const}$; $BC = AD = l$.

Determinar la aceleración absoluta del punto M sobre la planta del gimnasta, cuya distancia hasta la barra AB es, en el instante $t = \pi/\omega$ s, igual a a.

En el instante inicial la posición del gimnasta, era vertical con la cabeza hacia arriba; el trapecio $ABCD$ ocupaba también la posición vertical inferior.

Respuesta: $w_M = \omega^2 [\varphi_0^2 (l-a) - a(2\varphi_0 + 1)]$ y está dirigida verticalmente hacia arriba, si la expresión entre paréntesis es positiva.

23.61. Un punto se desplaza por el radio de un disco de acuerdo con la ecuación $r = ae^{kt}$, donde a, k son magnitudes constantes. El disco gira alrededor del eje perpendicular a su plano y que pasa por su centro, de acuerdo con la ecuación $\varphi = kt$.

Determinar la velocidad absoluta, la aceleración absoluta, las aceleraciones tangencial y normal del punto.

Respuesta: $v = ake^{kt}\sqrt{2}$; $w = 2ak^2e^{kt}$; $w_\tau = ak^2e^{kt}\sqrt{2}$;
$w_n = ak^2e^{kt}\sqrt{2}$.

23.62. El punto M se desplaza sobre la superficie de la Tierra; el rumbo del movimiento es k (el ángulo formado por la dirección hacia el polo norte y la velocidad v del punto respecto de la Tierra), la latitud del lugar en el instante dado es igual a φ.

Determinar las componentes oriental w_{cx}, boreal w_{cy} y vertical w_{cz} de la aceleración de Coriolis del punto.

Respuesta: $w_{cx} = -2v\omega \cos k \operatorname{sen} \varphi$; $w_{cy} = 2v\omega \operatorname{sen} k \operatorname{sen} \varphi$;
$w_{cz} = -2v\omega \operatorname{sen} k \cos \varphi$, donde ω es la velocidad angular de rotación de la Tierra.

23.63. Para los datos del problema anterior determinar la magnitud y la dirección de la componente horizontal de la aceleración de Coriolis del punto M.

Respuesta: $w_{cH} = 2v\omega \operatorname{sen} \varphi$; la componente horizontal es perpendicular a la velocidad v del punto M respecto de la Tierra y está dirigida a la izquierda de ésta en el hemisferio boreal y a la derecha en el hemisferio austral.

23.64. La altura del punto M sobre la superficie de la Tierra es igual a h, la latitud del lugar es φ.

Determinar las componentes oriental w_{ex}, boreal w_{ey} y vertical w_{ez} de la aceleración de transporte del punto condicionada por la rotación de la Tierra (el radio de la Tierra es R, ω es la velocidad angular).

Respuesta: $w_{ex} = 0$; $w_{ey} = (R+h)\,\omega^2 \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi$;
$w_{ez} = -(R+h)\,\omega^2 \cos^2 \varphi$.

23.65. Las proyecciones oriental, boreal y vertical de la velocidad del punto M respecto de la Tierra son respectivamente iguales a v_E, v_N y v_h.

Determinar las proyecciones de la aceleración relativa del punto sobre los ejes de coordenadas x, y, z (el eje x está dirigido hacia el este, el eje y, hacia el norte y el eje z, por la vertical), si su altura sobre la superficie de la Tierra en el instante dado es igual a h, la latitud del lugar es φ (R y ω son el radio y la velocidad angular de la Tierra).

Respuesta: $w_{rx}=\dot{v}_E-\frac{v_E v_N}{R+h}\operatorname{tg}\varphi+\frac{v_E v_h}{R+h}$;

$$w_{ry}=\dot{v}_N+\frac{v_E^2}{R+h}\operatorname{tg}\varphi+\frac{v_N v_h}{R+h};$$

$$w_{rz}=\ddot{v}_h-\frac{v_E^2+v_N^2}{R+h}.$$

23.66. Para los datos del problema anterior determinar las componentes de la aceleración absoluta del punto M que se mueve cerca de la Tierra.

Respuesta: $w_x=\dot{v}_E-\frac{v_E v_N}{R+h}\operatorname{tg}\varphi+\frac{v_E v_h}{R+h}-2(v_N\operatorname{sen}\varphi-v_h\cos\varphi)\,\omega$;

$$w_y=\dot{v}_N+\frac{v_E^2}{R+h}\operatorname{tg}\varphi+\frac{v_N v_h}{R+h}+(R+h)\,\omega^2\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi+$$
$$+2v_E\omega\operatorname{sen}\varphi;$$

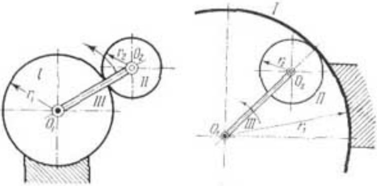
$$w_z=\dot{v}_h-\frac{v_E^2+v_N^2}{R+h}-(R+h)\,\omega^2\cos^2\varphi-2v_E\omega\cos\varphi.$$

Capítulo VIII

MOVIMIENTO COMPUESTO DEL CUERPO SÓLIDO

§ 24. ADICIÓN DE MOVIMIENTOS PLANOS DE UN CUERPO

24.1. La manivela *III* une los ejes O_1 y O_2 de dos ruedas dentadas *I* y *II*, el engrane puede ser exterior o interior, como está indicado en el dibujo; la rueda *I* permanece inmóvil, la manivela *III* gira alrededor del eje O_1 con la velocidad angular ω_3.



Para el problema 24.1.

Conociendo los radios de las ruedas r_1 y r_2 calcular la velocidad angular absoluta ω_2 de la rueda *II* y su velocidad angular relativa ω_{23} respecto de la manivela.

Respuesta: Engrane exterior

$$\omega_2=\omega_3\frac{r_1+r_2}{r_2};\quad \omega_{23}=\omega_3\frac{r_1}{r_2}.$$

Engrane interior

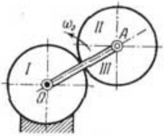
$$\omega_2=-\omega_3\frac{r_1-r_2}{r_2};\quad \omega_{23}=-\omega_3\frac{r_1}{r_2}.$$

El signo menos muestra que los cuerpos correspondientes giran en sentidos contrarios.

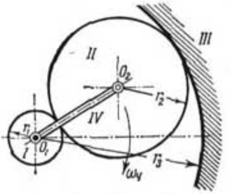
24.2. Hallar las velocidades angulares absoluta y relativa de la rueda dentada *II* de radio r, que se mueve por la rueda dentada fija *I* del mismo radio; la rueda *II* se pone en movimiento por la manivela *III* que gira alrededor del eje O de la rueda fija con la velocidad angular ω_0; considerar que la manivela OA efectúa movimiento de transporte.

Respuesta: $\omega_{23}=\omega_0$; $\omega_2=2\omega_0$.

24.3. El engranaje que pone en rotación rápida la piedra de afilar está construido del modo siguiente: con ayuda de una manivela especial se hace girar la barra *IV* alrededor del eje O_1 con



Para el problema 24.2.



Para el problema 24.3.

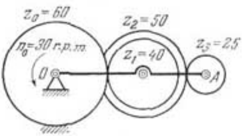
una velocidad angular ω_4; *en el extremo* O_2 *de la barra* se encuentra un dedo, sobre el cual está montada libremente la rueda *II* de radio r_2. Al girar la manivela el dedo hace rodar la rueda *II* sin deslizamiento sobre el círculo exterior fijo *III* de radio r_3. En este caso, gracias al rozamiento, la rueda *II* hace girar sin deslizamiento la rueda *I* de radio r_1 montada libremente sobre el eje O_1 y acoplada rígidamente con el eje de la afiladora.

Valiéndose del radio r_3 dado del círculo fijo exterior hallar el valor de r_1 para que $\omega_1/\omega_4 = 12$, es decir, para que la afiladora gire 12 veces más rápido que la manivela que la pone en movimiento.

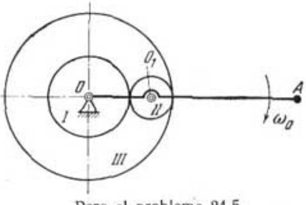
Respuesta: $r_1 = \frac{1}{11} r_3$.

24.4. Hallar el número de revoluciones por minuto de un piñón con un número de dientes $z_3 = 25$, *si la manivela* OA *gira* alrededor del eje O del piñón fijo (con un número de dientes $z_0 = 60$) con una velocidad angular correspondiente a $n_0 = 30$ r.p.m. y porta el eje de un piñón doble con los números de dientes $z_1 = 40$, $z_2 = 50$.

Respuesta: $n_3 = n_0\left(1 - \frac{z_0 z_2}{z_1 z_3}\right) = -60$ r.p.m. (respecto del signo menos véase la respuesta del problema 24.1).



Para el problema 24.4.



Para el problema 24.5.

24.5. En el mecanismo epicíclico que se utiliza en la tracción animal de las trilladoras, la barra conductora OA y la rueda I de radio r_1 están libremente montadas sobre el árbol O; el eje O_1 de la rueda II está fijado en la barra conductora, la rueda III de radio r_3 puede girar libremente alrededor del eje O.

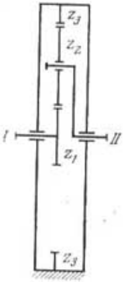
Determinar la velocidad angular ω_1 de la rueda I, si la velocidad angular de la barra conductora OA es ω_0; a la rueda III se le ha comunicado por medio de otro motor (también animal) una velocidad angular ω_3 en sentido opuesto.

Respuesta: $\omega_1 = \omega_0 \left(1 + \frac{r_3}{r_1}\right) + \frac{r_3}{r_1} | \omega_3 |$.

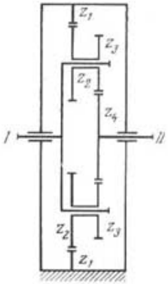
24.6. Un reductor de velocidades está compuesto de ruedas dentadas. La primera (el número de dientes es $z_1 = 20$) va montada sobre el árbol motor I que hace $n_1 = 4500$ r.p.m., la segunda ($z_2 = 25$) está libremente montada sobre un eje unido rígidamente con el árbol conducido II, la tercera ($z_3 = 70$) con engrane interior está fija.

Hallar el número de revoluciones por minuto del árbol conducido y de la rueda en movimiento giratorio.

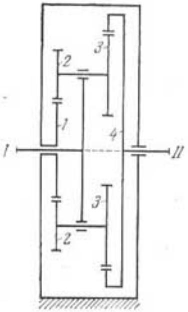
Respuesta: $n_{II} = 1000$ r.p.m.; $n_2 = -1800$ r.p.m.



Para el problema 24.6.



Para el problema 24.7.



Para el problema 24.8.

24.7. El árbol motor I de un reductor hace $n_1 = 1200$ r.p.m. Hallar el número de revoluciones por minuto del árbol conducido II, si la rueda dentada fija con engrane interior tiene $z_1 = 180$ dientes, los piñones móviles apareados tienen $z_2 = 60$ y $z_3 = 40$ dientes, el piñón fijado sobre el árbol motor tiene $z_4 = 80$ dientes.

Respuesta: $n_{II} = 3000$ r.p.m.

24.8. Un reductor de velocidades está compuesto de un piñón fijo de radio $r_1 = 40$ cm, dos piñones móviles apareados de radios $r_2 = 20$ cm, y $r_3 = 30$ cm y un piñón con engrane interior de radio

$r_4 = 90$ *cm montado sobre el árbol conducido.* El árbol motor y la manivela que porta los ejes de los piñones móviles hacen $n_I = 1800$ r.p.m.

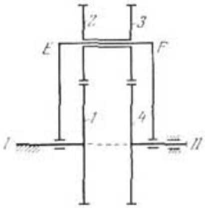
Hallar el número de revoluciones por minuto del árbol conducido.

Respuesta: $n_{II} = 3000$ r.p.m.

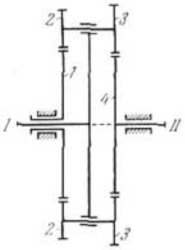
24.9. El reductor de velocidades con transmisión planetaria está compuesto por una rueda central fija *1* unida rígidamente con el árbol *I* de un cuadro que gira libremente alrededor de los ejes *I* y *II* con la velocidad angular Ω, dos piñones *2* y *3* unidos rígidamente entre sí y montados libremente sobre el eje *EF* que gira con el cuadro, y un piñón conducido *4* unido rígidamente con el árbol *II*.

Determinar la relación de la velocidad angular del árbol *II* a la velocidad angular del cuadro, si los números de dientes de los piñones son: $z_1 = 49$; $z_2 = 50$, $z_3 = 51$, $z_4 = 50$.

Respuesta: $\frac{\omega_{II}}{\Omega} = \frac{1}{2500}$.



Para el problema 24.9.



Para el problema 24.10.

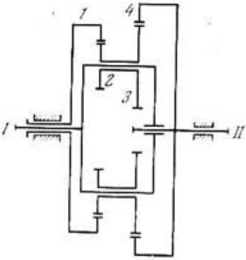
24.10. Hallar la velocidad angular ω_{II} del árbol conducido de un reductor con transmisión diferencial, si el árbol motor y la manivela, que porta los piñones de transmisión apareados, gira con la velocidad angular $\omega_I = 120\ s^{-1}$. La rueda *1* gira con la velocidad angular $\omega_1 = 180\ s^{-1}$ y tiene un número de dientes $z_1 = 80$; los números de dientes de los piñones móviles son: $z_2 = 20$, $z_3 = 40$, la rueda montada sobre el árbol conducido tiene $z_4 = 60$ dientes. La rueda *1* y el árbol motor giran en un mismo sentido.

Respuesta: $\omega_{II} = 280\ s^{-1}$.

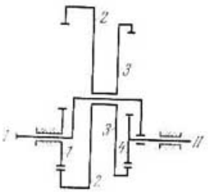
24.11. *El reductor de velocidades con transmisión diferencial* está compuesto de cuatro ruedas dentadas; la primera, con engrane interior, hace 160 r.p.m. y tiene $z_1 = 70$ dientes; la segunda y la tercera están apareadas y van montadas sobre el eje que gira alrededor del eje del árbol motor I junto con el último, haciendo $n_I = 1200$ r.p.m.; los números de dientes son: $z_2 = 20$; $z_3 = 30$; la cuarta, con engrane interior, tiene $z_4 = 80$ dientes y va enchavetada sobre el árbol conducido.

Hallar el número de revoluciones por minuto del árbol conducido, si el árbol I y la rueda I giran en sentidos contrarios.

Respuesta: $n_{II} = 585$ r.p.m.



Para el problema 24.11.



Para el problema 24.12.

24.12. Un reductor de velocidades está compuesto de un piñón fijo *1*, dos piñones móviles apareados *2* y *3* de engrane interior y de un piñón *4* fijado en el árbol conducido.

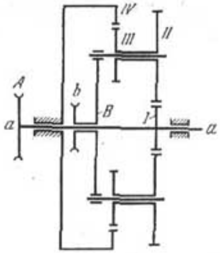
Hallar el número de revoluciones por minuto del árbol conducido, si los números de dientes son: $z_1 = 30$, $z_2 = 80$, $z_3 = 70$, $z_4 = 20$, el árbol motor gira con una velocidad angular correspondiente a $n_I = 1200$ r.p.m.

Respuesta: $n_{II} = -375$ r.p.m.

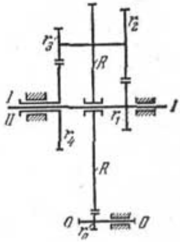
24.13. En un motón de sistema "Triplex", la polea de cadena A está rígidamente montada sobre el árbol $a-a$; sobre el mismo árbol va libremente montado el manguito b con la cadena elevadora y la carga. Este manguito está acoplado inmóvilmente con la manivela B. Sobre cada dedo de la manivela van montados libremente dos piñones II y III apareados, los piñones II engranan con el piñón I acuñado en el árbol $a-a$, los piñones III engranan con la rueda dentada fija IV.

Determinar la relación de las velocidades angulares de rotación del árbol $a-a$ y del manguito b, si los números de dientes de los piñones I, II, III y IV son respectivamente iguales a $z_1 = 12$, $z_2 = 28$, $z_3 = 14$, $z_4 = 54$.

Respuesta: $\frac{\omega_a}{\omega_b} = 10.$



Para el problema 24.13.



Para el problema 24.14.

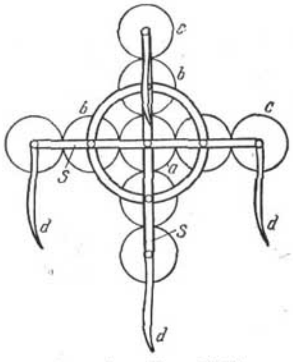
24.14. En el diferencial de piñones cilíndricos, la rueda dentada de radio R va libremente montada sobre el árbol $I—I$ y porta los piñones apareados de radios r_2 y r_3. La rueda R se pone en movimiento mediante el piñón de radio r_0. Los piñones de radios r_2 y r_3 engranan con los piñones de radios r_1 y r_4 acuñados respectivamente en los árboles $I—I$ y II, el último de los cuales se ha hecho en forma de manguito.

Hallar la velocidad angular del árbol II, si son conocidas las velocidades angulares de rotación n_1 y n_0 de los árboles $I—I$ y $O—O$, estos árboles giran en un mismo sentido.

Respuesta: $n_2=\left(n_1+n_0\frac{r_0}{R}\right)\frac{r_1r_3}{r_2r_4}-n_0\frac{r_0}{R}$.

24.15. En la transmisión planetaria de una arrancapatatas el piñón central a, que efectúa un movimiento de translación rectilíneo uniforme con su eje, está unido, con ayuda de los piñones intermediarios b, con los piñones móviles c, a cuyos manguitos se sujetan las aletas d; los ejes de los piñones b y c van encajados sobre el órgano conductor S que gira alrededor del eje del piñón central a con la velocidad angular ω_0.

Determinar la velocidad angular absoluta de los piñones, así como el movimiento de las aletas, si los radios de todos los piñones son iguales.



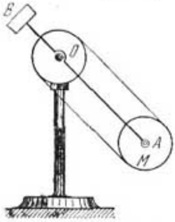
Para el problema 24.15.

Respuesta: $\omega=0$, las aletas efectúan un movimiento de translación cicloidal junto con los centros de os piñones c.

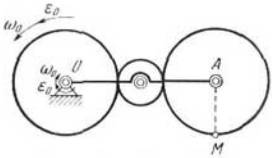
24.16. La manivela OA con el contrapeso B gir con la velocidad angular $\omega_0=\text{const}$ alrededor del eje O del piñón fijo y porta en su extremo A el eje de otro piñón de la misma dimensión unido con una cadena.

Determinar la velocidad y la aceleración angulares del piñón móvil, así como la velocidad y la aceleración de su punto arbitrario M, si la longitud de la manivela $OA=l$.

Respuesta: $\omega=0$; $\varepsilon=0$, el piñón efectúa un movimiento de translación circular con el centro A; $v_M=v_A=l\omega$;
$w_M=w_A=l\omega_0^2$.



Para el problema 24.16.



Para el problema 24.17.

24.17. En la transmisión epicíclica, el piñón conductor de radio R gira en el sentido contrario de las agujas del reloj con la velocidad angular ω_0 y la aceleración angular ε_0; la manivela de longitud $3R$ gira alrededor de su centro en el sentido de las agujas del reloj con las mismas velocidad y aceleración angulares.

Hallar la velocidad y la aceleración del punto M del piñón conducido de radio R situado en el extremo del diámetro perpendicular en el instante considerado a la manivela.

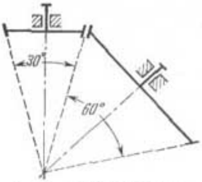
Respuesta: $v=R\omega_0\sqrt{10}$;
$$w=R\sqrt{10(\varepsilon_0^2+\omega_0^4)-12\omega_0^2\varepsilon_0}.$$

§ 25. ADICIÓN DE MOVIMIENTOS ESPACIALES DE UN CUERPO

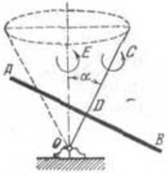
25.1. Vienen dadas ruedas dentadas cónicas, cuyos ejes son fijos y los ángulos respectivos son iguales a α y β. La primera rueda gira con la velocidad angular ω_1.

Determinar la velocidad angular ω_2 de la segunda rueda y calcular esta velocidad para el caso cuando $\alpha = 30°$, $\beta = 60°$, $\omega_1 = 10$ r.p.m.

Respuesta: $\omega_2 = \omega_1 \dfrac{\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\beta}{2}} = 5,16$ r.p.m.



Para el problema 25.1.



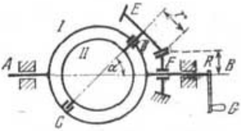
Para el problema 25.2.

25.2. Un tiovivo representa una plataforma circular AB, que gira alrededor del eje OC, que pasa por su centro D, haciendo 6 r.p.m. El eje OC gira en el mismo sentido alrededor de la vertical OE realizando 10 r.p.m. El ángulo entre los ejes es $\alpha = 20°$, el diámetro de la plataforma AB es igual a 10 m, la distancia OD equivale a 2 m.

Determinar la velocidad v del punto B en el instante cuando éste ocupa la posición más baja.

Respuesta: $v = 8{,}77$ m/s.

25.3. La trituradora de bolas está compuesta de una esfera hueca II (en la cual se encuentran las bolas y el material a triturar) montada sobre el eje CD, en que va acuñada la rueda dentada cónica E de radio r. El eje CD descansa sobre cojinetes en el bastidor I hecho de una pieza con el eje AB y que se pone en rotación con ayuda de la manivela G. La rueda E engrana con la rueda fija F de radio R.



Para el problema 25.3.

Determinar la velocidad angular absoluta de la trituradora de bolas, si la manivela gira con la velocidad angular ω_0; el ángulo entre los ejes AB y CD es igual a α. Determinar también la aceleración angular absoluta de la trituradora de bolas, si la velocidad angular de la manivela $\omega_0 = \text{const}$.

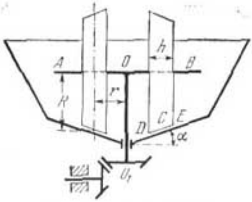
Respuesta: $\omega_A = \dfrac{\omega_0}{r} \sqrt{r^2 + R^2 + 2rR \cos \alpha}$;

$$\varepsilon = \omega_0^2 \frac{R}{r} \operatorname{sen} \alpha.$$

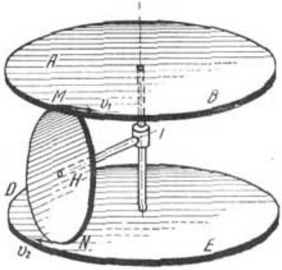
25.4. Para la molienda del mineral se utilizan moletas en forma de ruedas de hierro fundido con llantas de acero que ruedan sobre el fondo de un vaso cónico. Las moletas giran alrededor del eje horizontal AOB, el cual, a su vez, gira alrededor del eje vertical OO_1 hecho de una sola pieza con el eje AOB.

Hallar las velocidades absolutas de los puntos D y E de la llanta de la moleta admitiendo que el eje instantáneo de rotación de la moleta pasa por el punto medio C de la línea de contacto de la llanta de la moleta con el fondo del vaso. La velocidad de rotación alrededor del eje vertical es $\omega_e = 1\ \mathrm{s}^{-1}$, el ancho de la moleta es $h = 50$ cm. El radio medio de la moleta es $R = 1$ m, el radio de rotación medio es $r = 60$ cm, $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}2$.

Respuesta: $v_R = v_E = 28$ cm/s.



Para el problema 25.4.



Para el problema 25.5.

25.5. Una transmisión diferencial se compone de dos discos AB y DE, cuyos centros están situados sobre su eje de rotación común; estos discos comprimen la rueda MN, cuyo eje HI es perpendicular al eje de los discos.

Determinar la velocidad v del centro H de la rueda MN y también la velocidad angular ω_r de rotación alrededor del eje HI, si las velocidades de los puntos de contacto de la rueda con los discos son iguales a: $v_1 = 3$ m/s; $v_2 = 4$ m/s, el radio de la rueda es $r = 5$ cm.

Respuesta: $v = 0{,}5$ m/s; $\omega_r = 70\ \mathrm{s}^{-1}$.

25.6. Para los datos del problema anterior y conociendo la longitud $HI = \frac{1}{14}$ m, determinar la velocidad y la aceleración absolutas angulares de la rueda MN.

Respuesta: $\omega = \sqrt{4949}\ \mathrm{s}^{-1}$; $\varepsilon = 490\ \mathrm{s}^{-2}$.

25.7. El trompo A gira respecto del eje OB con una velocidad angular constante ω_1 s^{-1}. El eje OB describe uniformemente un cono. El vértice del trompo hace n revoluciones por minuto. El ángulo $BOS=\alpha$.

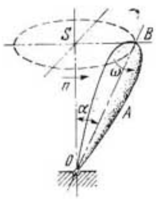
Hallar la velocidad angular ω y la aceleración angular ε del trompo.

Respuesta:

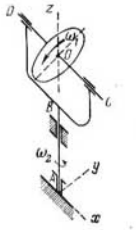
$$\omega=\sqrt{\omega_1^2+\left(\frac{\pi n}{30}\right)^2+2\omega_1\frac{\pi n}{30}\cos\alpha};$$

$$\varepsilon=\omega_1\frac{\pi n}{30}\operatorname{sen}\alpha.$$

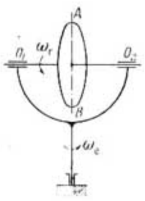
25.8. Un disco circular gira con la velocidad angular ω_1 alrededor del eje horizontal CD; simultáneamente el eje CD gira alrededor del eje vertical AB que pasa por el centro O del disco con la velocidad angular ω_2.



Para el problema 25.7.



Para el problema 25.8.



Para el problema 25.9.

Calcular la magnitud y la dirección de la velocidad angular instantánea ω y de la aceleración angular instantánea ε del disco, si $\omega_1=5$ s^{-1}, $\omega_2=3$ s^{-1}.

Respuesta: $\omega=5{,}82$ s^{-1} y forma los ángulos $\alpha=30°57'$ y $\beta=59°3'$ con las direcciones positivas de los ejes x y z; $\varepsilon=15$ s^{-2} y está dirigida a lo largo del eje y.

25.9. Un disco de radio R gira con una velocidad angular constante ω_r alrededor del eje horizontal O_1O_2, el cual a su vez gira con una velocidad angular constante ω_e alrededor del eje vertical.

Hallar las velocidades y las aceleraciones de los puntos A y B situados en los extremos del diámetro vertical del disco.

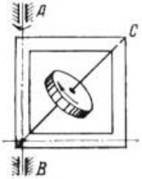
Respuesta: $v_A=v_B=R\omega_r$;

$$w_A=w_B=R\omega_r\sqrt{4\omega_e^2+\omega_r^2}.$$

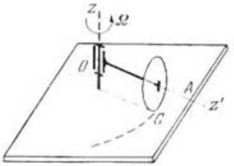
25.10. Un marco cuadrado gira alrededor del eje AB haciendo 2 r.p.m. Un disco gira alrededor del eje BC haciendo 2 r.p.m.; este eje coincide con la diagonal del marco.

Determinar la velocidad angular absoluta y la aceleración angular del disco.

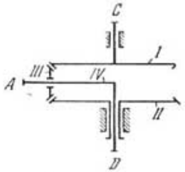
Respuesta: $\omega = 0{,}39\ s^{-1}$; $\varepsilon = 0{,}031\ s^{-2}$.



Para el problema 25.10.



Para el problema 25.11.



Para el problema 25.12.

25.11. El eje de la moleta OA de molino gira uniformemente alrededor del eje vertical Oz con la velocidad angular Ω. La longitud del eje $OA = R$, el radio de la moleta es $AC = r$.

Admitiendo que en el instante considerado el punto C de la moleta tiene una velocidad igual a cero, determinar la velocidad angular de la moleta ω, la dirección del eje instantáneo, los axoides móvil y fijo.

Respuesta: $\omega = \frac{\sqrt{R^2+r^2}}{r}\Omega$; el eje instantáneo es la recta OC; los axoides son conos con vértice en el punto O, el axoide móvil tiene el ángulo en el vértice $z'OC$ igual a $\operatorname{arctg}\frac{r}{R}$, el axoide fijo tiene el ángulo en el vértice zOC equivalente a $\pi - \operatorname{arctg}\frac{R}{r}$.

25.12. Una transmisión diferencial está compuesta de una rueda dentada cónica III (piñón satélite) montada libremente sobre la manivela IV que puede girar alrededor del eje fijo CD. El piñón satélite engrana con las ruedas dentadas cónicas I y II que giran en un mismo sentido alrededor del mismo eje CD con las velocidades angulares $\omega_1 = 5\ s^{-1}$ y $\omega_2 = 3\ s^{-1}$. El radio del satélite es $r = 2$ cm, los radios de las ruedas I y II son idénticos e iguales a $R = 7$ cm.

Determinar la velocidad angular ω_4 de la manivela IV, la velocidad angular ω_{34} del satélite respecto de la manivela y la velocidad del punto A.

Respuesta: $v_A = 28$ cm/s; $\omega_4 = 4\ s^{-1}$; $\omega_{34} = 3{,}5\ s^{-1}$.

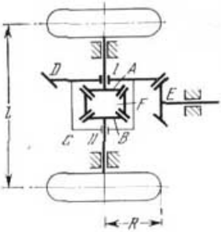
25.13. En el mecanismo diferencial considerado en el problema anterior, las ruedas dentadas cónicas I y II giran en sentidos contrarios con las velocidades angulares $\omega_1 = 7\ s^{-1}$, $\omega_2 = 3\ s^{-1}$.

Determinar v_A, ω_4 y ω_{34}, si $R = 5$ cm, $r = 2{,}5$ cm.

Respuesta: $v_A = 10$ cm/s; $\omega_4 = 2\ s^{-1}$; $\omega_{34} = 10\ s^{-1}$.

25.14. Durante el movimiento de un automóvil por una vía curvilínea, sus ruedas exteriores, pasando un camino más largo, deben girar más rápido que las ruedas interiores que recorren un camino más corto. Para evitar la rotura del eje motor trasero del automóvil se utiliza una transmisión por engranajes llamada diferencial, cuya construcción es la siguiente.

El eje trasero, sobre el cual están montadas dos ruedas, está fabricado de dos partes separadas I y II, en cuyos extremos van encajadas fijamente dos ruedas dentadas iguales A y B. En estas partes del árbol gira en cojinetes la caja C con la rueda cónica D unida rígidamente con ésta. La caja se pone en rotación por el árbol principal (longitudinal) que recibe el movimiento del motor por intermedio del piñón E.



Para el problema 25.14.

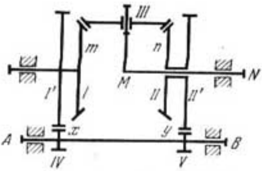
La rotación de la caja C se transmite a las ruedas dentadas A y B con ayuda de dos piñones cónicos F (satélites) que giran libremente alrededor de los ejes fijados en la caja perpendicularmente al eje trasero $I—II$ del automóvil.

Hallar las velocidades angulares de las ruedas traseras del automóvil en función de la velocidad angular de rotación de la caja C y la velocidad angular ω_r de los satélites respecto de la caja, si el automóvil se desplaza con la velocidad de 36 km/h por un redondeo de radio medio $\rho = 5$ m; los radios de las ruedas del eje trasero son $R = 0{,}5$ m, la distancia entre éstas es $l = 2$ m. Los radios de las ruedas dentadas A y B son dos veces mayores que los de los satélites: $R_0 = 2r$.

Respuesta: $\omega_1 = 24\ s^{-1}$; $\omega_2 = 16\ s^{-1}$; $\omega_r = 8\ s^{-1}$.

25.15 Al hacer uso del sistema de engranaje diferencial para obtener la relación necesaria de los números de revoluciones de los ejes AB y MN, a los piñones cónicos I y II del engranaje diferencial se acoplan fijamente las ruedas de dientes cilíndricos I' y II' que se engranan con los piñones IV y V fijados sobre el árbol AB.

Hallar la relación entre las velocidades angulares ω_0 y ω de los árboles AB y MN, si los radios de los piñones I y II son idén-



Para el problema 25.15.

ticos, los números de dientes de las ruedas dentadas I' y II', IV, V son respectivamente iguales m, n, x, y.

Respuesta: $\frac{\omega}{\omega_0}=\frac{1}{2}\left(\frac{x}{m}+\frac{y}{n}\right)$.

25.16. En la transmisión diferencial examinada en el problema anterior, entre los piñones I' y IV, se ha intercalado un piñón intermediario con eje de rotación fijo.

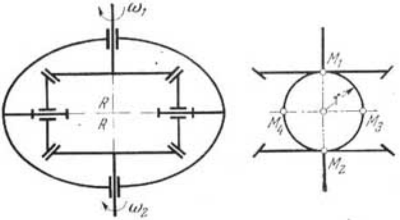
Hace falta hallar la relación entre las velocidades angulares ω_0 y ω de los árboles AB y MN conservando todos los datos restantes del problema anterior.

Respuesta: $\frac{\omega}{\omega_0}=\frac{1}{2}\left(\frac{x}{m}-\frac{y}{n}\right)$.

25.17. La transmisión diferencial que une ambas mitades del eje trasero del automóvil está compuesta de dos piñones de igual radio $R=6$ cm, encajados sobre los semiejes que, en los virajes del automóvil, giran con velocidades angulares diferentes, pero de magnitud constante $\omega_1=6\ s^{-1}$ y $\omega_2=4\ s^{-1}$, del mismo sentido. Entre los piñones va apretado un satélite móvil de radio $r=3$ cm montado libremente sobre el eje. El eje del satélite está empotrado rígidamente en la envoltura y puede girar junto con ésta alrededor del eje trasero del automóvil.

Hallar respecto de la caja del automóvil las aceleraciones de cuatro puntos M_1, M_2, M_3 y M_4 del satélite, situados en los extremos de dos diámetros (véase el dibujo).

Respuesta: $w_1=210{,}4\ cm/s^2$; $w_2=90{,}8\ cm/s^2$; $w_3=w_4=$ $=173{,}4\ cm/s^2$.



Para el problema 25.17.

25.18. En el diferencial de una talladora, la rueda acelerante *4* está libremente montada, junto con la rueda *1* fijada rígidamente a ésta, sobre el árbol motor a. El árbol motor a porta en su extremo un cabezal que porta el eje CC de los satélites $2-2$.

Determinar la velocidad angular del árbol conducido b con la rueda 3 enchavetada en éste en cinco casos:

1) *La velocidad angular del árbol motor es* ω_a, *la velocidad* angular de la rueda acelerante es $\omega_4 = 0$.

2) La velocidad angular del árbol motor es ω_a, la rueda acelerante gira en el mismo sentido que el árbol motor con la velocidad angular ω_4.

3) *La rueda acelerante y el árbol motor giran en el mismo* sentido con iguales velocidades angulares $\omega_4 = \omega_a$.

4) La rueda acelerante y el árbol motor giran en el mismo sentido, pero $\omega_4 = 2\omega_a$.

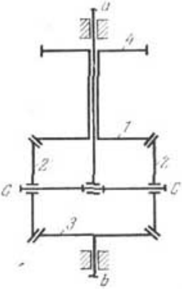
5) La velocidad angular del árbol motor es ω_a, la rueda acelerante *gira en el sentido contrario con la velocidad angular* ω_4.

Respuesta: 1) $\omega_b = 2\omega_a$; 2) $\omega_b = 2\omega_a - \omega_4$; 3) $\omega_b = \omega_a$;
4) $\omega_b = 0$; 5) $\omega_b = 2\omega_a + \omega_4$.

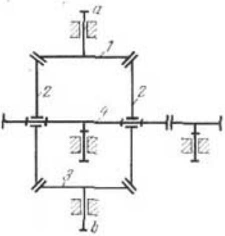
25.19. En el diferencial de la talladora descrita en el problema anterior, la velocidad angular del árbol motor es $\omega_a = 60$ r. p. m.

Determinar cual deberá ser la aceleración angular de la rueda acelerante para que el árbol conducido esté inmóvil.

Respuesta; $\omega_4 = 120$ *r. p. m.*



Para el problema **25.18.**



Para el problema 25.20.

25.20. En el diferencial de una talladora, la rueda acelerante 4 porta el eje de satélites. *La velocidad angular del árbol* motor es ω_a.

Determinar la velocidad angular del árbol conducido en los tres casos siguientes:

1) La rueda acelerante *4* y el árbol motor giran en un mismo sentido con la velocidad angular $\omega_4=\omega_a$.

2) La rueda acelerante y el árbol motor giran en se tidos opuestos con la misma velocidad angular.

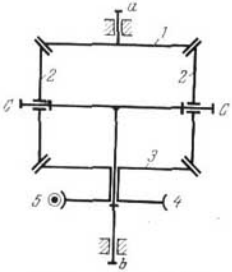
3) La rueda acelerante y el eje de satélites están inmóviles.

Respuesta: 1) $\omega_b=\omega_a$; 2) $\omega_b=-3\omega_a$; 3) $\omega_b=-\omega_a$.

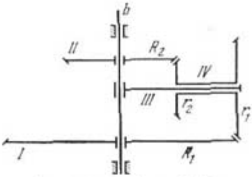
25.21. En el diferencial de un torno, la rueda cónica *I* va enchavetada en el árbol motor *a*; en el extremo del árbol conducido *b* va encajado un cabezal que porta el eje *CC* de los satélites *2—2*. Sobre el mismo árbol va montada libremente la rueda cónica *3* hecha de una sola pieza con la rueda de tornillo sin fin *4*.

Determinar la relación de transmisión estando el tornillo sin fin *5* inmóvil y, por consiguiente, también los piñones *4* y *3*, si los radios de todos los piñones cónicos son idénticos.

Respuesta: $\frac{\omega_b}{\omega_a}=0{,}5$.



Para el problema 25.21.



Para el problema 25.22.

25.22. Un diferencial doble está compuesto de la manivela *III* que puede girar alrededor del eje fijo *ab*. El satélite *IV*, compuesto de dos piñones cónicos acoplados rígidamente entre si de radios $r_1=5$ cm y $r_2=2$ cm, está libremente montado sobre la manivela. Estos piñones engranan con dos piñones cónicos *I* y *II* de radios $R_1=10$ cm y $R_2=5$ cm que giran alrededor del eje *ab* y que no están unidos con la manivela. Las velocidades angulares de los piñones *I* y *II* son respectivamente iguales a $\omega_1=4{,}5\ s^{-1}$ y $\omega_2=9\ s^{-1}$.

Determinar la velocidad angular de la manivela ω_3 y la velocidad angular del satélite respecto de la manivela ω_{43}, si los dos piñones giran en un mismo sentido.

Respuesta: $\omega_3=7\ s^{-1}$; $\omega_{43}=5\ s^{-1}$.

25.23. Resolver el problema anterior suponiendo que las ruedas dentadas I y II giran en sentidos opuestos.

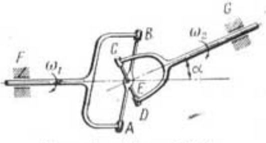
Respuesta: $\omega_3 = 3\ s^{-1}$; $\omega_{43} = 15\ s^{-1}$.

25.24. La cruceta $ABCD$ de la articulación universal de Cardan-Hooke ($AB \perp CD$), utilizado para transmitir la rotación entre dos ejes que se cortan, gira alrededor del punto fijo E.

Hallar la relación ω_1/ω_2 para los árboles acoplados por la cruceta, en dos casos:

1) cuando el plano de la horquilla ABF es horizontal y el de la horquilla CDG es vertical;

2) cuando el plano de la horquilla ABF es vertical y el de la horquilla CDG es perpendicular al primero.

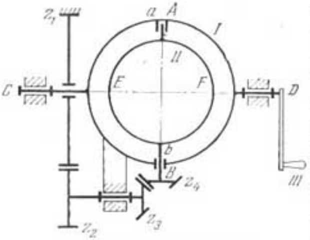


Para el problema 25.24.

El ángulo entre los ejes de los árboles es constante: $\alpha = 60°$.

Respuesta: 1) $\omega_1/\omega_2 = 1/\cos\alpha = 2$; 2) $\omega_1/\omega_2 = \cos\alpha = 0{,}5$.

25.25. Una trituradora de bolas está compuesta de una bola hueca de diámetro $d = 10$ cm montada sobre el eje AB en el que va acuñado un piñón, cuyo número de dientes es $z_4 = 28$. El eje AB está fijado en un marco giratorio I en los cojinetes a y b. El marco I está hecho de una sola pieza con el eje CD que se pone en rotación con auxilio de la manivela III. La rotación de la trituradora de bolas alrededor del eje AB se efectúa con ayuda de los piñones, cuyos números de dientes son $z_1 = 80$, $z_2 = 43$, $z_3 = 28$, el primero de éstos es fijo.



Para el problema 25.25.

Determinar la velocidad angular absoluta, la aceleración angular de la trituradora y las velocidades y las aceleraciones de dos puntos E y F situados en el instante examinado sobre el eje CD, si la manivela se gira con una velocidad angular constante $\omega = 4{,}3\ s^{-1}$.

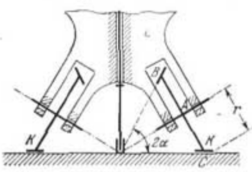
Respuesta: $\omega_a = 9{,}08\ s^{-1}$; $\varepsilon = 34{,}4\ s^{-2}$; $v_E = v_F = 40$ cm/s;

$w_E = w_F = 469{,}4$ cm/s².

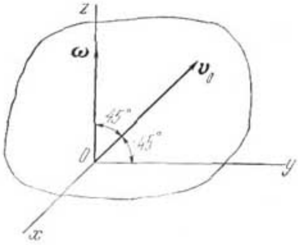
25.26. La parte giratoria de un puente está colocada sobre rodillos en forma de piñones cónicos K, cuyos ejes están oblicuamente fijados en un bastidor anular L, de tal modo que sus prolongaciones se intersecan en el centro geométrico del piñón de apoyo plano por el que ruedan los piñones de apoyo K.

Hallar la velocidad y la aceleración angulares del rodillo cónico, las velocidades y las aceleraciones de los puntos A, B, C (A es el centro del piñón BAC), si el radio de la base del rodillo es $r=25$ cm, el ángulo en el vértice es 2α, siendo $\cos\alpha=84/85$. La velocidad angular de rotación del bastidor anular alrededor del eje vertical $\omega_0=\text{const}=0,1\ \text{s}^{-1}$.

Respuesta: $\omega=0,646\ \text{s}^{-1}$; $\varepsilon=0,0646\ \text{s}^{-2}$;
$v_A=15,92$ cm/s;
$v_B=31,84$ cm/s; $v_C=0$; $w_A=1,595$ cm/s²,
$w_B=20,75$ cm/s²; $w_C=10,54$ cm/s².



Para el problema 25.26.



Para el problema 25.27.

25.27. Un cuerpo se desplaza en el espacio, el vector de su velocidad angular de rotación es igual a $\boldsymbol{\omega}$ y en el instante examinado está dirigido por el eje z. La velocidad del punto O del cuerpo es $\boldsymbol{v}_0$ y forma con los ejes y y z ángulos idénticos iguales a 45°.

Hallar el punto del cuerpo sólido, cuya velocidad sea mínima y determinar la magnitud de esta velocidad.

Respuesta: $v_{min}=v_0\cos 45°$. Tal es la velocidad de los puntos del eje helicoidal instantáneo paralelo al eje z y que pasa por el punto con las coordenadas

$$x=-\frac{v_0\cos 45°}{\omega}, \quad y=0.$$

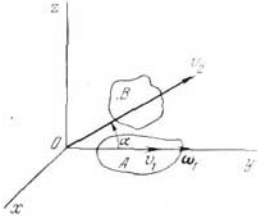
25.28. El cuerpo A gira con la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}_1$ alrededor del eje y y realiza movimiento de translación con la velocidad $\boldsymbol{v}_1$ a lo largo de dicho eje. El cuerpo B realiza movimiento de translación con la velocidad $\boldsymbol{v}_2$ que forma con el eje y un ángulo α.

Para cuál relación v_1/v_2 el movimiento del cuerpo A respecto del cuerpo B será rotación simple. ¿Dónde se encontrará en este caso el eje de rotación?

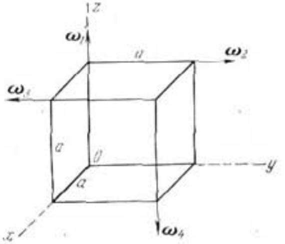
Respuesta: Para $v_1/v_2 = \cos\alpha$ el movimiento relativo del cuerpo A respecto del cuerpo B será rotación simple alrededor del eje paralelo al eje y y que se encuentra de éste a la distancia

$$l = \frac{v_2 \operatorname{sen} \alpha}{\omega_1},$$

trazada por la perpendicular levantada al eje y y la componente de la velocidad de translación $v_2 \operatorname{sen} \alpha$.



Para el problema 25.28.



Para el problema 25.29.

25.29. Un cuerpo sólido, de forma de un cubo de lado $a = 2$ m, efectúa simultáneamente cuatro rotaciones con las velocidades angulares

$$\omega_1 = \omega_4 = 6 \text{ s}^{-1}, \quad \omega_2 = \omega_3 = 4 \text{ s}^{-1}.$$

Determinar el movimiento resultante del cuerpo.

Respuesta: El cuerpo efectúa movimiento de translación con la velocidad $\boldsymbol{v}$, cuyas proyecciones son $v_x = -$ -12 cm/s, $v_y = 12$ cm/s, $v_z = -8$ cm/s.

TERCERA PARTE
DINÁMICA

Capítulo IX

DINÁMICA DEL PUNTO MATERIAL

26. DETERMINACIÓN DE LAS FUERZAS DE ACUERDO CON EL MOVIMIENTO DADO

26.1. Un ascensor de 280 kgf de peso desciende en un poz con movimiento uniformemente acelerado, en los primeros 10 s él recorre 35 m.

Hallar la tensión del cable, del que está suspendido el ascensor.

Respuesta: 260 kgf.

26.2. Una plataforma horizontal, sobre la cual se encuentra una carga de 10 N, desciende verticalmente con una aceleración de 4 cm/s^2.

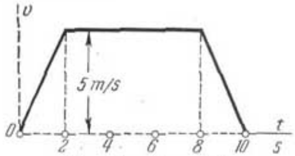
Hallar la presión que ejerce la carga sobre la plataforma durante su descenso común.

Respuesta: 5,92 N.

26.3. A un cuerpo de peso $P = 3$ N situado sobre una mesa se ha atado un hilo, el otro extremo del cual se mantiene en la mano.

¿Qué aceleración hace falta comunicar a la mano elevando verticalmente el cuerpo para que se rompa el hilo, si éste se rompe a la tensión de $T = 4{,}2$ N?

Respuesta: $w = 3{,}92$ m/s^2.



Para el problema 26.4.

26.4. Durante la elevación de la cabina de ascensor el gráfico de velocidades tiene la forma representada en el dibujo. El peso de la cabina es igual a 480 kgf.

Determinar las tensiones T_1, T_2, T_3 del cable, al cual está suspendida la cabina, en tres intervalos de tiempo: 1) de $t=0$ hasta $t=2$ s; 2) de $t=2$ s hasta $t=8$ s, 3) de $t=8$ s hasta $t=10$ s.

Respuesta: $T_1=602{,}4$ kgf; $T_2=480$ kgf; $T_3=357{,}6$ kgf.

26.5. Una piedra de 3 N de peso, atada a un hilo de 1 m de longitud, describe una circunferencia en el plano vertical.

Determinar la velocidad angular mínima ω de la piedra, a la cual el hilo se rompe, si su resistencia a la rotura es igual a 9 N.

Respuesta: $\omega=4{,}44\ s^{-1}$.

26.6. En los tramos curvilíneos de una vía ferroviaria el riel exterior se coloca a mayor altura que el interior para que la presión que ejerce el tren en movimiento sobre los rieles esté dirigida perpendicularmente al asiento de la vía.

Determinar la magnitud h de elevación del riel exterior sobre el interior teniendo los datos siguientes: el radio de curvatura es de 400 m, la velocidad del tren equivale a 10 m/s, la distancia entre los rieles es de 1,6 m.

Respuesta: $h=4{,}1$ cm.

26.7. En el vagón de un tren que se desplaza por una curva con la velocidad de 72 km/h se está pesando una carga en una balanza de resorte: el peso de la carga es igual a 5 kgf, pero la balanza indica 5,1 kgf.

Determinar el radio de curvatura de la vía despreciando la masa de la balanza.

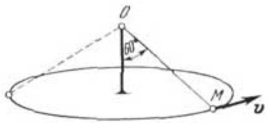
Respuesta: 202 m.

26.8. Un peso de 2 N está suspendido en el extremo de un hilo de 1 m de longitud; a causa de un golpe el peso adquirió una velocidad horizontal de 5 m/s.

Hallar la tensión del hilo inmediatamente después del golpe.

Respuesta: 7,1 N.

26.9. Una carga M de 1 N de peso, suspendida con ayuda de un hilo de 30 cm de longitud en un punto fijo O, representa un péndulo cónico, es decir, describe una circunferencia en el plano horizontal, el hilo forma con la vertical un ángulo de 60°.



Para el problema 26.9.

Determinar la velocidad v de la carga y la tensión T del hilo.

Respuesta: $v=210$ cm/s; $T=2$ N.

26.10. Un automóvil de 1000 kgf de peso se desplaza sobre un puente convexo con la velocidad $v=10\ m/s$; el radio de curvatura en la parte media del puente es $\rho=50$ m.

Determinar la presión que ejerce el automóvil sobre el puente en el instante cuando el automóvil pasa por su parte media.

Respuesta: 796 kgf.

26.11. En la cabina, que se encuentra en movimiento de ascenso, de una máquina de elevación se pesa un cuerpo en una balanza de resorte. El peso del cuerpo es igual a 5 kgf, la tensión del resorte (la indicación de la balanza) es igual a 5,1 kgf.

Hallar la aceleración de la cabina.

Respuesta: 0,196 m/s^2.

26.12. La carroceria de un vagón de tranvia junto con la carga pesa $Q_1=10$ tf, el bogie con las ruedas pesa $Q_2=1$ tf.

Determinar la presión máxima y mínima del vagón sobre los rieles del tramo horizontal rectilíneo de la vía, si la carroceria en marcha efectúa sobre las ballestas oscilaciones harmónicas verticales de acuerdo con la ley $x=2 \operatorname{sen} 10\,t$ cm.

Respuesta: $N_1=13{,}04$ tf, $N_2=8{,}96$ tf.

26.13. El pistón de un motor de combustión interna efectúa oscilaciones harmónicas de acuerdo con la ley $x=r\left(\cos\omega t+\frac{r}{4l}\cos 2\omega t\right)$ cm, donde r es la longitud de la manivela, l es la longitud de la biela, ω es la velocidad angular, de magnitud constante, del árbol.

Determinar el valor máximo de la fuerza que actúa sobre el pistón, si el peso de éste es Q.

Respuesta: $P=\frac{Q}{g}r\omega^2\left(1+\frac{r}{l}\right)$.

26.14. El tamiz de una criba de enriquecimiento de minerales efectúa oscilaciones harmónicas verticales de amplitud $a=5$ cm.

Hallar la frecuencia mínima k de oscilaciones del tamiz, para la cual los pedazos de mineral, que se encuentran sobre el tamiz, se separarán de éste y serán lanzados hacia arriba.

Respuesta: $k=14\ s^{-1}$.

26.15. Un cuerpo de 20 N de peso efectúa movimiento oscilatorio por una recta horizontal. La distancia entre el cuerpo y un punto fijo se determina por la ecuación $s=10 \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}t$ m.

Hallar la dependencia entre la fuerza P que actúa sobre el cuerpo y la distancia s, así como el valor máximo de esta fuerza.

Respuesta: $P=-5{,}03\ s$ N; $P_{máx}=50{,}3$ N.

26.16. El movimiento de un punto material de 2 N de peso se expresa por las ecuaciones $x = 3\cos 2\pi t$ cm, $y = 4\,\mathrm{sen}\,\pi t$ cm, donde t se expresa en segundos.

Determinar las proyecciones de la fuerza que actúa sobre el punto en función de sus coordenadas.

Respuesta: $X = -0{,}08x$ N; $Y = -0{,}02y$ N.

26.17. Una bola de 1 g de masa cae bajo la acción de la fuerza de gravedad y durante la caída experimenta la resistencia del aire; el movimiento de la bola se expresa por la ecuación $x = 490t - 245(1 - e^{-2t})$, donde x se expresa en centímetros, t, en segundos, el eje Ox está dirigido verticalmente hacia abajo.

Determinar en dinas la fuerza R de resistencia del aire, que actúa sobre la bola, en función de su velocidad v, admitiendo que $g = 980$ cm/s².

Respuesta: $R = 2mv \equiv 2v$.

26.18. *La mesa de una cepilladora pesa* $Q_1 = 700$ kgf, *el objeto* que se elabora pesa $Q_2 = 300$ kgf, la velocidad de desplazamiento de la mesa es $v = 0{,}5$ m/s, el tiempo de aceleración es $t = 0{,}5$ s.

Determinar la fuerza necesaria para la aceleración de la mesa (suponiendo que el movimiento es uniformemente acelerado) y para su desplazamiento ulterior uniforme, si el coeficiente de rozamiento durante la aceleración es $f_1 = 0{,}14$ y durante el movimiento uniforme es $f_2 = 0{,}07$.

Respuesta: $P_1 = 242$ kgf; $P_2 = 70$ kgf.

26.19. Una vagoneta cargada de peso $Q = 700$ kgf desciende *por un* ferrocarril funicular de inclinación $\alpha = 15°$ con la velocidad $v = 1{,}6$ m/s.

Determinar la tensión del cable durante el descenso uniforme *y durante la parada de la vagoneta, si el tiempo de frenado es* $t = 4$ s, el coeficiente global de resistencia al movimiento es $f = 0{,}015$. Durante el frenado el movimiento de la vagoneta es uniformemente decelerado.

Respuesta: $S_1 = 171{,}5$ kgf; $S_2 = 200{,}1$ kgf.

26.20. Una carga de peso $Q = 10$ tf se desplaza junto con la carretilla a lo largo de la armadura horizontal de una grúa de puente con la velocidad $v = 1$ m/s; la distancia entre el centro de gravedad de la carga y el punto de suspensión es $l = 5$ m. Si la carretilla se para bruscamente la carga continuará su movimiento por inercia y empezará a oscilar alrededor del punto de suspensión.

Determinar la tensión máxima del cable.

Respuesta: $S = 10{,}2$ tf.

26.21. Determinar la desviación α de la vertical y la presión N del vagón sobre el riel del funicular cuando el vagón se desplaza por una curvatura de radio $R=30$ m con la velocidad $v=10$ m/s; el peso del vagón es $Q=1,5$ tf.

Respuesta: $\alpha=18°47'$; $N=1,585$ tf.

26.22. Un tren in locomotora pesa 200 tf. Desplazándose con aceleración uniforme sobre una vía horizontal al cabo de 60 s después de iniciar el movimiento, éste adquirió la velocidad de 54 km/h.

Determinar la tensión del tirante de anclaje entre la locomotora y el tren durante la marcha, si la fuerza de rozamiento es igual a 0,005 del peso del tren.

Respuesta: 6,1 tf.

26.23. Un avión deportivo de 2000 kgf de peso vuela horizontalmente con la aceleración de 5 m/s^2; su velocidad en el instante examinado es de 200 m/s. La resistencia del aire es proporcional al cuadrado de la velocidad, y para la velocidad de 1 m/s es igual a 0,05 kgf.

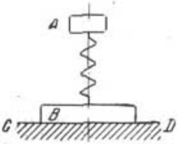
Considerando que la fuerza de resistencia está dirigida en sentido opuesto a la velocidad, determinar la fuerza de impulsión de la hélice, si ésta forma con la dirección del vuelo un ángulo de 10°.

Respuesta: $F=3080$ kgf.

26.24. Un camión de 6 tf de peso entra en un transbordador con la velocidad de 21,6 km/h. Frenado en el instante de entrar en el transbordador el camión se paró al pasar 10 m.

Considerando que el movimiento del camión es uniformemente decelerado hallar la tensión de cada uno de los cables, con los cuales el transbordador está sujetado a la orilla. La masa y la aceleración del transbordador se desprecian.

Respuesta: La tensión de cada cable es de 550 kgf.



Para el problema 26.25.

26.25. Las cargas A y B de peso $P_A=20$ N y $P_B=40$ N están unidas entre sí por un resorte como está indicado en el dibujo. La carga A efectúa oscilaciones libres por una recta vertical de amplitud igual a 1 cm y de periodo igual a 0,25 s.

Calcular las presiones máxima y mínima de las cargas A y B sobre la superficie de apoyo CD.

Respuesta: $R_{máx}=72,8$ N; $R_{mín}=47,2$ N.

26.26. Una carga de peso $P=5$ kgf está suspendida a un resorte y efectúa oscilaciones harmónicas.

Despreciando las resistencias, determinar la fuerza c que debe ser aplicada al resorte para alargarlo a 1 cm, si la carga P efectuó seis oscilaciones completas en 2,1 s.

Respuesta: $c=1{,}65$ kgf/cm.

26.27. Un avión en picado vertical, alcanzó la velocidad de 1000 km/h, después de lo cual el piloto empezó a hacer salir el avión del picado describiendo un arco de circunferencia de radio $R=600$ m en el plano vertical. El peso del piloto es de 80 kgf.

Determinar la fuerza máxima, con la cual el piloto se aprieta contra el asiento.

Respuesta: 1130 kgf.

26.28. Determinar el peso de 1 kgf en la Luna, si la aceleración de la fuerza de gravedad lunar es $j=1{,}7$ m/s^2.

Determinar el peso de 1 kgf en el Sol, si la aceleración de la fuerza de gravedad solar es $j=270$ m/s^2.

Respuesta: Indicaciones de una balanza de resorte:
en la Luna, 0,1735 kgf,
en el Sol, 27,5 kgf.

26.29. ¿A cuál velocidad de la locomotora Diesel el aceite empezará a salir de la aceitera, fijada en el extremo de la biela para engrasar la articulación de biela y manivela, si la tapa de la aceitera está abierta? El diámetro de la rueda de la locomotora Diesel es $D=1020$ mm; la longitud de la manivela, que gira junto con la rueda, es $r=250$ mm; el movimiento de la locomotora Diesel es rectilíneo y uniforme, y se efectúa por una vía horizontal. La biela con la aceitera efectúan movimiento de translación.

Respuesta: $v \geqslant 11{,}4$ km/h.

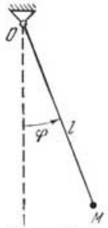
26.30. Una carga M de 10 N de peso está suspendida a un cable de longitud $l=2$ m y efectúa con éste oscilaciones de acuerdo con la ecuación

$$\varphi=\frac{\pi}{6}\operatorname{sen} 2\pi t,$$

donde φ es el ángulo de desviación del cable de la vertical en radianes, t es el tiempo en segundos.

Determinar las tensiones T_1 y T_2 del cable en las posiciones inferior y superior de la carga.

Respuesta: $T_1=32{,}1$ N; $T_2\approx 8{,}65$ N.



Para el problema 26.30.

26.31. Un ciclista describe una curva de 10 m de radio con la velocidad de 5 m/s.

Hallar el ángulo de inclinación del plano medio de la bicicleta respecto de la vertical, así como el coeficiente mínimo de rozamiento entre los neumáticos de la bicicleta y el suelo, necesario para asegurar la estabilidad de la bicicleta.

Respuesta: 14°20′; 0,255.

26.32. Los tramos curvilíneos de un velódromo tienen virajes, cuyo perfil, en la sección transversal, representa una recta inclinada respecto del horizonte, de tal modo que en estos tramos el borde exterior del velódromo es más alto que el interior.

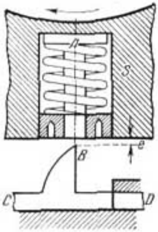
Determinar las velocidades de desplazamiento mínima y máxima en el viraje de radio R y de ángulo de inclinación α respecto del horizonte, si el coeficiente de rozamiento entre las llantas de goma y el suelo del velódromo es igual a f.

Respuesta: $v_{\text{mín}} = \sqrt{gR\frac{\operatorname{tg}\alpha - f}{1 + f\operatorname{tg}\alpha}}$; $v_{\text{máx}} = \sqrt{gR\frac{\operatorname{tg}\alpha + f}{1 - f\operatorname{tg}\alpha}}$.

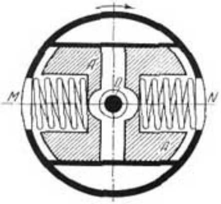
26.33. Para evitar los accidentes a causa de la rotura de volantes se utiliza el dispositivo siguiente. En la llanta del volante se coloca un cuerpo A retenido dentro de éste por el resorte S; cuando la velocidad del volante alcanza su valor límite, el cuerpo empuja con su extremo el saliente B del pestillo CD, el cual cierra el acceso del vapor en la máquina. Admitamos que sea el peso del cuerpo A igual a 1,5 kgf, la distancia e entre el saliente B y el volante, a 2,5 cm, y la velocidad angular límite del volante, a 120 r. p. m.

Determinar el coeficiente de rigidez c necesario del resorte (es decir, la magnitud de la fuerza, bajo la acción de la cual el resorte se comprime en 1 cm), suponiendo que la masa del cuerpo A está concentrada en el punto, cuya distancia hasta el eje de rotación del volante, en la posición indicada en el dibujo, es igual a 147,5 cm.

Respuesta: 14,5 kgf/cm.



Para el problema 26.33.



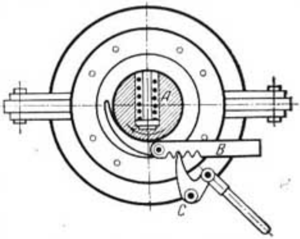
Para el problema 26.34.

26.34. En un regulador hay dos pesas A de 30 kgf cada una, que pueden deslizarse a lo largo de la recta horizontal MN; estas pesas están ligadas mediante resortes con los puntos M y N; los centros de gravedad de las pesas coinciden con los extremos de los resortes. La distancia del extremo de cada resorte al eje O, perpendicular al plano del dibujo, en estado no comprimido es igual a 5 cm; la longitud del resorte varía en 1 cm bajo la acción de una fuerza de 20 kgf.

Determinar la distancia entre los centros de gravedad de las pesas y el eje O, cuando el regulador, girando uniformemente alrededor del eje O, hace 120 r. p. m.

Respuesta: 6,58 cm.

26.35. El interruptor de seguridad de las turbinas de vapo está compuesto de un dedo A de peso $Q=0{,}225$ kgf, situado en un orificio taladrado en la parte delantera del árbol de la turbina perpendicularmente al eje y presionado hacia adentro con ayuda de un resorte; el centro de gravedad del dedo dista $l=8{,}5$ mm del eje de rotación del árbol en el caso de rotación normal de la turbina $n=1500$ r. p. m. Al aumentar el número de revoluciones en un 10%, el dedo vence la reacción del resorte, se desplaza de su posición normal a la distancia $x=4{,}5$ mm, empuja el extremo de la palanca B y libra el gatillo C, ligado por un sistema de palancas con el resorte que cierra la válvula del mecanismo distribuidor de vapor de la turbina.



Para el problema 26.35.

Determinar la rigidez del resorte que retiene el cuerpo A, es decir, la fuerza necesaria para comprimirlo en 1 cm, considerando que la reacción del resorte es proporcional a su compresión.

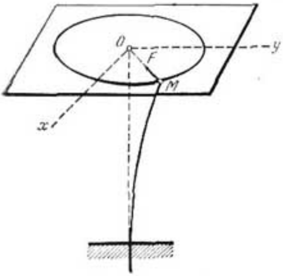
Respuesta: $c=9{,}08$ kgf/cm.

26.36. Un punto de masa m se desplaza por la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. La aceleración del punto es paralela al eje y. Cuando $t=0$ las coordenadas del punto eran $x=0$, $y=b$, y la velocidad inicial v_0.

Determinar la fuerza que actúa sobre el punto en movimiento en cada punto de su trayectoria.

Respuesta: $F_y=-m\frac{v_0^2b^4}{a^2y^3}$.

26.37. Una bola de masa m está fijada en el extremo de una barra elástica vertical agarrada por su extremo inferior en un soporte fijo. Para desviaciones pequeñas de la barra de su posición vertical de equilibrio se puede admitir aproximadamente que el centro de



Para el problema 26.37.

la bola se desplaza en el plano horizontal Oxy que pasa por la posición superior de equilibrio del centro de la bola.

Determinar la ley de variación de la fuerza con la que la barra elástica encorvada actúa sobre la bola, si desviada de su posición inicial de equilibrio, tomada por origen de coordenadas, la bola se desplaza de acuerdo con las ecuaciones

$$x = a \cos kt, \quad y = b \operatorname{sen} kt,$$

donde a, b, k son magnitudes constantes.

Respuesta: $F = mk^2r$, donde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

§ 27. ECUACIONES DIFERENCIALES DEL MOVIMIENTO

a) Movimiento rectilíneo

27.1. Una piedra cae en un pozo sin velocidad inicial. El sonido del choque de la piedra contra el fondo del pozo fue percibido pasados 6,5 s desde el instante del comienzo de su caída. La velocidad del sonido es igual a 330 m/s.

Calcular la profundidad del pozo.

Respuesta: 175 m.

27.2. Un cuerpo pesado desciende por un plano liso inclinado bajo un ángulo de 30° al horizonte.

Calcular el tiempo consumido por el cuerpo en recorrer 9,6 m, si su velocidad inicial era igual a 2 *m/s*.

Respuesta: 1,61 s.

27.3. Un proyectil disparado por un cañón sale con la velocidad horizontal de 570 m/s; el peso del proyectil es de 6 kgf.

Calcular la presión media P de los gases de pólvora, si el proyectil recorre dentro del cañón 2 m. Suponiendo que la presión de los gases es constante hallar el tiempo que pasa el proyectil en el interior del cañón.

Respuesta: $P = 49{,}7$ tf; 0,007 s.

27.4. Un cuerpo de peso P, a causa del impulso recibido, recorrió en 5 s por un plano horizontal rugoso la distancia $s = 24{,}5$ *m* y se paró.

Determinar el coeficiente de rozamiento f.

Respuesta: $f = 0,2$.

27.5. ¿En cuánto tiempo y a qué distancia puede ser parado mediante un freno un vagón de tranvía que se desplaza sobre una vía horizontal con la velocidad de 36 km/h, si la resistencia a la marcha desarrollada durante el frenado constituye 300 kgf por 1 tf de peso del vagón?

Respuesta: 3,4 s; 16,9 m.

27.6. Suponiendo, en primera aproximación, que la resistencia del mecanismo de retroceso del tubo de un cañón de campaña es constante, determinar el tiempo de retroceso, si su velocidad inicial es igual a 10 m/s y su longitud media es de 1 m.

Respuesta: 0,2 s.

27.7. Un punto pesado M asciende por un plano inclinado áspero que forma con el horizonte un ángulo α. En el instante inicial la velocidad del punto era $v_0 = 15$ m/s. El coeficiente de rozamiento es $f = 0,1$. El ángulo α equivale a $30°$.

Calcular el camino que pasará el punto hasta su parada y el tiempo necesario para recorrer este camino.

Respuesta: $s = \dfrac{v_0^2}{2g\,(f\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha)} = 19,55$ m;

$$T = \frac{v_0}{g\,(f\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha)} = 2,61 \text{ s.}$$

27.8. Un vagón desciende con una velocidad constante por una vía ferroviaria rectilínea, inclinada bajo un ángulo $\alpha = 10°$ respecto del horizonte.

Considerando que la resistencia de rozamiento es proporcional a la presión normal, determinar la aceleración del vagón y su velocidad 20 s después del inicio del movimiento, si el vagón comenzó a descender sin velocidad inicial por la vía con un ángulo de inclinación $\beta = 15°$. Determinar también el camino recorrido por el vagón durante este tiempo.

Respuesta: $w = \dfrac{\operatorname{sen}(\beta - \alpha)}{\cos\alpha}\, g = 0,87$ m/s²;

$$v = \frac{\operatorname{sen}(\beta - \alpha)}{\cos\alpha}\, gt = 17,4 \text{ m/s;}$$

$$s = \frac{g\operatorname{sen}(\beta - \alpha)}{\cos\alpha}\,\frac{t^2}{2} = 174 \text{ m.}$$

27.9. Hallar la velocidad máxima de caída de una bola de peso $P = 10$ kgf y de radio $r = 8$ cm, considerando que la resistencia del aire es $R = k\sigma v^2$. En esta fórmula v es la velocidad de caída, σ es el área de la proyección del cuerpo en caída vertical sobre el plano perpendicular a la dirección de su movimiento, k es un coeficiente numérico (que depende de la forma del cuerpo, y que para una bola es igual a 0,024 kgf s^2/m^4).

Respuesta: $v = 144$ m/s.

27.10. Dos bolas homogéneas y geométricamente idénticas están hechas de distintos materiales. Los pesos específicos de los materiales son respectivamente iguales a γ_1 y γ_2. Ambas bolas caen en el aire.

Considerando que la resistencia del medio es proporcional al cuadrado de la velocidad, determinar la relación de las velocidades máximas de las bolas.

Respuesta: $\frac{v_{1\,\text{máx}}}{v_{2\,\text{máx}}} = \sqrt{\frac{\gamma_1}{\gamma_2}}$.

27.11. Un esquiador desciende a alta velocidad por un declive de 45° sin empujarse con los bastones. El coeficiente de rozamiento entre los esquíes y la nieve es $f = 0,1$. La resistencia del aire al avance del esquiador es igual a $F = \alpha v^2$, donde $\alpha = \text{const}$ y v es la velocidad del esquiador. Para la velocidad igual a 1 m/s la resistencia del aire equivale a 0,0635 kgf.

Calcular la velocidad máxima desarrollada por el esquiador, si su peso propio con los esquíes es de 90 kgf. ¿Cómo crecerá la velocidad máxima, si el esquiador, al escoger la mejor cera, disminuyó el coeficiente de rozamiento hasta 0,05?

Respuesta: $v_{1\,\text{máx}} = 108$ km/h; $v_{2\,\text{máx}} = 111$ km/h.

27.12. Un barco se desplaza superando la resistencia del agua que es proporcional al cuadrado de la velocidad e igual a $\alpha = 0,12$ tf a la velocidad de 1 m/s. La fuerza propulsora de las hélices está dirigida por la velocidad en el sentido del movimiento y varía de acuerdo con la ley $T = T_0\left(1 - \frac{v}{v_s}\right)$ tf, donde $T_0 = 120$ tf es la fuerza propulsora de las hélices en el instante cuando el barco está en estado de reposo, $v_s = \text{const} = 33$ m/s.

Determinar la velocidad máxima que puede desarrollar el barco.

Respuesta: $v_{\text{máx}} = 20$ m/s $= 72$ km/h.

27.13. Un avión vuela horizontalmente. La resistencia del aire es proporcional al cuadrado de la velocidad, y a la velocidad de 1 m/s es igual a 0,05 kgf. La fuerza de impulsión es constante e igual a 3080 kgf, y forma con la dirección del vuelo un ángulo de 10°.

Determinar la velocidad máxima del avión.

Respuesta: $v_{\text{máx}} = 246$ m/s.

27.14. Un avión dotado de esquíes aterriza sobre un campo horizontal; el piloto conduce al avión hacia la superficie de la tierra sin velocidad y aceleración verticales en el instante del aterrizaje. El coeficiente de rozamiento de los esquíes del avión sobre la nieve es $f=0{,}1$. La resistencia del aire al avance del avión es proporcional al cuadrado de la velocidad. Para la velocidad de 1 m/s la componente horizontal de la fuerza de resistencia es igual a $R_x=1$ kgf, la componente vertical, dirigida hacia arriba, es $R_y=3$ kgf. El peso del avión es igual a 1000 kgf.

Determinar la longitud y el tiempo de la carrera de aterrizaje del avión hasta su parada.

Respuesta: $s=87{,}6$ m; $T=12$ s.

27.15. Un avión comienza a picar sin velocidad inicial vertical. La fuerza de resistencia del aire es proporcional al cuadrado de la velocidad.

Hallar la dependencia entre la velocidad vertical en el instante dado, el camino recorrido y la velocidad máxima de picado.

Respuesta: $v=v_{\text{máx}}\sqrt{1-e^{-2gs/v_{\text{máx}}^2}}$.

27.16. ¿A cuál altura H y en qué tiempo T ascenderá un cuerpo de peso p lanzado verticalmente hacia arriba con la velocidad v_0, si la resistencia del aire puede ser expresada por la fórmula k^2pv^2, donde v es la magnitud de la velocidad del cuerpo?

Respuesta: $H=\dfrac{\ln(v_0^2k^2+1)}{2gk^2}$; $T=\dfrac{\operatorname{arctg} kv_0}{kg}$.

27.17. Un cuerpo de 2 kgf de peso lanzado verticalmente hacia arriba con la velocidad de 20 m/s experimenta una resistencia del aire, que para una velocidad v m/s, expresada en kilogramos, es igual a 0,04 v; $g=9{,}8$ m/s^2.

Calcular dentro de cuántos segundos el cuerpo alcanzará su posición más alta.

Respuesta: 1,7 s.

27.18. Un submarino inmóvil, al recibir una pequeña flotabilidad negativa p, se sumerge uniformemente. La resistencia del agua en el caso de pequeña flotabilidad negativa puede considerarse proporcional al primer grado de la velocidad de inmersión e igual a kSv, donde k es el coeficiente de proporcionalidad, S es el área de la proyección horizontal del submarino, v es la magnitud de la velocidad de inmersión. La masa del submarino es igual a M.

Determinar la velocidad de inmersión v, si para $t=0$ la velocidad $v_0=0$.

Respuesta: $v=\dfrac{p}{kS}\left(1-e^{-\frac{kS}{M}t}\right)$.

27.19. Para los datos del problema anterior determinar el camino z recorrido por el submarino en el tiempo T.

Respuesta: $z=\frac{p}{kS}\left[T-\frac{M}{kS}\left(1-e^{-\frac{kS}{M}T}\right)\right].$

27.20. Para velocidades pequeñas, la resistencia al movimiento de un tren se determina por la fórmula empírica

$$R=(2{,}5+0{,}05\,v)\,Q\ \text{kgf},$$

donde Q es el peso del tren expresado en toneladas, v es la velocidad expresada en metros por segundo.

Hallar dentro de qué tiempo y a qué distancia el tren de mina obtendrá la velocidad $v=12$ km/h sobre un tramo horizontal de la vía, si el peso del tren con la locomotora eléctrica es $Q=40$ tf, y la fuerza de tracción de la locomotora eléctrica es $F=200$ kgf. Determinar también la fuerza de tracción N de la locomotora eléctrica durante el movimiento uniforme ulterior.

Respuesta: $t=141$ s; $s=245$ m; $N=106{,}6$ kgf.

27.21. ¿Cuál debe ser el empuje de la hélice $T=\text{const}$ de un avión en vuelo horizontal para que después de recorrer s metros el avión aumente su velocidad de v_0 a v_1 m/s? El empuje de la hélice está dirigido por la velocidad de vuelo. La fuerza de la resistencia frontal, dirigida en el sentido opuesto al de la velocidad, es proporcional al cuadrado de la velocidad e igual a α kgf a la velocidad de 1 m/s. El peso del avión es P kgf.

Respuesta: $T=\dfrac{\alpha\left(v_0^2-v_1^2e^{\frac{2\alpha gs}{P}}\right)}{1-e^{\frac{2\alpha gs}{P}}}$ kgf.

27.22. Un barco de 10 000 tf de desplazamiento se desplaza con la velocidad de 16 m/s. La resistencia del agua es proporcional al cuadrado de la velocidad del barco, y para la velocidad de 1 m/s es igual a 30 tf.

¿Qué distancia recorrerá el barco hasta que su velocidad sea igual a 4 m/s? ¿En qué tiempo el barco recorrerá esta distancia?

Respuesta: $s=47{,}1$ m; $T=6{,}38$ s.

27.23. Un cuerpo cae en el aire sin velocidad inicial. La resistencia del aire es $R=k^2pv^2$, donde v es la magnitud de la velocidad del cuerpo, p es su peso.

¿Cuál será la velocidad del cuerpo dentro del tiempo t a partir del comienzo del movimiento? ¿Cuál es el valor límite de la velocidad?

Respuesta: $v=\frac{1}{k}\,\frac{e^{kgt}-e^{-kgt}}{e^{kgt}+e^{-kgt}}$; $v_\infty=\frac{1}{k}$.

27.24. Un barco de desplazamiento $P=1500$ tf supera la resistencia del agua igual a $R=\alpha v^2$ tf, donde $\alpha=0,12$, v es la velocidad del barco. La fuerza de empuje de las hélices está dirigida según la velocidad en el sentido del movimiento y varía de acuerdo con la ley $T=T_0\left(1-\frac{v}{v_s}\right)$, donde $T_0=120$ tf es la fuerza de empuje de las hélices cuando el barco está en reposo, y $v_s=\text{const}=33$ m/s.

Hallar la velocidad del barco en función del tiempo, si la velocidad inicial es igual a v_0.

Respuesta: $v=\frac{70v_0+20(v_0+50)(e^{0,055t}-1)}{70+(v_0+50)(e^{0,055t}-1)}$, donde v_0 está expresada en m/s.

27.25. En el problema anterior hallar la relación entre el camino recorrido y la velocidad

Respuesta: $x=\left\{637,5\ln\left(\frac{v_0^2+30v_0-1000}{v^2+30v-1000}\right)+\right.$ $\left.+273,9\ln\frac{(v-20)(v_0+50)}{(v_0-20)(v+50)}\right\}$ m, donde v y v_0 se expresan en m/s.

27.26. En el problema 27.24, hallar el recorrido en función del tiempo para la velocidad inicial $v_0=10$ m/s.

Respuesta: $s=\left(20t-1272,7\ln\frac{6e^{0,055t}}{1+6e^{0,055t}}-199,3\right)$ m.

27.27. Un vagón de peso $Q=9216$ kgf, que se desplaza por un tramo horizontal de la vía, se pone en movimiento bajo la acción del viento que sopla en dirección del asiento de la vía. La resistencia al movimiento del vagón es igual a 1/200 de su peso. La fuerza de presión del viento es $P=kSu^2$ kgf, donde S es el área de la pared trasera del vagón sometida a la acción del viento e igual a 6 m², u es la velocidad del viento respecto del vagón, $k=0,12$. La velocidad absoluta del viento es $v=12$ m/s.

Suponiendo que la velocidad inicial del vagón es igual a cero determinar:

1) la velocidad máxima $v_{\text{máx}}$ del vagón;

2) el tiempo T necesario para que el vagón pueda adquirir esta velocidad;

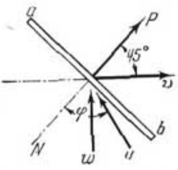
3) el camino x_1 que debe recorrer el vagón para adquirir la velocidad de 3 m/s.

Respuesta: 1) $v_{\text{máx}}=4$ m/s; 2) $T=\infty$; 3) $x_1=187$ m.

27.28. Hallar la ecuación de movimiento de un punto de masa m que cae sin velocidad inicial sobre la Tierra; la resistencia del aire es proporcional al cuadrado de la velocidad. El coeficiente de proporcionalidad es igual a k.

Respuesta: $x=\frac{m}{k}\ln \operatorname{ch} \sqrt{\frac{gk}{m}}\,t.$

27.29. Un trineo a vela, cuyo peso con los pasajeros es $Q=196{,}2$ kgf, se desplaza rectilíneamente sobre la superficie horizontal del hielo gracias a la presión del viento sobre la vela, cuyo plano ab forma con la dirección del movimiento un ángulo de 45°. La velocidad absoluta w del viento es perpendicular a la dirección del movimiento. La magnitud de la presión P del viento se expresa por la fórmula de Newton: $P=kSu^2\cos^2\varphi$, donde φ es el ángulo formado por la velocidad relativa del viento u con la perpendicular N al plano de la vela, $S=5$ m² es el área de la vela, $k=0{,}113$ es un coeficiente experimental. La presión P está dirigida perpendicularmente al plano ab.



Para el problema 27.29.

Despreciando el rozamiento, hallar: 1) la velocidad máxima $v_{máx}$ que puede alcanzar el trineo a vela; 2) el ángulo α que forma a esta velocidad una veleta, colocada en el mástil, con el plano de la vela; 3) el camino x_1 que debe recorrer el trineo a vela para obtener la velocidad $v=\frac{2}{3}w$, si su velocidad inicial es igual a cero.

Respuesta: 1) $v_{máx}=w$; 2) $\alpha=0°$; 3) $x_1=90$ m.

27.30. El conductor de un tranvía, desconectando paulatinamente el reóstato, aumenta la potencia del motor del vagón de tal modo que la fuerza de tracción crece desde cero proporcionalmente al tiempo, aumentando 120 kgf cada segundo.

Hallar la curva de distancias s del movimiento del vagón conociendo los datos siguientes: el peso del vagón es igual a 10 tf, la resistencia de rozamiento es constante e igual a 0,2 tf, la velocidad inicial es igual a cero.

Respuesta: El movimiento comienza $\frac{5}{3}$ s después de conectar la corriente: a partir de este instante $s=0{,}01962\times\left(t-\frac{5}{3}\right)^3$ m.

27.31. Un cuerpo de peso $p=10$ N se desplaza bajo la acción de la fuerza variable $F=10(1-t)$ N, donde t se expresa en segundos.

¿Dentro de cuántos segundos el cuerpo se parará, si en el instante inicial su velocidad era $v_0=20$ cm/s y la fuerza coincide en dirección con la velocidad del cuerpo? Calcular el recorrido del cuerpo hasta su parada.

Respuesta: $t=2{,}02$ s; $s=692$ cm.

27.32. Un punto material de masa m efectúa movimiento rectilíneo bajo la acción de una fuerza que varía de acuerdo con la ley $F=F_0 \cos \omega t$, donde F_0 y ω son magnitudes constantes. En el instante inicial el punto tenía la velocidad de $\dot{x}_0=v_0$.

Hallar la ecuación de movimiento del punto.

Respuesta: $x=\frac{F_0}{m\omega^2}(1-\cos \omega t)+v_0 t$.

27.33. Una partícula de masa m, portadora de una carga eléctrica e, se encuentra en un campo eléctrico homogéneo de tensión variable $E=A \operatorname{sen} kt$ (A y k son constantes dadas).

Determinar el movimiento de la partícula, si se sabe que en el campo eléctrico la partícula está sometida a la acción de la fuerza $F=eE$ dirigida en el sentido de la tensión E. La influencia de la fuerza de gravedad se desprecia. La posición inicial de la partícula se toma como origen de coordenadas; la velocidad inicial de la partícula es igual a cero.

Respuesta: $x=\frac{eA}{mk}\left(t-\frac{\operatorname{sen} kt}{k}\right)$.

27.34. Determinar el movimiento de una bola pesada a lo largo de un canal rectilíneo imaginario que pasa por el centro de la Tierra, si se sabe que la fuerza de atracción en el interior del globo terráqueo es proporcional a la distancia entre el punto móvil y el centro de la Tierra y está dirigida hacia dicho centro; la bola se ha echado al canal desde la superficie terrestre sin velocidad inicial. Indicar también la velocidad de la bola cuando ésta pasa por el centro de la Tierra y el tiempo que se consume hasta alcanzar dicho centro. El radio de la Tierra es igual a $R=637\cdot 10^6$ cm, la aceleración de la fuerza de atracción en la superficie de la Tierra es igual a $g=980$ cm/s^2.

Respuesta: La distancia de la bola hasta el centro de la Tierra varía de acuerdo con la ley

$$x=R\cos\sqrt{\frac{g}{R}}\,t; \quad v=7{,}9 \text{ km/s}; \quad T=21{,}1 \text{ min}.$$

27.35. Un cuerpo cae sobre la Tierra desde una altura h sin velocidad inicial. Despreciamos la resistencia del aire; consideramos que la fuerza de atracción terrestre es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia del cuerpo al centro de la Tierra.

Hallar el tiempo T, dentro del cual el cuerpo alcanza la superficie de la Tierra, y la velocidad v que el cuerpo adquiere en el curso de este tiempo. El radio de la Tierra es R; la aceleración de la fuerza de gravedad cerca de la superficie de la Tierra es igual a g.

Respuesta: $v=\sqrt{\frac{2gRh}{R+h}}$; $T=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{R+h}{2g}}\times$
$\times\left(\sqrt{Rh}+\frac{R+h}{2}\arccos\frac{R-h}{R+h}\right)$.

27.36. Un punto material de masa m es repulsado del centro por una fuerza proporcional a la distancia (el coeficiente de proporcionalidad es mk_2). La resistencia del medio ambiente es proporcional a la velocidad del movimiento (el coeficiente de proporcionalidad es $2mk_1$). En el instante inicial el punto se encontraba a la distancia a del centro y su velocidad en este instante era igual a cero.

Hallar la ley de movimiento del punto.

Respuesta: $x=\frac{a}{\alpha+\beta}(\alpha e^{\beta t}+\beta e^{-\alpha t})$, donde
$\alpha=\sqrt{k_1^2+k_2}+k_1$, $\beta=\sqrt{k_1^2+k_2}-k_1$.

27.37. Un punto de masa m inicia su movimiento rectilíneo (a lo largo del eje x) sin velocidad inicial, a partir de la posición $x=\beta$ hacia el origen de coordenadas, bajo la acción de la fuerza de atracción que varía de acuerdo con la ley

$$R=\frac{\alpha}{x^2}.$$

Calcular el instante cuando el punto se halla en la posición $x_1=\beta/2$. Determinar la velocidad del punto en esta posición.

Respuesta: $t_1=\frac{\beta^{3/2}}{2\sqrt{2}}\sqrt{\frac{m}{\alpha}}\left(1+\frac{\pi}{2}\right)$; $v_1=\sqrt{\frac{2\alpha}{m\beta}}$.

27.38. Un punto de masa m comienza a moverse rectilíneamente del estado de reposo de la posición $x_0=a$ bajo la acción de la fuerza de atracción proporcional a la distancia hasta el origen de coordenadas: $F_x=-c_1mx$, y de la fuerza de repulsión proporcional al cubo de la distancia: $Q_x=c_2mx^3$.

¿Para cuál relación entre c_1, c_2, a, el punto alcanzará el origen de coordenadas y se parará?

Respuesta: $c_1=\frac{1}{2}c_2a^2$.

27.39. El movimiento de un punto de masa m es rectilíneo. El camino recorrido en función de la velocidad viene expresado por la fórmula

$$x=a\sqrt{v}-b.$$

Hallar el tiempo durante el cual la velocidad inicial del punto se duplica.

Respuesta: $t=\frac{a^2}{b}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

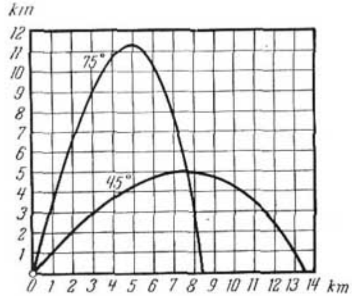
27.40. La fuerza de resistencia a un cuerpo de 9,8 N de peso que se desplaza en un medio heterogéneo varía de acuerdo con la ley $F=-\frac{2v^2}{3+s}$ N, donde v es la velocidad del cuerpo en m/s, s es el camino recorrido en metros.

Determinar el camino recorrido en función del tiempo, si la velocidad inicial es $v_0=5$ m/s.

Respuesta: $s=3\left[\sqrt[3]{5t+1}-1\right] m$.

b) movimiento curvilíneo

27.41. Un cañón naval (105 mm, calibre 35) lanza un proyectil de 18 kgf de peso con la velocidad $v_0=700$ m/s; la trayectoria real del proyectil en el aire viene representada en el dibujo para dos



Para el problema 27.41.

casos: 1) cuando el ángulo formado por el eje del cañón con el horizonte es 45° y 2) cuando este ángulo es igual a 75°.

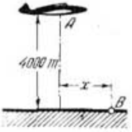
Determinar para cada uno de estos dos casos el incremento de la altura y de la distancia de vuelo si el proyectil no experimentara la resistencia del aire.

Respuesta: El incremento de la altura: 1) 7,5 km; 2) 12 km.
El incremento de la distancia: 1) 36,5 km; 2) 16,7 km.

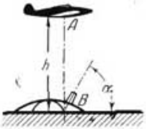
27.42. Un avión A vuela a la altura de 4000 m con la velocidad horizontal de 500 km/h.

¿A qué distancia x, medida a partir del punto dado B por la horizontal, debe ser lanzada sin velocidad relativa inicial una carga cualquiera desde el avión para que ésta caiga en este punto? La resistencia del aire se desprecia.

Respuesta: $x=3960\ m$.



Para el problema 27.42.



Para el problema 27.43.

27.43. Un avión A vuela a la altura h con la velocidad horizontal v_1. En el instante cuando el avión se halla sobre la misma vertical que el cañón B, éste dispara contra el avión.

Hallar: 1) a qué condición debe satisfacer la velocidad inicial v_0 del proyectil para dar en el avión y 2) bajo qué ángulo α respecto del horizonte debe ser hecho el disparo. La resistencia del aire se desprecia.

Respuesta: 1) $v_0^2 \geqslant v_1^2 + 2gh$; 2) $\cos\alpha = \frac{v_1}{v_0}$.

27.44. La distancia horizontal máxima del proyectil es L.

Determinar su distancia horizontal l para el ángulo de proyección $\alpha = 30°$ y la altura h de su trayectoria en este caso. La resistencia del aire se desprecia.

Respuesta: $l = \frac{\sqrt{3}}{2}L$; $h = \frac{L}{8}$.

27.45. La distancia horizontal de un proyectil para el ángulo de proyección α es l_α.

Determinar la distancia horizontal para el ángulo de proyección igual a $\alpha/2$. La resistencia del aire se desprecia.

Respuesta: $l_{\alpha/2} = \frac{l_\alpha}{2\cos\alpha}$.

27.46. Hallar la distancia de vuelo de un proyectil, si el radio de curvatura de su trayectoria en su punto superior es $\rho = 16$ km y el ángulo de inclinación del tubo del cañón respecto del horizonte es $\alpha = 30°$. La resistencia del aire se desprecia.

Respuesta: $x_{\text{máx}} = 2\rho \operatorname{tg}\alpha = 18\,480$ m.

27.47. Determinar el ángulo de inclinación del cañón de una pieza respecto del horizonte, si el blanco se ha descubierto a la distancia de 32 km, y la velocidad inicial del proyectil es $v_0 = 600$ m/s. La resistencia del aire se desprecia.

Respuesta: $\alpha_1 = 30°18''$; $\alpha_2 = 59°42'$.

27.48. Resolver el problema anterior para el caso cuando el blanco se encuentra a 200 m sobre el nivel de las posiciones de artillería.

Respuesta: $\alpha_1 = 30°45'$; $\alpha_2 = 59°23'$.

27.49. Con un cañón situado en el punto O se hizo un disparo bajo el ángulo α respecto del horizonte con la velocidad inicial v_0. Desde un punto A, situado por la horizontal a la distancia l del punto O, se hizo simultáneamente un disparo vertical.

Determinar con qué velocidad inicial v_1 hace falta disparar el segundo proyectil para que éste choque con el primero, si la velocidad v_0 y el punto A se encuentran en un mismo plano vertical. *La resistencia del aire se desprecia.*

Respuesta: $v_1 = v_0 \operatorname{sen} \alpha \left(\text{independientemente de la distancia } l, \right.$

$$\left. \text{para } l < \frac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\alpha}{g} \right).$$

27.50. Hallar el lugar geométrico en el instante t de las posiciones de los puntos materiales lanzados simultáneamente en el plano vertical desde un mismo punto, con la misma velocidad inicial v_0, bajo todos los ángulos posibles respecto del horizonte.

Respuesta: La circunferencia de radio $v_0 t$ con centro situado sobre la vertical del punto de lanzamiento a la distancia $\frac{1}{2} g t^2$ debajo de este punto.

27.51. Hallar el lugar geométrico de los focos de todas las trayectorias parabólicas correspondientes a una misma velocidad inicial v_0 y a todos los ángulos de proyección posibles.

Respuesta: $x^2 + y^2 = \frac{v_0^4}{4g^2}$.

27.52. Un cuerpo de peso P, lanzado con la velocidad inicial v_0 bajo un ándulo α respecto del horizonte, se desplaza bajo la acción de la fuerza de gravedad y de la resistencia R del aire.

Determinar la altura máxima h del cuerpo sobre el nivel de la posición inicial, si la resistencia es proporcional al primer grado de la velocidad: $R = kPv$.

Respuesta: $h = \frac{v_0 \operatorname{sen} \alpha}{gk} - \frac{1}{gk^2} \ln (1 + k v_0 \operatorname{sen} \alpha)$.

27.53. Para los datos del problema 27.52. hallar la ecuación de movimiento del punto.

Respuesta: $x = \frac{v_0 \cos \alpha}{kg} (1 - e^{-kgt})$;

$$y = \frac{1}{kg} \left(v_0 \operatorname{sen} \alpha + \frac{1}{k} \right) (1 - e^{-kgt}) - \frac{t}{k}.$$

27.54. Para los datos del problema 27.52 determinar la distancia s a lo largo de la horizontal a la que el punto alcanza su posición más alta.

Respuesta: $s=\frac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\alpha}{2g(kv_0 \operatorname{sen}\alpha+1)}$.

27.55. En la superficie lateral de un tubo vertical, colocado en el centro de un embalse circular y cerrado herméticamente por su parte superior, se ha abierto orificios a 1 m de altura desde los cuales se lanzan chorros inclinados de agua bajo diferentes ángulos φ respecto del horizonte $\left(\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$; la velocidad inicial del chorro es igual a $v_0=\sqrt{4g/3\cos\varphi}$ m/s, donde g es la aceleración de la fuerza de gravedad; la altura del tubo es de 1 m.

Determinar el radio mínimo R del embalse para el cual toda el agua que se lanza del tubo cae en el embalse a pesar de la pequeñez de la altura de su borde.

Respuesta: $R=2{,}83$ m.

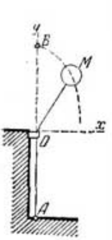
27.56. Determinar el movimiento de un punto material pesado de m gramos de masa que se atrae hacia el centro fijo O bajo la acción de una fuerza directamente proporcional a la distancia. El movimiento se efectúa en el vacío; la fuerza de atracción por unidad de distancia es igual a k^2m dinas; en el instante $t=0$, $x=a$, $\dot{x}=0$, $y=0$, $\dot{y}=0$; el eje Oy está dirigido por la vertical hacia abajo.

Respuesta: Movimiento oscilatorio harmónico: $x=a\cos kt$, $y=\frac{g}{k^2}(1-\cos kt)$ a lo largo del segmento de recta $y=\frac{g}{k^2}-\frac{g}{k^2a}x$, $|x|\leqslant a$.

27.57. Un punto de masa m se desplaza bajo la acción de una fuerza de repulsión del centro fijo O, que varía según la ley $F=k^2mr$, donde r es el radio vector del punto. En el instante inicial el punto se encontraba en $M_0(a,\ 0)$ y su velocidad era v_0 dirigida paralelamente al eje y.

Determinar la trayectoria del punto.

Respuesta: $\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{ky}{v_0}\right)^2=1$ (hipérbola)



Para el problema 27.58.

27.58. Un hilo elástico sujetado en el punto A pasa por un anillo liso fijo O; en su extremo libre se ha fijado una bolita M de m gramos de masa. La longitud del hilo no extendido es $l=AO$; para alargar el hilo en 1 cm hace falta aplicar una fuerza de k^2m dinas. Al extender el hilo a lo largo de la recta AB de tal modo que su longitud se duplica, se le comunica una velocidad v_0 perpendicular a la recta AB.

Determinar la trayectoria de la bolita despreciando la fuerza de gravedad y suponiendo que la tensión del hilo es proporcional a su alargamiento.

Respuesta: La elipse $\frac{k^2x^2}{v_0^2}+\frac{y^2}{l^2}=1$.

27.59. Un punto M de masa m se atrae hacia n centros fijos $C_1, C_2, \ldots, C_i, \ldots, C_n$ por fuerzas proporcionales a las distancias; la fuerza de atracción del punto M hacia el centro C_i $(i=1, 2, 3, \ldots, n)$ es $k_i m\cdot\overline{MC_i}$ dinas; el punto M y los centros de atracción están situados en el plano Oxy.

Determinar la trayectoria del punto M, si para $t=0$, $x=x_0$, $y=y_0$, $\dot{x}=0$, $\dot{y}=v_0$. La acción de la fuerza de gravedad se desprecia.

Respuesta: La elipse $\left(\frac{x-a}{x_0-a}\right)^2+\left[(y-b)+\frac{x-a}{x_0-a}(b-y_0)\right]^2\frac{k}{v_0^2}=1$,

donde $a=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{i=n}k_ix_i$; $b=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{i=n}k_iy_i$, $k=\sum_{i=1}^{i=n}k_i$.

27.60. El punto M se atrae hacia dos centros C_1 y C_2 por fuerzas proporcionales a las distancias: $km\cdot\overline{MC_1}$ y $km\cdot\overline{MC_2}$; el centro C_1 es fijo y se encuentra en el origen de coordenadas, el centro C_2 se desplaza uniformemente por el eje Ox de tal modo que $x_2=2(a+bt)$.

Hallar la trayectoria del punto M suponiendo que en el instante $t=0$ el punto M se encuentra en el plano xy, sus coordenadas son $x=y=a$ y las proyecciones de su velocidad son

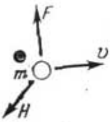
$$\dot{x}=\dot{z}=b, \quad \dot{y}=0.$$

Respuesta: Una línea helicoidal situada sobre un cilindro elíptico, cuyo eje es Ox y su ecuación tiene la forma $\frac{y^2}{a^2}+\frac{2kz^2}{b^2}=1$; el paso de la hélice es igual a $\pi b\sqrt{\frac{2}{k}}$.

27.61. *Desviación de los rayos catódicos en un campo eléctrico.* Una partícula de masa m, portadora de una carga eléctrica negativa e, penetra en un campo eléctrico homogéneo de tensión E con la velocidad v_0 perpendicular a la dirección de la tensión del campo.

Determinar la trayectoria del movimiento ulterior de la partícula sabiendo que en el campo eléctrico ésta está sometida a la acción de la fuerza $\boldsymbol{F}=e\boldsymbol{E}$ dirigida en el sentido contrario al de la tensión E. La acción de la fuerza de gravedad se desprecia.

Respuesta: Una parábola de parámetro igual a mv_0^2/eE.



Para el problema 27.62

27.62. *Desviación de los rayos catódicos en un campo magnético.* Una partícula de masa m, portadora de una carga eléctrica negativa e, penetra en un campo magnético homogéneo de tensión H con la velocidad v_0 perpendicular a la dirección de la tensión del campo.

Determinar la trayectoria del movimiento ulterior de la partícula sabiendo que ésta experimenta la acción de la fuerza $\boldsymbol{F}=-e(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H})$.

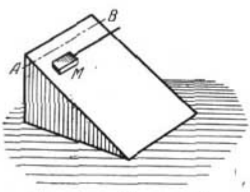
Durante la resolución del problema es cómodo utilizar las ecuaciones de movimiento del punto en las proyecciones sobre la tangente y la normal principal a la trayectoria.

Respuesta: Una circunferencia de radio $\dfrac{mv_0}{eH}$.

27.63. Determinar la trayectoria del movimiento de una partícula de masa m portadora de la carga eléctrica e, si esta partícula penetra en un campo eléctrico homogéneo de tensión variable $E=A\cos kt$ (A y k son constantes dadas) con la velocidad v_0 perpendicular a la dirección de la tensión del campo. La influencia de la fuerza de gravedad se desprecia. En el campo eléctrico la partícula está sometida a la acción de la fuerza $\boldsymbol{F}=-e\boldsymbol{E}$.

Respuesta: $y=-\dfrac{eA}{mk^2}\left(1-\cos\dfrac{k}{v_0}x\right)$, donde el eje y está dirigido según la tensión del campo, el origen de coordenadas coincide con la posición inicial del punto en el campo.

27.64. Un cuerpo pesado M se desplaza sobre un plano inclinado rugoso; este cuerpo está constantemente tirado con ayuda de un hilo en dirección horizontal, paralelamente a la recta AB. A partir de cierto instante el movimiento del cuerpo se hace rectilíneo y uniforme, una de las dos componentes ortogonales de la velocidad, la que es paralela a AB, es igual a 12 cm/s.



Para el problema 27.64.

Determinar la segunda componente v_1 de la velocidad, así como la tensión T del hilo para los datos siguientes: la inclinación del plano es $\operatorname{tg}\alpha=1/30$, el coeficiente de rozamiento es $f=0,1$, el peso del cuerpo es igual a 300 N.

Respuesta: $v_1=4,24$ cm/s; $T=28,3$ N.

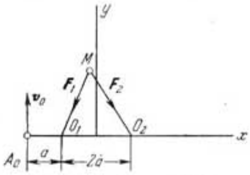
27.65. El punto M de masa m experimenta la acción de dos fuerzas de atracción dirigidas hacia los centros fijos O_1 y O_2 (véase el dibujo). La magnitud de estas fuerzas es proporcional a la distancia hasta los puntos O_1 y O_2. El coeficiente de proporcionalidad es idéntico e igual a c. El movimiento comienza en el punto A_0 con la velocidad v_0 perpendicular a la línea O_1O_2.

Determinar la trayectoria descrita por el punto M. Hallar los instantes, cuando el punto interseca la dirección de la línea O_1O_2 y calcular sus coordenadas en estos instantes.

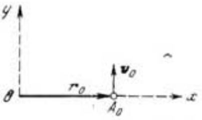
Respuesta: La elipse $\frac{x^2}{(2a)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{v_0}{k}\right)^2}=1$, donde $k=\sqrt{\frac{2c}{m}}$;

$$t=0,\quad x_0=-2a,\quad y_0=0;$$
$$t_1=\frac{\pi}{k},\quad x_1=2a,\quad y_1=0,$$
$$t_2=\frac{2\pi}{k},\quad x_2=-2a,\quad y_2=0,\ \text{etc.}$$

El tiempo, durante el cual el punto describe la elipse es $T=\frac{2\pi}{k}$.



Para el problema 27.65.



Para el problema 27.66.

27.66. El punto A de masa m, que comienza su movimiento a partir de la posición $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0$ (donde $\boldsymbol{r}$ es el radio vector del punto) con la velocidad $\boldsymbol{v}_0$ perpendicular a $\boldsymbol{r}_0$, está sometido a la acción de una fuerza de atracción, dirigida hacia el centro O, proporcional a la distancia a este centro. El coeficiente de proporcionalidad es igual a mc_1. Además el punto experimenta la acción de la fuerza constante $mc\boldsymbol{r}_0$.

Hallar la ecuación de movimiento y la trayectoria del punto. ¿Cuál debe ser la relación c_1/c para que la trayectoria del movimiento pase por el centro O? ¿Con qué velocidad el punto pasa por el centro O?

Respuesta: 1) $\boldsymbol{r}=\frac{c}{c_1}\boldsymbol{r}_0+\frac{v_0}{\sqrt{c_1}}\operatorname{sen}\sqrt{c_1}t+\boldsymbol{r}_0\times\left(1-\frac{c}{c_1}\right)\cos\sqrt{c_1}t$;

$$\text{2) la elipse }\left[\frac{x-\frac{c}{c_1}r_0}{r_0\left(1-\frac{c}{c_1}\right)}\right]^2+\left(\frac{y\sqrt{c_1}}{v_0}\right)^2=1;$$

3) el punto A pasará por el centro O, si $c_1/c=2$

4) el punto A pasará por el centro O con la velocidad si $\dot{\boldsymbol{r}}_0=-\boldsymbol{v}_0$ en el instante $t=\pi/\sqrt{c_1}$.

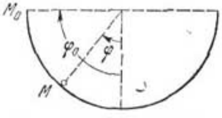
27.67. Un punto pesado de masa m cae desde la posición que se determina por las coordenadas $x_0=0$, $y_0=h$ en el instante $t=0$ bajo la acción de la fuerza de gravedad (paralela al eje y) y de la fuerza de repulsión del eje y proporcional a la distancia hasta este eje (el coeficiente de proporcionalidad es c). Las proyecciones de la velocidad inicial del punto sobre los ejes de coordenadas son iguales a $v_x=v_0$, $v_y=0$.

Determinar la trayectoria del punto, así como el instante t_1 cuando este punto interseca el eje x.

Respuesta: La trayectoria es

$$x=\frac{v_0}{k}\,\mathrm{sh}\,k\sqrt{\frac{2}{g}(h-y)},\ \text{donde}$$

$$k=\sqrt{\frac{c}{m}};\quad t_1=\sqrt{\frac{2h}{g}}.$$



Para el problema 27.68.

27.68. El punto M de masa m se desplaza bajo la acción de la fuerza de gravedad sobre la superficie interior lisa de un cilindro hueco de radio r. En el instante inicial el ángulo $\varphi_0=\pi/2$, y la velocidad del punto era igual a cero.

Determinar la velocidad del punto M y la reacción de la superficie del cilindro para el ángulo $\varphi=30°$.

Respuesta: $v=\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt{gr}$; $T=\frac{3\sqrt{3}}{2}mg$.

§ 28. TEOREMA ACERCA DE LA VARIACIÓN DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO DEL PUNTO MATERIAL. TEOREMA ACERCA DE LA VARIACIÓN DEL MOMENTO DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO DEL PUNTO MATERIAL

28.1. Un tren se desplaza sobre un tramo de la vía horizontal y rectilíneo. Durante el frenado se desarrolla una fuerza de resistencia igual a 0,1 del peso del tren. En el instante del comienzo del frenado la velocidad del tren es igual a 72 km/h.

Hallar el tiempo y el trayecto de frenado.

Respuesta: 20,4 s; 204 m.

28.2. Un cuerpo pesado desciende sin velocidad inicial por un plano inclinado rugoso que forma con el horizonte un ángulo de 30°.

Determinar el tiempo T, durante el cual el cuerpo pasa la distancia $l=39{,}2$ m, si el coeficiente de rozamiento es $f=0{,}2$.

Respuesta: $T=5$ s.

28.3. Un tren de 400 tf entra en una pendiente $i=\operatorname{tg}\alpha=0{,}006$ (donde α es el ángulo de elevación) con la velocidad de 54 km/h. El coeficiente de rozamiento (el coeficiente de resistencia global) durante el movimiento del tren es 0,005. 50 s después del comienzo de la subida su velocidad se reduce hasta 45 km/h.

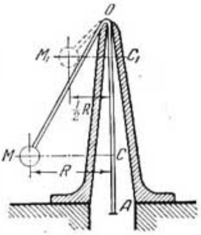
Hallar la fuerza de tracción de la locomotora Diesel.

Respuesta: 2,36 tf.

28.4. Una pesa M está atada al extremo de un hilo inextensible MOA, cuya parte OA pasa por un tubo vertical; la pesa se desplaza alrededor del eje del tubo por una circunferencia de radio $MC=R$ haciendo 120 r.p.m. Introduciendo lentamente el hilo OA en el tubo, se acorta la parte exterior del hilo hasta la longitud OM_1, con la cual la pesa describe una circunferencia de radio $\frac{1}{2}R$.

Calcular el número de revoluciones por minuto que hace la pesa por esta circunferencia.

Respuesta: 480 r.p.m.



Para el problema 28.4.

28.5. Para determinar el peso de un tren cargado, entre la locomotora Diesel y los vagones se ha instalado un dinamómetro. La indicación media del dinamómetro en 2 minutos es 100,8 t. Durante este tiempo el tren alcanza la velocidad $v=57{,}6$ km/h (en el instante inicial el tren estaba en reposo). El coeficiente de rozamiento es $f=0{,}02$.

Hallar el peso del tren.

Respuesta: El peso del tren es de 3000 t.

28.6. ¿Cuál debe ser el coeficiente de rozamiento f entre las ruedas de un automóvil frenado y el camino, si a la velocidad $v=72$ km/h éste se para al cabo de 6 s después del comienzo del frenado?

Respuesta: $f=0{,}34$.

28.7. Una bala de peso $P=20$ gf sale del cañón de un fusil con la velocidad $v=650$ m/s, recorriendo el ánima en el tiempo $t=0{,}00095$ s.

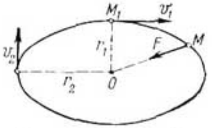
Determinar la magnitud media de la presión de los gases que actúan sobre la bala, si la sección del ánima es $s=150$ mm².

Respuesta: La presión media es de 9,31 kgf/mm².

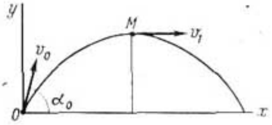
28.8. El punto M se desplaza alrededor de un centro fijo bajo la acción de la fuerza de atracción hacia este centro.

Hallar la velocidad v_2 en el punto de la trayectoria más alejado del centro, si la velocidad del punto en la posición más cercana al centro es $v_1 = 30$ cm/s, y r_2 es cinco veces mayor que r_1.

Respuesta: $v_2 = 6$ cm/s.



Para el problema 28.8.



Para el problema 28.9.

28.9. Hallar el impulso de la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre un proyectil en el transcurso de tiempo cuando el proyectil pasa de su posición inicial O a la posición más alta M.

Viene dado: $v_0 = 500$ m/s, $\alpha_0 = 60°$, $v_1 = 200$ m/s, el peso del proyectil es de 100 kgf.

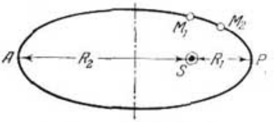
Respuesta: Las proyecciones del impulso de la resultante son:

$$S_x = -510 \text{ kgfs}; \quad S_y = -4410 \text{ kgfs}.$$

28.10. Dos meteoritos M_1 y M_2 describen una misma elipse, en cuyo foco S se encuentra el sol. La distancia entre estos meteoritos es tan pequeña que se puede considerar al arco M_1M_2 de la elipse como un segmento de recta. Se sabe que la distancia M_1M_2 era igual a a cuando su punto medio se hallaba en el perihelio P.

Suponiendo que los meteoritos se desplazan con iguales velocidades sectoriales, determinar la distancia M_1M_2 cuando su punto medio pasa por el afelio A, si se conoce que $SP = R_1$ y $SA = R_2$.

Respuesta: $M_1M_2 = \frac{R_1}{R_2} a$.



Para el problema 28.10.

28.11. Un muchacho de 40 kgf de peso está sobre los patines de un trineo deportivo, cuyo peso con la carga es igual a 40 kgf, y cada segundo hace un impulso de 2 kgfs.

Hallar la velocidad adquirida por el trineo en 15 s, si el coeficiente de rozamiento es igual a $f=0{,}01$.

Respuesta: $v=2{,}2$ m/s.

28.12. Un punto efectúa movimiento uniforme por una circunferencia con la velocidad $v=20$ cm/s y hace una vuelta completa durante el tiempo $T=4$ s.

Hallar el impulso de las fuerzas S que actúan sobre el punto durante un semiperiodo, si la masa del punto es $m=5$ g. Determinar el valor medio de la fuerza F.

Respuesta: $S=200$ dinas·s; $F=100$ dinas y está dirigida por la velocidad final.

28.13. Dos péndulos matemáticos suspendidos en hilos de longitudes l_1 y $l_2 (l_1 > l_2)$ efectúan oscilaciones de igual amplitud. Ambos péndulos han comenzado a moverse simultáneamente de sus posiciones extremas desviadas, en una misma dirección.

Hallar la condición que deben satisfacer las longitudes l_1 y l_2 para que, después de cierto intervalo de tiempo, los péndulos vuelvan simultáneamente a la posición de equilibrio. Calcular el mínimo intervalo de tiempo T.

Respuesta: $\sqrt{\frac{l_1}{l_2}}=\frac{k}{n}$, donde k y n son números enteros y la fracción $\frac{k}{n}$ es irreductible; $T=kT_2=nT_1$.

28.14. Una bola de peso p, atada a un hilo inextensible, se desliza sobre un plano liso horizontal; el otro extremo del hilo se mete con una velocidad constante en un orificio hecho en el plano.

Determinar el movimiento de la bola y la tensión del hilo T, si se sabe que en el instante inicial el hilo está dispuesto sugún una recta, la distancia entre la bola y el orificio es igual a R y la proyección de la velocidad inicial de la bola sobre la perpendicular a la dirección del hilo es igual a v_0.

Respuesta: En las coordenadas polares (si se toma el orificio como origen de coordenadas y el ángulo φ_0 igual a cero):

$$r=R-at;\quad \varphi=\frac{v_0 t}{R-at};\quad T=\frac{pv_0^2R^2}{g(R-at)^3}.$$

28.15. Determinar la masa M del sol, disponiendo de los datos siguientes: el radio de la Tierra es $R=637\cdot10^6$ cm, su densidad media es 5,5, el semieje mayor de la órbita terrestre a es igual a $149\cdot10^{11}$ cm, el tiempo de revolución de la Tierra alrededor del Sol es $T=365{,}25$ días. La fuerza de atracción universal entre dos masas iguales a 1 g a la distancia de 1 cm se considera igual a $\frac{gR^2}{m}$, donde m es la masa de la Tierra. De acuerdo con la ley de

Kepler la fuerza de atracción de la Tierra por el Sol es igual a $\frac{4\pi^2 a^3}{T^2} \cdot \frac{m}{r^2}$, donde r es la distancia entre la Tierra y el Sol.

Respuesta: $M = 197 \cdot 10^{31}$ g.

28.16. Un punto de masa m, sometido a la acción de una fuerza central F, describe la lemniscata $r^2 = a \cos 2\varphi$, donde a es una magnitud constante, r es la distancia del punto al centro de fuerza; en el instante inicial $r = r_0$, la velocidad del punto es v_0 y forma un ángulo α con la recta que une el punto con el centro de fuerza.

Determinar la magnitud de la fuerza F, conociendo que ésta depende solamente de la distancia r.

De acuerdo con la fórmula Binet $F = -\frac{mc^2}{r^2}\left(\frac{d^2 \frac{1}{r}}{d\varphi^2} + \frac{1}{r}\right)$, donde c es la velocidad sectorial doble del punto.

Respuesta: La fuerza de atracción $F = \frac{3ma^2}{r^7} r_0^2 v_0^2 \operatorname{sen}^2 \alpha$.

28.17. Un punto M de masa m se desplaza cerca de un centro fijo O bajo la acción de la fuerza F que parte de dicho centro y que depende solamente de la distancia $MO = r$.

Conociendo que la velocidad del punto es $v = a/r$, donde a es una magnitud constante, hallar la magnitud de la fuerza F y la trayectoria del punto.

Respuesta: La fuerza de atracción $F = \frac{ma^2}{r^3}$; la trayectoria es una espiral logarítmica.

28.18. Determinar el movimiento de un punto de 1 g de masa bajo la acción de una fuerza de atracción central, inversamente proporcional al cubo de la distancia del punto hasta el centro de la fuerza, para los datos siguientes: a la distancia de 1 cm la fuerza equivale a 1 dina; en el instante inicial la distancia del punto al centro es $r_0 = 2$ cm, la velocidad es $v_0 = 0{,}5$ cm/s y forma con la dirección de la recta, trazada del centro al punto, un ángulo de 45°.

Respuesta: $r = 2e^{\varphi}$; $r^2 = 4 + t\sqrt{2}$.

28.19. Una partícula M de 1 g de masa es atraída hacia un centro fijo O por una fuerza inversamente proporcional a la quinta potencia de la distancia; esta fuerza es igual a 8 dinas para la distancia igual a 1 cm. En el instante inicial la partícula se encuentra a la distancia $OM_0 = 2$ cm y su velocidad $v_0 = 0{,}5$ cm/s es perpendicular a OM_0.

Determinar la trayectoria de la partícula.

Respuesta: una circunferencia de 1 cm de radio.

28.20. Un punto de 20 g de masa, que se desplaza bajo la acción de la fuerza de atracción hacia el centro fijo de acuerdo con la ley de gravitación de Newton, describe una elipse completa con semiejes de 10 cm y 8 cm en 50 s.

Determinar los valores máximo y mínimo de la fuerza de atracción F durante este movimiento.

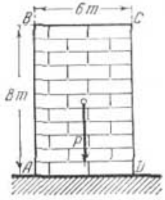
Respuesta: $F_{\text{máx}} = 19{,}7$ dinas; $F_{\text{mín}} = 1{,}2$ dinas.

§ 29. TRABAJO Y POTENCIA

29.1. El peso de un masivo homogéneo $ABCD$, cuyas dimensiones están indicadas en el dibujo, es $P = 4000$ kgf.

Determinar el trabajo que se debe realizar para volcar el masivo girándolo alrededor de canto D.

Respuesta: 4000 kgfm = 39,24 kJ.



Para el problema 29.1.

29.2. Determinar el trabajo mínimo que hace falta realizar para levantar a 5 m una carga de 2 tf desplazándola sobre un plano que forma con el horizonte un ángulo de 30°. El coeficiente de rozamiento es 0,5.

Respuesta: 18 660 kgfm = 183 kJ.

29.3. Para levantar 5000 m³ de agua a 3 m de altura se utiliza una bomba con un motor de 2 CV.

¿Cuánto tiempo requiere este trabajo, si el rendimiento de la bomba es igual a 0,8?

Se llama rendimiento la relación del trabajo útil, en el caso examinado, el trabajo consumido en elevar el agua, al trabajo de la fuerza motriz que debe ser mayor que el trabajo útil a causa de las resistencias parásitas.

Respuesta: 34 horas 43 minutos 20 segundos.

29.4. ¿Cuál es la potencia, en caballos de vapor y en kilovatios, de una máquina que levanta un martillo de 200 kgf de peso a 0,75 m de altura 84 veces en 1 minuto, si el rendimiento de la máquina es 0,7?

Respuesta: 4 CV = 2,94 kW.

29.5. Calcular, en caballos de vapor y megavatios, la potencia total de tres cascadas dispuestas una tras otra en un río. Las alturas de caída del agua son: 12 m en la primera cascada, 12,8 m en la segunda y 15 m en la tercera. El gasto medio de agua en el río es de 75,4 m³/s.

Respuesta: 40 000 CV = 29,4 MW.

29.6. Calcular la potencia de los turbogeneradores en la estación de una red eléctrica de tranvía, si el número de vagones en la línea es 45, cada vagón pesa 10 tf, la resistencia de rozamiento es igual a 0,02 del peso del vagón, la velocidad media es de 12 km/h y las pérdidas en la red constituyen un 5%.

Respuesta: 421 CV = 309 kW.

29.7. Para descargar el carbón de una barcaza se utiliza un motor que levanta un balde. En el balde cabe 1 tf de carbón y éste pesa 200 kgf. Durante 12 horas de trabajo hace falta descargar 600 tf de carbón, el balde con el carbón debe ser levantado a 10 m de altura.

Calcular la potencia teórica del motor.

Respuesta: 2,22 CV = 1,63 kW.

29.8. Calcular el trabajo que se realiza para elevar una carga de 20 kgf por un plano inclinado a 6 m de distancia, si el ángulo formado por el plano con el horizonte es igual a 30°. El coeficiente de rozamiento es igual a 0,01.

Respuesta: 61,04 kgfm = 598 J.

29.9. Cuando la velocidad de un barco de turbina es de 15 nudos, la turbina de éste desarrolla una potencia de 5144 CV.

Determinar la fuerza de resistencia del agua al movimiento del barco conociendo que el rendimiento de la turbina y de la hélice es igual a 0,4 y 1 nudo = 0,5144 m/s.

Respuesta: 20 tf.

29.10. Calcular, en caballos de vapor y en kilovatios, la potencia de un motor de combustión interna, si la presión media sobre el pistón durante todo el recorrido de éste es igual a 5 kgf por 1 cm^2; el recorrido del pistón equivale a 40 cm, su área es de 300 cm^2, el número de recorridos de trabajo en 1 minuto es igual a 120, el rendimiento es de 0,9.

Respuesta: 14,4 CV = 10,6 kW.

29.11. La piedra rectificadora de 60 cm de diámetro hace 120 r.p.m. La potencia consumida es igual a 1,6 CV. El coeficiente de rozamiento entre la piedra rectificadora y la pieza es igual a 0,2.

¿Con qué fuerza la piedra presiona la pieza a rectificar?

Respuesta: 1570 N.

29.12. Determinar la potencia del motor de una cepilladora, si el recorrido de trabajo es de 2 m y dura 10 s, la fuerza de corte es igual a 1200 kgf, el rendimiento de la máquina es 0,8. El movimiento se considera uniforme.

Respuesta: 2,96 kW.

29.13. En el siglo XVIII para bombear el agua de las minas de carbón se utilizaba una transmisión a caballo llamada trépano circular. El diámetro del trépano era $d=8$ m, su árbol hacía $n=6$ r.p.m.

Determinar la tracción media del caballo que ponía el trépano en movimiento suponiendo que su potencia es igual a 1 CV.

Respuesta: $F=29{,}9$ kgf.

29.14. Una carga de peso P está suspendida del extremo de un resorte. Para alargar el resorte en 1 cm hace falta aplicar una fuerza igual a c gf. Componer la expresión de la energía mecánica total del sistema.

Respuesta: $\frac{1}{2}\frac{P}{g}\dot{x}^2+\frac{1}{2}cx^2-mgx=\text{const}$, donde x se cuenta a partir del extremo del resorte no extendido hacia abajo.

29.15. El centro de gravedad de un esquiador que esquía a 20 km de distancia por un camino horizontal efectúa oscilaciones harmónicas de amplitud $a=8$ cm y de período $T=4$ s. El peso del esquiador es de 80 kgf, y el coeficiente de rozamiento de los esquíes sobre la nieve es $f=0{,}05$.

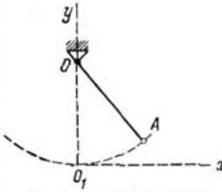
Calcular el trabajo realizado por el esquiador en marcha, si él pasó esta distancia en 1 hora 30 minutos, así como la potencia media del esquiador.

Nota. Considerar que el trabajo del frenado durante la bajada del centro de gravedad del esquiador constituye, 4/10 del trabajo durante la subida del centro de gravedad a la misma altura.

Respuesta: $A=1{,}05\cdot 10^5$ kgfm; $w=0{,}26$ CV.

29.16. Un péndulo matemático A de peso P y de longitud l subió a la altura y bajo la acción de la fuerza Px/l.

Calcular la energía potencial del péndulo por dos procedimientos: 1) como el trabajo de la fuerza de gravedad y 2) como el trabajo realizado por la fuerza Px/l, e indicar para cuáles condiciones los dos procedimientos dan el mismo resultado.



Para el problema 29.16.

Respuesta: 1) Py; 2) $\frac{1}{2}\frac{Px^2}{l}$.

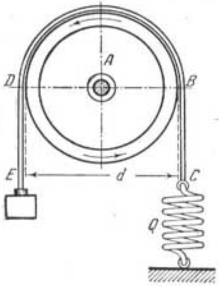
Ambas respuestas son idénticas, si se puede despreciar y^2.

29.17. Para medir la potencia de un motor, sobre el volante A se coloca una cinta con zapatas de madera. El ramal derecho BC de la cinta se retiene por una balanza de resorte Q y el ramal izquierdo DE está tendido por una carga.

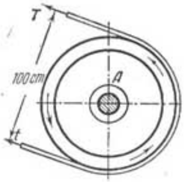
Determinar la potencia del motor, si éste, girando uniformemente, hace 120 r.p.m.; en este caso la balanza de resorte indica una tensión del ramal derecho de la cinta igual a 4 kgf. El peso de la carga es de 1 kgf, el diámetro del volante es $d = 63{,}6$ cm.

La diferencia de las tensiones BC y DE de la cinta es igual a la fuerza que frena el volante; determinamos el trabajo de esta fuerza en 1 s.

Respuesta: 0,16 CV = 117,8 W.



Para el problema 29.17.



Para el problema 29.18.

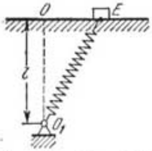
29.18. Una potencia de 20 CV se transmite con ayuda de una correa. El radio de la polea de correa es de 50 cm, la velocidad angular de la polea es igual a 150 r.p.m.

Suponiendo que la tensión T del ramal motriz de la correa es dos veces mayor que la tensión t del ramal conducido, determinar las tensiones T y t.

Respuesta: $T = 382$ kgf; $t = 191$ kgf.

§ 30. TEOREMA DE VARIACIÓN DE LA ENERGÍA CINÉTICA DEL PUNTO MATERIAL

30.1. Un cuerpo E de masa m se encuentra sobre un plano horizontal liso. A este cuerpo está sujetado un resorte de rigidez c, el segundo extremo del cual va sujeto a la articulación O_1. La longitud del resorte no deformado es l_0; $OO_1 = l$. En el instante inicial el cuerpo E está desviado de la posición de equilibrio O a la magnitud extrema $OE = a$ y luego se suelta sin velocidad inicial.



Para el problema 30.1.

Determinar la velocidad del cuerpo en el instante cuando éste pasa por la posición de equilibrio.

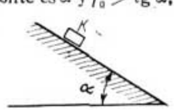
Respuesta: $v=\sqrt{\frac{2c}{m}\left[\frac{a^2}{2}+l_0\left(l-\sqrt{l^2+a^2}\right)\right]}$.

30.2. Para los datos del problema anterior calcular la velocidad del cuerpo E en el instante en que éste pasa por la posición de equilibrio O, suponiendo que el plano es rugoso y el coeficiente de rozamiento es f.

Respuesta:
$$v^2=\frac{2}{m}\left\{c\left\{\frac{a^2}{2}+l_0\left(l-\sqrt{l^2+a^2}\right)\right]-\right.$$
$$\left.-f\left[(mg+cl)\,a+cl_0l\ln\frac{l}{a+\sqrt{l^2+a^2}}\right]\right\}.$$

30.3. El cuerpo K está en reposo sobre un plano inclinado rugoso. El ángulo de inclinación del plano al horizonte es α y $f_0>\operatorname{tg}\alpha$, donde f_0 es el coeficiente de rozamiento en reposo. En un instante determinado se comunica al cuerpo una velocidad inicial v_0 dirigida a lo largo del plano hacia abajo.

Determinar el camino s recorrido por el cuerpo hasta su parada, si el coeficiente de rozamiento durante el movimiento es igual a f.



Para el problema 30.3.

Respuesta: $s=\frac{v_0^2}{2g\,(f\cos\alpha-\operatorname{sen}\alpha)}$.

30.4. Un cuerpo pesado desciende sin velocidad inicial por un plano inclinado que forma con el horizonte un ángulo de 30°; el coeficiente de rozamiento es igual a 0,1.

¿Qué velocidad tendrá el cuerpo al pasar 2 m luego de iniciar el movimiento?

Respuesta: 4,02 m/s.

30.5. Un proyectil de 24 kgf de peso sale del tubo de un cañón con la velocidad de 500 m/s. La longitud del tubo es de 2 m.

¿Cuál es el valor medio de la fuerza de presión de los gases sobre el proyectil?

Respuesta: 152,9 tf.

30.6. Un punto material de 3 kgf de peso se desplazaba sobre una recta horizontal a la izquierda con la velocidad de 5 m/s. A este punto se aplicó una fuerza constante dirigida hacia la derecha. La acción de la fuerza cesó dentro de 30 s y entonces la velocidad del punto resultó ser igual a 55 m/s y dirigida a la derecha.

Hallar la magnitud de esta fuerza y el trabajo realizado por ella.

Respuesta: 0,612 kgf; 459 kgfm = 4,5 kJ.

30.7. Un tren al aproximarse a la estación desciende por una vía inclinada bajo el ángulo $\alpha=0{,}008$ rad, con la velocidad de

36 km/h. En un instante determinado el maquinista al ver un peligro empieza a frenar el tren. La resistencia de frenado y de rozamiento en los ejes constituye 0,1 del peso del tren.

Determinar a qué distancia y dentro de qué tiempo, a partir del comienzo del frenado, el tren se parará, considerando que sen $\alpha = \alpha$.

Respuesta: 55,3 m; 11,06 s.

30.8. Un tren de 200 tf de peso se desplaza sobre un tramo horizontal de la vía con una aceleración de $0{,}2\ m/s^2$. La resistencia de rozamiento en los ejes constituye 10 kgf por cada tonelada de peso del tren, y se considera que no depende de la velocidad.

Determinar la potencia desarrollada por la locomotora Diesel en el instante $t = 10$ s, si en el instante $t = 0$ la velocidad del tren era igual a 18 m/s.

Respuesta: 1620 CV = 1192 kW.

30.9. Una barra de peso Q comienza a moverse con la velocidad inicial v_0 sobre un plano horizontal rugoso y pasa, hasta su parada completa, la distancia s.

Determinar el coeficiente de rozamiento de deslizamiento, considerando que la fuerza de rozamiento es proporcional a la presión normal.

Respuesta: $f = \frac{v_0^2}{2gs}$.

30.10. La resistencia experimentada por una plataforma ferroviaria de 6 tf de peso durante la marcha y debido al rozamiento en los ejes, es igual a 15 kgf. Un obrero, empujando la plataforma en reposo con una fuerza de presión de 25 kgf, la hizo rodar sobre un tramo horizontal rectilíneo de la vía. A la distancia de 20 m el obrero dejó a la plataforma rodar por inercia.

Despreciando la resistencia del aire y el rozamiento de las ruedas sobre los rieles, calcular la velocidad máxima $v_{máx}$ de la plataforma en movimiento y la distancia s recorrida por ésta hasta su parada.

Respuesta: $v_{máx} = 0{,}808$ m/s; $s = 33\frac{1}{3}$ m.

30.11. Un clavo se mete en una pared que opone la resistencia $R = 70$ kgf. Con cada golpe del martillo el clavo se hinca en la pared a la distancia $l = 0{,}15$ cm.

Determinar el peso del martillo P, si en el instante cuando él golpea la cabeza del clavo su velocidad es $v = 1{,}25$ m/s.

Respuesta: $P = 1{,}32$ kgf.

30.12. El meteorito que cayó sobre la Tierra en el año 1751, pesaba 39 kgf. Como resultado de la caída él se profundizó en el suelo a la distancia $l = 1,875$ m. El estudio experimental ha mostrado que la resistencia del suelo, donde cayó el meteorito, a la penetración de un cuerpo es $F = 50$ tf.

¿Con qué velocidad el meteorito alcanzó la superficie de la Tierra? ¿Desde cuál altura tuvo que caer sin velocidad inicial para desarrollar esta velocidad sobre la superficie de la Tierra? Consideramos la fuerza de gravedad constante y despreciamos la resistencia del aire.

Respuesta: $v = 217$ m/s; $H = 2390$ m.

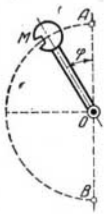
30.13. Un tren no frenado de peso $P = 500$ tf, desplazándose con el motor parado, experimenta la resistencia $R = (765 + 51\,v)$ kgf, donde v es la velocidad en m/s.

Conociendo la velocidad inicial del tren $v_0 = 15$ m/s, determinar la distancia s que pasará el tren hasta pararse.

Respuesta: $s = 4,6$ km.

30.14. El órgano principal de un aparato de ensayo de los materiales al choque, es una fundición de acero M sujeta a una barra que puede girar casi sin rozamiento alrededor del eje fijo horizontal O. Despreciando la masa de la barra, examinamos la fundición M como un punto material, para el cual la distancia $OM = 0,981$ m.

Calcular la velocidad v de este punto en la posición inferior B, si éste cae de su posición superior A con una velocidad inicial mínima.



Para el problema 30.14.

Respuesta: $v = 6,2$ m/s.

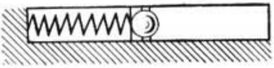
30.15. Escribir la expresión de la energía potencial de una ballesta elástica que se encorva a 1 cm bajo la acción de una carga de 0,4 tf suponiendo que la flexión x crece directamente proporcional a la carga.

Respuesta: $V = 0,2x^2 + \text{const}$.

30.16. La longitud del resorte de una ballesta en estado no tensado es de 20 cm. La fuerza necesaria para cambiar su longitud en 1 cm es igual a 0,2 kgf.

¿Con qué velocidad v saldrá de la ballesta una bola de 30 gf si el resorte está comprimido hasta la longitud de 10 cm? La ballesta está puesta horizontalmente.

Respuesta: $v = 8,1$ m/s.



Para el problema 30.16.

30.17. La flexión estática de una viga, cargada en su punto medio por una carga Q, es igual a 2 mm.

Hallar la flexión máxima de la viga, despreciando su masa en dos casos: 1) la carga Q está aplicada a la viga no deformada sin velocidad inicial; 2) la carga Q cae sobre el punto medio de la viga no deformada desde una altura de 10 cm sin velocidad inicial.

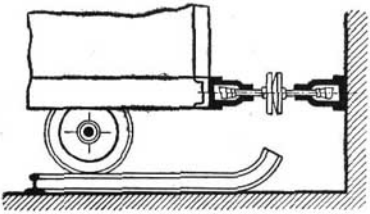
Durante la resolución del problema hace falta tener en cuenta que la fuerza que actúa sobre la carga por parte de la viga es proporcional a su flexión.

Respuesta: 1) 4 mm; 2) 22,1 mm.

30.18. Un vagón de 16 tf de peso choca contra dos topes de apoyo con la velocidad de 2 m/s.

Calcular la compresión máxima de los resortes de los topes de apoyo durante el choque del vagón, si se sabe que los resortes del vagón y los de los topes son idénticos y se comprimen en 1 cm bajo la acción de una fuerza de 5 tf.

Respuesta: 5,7 cm.

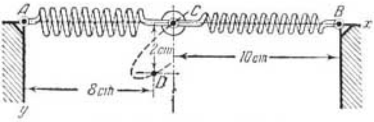


Para el problema 30.18.

30.19. Dos resortes no tensados AC y BC, situados a lo largo de una recta horizontal Ax, están articulados en los puntos fijos A y B, y en el punto C, con una pesa de 1,962 kgf. El resorte AC se comprime en 1 cm por una fuerza de 2 kgf, el resorte CB se alarga en 1 cm por una fuerza de 4 kgf. Las distancias son: $AC=BC=10$ cm. A la pesa se le ha comunicado una velocidad $v_0=2$ m/s en tal dirección que, en su movimiento ulterior, ésta pasa por el punto D de coordenadas $x_0=8$ cm; $y_0=2$ cm, si se toma el punto A por origen de coordenadas y los ejes coordenados se dirigen como está indicado en el dibujo.

Determinar la velocidad de la pesa en el instante cuando ésta pasa por el punto D, situado en el plano vertical xy.

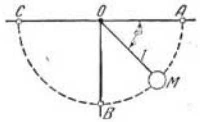
Respuesta: $v=1,78$ m/s.



Para el problema 30.19.

30.20. La carga M de peso P, suspendida en el punto O con ayuda de un hilo imponderable e inextensible de longitud l, comienza a moverse en el plano vertical sin velocidad inicial a partir del punto A; en ausencia de resistencias la carga M alcanzará la posición C donde su velocidad se hará nula.

Suponiendo que la energía potencial, condicionada por la fuerza de gravedad de la carga M en el punto B, es igual a cero, construir los gráficos de las variaciones de las energías cinética y potencial, así como de su suma, en función del ángulo φ.



Para el problema 30.20.

Respuesta: Dos sinusoides y una recta, cuyas ecuaciones son
$$T = Pl \operatorname{sen} \varphi, \quad V = Pl(1 - \operatorname{sen} \varphi), \quad T + V = Pl.$$

30.21. Un punto material de masa m efectúa oscilaciones harmónicas a lo largo de la recta Ox, bajo la acción de una fuerza elástica de recuperación, de acuerdo con la ley siguiente: $x = a \operatorname{sen}(kt + \beta)$.

Despreciando las resistencias, construir los gráficos de la variación de las energías cinética T y potencial V del punto en movimiento en función de la coordenada x; en el origen de coordenadas $V = 0$.

Respuesta: Ambos gráficos son parábolas, cuyas ecuaciones son
$$T = \frac{mk^2}{2}(a^2 - x^2); \quad V = \frac{mk^2x^2}{2}.$$

30.22. ¿Qué fuerza vertical, de magnitud y dirección constantes, hace falta aplicar a un punto material para que al caer éste sobre la Tierra desde una altura igual al radio de la Tierra esta fuerza comunique al punto la misma velocidad que la fuerza de atracción terrestre, inversamente proporcional al cuadrado de la distancia del punto al centro de la Tierra?

Respuesta: $P/2$, donde P es el peso del punto sobre la superficie de la Tierra.

30.23. Un resorte horizontal, en cuyo extremo va sujeto un punto material, está comprimido por la fuerza P y se halla en reposo. La fuerza P cambia bruscamente su dirección por la opuesta.

Despreciando la masa del resorte, determinar en cuántas veces el alargamento máximo l_2, obtenido en este caso, es mayor que la compresión inicial l_1.

Respuesta: $l_2/l_1=3$.

30.24. Un cuerpo se ha lanzado verticalmente hacia arriba desde la superficie de la Tierra con una velocidad inicial v_0.

Determinar la altura H alcanzada por el cuerpo, teniendo en cuenta que la variación de la fuerza de gravedad es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia al centro de la Tierra. La resistencia del aire se desprecia. El radio de la Tierra es $R=6370$ km, $v_0=1$ km/s.

Respuesta: $H=\dfrac{Rv_0^2}{2gR-v_0^2}=51$ km.

30.25. Dos particulas están cargadas de corriente eléctrica positiva; la carga de la primera partícula q_1 es igual a 100 unidades absolutas electrostáticas CGS, la carga de la segunda es $q_2=0{,}1q_1$; la primera partícula permanece inmóvil, la segunda se aleja de la primera bajo la acción de la fuerza de repulsión F. La masa de la segunda partícula es igual a 1 g, su distancia inicial hasta la primera partícula es igual a 5 cm, su velocidad inicial es igual a cero.

Determinar el límite superior para la velocidad de la partícula móvil teniendo en cuenta solamente la acción de la fuerza de repulsión $F=\frac{q_1q_2}{r^2}$, donde r es la distancia entre las partículas.

Respuesta: 20 cm/s.

30.26. Calcular la velocidad vertical v_0 que hace falta comunicar a un cuerpo situado sobre la superficie de la Tierra para que este cuerpo alcance una altura igual al radio de la Tierra; en este caso hay que tener en cuenta solamente la fuerza de atracción de la Tierra que varia inversamente proporcional al cuadrado de la distancia de este cuerpo al centro de la Tierra. El radio de la Tierra es igual a $637\cdot10^6$ cm, la aceleración de la fuerza de atracción sobre la superficie de la Tierra es igual a 980 cm/s^2.

Respuesta: 7,9 km/s.

30.27. Calcular la velocidad v_0 que hace falta comunicar a un proyectil lanzado desde la superficie de la Tierra hacia la Luna para que este proyectil alcance el punto donde las fuerzas de atracción de la Tierra y de la Luna son iguales y quede en este punto en equilibrio. Los movimientos de la Tierra y de la Luna, asi como la resistencia del aire se desprecian. La aceleración de la fuerza de gravedad sobre la superficie de la Tierra es $g=9{,}8$ m/s^2. La relación de las masas de la Luna y la Tierra es $m:M=1:80$, la distancia entre ellas es $d = 60R$, donde consideramos que $R = 6000$ km (el radio de la Tierra).

El coeficiente f que figura en la fórmula de la fuerza de atracción universal se define de la ecuación

$$m_1 g = m_1 f \left[\frac{M}{R^2} - \frac{m}{(d-R)^2} \right].$$

Respuesta: $$v_0^2 = \frac{2gR(d-R)}{d} \frac{\sqrt{\frac{M}{m}}(d-R) - R}{\sqrt{\frac{M}{m}}(d-R) + R} = \frac{59}{30} \frac{1-\alpha}{1+\alpha} gR,$$

donde $\alpha = \frac{1}{59\sqrt{80}}$, o bien $v_0 = 10{,}75$ km/s.

30.28. Una jaula de mina de peso $P = 6$tf desciende con la velocidad $v = 12$ m/s.

¿Qué fuerza de rozamiento entre la jaula y las paredes del pozo debe desarrollar el paracaídas de seguridad para parar la jaula a la distancia de $s = 10$ m, en caso de ruptura del cable que soporta la jaula? Considerar que la fuerza de rozamiento es constante.

Respuesta: $F = P\left(1 + \frac{v_0^2}{2gs}\right) = 10{,}3$ tf.

§ 31. PROBLEMAS MIXTOS

31.1. Una carga de 1 kgf de peso está suspendida por un hilo de 50 cm de longitud en un punto fijo O. En la posición inicial la carga está desviada de la vertical un ángulo de 60° y se le ha comunicado la velocidad inicial v_0 en el plano vertical por la perpendicular al hilo, hacia abajo, igual a 210 cm/s.

Determinar: 1) la tensión del hilo en la posición inferior; 2) la altura de elevación de la carga sobre esta posición, calculada por la vertical.

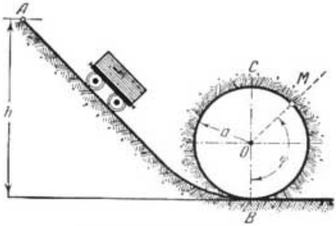
Respuesta: 1) 2,9 kgf; 2) 47,5 cm.

31.2. Conservando los datos del problema anterior (a excepción de la velocidad v_0) hallar para qué velocidad v_0 la carga recorrerá toda la circunferencia.

Respuesta: $v_0 > 443$ cm/s.

31.3. Una vagoneta de peso P desciende por los rieles colocados sobre el camino AB y que forman luego un bucle en forma de un anillo circular BC de radio a.

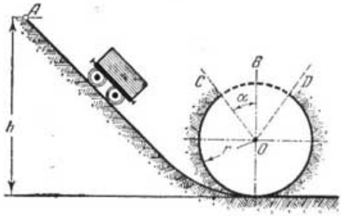
¿Desde qué altura h debe descender la vagoneta sin velocidad inicial para que ésta pueda recorrer toda la circunferencia del



Para el problema 31.3.

anillo sin separarse de él? Determinar la presión N de la vagoneta sobre el anillo en el punto M, para el cual el ángulo $MOB=\varphi$.

Respuesta: $h\geqslant 2{,}5a$; $\quad N=P\left(\frac{2h}{a}-2+3\cos\varphi\right)$.



Para el problema 31.4.

31.4. Una vagoneta desciende desde el punto A por una vía que forma un bucle abierto de radio r, como está indicado en el dibujo; $\angle BOC=\angle BOD=\alpha$.

Hallar la altura h desde la que debe descender la vagoneta sin velocidad inicial para que pueda recorrer todo el bucle, así como el valor del ángulo α para el cual esta altura h es mínima.

Indicación. En el tramo DC el centro de gravedad de la vagoneta efectúa un movimiento parabólico.

Respuesta: $h=r\left(1+\cos\alpha+\frac{1}{2\cos\alpha}\right)$; $\quad h_{\min}$ cuando $\alpha=45°$.

31.5. Una fundición pesada de acero de 20 kgf de peso está sujeta a una barra que puede girar sin rozamiento alrededor de un eje fijo O. La fundición cae de su posición superior A con una velocidad inicial mínima.

Calcular la presión máxima sobre el eje. La masa de la barra se desprecia. (Véase el dibujo para el problema 30.14).

Respuesta: 100 kgf.

31.6. Calcular (en el problema anterior) el ángulo que forma la barra en rotación con la vertical en el instante cuando la presión sobre el eje es igual a cero.

Respuesta: $\varphi = \arccos \frac{2}{3}$.

31.7. Un paracaidista de 70 kgf de peso salta del avión y abre su paracaídas después de recorrer 100 m.

Hallar la tensión de los cordones de suspensión, si en el transcurso de los primeros cinco segundos después de abrirse el paracaídas, siendo constante la fuerza de resistencia al descenso, la velocidad del paracaidista decreció hasta 4,3 m/s. La resisistencia del aire al movimiento del hombre se desprecia.

Respuesta: 127,4 kgf.

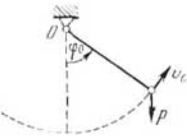
31.8. El maquinista de un tren que se desplaza con la velocidad de 12 m/s corta el vapor y comienza a frenar a la distancia de 500 m de una estación situada en un montículo de 2 m de altura.

¿Cuál debe ser la resistencia de frenado, que se considera constante, para que el tren se pare en la estación, si el peso de éste es de 1000 tf, y la resistencia de rozamiento es igual a 2 tf?

Respuesta: 8679 kgf.

31.9. Una fundición pesada de peso P está fijada en una barra que puede girar sin rozamiento alrededor de un eje fijo O; esta barra está desviada de la vertical un ángulo φ_0.

A partir de esta posición inicial, a la fundición se le comunica una velocidad inicial $\boldsymbol{v}_0$ (véase el dibujo).



Para el problema 31.9.

Calcular el esfuerzo en la barra en función del ángulo de desviación de la barra de la vertical, despreciando la masa de la barra. La longitud de la barra es l.

Respuesta: $N = 3P\cos\varphi - 2P\cos\varphi_0 + \frac{P}{g}\frac{v_0^2}{l}$.

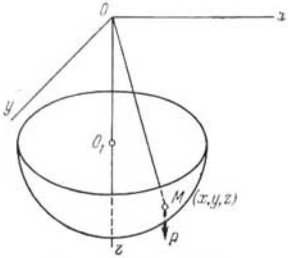
Si $N > 0$, la barra está extendida; si $N < 0$, la barra está comprimida.

31.10. Un péndulo esférico consta de un hilo OM de longitud l, atado por uno de sus extremos al punto fijo O, y de un punto pesado M de peso P, atado al otro extremo del hilo. El punto M

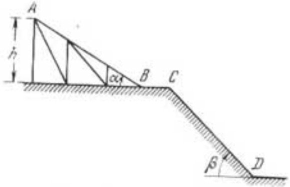
se desvió de su posición de equilibrio de tal modo que sus coordenadas se hicieron: para $t=0$, $x=x_0$, $y=0$, y se le comunicó una velocidad inicial: $\dot{x}_0=0$, $\dot{y}_0=v_0$, $\dot{z}_0=0$.

Determinar para qué relación entre los datos iniciales el punto M describirá una circunferencia en el plano horizontal y en qué tiempo el punto M recorrerá esta circunferencia.

Respuesta: $v_0=x_0\sqrt{\frac{g}{z_0}}$; $\quad T=2\pi\sqrt{\frac{z_0}{g}}$.



Para el problema 31.10.



Para el problema 31.11.

31.11. Un esquiador al saltar de un trampolín desciende por la estacada AB, inclinada bajo el ángulo $\alpha=30°$ respecto del horizonte. Antes de separarse del trampolín él recorre una pequeña plazoleta horizontal BC, cuya longitud se desprecia durante los cálculos. En el instante cuando el esquiador deja el trampolín él se comunica a sí mismo, mediante un empuje, la componente vertical de la velocidad $v_y=1$ m/s. La altura de la estacada es $h=9$ m, el coeficiente de rozamiento de los esquíes sobre la nieve es $f=0{,}08$, la línea de aterrizaje CD forma con el horizonte un ángulo $\beta=45°$.

Determinar la distancia l de vuelo del esquiador, despreciando la resistencia del aire.

Nota. Por distancia de vuelo se considera la longitud desde el punto C hasta el punto de aterrizaje del esquiador sobre la línea CD.

Respuesta: $l=47{,}4$ m.

31.12. Una carga M de peso P cae sin velocidad inicial desde una altura H sobre una placa A, situada sobre un resorte espiral B. Como resultado de la acción del choque de la carga M el resorte se comprime en una magnitud h.

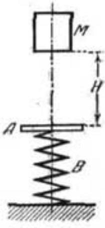
Calcular el tiempo T de compresión del resorte en la magnitud h y el impulso S de la fuerza elástica del resorte en el transcurso del tiempo T, sin tener en cuenta el peso de la placa A y las resistencias.

Respuesta: $T=\frac{1}{k}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$,

$$S=P\left(T+\sqrt{\frac{2H}{g}}\right), \text{ donde}$$

$$\operatorname{tg}\alpha=-\frac{h}{2\sqrt{H(H+h)}},$$

$$k=\frac{\sqrt{2g(H+h)}}{h}.$$



Para el problema 31.12.

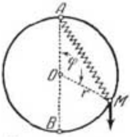
31.13. Durante la ruptura del volante, una de sus partes, la más alejada del lugar de la catástrofe, resultó a una distancia $s=280$ m de su posición inicial.

Calcular el valor mínimo posible de la velocidad angular del volante en el instante de la catástrofe, si el radio del volante es $R=1{,}75$ m. Despreciar la resistencia del aire durante el desplazamiento de la parte indicada de su posición inicial a la posición final, situada en el mismo plano horizontal.

Respuesta: $n=286$ r. p. m.

31.14. Una carga M, suspendida por medio de un resorte en el punto superior A de un anillo circular situado en el plano vertical, cae deslizándose sin rozamiento sobre el anillo.

Calcular la rigidez del resorte para la cual la presión de la carga sobre el anillo en el punto inferior B es igual a cero para los datos siguientes: el radio del anillo es igual a 20 cm, el peso de la carga equivale a 5 kgf, en la posición inicial de la carga la distancia $AM=20$cm y el resorte tiene su longitud natural; la velocidad inicial de la carga es igual a cero. El peso de la carga se desprecia.



Para el problema 31.14.

Respuesta: El resorte debe alargarse en 1 cm bajo la acción de una fuerza de 0,5 kgf.

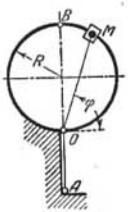
31.15. Determinar la presión de la carga M sobre el anillo en el punto inferior B (véase el dibujo para el problema anterior) para los datos siguientes: el radio del anillo es de 20 cm, el peso de la carga es igual a 7 kgf; en la posición inicial de la carga la distancia $AM=20$ cm, el resorte está extendido y su longitud es dos veces mayor que la longitud natural que equivale a 10 cm; la rigidez del resorte es tal que éste se alarga en 1 cm bajo la acción de una fuerza de 0,5 kgf; la velocidad inicial de la carga es igual a cero. El peso del resorte se desprecia.

Respuesta: La presión es igual a 7 kgf y está dirigida hacia arriba.

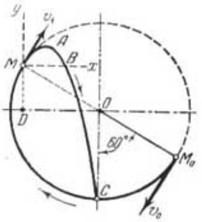
31.16. Un anillo pesado liso M de peso Q puede deslizarse sin rozamiento por el arco de una circunferencia de radio R cm situada en el plano vertical. El anillo está ligado con un hilo elástico MOA que pasa por un anillo liso fijo O y que está fijado en el punto A. Se acepta que la tensión del hilo es igual a cero cuando el anillo M está en el punto O, y que para alargar el hilo en 1 cm hace falta aplicar una fuerza c. En el instante inicial el anillo se halla en el punto B en equilibrio inestable y bajo el efecto de un impulso sumamente pequeño comienza a deslizarse por la circunferencia.

Determinar la presión N que ejerce el anillo sobre la circunferencia.

Respuesta: $N = 2Q + cR + 3(Q + cR)\cos 2\varphi$; la presión está dirigida hacia el exterior para $N > 0$, y hacia el interior para $N < 0$.



Para el problema 31.16.



Para el problema 31.17.

31.17. Una carga está suspendida de un hilo de 50 cm de longitud en un punto fijo O. En la posición inicial M_0 la carga está desviada de la vertical un ángulo de 60° y se le ha comunicado una velocidad $v_0 = 350$ cm/s en el plano vertical a lo largo de la perpendicular al hilo, hacia abajo.

1) Hallar la posición M de la carga, en la cual la tensión del hilo es igual a cero y la velocidad v_1 en esta posición.

2) Calcular la trayectoria del movimiento ulterior de la carga hasta el instante cuando el hilo estará de nuevo extendido y el tiempo, durante el cual el punto recorrerá esta trayectoria.

Respuesta: 1) La posición M está situada por encima de la horizontal del punto O a la distancia $MD = 25$ cm; $v_1 = 157$ cm/s.

2) La parábola $MABC$, cuya ecuación relacionada con los ejes Mx y My, es $y = x\sqrt{3} - 0{,}08x^2$; la carga describe esta parábola en 0,55 s.

31.18. Un péndulo matemático está instalado en un avión que se eleva a la altura de 10 km.

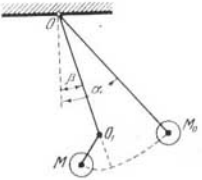
¿En qué parte de longitud hace falta reducir la longitud del hilo del péndulo para que el período de oscilaciones pequeñas del péndulo permanezca invariable a esta altura? Considerar que la fuerza de gravedad es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia al centro de la Tierra.

Respuesta: En 0,00313 l, donde l es la longitud del hilo en la superficie de la Tierra.

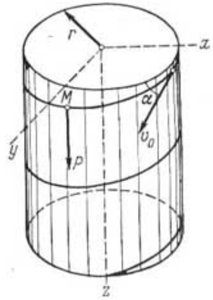
1.19. Una carga M de masa m está suspendida por medio de un hilo OM de longitud l en el punto fijo O. En el instante inicial el hilo OM forma con la vertical un ángulo α y la velocidad de la carga M es igual a cero. Durante el movimiento posterior el hilo encuentra un alambre fino O_1, cuya dirección es perpendicular al plano del movimiento de la carga y su posición se determina por las coordenadas polares: $h = OO_1$ y β.

Determinar el valor mínimo del ángulo α, para el cual el hilo OM, después de encontrar el alambre, empezará a enrollarse sobre éste, así como la variación de la tensión del hilo en el instante de su encuentro con el alambre. El grosor del alambre se desprecia.

Respuesta: $\alpha = \arccos\left[\frac{h}{l}\left(\frac{3}{2}+\cos\beta\right)-\frac{3}{2}\right]$; la tensión del hilo crece en la magnitud de $2mg\frac{h}{l}\left(\frac{3}{2}+\cos\beta\right)$.



Para el problema 31.19.



Para el problema 31.20.

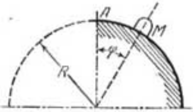
31.20. Un punto pesado M de peso P se desplaza por la circunferencia interior de un cilindro circular de radio r.

Suponiendo que la superficie del cilindro es absolutamente lisa y el eje de éste es vertical, calcular la presión que ejerce el punto sobre el cilindro. La velocidad inicial del punto es igual a v_0 y forma con el horizonte un ángulo α.

Respuesta: $N = \frac{Pv_0^2 \cos^2 \alpha}{gr}$.

31.21. En el problema anterior, componer las ecuaciones del movimiento del punto, si en el instante inicial el punto se encontraba sobre el eje x.

Respuesta:
$$x = r \cos \left[\frac{v_0 \cos \alpha}{r} t \right];$$
$$y = r \operatorname{sen} \left[\frac{v_0 \cos \alpha}{r} t \right];$$
$$z = v_0 t \operatorname{sen} \alpha + \frac{gt^2}{2}.$$



Para el problema 31.22.

31.22. A una piedra M, situada en el vértice A de una cúpula lisa semiesférica de radio R, se le comunica una velocidad inicial horizontal v_0.

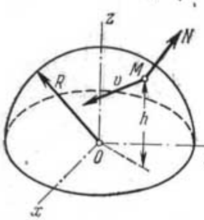
¿En qué punto la piedra dejará la cúpula? ¿Para cuáles valores de v_0 la piedra se separará de la cúpula en el instante inicial? La resistencia al movimiento de la piedra sobre la cúpula se desprecia.

Respuesta: $\varphi = \arccos\left(\frac{2}{3} + \frac{v_0^2}{3gR}\right)$; $\quad v_0 \geqslant \sqrt{gR}$.

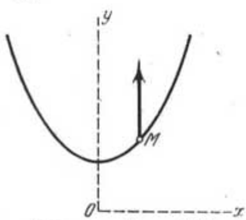
31.23. Un punto M de masa m se desplaza sobre una superficie lisa semiesférica de una cúpula de radio R.

Suponiendo que el punto está sometido a la acción de la fuerza de gravedad, paralela al eje z, y sabiendo que en el instante inicial el punto tenía la velocidad v_0 y se encontraba a la altura h_0, a partir de la base de la cúpula, calcular la presión del punto sobre la cúpula cuando éste se halle a la altura h de la base de la cúpula.

Respuesta: $N = \frac{mg}{R}\left(3h - 2h_0 - \frac{v_0^2}{g}\right)$.



Para el problema 31.23.



Para el problema 31.24.

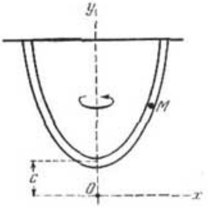
31.24. El punto M de masa m se desplaza por una línea de cadena $y=\frac{a}{2}(e^{x/a}+e^{-x/a})=a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ bajo la acción de la fuerza de repulsión igual a kmy, paralela al eje Oy y que parte del eje Ox. En el instante $t=0$ $x=1$ m, $\dot{x}=1$ m/s.

Determinar la presión N del punto sobre la curva y el movimiento del punto para $k=1\ s^{-2}$ y $a=1$ m (la fuerza de gravedad se desprecia). El radio de curvatura de la línea de cadena es igual a y^2/a.

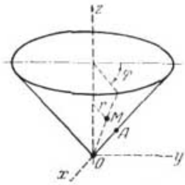
Respuesta: $N=0$; $x=(1+t)$ m.

31.25. Determinar la forma de la curva plana por la que se debe doblar un tubo para que una bola situada en cualquier lugar de éste permanezca en equilibrio respecto del tubo, si este último gira con una velocidad angular constante ω alrededor del eje Oy.

Respuesta: Por la parábola $y=\frac{1}{2}\frac{\omega^2}{g}x^2+c$.



Para el problema 31.25.



Para el problema 31.26.

31.26. El punto M de masa $m=1$ g se desplaza sobre la superficie lisa de un cono circular, cuyo ángulo de abertura es $2\alpha=90°$, bajo la acción de la fuerza de repulsión del vértice O, proporcional a la distancia: $F=c\cdot OM$ dyn, donde $c=1$ dyn/cm. En el instante inicial el punto M se halla en el punto A, la distancia OA es igual a $a=2$ cm, la velocidad inicial es $v_0=2$ cm/s y está dirigida paralelamente a la base del cono.

Determinar el movimiento del punto M (la fuerza de gravedad se desprecia).

La posición del punto M se determina por la coordenada z y las coordenadas polares r y φ en el plano perpendicular al eje Oz; la ecuación de la superficie del cono es $r^2-z^2=0$.

Respuesta: $r^2=e^{2t}+e^{-2t}$;

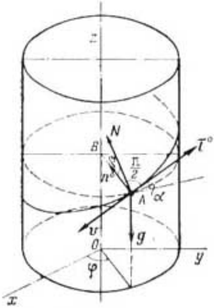
$$\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{\sqrt{2}}+\frac{\pi}{4}\right)=e^{2t}.$$

31.27. Para los datos del problema anterior, suponiendo que el eje del cono está dirigido verticalmente hacia arriba y teniendo en cuenta la fuerza de gravedad, determinar la presión del punto sobre la superficie del cono.

Respuesta: $N = m \operatorname{sen} \alpha \left[g + \frac{a^2 v_0^2 \operatorname{sen} 2\alpha}{2r^3} \right]$.

31.28. Bajo la acción de la fuerza de gravedad un punto material A se desplaza sobre una superficie helicoidal rugosa, cuyo eje Oz es vertical; la superficie está dada por la ecuación $z = a\varphi + f(r)$; el coeficiente de rozamiento del punto sobre la superficie es igual a k.

Hallar la condición, para la cual el movimiento del punto se realiza a una distancia constante del eje $AB = r_0$, es decir, tiene lugar por una línea helicoidal, así como hallar también la velocidad de este movimiento suponiendo que $a = \text{const}$.



Para el problema 31.28.

Indicación. Para resolver el problema es racional valerse del sistema de ejes reales, proyectando la ecuación del movimiento sobre la tangente, la normal principal y la binormal de la línea helicoidal en el punto A. En el dibujo, el ángulo entre la componente normal N de la reacción de la superficie helicoidal y el versor de la normal principal n^0 está designado por β.

Respuesta: El movimiento por una línea helicoidal es posible si

$$\operatorname{tg} \alpha - k \sqrt{1 + f'^2(r_0) \cos^2 \alpha} = 0,$$

donde $\operatorname{tg} \alpha = a/r_0$; la velocidad de movimiento es

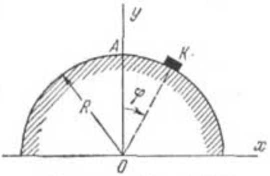
$$v = \sqrt{g r_0 f'(r_0)}.$$

31.29. Un cuerpo K cuyas dimensiones pueden ser despreciadas, está colocado en el punto superior A de la superficie rugosa de un semicilindro fijo de radio R.

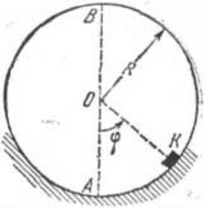
¿Qué velocidad inicial horizontal v_0, dirigida por la tangente al cilindro, debe ser comunicada al cuerpo K para que éste, después de comenzar el movimiento, se pare sobre la superficie del cilindro, si los coeficientes de rozamiento de deslizamiento en movimiento y en estado de reposo son idénticos e iguales a f?

Respuesta: $v_0 \leqslant \sqrt{\frac{2gR}{1+4f^2} \left[\sqrt{1+f^2} e^{-2f\varphi_0} - (1 - 2f^2) \right]}$,

donde $\varphi_0 = \operatorname{arctg} f$.



Para el problema 31.29.



Para el problema 31.30.

31.30. Un cuerpo K, cuyas dimensiones pueden ser despreciadas, se halla en el punto inferior A de la superficie interior rugosa de un cilindro fijo de radio R.

¿Qué velocidad inicial horizontal v_0, dirigida por la tangente al cilindro, debe ser comunicada al cuerpo K para que éste llegue al punto superior B del cilindro? El coeficiente de rozamiento de deslizamiento es igual a f.

Respuesta: $v_0 \geqslant \sqrt{\frac{gR}{1+4f^2}\left[2(1-2f^2)+3e^{2\pi f}\right]}$.

§ 32. MOVIMIENTO OSCILATORIO

a) Oscilaciones libres

32.1. El resorte AB, fijado por uno de sus extremos en el punto A, es tal que para alargarlo en 1 cm hace falta aplicar al punto B, en el caso de carga estática, una fuerza de 20 gf.

En un instante determinado, en el extremo B del resorte no deformado, se cuelga una carga C de 100 gf de peso y se deja caer sin velocidad inicial.

Despreciando la masa del resorte, escribir la ecuación del movimiento ulterior de la carga e indicar la amplitud y el período de sus oscilaciones, relacionando el movimiento de la carga con el eje trazado verticalmente hacia abajo de la posición de equilibrio estático de la carga.

Respuesta: $x = -5\cos 14t$ cm;
$a = 5$ cm; $T = 0{,}45$ s.

Para el problema 32.1.

Para el problema 32.2.

32.2. El extremo superior de un cable, con ayuda del cual se desciende uniformemente una carga de peso $Q=2$ tf con la velocidad $v=5$ m/s, se para bruscamente a causa del agarrotamiento del cable en el collar de la polea.

Despreciando el peso del cable, determinar su tensión máxima durante el movimiento oscilatorio ulterior de la carga, si el coeficiente de rigidez del cable es $c=4$tf/cm.

Respuesta: $F=47{,}1$ tf.

32.3. En el problema anterior, calcular la tensión máxima del cable, si entre la carga y el cable se ha intercalado un resorte elástico con un coeficiente de rigidez $c_1=0{,}4$ tf/cm.

Respuesta: $F=15{,}6$ tf.

32.4. Una carga Q al caer desde la altura h de 1 m sin velocidad inicial, hace impacto contra el punto medio de una viga horizontal elástica; los extremos de la viga están fijados.

Escribir la ecuación del movimiento ulterior de la carga sobre la viga, relacionando el movimiento con el eje trazado verticalmente hacia abajo de la posición de equilibrio estático de la carga sobre la viga, si la flexión estática de la viga en su punto medio, para la carga indicada, es igual a 0,5 cm. La masa de la viga se desprecia.

Respuesta: $x=(-0{,}5\cos 44{,}3t+10\,\mathrm{sen}\,44{,}3t)$ cm.

32.5. Cada ballesta de un vagón soporta una carga de P kgf; bajo la acción de esta carga, la flexión de la ballesta, en estado de equilibrio, es de 5 cm.

Determinar el período T de oscilaciones propias del vagón sobre ballestas. La resistencia elástica de la ballesta es proporcional a su flecha de flexión.

Respuesta: $T=0{,}45$ s.

32.6. Calcular el período de oscilaciones libres del cimiento de una máquina, puesto sobre un suelo elástico, si el peso del cimiento junto con la máquina es $Q=90$ tf, el área de la base del cimiento es $S=15$ m^2, el coeficiente de rigidez del suelo es igual a $c=\lambda S$, donde $\lambda=3$ kgf/cm^3, la así llamada rigidez especifica del suelo.

Respuesta: $T=0{,}09$ s.

32.7. Hallar el período de oscilaciones libres verticales de un barco estando el agua en calma, si el peso del barco es P tf, el área de su sección horizontal es S m^2 y no depende de la altura de la sección; el peso de 1 m^3 de agua es igual a 1 tf. Las fuerzas condicionadas por la viscosidad del agua se desprecian.

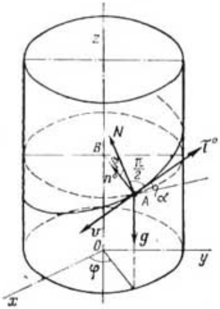
Respuesta: $T=2\pi\sqrt{\frac{P}{Sg}}$.

31.27. Para los datos del problema anterior, suponiendo que el eje del cono está dirigido verticalmente hacia arriba y teniendo en cuenta la fuerza de gravedad, determinar la presión del punto sobre la superficie del cono.

Respuesta: $N = m \operatorname{sen} \alpha \left[g + \frac{a^2 v_0^2 \operatorname{sen} 2\alpha}{2r^3} \right].$

31.28. Bajo la acción de la fuerza de gravedad un punto material A se desplaza sobre una superficie helicoidal rugosa, cuyo eje Oz es vertical; la superficie está dada por la ecuación $z = a\varphi + f(r)$; el coeficiente de rozamiento del punto sobre la superficie es igual a k.

Hallar la condición, para la cual el movimiento del punto se realiza a una distancia constante del eje $AB = r_0$, es decir, tiene lugar por una línea helicoidal, así como hallar también la velocidad de este movimiento suponiendo que $a = \text{const}$.



Para el problema 31.28.

Indicación. Para resolver el problema es racional valerse del sistema de ejes reales, proyectando la ecuación del movimiento sobre la tangente, la normal principal y la binormal de la línea helicoidal en el punto A. En el dibujo, el ángulo entre la componente normal N de la reacción de la superficie helicoidal y el versor de la normal principal n^0 está designado por β.

Respuesta: El movimiento por una línea helicoidal es posible si

$$\operatorname{tg} \alpha - k\sqrt{1 + f'^2(r_0)\cos^2\alpha} = 0,$$

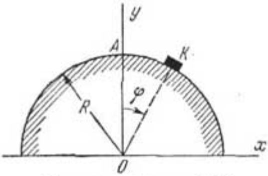
donde $\operatorname{tg} \alpha = a/r_0$; la velocidad de movimiento es

$$v = \sqrt{g r_0 f'(r_0)}.$$

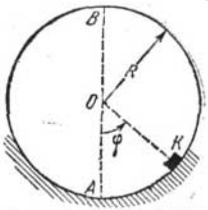
31.29. Un cuerpo K cuyas dimensiones pueden ser despreciadas, está colocado en el punto superior A de la superficie rugosa de un semicilindro fijo de radio R.

¿Qué velocidad inicial horizontal v_0, dirigida por la tangente al cilindro, debe ser comunicada al cuerpo K para que éste, después de comenzar el movimiento, se pare sobre la superficie del cilindro, si los coeficientes de rozamiento de deslizamiento en movimiento y en estado de reposo son idénticos e iguales a f?

Respuesta: $v_0 \leqslant \sqrt{\frac{2gR}{1+4f^2}\left[\sqrt{1+f^2}\,e^{-2f\varphi_0} - (1-2f^2)\right]},$
donde $\varphi_0 = \operatorname{arctg} f$.



Para el problema 31.29.



Para el problema 31.30.

31.30. Un cuerpo K, cuyas dimensiones pueden ser despreciadas, se halla en el punto inferior A de la superficie interior rugosa de un cilindro fijo de radio R.

¿Qué velocidad inicial horizontal v_0, dirigida por la tangente al cilindro, debe ser comunicada al cuerpo K para que éste llegue al punto superior B del cilindro? El coeficiente de rozamiento de deslizamiento es igual a f.

Respuesta: $v_0 \geqslant \sqrt{\frac{gR}{1+4f^2}\left[2(1-2f^2)+3e^{2\pi f}\right]}$.

§ 32. MOVIMIENTO OSCILATORIO

a) Oscilaciones libres

32.1. El resorte AB, fijado por uno de sus extremos en el punto A, es tal que para alargarlo en 1 cm hace falta aplicar al punto B, en el caso de carga estática, una fuerza de 20 gf.

En un instante determinado, en el extremo B del resorte no deformado, se cuelga una carga C de 100 gf de peso y se deja caer sin velocidad inicial.

Despreciando la masa del resorte, escribir la ecuación del movimiento ulterior de la carga e indicar la amplitud y el período de sus oscilaciones, relacionando el movimiento de la carga con el eje trazado verticalmente hacia abajo de la posición de equilibrio estático de la carga.

Respuesta: $x = -5\cos 14t$ cm;
$a = 5$ cm; $T = 0{,}45$ s.

Para el problema 32.1.

Para el problema 32.2.

32.2. El extremo superior de un cable, con ayuda del cual se desciende uniformemente una carga de peso $Q=2$ tf con la velocidad $v=5$ m/s, se para bruscamente a causa del agarrotamiento del cable en el collar de la polea.

Despreciando el peso del cable, determinar su tensión máxima durante el movimiento oscilatorio ulterior de la carga, si el coeficiente de rigidez del cable es $c=4$tf/cm.

Respuesta: $F=47{,}1$ tf.

32.3. En el problema anterior, calcular la tensión máxima del cable, si entre la carga y el cable se ha intercalado un resorte elástico con un coeficiente de rigidez $c_1=0{,}4$ tf/cm.

Respuesta: $F=15{,}6$ tf.

32.4. Una carga Q al caer desde la altura h de 1 m sin velocidad inicial, hace impacto contra el punto medio de una viga horizontal elástica; los extremos de la viga están fijados.

Escribir la ecuación del movimiento ulterior de la carga sobre la viga, relacionando el movimiento con el eje trazado verticalmente hacia abajo de la posición de equilibrio estático de la carga sobre la viga, si la flexión estática de la viga en su punto medio, para la carga indicada, es igual a 0,5 cm. La masa de la viga se desprecia.

Respuesta: $x=(-0{,}5\cos 44{,}3t+10\,\mathrm{sen}\,44{,}3t)$ cm.

32.5. Cada ballesta de un vagón soporta una carga de P kgf; bajo la acción de esta carga, la flexión de la ballesta, en estado de equilibrio, es de 5 cm.

Determinar el periodo T de oscilaciones propias del vagón sobre ballestas. La resistencia elástica de la ballesta es proporcional a su flecha de flexión.

Respuesta: $T=0{,}45$ s.

32.6. Calcular el periodo de oscilaciones libres del cimiento de una máquina, puesto sobre un suelo elástico, si el peso del cimiento junto con la máquina es $Q=90$ tf, el área de la base del cimiento es $S=15$ m^2, el coeficiente de rigidez del suelo es igual a $c=\lambda S$, donde $\lambda=3$ kgf/cm^3, la asi llamada rigidez específica del suelo.

Respuesta: $T=0{,}09$ s.

32.7. Hallar el periodo de oscilaciones libres verticales de un barco estando el agua en calma, si el peso del barco es P tf, el área de su sección horizontal es S m^2 y no depende de la altura de la sección; el peso de 1 m^3 de agua es igual a 1 tf. Las fuerzas condicionadas por la viscosidad del agua se desprecian.

Respuesta: $T=2\pi\sqrt{\dfrac{P}{Sg}}$.

32.8. Para los datos del problema anterior, hallar la ecuación de movimiento de un barco, si éste fue botado con una velocidad vertical igual a cero.

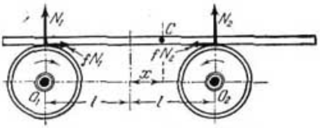
Respuesta: $y=-\frac{P}{S}\cos\sqrt{\frac{Sg}{R}}\,t$ m.

32.9. Una carga de peso P N está suspendida por un hilo elástico en un punto fijo. Una vez desviada de la posición de equilibrio la carga comienza a efectuar oscilaciones.

Expresar la longitud del hilo x en función del tiempo y hallar la condición que debe satisfacer su longitud inicial x_0 para que durante el movimiento de la carga el hilo permanezca extendido. La tensión del hilo es proporcional a su alargamiento, su longitud en estado no extendido es l; bajo la acción de una carga estática igual a q N el hilo se alarga en 1 cm. La velocidad inicial de la carga es igual a cero.

Respuesta: $x=l+\frac{P}{q}+\left(x_0-l-\frac{P}{q}\right)\cos\left(\sqrt{\frac{qg}{P}}\,t\right)$;

$l\leqslant x_0\leqslant l+\frac{2P}{q}$.



Para el problema 32.10.

32.10. Una barra homogénea descansa libremente sobre dos poleas cilíndricas del mismo radio que giran en sentidos opuestos, indicados en el dibujo. Los centros de las poleas O_1 y O_2 se encuentran sobre una recta horizontal O_1O_2; la distancia $O_1O_2=2l$. La barra se pone en movimiento por medio de las fuerzas de rozamiento que surgen en los puntos de contacto de la barra con las poleas; estas fuerzas son proporcionales a la presión de la barra sobre la polea, siendo el coeficiente de proporcionalidad (el coeficiente de rozamiento) igual a f.

1) Determinar el movimiento de la barra después de desplazarla de su posición de simetría a x_0 cuando $v_0=0$.

2) Calcular el coeficiente de rozamiento f, sabiendo que el período de oscilaciones T de la barra, para $l=25$ cm, es 2 s.

Respuesta: 1) $x=x_0\cos\left(\sqrt{\frac{fg}{l}}\,t\right)$; 2) $f=\frac{4\pi^2 l}{gT^2}=0{,}25$.

32.11. En un mismo resorte se cuelgan primeramente una carga de peso p, y por segunda vez una carga de peso $3p$.

Determinar en cuántas veces variará el período de oscilaciones. Hallar la ecuación de movimiento de las cargas, conociendo la rigidez c del resorte y las condiciones iniciales (las cargas se suspendían en el extremo del resorte inextensible y se dejaban caer sin velocidad inicial).

Respuesta: $\frac{T_2}{T_1}=\sqrt{3}$; $x_1=-\frac{p}{c}\cos\sqrt{\frac{cg}{p}}\,t$;

$$x_2=-\frac{3p}{c}\cos\sqrt{\frac{cg}{3p}}\,t.$$

32.12. En un resorte de rigidez $c=2$ kgf/cm se han colgado primeramente una carga $P_1=6$ kgf y luego una carga $P_2=12$ kgf (en vez de la primera carga).

Determinar los períodos y las frecuencias de oscilaciones de las cargas.

Respuesta: $k_1=18{,}1\ \text{s}^{-1}$, $k_2=12{,}8\ \text{s}^{-1}$;
$T_1=0{,}348$ s, $T_2=0{,}49$ s.

Para el problema 32.13.

32.13. Dos cargas $P_1=0{,}5$ kgf y $P_2=0{,}8$ kgf penden de un resorte de rigidez $c=20$ gf/cm. El sistema estaba en reposo en la posición de equilibrio estático, después de quitar la carga P_2.

Hallar la ecuación de movimiento, la frecuencia, la frecuencia circular y el período de oscilaciones de la carga restante.

Respuesta: $x=40\cos 6{,}26\,t$ cm; $T=1$ s; $f=1$ Hz, $k=2\pi\ \text{s}^{-1}$.

32.14. Una carga $P_1=2$ kgf, colgada de un resorte de rigidez $c=0{,}1$ kgf/cm, está en equilibrio.

¿Cuál será la ecuación de movimiento y el período de oscilaciones de la carga, si a la carga P_1 se añade una carga $P_2=0{,}8$ kgf? (Véase el dibujo para el problema 32.13).

Respuesta: $x=-8\cos 5{,}91t$; $T=1{,}06$ s.

32.15. Una carga de 4 kgf de peso se cuelga en un resorte de rigidez $c_1=2$ kgf/cm y luego en un resorte de rigidez $c_2=4$ kgf/cm.

Hallar la relación de las frecuencias y de los períodos de oscilaciones de la carga.

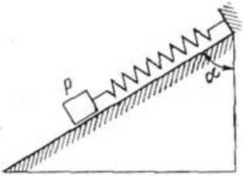
Respuesta: $\frac{k_1}{k_2}=0{,}706$; $\frac{T_1}{T_2}=1{,}41$.

32.16. Un cuerpo de peso P se halla sobre un plano inclinado que forma un ángulo α con la vertical. Al cuerpo va sujetado un resorte de rigidez c. El resorte es paralelo al plano inclinado.

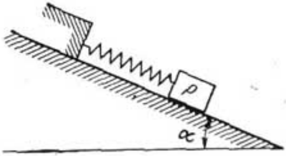
Hallar la ecuación de movimiento del cuerpo, si en el instante inicial éste estaba sujetado al extremo del resorte no extendido y le comunicaron una velocidad inicial v_0 dirigida hacia abajo por el plano inclinado.

El origen de coordenadas debe tomarse en la posición de equilibrio estático.

Respuesta: $x=\frac{v_0}{k}\operatorname{sen} kt-\frac{P\cos\alpha}{c}\cos kt$, donde $k=\sqrt{\frac{cg}{P}}$.



Para el problema 32.16.



Para el problema 32.17.

32.17. Un cuerpo de peso P sujetado a un resorte está situado sobre un plano liso inclinado bajo un ángulo $\alpha=30^\circ$ respecto del horizonte. El alargamiento estático del resorte es igual a f.

Determinar las oscilaciones del cuerpo si en el instante inicial el resorte estaba extendido del estado no tensado a una longitud igual a $3f$, y luego el cuerpo se soltó sin velocidad inicial.

Respuesta: $x=2f\cos\left(\sqrt{\frac{g}{f}}\operatorname{sen}\alpha\cdot t\right)$.

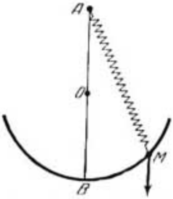
32.18. Un cuerpo de peso $Q=12$ kgf, sujetado al extremo de un resorte, efectúa oscilaciones harmónicas. Con ayuda de un cronómetro se ha establecido que el cuerpo efectuó 100 ciclos completos en 45 s. Luego, al extremo del resorte se sujetó una carga suplementaria $Q_1=6$ kgf.

Calcular el período de oscilaciones de las dos cargas sujetadas al resorte.

Respuesta: $T_1=T\sqrt{\frac{Q+Q_1}{Q}}=0{,}55$ s.

32.19. Para los datos del problema anterior, hallar la ecuación de movimiento de una carga Q y de dos cargas $(Q+Q_1)$, si en ambos casos las cargas fueron colgadas en el extremo del resorte no extendido.

Respuesta: 1) $x=-5{,}02\cos 14t$ cm, 2) $x_1=-7{,}53\cos 11{,}4t$ cm, donde x y x_1 se calculan respectivamente a partir de cada una de las dos posiciones de equilibrio estático.



Para el problema 32.20.

32.20. Una carga M, colgada con auxilio de un resorte en el punto fijo A, efectúa oscilaciones harmónicas pequeñas en el plano vertical, deslizándose sin rozamiento sobre el arco de una circunferencia de diámetro $AB = l$; la longitud natural del resorte es a; la rigidez del resorte es tal que, bajo la acción de una fuerza igual al peso de la carga M, el resorte se alarga en una longitud igual a b.

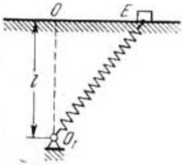
Determinar el periodo T de oscilaciones en el caso cuando $l = a + b$; la masa del resorte se desprecia, y se supone que durante las oscilaciones este último permanece extendido.

Respuesta: $T = 2\pi \sqrt{\dfrac{l}{g}}$.

32.21. Para los datos del problema anterior, hallar la ecuación de movimiento de la carga M, si en el instante inicial el ángulo $BAM = \varphi_0$ y al punto M se le ha comunicado una velocidad inicial v_0, dirigida por la tangente a la circunferencia hacia abajo.

Respuesta: $\varphi = \varphi_0 \cos \sqrt{\dfrac{g}{l}}\, t - \dfrac{v_0}{\sqrt{lg}} \operatorname{sen} \sqrt{\dfrac{g}{l}}\, t$.

32.22. Un cuerpo E de masa m se encuentra sobre un plano horizontal liso. Al cuerpo va sujetado un resorte de rigidez c, el otro extremo del cual está articulado en O_1. La longitud del resorte no deformado es igual a l_0; en la posición de equilibrio del cuerpo el resorte tiene una tensión previa final igual a $F_0 = c(l - l_0)$, donde $l = OO_1$.



Para el problema 32.22.

Teniendo en cuenta en la componente horizontal de la fuerza elástica del resorte solamente los términos lineales respecto de la desviación del cuerpo de la posición de equilibrio, determinar el período de oscilaciones pequeñas del cuerpo

Respuesta: $T = 2\pi \sqrt{\dfrac{ml}{F_0}}$.

32.23. Un punto material de peso P pende del extremo de un resorte no deformado con coeficiente de rigidez c y se ha soltado con una velocidad inicial v_0 dirigida hacia abajo.

Hallar la ecuación de movimiento y el período de oscilaciones del punto, si en el instante cuando el punto se encontraba en la posición inferior extrema a él se le aplicó una fuerza $Q = \text{const}$ dirigida hacia abajo.

El origen de coordenadas se debe tomar en la posición de equilibrio estático, es decir, a la distancia P/c del extremo del resorte no deformado.

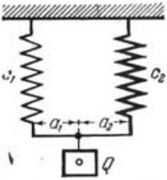
Respuesta: $x=\frac{Q}{c}+\left[\sqrt{\left(\frac{v_0}{k}\right)^2+\left(\frac{P}{c}\right)^2}-\frac{Q}{c}\right]\cos\sqrt{\frac{cg}{P}}\,t$, donde t se calcula a partir del instante cuando empieza a actuar la fuerza Q; $T=2\pi\sqrt{P/cg}$.

32.24. Determinar el período de oscilaciones libres de una carga de peso Q, fijada a dos resortes montados paralelamente, y el coeficiente de rigidez del resorte equivalente al resorte doble examinado, si la carga está dispuesta de tal modo que los alargamientos de ambos resortes, que tienen los coeficientes de rigidez dados c_1 y c_2, son iguales

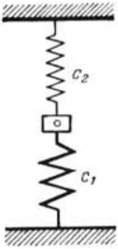
Respuesta: $T=2\pi\sqrt{\frac{Q}{g(c_1+c_2)}}$; $c=c_1+c_2$; la disposición de la carga es tal que $a_1/a_2=c_2/c_1$.

32.25. Para los datos del problema anterior, hallar la ecuación de movimiento de la carga, si ésta se ha colgado en los resortes no deformados y se le ha comunicado una velocidad inicial v_0 dirigida hacia arriba.

Respuesta: $$x=-\frac{Q}{c_1+c_2}\cos\sqrt{\frac{(c_1+c_2)g}{Q}}\,t-$$
$$-v_0\sqrt{\frac{Q}{(c_1+c_2)g}}\,\text{sen}\sqrt{\frac{(c_1+c_2)g}{Q}}\,t.$$



Para el problema 32.24.



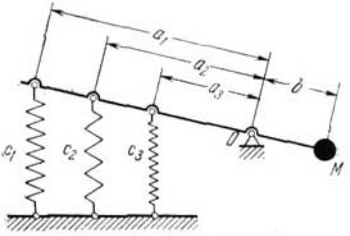
Para el problema 32.26.

32.26. Determinar el período de oscilaciones libres de una carga de peso Q apretada entre dos resortes de diferentes coeficientes de rigidez c_1 y c_2.

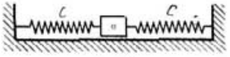
Respuesta: $T=2\pi\sqrt{\frac{Q}{g(c_1+c_2)}}$.

de equilibrio la barra es horizontal. El resorte equivalente se fija en la barra a una distancia b de la articulación.

Respuesta: $c=\dfrac{c_1a_1^2+c_2a_2^2+c_3a_3^2}{b^2}$.



Para el problema 32.34.



Para el problema 32.35.

32.35. Una carga de 10 kgf de peso, situada sobre un plano horizontal absolutamente liso, está apretada entre dos resortes de igual rigidez $c=2$ kgf/cm. En un instante determinado la carga se desplazó a 4 cm a la derecha de la posición de equilibrio y luego se soltó sin velocidad inicial,

Hallar la ecuación de movimiento, el período de oscilaciones, así como la velocidad máxima de la carga.

Respuesta: 1) $x=4\cos 19{,}8\,t$ cm; 2) $T=0{,}317$ s;

3) $\dot{x}_{\text{máx}}=79{,}2$ cm/s.

32.36. Un resorte helicoidal se compone de n trozos, cuyos coeficientes de rigidez son respectivamente iguales a $c_1, c_2, \ldots, c_n$.

Determinar el coeficiente de rigidez c del resorte homogéneo equivalente al resorte dado.

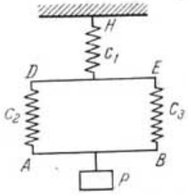
Respuesta: $c=\dfrac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{c_i}}$.

32.37. Una carga P está colgada en la barra imponderable AB ligada con la barra imponderable DE mediante dos resortes cuyos coeficientes de rigidez son c_2 y c_3. La barra DE está fijada en el punto H del techo por un resorte de rigidez c_1. Durante las oscilaciones del sistema las barras permanecen en posición horizontal.

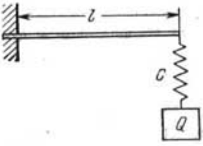
Calcular el coeficiente de rigidez de un resorte equivalente, para la cual la carga P oscile con la misma frecuencia. Hallar el período de oscilaciones libres de la carga.

Respuesta: $c=\frac{c_1(c_2+c_3)}{c_1+c_2+c_3}$;

$$T=2\pi\sqrt{\frac{P(c_1+c_2+c_3)}{gc_1(c_2+c_3)}}.$$



Para el problema 32.37.



Para el problema 32.38.

32.38. Determinar la frecuencia propia de oscilaciones de la carga Q colgada del extremo de una consola elástica imponderable de longitud l. La rigidez del resorte que soporta la carga es c kgf/cm. La rigidez en el extremo de la consola se define por la fórmula $c_1=\frac{3EJ}{l^3}$ (E es el módulo de elasticidad, J es el momento de inercia).

Respuesta: $k=\sqrt{\frac{g\cdot 3EJc}{Q(3EJ+cl^3)}}$.

32.39. La amplitud de oscilaciones de una carga $P=10$ kgf, situada en la parte media de una viga elástica de rigidez $c=$ $=2$ kgf/cm, es de 2 cm.

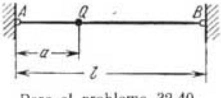
Calcular la magnitud de la velocidad inicial de la carga, si en el instante $t=0$ la carga estaba en la posición de equilibrio.

Respuesta: $v_0=28$ cm/s.

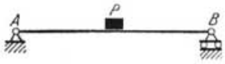
32.40. Una carga de peso Q se mantiene en la posición horizontal mediante un cable tendido $AB=l$. Para oscilaciones pequeñas de la carga la tensión S del cable puede considerarse constante.

Determinar la frecuencia de oscilaciones libres de la carga, si la distancia entre ésta y el extremo del cable A es igual a a.

Respuesta: $k=\sqrt{\frac{Sgl}{Qa(l-a)}}\,\mathrm{s}^{-1}$.



Para el problema 32.40.



Para el problema 32.41.

32.41. Una carga de peso $P=50$ kgf descansa sobre la parte media de una viga AB. El momento de inercia de la sección transversal de la viga es $J=80$ cm^4.

Determinar la longitud de la viga l de la condición de que el período de oscilaciones libres de la carga sobre la viga sea igual a $T=1$ s.

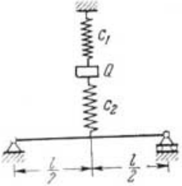
Nota. La flexión estática de una viga se define por la fórmula $f=\frac{Pl^3}{48EJ}$, donde $E=2{,}1\cdot 10^6$ kgf/cm^2 es el módulo de elasticidad.

Respuesta: $l=15{,}9$ m.

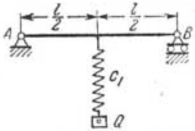
32.42. Una carga de peso Q está apretada entre dos resortes verticales cuyos coeficientes de rigidez son c_1 y c_2. El extremo superior del primer resorte está fijo, el extremo inferior del segundo resorte está fijado en la parte media de una viga.

Determinar la longitud de la viga l de tal modo que el período de oscilaciones de la carga sea igual a T. El momento de inercia de la sección transversal de la viga es J, el módulo de elasticidad es E.

$$\textit{Respuesta:}\ l=\sqrt[3]{\frac{48EJ\left(c_1+c_2-\frac{4\pi^2}{T^2}\frac{Q}{g}\right)}{c_2\left(\frac{4\pi^2}{T^2}\frac{Q}{g}-c_1\right)}}.$$



Para el problema 32.42.



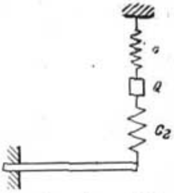
Para el problema 32.43.

32.43. Hallar la ecuación de movimiento y el período de oscilaciones de la carga Q, suspendida de un resorte de coeficiente de rigidez c_1, si el resorte está fijado en la parte media de una viga de longitud l. La rigidez de la viga a la flexión es EJ. En el instante inicial la carga se hallaba en la posición de equilibrio estático y se le comunicó una velocidad v_0 dirigida hacia abajo.

$$\textit{Respuesta:}\ x=v_0\sqrt{\frac{Q\,(c_1l^3+48EJ)}{48EJc_1g}}\operatorname{sen}\sqrt{\frac{48EJc_1g}{(c_1l^3+48EJ)\,Q}}\,t;$$

$$T=2\pi\sqrt{\frac{(c_1l^3+48EJ)\,Q}{c_1\cdot 48EJg}}.$$

32.44. Una carga de peso Q está apretada entre dos resortes verticales, cuyos coeficientes de rigidez son iguales a c_1 y c_2. El extremo superior del primer resorte está fijo. El extremo inferior del segundo resorte está sujetado al extremo libre de una viga, el otro extremo de la cual va encastrado en un muro.



Para el problema 32.44.

Calcular la longitud de la viga l, para la cual la carga oscilará con un período dado T, sabiendo que la flexión del extremo libre de la viga encastrada, debida a la acción de una fuerza P aplicada a este extremo es $f=\frac{Pl^3}{3EJ}$, donde EJ es la rigidez dada de la viga a la flexión. Hallar la ecuación de movimiento de la carga, si en el instante inicial ésta estaba suspendida de los extremos de los resortes no deformados y luego se soltó sin velocidad inicial.

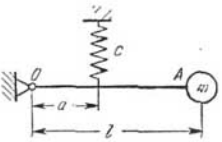
Respuesta: 1) $l=\sqrt[3]{\dfrac{3EJ\left(c_1+c_2-\frac{4\pi^2}{T^2}\cdot\frac{Q}{g}\right)}{c_2\left(\frac{4\pi^2}{T^2}\cdot\frac{Q}{g}-c_1\right)}}$;

$$2)\ x=-Q\,\frac{c_2l^3+3EJ}{c_1c_2l^3+(c_1+c_2)\,3EJ}\times$$
$$\times\cos\sqrt{\frac{[c_1c_2l^3+(c_1+c_2)3EJ]\,g}{(c_2l^3+3EJ)\,Q}}\,t.$$

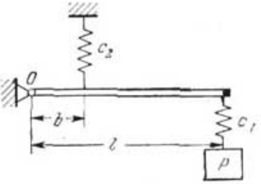
32.45. Una barra imponderable OA de longitud l, en cuyo extremo se ha colocado una carga de masa m, puede girar alrededor del eje O. A la distancia a del eje O, en la barra está fijado un resorte de coeficiente de rigidez c.

Determinar la frecuencia propia de oscilaciones de la carga, si en la posición de equilibrio la barra OA ocupa una posición horizontal.

Respuesta: $k=\frac{a}{l}\sqrt{\frac{c}{m}}\ s^{-1}$.



Para el problema 32.45.



Para el problema 32.46.

32.46. Una carga P está suspendida, mediante un resorte, del extremo de una barra imponderable de longitud l, que puede girar alrededor del eje O. El coeficiente de rigidez del resorte es c_1. El resorte que soporta la barra está fijado a la distancia b del punto O, su coeficiente de rigidez es c_2.

Determinar la frecuencia propia de la carga P.

Respuesta: $k=\sqrt{\dfrac{g\cdot c_1c_2}{P\left[c_2+\left(\dfrac{l}{b}\right)^2c_1\right]}}\ \mathrm{s}^{-1}$.

32.47. Para determinar la aceleración de la fuerza de gravedad en un lugar dado del globo terrestre, se efectúan dos experimentos. En el extremo de un resorte se cuelga una carga P_1 y se mide el alargamiento estático l_1 del resorte. Luego se cuelga otra carga P_2 en el extremo del mismo resorte y se mide otra vez el alargamiento estático l_2. Después se repiten los dos experimentos haciendo que ambas cargas, por turno, efectúen oscilaciones libres y se miden sus períodos T_1 y T_2. El segundo experimento se hace para tener en cuenta la influencia de la masa del propio resorte considerando que durante el movimiento de la carga esta influencia es equivalente a la adición de una masa suplementaria a la masa oscilante.

Hallar la fórmula para calcular la aceleración de la fuerza de gravedad con ayuda de estos datos experimentales.

Respuesta: $g=\dfrac{4\pi^2(l_1-l_2)}{T_1^2-T_2^2}$.

32.48. Un punto M de 2 kgf de peso se desplaza sin rozamiento sobre una cuerda horizontal de un círculo situado verticalmente bajo la acción de la fuerza de atracción $\boldsymbol{F}$ proporcional a la distancia al centro O, el coeficiente de proporcionalidad es 0,1 kgf/cm. La distancia del centro del círculo a la cuerda es igual a 20 cm; el radio de la circunferencia es de 40 cm.

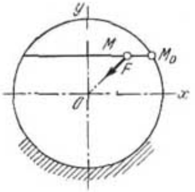
Determinar la ley de movimiento del punto, si en el instante inicial el punto ocupaba la posición extrema derecha M_0 y luego si liberó sin velocidad inicial. ¿Con qué velocidad el punto pasa por el punto medio de la cuerda?

Respuesta: $x=34{,}6\cos 7t$ cm; $\dot{x}=\pm 242$ cm/s.

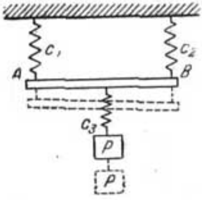
32.49. Tres resortes están fijados en una barra imponderable AB. Dos de éstos, de rigidez c_1 y c_2, soportan la barra y están situados en sus extremos. El tercer resorte, de rigidez c_3, está fijado en el punto medio de la barra y porta una carga P.

Determinar la frecuencia propia de oscilaciones de la carga.

Respuesta: $k=\sqrt{\dfrac{g\cdot 4c_1\cdot c_2\cdot c_3}{P(4c_1\cdot c_2+c_1\cdot c_3+c_2\cdot c_3)}}\ \mathrm{s}^{-1}$.



Para el problema 32.48.



Para el problema 32.49.

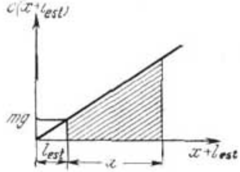
32.50 Una carga de 10 kgf de peso, sujetada a un resorte de *coeficiente de rigidez $c = 2$ kgf/cm, efectúa oscilaciones.*

Determinar la energía mecánica total de la carga y del resorte despreciando el peso del último, construir el gráfico de la fuerza elástica en función del desplazamiento y mostrar en el gráfico la *energía potencial del resorte. Por origen de referencia de la energía* potencial se debe tomar la posición de equilibrio estático.

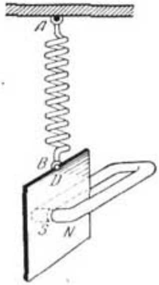
Respuesta: $W = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} cx^2$.

El área rayada en el gráfico es igual a la energía potencial del resorte.

b) *Influencia de la resistencia en las oscilaciones libres*



Para resolver el problema 32.50.



Para los problemas 32.51 y 32.52.

32.51. Una placa D de 100 gf de peso, suspendida por medio de un resorte AB del punto fijo A, se desplaza entre los polos de un imán. A consecuencia de las corrientes en torbellino el movimiento se frena por una fuerza proporcional a la velocidad. La fuerza de resistencia al movimiento es igual a $kv\Phi^2$ dyn, donde $k = 0{,}0001$, v es la velocidad en cm/s y Φ es el flujo magnético entre los polos N y S. En el instante inicial la velocidad de la placa es igual a cero y el resorte no está extendido; su alargamiento es de 1 cm bajo la acción estática de una fuerza de 20 gf aplicada en el punto B.

Determinar el movimiento de la placa para el caso cuando $\Phi = 1000\sqrt{5}$ unidades CGS.

Respuesta: $x = -e^{-2,5t}(5\cos 13,78t + 0,907 \operatorname{sen} 13,78t)$ cm,

donde x es la distancia del centro de gravedad de la placa a su posición de equilibrio a lo largo de la vertical hacia abajo.

32.52. Determinar el movimiento de la placa D para los datos del problema anterior en el caso cuando el flujo magnético $\Phi = 10\,000$ unidades CGS.

Respuesta: $x = -\frac{5}{48} e^{-98t}(49e^{96t} - 1)$.

32.53. Un cilindro de peso P, de radio r y de altura h, está suspendido de un resorte AB, cuyo extremo superior B está fijado; el cilindro está sumergido en el agua. En la posición de equilibrio el cilindro se sumerge en el agua hasta la mitad de su altura.

En el instante inicial el cilindro fue sumergido en el agua hasta $\frac{2}{3}$ de su altura y luego inició su movimiento sin velocidad inicial a lo largo de una recta vertical.

Determinar el movimiento del cilindro respecto de su posición de equilibrio, suponiendo que la rigidez del resorte es igual a c y que la acción del agua se reduce a una fuerza de Arquímedes adicional. Considerar que el peso especifico del agua es igual a γ.

Respuesta: $x = \frac{1}{6} h \cos kt$, donde $k^2 = \frac{g}{P}(c + \pi\gamma r^2)$.

32.54. En el problema anterior, determinar el movimiento oscilatorio del cilindro, si la resistencia del agua es proporcional a la velocidad lineal e igual a αv.

Respuesta: El movimiento del cilindro es oscilatorio, si

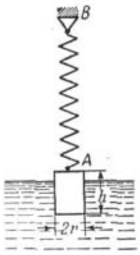
$$\left(\frac{c}{m} + \frac{\pi r^2}{m}\gamma\right) - \left(\frac{\alpha}{2m}\right)^2 > 0.$$

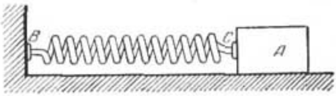
Entonces

$$x = \frac{h}{6}\sqrt{\frac{k^2}{k^2 - n^2}}\, e^{-nt} \operatorname{sen}\left(\sqrt{k^2 - n^2}\, t + \beta\right),$$

donde

$$k^2 = \frac{c}{m} + \frac{\pi r^2}{m}\gamma, \quad n = \frac{\alpha}{2m}, \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{\sqrt{k^2 - n^2}}{n}, \quad m = \frac{P}{g}.$$





Para el problema 32.53.

Para el problema 32.55.

32.55. Un cuerpo A de 0,5 kgf de peso está situado sobre un plano horizontal rugoso y está ligado con el punto fijo B por medio de un resorte, cuyo eje BC es horizontal. El coeficiente de rozamiento del plano es 0,2; el resorte es tal que para alargarlo en 1 cm se requiere una fuerza de 0,25 kgf. El cuerpo A está desplazado del punto B de tal modo que el resorte se ha alargado en 3 cm, luego se liberó sin velocidad inicial.

Hallar: 1) el número de oscilaciones que efectuará el cuerpo A, 2) las amplitudes de estas oscilaciones, 3) el período T de cada oscilación.

El cuerpo se parará cuando en la posición, donde su velocidad es igual a cero, la fuerza elástica del resorte será igual a la fuerza de rozamiento o menor que ésta.

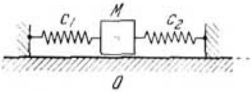
Respuesta: 1) 4 oscilaciones; 2) 5,2 cm, 3,6 cm, 2 cm, 0,4 cm; 3) $T=0,141$ s.

32.56. Una carga de peso $Q=20$ kgf, situada sobre un plano inclinado rugoso, se ha sujetado a un resorte no extendido y se le ha comunicado una velocidad inicial $v_0=0,5$ m/s, dirigida hacia abajo. El coeficiente de rozamiento de deslizamiento es $f=0,08$, el coeficiente de rigidez del resorte es $c=2$ kgf/cm. El ángulo formado por el plano inclinado con el horizonte es $\alpha=45°$.

Determinar: 1) el período de oscilaciones, 2) el número de oscilaciones que efectuará la carga, 3) las amplitudes de estas oscilaciones.

Respuesta: 1) $T=0,628$ s; 2) 8 oscilaciones;
3) 7,68 cm, 6,56 cm, 5,44 cm, 4,32 cm, 3,2 cm, 2,08 cm, 0,96 cm, 0,16 cm.

32.57. Un cuerpo de peso $P = 0{,}5$ kgf efectúa oscilaciones sobre un plano horizontal bajo la acción de dos resortes idénticos fijados en el cuerpo por un extremo y en un soporte fijo, por el otro; los ejes de los resortes se encuentran sobre una misma recta



Para el problema 32.57.

horizontal. Los coeficientes de rigidez de los resortes son $c_1 = c_2 = 0{,}125$ kgf/cm; el coeficiente de rozamiento durante el movimiento del cuerpo es $f = 0{,}2$, en estado de reposo es $f_0 = 0{,}25$. En el instante inicial el cuerpo fue desplazado a la derecha de su posición media O a la distancia $x_0 = 3$ cm y liberado sin velocidad inicial.

Hallar: 1) la zona de las posiciones de equilibrio posibles del cuerpo, "la zona de estancación", 2) las amplitudes de oscilaciones del cuerpo, 3) el número de estas oscilaciones, 4) el período de cada oscilación, 5) la posición del cuerpo después de las oscilaciones.

Respuesta: 1) $-0{,}5$ cm $< x < 0{,}5$ cm; 2) 5,2 cm, 3,6 cm. 2 cm, 0,4 cm; 3) 4 oscilaciones; 4) $T = 0{,}141$ s; 5) $x = -0{,}2$ cm.

32.58. Un cuerpo de masa m, suspendido de un resorte de rigidez c, efectúa oscilaciones amortiguadas bajo la acción de la fuerza de resistencia R linealmente proporcional a la velocidad ($R = \alpha v$).

Determinar en cuántas veces el período de oscilaciones amortiguadas T es mayor que el de las inamortiguadas T_0, si la relación $n/k = 0{,}1$ ($k^2 = c/m$, $n = \alpha/2m$).

Respuesta: $T \approx 1{,}005 T_0$.

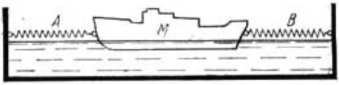
32.59. Para los datos del problema anterior, determinar el número de ciclos necesarios para que la amplitud disminuya 100 veces.

Respuesta: 7,5 ciclos.

32.60. Para determinar la resistencia del agua al movimiento del modelo M de un barco con velocidades muy pequeñas, el modelo se botó en un recipiente con agua, sujetando su proa y su popa a este recipiente con ayuda de dos resortes idénticos A y B, cuyas fuerzas de tensión son proporcionales a los alargamientos. Los resultados de las observaciones han mostrado que las desviaciones del modelo de su posición de equilibrio después de cada oscilación decrecen formando una progresión geométrica, cuyo denominador es igual a 0,9, y el período de cada oscilación es $T=0,5$ s.

Determinar, en gramos, la fuerza R de resistencia del agua por cada gramo de peso del modelo, a una velocidad de éste igual a 1 cm/s, suponiendo que la resistencia del agua es linealmente proporcional a la velocidad.

Respuesta: $R=0,00043$ gf.



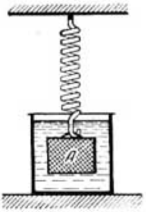
Para los problemas 32.60 y 32.61.

32.61. Para los datos del problema anterior, hallar la ecuación de movimiento del modelo, si en el instante inicial el resorte A estaba extendido, el resorte B estaba comprimido en la magnitud $\Delta l=4$ cm y el modelo se dejó libre sin velocidad inicial.

Respuesta: $x=e^{-0,21t}(4\cos 6,28t+0,134 \operatorname{sen} 6,28t)$.

32.62. Para determinar la viscosidad de un líquido Coulomb utilizó el procedimiento siguiente: colgando de un resorte una placa fina A, la hacía oscilar primeramente en el aire, luego en el líquido, cuya viscosidad hacía falta determinar, y medía el período de una oscilación: T_1, en el primer caso, y T_2, en el segundo. La fuerza de rozamiento entre la placa y el líquido puede ser expresada por la fórmula $2S\,kv$, donde $2S$ es la superficie de la placa, v es su velocidad, k es el coeficiente de viscosidad.

Despreciando el rozamiento entre la placa y el aire, determinar el coeficiente k valiéndose de las magnitudes T_1 y T_2 halladas, si el peso de la placa es igual a P.



Para el problema 32.62.

Respuesta: $k=\frac{\pi P}{gST_1T_2}\sqrt{T_2^2-T_1^2}$.

32.63. Un cuerpo de 5 kgf de peso está suspendido de un resorte, cuyo coeficiente de rigidez es igual a 2 kgf/cm. La resistencia del medio es proporcional a la velocidad. Después de cuatro oscilaciones la amplitud ha disminuido 12 veces.

Determinar el período de oscilaciones y el decremento logarítmico de amortiguación.

Respuesta: $T=0,319$ s; $\frac{nT}{2}=0,311$.

32.64. Para los datos del problema anterior, hallar la ecuación de movimiento del cuerpo, si se ha suspendido del extremo de un resorte no extendido y se ha soltado sin velocidad inicial.

Respuesta: $x = e^{-1,94\,t}(-2,5\cos 19,2\,t - 0,252\,\mathrm{sen}\,19,2\,t)$.

32.65. Un cuerpo de 5,88 kgf de peso, suspendido de un resorte, oscila en ausencia de resistencia con un período $T = 0,4\,\pi$ s, pero si existe resistencia linealmente proporcional a la velocidad, este cuerpo oscila con un período $T_1 = 0,5\pi$ s.

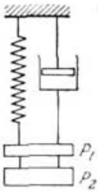
Hallar la fuerza de resistencia k para la velocidad de 1 cm/s, y determinar el movimiento, si en el instante inicial el resorte fue extendido a 4 cm a partir de la posición de equilibrio y el cuerpo se ha dejado libre.

Respuesta: $k = 0,036$; $\quad x = 5\,e^{-3t}\,\mathrm{sen}\left(4t + \mathrm{arctg}\,\frac{4}{3}\right)$.

32.66. Un cuerpo de 1,96 kgf de peso, suspendido de un resorte que se alarga en 20 cm bajo la acción de una fuerza de 1 kgf, durante su movimiento encuentra una resistencia linealmente proporcional a la velocidad y, para la velocidad de 1 cm/s, igual a 0,02 kgf. En el instante inicial el resorte está alargado a 5 cm respecto de su posición de equilibrio y el cuerpo empieza a moverse sin velocidad inicial.

Determinar el movimiento del cuerpo.

Respuesta: $x = 5e^{-5t}(5t + 1)$ cm.



Para el problema 32.67.

32.67. Dos cargas $P_1 = 2$ kgf y $P_2 = 3$ kgf están suspendidas en la posición de equilibrio estático de un resorte con coeficiente de rigidez igual a $c = 0,4$ kgf/cm. Un amortiguador de aceite crea una fuerza de resistencia proporcional a la velocidad lineal e igual a $\boldsymbol{R} = -\alpha\boldsymbol{v}$, donde $\alpha = 0,1$ kgf s/cm. Luego la carga P_2 se quita.

Hallar la ecuación de movimiento de la carga P_1.

Respuesta: $x = 8,34\,e^{-4,5t} - 0,84\,e^{-44,5t}$.

32.68. El alargamiento estático de un resorte bajo la acción de una carga P es igual a f. Sobre la carga oscilante actúa la fuerza de resistencia del medio proporcional a la velocidad.

Determinar el valor mínimo del coeficiente de resistencia α para el cual el proceso de movimiento será aperiódico. Hallar el período de oscilaciones amortiguadas, si el coeficiente de resistencia es menor que el valor hallado.

Respuesta: $\alpha = \frac{2P}{\sqrt{gf}}$. Para $\alpha < \frac{2P}{\sqrt{gf}}$ el movimiento será oscilatorio de período $T = \sqrt{\frac{g}{f} - \frac{\alpha^2}{4m^2}}$.

32.69. Una carga de 100 gf de peso, suspendida del extremo de un resorte, se desplaza en un líquido. El coeficiente de rigidez del resorte es $c=20$ gf/cm. La fuerza de resistencia al movimiento es proporcional a la velocidad de la carga: $R=\alpha v$, donde $\alpha=3{,}5$ gf s/cm.

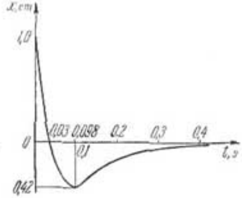
Hallar la ecuación de movimiento de la carga y construir el gráfico del desplazamiento en función del tiempo, si en el instante inicial la carga fue desviada a 1 cm de su posición de equilibrio estático y abandonada sin velocidad inicial.

Respuesta: $x=e^{-17{,}15t}(1{,}36\,e^{9{,}95t}-0{,}36\,e^{-9{,}95t})$ cm.

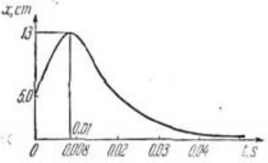
32.70. Una carga de 100 gf de peso, suspendida del extremo de un resorte, se desplaza en un líquido. El coeficiente de rigidez del resorte es $c=20$ gf/cm. La fuerza de resistencia al movimiento es proporcional a la velocidad de la carga: $R=\alpha v$, donde $\alpha=3{,}5$ gf s/cm.

Hallar la ecuación de movimiento de la carga y construir el gráfico del desplazamiento en función del tiempo, si en el instante inicial la carga fue desviada a la distancia $x_0=1$ cm de su posición de equilibrio estático y se le comunicó una velocidad inicial de 50 cm/s, en el sentido contrario al de la desviación.

Respuesta: $x=e^{-17{,}15t}(-1{,}15\,e^{9{,}95t}+2{,}15\,e^{-9{,}95t})$ cm.



Para resolver el problema 32.70.



Para resolver el problema 32.71.

32.71. Una carga de 100 gf de peso, suspendida del extremo de un resorte, se desplaza en un liquido. El coeficiente de rigidez del resorte es $c=20$ gf/cm. La fuerza de resistencia al movimiento es proporcional a la velocidad de la carga: $R=\alpha v$, donde $\alpha=3{,}5$ gf s/cm.

Hallar la ecuación de movimiento de la carga y construir el gráfico del desplazamiento en función del tiempo, si en el instante inicial la carga fue desviada a la distáncia $x_0=5$ cm de su posición de equilibrio estático, y se le comunicó una velocidad inicial de 10 cm/s en el mismo sentido.

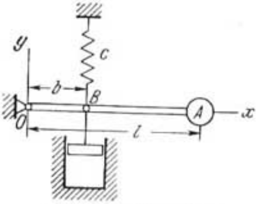
Respuesta: $x=e^{-17{,}15t}(7{,}30\,e^{9{,}95t}-2{,}30\,e^{-9{,}95t})$ cm.

32.72. Escribir la ecuación diferencial de oscilaciones pequeñas de un punto pesado A situado en el extremo de una barra imponderable articulada en el punto O, considerando que la fuerza de resistencia del medio es proporcional a la velocidad con el coeficiente de proporcionalidad α. Determinar la frecuencia de oscilaciones amortiguadas. El peso del punto A es igual a P, el coeficiente de rigidez del resorte es c, la longitud de la barra es l, la distancia $OB=b$. La masa de la barra se desprecia. En la posición de equilibrio la barra es horizontal. Calcular el valor del coeficiente α para el cual el movimiento será aperiódico.

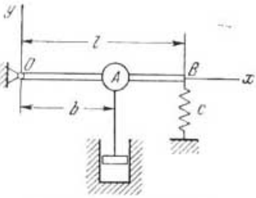
Respuesta: 1) $\frac{P}{g}\ddot{y}+\alpha\frac{b^2}{l^2}\dot{y}+c\frac{b^2}{l^2}y=0$;

2) $k=\frac{b}{l}\sqrt{\frac{cg}{P}-\left(\frac{\alpha bg}{2Pl}\right)^2}\ \mathrm{s}^{-1}$;

3) $\alpha\geqslant\frac{2l}{b}\sqrt{\frac{cP}{g}}$.



Para el problema 32.72.



Para el problema 32.74.

32.73. Durante las oscilaciones de una carga de 20 kgf de peso suspendida de un resorte, se observó que después de 10 ciclos la desviación máxima disminuyó dos veces. La carga efectuó 10 ciclos en 9 s.

Calcular los valores del coeficiente de resistencia α (para una resistencia del medio linealmente proporcional a la velocidad) y del coeficiente de rigidez c.

Respuesta: $\alpha=0{,}00314$ kgf cm^{-1} s, $c=0{,}99$ kgf cm^{-1}.

32.74. Escribir la ecuación diferencial de oscilaciones pequeñas del punto A y calcular el período de oscilaciones amortiguadas. El peso del punto A es igual a P, el coeficiente de rigidez del resorte es c, la distancia $OA=b$, $OB=l$. La fuerza de resistencia del medio es linealmente proporcional a la velocidad, el coeficiente de proporcionalidad es igual a α. La masa de la barra OB, articulada en el punto O, se desprecia. En la posición de equilibrio la barra es horizontal. Hallar el valor del coeficiente α para el cual el movimiento será aperiódico.

Respuesta: 1) $\frac{P}{g}\ddot{y}+\alpha\dot{y}+\frac{cl^2}{b^2}y=0$;

2) $k_1=\sqrt{\frac{cl^2g}{Pb^2}-\frac{\alpha^2g^2}{4P^2}}\ \text{s}^{-1}$;

3) $\alpha\geqslant\frac{2l}{b}\sqrt{\frac{cP}{g}}$.

c) Oscilaciones forzadas

32.75. Escribir la ecuación del movimiento rectilíneo de un punto de masa m sometido a la acción de la fuerza de recuperación $Q=-cx$ y de la fuerza constante F_0. En el instante inicial $t=0$, $x_0=0$ y $\dot{x}_0=0$.

Hallar el período de oscilaciones.

Respuesta: $x=\frac{F_0}{c}(1-\cos kt)$, donde $k=\sqrt{\frac{c}{m}}$;

$$T=2\pi/k.$$

32.76. Escribir la ecuación del movimiento rectilíneo de un punto de masa m sometido a la acción de la fuerza de recuperación $Q=-cx$ y de la fuerza $F=\alpha t$. En el instante inicial el punto estaba en la posición de equilibrio estático y su velocidad era igual a cero.

Respuesta: $x=\frac{a}{mk^3}(kt-\operatorname{sen} kt)$, donde $k=\sqrt{\frac{c}{m}}$.

32.77. Hallar la ecuación del movimiento rectilíneo de un *punto de peso P sometido a la acción de la fuerza de* recuperación $Q=-cx$ y de la fuerza $F=F_0e^{-\alpha t}$, si en el instante inicial el punto estaba en la posición de equilibrio en estado de reposo.

Respuesta: $x=\frac{F_0}{m(k^2+\alpha^2)}\left(e^{-\alpha t}-\cos kt+\frac{\alpha}{k}\operatorname{sen} kt\right)$,

donde $k=\sqrt{\frac{cg}{P}}$.

Para el problema 32.78.

32.78. Una barra magnética de 100 gf de peso está suspendida de un resorte de coeficiente de rigidez $c=20$ gf/cm. El extremo inferior del imán pasa a través de una bobina por la cual circula corriente alterna de intensidad $i=20\operatorname{sen} 8\pi t$ amperios. La corriente circula desde el instante $t=0$, atrayendo la barra al solenoide; hasta entonces la barra magnética permanecía inmóvil suspendida del resorte. La fuerza de interacción entre el imán y el solenoide se determina por la igualdad $F=16\pi i$ dyn.

Determinar las oscilaciones forzadas del imán.

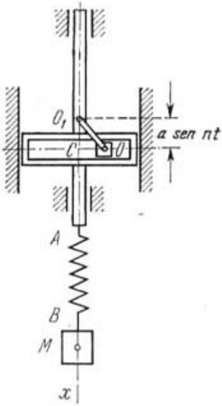
Respuesta: $x = -0{,}023 \operatorname{sen} 8\pi t$ cm.

32.79. Para los datos del problema anterior, escribir la ecuación de movimiento de la barra magnética, si ésta se ha suspendido en el extremo de un resorte no extendido y se ha abandonado sin velocidad inicial.

Respuesta: $x = (-5 \cos 14t + 0{,}041 \operatorname{sen} 14t - 0{,}023 \operatorname{sen} 8\pi t)$ cm.

32.80. Para los datos del problema 32.78, hallar la ecuación de movimiento de la barra magnética, si en su posición de equilibrio estático se le ha comunicado una velocidad inicial $v_0 = 5$ cm/s.

Respuesta: $x = (0{,}4 \operatorname{sen} 14t - 0{,}023 \operatorname{sen} 8\pi t)$ cm.



Para el problema 32.81.

32.81. Una pesa M está suspendida de un resorte AB, cuyo extremo superior efectúa oscilaciones harmónicas de amplitud a y de frecuencia n a lo largo de una recta vertical: $O_1C = a \operatorname{sen} nt$ cm.

Determinar las oscilaciones forzadas del punto M para los datos siguientes: el peso de la pesa es igual a 400 gf, bajo la acción de una fuerza de 40 gf el resorte se alarga en 1 cm, $a = 2$ cm, $n = 7\ \text{s}^{-1}$.

Respuesta: $x = 4 \operatorname{sen} 7t$ cm.

32.82. Determinar el movimiento de la pesa M (véase el problema 32.81), suspendida del resorte AB, cuyo extremo superior A efectúa oscilaciones harmónicas de amplitud a y de frecuencia circular k por la vertical; el alargamiento estático del resorte bajo la acción de la pesa M es igual a δ. En el instante inicial el punto A ocupa su posición media y la pesa M está en reposo; la posición inicial de la pesa se toma por origen de coordenadas, el eje Ox se debe dirigir por la vertical hacia abajo.

Respuesta: $x = \frac{ag}{k^2\delta - g}\left[k\sqrt{\frac{\delta}{g}} \operatorname{sen} \sqrt{\frac{g}{\delta}}\, t - \operatorname{sen} kt\right]$ para $k \gtrless \sqrt{\frac{g}{\delta}}$.

$$x = \frac{a}{2}\left[\operatorname{sen} \sqrt{\frac{g}{\delta}}\, t - \sqrt{\frac{g}{\delta}}\, t \cos kt\right] \text{ para}$$

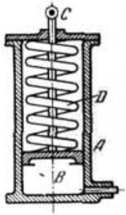
$$k = \sqrt{\frac{g}{\delta}}.$$

32.83. La flexión estática de las ballestas de un vagón de mercancias cargado es $\Delta l_{est}=5$ cm.

Determinar la velocidad crítica del movimiento del vagón a la cual el vagón *comienza a "galopear", si en las juntas de los rieles* el vagón experimenta choques que provocan oscilaciones forzadas de éste sobre las ballestas; la longitud de los rieles es $L=12$ m.

Respuesta: $v=96$ km/h.

32.84. El indicador de una máquina de vapor está compuesto de un cilindro A, dentro del cual se desplaza un pistón B que se apoya contra un *resorte D; el pistón está unido con una barra BC*, en la cual está fijada la espiga registradora C.



Para el problema 32.84.

Suponiendo que la presión p del vapor sobre el pistón B, expresada en kilogramos por centímetro cuadrado, varía de acuerdo con la fórmula $p=4+3\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{T}t$, donde T es el tiempo durante el cual el árbol hace una revolución, determinar la amplitud de oscilaciones forzadas de la espiga C, si el árbol efectúa 3 r.p.s., para los datos siguientes: el área del pistón del indicador es $\sigma=4$ cm^2, el peso de la parte móvil del indicador es $Q=1$ kgf; el resorte se comprime en 1 cm por una fuerza de 3 kgf.

Respuesta: $a=4{,}54$ cm.

32.85. Para los datos del problema anterior, hallar la ecuación de movimiento de la espiga C, si en el instante inicial el sistema estaba en reposo en la posición de equilibrio estático.

Respuesta: $x=(-1{,}57\,\text{sen}\,54{,}3t+4{,}54\,\text{sen}\,6\pi t)$ cm.

32.86. Una carga Q de 200 gf de peso, suspendida de un resorte de coeficiente de rigidez $c=1$ kgf/cm, está sometida a la acción de la fuerza $S=H\,\text{sen}\,pt$, donde $H=2{,}0$ kgf, $p=50$ s^{-1}. En el instante inicial $x_0=2$ cm, $\dot{x}_0=10$ cm/s. El origen de coordenadas se ha elegido en la posición de equilibrio estático.

Hallar la ecuación de movimiento de la carga.

Respuesta: $x=(2\cos 70t-2{,}77\,\text{sen}\,70t+4{,}08\,\text{sen}\,50t)$ cm.

32.87. Una carga Q de 200 gf de peso, suspendida de un resorte de coeficiente de rigidez $c=1$ kgf/cm, está sometida a la acción de la fuerza $S=H\,\text{sen}\,pt$, donde $H=2$ kgf, $p=70$ s^{-1}. En el instante inicial $x_0=2$ cm, $\dot{x}_0=10$ cm/s. El origen de coordenadas se ha elegido en la posición de equilibrio estático.

Hallar la ecuación de movimiento de la carga.

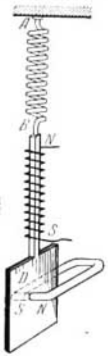
Respuesta: $x=(2\cos 70\,t+1{,}14\,\text{sen}\,70\,t-70\,t\cos 70\,t)$ cm.

d) Influencia de la resistencia en las oscilaciones forzadas

32.88. Una barra magnética de 50 gf de peso, que pasa a través de un solenoide, y una placa de cobre de 50 gf de peso, que pasa entre los polos del imán, están suspendidas de un resorte de coeficiente de rigidez $c = 20$ gf/cm. Por el solenoide circula una corriente de intensidad $i = 20 \operatorname{sen} 8\pi t$ amperios que engendra una fuerza de interacción $F = 16\pi i$ dyn con la barra magnética. La fuerza de frenado de la placa de cobre provocada por las corrientes en torbellino es igual *a* $kv\Phi^2$, donde $k = 10^{-4}$, $\Phi = 1000\sqrt{5}$ unidades CGS y v es la velocidad de la placa.

Determinar las oscilaciones forzadas de la placa.

Respuesta: $x = 0{,}022 \operatorname{sen}(8\pi t - 0{,}91\pi)$ cm.



Para los problemas 32.88. y 32.89.

32.89. Para los datos del problema anterior, hallar la ecuación de movimiento de la placa, si ésta se ha suspendido junto con la barra magnética en el extremo de un resorte no deformado y se les ha comunicado una velocidad inicial $v_0 = 5$ cm/s, dirigida hacia abajo.

Respuesta: $x = e^{-2{,}5t}(-4{,}99\cos 13{,}75t -$
$-0{,}56 \operatorname{sen} 13{,}75t) + 0{,}022 \operatorname{sen}(8\pi t -$
$-0{,}91\pi)$ cm.

32.90. Un punto material de peso $Q = 2$ kgf está suspendido de un resorte de coeficiente de rigidez $c = 4$ kgf/cm. El punto está sometido a la acción de una fuerza perturbadora $S = 12 \operatorname{sen}(pt + \delta)$ kgf y de la fuerza de resistencia al movimiento, proporcional a la velocidad lineal e igual a $R = 0{,}5\sqrt{mc}\,\dot{x}$ kgf, donde $[\dot{x}] = $ cm/s.

Calcular el valor máximo $A_{máx}$ de la amplitud de oscilaciones forzadas. ¿Para qué frecuencia p la amplitud de oscilaciones forzadas alcanza su valor máximo?

Respuesta: $A_{máx} = 6{,}21$ cm; $p = 41{,}5\ s^{-1}$.

32.91. Para los datos del problema anterior, hallar la ecuación de movimiento del punto, si en el instante inicial su posición y su velocidad eran iguales a: $x_0 = 2$ cm; $\dot{x}_0 = 3$ cm/s. La frecuencia de la fuerza perturbadora es $p = 30\ s^{-1}$, la fase inicial de la fuerza perturbadora es $\delta = 0°$. El origen de coordenadas se ha elegido en la posición de equilibrio estático.

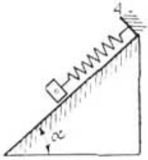
Respuesta: $x = e^{-11{,}08t}(4{,}49\cos 42{,}8\,t - 1{,}563 \operatorname{sen} 42{,}8\,t) +$
$+ 4{,}7 \operatorname{sen}(30\,t - 0{,}178\pi)$ cm.

32.92. Un punto material de peso $p = 3$ gf está suspendido de un resorte de coeficiente de rigidez $c = 12$ gf/cm. El punto está sometido a la acción de una fuerza perturbadora $F = H \operatorname{sen}(62{,}6t + \beta)$ gf y de una fuerza de resistencia proporcional a la velocidad lineal e igual a $R=\alpha v$ gf.

¿En cuántas veces decrecerá la amplitud de oscilaciones forzadas del punto, si la resistencia crece en tres veces?

Respuesta: La amplitud de oscilaciones forzadas decrece en tres veces.

32.93. Un cuerpo de 2 kgf de peso, ligado con un punto fijo A mediante un resorte, se desplaza sobre un plano inclinado liso que forma un ángulo α con el horizonte, bajo la acción de la fuerza perturbadora $S=1,8\,\text{sen}\,10t$ kgf y de una fuerza de resistencia proporcional a la velocidad: $\boldsymbol{R}=-0,03\,\boldsymbol{v}$ kgf, donde $[v]=$cm/s. El coeficiente de rigidez del resorte es $c=5$ kgf/cm. En el instante inicial el cuerpo estaba en reposo en la posición de equilibrio estático.



Para el problema 32.93.

Hallar la ecuación de movimiento del cuerpo, los períodos T de oscilaciones libres y T_1 de oscilaciones forzadas, el desfasaje de las oscilaciones forzadas y de la fuerza perturbadora.

Respuesta: 1) $x=10^{-2}\cdot e^{-7,35t}(2,3\cos 49t-7,3\,\text{sen}\,49t)+$
$+0,374\,\text{sen}\,(10t-0,0194\pi)$ cm.

2) $T=0,128$ s;

3) $T_1=0,628$ s;

4) $\varepsilon=0,0194\pi$ rad.

32.94. Un cuerpo de peso $Q=392$ gf, fijado en un resorte de coeficiente de rigidez $c=4$ kgf/cm, está sometido a la acción de una fuerza $S=H\,\text{sen}\,pt$ kgf, donde $H=4$ kgf, $p=50\ \text{s}^{-1}$ y de una fuerza de resistencia $R=\alpha v$, donde $\alpha=25$ gf s/cm, v es la velocidad del cuerpo. En el instante inicial el cuerpo está en reposo en la posición de equilibrio estático.

Escribir la ecuación de movimiento del cuerpo y determinar *el valor de la frecuencia circular p para la cual la amplitud de oscilaciones forzadas será máxima.*

Respuesta: $x=0,647e^{-31,25t}\,\text{sen}\,(95t+0,74\pi)+1,23\,\text{sen}\times$
$\times(50t-0,126\pi)$.

La amplitud máxima se obtiene cuando la frecuencia circular de excitación es

$$p=\sqrt{k^2-2n^2}=89,8s^{-1}.$$

32.95. Un cuerpo de peso Q gf, fijado en un resorte con coeficiente de rigidez c gf/cm, está sometido a la acción de una fuerza perturbadora $S=H\,\text{sen}\,pt$ gf y de una fuerza de resistencia $R=\alpha v$ gf, donde v es la velocidad del cuerpo. En el instante inicial el cuerpo está en la posición de equilibrio estático sin tener velocidad inicial.

Hallar la ecuación de movimiento del cuerpo, si $c > \alpha^2 g/4Q$.

Respuesta: $$x = \frac{hpe^{-nt}}{(k^2-p^2)^2+4n^2p^2}\left(2n\cos\sqrt{k^2-n^2}\,t + \right.$$
$$\left. + \frac{2n^2+p^2-k^2}{\sqrt{k^2-n^2}} + \operatorname{sen}\sqrt{k^2-n^2}\,t\right) +$$
$$+ \frac{h}{(k^2-p^2)^2+4n^2p^2}\left[(k^2-p^2)\operatorname{sen} pt - 2\,np\cos pt\right],$$

donde $h = \frac{Hg}{Q}$,

$$k^2 = \frac{cg}{Q}, \quad n = \frac{\alpha g}{2Q}.$$

32.96. Un cuerpo de 6 kgf de peso, suspendido de un resorte con coeficiente de rigidez $c = 18$ kgf/cm, está sometido a la acción de la fuerza perturbadora P_0 sen ωt. La resistencia del líquido es proporcional a la velocidad.

¿Cuál debe ser el coeficiente de resistencia α del líquido viscoso para que siendo máxima la amplitud de oscilaciones forzadas, el coeficiente de dinamismo sea igual a tres?

Hallar el valor del coeficiente de desintonización z (la relación de la frecuencia circular de oscilaciones forzadas a la frecuencia circular de oscilaciones libres). Hallar el desfasaje de las oscilaciones forzadas y de la fuerza perturbadora.

Respuesta: $\alpha = 0{,}115$ kgf cm^{-1}s; $z = 0{,}97$; $\varepsilon = 79°48'$.

32.97. Un cuerpo de peso $Q = 100$ gf, fijado en un resorte con coeficiente de rigidez $c = 5$ kgf/cm, está sometido a la acción de una fuerza $S = H \operatorname{sen} pt$, donde $H = 10$ kgf, $p = 100\text{s}^{-1}$ y de una fuerza de resistencia $R = \beta v$, donde $\beta = 50$ gf s/cm.

Escribir la ecuación de las oscilaciones forzadas y determinar el valor de la frecuencia p, para el cual la amplitud de oscilaciones forzadas será máxima.

Respuesta: 1) $x_2 = 0{,}98 \operatorname{sen} 100t - 1{,}22 \cos 100t$;

2) no existe la amplitud máxima, puesto que $n > k/\sqrt{2}$.

32.98. Para los datos del problema anterior, determinar el desfasaje de las oscilaciones forzadas y de la fuerza perturbadora.

Respuesta: $\varepsilon = \operatorname{arctg} 1{,}26 = 51°40'$.

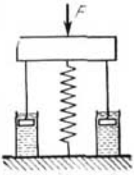
32.99. Una carga de 200 gf de peso está suspendida de un resorte con coeficiente de rigidez igual a $c = 20$ gf/cm. Esta carga está sometida a la acción de una fuerza perturbadora $S = 0{,}2 \operatorname{sen} 14t$ gf y de una fuerza de resistencia $R = 50v$ gf.

Determinar el desfasaje de las oscilaciones forzadas y de la fuerza perturbadora.

Respuesta: $\varepsilon = 91°38'$.

32.100. Para los datos del problema anterior, hallar el coeficiente de rigidez c_1 de un resorte nuevo por el que se debe reemplazar el resorte examinado para que el desfasaje de las oscilaciones forzadas y de la fuerza perturbadora sea igual a $\pi/2$.

Respuesta: $c_1 = 40$ gf/cm.



Para el problema 32.101.

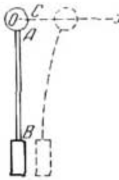
32.101. Para reducir la acción de la fuerza perturbadora $F = F_0 \operatorname{sen}(pt + \delta)$ sobre un cuerpo de masa m, se instala un amortiguador hidráulico. El coeficiente de rigidez del muelle es c.

Suponiendo que la fuerza de resistencia es proporcional a la velocidad ($F_{res} = \alpha v$) hallar la presión dinámica máxima de todo el sistema sobre el cimiento durante las oscilaciones permanentes.

Respuesta: $N_{\text{máx}} = F_0 \sqrt{\dfrac{k^4 + 4n^2p^2}{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2}}$, donde $k^2 = \dfrac{c}{m}$, $n = \dfrac{\alpha}{2m}$.

§ 33. MOVIMIENTO RELATIVO

33.1. Una carga C de 2,5 kgf de peso está fijada en el extremo A de una barra elástica vertical AB. La carga C, después de haber sido desviada de su posición de equilibrio, efectúa oscilaciones harmónicas bajo el efecto de una fuerza proporcional a la distancia desde la posición de equilibrio. Para desviar el extremo A de la barra AB en 1 cm hace falta aplicar una fuerza de 0,1 kgf.



Para el problema 33.1.

Hallar la amplitud de oscilaciones forzadas de la carga C en el caso cuando el punto de fijación B de la barra efectúa oscilaciones harmónicas de 1 mm de amplitud y de 1,1s de período por la recta horizontal.

Respuesta: 5,9 mm.

33.2. El punto de suspensión de un péndulo matemático de longitud l se desplaza con aceleración uniforme por la vertical.

Calcular el período T de oscilaciones pequeñas del péndulo, en dos casos: 1) Cuando la aceleración del punto de suspensión está dirigida hacia arriba y su magnitud p puede ser cualquiera;

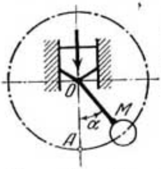
2) Cuando esta aceleración está dirigida hacia abajo y su magnitud $p < g$.

Respuesta: 1) $T = 2\pi \sqrt{\dfrac{l}{p+g}}$; 2) $T = 2\pi \sqrt{\dfrac{l}{g-p}}$.

33.3. Un péndulo matemático OM de longitud l está desviado, en el instante inicial, de su posición de equilibrio OA a un ángulo α, su velocidad inicial es igual a cero; la velocidad de su punto de suspensión en este instante es también igual a cero, pero luego el punto desciende con una aceleración constante $p \geqslant g$.

Calcular la longitud s del arco de la circunferencia descrita por el punto M en su movimiento relativo alrededor del punto O.

Respuesta: 1) Para $p = g$ $s = 0$; 2) para $p > g$ $s = 2l(\pi - \alpha)$.



Para el problema 33.3.

33.4. Un tren se desplaza del sur al norte con la velocidad de 15 m/s sobre rieles colocados por el meridiano. El peso del tren es de 2000 tf.

1) Determinar la presión lateral que ejerce el tren sobre los rieles, si él interseca en el instante considerado la latitud boreal de 60°. 2) Determinar la presión lateral que ejerce el tren sobre los rieles, si él marcha por el mismo lugar del norte al sur.

Respuesta: 1) 384 kgf sobre el riel derecho oriental;
2) 384 kgf sobre el riel derecho occidental.

33.5. Un punto material cae libremente sobre la Tierra en el hemisferio norte desde 500 m de altura.

Teniendo en cuenta la rotación de la Tierra alrededor de su eje y despreciando la resistencia del aire, calcular la desviación del punto hacia el este durante la caída. La latitud geográfica del lugar es igual a 60°.

Respuesta: 12 cm.

33.6. Un péndulo efectúa oscilaciones pequeñas harmónicas en un vagón que se desplaza sobre una vía horizontal rectilínea. La posición media del péndulo está desviada de la vertical a un ángulo de 6°.

1) Determinar la aceleración w del vagón.

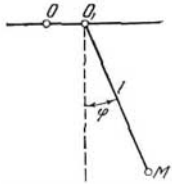
2) Hallar la diferencia de los períodos de oscilaciones del péndulo: T, en el caso cuando el vagón está parado, y T_1, en el caso que se examina.

Respuesta: 1) $w = 103$ cm/s²; 2) $T - T_1 = 0{,}0028T$.

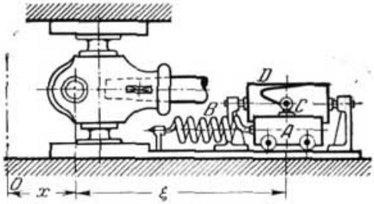
33.7. El punto O_1 de suspensión de un péndulo de longitud l efectúa oscilaciones harmónicas rectilíneas horizontales alrededor del punto fijo O: $OO_1 = a \operatorname{sen} pt$.

Determinar las oscilaciones pequeñas del péndulo considerando que en el instante $t=0$ éste se encontraba en reposo.

Respuesta: $\varphi = \frac{ap^2}{l(k^2-p^2)}\left(\operatorname{sen} pt - \frac{p}{k}\operatorname{sen} kt\right)$, $k=\sqrt{\frac{g}{l}}$.



Para el problema 33.7.



Para el problema 33.8.

33.8. Para medir las oscilaciones del pistón de un motor de combustión interna se utiliza un instrumento compuesto de un carro móvil A y de un tambor D que gira uniformemente y está unido rígidamente con la cruceta. El peso del carro es Q y éste, gracias a guías especiales, efectúa un movimiento de traslación, durante el cual el extremo del lápiz C, fijado en el carro, describe una recta paralela al eje del vástago. El carro A está ligado con la cruceta mediante un resorte B de rigidez c. Un mecanismo de relojería gira el tambor con una velocidad angular ω, el radio del tambor es r.

Hallar la ecuación de la curva descrita por el lápiz sobre la cinta del tambor, si el movimiento de la cruceta respecto de sus guías se expresa por la ecuación $x=a+l\cos\Omega t$, donde a es una constante que depende del origen del sistema fijo de coordenadas elegido, l es el recorrido del pistón, Ω es la velocidad angular del volante del motor.

Respuesta: $\xi = A\cos\sqrt{\frac{cg}{Q}}\,t + B\operatorname{sen}\sqrt{\frac{cg}{Q}}\,t + \frac{Ql\Omega^2}{cg-Q\Omega^2}\cos\Omega t$,

$\eta = r\omega t$,

A y B son constantes que se determinan por los datos iniciales.

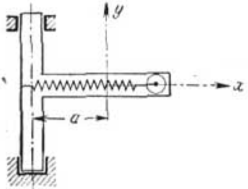
33.9. Una bola de masa m, fijada en el extremo de un resorte horizontal de rigidez c, está en equilibrio en un tubo a la distancia a del eje vertical.

Determinar el movimiento relativo de la bola, si el tubo, que forma con el eje un ángulo recto, comienza a girar alrededor del eje vertical con una velocidad angular constante ω.

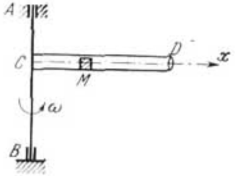
Respuesta: En el sistema de coordenadas, cuyo origen coincide con el punto de equilibrio de la bola.

$$1)\ x = 2\frac{\omega^2 a}{k^2-\omega^2}\operatorname{sen}^2\frac{\sqrt{k^2-\omega^2}}{2}t \text{ para } k=\sqrt{\frac{c}{m}}>\omega;$$

$$2)\ x = \frac{\omega^2 a}{\omega^2-k^2}\left(\operatorname{ch}\sqrt{\omega^2-k^2}\,t-1\right) \text{ para } k=\sqrt{\frac{c}{m}}<\omega.$$



Para el problema 33.9.



Para el problema 33.10.

33.10. Un tubo horizontal CD gira uniformemente alrededor del eje vertical AB con la velocidad angular ω. En el interior del tubo se halla un cuerpo M.

Calcular la velocidad v del cuerpo respecto del tubo en el instante cuando el cuerpo se separa del tubo, si en el instante inicial $v=0$, $x=x_0$, la longitud del tubo es L. El rozamiento se desprecia.

Respuesta: $v=\sqrt{L^2-x_0^2}\,\omega$.

33.11. Para los datos del problema anterior, determinar el tiempo de desplazamiento del cuerpo dentro del tubo.

Respuesta: $T=\frac{1}{\omega}\ln\frac{L+\sqrt{L^2-x_0^2}}{x_0}$.

33.12. Para los datos del problema 33.10, escribir la ecuación diferencial de movimiento del cuerpo en el tubo, si el coeficiente de rozamiento de deslizamiento entre la bola y el tubo es f.

Respuesta: $\ddot{x}=\omega^2 x \pm f\sqrt{g^2+4\omega^2\dot{x}^2}$; el signo superior corresponde a $\dot{x}<0$, el inferior, a $\dot{x}>0$.

33.13. Un anillo se desplaza a lo largo de una barra lisa AB que gira uniformemente en el plano horizontal alrededor del eje vertical, que pasa por el extremo A, haciendo una vuelta en un segundo; la longitud de la barra es igual a 1 m; en el instante $t=0$ el anillo se encontraba a 60 cm del extremo A y su velocidad era igual a cero.

Determinar el instante t_1 cuando el anillo sale de la barra.

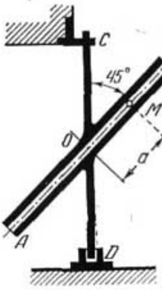
Respuesta: $t_1 = \frac{1}{2\pi} \ln 3 = 0{,}175\text{s}.$

33.14. Un tubo AB gira con una velocidad angular constante ω alrededor del eje vertical CD y forma con éste ángulo constante de 45°. En el interior del tubo se halla una bola pesada M.

Determinar el movimiento de esta bola respecto del tubo, si su velocidad inicial es igual a cero y su distancia inicial al punto O es igual a a. Despreciar el rozamiento.

Respuesta: $OM = \frac{1}{2}\left(a - \frac{g\sqrt{2}}{\omega^2}\right) \times$

$$\times \left(e^{+0{,}5\omega t\sqrt{2}} + e^{-0{,}5\omega t\sqrt{2}}\right) + \frac{g\sqrt{2}}{\omega^2}.$$



Para e problema 33.14.

33.15. Determinar como varia la aceleración de la fuerza de gravedad en función de la latitud del lugar φ a consecuencia de la rotación de la Tierra alrededor de su eje. El radio de la Tierra es $R = 6370$ km.

Respuesta: Si se desprecia el término que contiene ω^4 a causa de su pequeñez, entonces

$$g_1 = g\left(1 - \frac{\cos^2\varphi}{289}\right),$$

donde g es la aceleración de la fuerza de gravedad en el polo, φ es la latitud geográfica del lugar.

33.16. ¿En cuántas veces hace falta aumentar la velocidad angular de rotación de la Tierra alrededor de su eje para que un punto pesado, situado sobre la superficie de la Tierra en el ecuador, sea imponderable? El radio de la Tierra es $R = 6370$ km.

Respuesta: 17 veces.

33.17. Un proyectil se desplaza a lo largo de una trayectoria rasante (es decir, a lo largo de una trayectoria que puede considerarse aproximadamente como una recta horizontal). La velocidad horizontal del proyectil durante el movimiento es $v_0 = 900$ m/s. El proyectil debe batir un objetivo situado a 18 km del lugar del tiro.

Determinar la desviación del proyectil del objetivo a consecuencia de la rotación de la Tierra. La resistencia del aire se desprecia. El tiro se efectúa en la latitud boreal $\lambda = 60°$.

Respuesta: El proyectil se desviará a la derecha (si se observa desde arriba perpendicularmente a la velocidad) a la distancia

$$s = \omega v_0 t^2 \operatorname{sen} \lambda = 22{,}7 \text{ m}]$$

independientemente de la dirección del tiro.

33.18. Un péndulo suspendido de un hilo largo recibe una velocidad inicial pequeña en el plano norte—sur.

Suponiendo que las desviaciones del péndulo son pequeñas en comparación con la longitud del hilo y teniendo en cuenta la rotación de la Tierra alrededor de su eje, hallar el tiempo en el curso del cual el plano de oscilaciones del péndulo coincidirá con el plano oeste—este. El péndulo está situado en el lugar de 60° de latitud boreal.

Respuesta: $T = 13{,}86\,(0{,}5 + k)$ horas, donde $k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$

Capítulo X

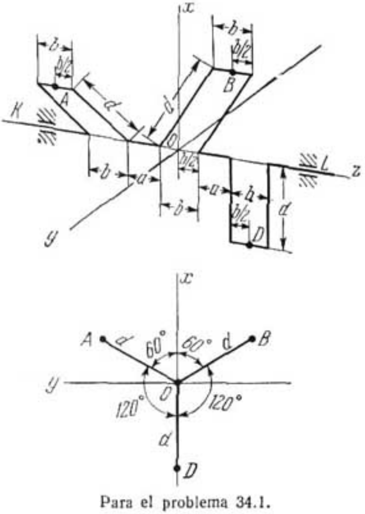
DINÁMICA DEL SISTEMA DE PUNTOS MATERIALES

§ 34. GEOMETRÍA DE MASAS: CENTRO DE MASAS DEL SISTEMA MATERIAL, MOMENTOS DE INERCIA DE CUERPOS SÓLIDOS

34.1. El cigüeñal de un motor de tres cilindros, representado en el dibujo, se compone de tres codos que forman entre sí un ángulo de 120°.

Determinar la posición del centro de masas del cigüeñal, considerando que las masas de los codos están concentradas en los puntos A, B y D y $m_A = m_B = m_D = m$. Las masas de otras partes del cigüeñal se desprecian. Las dimensiones están indicadas en el dibujo.

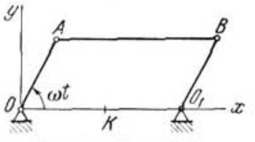
Respuesta: El centro de masas coincide con el origen O de coordenadas.



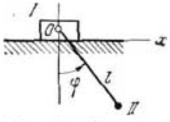
Para el problema 34.1.

34.2. Hallar la ecuación de movimiento del centro de masas de un paralelogramo articulado $OABO_1$, así como la ecuación de la trayectoria de su centro de masas cuando la manivela OA gira con una velocidad angular constante ω. Los elementos del paralelogramo son las barras homogéneas, $OA = O_1B = \frac{AB}{2} = a$.

Respuesta: $x_C = a + \frac{3}{4} a \cos \omega t$, $y_C = \frac{3}{4} a \operatorname{sen} \omega t$; la ecuación de la trayectoria $(x_C - a)^2 + y_C^2 = \left(\frac{3}{4} a\right)^2$ es una circunferencia de radio $\frac{3}{4}$ a con centro en el punto K de coordenadas $(a, 0)$.



Para el problema 34.2.

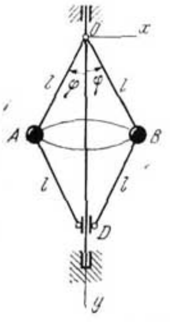


Para el problema 34.3.

34.3. La carga II de peso P_2 está fijada en la corredera I de peso P_1 con ayuda de un hilo imponderable. Durante las oscilaciones de la carga según la ley $\varphi = \varphi_0 \operatorname{sen} \omega t$ la corredera se desliza sobre un plano horizontal liso fijo.

Hallar la ecuación de movimiento de la corredera $x_1 = f(t)$, considerando que en el instante $(t = 0)$ la corredera se encontraba en el origen de referencia O del eje x. La longitud del hilo es igual a l.

Respuesta: $x_1 = -\frac{P_2}{P_1 + P_1} l \operatorname{sen} (\varphi_0 \operatorname{sen} \omega t)$.

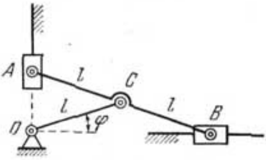


Para el problema 34.4.

34.4. Determinar la posición del centro de masas del regulador centrífugo, mostrado en el dibujo, si el peso de cada una de las bolas A y B es igual a P_1, el peso del manguito D es igual a P_2. Considerar las bolas A y B como masas puntiformes. Las masas de los vástagos se desprecian.

Respuesta: $x_C = 0$, $y_C = 2 \frac{P_1 + P_2}{2P_1 + P_2} l \cos \varphi$.

34.5. Determinar la trayectoria del centro de masas del mecanismo de un elipsógrafo compuesto de los manguitos A y B de peso Q cada uno, de la manivela OC de peso P y de la regla AB de peso $2P$. Viene dado: $OC = AC = CB = l$. Considerar que la regla y la manivela son barras homogéneas y los manguitos son las masas puntiformes.



Para el problema 34.5.

Respuesta: Una circunferencia con centro en el punto O y de radio igual a

$$\frac{5P+4Q}{3P+2Q}\,\frac{l}{2}.$$

34.6. *Un mecanismo de biela y manivela se pone en movimiento* mediante la manivela OA de peso P_1 y de longitud r, que gira con una velocidad angular constante ω.

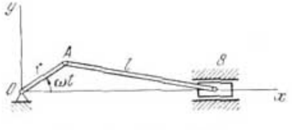
Escribir la ecuación de movimiento del centro de masas del mecanismo, si el peso de la biela AB de longitud $l\,(r \leqslant l)$ es igual a P_2 y el peso de la corredera B es igual a P_3.

Indicación. Hace falta dasarrollar en serie la expresión $\sqrt{1-\lambda^2 \operatorname{sen}^2 \omega t}$, donde, $\lambda = r/l$ y omitir todos los términos que contienen λ^2, a una potencia superior a la segunda.

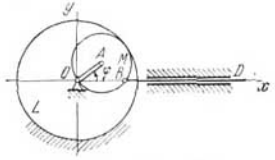
Respuesta:

$$x_C = (4-\lambda^2)\frac{P_2+2P_3}{8(P_1+P_2+P_3)}\,l + \frac{P_1+2P_2+2P_3}{2(P_1+P_2+P_3)}\,r\cos\omega t + \lambda^2\frac{P_2+2P_3}{8(P_1+P_2+P_3)}\,l\cos 2\omega t,$$

$$y_C = \frac{P_1+P_2}{2(P_1+P_2+P_3)}\,r \operatorname{sen}\omega t, \text{ donde } \lambda = \frac{r}{l}.$$



Para el problema 34.6.



Para el problema 34.7.

34.7. La manivela OA de peso P_1 y de longitud r del mecanismo mostrado en el dibujo gira un piñón M de peso P_2 y de radio r que se encuentra en engrane interior con el piñón fijo L de radio $2r$. Una regla BD de peso P_3 y de longitud l, articulada al piñón M, se desplaza por las guías rectilíneas horizontales. Considerar la manivela OA y la regla BD como barras homogéneas. El centro de gravedad del piñón M se encuentra en el punto A.

Determinar la posición del centro de masas del mecanismo.

Respuesta: $x_C = \frac{P_3}{2(P_1+P_2+P_3)} l + \frac{P_1+2P_2+4P_3}{2(P_1+P_2+P_3)} r \cos\varphi$;

$y_C = \frac{P_1+2P_2}{2(P_1+P_2+P_3)} r \operatorname{sen}\varphi$.

34.8. Calcular el momento de inercia de un árbol de acero de 5 cm de radio y de 100 kg de masa respecto de su generatriz. Considerar el árbol como un cilindro continuo homogéneo.

Respuesta: 3750 kg cm^2.

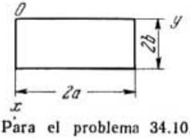
34.9. Calcular el momento de inercia de un semidisco homogéneo fino de peso P y de radio r respecto del eje que pasa a lo largo del diámetro limitador del semidisco.

Respuesta: $\frac{Pr^2}{4g}$.

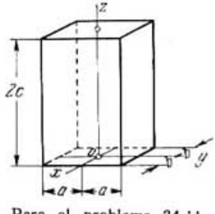
34.10. Calcular los momentos de inercia axiales J_x y J_y de la placa rectangular homogénea de peso P, mostrada en el dibujo, respecto de los ejes x e y.

Respuesta: $J_x = \frac{4}{3}\frac{P}{g}a^2$;

$J_y = \frac{4}{3}\frac{P}{g}b^2$.



Para el problema 34.10.



Para el problema 34.11.

34.11. Calcular los momentos de inercia del paralelepípedo rectangular homogéneo de peso P, mostrado en el dibujo, respecto de los ejes x, y y z.

Respuesta: $J_x = \frac{P}{3g}(a^2+4c^2)$;

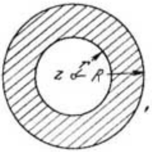
$J_y = \frac{P}{3g}(b^2+4c^2)$;

$J_z = \frac{P}{3g}(a^2+b^2)$.

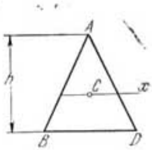
34.12. En un disco circular fino homogéneo de radio R se ha taladrado un orificio concéntrico de radio r.

Calcular el momento de inercia de este disco de peso P respecto del eje z que pasa por su centro de gravedad perpendicularmente al plano del disco.

Respuesta: $J_z = \frac{P}{2g}(R^2 + r^2)$.



Para el problema 34.12.



Para el problema 34.13.

34.13. Calcular el momento de inercia de una placa fina homogénea de peso P, que tiene la forma de un triángulo isósceles de altura h, respecto del eje que pasa por su centro de gravedad C paralelamente a su base.

Respuesta: $\frac{1}{18}\frac{P}{g}h^2$.

34.14. Calcular el momento de inercia de la placa, examinada en el problema anterior, respecto del eje que pasa por su vértice paralelamente a la base.

Respuesta: $\frac{P}{2g}h^2$.

34.15. Para los datos del problema 34.13, calcular el momento de inercia de la placa respecto del eje que pasa por el vértice A perpendicularmente a su plano, si la base $BD = a$.

Respuesta: $\frac{P}{24g}(a^2 + 12h^2)$.

34.16. Calcular los momentos de inercia respecto de tres ejes mutuamente perpendiculares x, y y z de una placa elíptica homogénea de peso P delimitada por el contorno $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

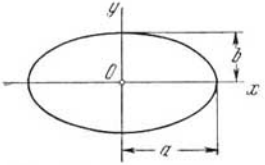
Respuesta: $J_x = \frac{P}{4g}b^2$;

$$J_y = \frac{P}{4g}a^2,$$

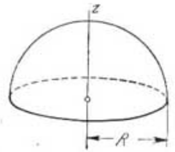
$$J_z = \frac{P}{4g}(a^2 + b^2).$$

34.17. Determinar el momento de inercia de una esfera hueca homogénea de masa M respecto del eje que pasa por su centro de gravedad. Los radios exterior e interior son respectivamente iguales a R y r.

Respuesta: $\frac{2}{5} M \frac{R^5 - r^5}{R^3 - r^3}$.



Para el problema 34.16.



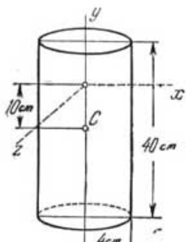
Para el problema 34.18.

34.18. Calcular el momento de inercia de una envoltura fina homogénea semiesférica de radio R, respecto del eje que pasa por el centro de la semiesfera perpendicularmente al plano que la delimita. La masa M de la envoltura está uniformemente repartida por la superficie de la semiesfera.

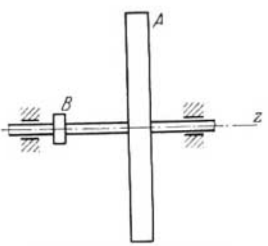
Respuesta: $\frac{2}{3} MR^2$.

34.19. Calcular el radio de inercia de un cilindro continuo homogéneo respecto del eje z perpendicular al eje del cilindro y que dista 10 cm de su centro de gravedad C, si el radio del cilindro es igual a 4 cm, y su altura es de 40 cm.

Respuesta: 15,4 cm.



Para el problema 34.19.



Para el problema 34.20.

34.20. Un volante A de 1tf de peso y un piñón B de 10 kgf de peso están encajados sobre un árbol de 60 kgf de peso. El radio del árbol es igual a 5 cm, el del volante es igual a 1 m y el del piñón, a 10 cm.

Calcular el momento de inercia del sistema respecto de su eje de rotación z. Considerar el árbol como un cilindro continuo homogéneo, el piñón, como un disco continuo homogéneo. La masa del volante está uniformemente repartida por su llanta.

Respuesta: 102 kgf m s².

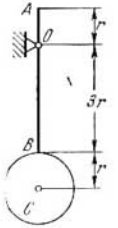
34.21. Un péndulo se compone de un vástago delgado homogéneo AB de peso P_1, en cuyo extremo está fijado un disco homogéneo C de peso P_2. La longitud del vástago es igual a $4r$, donde r es el radio del disco.

Calcular el momento de inercia del péndulo respecto de su eje de suspensión O perpendicular al plano del péndulo y situado a la distancia r del extremo del vástago.

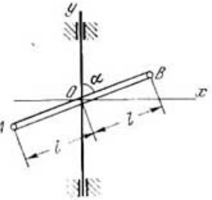
Respuesta: $\frac{14P_1+99P_2}{6g}r^2$.

34.22. Calcular el radio de inercia del péndulo, examinado en el problema anterior, respecto del eje que pasa por el extremo A del vástago AB, perpendicularmente al plano del péndulo.

Respuesta: $\rho_A = r\sqrt{\frac{32P_1+153P_2}{6(P_1+P_2)}}$.



Para el problema 34.21.



Para el problema 34.23.

34.23. Un vástago delgado homogéneo AB de longitud $2l$ y peso P está fijado por su centro O en un eje vertical, formando con éste un ángulo α.

Calcular los momentos de inercia del vástago J_x, J_y y el momento de inercia centrífugo J_{xy}. Los ejes de coordenadas están indicados en el dibujo.

Respuesta: $J_x = \frac{Pl^2}{3g}\cos^2\alpha;$

$$J_y = \frac{Pl^2}{3g}\operatorname{sen}^2\alpha;$$

$$J_{xy} = \frac{Pl^2}{6g}\operatorname{sen} 2\alpha.$$

34.24. De acuerdo con los datos del problema 34.1, determinar los momentos de inercia centrífugos J_{xz}, J_{yz}, J_{xy} del cigüeñal:

Respuesta: $J_{xz} = -\frac{3}{2}md(a+b);$

$$J_{yz} = -\frac{\sqrt{3}}{2}md(a+b);$$

$$J_{xy} = 0.$$

34.25. Un disco circular homogéneo de peso P está encajado excéntricamente sobre el eje z perpendicular a su plano. El radio del disco es igual a r, la excentricidad $OC = a$, donde C es el centro de gravedad del disco.

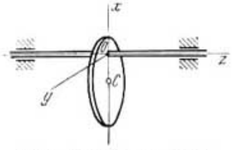
Calcular los momentos de inercia axiales J_x, J_y, J_z y centrífugos J_{xy}, J_{xz}, J_{yz} del disco. Los ejes de coordenadas están indicados en el dibujo.

Respuesta: $J_x = \frac{Pr^2}{4g};$

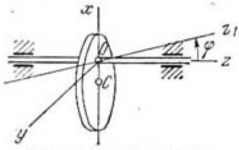
$$J_y = \frac{P}{g}\left(\frac{r^2}{4} + a^2\right);$$

$$J_z = \frac{P}{g}\left(\frac{r^2}{2} + a^2\right);$$

$$J_{xy} = J_{xz} = J_{yz} = 0.$$



Para el problema 34.25.



Para el problema 34.27.

34.26. Haciendo uso de los datos y la respuesta del problema anterior, calcular las magnitudes de los semiejes del elipsoide de inercia construido en el punto O.

Respuesta: $a = \frac{2}{r}\sqrt{\frac{g}{P}};$

$$b = \sqrt{\frac{g}{P\left(\frac{r^2}{4} + a^2\right)}}; \quad c = \sqrt{\frac{g}{P\left(\frac{r^2}{2} + a^2\right)}}.$$

34.27. De acuerdo con los datos del problema 34.25, calcular el momento de inercia del disco respecto del eje z_1 situado en el plano vertical xz y que forma con el eje z un ángulo φ.

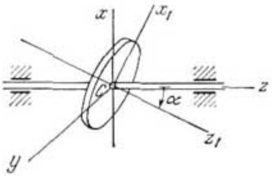
Respuesta: $J_{z_1} = \frac{Pr^2}{4g}\,\mathrm{sen}^2\varphi + \frac{P}{g}\left(\frac{r^2}{2} + a^2\right)\cos^2\varphi.$

34.28. Un disco circular homogéneo de peso P va encajado sobre el eje z que pasa por su centro de gravedad C. El eje de simetría z_1 del disco está situado en el plano vertical de simetría xz y forma con el eje z un ángulo α. El radio del disco es igual a r.

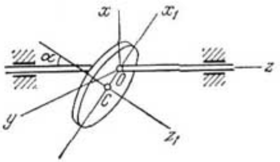
Calcular los momentos de inercia centrífugos J_{xz}, J_{yz}, J_{xy} del disco (los ejes de coordenadas están indicados en el dibujo).

Respuesta: $J_{xy} = J_{zy} = 0;$

$$J_{xz} = (J_{z_1} - J_{x_1})\,\frac{\mathrm{sen}\,2\alpha}{2} = \frac{Pr^2}{8g}\,\mathrm{sen}\,2\alpha.$$



Para el problema 34.28.



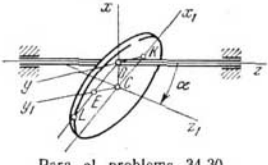
Para el problema 34.29.

34.29. Resolver el problema anterior suponiendo que el disco va encajado excéntricamente sobre el eje z, siendo la excentricidad $OC = a$.

Respuesta: $J_{xy} = J_{yz} = 0;$

$$J_{xz} = \frac{P}{2g}\left(\frac{r^2}{4} + a^2\right)\mathrm{sen}\,2\alpha.$$

34.30. Un disco circular homogéneo de radio R está encajado sobre el eje de rotación z que pasa por el punto O y forma con el eje de simetría del disco Cz_1 un ángulo α. La masa del disco es igual a M.



Para el problema 34.30.

Calcular el momento de inercia J_z del disco respecto del eje de rotación z, y los momentos de inercia centrífugos J_{xz} y J_{yz}, si OL es la proyección del eje z sobre el plano del disco, $OE = a$, $OK = b$.

Respuesta: $J_z = M\left[\left(a^2 + \frac{1}{2}R^2\right)\cos^2\alpha + \frac{1}{4}R^2 \operatorname{sen}^2\alpha + b^2\right]$;

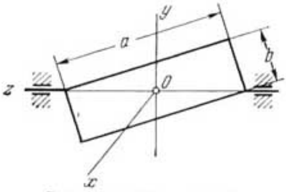
$$J_{xz} = M\left(\frac{1}{4}R^2 + a^2\right)\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha;$$

$$J_{yz} = Mab\operatorname{sen}\alpha.$$

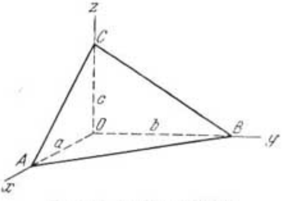
34.31. Una placa rectangular homogénea de peso P, las longitudes de cuyos lados son a y b, está fijada en el eje z que pasa por una de sus diagonales.

Calcular el momento de inercia centrífugo J_{yz} de la placa respecto de los ejes y y z situados junto con la placa en el plano del dibujo. El origen de coordenadas coincide con el centro de gravedad de la placa.

Respuesta: $J_{yz} = \frac{P}{12g}\frac{ab(a^2-b^2)}{a^2+b^2}$.



Para el problema 34.31.



Para el problema 34.32.

34.32. Determinar respecto de los ejes x, y, z los momentos de inercia axiales y centrífugos del tetraedro homogéneo $OABC$ de masa M, mostrado en el dibujo.

Respuesta: $J_x = \frac{M}{10}(b^2+c^2)$,

$$J_y = \frac{M}{10}(a^2+c^2),$$

$$J_z = \frac{M}{10}(a^2+b^2);$$

$$J_{xy} = \frac{M}{20}ab, \quad J_{yz} = \frac{M}{20}bc;$$

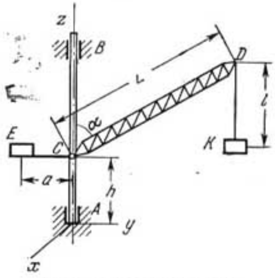
$$J_{zx} = \frac{M}{20}ca.$$

34.33. Suponiendo para los datos del problema anterior que $a=b=c$, hallar la ecuación del elipsoide de inercia del tetraedro respecto del punto O.

Respuesta: $\frac{Ma^2}{4}(x_1^2+y_1^2) + \frac{M}{10}a^2z_1^2 = 1$;

el eje z_1 de simetría del elipsoide forma con los ejes x, y, z ángulos iguales. Los ejes x_1 e y_1 ocupan una posición arbitraria en el plano que pasa por el punto O perpendicularmente a z_1.

34.34. La parte giratoria de una grúa está compuesta del brazo CD de longitud L y de peso G, del contrapeso E de peso Q y de la carga K de peso P.



Para el problema 34.34.

Considerando el brazo como una viga delgada homogénea, el contrapeso E y la carga K como masas puntiformes, calcular el momento de inercia J_z de la grúa respecto del eje vertical de rotación z y los momentos de inercia centrífugos respecto de los ejes de coordenadas x, y, z relacionados con la grúa. El centro de gravedad de todo el sistema se encuentra sobre el eje z; el brazo CD está situado en el plano yz.

Respuesta: $J_z = \frac{1}{g}\left[Qa^2 + \left(P + \frac{1}{3}G\right)L^2 \operatorname{sen}^2\alpha\right]$;

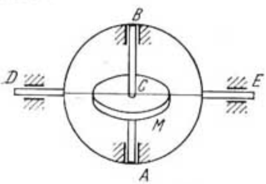
$$J_{yz} = \frac{P + \frac{1}{3}G}{2g} L^2 \operatorname{sen} 2\alpha - \frac{P}{g} Ll \operatorname{sen}\alpha,$$

$$J_{xy} = J_{xz} = 0.$$

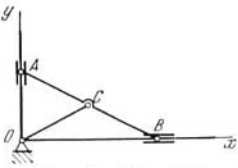
§ 35. TEOREMA DEL MOVIMIENTO DEL CENTRO DE MASAS DEL SISTEMA MATERIAL

35.1. Calcular el vector principal de las fuerzas externas que actúan sobre el volante M, que gira alrededor del eje AB con la aceleración angular ε. El eje AB, fijado en un bastidor circular, a su vez gira uniformemente alrededor del eje DE. El centro de gravedad C del volante está en el punto de intersección de los ejes AB y DE.

Respuesta: El vector principal de las fuerzas externas es igual a cero.



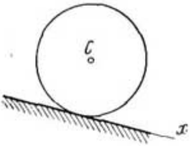
Para el problema 35. .



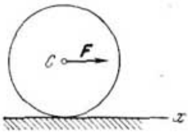
Para el problema 35.2.

35.2. Calcular el vector principal de las fuerzas externas aplicadas a la regla AB del elipsógrafo mostrado en el dibujo. La manivela OC gira con una velocidad angular constante ω; el peso de la regla AB es igual a P; $OC = AC = BC = l$.

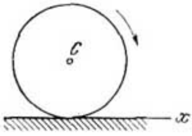
Respuesta: El vector principal de las fuerzas externas es paralelo a CO, y su módulo es igual a $\frac{P}{g} l\omega^2$.



Para el problema 35.3.



Para el problema 35.4.



Para el problema 35.5.

35.3. Calcular el vector principal de las fuerzas externas que actúan sobre una rueda de peso P en movimiento de descenso por un plano inclinado, si su centro de masas C se desplaza de acuerdo con la ley $x_C = at^2/2$.

Respuesta: El vector principal de las fuerzas externas es paralelo al eje x, está dirigido en el sentido del movimiento y su módulo es igual a Pa/g.

35.4. Una rueda se desplaza con deslizamiento sobre una recta horizontal bajo la acción de la fuerza F mostrada en el dibujo.

Hallar la ley del movimiento del centro de masas C de la rueda, si el coeficiente de rozamiento de deslizamiento es igual a f; $F = 5fP$, donde P es el peso de la rueda. En el instante inicial la rueda se encontraba en reposo.

Respuesta: $x_C = 2fgt^2$.

35.5 Una rueda se desplaza con deslizamiento sobre una recta horizontal bajo la acción de un momento de rotación aplicado a la rueda.

Hallar la ley del movimiento del centro de masas C de la rueda, si el coeficiente de rozamiento de deslizamiento es igual a f. En el instante inicial la rueda estaba en reposo.

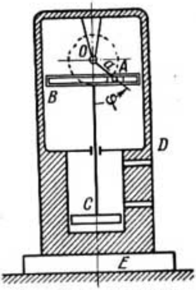
Respuesta: $x_C = \frac{fgt^2}{2}$.

35.6. Un vagón de tranvía efectúa oscilaciones harmónicas verticales sobre las ballestas de amplitud de 2,5 cm y de período $T = 0{,}5$ s. El peso de la carroceria y la carga es de 10 tf, el peso del bogie y de las ruedas es igual a 1 tf.

Determinar la presión que ejerce el vagón sobre los rieles.

Respuesta: La presión varía de 7 a 15 tf.

35.7. Calcular la presión que ejerce una bomba de evacuación del agua sobre el suelo durante su trabajo en vacío, si el peso de las partes inmóviles del cuerpo D y del cimiento E es igual a P_1, el peso de la manivela $OA = a$ es igual a P_2, el peso de la colisa B y del pistón C es igual a P_3. La manivela OA, que gira uniformemente con la velocidad angular ω, debe considerarse como una barra homogénea.



Para el problema 35.7.

Respuesta: $N = P_1 + P_2 + P_3 +$

$$+\frac{a\omega^2}{2g}(P_2 + 2P_3)\cos\omega t.$$

35.8. Utilizando los datos del problema anterior, considerar que la bomba está instalada sobre un cimiento elástico con coeficiente de elasticidad c.

Hallar la ley del movimiento del eje O de la manivela OA por la vertical, si en el instante inicial el eje O se encontraba en la posición de equilibrio estático y se le comunicó una velocicad v_0 dirigida verticalmente hacia abajo. Tomar el origen de referencia del eje x, dirigido verticalmente hacia abajo en la posición de equilibrio estático del eje O. Las fuerzas de rozamiento se desprecian.

Respuesta: 1) Cuando $\frac{cg}{P_1 + P_2 + P_3} \neq \omega^2$,

$$x_O = -\frac{h}{k^2 - \omega^2}\cos kt + \frac{v_0}{k}\operatorname{sen} kt + \frac{h}{k^2 - \omega^2}\cos\omega t,$$

donde $k = \sqrt{\frac{cg}{P_1 + P_2 + P_3}}$.

$$h = \frac{P_2 + 2P_3}{P_1 + P_2 + P_3}\,\frac{a\omega^2}{2};$$

2) Cuando $\frac{cg}{P_1 + P_2 + P_3} = \omega^2$,

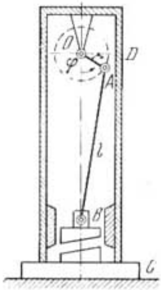
$$x_O = \frac{v_0}{\omega}\operatorname{sen}\omega t + \frac{h}{2\omega}\,t\operatorname{sen}\omega t.$$

35.9. Las tijeras para cortar metales se componen de un mecanismo de biela y manivela OAB, a la corredera B del cual está fijada una cuchilla móvil. La cuchilla fija está montada sobre el cimiento C.

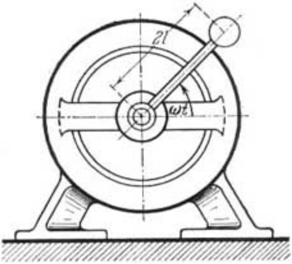
Determinar la presión del cimiento sobre el suelo, si la longitud de la manivela es r, el peso de ésta es P_1, la longitud de la biela es l, el peso de la corredera B junto con la cuchilla móvil es P_2, el peso del cimiento C y del cuerpo D es igual a P_3. La masa de la biela se desprecia. Considerar la manivela OA, que gira uniformemente con una velocidad angular ω, como una barra homogénea.

Indicación. Hace falta desarrollar en serie la expresión $\sqrt{1-\left(\frac{r}{l}\right)^2 \operatorname{sen}^2 \omega t}$ y omitir todos los términos de la serie que contienen la relación r/l a una potencia superior a la segunda.

$$\textit{Respuesta:}\ N = P_1 + P_2 + P_3 + \frac{r\omega^2}{2g}\left[(P_1 + 2P_2)\cos\omega t + \right.$$
$$\left. + 2P_2 \frac{r}{l}\cos 2\omega t\right].$$



Para el problema 35.9.



Para el problema 35.10.

35.10. Un motor eléctrico de peso P está instalado sin fijación sobre un cimiento horizontal liso; sobre el eje del motor va sujeto, bajo un ángulo de 90°, uno de los extremos de una barra homogénea de longitud $2l$ y de peso p el otro extremo de la barra porta una carga puntiforme Q. La velocidad angular del árbol es igual a ω.

Determinar: 1) el movimiento horizontal del motor; 2) el esfuerzo horizontal máximo R que actuará sobre los pernos, si con ayuda de éstos se fija la caja del motor eléctrico al cimiento.

Respuesta: 1) Oscilaciones harmónicas de amplitud $\frac{l(p+2Q)}{p+P+Q}$ y de período $\frac{2\pi}{\omega}$;

2) $R = \frac{p+2Q}{g} l\omega^2$.

35.11. De acuerdo con los datos del problema anterior, calcular la velocidad angular ω del eje del motor eléctrico, para la cual el último brincará sobre el cimiento por no estar empernado a éste.

Respuesta: $\omega > \sqrt{\frac{(p+P+Q)g}{(p+2Q)l}}$.

35.12. Durante el montaje de un motor eléctrico su rotor B fue encajado excéntricamente sobre el eje de rotación C_1 a la distancia $C_1C_2=a$, donde C_1 es el centro de gravedad del estator A, y C_2 es el centro de gravedad del rotor B. El rotor gira uniformemente con una velocidad angular ω. El motor eléctrico está instalado en la parte media de una viga elástica, cuya flexión estática es igual a Δ; el peso del estator es P_1, el del rotor es P_2.

Hallar la ecuación de movimiento del punto C_1 a lo largo de la vertical, si en el instante inicial este punto estaba en reposo en la posición de equilibrio estático. Las fuerzas de resistencia se desprecian. El origen de referencia del eje x se elige en la posición de equilibrio estático del punto C_1.

Respuesta: 1) Cuando $\sqrt{\frac{g}{\Delta}}\neq\omega$ $\quad x_1=-\frac{\omega}{k}\frac{h}{k^2-\omega^2}\operatorname{sen}kt+$

$+\frac{h}{k^2-\omega^2}\operatorname{sen}\omega t$, donde $k=\sqrt{\frac{g}{\Delta}}$,

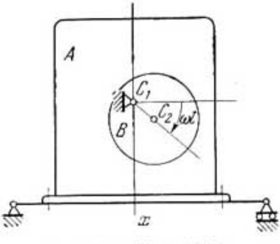
$h=\frac{P_2}{P_1+P_2}a\omega^2$;

2) siendo $\sqrt{\frac{g}{\Delta}}=\omega$ $\quad x_1=\frac{h}{2\omega^2}\operatorname{sen}\omega t-\frac{h}{2\omega}t\cos\omega t$.

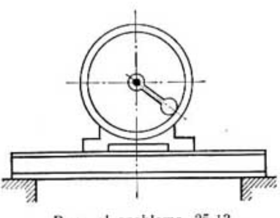
35.13. Un motor eléctrico de 30 kgf de peso está instalado sobre una viga cuya rigidez es $c=300$ kgf/cm. Una carga de 200 gf de peso está fijada sobre el árbol del motor a la distancia de 1,3 cm del eje del árbol. La velocidad angular del motor es $\omega=\text{const}=90\ \text{s}^{-1}$.

Determinar la amplitud de oscilaciones forzadas del motor y su número crítico de revoluciones por minuto. La masa de la viga y la resistencia al movimiento se desprecian.

Respuesta: $a=0{,}410$ mm, $\quad n_{cr}=950$ r.p.m.



Para el problema 35.12.



Para el problema 35.13.

35.14. Un motor de peso $P=50$ kgf está instalado sobre una viga cuya rigidez es $c=500$ kgf/cm. Durante las oscilaciones libres de la viga con el motor el decrecimiento de las amplitudes de las desviaciones sucesivas de la posición de equilibrio resultó ser igual a $\frac{A_n}{A_{n+1}}=\frac{10}{9}$. Sobre el árbol del motor, a la distancia $r=6$ cm del eje de rotación hay una carga de peso $p=0,2$ kgf no equilibrada.

Hallar la amplitud y el desfasaje de las oscilaciones forzadas del motor, cuando la velocidad angular de rotación del árbol corresponde a $n=\text{const}=980$ r.p.m.

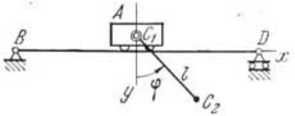
Respuesta: $a=0,253$ cm; $\varepsilon=137°$.

35.15. En el dibujo viene representado el carro de grúa A de peso P_1 frenado en la parte media de la viga BD. En el centro de gravedad C_1 del carro se ha colgado un cable de longitud l, en el extremo del cual está fijada una carga C_2 de peso P_2. El cable con la carga efectúa oscilaciones harmónicas en el plano vertical.

Determinar: 1) la reacción vertical total de la viga BD, considerándola rígida; 2) la ley del movimiento del punto C_1 en la dirección vertical, considerando que la viga es elástica con un coeficiente de elasticidad igual a c.

En el instante inicial la viga, debido a que no estaba deformada, se encontraba en reposo en la posición horizontal. Suponiendo que las oscilaciones del cable son pequeñas se puede considerar: $\operatorname{sen}\varphi\approx\varphi$, $\cos\varphi\approx 1$. El origen de coordenadas del eje y se elige en la posición de equilibrio estático del punto C_1. La masa del cable y las dimensiones del carro, en comparación con la longitud de la viga se desprecian.

Respuesta: 1) $R_y=P_1+P_2$; 2) el punto C_1 efectúa oscilaciones libres según la ley $y_1=-\frac{P_1+P_2}{c}\cos\sqrt{\frac{cg}{P_1+P_2}}\,t$



Para el problema 35.15.

35.16. Basándose en los datos del problema anterior y considerando que la viga BD es rígida, determinar: 1) la reacción horizontal total de los rieles; 2) suponiendo que el carro no está frenado, la ley del movimiento del centro de gravedad C_1 del carro A a lo largo del eje x.

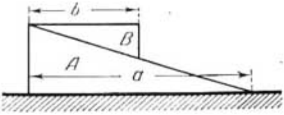
En el instante inicial el punto C_1 estaba en reposo en el origen de referencia del eje x. El cable efectúa oscilaciones de acuerdo con la ley $\varphi=\varphi_0\cos\omega t$.

Respuesta: 1) $R_x = -\frac{P_2}{g} l\varphi_0\omega^2 \cos\omega t$; 2) el punto C_1 efectúa oscilaciones de amplitud $\frac{P_2}{P_1+P_2} l\varphi_0$ y de frecuencia circular ω según la ley $x_1 = \frac{P_2}{P_1+P_2} l\varphi_0 (1-\cos\omega t)$.

35.17. Dos hombres están sentados sobre el banco medio de una lancha en reposo. Uno de los hombres, de 50 kgf de peso, se desplaza a la derecha hacia la proa de la lancha.

¿En qué dirección y a qué distancia debe desplazarse el segundo hombre, de 70 kgf de peso, para que la lancha permanezca en reposo? La longitud de la lancha es igual a 4 m. La resistencia del agua al movimiento de la lancha se desprecia.

Respuesta: A la izquierda hacia la popa de la lancha a 1,43 m de distancia.



Para el problema 35.18.

35.18. Sobre un prisma homogéneo A, situado sobre un plano horizontal, se ha colocado otro prisma homogéneo B; las secciones transversales de los prismas son triángulos rectangulares. El peso del prisma A es tres veces mayor que el del prisma B.

Suponiendo que los prismas y el plano horizontal son idealmente lisos, calcular la longitud l a la que se desplazará el prisma A, cuando el prisma B, descendiendo por A llegue al plano horizontal

Respuesta: $l = \frac{a-b}{4}$.

35.19. Dos obreros hacen rodar una fundición de acero pesada del extremo izquierdo de un muelle de carga horizontal de 6 m de longitud y de 2700 kgf de peso hacia su extremo derecho. En el instante inicial la plataforma está en reposo.

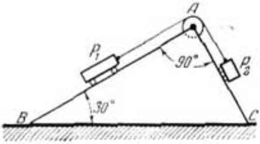
¿En qué dirección y a qué distancia se desplazará el muelle de carga, si el peso total de la carga y de los obreros es igual a 1800 kgf? Las fuerzas de resistencia al movimiento del muelle de carga se desprecian.

Respuesta: Hacia la izquierda, a 2,4 m.

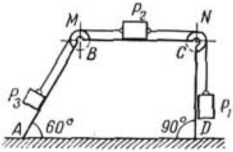
35.20. Las cargas P_1 y P_2 ligadas por un hilo inextensible, pasado sobre una polea A, se deslizan sobre los lados laterales lisos de una cuña rectangular, apoyada por su base BC en un plano horizontal liso.

Calcular el desplazamiento de la cuña por el plano horizontal durante la bajada de la carga P_1 a una altura $h = 10$ cm. El peso de la cuña es $P = 4P_1 = 16P_2$. La masa del hilo y de la polea se desprecia.

Respuesta: La cuña se desplazará a la derecha a 3,77 cm.



Para el problema 35.20.

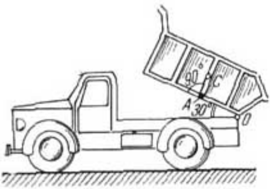


Para el problema 35.21.

35.21. Tres cargas $P_1 = 20$ N, $P_2 = 15$ N y $P_3 = 10$ N están ligadas por un hilo inextensible e imponderable, pasado sobre dos poleas fijas M y N. Cuando la carga P_1 desciende, la carga P_2 se desplaza a la derecha sobre la base superior de una pirámide truncada cuadrangular $ABCD$ de peso $P = 100$ N, la carga P_3 sube por la cara lateral AB.

Despreciando el rozamiento entre el piso y la pirámide truncada $ABCD$, determinar el desplazamiento de esta última respecto del piso, si la carga P_1 desciende 1 m.

Respuesta: Hacia la izquierda a 14 cm.



Para el problema 35.22.

35.22. Calcular el desplazamiento de un camión volquete no frenado, que en el instante inicial estaba en reposo, si su carrocería de 4 tf de peso ha girado 30° a partir de la posición horizontal alrededor del eje O perpendicular al plano del dibujo. El peso del camión sin carrocería es igual a 1,5 tf. La posición del centro de gravedad C de la carrocería está indicado en el dibujo, $OA = 2$m, $AC = 50$ cm. La resistencia al movimiento del camión se desprecia.

Respuesta: Hacia la izquierda a 37,8 cm.

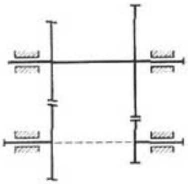
§ 36. TEOREMA DE VARIACIÓN DEL VECTOR PRINCIPAL DE LAS CANTIDADES DE MOVIMIENTO DEL SISTEMA MATERIAL. APLICACIÓN A LOS MEDIOS CONTINUOS

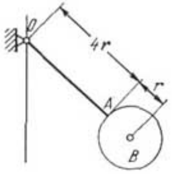
36.1. Determinar el vector principal de las cantidades de movimiento del reductor de velocidades en funcionamiento, mostrado en el dibujo, si los centros de gravedad de cada uno de los cuatro piñones en rotación se encuentran sobre los ejes de rotación.

Respuesta: El vector principal de las cantidades de movimiento es igual a cero.

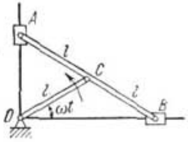
36.2. Calcular la suma de impulsos de las fuerzas externas aplicadas al reductor, examinado en el problema anterior, en un intervalo de tiempo finito arbitrario.

Respuesta: La suma de impulsos de las fuerzas externas es igual a cero.


Para el problema 36.1.



Para el problema 36.3.



Para el problema 36.4.

36.3. Determinar el vector principal de las cantidades de movimiento de un péndulo compuesto de una barra homogénea OA de peso P_1 y longitud $4r$, y de un disco homogéneo B de peso P_2 y radio r, si la velocidad angular del péndulo en el instante examinado es igual a ω.

Respuesta: El vector principal de las cantidades de movimiento está dirigido perpendicularmente a OA y su módulo es igual a $\frac{2P_1+5P_2}{g} r\omega$.

36.4. Determinar la magnitud y la dirección del vector principal de las cantidades de movimiento del mecanismo de un elipsógrafo, si el peso de la manivela es igual a P_1, el peso de la regla AB del elipsógrafo es igual a $2P_1$, el peso de cada uno de los manguitos A y B es igual a P_2. Vienen dadas las dimensiones: $OC=AC=CB=l$. Los centros de gravedad de la manivela y la regla están situados en sus puntos medios. La manivela gira con una velocidad angular ω.

Respuesta: El módulo del vector principal es igual a $Q=\frac{\omega l}{2g}(5P_1+4P_2)$; la dirección del vector principal es perpendicular a la manivela.

36.5. Determinar el vector principal de las cantidades de movimiento de un regulador centrífugo que gira con aceleración alrededor del eje vertical. Los ángulos φ varían de acuerdo con la ley $\varphi=\varphi(t)$ y las barras superiores, al girar levantan las bolas A y B. Las longitudes de las barras son: $OA=OB=AD=BD=l$.

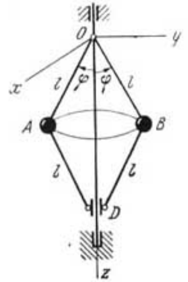
El centro de gravedad del manguito D de peso P_2 está situado sobre el eje z. Considerar las bolas A y B como masas puntiformes de peso P_1 cada una. La masa de las barras se desprecia.

Respuesta: $Q_x=Q_y=0$; $\quad Q_z=-2\frac{P_1+P_2}{g}l\dot{\varphi}\operatorname{sen}\varphi$, donde Q es el vector principal de las cantidades de movimiento, el plano yz coincide con el plano de disposición de las barras del regulador.

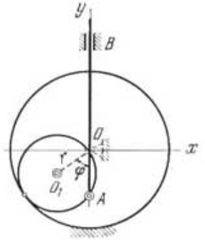
36.6. Determinar la suma de impulsos de las fuerzas externas aplicadas al regulador, examinado en el problema anterior, en el intervalo de tiempo que corresponde al crecimiento del ángulo φ de 30° hasta 60°, si φ varía según la ley $\varphi=\alpha t$, donde α es constante.

Respuesta: Las proyecciones de la suma de impulsos de las fuerzas externas sobre los ejes x, y, z son iguales a:

$$S_x^e=S_y^e=0,\quad S_z^e=-0{,}73\frac{P_1+P_2}{g}l\alpha.$$



Para el problema 36.5.



Para el problema 36.7.

36.7. En el mecanismo mostrado en el dibujo, el peso de la rueda móvil de radio r es p, el centro de gravedad de la rueda se encuentra en el punto O_1; la barra rectilínea AB pesa k veces más que la rueda móvil y su centro de gravedad se halla en su punto medio. La manivela OO_1 gira alrededor del eje O con una velocidad angular constante ω.

Determinar el vector principal de las cantidades de movimiento del sistema. La masa de la manivela se desprecia.

Respuesta: Las proyecciones del vector principal de las cantidades de movimiento del sistema sobre los ejes coordenadas son:

1) sobre el eje Ox: $-\frac{p}{g} r\omega \cos \omega t$;

2) sobre el eje Oy: $\frac{p}{g} r\omega (1+2k) \operatorname{sen} \omega t$.

36.8. El cañón de una pieza de artillería pesa 11 000 kgf. El peso del proyectil es igual a 54 kgf. La velocidad del proyectil a la salida del cañón es $v_0 = 900$ m/s.

Determinar la velocidad de retroceso libre del cañón de la pieza en el instante cuando el proyectil abandona el cañón.

Respuesta: La velocidad de retroceso del cañón de la pieza es igual a 4,42 m/s y está dirigida en el sentido opuesto al movimiento del proyectil.

36.9. Una granada de 12 kgf de peso, que vuela con la velocidad de 15 m/s estalla en el aire dividiéndose en dos partes. La velocidad del fragmento de 8 kgf de peso aumentó en dirección del movimiento hasta 25 m/s.

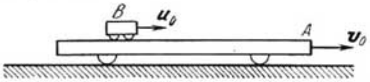
Determinar la velocidad del segundo fragmento.

Respuesta: 5 m/s y está dirigida en sentido contrario al movimiento del primer fragmento.

36.10. Un remolcador de 600 tf de peso alcanza la velocidad de 1,5 m/s, el cable de remolque se tiende y la barcaza de 400 tf de peso empieza a desplazarse tras el remolcador.

Hallar la velocidad común del remolcador y de la barcaza, suponiendo que la fuerza motriz y la de resistencia del agua se equilibran.

Respuesta: 0,9 m/s.



Para el problema 36.11.

36.11. Un carro B se desplaza con una velocidad relativa u_0 sobre una plataforma horizontal A que se mueve por inercia con la velocidad v_0. En un instante determinado el carro se frena.

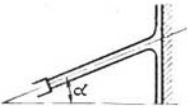
Determinar la velocidad común v de la plataforma con el carro después de frenar el último, si la masa de la plataforma es M y la del carro es m.

Respuesta: $v=v_0+\frac{m}{M+m}u_0$.

36.12. Conservando los datos del problema anterior, determinar el camino s que recorrerá el carro B sobre la plataforma A, a partir del comienzo del frenado hasta la parada completa, y el tiempo de frenado τ, si se considera que durante el frenado surge la fuerza de resistencia F de magnitud constante.

Indicación. En la ecuación diferencial del movimiento del carro emplear la relación $Mv+m(u+v)=\text{const}$, donde u y v son velocidades variables.

Respuesta: $s=\frac{1}{2}\frac{mM}{M+m}\cdot\frac{u_0^2}{F}$, $\tau=\frac{mM}{m+M}\cdot\frac{u_0}{F}$.



Para el problema 36.13.

36.13. De la punta de una manguera para incendios, cuya sección transversal es igual a 16 cm², brota un chorro de agua con la velocidad de 8 m/s bajo un ángulo $\alpha=30°$ respecto del horizonte.

Calcular la presión que ejerce el chorro sobre un muro vertical, despreciando el efecto de la fuerza de gravedad en la forma del chorro y suponiendo que las partículas de líquido, después de chocar contra el muro, adquieren velocidades dirigidas a lo largo del muro.

Respuesta: 9,05 kgf

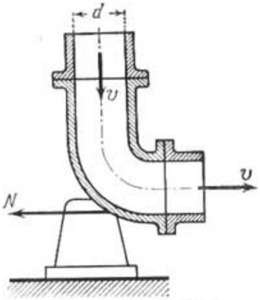
36.14. Determinar la componente horizontal N de la presión que ejerce el agua sobre el soporte del codo de un tubo de diámetro $d=300$ mm, por el cual circula el agua con la velocidad $v=2$ m/s.

Respuesta: $N=28,9$ kgf.

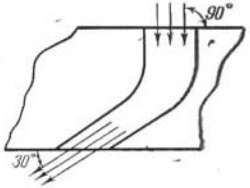
36.15. El agua entra en un canal fijo de sección variable, simétrico respecto del plano vertical, con la velocidad $v_0=2$ m/s bajo un ángulo $\alpha_0=90°$ respecto del horizonte; el área de la sección en la entrada del canal es 0,02 m²; la velocidad del agua a la salida del canal es $v_1=4$ m/s y está dirigida bajo un ángulo $\alpha_1=30°$ respecto del horizonte.

Determinar el módulo de la componente horizontal de la reacción del agua sobre las paredes del canal.

Respuesta: 14,1 kgf.



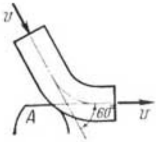
Para el problema 36.14.



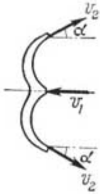
Para el problema 36.15.

36.16. Determinar la presión sobre el soporte A del codo de un tubo de 20 cm de diámetro, que aparece durante el movimiento del agua. El eje del tubo está situado en el plano horizontal (en el dibujo se muestra la vista de arriba). El agua circula dentro del tubo con la velocidad de 4 m/s, la velocidad del agua a la entrada del tubo forma con la velocidad del agua a la salida del tubo un ángulo de 60°.

Respuesta: 51,2 kgf.



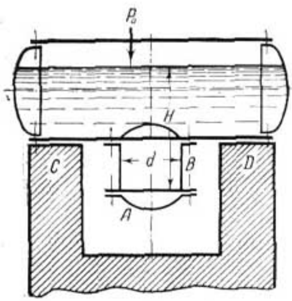
Para el problema 36.16.



Para el problema 36.17.

36.17. Calcular el módulo de la componente horizontal de la presión del chorro de agua sobre la paleta fija de la rueda de turbina, si el consumo volumétrico de agua es Q, su peso específico es γ, la velocidad v_1 de suministro de agua a la paleta es horizontal, la velocidad de salida del agua es v_2 y forma un ángulo α con el horizonte.

Respuesta: $N = \frac{\gamma}{g} Q (v_1 + v_2 \cos \alpha)$.



Para el problema 36.18.

36.18. Una caldera de vapor de 10,35 tf de peso contiene 15 tf de agua; el manómetro indica la presión $p_0 = 10$ atm sobre su superficie libre. En un instante determinado los pernos, con los cuales la tapa A está fijada en la tubuladura B mediante un acoplamiento de bridas, se rompen; a consecuencia de la caída de la tapa A el agua caliente comienza a salir a la atmósfera; $H = 1$ m, $d = 0,4$ m, el peso específico relativo del agua caliente es $\gamma = 0,9$.

Calcular la presión de la caldera sobre los soportes en el instante cuando la tapa A se cae. Despreciar las resistencias hidráulicas, las velocidades de las partículas de agua dentro de la caldera y el fenómeno de evaporación del agua a la salida de la tubuladura B. Calcular la velocidad media de salida del agua a la atmósfera después de la caída de la tapa, valiéndose de la fórmula

$$v = \sqrt{2g\left(H + \frac{p_0}{\gamma}\right)}.$$

Respuesta: La presión sobre los soportes es igual a cero.

§ 37. TEOREMA DE VARIACIÓN DEL MOMENTO CINÉTICO PRINCIPAL DE UN SISTEMA MATERIAL. ECUACIÓN DIFERENCIAL DE ROTACIÓN DEL CUERPO SÓLIDO ALREDEDOR DE UN EJE FIJO

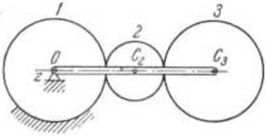
37.1. Un disco circular homogéneo de peso $p = 50$ kgf y de radio $R = 30$ cm rueda sin deslizamiento sobre un plano horizontal, haciendo 60 r. p. m. alrededor de su eje.

Calcular el momento cinético principal del disco: 1) respecto del eje que pasa por el centro del disco perpendicularmente al plano del movimiento; 2) respecto del eje instantáneo.

Respuesta: 1) 1,44 kgf m s; 2) 4,32 kgf m s.

37.2. Calcular el momento cinético principal de la regla AB de un elipsógrafo en su movimiento absoluto respecto del eje z que coincide con el eje de rotación de la manivela OC, así como en su movimiento relativo respecto del eje que pasa por el centro de gravedad C de la regla paralelamente al eje z. La manivela gira con una velocidad angular, cuya proyección sobre el eje z es igual a ω_z; la masa de la regla es igual a m; $OC = AC = BC = l$ (véase el dibujo para el problema 34.5).

Respuesta: $L_{Oz} = \frac{2}{3} ml^2\omega_z$; $L_{Cz} = -\frac{ml^2}{3}\omega_z$.



Para el problema 37.3;

37.3. Calcular el momento cinético principal de una transmisión planetaria respecto del eje fijo z que coincide con el eje de rotación de la manivela OC_3. El piñón fijo *1* y el piñón móvil *3* tienen un mismo radio r. La masa del piñón *3* es igual a m, el piñón *2* de masa m_2 es de radio r_2. La manivela gira con una velocidad angular, cuya proyección sobre el eje z es igual a ω_z. La masa de la manivela se desprecia. Considerar los piñones como discos homogéneos.

Respuesta: $L_{Oz} = \frac{m_2(2r+3r_2)+8m(r+r_2)}{2}(r+r_2)\omega_z$.

37.4. La tensión de los ramales conductor y conducido de una correa que hace girar una polea de radio $r = 20$ cm y de peso $P = 3{,}27$ kgf son respectivamente iguales a $T_1 = 10{,}1$ kgf, $T_2 = 5{,}05$ kgf. ¿Cuál debe ser el momento de las fuerzas de resistencia para que la polea gire con una aceleración angular $\varepsilon = 1{,}5\,s^{-2}$? Considerar la polea como un disco homogéneo.

Respuesta: 1 kgf m.

37.5. Para determinar el momento de rozamiento en las muñones, sobre el árbol va encajado un volante de 0,5 tf; el radio de nercia del volante es $\rho = 1{,}5$ m. Al volante se le ha comunicado una velocidad angular correspondiente a $n = 240$ r. p. m., y abandonado a su propia suerte se ha parado dentro de 10 min.

Determinar el momento de rozamiento considerándolo constante.

Respuesta: 4,8 kgf m.

37.6. Un disco circular homogéneo de 10 cm de diámetro y de 1 N de peso hace 100 r.p.m. Al aplicar una fuerza de rozamiento constante a la llanta del disco, puede pararlo en 1 minuto.

Determinar la magnitud de la fuerza de rozamiento.

Respuesta: $4{,}4\cdot10^{-4}$ N.

37.7. Para frenar rápidamente los volantes grandes, se emplea un freno eléctrico compuesto de dos polos, dispuestos diametralmente, con un devanado que se alimenta de corriente continua. Las corrientes inducidas en la masa del volante durante su movimiento cerca de los polos crean un momento de frenado M_1, proporcional a la velocidad v, en la llanta del volante: $M_1 = kv$, donde k es un coeficiente que depende del flujo magnético y de las dimensiones del volante. El momento M_2 debido al rozamiento en los cojinetes puede ser considerado constante; el diámetro del volante es D, su momento de inercia respecto del eje de rotación es J.

Calcular dentro de qué tiempo el volante que gira con la velocidad angular ω_0 se parará.

Respuesta: $T = \frac{2J}{kD} \ln\left(1 + \frac{kD\omega_0}{2M_2}\right)$.

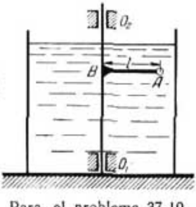
37.8. Un cuerpo sólido, que se encuentra en reposo, se pone en rotación alrededor de un eje vertical fijo por un momento constante igual a M; en este caso surge el momento de las fuerzas de resistencia M_1 proporcional al cuadrado de la velocidad angular de rotación del cuerpo sólido: $M_1 = \alpha\omega^2$.

Hallar la ley de variación de la velocidad angular; el momento de inercia del cuerpo sólido respecto del eje de rotación es igual a J.

Respuesta: $\omega = \sqrt{\frac{M}{\alpha}\,\frac{e^{\beta t}-1}{e^{\beta t}+1}}$, donde $\beta = \frac{2}{J}\sqrt{\alpha M}$.

37.9. Resolver el problema anterior suponiendo que el momento de las fuerzas de resistencia M_1 es proporcional a la velocidad angular de rotación del cuerpo sólido: $M_1 = \alpha\omega$.

Respuesta: $\omega = \frac{M}{\alpha}\left(1 - e^{-\frac{t\alpha}{J}}\right)$.



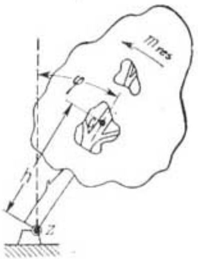
Para el problema 37.10.

37.10. Una bola A, situada en un recipiente lleno de liquido y fijada en el extremo de una barra AB de longitud l, se pone en rotación alrededor del eje vertical O_1O_2 con una velocidad angular inicial ω_0. La fuerza de resistencia del líquido es proporcional a la velocidad angular de rotación: $R = \alpha m\omega$, donde m es la masa de la bola y α es el coeficiente de proporcionalidad.

Determinar el intervalo de tiempo durante el cual la velocidad angular de rotación será dos veces menor que la velocidad angular inicial, así como el número de revoluciones hecho por la barra con la bola durante este intervalo de tiempo. Considerar la masa de la bola concentrada en su centro; la masa de la barra se desprecia.

Respuesta: $T=\frac{1}{\alpha}\ln 2$; $n=\frac{I\omega_0}{4\pi\alpha}$ revoluciones.

37.11. Calcular la velocidad angular ω, con la cual un árbol aserrado de peso G caerá sobre el suelo, si se sabe que su centro de gravedad C está situado a la distancia h de su base, las fuerzas de resistencia del aire crean un momento de resistencia m_c, $m_{cz}=-\alpha\dot{\varphi}^2$, donde $\alpha=\text{const}$. El momento de inercia del árbol respecto del eje z, que coincide con el eje de rotación del árbol durante su caída, es igual a J.



Para el problema 37.11.

Respuesta:

$$\omega=\sqrt{\frac{2GhJ}{J^2+4\alpha^2}\left(e^{-\frac{\alpha\pi}{J}}+2\frac{\alpha}{J}\right)}.$$

37.12. Un árbol de radio r se pone en rotación alrededor del eje horizontal por una pesa colgada de un cable. Para que la magnitud de la velocidad angular del árbol alcance un valor casi constante, pasado un tiempo determinado después del comienzo del movimiento, con el árbol van unidas n placas idénticas; la resistencia del aire que soporta una placa se reduce a una fuerza, normal a la placa, aplicada a la distancia R del eje del árbol y que es proporcional al cuadrado de su velocidad angular, siendo el coeficiente de proporcionalidad igual a k. La masa de la pesa es m, el momento de inercia de todas las partes giratorias respecto del eje de rotación es igual a J; la masa del cable y el rozamiento en los apoyos se desprecian.

Calcular la velocidad angular ω del árbol suponiendo que en el instante inicial ésta es igual a cero.

Respuesta: $\omega=\sqrt{\frac{mgr}{knR}}\,\frac{e^{\alpha t}-1}{e^{\alpha t}+1}$, donde

$$\alpha=\frac{2}{J+mr^2}\sqrt{mgnkrR};$$

para los valores bastante grandes de t la velocidad angular ω es próxima a la magnitud constante $\sqrt{\frac{mgr}{knR}}$.

37.13. Determinar la ley de rotación del árbol examinado en el problema anterior, suponiendo que, en ausencia de la pesa, la velocidad angular inicial del árbol es igual a ω_0. Considerar que el ángulo de rotación inicial es igual a cero.

Respuesta: $\varphi=\frac{J}{nkR}\ln\left(1+\frac{nkR\omega_0}{J}t\right)$.

37.14. Determinar la ley de rotación del árbol examinado en el problema 37.12, considerando que la fuerza de resistencia al movimiento es proporcional a la velocidad angular del árbol. El ángulo de rotación inicial se considera igual a cero.

Respuesta: $\varphi = \sigma\left[t + \frac{1}{\gamma}(e^{-\gamma t} - 1)\right]$, donde

$$\sigma = \frac{mgr}{nkR}, \quad \gamma = \frac{nkR}{J + mr^2}.$$

37.15. Un hilo elástico, del que pende una bola homogénea de radio r y de masa m, tuerce a un ángulo φ_0 y luego se le deja destorcerse libremente. El momento necesario para torcer el hilo un radián es igual a c.

Determinar el movimiento despreciando la resistencia del aire y suponiendo que el momento de la fuerza de elasticidad del hilo torcido es proporcional a ángulo de torsión φ.

Respuesta: $\varphi = \varphi_0 \cos\sqrt{\frac{5c}{2mr^2}}\,t$.

37.16. El balancín A de un reloj puede girar alrededor del eje perpendicular a su plano, que pasa por el centro de gravedad O; su momento de inercia respecto a este eje es J. El balancín se pone en movimiento por un resorte espiral, un extremo del cual está fijado en el balancín, y el otro, en el cuerpo fijo del reloj. La rotación del balancín engendra un momento de las fuerzas de elasticidad del resorte, proporcional al ángulo de rotación. El momento necesario para torcer el resorte un radián es igual a c.

Para el problema 37.16.

Determinar la ley del movimiento del balancín, si en el instante inicial, en las condiciones de ausencia de fuerzas de elasticidad, al balancín se le ha comunicado una velocidad angular inicial ω_0.

Respuesta: $\varphi = \omega_0\sqrt{\frac{J}{c}}\,\mathrm{sen}\,\sqrt{\frac{c}{J}}\,t$.

37.17. Para determinar el momento de inercia J_z de un cuerpo A respecto del eje vertical Oz, lo han fijado en una barra vertical elástico OO_1, y esta barra se ha torcido girando el cuerpo A alrededor del eje Oz un ángulo pequeño φ_0; luego lo han dejado oscilarse; la duración de 100 oscilaciones resultó igual a $100\,T_1 = 2$ minutos, donde T_1 es un semiperiodo; el momento de las fuerzas de elasticidad respecto del eje Oz es igual a $m_z = -c\varphi$. Para determinar el coeficiente c se hizo un segundo experimento: en el punto O de la barra se insertó un disco circular homogéneo de radio $r = 15$ cm, de peso $P=1{,}6$ kgf; la duración de una oscilación resulto igual a $T_2=1{,}5$ s.

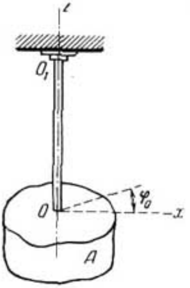
Determinar el momento de inercia J_z del cuerpo.

Respuesta: $J_z=\frac{Pr^2}{2g}\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2=0{,}117$ kgf m s^2.

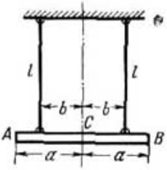
37.18. Resolver el problema anterior, suponiendo que para determinar el coeficiente c el segundo experimento se hace de otro modo: el disco circular homogéneo de peso P y de radio r se fija en el cuerpo, cuyo momento de inercia hace falta determinar.

Hallar el momento de inercia J_z del cuerpo, si el período de oscilaciones del cuerpo es τ_1 y el período de oscilaciones del cuerpo con el disco fijado en éste es τ_2.

Respuesta: $J_z=\frac{Pr^2}{2g}\frac{\tau_1^2}{\tau_2^2-\tau_1^2}$.



Para el problema 37.17.



Para el problema 37.19.

37.19. Una suspensión bifilar está compuesta de una barra homogénea AB de longitud $2a$, suspendida horizontalmente por medio de dos hilos verticales de longitud l; distancia entre los hilos es igual a $2b$.

Determinar el período de oscilaciones torsionales de la barra, suponiendo que la barra durante todo el tiempo, permanece en la posición horizontal y que la tensión de cada uno de los hilos es igual a la mitad del peso de la barra.

Indicación. Al determinar la componente horizontal de la tensión de cada uno de los hilos, suponiendo que las oscilaciones del sistema son pequeñas, hace falta sustituir el seno del ángulo entre la dirección del hilo y la vertical por el propio ángulo.

Respuesta: $T=\frac{2\pi a}{b}\sqrt{\frac{l}{3g}}$.

37.20. Un disco suspendido de un hilo elástico, efectúa vibraciones torsionales en un líquido. El momento de inercia del disco respecto del eje del hilo es igual a J. El momento necesario para torcer el hilo un radián es igual a c. El momento de resistencia al movimiento es igual a $\alpha S \omega$, donde α es el coeficiente de viscosidad del líquido, S es la suma de las áreas de las caras superior e inferior del disco, ω es la velocidad angular del disco.

Calcular el período de vibraciones del disco en el líquido.

Respuesta: $T = \frac{4\pi J}{\sqrt{4cJ - \alpha^2 S^2}}$.

37.21 Determinar la ley de decrecimiento de las amplitudes de oscilaciones del disco examinado en el problema anterior.

Respuesta: Las amplitudes de oscilaciones del disco decrecen según la progresión geométrica de denominador $e^{-\frac{\alpha\pi S}{\sqrt{4cJ - \alpha^2 S^2}}}$.

37.22. Un cuerpo sólido, suspendido de un hilo elástico, efectúa vibraciones torsionales bajo la acción del momento exterior m_B; $m_{Bz} = m_1 \operatorname{sen} \omega t + m_3 \operatorname{sen} 3\omega t$, donde m_1, m_3 y ω son constantes, z es el eje dirigido a lo largo del hilo. El momento de elasticidad del hilo es igual a m_{el}; $m_{el\,z} = -c\varphi$, donde c es el coeficiente de elasticidad y φ es el ángulo de torsión.

Determinar la ley de las vibraciones torsionales forzadas del cuerpo sólido, si su momento de inercia respecto del eje z es igual a J_z. Las fuerzas de resistencia al movimiento se desprecian. Considerar que $\sqrt{\frac{c}{J_z}} \neq \omega$ y $\sqrt{\frac{c}{J_z}} \neq 3\omega$.

Respuesta: $\varphi = \frac{h_1}{k^2 - \omega^2} \operatorname{sen} \omega t + \frac{h^3}{k^2 - 9\omega^2} \operatorname{sen} 3\omega t$, donde $k^2 = \frac{c}{J_z}$;

$$h_1 = \frac{m_1}{J_z}, \quad h_3 = \frac{m_3}{J_z}.$$

37.23. Resolver el problema anterior, teniendo en cuenta el momento de resistencia m_c proporcional a la velocidad angular del cuerpo sólido; en este caso $m_{cz} = -\beta\dot{\varphi}$, donde β es un coeficiente constante.

Respuesta: $\varphi = A_1 \operatorname{sen} (\omega t - \varepsilon_1) + A_3 \operatorname{sen} (3\omega t - \varepsilon_3)$, donde

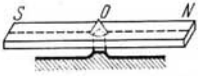
$$A_1 = \frac{h_1}{\sqrt{(k^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}}, \qquad A_3 = \frac{h_3}{\sqrt{(k^2 - 9\omega^2)^2 + 36n^2\omega^2}},$$

$$\varepsilon_1 = \operatorname{arctg} \frac{2n\omega}{k^2 - \omega^2}, \quad \varepsilon_3 = \operatorname{arctg} \frac{6n\omega}{k^2 - 9\omega^2}, \quad n = \frac{\beta}{2J_z}.$$

37.24. Para determinar el coeficiente de viscosidad de un líquido, se observan las oscilaciones de un disco suspendido de un hilo elástico en el líquido. Al disco se le aplica un momento exterior igual a M_0 sen pt (M_0 = const) para el cual se observa el fenómeno de resonancia. El momento de resistencia al movimiento del disco en el líquido es igual a $\alpha S\omega$, donde α es el coeficiente de viscosidad del líquido, S es la suma de las áreas de las caras superior e inferior del disco, ω es la velocidad angular del disco.

Determinar el coeficiente α de viscosidad del líquido, si la amplitud de oscilaciones forzadas del disco durante la resonancia es igual a φ_0.

Respuesta: $\alpha = \frac{M_0}{\varphi_0 S p}$.



Para el problema 37.25.

37.25. Un imán prismático de m gramos de masa, de longitud $2a$ y de ancho $2b$ centímetros, cuyos polos están en sus extremidades, puede girar alrededor del eje vertical que pasa por su centro de gravedad en el campo magnético terrestre. Una vez desviado el imán de su posición de equilibrio SN un ángulo sumamente pequeño, se abandona a su propia suerte.

Determinar el movimiento del imán, si se sabe que la componente horizontal del campo magnético terrestre actúa sobre una unidad de magnetismo con una fuerza de H dyn; el momento magnético del imán, es decir, el producto de la cantidad de magnetismo, concentrado en los polos, por la distancia $2a$ entre los polos es igual a A unidades en el sistema CGS.

Respuesta: Oscilaciones harmónicas de período

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m(a^2+b^2)}{3AH}}.$$

37.26. La rotación de un proyectil alrededor de su eje de simetría se decelera durante su vuelo bajo la acción de la fuerza de resistencia del aire igual a $k\omega$, donde ω es la velocidad angular de rotación del proyectil, k es un coeficiente de proporcionalidad constante.

Determinar la ley de decrecimiento de la velocidad angular, si la velocidad angular inicial es igual a ω_0 y el momento de inercia del proyectil respecto de su eje de simetría es igual a J.

Respuesta: $\omega = \omega_0 e^{-\frac{k}{J}t}$.

37.27. Para determinar la aceleración de la fuerza de gravedad se utiliza un péndulo invertido que representa en sí una barra dotada de dos cuchillos triédricos A y B. Uno de los cuchillos es fijo,

Para el problema 37.27.

el otro puede desplazarse a lo largo de la barra. Colgando la barra ora en un cuchillo, ora en el otro y cambiando la distancia AB entre ellos, se puede lograr la igualdad de los períodos de oscilaciones del péndulo alrededor de cada uno de los cuchillos.

Calcular la aceleración de la fuerza de gravedad, si la distancia entre los cuchillos, para la cual los períodos de oscilaciones son iguales, es $AB = l$ y el período de oscilaciones es igual a T.

Respuesta: $g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}$.

37.28. Dos cuerpos sólidos pueden oscilar alrededor de un mismo eje horizontal tanto por separado, como ligados juntamente.

Calcular la longitud reducida del péndulo compuesto, si los pesos de los cuerpos sólidos son p_1 y p_2, las distancias de sus centros de gravedad al eje de rotación común son a_1 y a_2, y las longitudes reducidas en el caso cuando ellos oscilan separadamente son l_1 y l_2.

Respuesta: $l_{\text{red}} = \frac{p_1 a_1 l_1 + p_2 a_2 l_2}{p_1 a_1 + p_2 a_2}$.

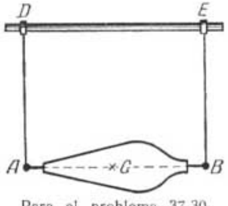
37.29. Para regular la marcha de un reloj, en el péndulo de peso P, de longitud reducida l y de distancia a de su centro de gravedad al eje de suspensión, se fija una carga suplementaria p a la distancia x del eje de suspensión.

Considerando la carga suplementaria como un punto material, calcular la variación Δl de la longitud reducida del péndulo para los valores dados de p y x y el valor de $x = x_1$ para el cual la variación dada Δl de la longitud reducida del péndulo se obtiene con ayuda de una carga suplementaria de masa mínima.

Respuesta: La longitud reducida del péndulo debe ser disminuida en

$$\Delta l_{\text{red}} = \frac{px(x-l)}{Pa+px}; \quad x_1 = \frac{1}{2}(l + \Delta l).$$

37.30. Para determinar el momento de inercia J de un cuerpo dado respecto del eje AB que pasa por el centro de gravedad G del cuerpo, éste se ha colgado por medio de las barras AD y BE, unidas rígidamente con el cuerpo y montadas libremente sobre un eje horizontal fijo DE de tal modo que el eje AB sea paralelo a DE; haciendo luego oscilar el cuerpo se determinó el período T de una oscilación.



Para el problema 37.30.

Calcular el momento de inercia J, si el peso del cuerpo es p y la distancia entre los ejes AB y DE es h. Las masas de las barras se desprecian.

Respuesta: $J = hp\left(\frac{T^2}{\pi^2} - \frac{h}{g}\right)$.

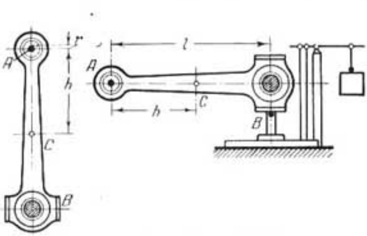
37.31. Resolver el problema anterior, teniendo en cuenta las masas de las barras delgadas rectilíneas homogéneas AD y BE, si el peso de cada una de ellas es igual a Q

Respuesta: $J = h\left[\frac{(P+Q)T^2}{\pi^2} - \frac{3P+2Q}{3g}h\right]$.

37.32. Para determinar el momento de inercia de una biela, se le hace oscilar alrededor de un eje horizontal, introduciendo un vástago delgado cilíndrico en el manguito del pivote de la cruceta de cabeza. La duración de cien semiciclos es $100\,T = 100$ s, donde T es un semiperíodo. Luego, para determinar la distancia $AC = h$ del centro de gravedad C al centro A del orificio, la biela se ha colocado en posición horizontal, suspendiéndola en el punto A de unos aparejos y apoyando el punto B sobre el platillo de una balanza decimal; la presión sobre el platillo resultó igual a $P = 50$ kgf.

Determinar el momento de inercia central J de la biela respecto del eje perpendicular al plano del dibujo, teniendo los datos siguientes: el peso de la biela es $Q = 80$ kgf, la distancia entre las verticales trazadas por los puntos A y B (véase el dibujo derecho) es $l = 1$ m, el radio del pivote de la cruceta es $r = 4$ cm.

Respuesta: $J = \frac{Pl + Qr}{g}\left(\frac{g}{\pi^2}T^2 - \frac{P}{Q}l - r\right) = 1{,}77$ kgf m s^2.



Para el problema 37.32.

Para el problema 37.33.

37.33. Un péndulo se compone de una barra AB con una bola, fijada en ésta, de masa m y de radio r, cuyo centro C se encuentra sobre la prolongación de la barra.

Despreciando la masa de la barra, determinar en qué punto de la barra hace falta situar el eje de suspensión para que la duración de un semiciclo de oscilación, para oscilaciones pequeñas, sea igual a la magnitud dada T.

Respuesta: $OC=\frac{1}{2\pi^2}(gT^2+\sqrt{g^2T^4-1{,}6\pi^4r^2})$.

Dado que debe ser $OC\geqslant r$, entonces, la solución es posible si $T^2\geqslant 1{,}4\,\frac{\pi^2}{g}\,r$. La solución correspondiente al signo menos delante del radical es imposible.

37.34. ¿A qué distancia del centro de gravedad hace falta suspender un péndulo físico para que el período de sus oscilaciones sea mínimo?

Respuesta: A una distancia igual al radio de inercia del péndulo respecto del eje que pasa por su centro de gravedad perpendicularmente al plano de oscilaciones.

37.35. Un péndulo está compuesto de una barra con dos cargas fijadas sobre ésta; la distancia entre las cargas es igual a l; la carga superior es de masa m_1, la inferior es de masa m_2.

Determinar a qué distancia x de la carga inferior hay que situar el eje de suspensión para que el período de oscilaciones pequeñas del péndulo sea mínimo; despreciar la masa de la barra y considerar las cargas como puntos materiales.

Respuesta: $x=l\sqrt{m_1}\,\frac{\sqrt{m_1}+\sqrt{m_2}}{m_1+m_2}$.

37.36. ¿A qué distancia del eje de suspensión hace falta fijar una carga suplementaria en un péndulo físico para que el período de oscilaciones del péndulo permanezca invariable?

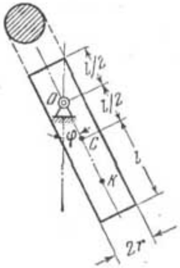
Respuesta: A una distancia igual a la longitud reducida del péndulo físico.

37.37. Un cilindro circular de masa M, de longitud $2l$ y de radio $r=l/6$, oscila alrededor del eje O perpendicular al plano del dibujo.

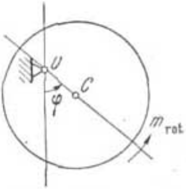
¿Cómo variará el período de oscilaciones del cilindro, si se fija en éste una masa puntiforme m a la distancia $OK=\frac{85}{72}\,l$?

Respuesta: El período de oscilaciones no variará, puesto que la masa puntiforme está fijada en el centro de oscilaciones del cilindro.

37.38. Hallar la ecuación de oscilaciones pequeñas de un disco homogéneo de peso P y de radio r que efectúa oscilaciones alrededor del eje horizontal Oz perpendicular a su plano y que se encuentra a la distancia $OC=r/2$ de su centro de gravedad C. El disco está sometido a la acción de un momento de rotación



Para el problema 37.37.



Para el problema 37.38.

m_{rot}; $m_{rot\,z} = m_0$ sen pt, donde m_0 y p son constantes. En el instante inicial, al disco, que se encontraba en su posición inferior, se le comunicó una velocidad angular ω_0. Las fuerzas de resistencia se desprecian. Considerar que las oscilaciones son pequeñas y que sen $\varphi \approx \varphi$.

Respuesta: 1) Cuando $p \neq \sqrt{\frac{2g}{3r}}$ $\varphi = \frac{1}{k}\left(\omega_0 - \frac{hp}{k^2 - p^2}\right)\cos kt +$

$$+ \frac{h}{k^2 - p^2}\,\text{sen}\,pt,$$

$$\text{donde } k = \sqrt{\frac{2g}{3r}}, \quad h = \frac{4gm_0}{3Pr^2};$$

2) cuando $p = \sqrt{\frac{2g}{3r}}$ $\varphi = \frac{1}{p}\left(\omega_0 + \frac{h}{2p}\right)$ sen pt —

$$-\frac{h}{2p}\,t\cos pt, \quad \text{donde } h = \frac{4gm_0}{3Pr^2}.$$

37.39. En los sismógrafos, instrumentos para registrar los terremotos, se utiliza un péndulo físico, cuyo eje de suspensión forma un ángulo α con la vertical. La distancia entre el eje de suspensión y el centro de gravedad del péndulo es igual a a, el momento de inercia del péndulo respecto del eje, que pasa por su centro de gravedad paralelamente al eje de suspensión, es igual a J_C, el peso del péndulo es igual a P.

Determinar el período de oscilaciones del péndulo.

Respuesta: $T = 2\pi\sqrt{\frac{gJ_C + Pa^2}{Pga\,\text{sen}\,\alpha}}$.

37.40. En el vibrógrafo para registrar las oscilaciones horizontales de los cimientos de las máquinas, el péndulo OA compuesto de una palanca con una carga en el extremo, puede oscilar alrededor de su eje horizontal O, manteniéndose en la posición vertical de equilibrio estable por su peso propio y un resorte espiral.

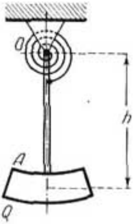
Calcular el período de oscilaciones propias del péndulo, para pequeños ángulos de desviación, si el momento estático máximo del peso del péndulo respecto de su eje de rotación es $Qh = 4{,}5$ kgf cm, el momento de inercia respecto de este mismo eje es $J = 0{,}03$ kgf cm s^2, el coeficiente de rigidez del resorte, cuya resistencia es proporcional al ángulo de torsión, es $c = 0{,}1$ kgf/cm; en la posición de equilibrio del péndulo el resorte está en estado no deformado. Las resistencias se desprecian.

Respuesta: $T = 0{,}5$ s.

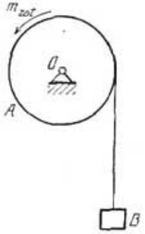
37.41. El vibrógrafo (véase el problema anterior) está fijado en el cimiento que efectúa oscilaciones harmónicas horizontales de acuerdo con la ley $x = a$ sen $60t$ cm.

Determinar la amplitud a de oscilaciones del cimiento, si la amplitud de oscilaciones forzadas del péndulo del vibrógrafo es igual a 6°.

Respuesta: $a = 6{,}5$ mm.



Para el problema 37.40.



Para el problema 37.42.

37.42. Durante la puesta en marcha de una cabria eléctrica, el tambor A está sometido a la acción de un momento de rotación m_{rot} proporcional al tiempo; $m_{rot} = at$, donde a es una constante. La carga B de peso P_1 se eleva con ayuda de un cable enrollado sobre el tambor A de radio r y de peso P_2.

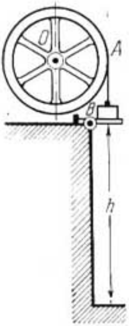
Determinar la velocidad angular del tambor considerándolo como un cilindro continuo. En el estado inicial la cabria estaba en reposo.

Respuesta: $\omega = \dfrac{(at - 2P_1 r) gt}{r^2 (2P_1 + P_2)}$.

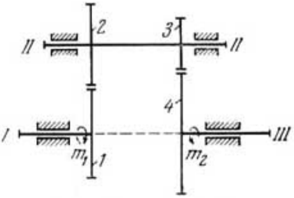
37.43. Para determinar el momento de inercia J del volante A de radio $R = 50$ cm respecto del eje que pasa por el centro de gravedad, se ha enrollado sobre el volante un hilo fino con la pesa B de peso $P_1=8$ kgf en su extremo, y se ha observado la duración $T=16$ s del descenso de la pesa desde una altura $h=2m$. Para eliminar el rozamiento en los cojinetes se ha realizado un segundo experimento con una pesa de peso $p_2=4$ kgf, la duración del descenso resultó igual a $T_2=25$ s para la misma altura.

Suponiendo que el momento de la fuerza de rozamiento es constante y no depende del peso de la pesa, calcular el momento de inercia J.

Respuesta: $$J=R^2\frac{\frac{1}{2h}(p_1-p_2)-\frac{1}{g}\left(\frac{p_1}{T_1^2}-\frac{p_2}{T_2^2}\right)}{\frac{1}{T_1^2}-\frac{1}{T_2^2}}=108 \text{ kgf m/s}^2.$$



Para el problema 37.43.



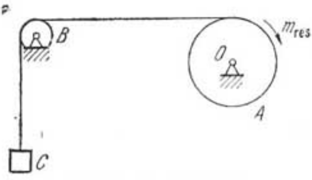
Para el problema 37.44.

37.44. Un motor eléctrico, cuyo momento de rotación es m_1, está acoplado al árbol I. Este momento de rotación se transmite, por medio de un reductor de velocidades compuesto de cuatro piñones $1, 2, 3, 4$, al husillo III de un torno, al cual está aplicado un momento de resistencia m_2 (este momento surge al quitar con la cuchilla las virutas de la pieza que se tornea).

Calcular la aceleración angular del husillo III, si los momentos de inercia de todas las piezas giratorias, montadas sobre los árboles I, II y III, son respectivamente iguales a J_I, J_{II}, J_{III}. Los radios de los piñones son iguales a r_1, r_2, r_3 y r_4.

Respuesta: $$\varepsilon_{III}=\frac{m_1k_{1,2}\cdot k_{3,4}-m_2}{(J_Ik_{1,2}^2+J_{II})k_{3,4}^2+J_{III}},$$

donde $k_{1,2}=\frac{r_2}{r_1}$, $k_{3,4}=\frac{r_4}{r_3}$.



Para el problema 37.45.

37.45. Un tambor A de peso P_1 y de radio r se pone en rotación por una carga C de peso P_2, atada al extremo de un cable inextensible. El cable pasa sobre una polea B y va enrollado sobre el tambor A. El tambor A está sometido a la acción de un momento de resistencia m_e proporcional a la velocidad angular del tambor; el coeficiente de proporcionalidad es igual a α.

Determinar la velocidad angular del tambor, si en el instante inicial el sistema estaba en reposo. Las masas del cable y la polea se desprecian. Considerar el tambor como un cilindro continuo homogéneo.

Respuesta: $\omega = \frac{P_2 r}{\alpha}(1 - e^{-\beta t})$, donde

$$\beta = \frac{2g\alpha}{r^2(P_1 + 2P_2)}; \quad \lim_{t \to \infty} \omega = \frac{P_2 r}{\alpha} = \text{const}.$$

37.46. Determinar la aceleración angular de la rueda motriz, de peso P y de radio r, de un automóvil, si a la rueda está aplicado un momento de rotación m_{rot}. El momento de inercia de la rueda respecto del eje que pasa por el centro de gravedad C, perpendicularmente al plano de simetría material, es igual a J_C; el coeficiente de rozamiento de oscilación es f_{osc}, la fuerza de rozamiento es F_{roz}. Hallar también el valor del momento de rotación, para el cual la rueda gira con una velocidad angular constante.

Respuesta: $\varepsilon = \frac{m_{rot} - Pf_{osc} - F_{roz}r}{I_C}$; $m_{rot} = Pf_{osc} + F_{roz}r$.

37.47. Determinar la velocidad angular de la rueda conducida, de peso P y de radio r, de un automóvil. La rueda, que se desplaza con deslizamiento sobre una carretera horizontal, se pone en movimiento mediante una fuerza dirigida horizontalmente y aplicada a su centro de gravedad C. El momento de inercia de la rueda respecto del eje C, perpendicular al plano de simetría material, es J_C; el coeficiente de rozamiento de oscilación es f_{osc}, el coeficiente de rozamiento en el caso de oscilación con deslizamiento es f. En el instante inicial la ueda estaba en reposo.

Respuesta: $\omega = \frac{P}{J_C}(fr - f_{osc})\,t$.

37.48. ¿Variará la velocidad angular de la rueda examinada en el problema anterior, si el módulo de la fuerza aplicada a su centro de gravedad C aumenta dos veces?

Respuesta: No variará.

37.49. Un cable pasa sobre una polea de masa despreciable Un hombre se ha asido al punto A del cable, al punto B se ha atado una carga del mismo peso que el hombre.

¿Qué pasará con la carga, si el hombre empieza a subir por el cable con una velocidad a respecto del cable?

Respuesta: La carga se elevará junto con el cable a una velo cidaa de $\frac{a}{2}$.

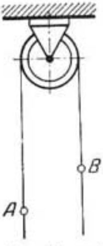
37.50. Resolver el problema anterior, teniendo en cuenta el peso de la polea que es cuatro veces menor que el peso del hombre. Considerar que la masa de la polea está repartida uniformemente por su llanta.

Respuesta: La carga se elevará con una velocidad de $\frac{4}{9}a$.

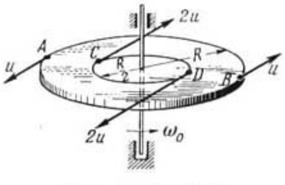
37.51. Una plataforma circular horizontal puede girar sin roza miento alrededor del eje vertical Oz que pasa por su centro O; un hombre de peso p marcha sobre la plataforma con una velocidad relativa constante u, a una distancia constante r del eje Oz.

¿Cuál será la velocidad angular de rotación ω de la plataforma alrededor de su eje, si su peso P se puede considerar uniformemente repartido sobre el área de un círculo de radio R, y en el instante inicial las velocidades de la plataforma y del hombre eran iguales a cero?

Respuesta: $\omega = \frac{2pr}{PR^2 + 2pr^2} u$.



Para el problema 37.49.



Para el problema 37.52.

37.52. Una plataforma circular horizontal gira sin rozamiento alrededor del eje vertical, que pasa por su centro de gravedad, con una velocidad angular constante ω_0; cuatro hombres de igual peso están sobre esta plataforma, dos se encuentran en el borde de la plataforma y dos a unas distancias del eje de rotación iguales a la mitad del radio de la plataforma.

¿Cómo variará la velocidad angular de la plataforma, si los hombres que se encuentran en el borde se desplazan por la circunferencia en el sentido de rotación con una velocidad relativa lineal u, y los hombres situados a la distancia del eje de rotación igual a la mitad del radio se desplazan por la circunferencia en el sentido contrario con una velocidad relativa lineal $2u$? Los hombres se consideran como masas puntiformes, y la plataforma como un disco circular homogéneo.

Respuesta: La plataforma girará con la misma velocidad angular.

37.53. Resolver el problema anterior, suponiendo que todos lo hombres se desplazan en el sentido de rotación de la plataforma. El radio de la plataforma es R, su masa es cuatro veces mayor que la masa de cada hombre y está uniformente repartida por toda su área. Calcular también el valor de la velocidad relativa lineal u para la cual la plataforma dejará de girar.

Respuesta: $\omega_1=\omega_0-\frac{8}{9}\frac{u}{R}$; $u=\frac{9}{8}R\omega_0$.

37.54. A un hombre, situado sobre el banco de Zhukovski, en el momento en que extiende los brazos se le comunica una velocidad angular inicial correspondiente a 15 r.p.m.; el momento de inercia del hombre y el banco respecto del eje de rotación es igual a 0,8 kgf m s^2.

¿Con qué velocidad angular empezará a girar el banco con el hombre, si éste al acercar los brazos al cuerpo disminuye el momento de inercia del sistema hasta 0,12 kgf m s^2?

Respuesta: 100 r.p.m.

37.55. Dos cuerpos sólidos giran independientemente uno del otro alrededor de un mismo eje fijo con las velocidades angulares constantes ω_1 y ω_2. Los momentos de inercia de estos cuerpos respecto a este eje son respectivamente iguales a J_1 y J_2.

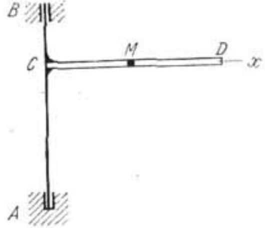
¿Con qué velocidad angular empezarán a girar ambos cuerpos, si se unen durante la rotación?

Respuesta: $\omega=\frac{J_1\omega_1+J_2\omega_2}{J_1+J_2}$.

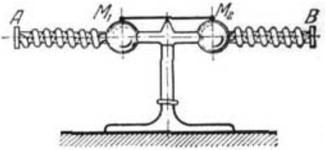
37.56. Un tubo horinzontal CD puede girar libremente alrededor del eje vertical AB. En el interior del tubo, a una distancia $MC=a$ del eje, se encuentra una bola M. En un instante determinado se comunica al tubo una velocidad angular inicial ω_0.

Calcular la velocidad angular ω del tubo en el instante cuando la bola abandona el tubo. El momento de inercia del tubo respecto del eje de rotación es igual a J, su longitud es L. El rozamiento se desprecia, y la bola se considera como un punto material de masa m.

Respuesta: $\omega = \frac{J + ma^2}{J + mL^2}\omega_0$.



Para el problema 37.56.

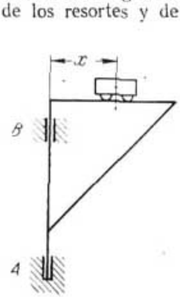


Para el problema 37.57.

37.57. Una barra homogénea AB de longitud $2L = 180$ cm y de peso $Q = 2N$ se ha colocado sobre una punta en la posición de equilibrio estable de tal modo que su eje es horizontal. Dos bolas M_1 y M_2 de peso cada una igual a $P = 5N$, fijadas en los extremos de dos resortes idénticos, pueden desplazarse a lo largo de esta barra. A la barra se le comunica movimiento de rotación alrededor del eje vertical con la velocidad angular correspondiente a $n_1 = 64$ r.p.m. Las bolas están dispuestas simétricamente respecto del eje de rotación y sus centros se mantienen por medio de un hilo a la distancia $2l_1 = 72$ cm uno del otro. Luego este hilo se quema y las bolas, después de efectuar cierto número de oscilaciones, ocupan sus posiciones de equilibrio a una distancia igual a $2l_2 = 108$ cm una de la otra bajo la acción de los resortes y de las fuerzas de rozamiento.

Considerando las bolas como puntos materiales y despreciando las masas de los resortes, calcular el número nuevo n_2 de revoluciones de la barra por minuto.

Respuesta: $n_2 = \frac{6Pl_1^2 + QL^2}{6Pl_2^2 + QL^2} n_1 = 34$ r.p.m.



Para el problema 37.58.

37.58. El carro de una grúa giratoria se desplaza con una velocidad constante v respecto al brazo. El motor que gira la grúa crea durante el arranque un momento constante igual a m_0.

Determinar la velocidad angular ω de giro de la grúa en función de la distancia x

del carro al eje de giro AB, si el peso del carro con la carga es igual a P; el momento de inercia de la grúa (sin carro) respecto del eje de giro es J; el giro comienza en el instante cuando la distancia del carro al eje AB es igual a x_0.

Respuesta: $\omega = \dfrac{m_0}{J + \dfrac{P}{g} x^2} \cdot \dfrac{x - x_0}{v}$.

37.59. Para los datos del problema anterior, determinar la velocidad angular ω de giro de la grúa, si el motor crea un momento de giro igual a $m_0 - \alpha\omega$, donde m_0 y α son constantes positivas.

Respuesta: $\omega = \dfrac{m_0}{v\left(J + \dfrac{P}{g} x^2\right)} e^{-\mu \operatorname{arctg} \frac{x}{k}} \displaystyle\int_{x_0}^{x} e^{\mu \operatorname{arctg} \frac{x}{k}} \, dx$,

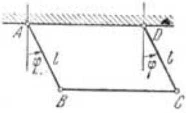
donde $k = \sqrt{\dfrac{gJ}{P}}$, $\mu = \dfrac{\alpha}{v_x} \sqrt{\dfrac{g}{JP}}$

(el eje x está dirigido horizontalmente a la derecha a lo largo del brazo).

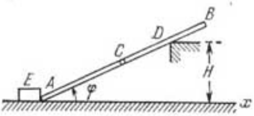
§ 38. TEOREMA DE VARIACIÓN DE LA ENERGÍA CINÉTICA DEL SISTEMA MATERIAL

38.1. Calcular la energía cinética de un mecanismo plano compuesto de tres barras AB, BC y CD fijadas por las articulaciones cilíndricas A y D en el techo y articuladas entre sí en B y C. El peso de cada una de las barras AB y CD, de longitud l, es igual a P_1, el peso de la barra BC, a P_2; $BC = AD$. Las barras AB y CD giran con una velocidad angular ω.

Respuesta: $T = \dfrac{2P_1 + 3P_2}{6g} l^2 \omega^2$.



Para el problema 38.1.



Para el problema 38.2.

38.2. Una barra delgada homogénea AB, cuyo peso es P, se apoya en el ángulo D, y su extremo A se desliza sobre una guía horizontal. El tope E se traslada a la derecha con una velocidad constante v.

Determinar la energía cinética de la barra en función del ángulo φ, si la longitud de la barra es igual a $2l$, y el ángulo D se encuentra a la altura H sobre la guía horizontal.

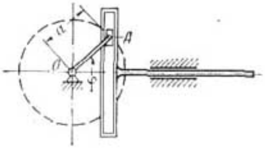
Respuesta: $T = \dfrac{Pv^2}{2g}\left(1 - 2\dfrac{l}{H} \operatorname{sen}^3\varphi + \dfrac{4}{3}\dfrac{l^2}{H^2} \operatorname{sen}^4\varphi\right)$.

38.3. Calcular la energía cinética de un mecanismo de corredera, si el momento de inercia de la manivela OA respecto al eje de rotación, perpendicular al plano del dibujo, es igual a J_0; el largo de la manivela es a, la masa de la corredera es m, la masa del taco A se desprecia. La manivela OA gira con una velocidad angular ω.

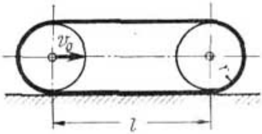
¿En cuáles posiciones del mecanismo la energía cinética alcanza sus valores *máximo y mínimo?*

Respuesta: $T = \frac{1}{2}(J_0 + ma^2 \operatorname{sen}^2\varphi)\,\omega^2.$

La energía cinética mínima se alcanza en las posiciones extremas *de la corredera, y la máxima, cuando la corredera pasa por su* posición media.



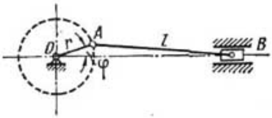
Para el problema 38.3.



Para el problema 38.4.

38.4. Calcular la energía cinética de la oruga de un tractor que se mueve con una velocidad v_0. La distancia entre los ejes de las ruedas es igual a l, los radios de las ruedas son iguales a r, el peso de un metro lineal de cadena de orugas es igual a γ.

Respuesta: $T = 2\frac{\gamma}{g}(l + \pi r)\,v_0^2.$



Para el problema 38.5.

38.5. Calcular la energía cinética de un mecanismo de biela y manivela, si la masa de la manivela es m_1, su longitud es r, la masa de la corredera es m_2, la longitud de la biela es l. La masa de la biela se desprecia. Considerar la manivela como una barra *homogénea. La velocidad angular de rotación de la manivela es* igual a ω.

Respuesta: $T=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{3}m_1+m_2\left[\operatorname{sen}\varphi+\right.\right.$

$$\left.\left.+\frac{r}{2l}\frac{\operatorname{sen}2\varphi}{\sqrt{1-\left(\frac{r}{l}\right)^2\operatorname{sen}^2\varphi}}\right]^2\right\}r^2\omega^2.$$

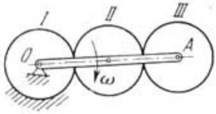
38.6. Resolver el problema anterior, tomando en consideración la masa de la biela m_2, en la posición cuando la manivela OA es perpendicular a la guía de la corredera.

Respuesta: $T=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}m_1+m_2+m_3\right)r^2\omega^2$.

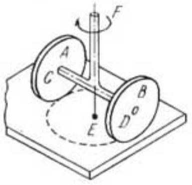
38.7. Un mecanismo planetario, situado en el plano horizontal, se pone en movimiento con la ayuda de una manivela OA que ensambla los ejes de tres ruedas idénticas I, II y III. La rueda I es fija; la manivela gira con una velocidad angular ω. El peso de cada rueda es igual a P, el radio es r, el peso de la manivela es Q.

Calcular la energía cinética del mecanismo considerando todas las ruedas como discos homogéneos, y la manivela como una barra homogénea. ¿Cuál será el trabajo de un par de fuerzas aplicadas a la rueda III?

Respuesta: $T=\frac{r^2\omega^2}{3g}(33P+8Q)$; el trabajo es igual a cero.



Para el problema 38.7.



Para el problema 38.8.

38.8. Las moletas de molino A y B van encajadas sobre un eje horizontal CD que gira alrededor de un eje vertical EF; cada moleta pesa 200 kgf; los diámetros de las moletas son idénticos, cada uno es de 1 m; la distancia CD entre ellas es igual a 1 m.

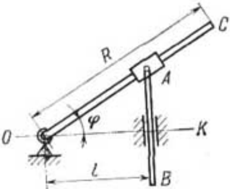
Hallar la energía cinética de las moletas, cuando el eje CD hace 20 r. p. m. Al calcular los momentos de inercia las moletas pueden considerarse como discos finos homogéneos.

Respuesta: 39 kgf.

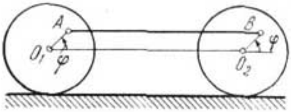
38.9. En un mecanismo de colisa, la corredera A se desplaza a lo largo de la palanca OC, cuando ésta oscila alrededor del eje O perpendicular al plano del dibujo, y hace mover la barra AB que se desplaza por las guías verticales K. Considerar la palanca OC de longitud R como una barra homogénea de masa m_1, la masa de la corredera es igual a m_2, la masa de la barra AB es igual a m_3, $OK = l$.

Expresar la energía cinética del mecanismo en función de la velocidad angular y del ángulo de giro de la palanca OC. Considerar la corredera como una masa puntiforme.

Respuesta: $T = \frac{\omega^2}{6\cos^4\varphi}[m_1R^2\cos^4\varphi + 3l^2(m_2+m_3)]$.



Para el problema 38.9.



Para el problema 38.10.

38.10. Calcular la energía cinética del sistema compuesto de dos ruedas ligadas por medio de la biela de acoplamiento de locomotora AB y la barra O_1O_2, si los ejes de las ruedas se desplazan con la velocidad v_0. El peso de cada rueda es igual a P_1. La biela de acoplamiento AB y la barra O_1O_2 pesan P_2 cada una. La masa de las ruedas está uniformemente repartida por sus llantas; $O_1A = O_2B = r/2$, donde r es el radio de la rueda. Las ruedas se desplazan *sin deslizamiento sobre un riel rectilíneo.*

Respuesta: $T = \frac{v_0^2}{8g}[16P_1 + P_2(9 + 4\,\mathrm{sen}\,\varphi)]$.

38.11. Un automóvil de peso P se desplaza rectilíneamente por un camino horizontal con la velocidad v. El coeficiente de rozamiento de rodadura entre las ruedas del automóvil y el camino es igual a f_{rod}, el radio de las ruedas es r, la fuerza de resistencia aerodinámica R_{res} del aire es proporcional al cuadrado de la velocidad: $R_{res} = \mu P v^2$, donde μ es un coeficiente que depende de la forma del automóvil.

Determinar la potencia N del motor, transmitida a los ejes de las ruedas motrices en el régimen permanente

Respuesta: $N = P\left(\frac{f_{rod}}{r} + \mu v^2\right)v$.

38.12. Un volante de diámetro igual a 50 cm, que hace 180 r.p.m., *va encajado sobre un árbol de 60 mm de diámetro.*

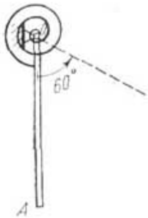
Determinar el coeficiente de rozamiento de deslizamiento f entre los cojinetes y el árbol, si después de desacoplar la transmisión el volante ha efectuado 90 revoluciones antes de pararse. Suponer que la masa del volante está uniformemente repartida por la llanta. La masa del árbol se desprecía.

Respuesta: $f=0,07$.

38.13. Un árbol cilíndrico de 10 cm de diámetro y de 0,5 tf de peso, en el que va encajado un volante de 2 m de diámetro y 3 tf de peso, gira en el instante considerado con la velocidad angular de 60 r.p.m., y luego se abandona a su propia suerte.

¿Cuántas revoluciones hará el árbol antes de pararse, si el coeficiente de rozamiento en los cojinetes es igual a 0,05? Suponer que la masa del volante está uniformemente repartida por su llanta.

Respuesta: 109,8 revoluciones.



Para el problema 38.14.

38.14. Una barra homogénea OA de longitud l y de peso P puede girar alrededor de un eje horizontal fijo O que pasa por su extremo, perpendicularmente al plano del dibujo. Uno de los extremos de un resorte espiral, cuyo coeficiente de rigidez es c, está unido con el eje fijo O, y el otro, con la barra. La barra está en reposo en la posición vertical, en este caso el resorte no está deformado.

¿Qué velocidad hace falta comunicar al extremo A de la barra para desviarlas de la vertical a un ángulo igual a 60°?

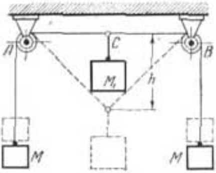
Respuesta: $v=\sqrt{\frac{g(9Pl+2\pi^2c)}{6P}}$.

38.15. Dos cargas M de p gramos de peso cada una están suspendidas de los extremos de un hilo que pasa sobre dos poleas A y B situadas sobre la misma horizontal a la distancia $AB=2l$ una de otra. En el punto medio C entre las poleas, en el hilo se cuelga una carga M_1 de p_1 gramos de peso y se deja caer sin velocidad inicial.

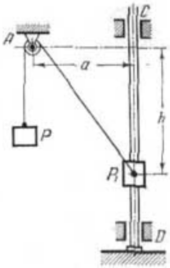
Calcular la distancia máxima h a la que descenderá la carga M_1, suponiendo que la longitud del hilo es bastante grande y que $p_1<2p$. Las dimensiones de las poleas se desprecian.

Respuesta: $h=\frac{4pp_1l}{4p^2-p_1^2}$.

38.16. Dos cargas P y P_1 están suspendidas de los extremos de un hilo flexible inextensible que pasa sobre una polea sumamente pequeña A. El peso P_1 puede deslizarse a lo largo de una barra lisa vertical CD situada del eje de la polea a una distancia a; en el instante inicial el centro de gravedad de la carga P_1 estaba a una misma altura con el eje de la polea; bajo la acción de la



Para el problema 38.15.

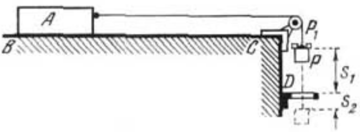


Para el problema 38.16.

fuerza de gravedad la carga P_1 comienza a descender sin velocidad inicial.

Hallar la relación entre la velocidad de la carga P_1 y la altura de su descenso h.

Respuesta: $v^2 = 2g(a^2+h^2)\dfrac{P_1h - P\left(\sqrt{a^2+h^2}-a\right)}{P_1(a^2+h^2)+Ph^2}$.



Para el problema 38.17.

38.17. Un cuerpo A de peso Q, que se encuentra sobre un plano horizontal rugoso BC, se pone en movimiento por una carga P, a la que se ha añadido una carga adicional P_1 con ayuda de un hilo que pasa sobre una polea. Al descender la distancia s_1 la carga P pasa por el anillo D que quita la carga P_1, luego la carga P, al bajar la distancia s_2, adquiere la posición de reposo.

Determinar el coeficiente de rozamiento f entre el cuerpo A y el plano, despreciando la masa del hilo y de la polea, así como el rozamiento en la polea; se conoce que: $Q = 0{,}8$ kgf, $P = P_1 = 0{,}1$ kgf, $s_1 = 50$ cm, $s_2 = 30$ cm.

Respuesta: $f = \dfrac{s_1(P_1+P)(P+Q)+s_2P(P+P_1+Q)}{Q\,[s_1(P+Q)+s_2(P+P_1+Q)]} = 0{,}2.$

38.18. Un hilo homogéneo de longitud L, una parte del cual está sobre una mesa lisa horizontal, se desplaza bajo la acción del peso de la otra parte que pende de la mesa.

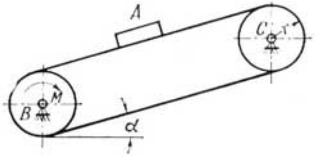
Determinar el intervalo de tiempo T durante el cual el hilo caerá de la mesa, si se sabe que en el instante inicial la longitud de la parte pendiente es igual a l, y que la velocidad inicial es igual a cero.

Respuesta: $T=\sqrt{\frac{L}{g}}\ln\left(\frac{L+\sqrt{L^2-l^2}}{l}\right)$.

38.19. Un hilo homogéneo ponderable de longitud $2a$, que está en reposo pendiendo de una clavija lisa, comienza a moverse con una velocidad inicial v_0.

Determinar la velocidad del hilo en el instante cuando éste abandona la clavija.

Respuesta: $v=\sqrt{ag+v_0^2}$.



Para el problema 38.20.

38.20. Un transportador se pone en movimiento del estado de reposo mediante una transmisión unida con la polea inferior B. La transmisión comunica a esta polea un momento de rotación constante M.

Determinar la velocidad v de la cinta del transportador en función de su desplazamiento s, si el peso de la carga elevada A es igual a P; las poleas B y C de radio r y de peso Q cada una representan cilindros circulares homogéneos.

La cinta del transportador, cuya masa se desprecia, forma con el horizonte un ángulo α. La cinta no se desliza sobre las poleas.

Respuesta: $v=\sqrt{\frac{2g(M-Pr\operatorname{sen}\alpha)}{r(P+Q)}s}$.

38.21. Un tubo horizontal CD puede girar libremente alrededor del eje vertical AB (véase el dibujo para el problema 37.56). En el interior del tubo, a una distancia $MC=x_0$ del eje, se halla una bola M. En un instante determinado se comunica al tubo una velocidad angular inicial ω_0.

Determinar la velocidad v de la bola M respecto del tubo en el instante cuando la bola abandona el tubo. El momento de inercia del tubo respecto del eje de rotación es igual a J, la longitud del tubo es L; el rozamiento se desprecia. La bola se considera como un punto material de masa m.

Indicación. Utilizar la respuesta del problema 37.56.

Respuesta: $v=\omega_0 \sqrt{\dfrac{J+mx_0^2}{J+mL^2}(L^2-x_0^2)}$.

38.22. Un cuerpo B se desplaza con una velocidad relativa constante u_0 sobre una plataforma horizontal A que se mueve en ausencia de rozamiento (véase el dibujo para el problema 36.11). Durante el frenado del cuerpo B, entre éste y la plataforma A aparecen fuerzas de rozamiento.

Determinar el trabajo de las fuerzas internas de rozamiento entre el cuerpo B y la plataforma A a partir del momento del comienzo del frenado hasta la parada completa del cuerpo respecto de la plataforma A, si sus masas son respectivamente iguales a m y M.

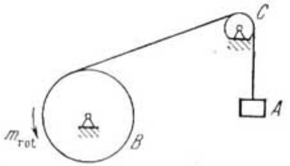
Indicación. Utilizar la respuesta del problema 36.11.

Respuesta: $A=-\dfrac{1}{2}\dfrac{mM}{M+m}u_0^2$.

38.23. Durante la puesta en marcha de un cabrestante con ayuda de un motor eléctrico, al árbol del tambor A de radio r y de peso P_1 se le aplica un momento de rotación m_{rot} proporcional al ángulo de rotación φ del tambor; el coeficiente de proporcionalidad es igual a a (véase el dibujo para el problema 37.42).

Determinar la velocidad de la carga B de peso P_2 que se eleva en función de la altura de elevación h. Considerar el tambor A como un cilindro homogéneo. La masa del cable se desprecia. En el instante inicial el sistema estaba en reposo.

Respuesta: $v=\dfrac{1}{r}\sqrt{\dfrac{2gh\,(ah-2P_2r^2)}{P_1+2P_2}}$.



Para el problema 38.24.

38.24. En el dibujo viene representado el mecanismo de elevación de un cabrestante. Una carga A de peso P_1 se eleva mediante un cable que pasa sobre una polea C y se enrolla sobre el tambor B de radio r y de peso P_2. El tambor está sometido a la acción de un momento de rotación que, desde el instante inicial, es proporcional al cuadrado del ángulo de giro φ del tambor: $m_{rot} = a\varphi^2$, donde a es un coeficiente constante.

Determinar la velocidad de la carga A en el instante cuando la última se eleva a una altura h. Considerar que la masa del tambor está uniformemente repartida por su llanta. La polea C es un disco continuo de peso P_3. Despreciar la masa del cable. En el instante inicial el sistema estaba en reposo.

Respuesta: $v = \frac{2}{r}\sqrt{\frac{gh(ah^2 - 3P_1r^3)}{3r(2P_1 + 2P_2 + P_3)}}$.

38.25. ¿Qué velocidad inicial, paralela a la linea de máxima pendiente de un plano inclinado, hace falta comunicar al eje de una rueda de radio r para que ésta, rodando sin deslizamiento, suba a la altura h por el plano inclinado que forma con el horizonte un ángulo α? El coeficiente de rozamiento de rodadura es igual a f_{rod}. Considerar la rueda como un disco homogéneo.

Respuesta: $v = \frac{2}{3}\sqrt{3gh\left(1 + \frac{f_{rod}}{r}\operatorname{cotg}\alpha\right)}$.

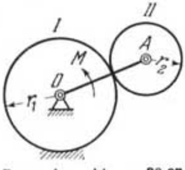
38.26. Dos cilindros de peso y radio iguales descienden sin deslizamiento por un plano inclinado. El primer cilindro es continuo, la masa del segundo puede ser considerada como uniformemente repartida por su llanta.

Hallar la relación entre las velocidades de los centros de gravedad de los cilindros al bajarlos a una misma altura. En el instante inicial los cilindros estaban en reposo.

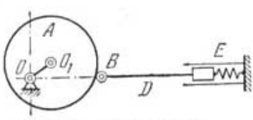
Respuesta: $v_2/v_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

38.27. Un mecanismo epicíclico, situado en un plano horizontal, se pone en movimiento, a partir del estado de reposo, por medio de un momento de rotación constante M aplicado a la manivela OA.

Determinar la velocidad angular de la manivela en función de su ángulo de giro, si el radio de la rueda inmóvil I es r_1, el de la rueda móvil II es r_2, el peso de la última es P, y el de la ma-



Para el problema 38.27.



Para el problema 38.28.

nivela OA es Q. Considerar la rueda II como un disco homogéneo, y la manivela como una barra homogénea.

Respuesta: $\omega=\frac{2}{r_1+r_2}\sqrt{\frac{3gM}{9P+2Q}}\,\varphi$.

38.28. En un mecanismo de levas, situado en el plano horizontal, el excéntrico A pone en movimiento alternativo el rodillo B con el vástago D. El resorte E, ligado con el vástago, asegura el contacto permanente entre el rodillo y el excéntrico. El peso del excéntrico es igual a p, la excentricidad e es igual a la mitad de su radio; el coeficiente de elasticidad del resorte es igual a c. El resorte no está deformado cuando el vástago ocupa la posición extrema izquierda.

¿Qué velocidad angular hace falta comunicar al excéntrico para que éste desplace el vástago D de la posición extrema izquierda a la posición extrema derecha? Las masas del rodillo, del vástago y del resorte se desprecian. Considerar el excéntrico como un disco circular homogéneo.

Respuesta: $\omega=2\sqrt{\frac{cg}{3p}}$.

38.29. ¿Qué camino recorrerá un ciclista sin girar los pedales hasta su parada, si su velocidad inicial era igual a 9 km/h? El peso total del ciclista junto con la bicicleta es igual a 80 kgf, el peso de cada rueda es igual a 5 kgf, considerar que la masa de cada rueda está uniformemente repartida por la circunferencia de 50 cm de radio. El coeficiente de rozamiento de rodadura de las ruedas sobre la tierra es igual a 0,5 cm.

Respuesta: 35,6 m.

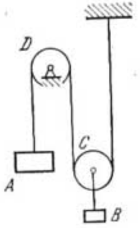
38.30. La velocidad de aterrizaje de un avión es igual a 20 m/s. Determinar el camino recorrido por el avión hasta su parada, si la fuerza de resistencia del aire es aproximadamente igual a 60 kgf, el peso de cada una de las ruedas delanteras es igual a 100 kgf, el radio de las ruedas es igual a 0,5 m, el peso del avión sin ruedas es de 1100 kgf, el coeficiente de rozamiento de rodadura de las ruedas sobre la tierra es de 1 cm. Considerar que las ruedas on discos circulares homogéneos. Despreciar la masa de la rueda rasera y la presencia de frenos.

Respuesta: 332,1 m.

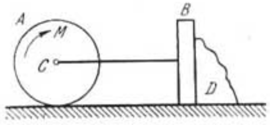
38.31. La carga A de peso P_1, al descender, eleva con ayuda de un cable, pasado sobre la polea fija D, una carga B de peso P_2 fijada en el eje de la polea móvil C. Considerar las poleas C y D como discos homogéneos continuos de peso P_3 cada uno.

Determinar la velocidad de la carga A en el instante cuando ésta descienda una distancia h. La masa del cable, el deslizamiento en las llantas de las poleas y las fuerzas de resistencia, se desprecian En el instante inicial el sistema estaba en reposo.

Respuesta: $v=2\sqrt{2gh\frac{2P_1-P_2-P_3}{8P_1+2P_2+7P_3}}$.



Para el problema 38.31.



Para el problema 38.32.

38.32. A la rueda motriz (al tambor A) de un quitanieves se ha aplicado un momento de rotación constante M. Se puede considerar que la masa del tambor A está uniformemente repartida por su llanta. El peso total de la nieve D, de la reja B y de todos los otros elementos en movimiento de translación es constante e igual a P_2. El coeficiente de rozamiento de deslizamiento de la nieve y la reja sobre la tierra es igual a f, el coeficiente de rozamiento de rodadura del tambor sobre la tierra es igual a f_{rod}. El peso del tambor es P_1, su radio es r.

Determinar la relación entre el camino s recorrido por la reja B del quitanieves y el módulo de su velocidad v, si en el instante inicial el sistema estaba en reposo.

Respuesta: $s=\frac{r}{2g}\frac{2P_1+P_2}{M-P_1f_{rod}-fP_2r}v^2$.

38.33. La velocidad de automóvil que se desplaza sobre un camino rectilíneo horizontal ha crecido de v_1 a v_2 a cuenta del aumento de la potencia del motor. Durante este tiempo el automóvil recorrió la distancia s.

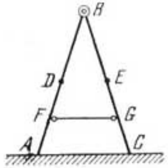
Calcular el trabajo realizado por el motor en este desplazamiento del automóvil, si el peso de cada una de las cuatro ruedas es P_1, el peso de la carrocería es P_2, el radio de las ruedas es r, el coeficiente de rozamiento de rodadura de las ruedas sobre la carretera es f_{rod}. Las ruedas, que se desplazan sin deslizamiento, se consideran como discos continuos homogéneos. La energía cinética de todas las piezas, menos la de las ruedas y de la carrocería, se desprecia.

Respuesta: $A=\frac{6P_1+P_2}{2g}(v_2^2-v_1^2)+\frac{f_{rod}}{r}(4P_1+P_2)s$.

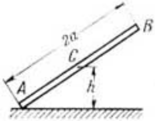
38.34. Una escalera de tijera ABC con la articulación B está colocada sobre un piso liso horizontal; la longitud $AB=BC=2l$, los centros de gravedad se encuentran en los puntos medios D y E de las barras, el radio de inercia de cada escalera respecto del eje que pasa por el centro de gravedad es igual a ρ, la distancia entre la articulación B y el piso es igual a h. En un instante determinado la escalera de tijera comienza a caer a causa de la rotura del tirante FG.

Despreciando el rozamiento en la articulación, calcular: 1) la velocidad del punto B en el instante de su choque contra el piso; 2) la velocidad del punto B en el instante cuando su distancia hasta el piso sea igual a $\frac{1}{2}h$.

Respuesta: 1) $v=2l\sqrt{\frac{gh}{l^2+\rho^2}}$; 2) $v=\frac{1}{2}\sqrt{gh\frac{16l^2-h^2}{2(l^2+\rho^2)}}$.



Para el problema 38.34.



Para el problema 38.35.

38.35. La barra AB de longitud $2a$, cae deslizándose con su extremo A por un piso liso horizontal. En el instante inicial la barra se encontraba en la posición vertical en estado de reposo.

Calcular la velocidad del centro de gravedad de la barra en función de su altura h sobre el piso.

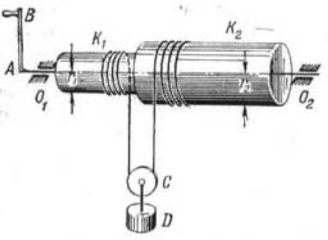
Respuesta: $v=(a-h)\sqrt{\frac{6g(a+h)}{4a^2-3h^2}}$.

38.36. En un cabrestante diferencial, los dos árboles unidos rígidamente K_1 y K_2, cuyos radios son r_1 y r_2 y sus momentos de inercia respecto del eje O_1O_2 son j_1 y j_2, se ponen en rotación por medio de la palanca AB. La polea móvil C está suspendida de un hilo inextensible e imponderable, cuya rama izquierda está enrollada sobre el árbol K_1 y la rama derecha, sobre el árbol K_2. Al girar la palanca AB la rama izquierda del hilo se desenrolla del árbol K_1 y la rama derecha se enrolla sobre el árbol K_2. A la palanca AB se ha aplicado un momento de rotación constante M. En la polea C se ha colgado una carga D de peso P.

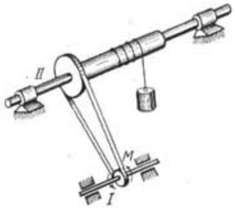
Hallar la velocidad angular de rotación de la palanca en el instante correspondiente al final de la elevación de la carga D

a la altura s. En el instante inicial el sistema estaba en reposo. Las masas de la palanca y de la polea se desprecian.

Respuesta: $\omega = 2\sqrt{2gs\dfrac{2M - P(r_2 - r_1)}{(r_2 - r_1)[P(r_2 - r_1)^2 + 4g(J_1 + J_2)]}}$.



Para el problema 38.36.



Para el problema 38.37.

38.37. Un cabrestante se pone en movimiento con ayuda de una transmisión por correa que une la polea II, montada sobre el árbol del cabrestante, con la polea I fijada sobre el árbol del motor. A la polea I, de peso P_1 y de radio r, se ha aplicado un momento de rotación constante M. El peso de la polea II es igual a P_2 y su radio es R. El peso del tambor del cabrestante es P_3, su radio es r, el peso de la carga que se eleva es P_4. El cabrestante se pone en movimiento a partir del estado de reposo.

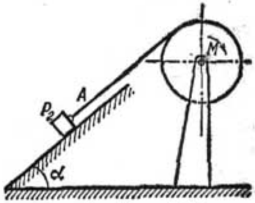
Calcular la velocidad de la carga P_4 en el instante cuando ésta se eleva a una altura h. Las masas de la correa, del cable y el rozamiento en los cojinetes se desprecian. Considerar las poleas y el tambor como cilindros circulares homogéneos.

Respuesta: $v = 2\sqrt{\dfrac{gh\left(M\dfrac{R}{r^2} - P_4\right)}{P_1\left(\dfrac{R}{r}\right)^2 + P_2\left(\dfrac{R}{r}\right)^2 + P_3 + 2P_4}}$.

38.38. Resolver el problema anterior, teniendo en cuenta la masa del cable, al cual está atada la carga P_4. La longitud del cable es l, el peso de una unidad de longitud del cable es p. En el instante inicial la longitud de la parte del cable que pendía del árbol del tambor del cabrestante era de $2h$.

Respuesta: $v = 2\sqrt{\dfrac{gh\left(M\dfrac{R}{r^2} - P_4 - \dfrac{3}{2}ph\right)}{P_1\left(\dfrac{R}{r}\right)^2 + P_2\left(\dfrac{R}{r}\right)^2 + P_3 + 2P_4 + 2pl}}$.

38.39. Un momento de rotación constante está aplicado al tambor de radio r y de peso P_1 de un cabrestante. Al extremo A del cable enrollado sobre el tambor va atada una carga P_2 que se eleva por un plano inclinado que forma con el horizonte un ángulo α.



Para el problema 38.39.

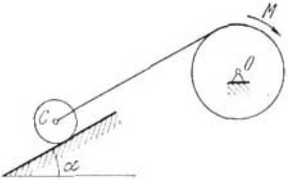
¿Qué velocidad angular tendrá el tambor del cabrestante al girar un ángulo φ? El coeficiente de rozamiento de deslizamiento de la carga sobre el plano inclinado es igual a f. La masa del cable se desprecia, considerar el tambor como un cilindro circular homogéneo. En el instante inicial el sistema estaba en reposo.

Respuesta: $\omega = \frac{2}{r}\sqrt{g\frac{M - P_2 r(\operatorname{sen}\alpha + f\cos\alpha)}{P_1 + 2P_2}\varphi}$.

38.40. Resolver el problema anterior, teniendo en cuenta la masa del cable, al cual está atada la carga P_2. La longitud del cable es igual a l, el peso de una unidad de longitud del cable es igual a p. En el instante inicial la longitud del cable que pendía del tambor del cabrestante era igual a a. La variación de la energía potencial del cable enrollado sobre el tambor se desprecia.

Respuesta:

$$\omega = \frac{1}{r}\sqrt{2g\frac{2M - 2P_2 r(\operatorname{sen}\alpha + f\cos\alpha) - pr(2a - r\varphi)\operatorname{sen}\alpha}{P_1 + 2P_2 + 2pl}\varphi}.$$



Para el problema 38.41.

38.41. Un momento de rotación constante M está aplicado al tambor de radio r_1 y de peso P_1 de un cabrestante. El eje C de una rueda de peso P_2 está fijado en el extremo del cable enrollado sobre el tambor. La rueda se desplaza sin deslizamiento hacia arriba sobre un plano inclinado que forma con el horizonte un ángulo α.

¿Qué velocidad angular alcanzará el tambor después de hacer n revoluciones? Considerar el tambor y la rueda como cilindros circulares homogéneos. En el instante inicial el sistema estaba en reposo. La masa del cable y el rozamiento se desprecian.

Respuesta: $\omega = \frac{2}{r_1}\sqrt{2\pi n g \frac{M - P_2 r_1 \operatorname{sen}\alpha}{P_1 + 3P_2}}$.

38.42. Resolver el problema anterior teniendo en cuenta la masa del cable y el rozamiento de rodadura de la rueda sobre el plano inclinado, si l es la longitud del cable, p es el peso de una unidad de su longitud, a es la longitud de la parte del cable no enrollada sobre el tambor en el instante inicial, f_{rod} es el coeficiente de rozamiento de rodadura, r_2 es el radio de la rueda. Despreciar la variación de la energía potencial del cable enrollado sobre el tambor.

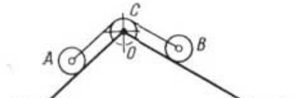
Respuesta: $\omega =$

$$= \frac{2}{r}\sqrt{2\pi n g \frac{M - r_1\left[P_2\left(\operatorname{sen}\alpha + \frac{f_{rod}}{r^2}\cos\alpha\right) + p\,(a - \pi n r_1)\operatorname{sen}\alpha\right]}{P_1 + 3P_2 + 2pl}}.$$

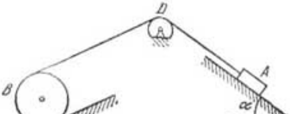
38.43. La rueda A desciende sin deslizamiento por el plano inclinado OK y hace subir con ayuda de un cable inextensible la rueda B que se desplaza sin deslizamiento sobre el plano inclinado ON. El cable pasa sobre la polea C que gira alrededor del eje horizontal fijo O.

Hallar la velocidad del eje de la rueda A durante su desplazamiento paralelamente a la línea OK de máxima pendiente del plano inclinado a una distancia s. En el instante inicial el sistema estaba en reposo. Considerar las ruedas y la polea como discos homogéneos de pesos y radios iguales. El peso del cable se desprecia.

Respuesta: $v = 2\sqrt{\frac{1}{7}gs(\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta)}$.



Para el problema 38.43.



Para el problema 38.45.

38.44. Resolver el problema anterior teniendo en cuenta el rozamiento de rodadura de las ruedas sobre los planos inclinados. El coeficiente de rozamiento de rodadura es igual a f_{rod}, los radios de las ruedas son iguales a r.

Respuesta: $v = 2\sqrt{\frac{1}{7}gs\left[\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta - \frac{f_{rod}}{r}(\cos\alpha + \cos\beta)\right]}$.

38.45. Un hilo inextensible que pasa sobre una polea D de peso P_2 está fijado a un cuerpo A de peso P_1 y va enrollado sobre la superficie lateral de un rodillo cilíndrico B de peso P_3. Cuando el cuerpo A desciende por el plano inclinado, que forma con el horizonte un ángulo α, gira la polea D y el rodillo B sube por un plano inclinado que forma con el horizonte un ángulo β.

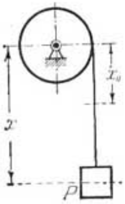
Determinar la velocidad del cuerpo A en función del camino recorrido s, si en el instante inicial el sistema estaba en reposo. Considerar la polea D y el rodillo B como cilindros circulares homogéneos. Las fuerzas de rozamiento y la masa del hilo se desprecian.

Respuesta: $v=2\sqrt{2gs\,\dfrac{2P_1\operatorname{sen}\alpha-P_3\operatorname{sen}\beta}{8P_1+4P_2+3P_3}}$.

38.46. Resolver el problema anterior suponiendo que los coeficientes de rozamiento de deslizamiento y de rodadura son respectivamente iguales a f y f_{rod}. El radio del rodillo B es igual a r.

Respuesta: $v=2\sqrt{2gs\,\dfrac{2P_1(\operatorname{sen}\alpha-f\cos\alpha)-P_3\left(\operatorname{sen}\beta+\dfrac{f_{rod}}{r}\cos\beta\right)}{8P_1+4P_2+3P_3}}$.

38.47. Una carga de peso P está suspendida de un cable inextensible homogéneo de longitud l, enrollado sobre un tambor cilíndrico con eje de rotación horizontal. El momento de inercia del tambor respecto al eje de rotación es J, el radio del tambor es R, el peso de una unidad de longitud del cable es p.

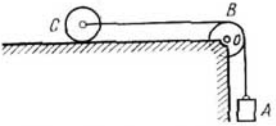


Para el problema 38.47.

Determinar la velocidad de la carga en el instante cuando la longitud de la parte pendiente del cable es igual a x, si en el instante inicial la velocidad de la carga era $v_0=0$, la longitud de la parte pendiente del cable era igual a x_0; el rozamiento del eje del tambor, el grosor del cable y la variación de la energía potencial del cable enrollado sobre el tambor se desprecian.

Respuesta: $v=R\sqrt{\dfrac{g[2P+p(x+x_0)](x-x_0)}{Jg+(P+pl)R^2}}$.

38.48. Un cuerpo A de peso P_1 está suspendido de un cable inextensible homogéneo de longitud L y de peso Q. El cable pasa sobre una polea B que gira alrededor del eje O perpendicular al plano del dibujo. El otro extremo del cable está fijado en el eje del rodillo C que rueda sin deslizamiento sobre un plano fijo. La polea B y el rodillo C son discos circulares homogéneos de radio r y de peso P_2 cada uno. El coeficiente de rozamiento de rodadura del rodillo C sobre el plano horizontal es igual a f_{rod}. En el instante inicial, cuando el sistema estaba en reposo, la longitud de la parte del cable que pendía de la polea B era igual a l.



Para el problema 38.48.

Determinar la velocidad del cuerpo A en función de su desplazamiento vertical h.

Respuesta: $v=\sqrt{\dfrac{2gh\left[P_1+\dfrac{Q}{2L}(2l+2r+h)-P_2\dfrac{f_{\text{rod}}}{r}\right]}{P_1+2P_2+Q}}$.

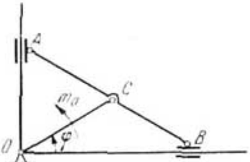
38.49. El mecanismo de un elipsógrafo, situado en un plano horizontal, se pone en movimiento bajo la acción de un momento de rotación constante m_0 aplicado a la manivela OC. En el instante inicial, cuando $\varphi=0$, el mecanismo está en reposo.

Hallar la velocidad angular de la manivela OC en el instante cuando ésta ha efectuado $\frac{1}{4}$ de vuelta. Se conoce que: M es la masa de la barra AB, $m_A=m_B=m$ son las masas de las correderas A y B, $OC=AC=BC=l$; la masa de la manivela OC y las fuerzas de resistencia se desprecian.

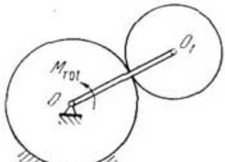
Respuesta: $\omega=\dfrac{1}{2l}\sqrt{\dfrac{3\pi m_0}{M+3m}}$.

38.50. Resolver el problema anterior teniendo en cuenta el momento de resistencia constante m_C en la articulación C.

Respuesta: $\omega=\dfrac{1}{2l}\sqrt{\dfrac{3\pi(m_0-2m_C)}{M+3m}}$.



Para el problema 38.49.



Para el problema 38.51.

38.51. A la manivela OO_1 de un mecanismo epicíclico, situado *en un plano horizontal, se ha aplicado un momento de rotación* $M_{\text{rot}}=M_0-\alpha\omega$, donde M_0 y α—son constantes positivas y ω es la velocidad angular de la manivela. La masa de la manivela es igual a m, M es la masa del satélite (de la rueda móvil).

Considerando la manivela como una barra fina homogénea, y el satélite como un disco circular homogéneo de radio r, determinar la velocidad angular ω de la manivela en función del tiempo. En el instante inicial el sistema estaba en reposo. El radio del piñón fijo es igual a R; las fuerzas de resistencia se desprecian.

Indicación. Aplicar el teorema de la variación de la energía cinética en la forma diferencial.

Respuesta: $\omega = \frac{M_0}{\alpha}\left(1 - e^{-\frac{\alpha}{J_{red}}t}\right)$,

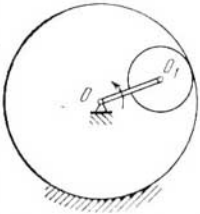
donde $J_{red} = \left(\frac{m}{3} + \frac{3}{2}M\right)(R+r)^2$.

38.52. Resolver el problema anterior teniendo en cuenta el momento de rozamiento constante M_{roz} en el eje O_1 del satélite.

Respuesta: $\omega = \frac{M_0 - \frac{R}{r}M_{roz}}{\alpha}\left(1 - e^{-\frac{\alpha}{J_{red}}t}\right)$, donde

$J_{red} = \left(\frac{m}{3} + \frac{3}{2}M\right)(R+r)^2$.

38.53. La manivela OO_1 de un mecanismo hipocíclico, situado en el plano horizontal, gira con una velocidad angular constante ω_0. En un instante dado se desconectó el motor y bajo la acción del momento constante M_{roz} de las fuerzas de rozamiento en el eje del satélite (de la rueda móvil) el mecanismo se paró.



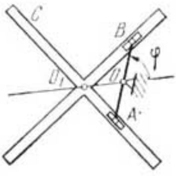
Para el problema 38.53.

Determinar el tiempo τ de frenado y el ángulo φ de giro de la manivela durante este tiempo, si su peso es igual a P, G es el peso del satélite, R y r son los radios correspondientes. Considerar la manivela como una barra fina homogénea, y el satélite como un disco homogéneo.

Indicación. Aplicar el teorema de la variación de la energía cinética en forma diferencial.

Respuesta: $\tau = \frac{rJ_{red}}{RM_{roz}}\omega_0$; $\quad \varphi = \frac{1}{2}\frac{rJ_{red}}{RM_{roz}}\omega_0^2$,

donde $J_{red} = \frac{1}{g}\left(\frac{P}{3} + \frac{3}{2}G\right)(R-r)^2$.



Para el problema 38.54.

38.54. La cruceta C se pone en rotación alrededor del eje O_1 por medio de la barra homogénea AB que gira alrededor del eje fijo O (los ejes O y O_1 son perpendiculares al plano del dibujo). Las correderas A y B, articuladas a la barra AB, se deslizan a lo largo de dos ranuras mutuamente perpendiculares de la cruceta C. La barra gira bajo la acción del momento de rotación constante m_{rot}.

Determinar la velocidad angular de la barra AB en el instante cuando ésta hace una cuarta parte de vuelta, si en el instante inicial, siendo $\varphi=0$, su velocidad angular era ω_0. La magnitud del momento de resistencia, que aparece en cada articulación de las correderas A y B, es dos veces menor que m_{rot}. Otras fuerzas de resistencia se desprecian. La masa de la barra es igual a m, el momento de inercia de la cruceta C respecto al eje O_1 es igual a J; $OO_1=OA=OB=l$.

Respuesta: $\omega=\sqrt{\frac{6\pi m_{rot}}{4ml^2+3J}+\omega_0^2}$.

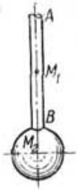
§ 39. MOVIMIENTO PLANOPARALELO DE UN CUERPO SÓLIDO

39.1. Un cuerpo pesado se compone de una barra AB de 80 cm de longitud y 1 N de peso, y de un disco sujetado a ésta de 20 cm de radio y de 2 N de peso. En el instante inicial, cuando la posición de la barra es vertical, al cuerpo se le comunica un movimiento tal, que la velocidad del centro de gravedad M_1 de la barra es igual a 0 y la velocidad del centro de gravedad M_2 del disco, dirigida horizontalmente a la derecha, es igual a 360 cm/s.

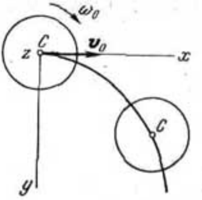
Determinar el movimiento ulterior del cuerpo tomando en consideración solamente la acción de la fuerza de gravedad.

Respuesta: El cuerpo gira uniformemente con una velocidad angular de 6 s^{-1} alrededor de su centro de gravedad, que describe una parábola $y^2=117{,}5\ x$ (el origen de coordenadas se encuentra en el punto B, el eje y está dirigido horizontalmente a la derecha, y el eje x, hacia abajo).

39.2. Un disco cae bajo la acción de la fuerza de gravedad en el plano vertical. En el instante inicial al disco le fue comunicada una velocidad angular ω_0, y su centro de gravedad C, situado en el origen de coordenadas, tenía una velocidad $\boldsymbol{v}_0$ dirigida horizontalmente.



Para el problema 39.1.



Para el problema 39.2.

Determinar las ecuaciones de movimiento del disco. Los ejes x, y están indicados en el dibujo. Despreciar las fuerzas de resistencia.

Respuesta: $x_C = v_0 t, \quad y_C = \frac{gt^2}{2}, \ \varphi = \omega_0 t,$

donde φ es el ángulo de giro del disco, formado por el eje x y el diámetro que en el instante inicial ocupaba la posición horizontal.

39.3. Resolver el problema anterior considerando que el momento m_C de *resistencia al movimiento respecto al eje móvil horizontal*, que pasa por el centro de gravedad C del disco perpendicularmente al plano de su movimiento, es proporcional a la velocidad angular del disco $\dot{\varphi}$. El coeficiente de proporcionalidad es igual a β. El momento de inercia del disco respecto a dicho eje es igual a J_C.

Respuesta: $x_C = v_0 t, \quad y_C = \frac{gt^2}{2}, \quad \varphi = \frac{J_C \omega_0}{\beta}\left(1 - e^{-\frac{\beta}{J_C} t}\right),$

donde φ es el ángulo de giro del disco, formado por el eje x y el diámetro que en el momento inicial ocupaba la posición horizontal.

39.4. La rueda motriz de un vehículo, de radio r y peso P se encuentra en movimiento horizontal y rectilíneo. A la rueda se le aplica un momento de rotación M. El radio de inercia de la rueda respecto al eje que cruza el centro de gravedad perpendicularmente a su plano, es igual a ρ. El coeficiente de rozamiento de resbalamiento de la rueda sobre la tierra es igual a f.

¿A qué condición debe satisfacer el momento de rotación para que la rueda se mueva sin resbalamiento? No tener en cuenta la resistencia al rodamiento.

Respuesta: $M \leqslant fP\frac{r^2+\rho^2}{r}$.

39.5. Resolver el problema anterior tomando en consideración la resistencia al rodamiento, si el coeficiente de rozamiento de rodadura es igual a f_{rod}.

Respuesta: $M \leqslant fP \frac{r^2+\rho^2}{r} Pf_{rod}$.

39.6. El eje de la rueda motriz de un vehículo se mueve horizontal y rectilíneamente. Al eje de la rueda se le aplica una fuerza propulsora $\boldsymbol{F}$ dirigida horizontalmente. El radio de inercia de la rueda respecto al eje que cruza el centro de gravedad, perpendicularmente a su plano, es igual a ρ. El coeficiente de rozamiento de resbalamiento de la rueda sobre la tierra es igual a f. El radio de la rueda es r, su peso es igual a P.

¿A qué condición debe satisfacer la magnitud de la fuerza $\boldsymbol{F}$ para que la rueda se mueva sin resbalamiento? No tener en cuenta la resistencia al rodamiento.

Respuesta: $\boldsymbol{F} \leqslant fP \frac{r^2+\rho^2}{\rho^2}$.

39.7. Resolver el problema anterior teniendo en cuenta el rozamiento de rodadura, si el coeficiente de rozamiento de rodadura es igual a f_{rod}.

Respuesta: $\boldsymbol{F} \leqslant \frac{fP(r^2+\rho^2) - Pf_{rod} \cdot r}{\rho^2}$.

39.8. Una fuerza horizontal $\boldsymbol{F}$, cuyo módulo es constante, está aplicada al eje de una rueda de peso P y de radio r.

Hallar la relación que existe entre esta fuerza y la fuerza de rozamiento, si el centro de gravedad C de la rueda está fijo o se desplaza uniforme y rectilíneamente. Determinar también la velocidad angular de la rueda, si en el instante inicial ésta estaba en reposo. Considerar que la masa de la rueda está uniformemente repartida por la llanta. Despreciar el rozamiento de rodadura.

Respuesta: $F_{roz} = \boldsymbol{F}$; $\dot{\varphi} = \frac{Fg}{Pr} t$.

39.9. Una rueda de radio r se desplaza sobre un riel rectilíneo horizontal bajo la acción del momento de rotación, aplicado a ésta, $m_{rot} = \frac{5}{2} fPr$, donde f es el coeficiente de rozamiento de deslizamiento, P es el peso de la rueda.

Determinar la velocidad del punto de la rueda, que hace contacto con el riel (la velocidad de deslizamiento). Considerar que la masa de la rueda está uniformemente repartida por su llanta. Despreciar el rozamiento de rodadura. En el instante inicial la rueda estaba en reposo.

Respuesta: $\frac{fg}{2} t$.

39.10. Resolver el problema anterior teniendo en cuenta el rozamiento de rodadura, si el coeficiente de rozamiento de rodadura es $f_{rod} = \frac{1}{4} fr$.

Respuesta: $\frac{1}{4} fgt$.

39.11. Un cilindro homogéneo de eje horizontal desciende bajo la acción de su propio peso por un plano inclinado rugoso de coeficiente de rozamiento f.

Determinar el ángulo de inclinación del plano al horizonte, y la aceleración del eje del cilindro suponiendo que el movimiento del cilindro se efectúa sin deslizamiento. Despreciar la resistencia al rodamiento.

Respuesta: $\alpha \leqslant \operatorname{arctg} 3f$; $w = \frac{2}{3} g \operatorname{sen} \alpha$.

39.12. Dos cilindros de pesos iguales descienden sin deslizamiento por un plano inclinado que forma con el horizonte un ángulo α. La masa del primer cilindro está uniformemente repartida por su superficie lateral, el segundo cilindro es continuo.

Determinar la diferencia entre las aceleraciones de los centros de gravedad de ambos cilindros. El rozamiento de rodadura se desprecia.

Respuesta: La aceleración del centro de gravedad del cilindro continuo es mayor que la aceleración del centro de gravedad del primer cilindro en $\frac{1}{6} g \operatorname{sen} \alpha$.

39.13. Un disco circular continuo homogéneo desciende sin deslizamiento por un plano inclinado que forma con el horizonte un ángulo α. El eje del disco forma con la línea de máxima pendiente un ángulo β.

Determinar la aceleración del centro de gravedad del disco suponiendo que su rodamiento se efectúa sólo en el plano vertical.

Respuesta: $w_C = \frac{2}{3} g \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$.

39.14. Un cilindro homogéneo de eje horizontal desciende con deslizamiento por un plano inclinado bajo la acción de su propio peso; el coeficiente de rozamiento de deslizamiento es f.

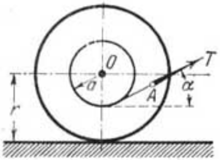
Determinar el ángulo de inclinación del plano al horizonte, y la aceleración del eje del cilindro.

Respuesta: $\alpha > \operatorname{arctg} 3f$;
$w = g(\operatorname{sen} \alpha - f \cos \alpha)$.

39.15. Una rueda homogénea de radio r desciende sin deslizamiento por un plano inclinado que forma con el horizonte un ángulo α.

¿Para qué valor del coeficiente de rozamiento de rodadura f_{rod} el centro de gravedad de la rueda se desplazará uniformemente, y la rueda girará en este caso uniformemente alrededor del eje que pasa por el centro de gravedad perpendicularmente a su plano?

Respuesta: $f_{rod} = r \operatorname{tg} \alpha$.



Para el problema 39.16.

39.16. Sobre el tambor de un cilindro homogéneo de peso P y de radio r, situado sobre un piso rugoso horizontal, va enrollado un hilo al que está aplicada una fuerza T bajo un ángulo α respecto al horizonte. El radio del tambor es a, el radio de inercia del cilindro es ρ.

Determinar la ley del movimiento del eje del cilindro O. En el estado inicial el cilindro estaba en reposo, luego rodaba sin deslizamiento.

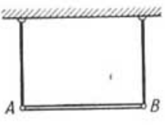
Respuesta: $x = \frac{T}{P} \frac{rg\,(r\cos\alpha - a)}{2\,(\rho^2 + r^2)}\, t^2$, el eje x está dirigido de izquierda a derecha.

39.17. Una barra homogénea AB de peso P está suspendida horizontalmente del techo por medio de dos hilos verticales fijados en los extremos de la barra.

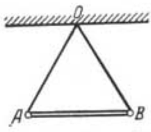
Hallar la tensión de uno de los hilos en el instante de rotura del otro.

Indicación. Escribir las ecuaciones diferenciales del movimiento de la barra para un intervalo de tiempo muy pequeño después de la rotura del hilo, despreciando la variación de la dirección de la barra y la variación de la distancia del centro de gravedad de la barra al otro hilo.

Respuesta: $T = \frac{P}{4}$.



Para el [problema 39.17.



Para el problema 39.18.

ı3.18. Una barra homogénea AB de peso P está suspendida del punto O por dos hilos de iguales longitudes que la barra.

Determinar la tensión de uno de los hilos en el instante de la rotura del otro. (Véase la indicación para el problema 39.17).

Respuesta: $T = 0{,}266\ P$.

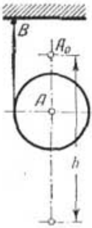
39.19. Una barra homogénea fina de longitud $2l$ y de peso P descansa sobre dos apoyos A y B; el centro de gravedad C de la barra está situado a iguales distancias de los apoyos, $CA = CB = a$; la presión sobre cada apoyo es igual a $\frac{1}{2}P$.

¿Cómo variará la presión sobre el a poyo A en el instante cuando el apoyo B se quita instantáneamente? (Véase la indicación para el problema 39.17).

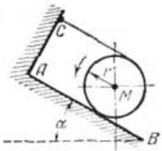
Respuesta: La presión sobre el apoyo A crecerá en una magnitud igual a

$$\frac{l^2-3a^2}{2(l^2+3a^2)}P.$$

Para el problema 39.19.



Para el problema 39.20.



Para el problema 39.21.

39.20. Un cilindro circular pesado A de masa m está enrollado en su parte media por un hilo fino, cuyo extremo B es fijo. El cilindro cae sin velocidad inicial desenrollando el hilo.

Determinar la velocidad del eje del cilindro después que éste baja una distancia h, hallar la tensión T del hilo.

Respuesta: $v = \frac{2}{3}\sqrt{3gh}$; $\quad T = \frac{1}{3}mg$.

39.21. Dos hilos flexibles están enrollados sobre un cilindro circular homogéneo M de peso P y de radio r, de tal modo que sus espiras están dispuestas simétricamente respecto al plano medio paralelo a las bases. El cilindro está puesto sobre un plano inclinado AB de tal manera que sus generatrices son perpendiculares a la línea de máxima pendiente, los extremos C de los hilos están simétricamente fijados respecto a dicho plano medio a la distancia de $2r$ del plano AB. El cilindro comienza a moverse sin velocidad inicial bajo la acción de la fuerza de gravedad, venciendo el rozamiento sobre el plano inclinado; el coeficiente de rozamiento es igual a f.

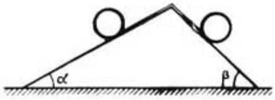
Determinar el camino s recorrido por el centro de gravedad del cilindro en el tiempo t, y la tensión T de los hilos, suponiendo que durante el intervalo de tiempo examinado ninguno de los hilos se ha desenrollado hasta el final.

Respuesta: $s=\frac{1}{3}g(\operatorname{sen}\alpha-2f\cos\alpha)t^2$; $T=\frac{1}{6}P(\operatorname{sen}\alpha+f\cos\alpha)$. El cilindro permanece en reposo, si $\operatorname{tg}\alpha<2f$.

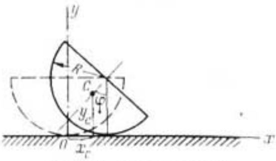
39.22. Dos árboles cilíndricos de pesos P_1 y P_2 descienden por dos planos inclinados que forman respectivamente con el horizonte los ángulos α y β. Los árboles están ligados con un hilo inextensible, cuyos extremos están enrollados sobre los árboles y fijados en éstos.

Determinar la tensión del hilo y su aceleración durante el movimiento sobre los planos inclinados. Considerar los árboles como cilindros circulares homogéneos. El peso del hilo se desprecia.

Respuesta: $T=\dfrac{P_1P_2\operatorname{sen}(\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\beta)}{3(P_1+P_2)}$; $w=g\dfrac{P_1\operatorname{sen}\alpha-P_2\operatorname{sen}\beta}{P_1+P_2}$.



Para el problema 39.22.



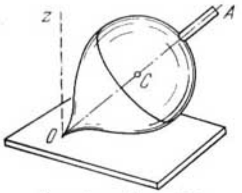
Para el problema 39.23.

39.23. Determinar el período de oscilaciones pequeñas de un disco semicircular homogéneo de radio R, situado sobre un plano horizontal rugoso, sobre el cual puede rodar sin deslizamiento.

Respuesta: $T=\frac{\pi}{2g}\sqrt{2g(9\pi-16)R}$.

§ 40. TEORÍA APROXIMADA DE LOS GIROSCOPIOS

40.1. Un trompo gira en el sentido de las agujas del reloj alrededor de su eje OA con una velocidad angular constante $w=$ $=600\ s^{-1}$; el eje OA está inclinado respecto de la vertical; el extremo inferior del eje O permanece inmóvil; el centro de gravedad C del trompo se encuentra en el eje OA a la distancia $OC=30$ cm del punto O; el radio de inercia del trompo respecto al eje es igual a 10 cm.



Para el problema 40.1.

Determinar el movimiento del eje del trompo OA, considerando el momento principal de las cantidades de movimiento del trompo igual a $J\omega$.

Respuesta: El eje OA gira alrededor de la vertical Oz en el sentido de las agujas del reloj, describiendo un cono circular, con una velocidad constante

$$\omega_1 = 0{,}49\,s^{-1}.$$

40.2. Un trompo que tiene la forma de un disco de 30 cm de diámetro gira con una velocidad angular de $80\,s^{-1}$ alrededor de su eje de simetría. El disco va encajado sobre un eje de 20 cm de longitud, situado a lo largo del eje de simetría del trompo.

Determinar la velocidad angular de la precesión regular del trompo, considerando que el momento principal de las cantidades de movimiento es igual a $J\omega$.

Respuesta: $2{,}18\,s^{-1}$.

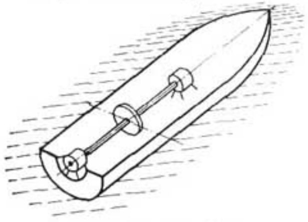
40.3. Una turbina, cuyo eje es paralelo al eje longitudinal del barco, hace 1500 r. p. m. El peso de sus piezas giratorias es de 6 tf, el radio de inercia $\rho = 0{,}7$ m.

Determinar las presiones giroscópicas sobre los cojinetes, si el barco describe un círculo de evolución alrededor del eje vertical, girando 10° por segundo. La distancia entre los rodamientos es $l = 2{,}7$ m.

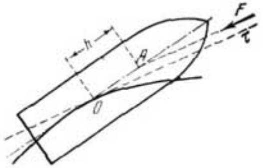
Respuesta: 3050 kgf.

40.4. Determinar las presiones giroscópicas máximas sobre los rodamientos de una turbina de alta velocidad, montada en un barco. El barco experimenta cabeceo con una amplitud de 9° y de un período de 15 s alrededor del eje perpendicular al eje del rotor. El rotor de la turbina, de 3500 kgf de peso y un radio de inercia de 0,6 m, hace 3000 r. p. m. La distancia entre los rodamientos es de 2 m.

Respuesta: 1320 kgf.



Para el problema 40.4.



Para el problema 40.5.

40.5. Determinar el tiempo T de una vuelta completa del eje de simetría de un proyectil artillero alrededor de la tangente a la trayectoria del centro de gravedad de este proyectil. Este movimiento se realiza debido a la acción de la fuerza de resistencia del aire $F=2140$ kgf, dirigida casi paralelamente a la tangente y aplicada al eje del proyectil a la distancia $h=0{,}2$ m del centro de gravedad del mismo. El momento de la cantidad de movimiento del proyectil respecto a su eje de simetría es igual a 590 kgfms.

Respuesta: 8,66 s.

40.6. Una locomotora de turbina de gas se pone en marcha por una turbina cuyo eje es paralelo al eje de las ruedas y gira en la misma dirección que éstas, haciendo 1500 r. p. m. El momento de inercia de las piezas giratorias de la turbina respecto al eje de rotación es $J=20$ kgfms².

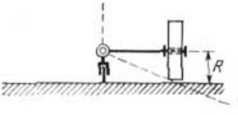
¿Cuál es la presión adicional sobre los rieles, si la locomotora recorre una curva de radio 250 m con una velocidad de 15 m/s? El ancho de la vía es de 1,5 m.

Respuesta: Sobre un riel es de 126 kgf hacia abajo, sobre el otro, 126 kgf hacia arriba.

40.7. En una trituradora cada moleta tiene un peso $P=1200$ kgf, el radio de inercia respecto a su eje es $\rho=0{,}4$ m, el radio R es 0,5 m, el eje de rotación instantáneo de la moleta cruza el centro de la línea de contacto de la moleta con el fondo del vaso.

Determinar la presión de la moleta sobre el fondo horizontal del vaso, si la velocidad angular de rotación de transporte de la moleta alrededor del eje vertical corresponde a $n=60$ r. p. m.

Respuesta: $N=2740$ kgf.



Para el problema 40.7.

Para el problema 40.8.

40.8. Un tren de ruedas de peso $P=1400$ kgf, de radio $a=75$ cm y de radio de inercia respecto a su eje $\rho=\sqrt{0{,}55}\,a$, se desplaza uniformemente con la velocidad $v=20$ m/s por una trayectoria curvilínea de radio $R=200$ m situada en el plano horizontal.

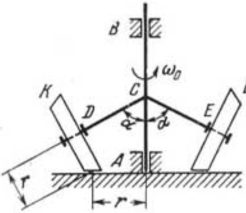
Determinar la presión del tren de ruedas sobre los rieles, si la distancia entre los rieles es $l=1{,}5$ m.

Respuesta: $N=(700\pm 79)$ kgf.

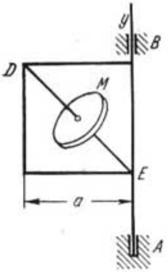
40.9. En el dibujo viene representado el conjunto de la parte giratoria de un puente levadizo. El árbol AB con las barras CD y CE, unidas rígidamente a éste bajo un ángulo α, gira con una velocidad angular ω_0. Los piñones cónicos K y L, montados libremente sobre las barras CD y CE, ruedan sin deslizamiento sobre un piñón plano horizontal fijo.

Determinar las presiones dinámicas suplementarias de los piñones K y L, de peso P cada uno, sobre el piñón fijo horizontal, si los radios de todos los piñones son iguales a r. Considerar los piñones móviles como discos continuos homogéneos.

Respuesta: $\frac{Pr\omega_0^2 \operatorname{sen} \alpha}{2g}$.



Para el problema 40.9.



Para el problema 40.10.

40.10. Un marco cuadrado de lado $a=20$ cm gira alrededor del eje vertical AB con la velocidad angular $\omega_1=2\ s^{-1}$. Un disco M de radio $r=10$ cm gira alrededor del eje ED, que coincide con la diagonal del marco, con una velocidad angular $\omega=300\ s^{-1}$.

Determinar la relación de las presiones laterales suplementarias sobre los apoyos A y B a las presiones estáticas correspondientes. La masa del marco se desprecia. Se supone que la masa del disco está uniformemente repartida por la llanta.

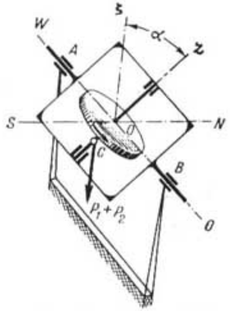
Respuesta: 4,32.

40.11. El eje AB del marco de un giroscopio está instalado horizontalmente en la latitud $\varphi=30°$ a lo largo de la línea $O-W$. El rotor del giroscopio de peso $p_1=2$ kgf y de radio $r=4$ cm gira con una velocidad angular constante $\omega=3000\ s^{-1}$. El centro de gravedad común C del rotor y del marco se encuentra sobre el eje Oz del rotor a una distancia $OC=h$ del eje AB. El momento estático del giroscopio es $H=(p_1+p_2)h=1{,}3$ gfcm.

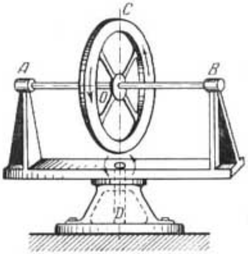
Determinar la posición de equilibrio del marco, es decir, el ángulo α de desviación del eje del rotor Oz en el plano del meridiano de la vertical $O\zeta$ del lugar.

Considerar el rotor como un disco homogéneo.

Respuesta: $\alpha=45°$.



Para el problema 40.11.



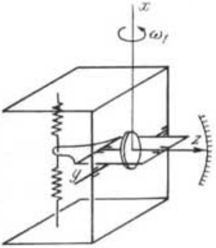
Para el problema 40.12.

40.12. Una rueda de radio a y de peso $2p$ gira alrededor del eje horizontal AB con una velocidad angular constante ω_1; el eje AB gira alrededor del eje vertical CD, que pasa por el centro de la rueda, con una velocidad angular constante ω_2; los sentidos de las rotaciones están indicados en el dibujo con flechas.

Hallar las presiones N_A y N_B sobre los cojinetes A y B, si la longitud $AO=OB=h$; la masa de la rueda está uniformemente repartida por su llanta.

Respuesta: $N_A=p\left(1+\frac{a^2\omega_1\omega_2}{gh}\right)$;

$$N_B=p\left(1-\frac{a^2\omega_1\omega_2}{gh}\right).$$



Para el problema 40.13.

40.13. Un girotacómetro elemental está compuesto de un giroscopio, cuyo marco se soporta por dos resortes fijados en la caja del aparato. El momento de inercia del giroscopio respecto al eje de rotación propia es igual a J, su velocidad angular es igual a ω.

Determinar el ángulo α que girará el eje del giroscopio con el marco, si el aparato está instalado sobre una plataforma que gira con una velocidad angular ω_1 alrededor del eje x perpendicular al eje y de rotación del marco. Los coeficientes de rigidez de los resortes son iguales a c; el ángulo α se considera pequeño; la distancia entre el eje de rotación del marco y los resortes es igual a a.

Respuesta: $\alpha=\frac{J\omega}{2ca}\cdot\omega_1$.

§ 41. MÉTODO DE LA ESTÁTICA CINÉTICA

41.1. Determinar el peso de un disco homogéneo de radio 20 cm que gira alrededor del eje según la ley $\varphi = 3t^2$. El eje pasa por el centro del disco perpendicularmente a su plano; el momento principal de las fuerzas de inercia del disco respecto al eje de rotación es igual a 4 Ncm.

Respuesta: 3,27 N.

41.2. Una barra delgada rectilínea homogénea de largo l y de peso P gira alrededor del eje que pasa por el extremo de la barra, perpendicularmente a ésta, según la ley $\varphi = at^2$.

Hallar las magnitudes, direcciones y puntos de aplicación de las resultantes J_n y J_τ de las fuerzas centrífugas y dinámicas de inercia de las partículas de la barra.

Respuesta: La resultante de las fuerzas dinámicas de inercia $J_\tau = \frac{Pal}{g}$ está dirigida perpendicularmente a la barra y aplicada en el punto que se encuentra en la distancia $\frac{2}{3}l$ del eje de rotación; la resultante de las fuerzas centrífugas de inercia $J_n = \frac{2Pa^2lt^2}{g}$ está dirigida a lo largo de la barra y parte del eje de rotación.

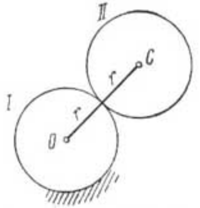
41.3. Una rueda de peso P y de radio r se mueve sin resbalamiento sobre un riel horizontal rectilíneo.

Determinar el vector y momento principales de las fuerzas de inercia respecto al eje trazado por el centro de gravedad de la rueda perpendicularmente al plano del movimiento. Considerar la rueda como un disco continuo homogéneo. El centro de gravedad C se mueve según la ley $x_C = \frac{at^2}{2}$, donde a es una constante positiva. El eje x está dirigido a lo largo del riel.

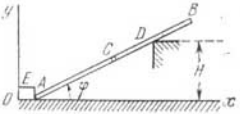
Respuesta: El módulo del vector principal de las fuerzas de inercia es igual a $\frac{P}{g}a$, y está dirigido paralelamente al eje x; el momento principal de las fuerzas de inercia es igual por su magnitud absoluta a $\frac{Par}{2g}$.

41.4. Determinar el vector y el momento principales de las fuerzas de inercia de la rueda móvil II de un mecanismo planetario respecto al eje que pasa por su centro de gravedad C perpendicularmente al plano del movimiento. La manivela OC gira con una velocidad angular constante ω. El peso de la rueda II es igual a P. Los radios de las ruedas son iguales a r.

Respuesta: El vector principal de las fuerzas de inercia es paralelo a la manivela OC e igual a $\frac{2Pr\omega^2}{g}$, el momento principal de las fuerzas de inercia es igual a 0.



Para el problema 41.4.



Para el problema 41.5.

41.5. El extremo A de una barra delgada homogénea AB de largo $2l$ y de peso G se mueve por una guía horizontal con ayuda del tope E con una velocidad constante v, la barra todo el tiempo se apoya en el ángulo D.

Determinar el vector y momento principales de las fuerzas de inercia de la barra respecto al eje trazado por el centro de gravedad C de la barra perpendicularmente al plano del movimiento, en función del ángulo φ.

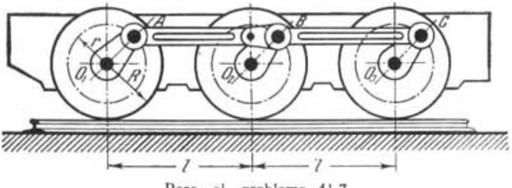
Respuesta: $V_x^{(J)} = 3\frac{G}{g}\frac{v^2}{H^2} l \operatorname{sen}^4\varphi\cos\varphi;$

$$V_y^{(J)} = \frac{G}{g}\frac{v^2}{H^2} l (1-3\cos^2\varphi)\operatorname{sen}^3\varphi;$$

$$m_{Cz}^{(J)} = -\frac{2}{3}\frac{G}{g} l^2 \frac{v^2}{H^2}\operatorname{sen}^3\varphi\cos\varphi.$$

41.6. Valiéndose de los datos del problema anterior, determinar la presión dinámica N_D de la barra sobre el ángulo D.

Respuesta: $N_D = \frac{8}{3}\frac{v^2l^2}{H^3g} G \operatorname{sen}^4\varphi\cos\varphi.$



Para el problema 41.7.

41.7. Una locomotora se desplaza por un tramo rectilíneo de la vía férrea con una velocidad $v = 72$ km/h.

Determinar la presión adicional sobre el riel debida a la fuerza de inercia de la biela de acoplamiento ABC en su posición más baja, que surgiría si admitieramos la ausencia de contrapesos. La biela de acoplamiento pesa 200 kgf, su masa se puede considerar uniformemente distribuida por su largo. El largo de la manivela es $r=0{,}3$ m, el radio de las ruedas es $R=1$ m, las ruedas giran sin resbalamiento.

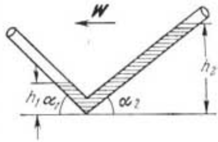
Respuesta: 2,45 tf.

41.8. Una locomotora se desplaza con aceleración uniforme sobre un tramo rectilíneo horizontal de la vía y alcanza la velocidad de 72 km/h, 20 s después del comienzo del movimiento.

Determinar la posición de la superficie libre del agua en el ténder.

Respuesta: Un plano inclinado al horizonte bajo un ángulo $\alpha = \operatorname{arctg} 0{,}102 = 5°50'$.

41.9. Para determinar experimentalmente la deceleración de un trolebús se utiliza un acelerómetro de liquido compuesto de un tubo curvado llenado de aceite y situado en el plano vertical.



Para el problema 41.9.

Determinar la magnitud de la deceleración del trolebús durante el frenado, si en este caso el nivel del liquido en el extremo del tubo situado en la dirección del movimiento sube hasta el valor de h_2 y en el extremo opuesto desciende hasta el valor de h_1. La posición del acelerómetro está indicada en el dibujo: $\alpha_1=\alpha_2=45°$, $h_1=25$ mm, $h_2=75$ mm.

Respuesta: $w=g\frac{(h_2-h_1)\operatorname{tg}\alpha_1\operatorname{tg}\alpha_2}{h_1\operatorname{tg}\alpha_2+h_2\operatorname{tg}\alpha_1}=0{,}5\,g.$

41.10. ¿Con qué aceleración debe desplazarse sobre un plano horizontal un prisma, cuya cara lateral forma con el horizonte un ángulo α, para que una carga situada sobre esta cara lateral no se desplace respecto al prisma?

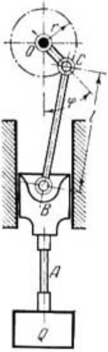
Respuesta: $w=g\operatorname{tg}\alpha$.

41.11. Para estudiar el efecto de las fuerzas de tracción y de compresión, rápidamente alternadas, sobre una barra metálica (prueba de fatiga), el extremo superior de la barra a ensayar A se fija en la corredera B de un mecanismo de manivela BCO y en el extremo inferior se cuelga una carga de peso Q.

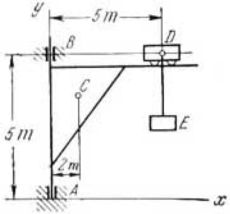
Hallar la fuerza que extiende la barra en el caso cuando la manivela OC gira alrededor del eje O con una velocidad angular constante ω.

Indicación. La expresión $\sqrt{1-\left(\frac{r}{l}\right)^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}$ debe ser desarrollada en serie y luego hace falta omitir todos los términos que contienen la relación $\frac{r}{l}$ a una potencia superior a la segunda.

Respuesta: $Q+\frac{Q}{g} r\omega^2\left(\cos \omega t+\frac{r}{l} \cos 2\omega t\right)$.



Para el problema 41.11.



Para el problema 41.12.

41.12. Determinar las reacciones de apoyo de la quicionera A y del cojinete B de una grúa giratoria durante la subida de una carga E de 3 tf de peso con una aceleración de $\frac{1}{3}g$. El peso de la grúa es de 2 tf y está aplicado a su centro de gravedad C. El peso del carro D es de 0,5 tf. La grúa y el carro están parados. Las dimensiones están indicadas en el dibujo.

Respuesta: $X_A=-X_B=5{,}3$ tf; $Y_A=6{,}5$ tf.

41.13. Determinar las reacciones de apoyo de la quicionera A y del cojinete B de la grúa giratoria examinada en el problema anterior, al desplazarse el carro a la izquierda con la aceleración de 0,5 g; la carga E está ausente. El centro de gravedad del carro se encuentra al nivel del apoyo B.

Respuesta: $X_A=1{,}3$ tf; $X_B=-1{,}55$ tf; $Y_A=2{,}5$ tf.

41.14. Un camión de 7 tf de peso entra con la velocidad de 12 km/h en un transbordador atado a la orilla con ayuda de dos cables paralelos; el recorrido de frenado del camión es igual a 3 m.

Suponiendo que la fuerza de rozamiento de las ruedas sobre el revestimiento del transbordador es constante, determinar la tensión de los cables. La masa y la aceleración del transbordador se desprecian.

Respuesta: $T=0{,}66$ tf.

41.15. Un automóvil de peso P se desplaza rectilíneamente con una aceleración w.

Determinar la presión vertical de las ruedas delanteras y traseras del automóvil, si la altura de su centro de gravedad C sobre la superficie del suelo es igual a h. Las distancias de los ejes delantero y trasero del automóvil a la vertical que pasa por el centro de gravedad son respectivamente iguales a a y b. Las masas de las ruedas se desprecian.

¿Cómo debe moverse el automóvil para que las presiones de las ruedas delanteras y traseras sean iguales?

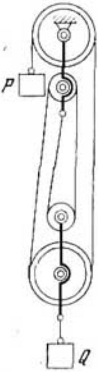
Respuesta: $N_1=\frac{P(gb-wh)}{g(a+b)}$; $N_2=\frac{P(ga+wh)}{g(a+b)}$; cuando el frenado del automóvil se efectúa con una deceleración del

$$w=g\frac{a-b}{2h}.$$

41.16. ¿Con qué aceleración w desciende la carga de peso P, haciendo subir la carga de peso Q con ayuda del polipasto representado en el dibujo? ¿Cuál es la condición del movimiento uniforme de la carga P? Las masas de la polea y del cable se desprecian.

Indicación. La aceleración de la carga Q es cuatro veces menor que la de la carga P.

Respuesta: $w=4g\frac{4P-Q}{16P+Q}$; $\frac{P}{Q}=\frac{1}{4}$.



Para el problema 41.16.

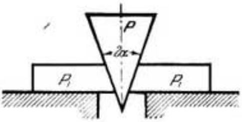
41.17. Una cuña lisa de peso P y de ángulo en el vértice 2α, abre dos placas de peso P_1 cada una situadas en reposo sobre una mesa horizontal lisa.

Escribir las ecuaciones del movimiento de la cuña y de las placas y determinar la presión de la cuña sobre cada una de las placas.

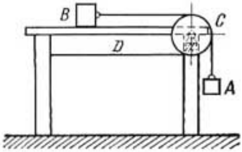
Respuesta: La ecuación del movimiento de la cuña es:

$s=\frac{wt^2}{2}$, donde $w=g\frac{P\operatorname{cotg}\alpha}{P\operatorname{cotg}\alpha+2P_1\operatorname{tg}\alpha}$; la ecuación del movimiento de las placas es:

$s_1=\frac{w_1t^2}{2}$, donde $w_1=w\operatorname{tg}\alpha$; la presión $N=\frac{P_1w_1}{g\cos\alpha}$.



Para el problema 41.17.

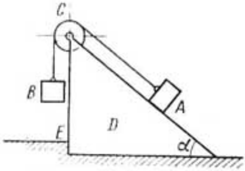


Para el problema 41.18.

41.18. Una carga A de peso P_1, descendiendo por en movimiento, por medio de un hilo inextensible e imponderable pasado sobre la polea C, la carga B de peso P_2.

Determinar la presión de la mesa D sobre el piso, si el peso de la mesa es igual a P_3.

Respuesta: $N = P_1 + P_2 + P_3 - \frac{P_1^2}{P_1 + P_2}$.



Para el problema 41.19.

41.19. Una carga A de peso P_1, descendiendo por un plano inclinado D que forma con el horizonte un ángulo α, pone en movimiento, por medio de un hilo inextensible e imponderable pasado sobre la polea fija C, la carga B de peso P_2.

Determinar la componente horizontal de la presión del plano inclinado D sobre el saliente E del piso.

Respuesta: $N = P_1 \frac{P_1 \operatorname{sen} \alpha - P_2}{P_1 + P_2} \cos \alpha$.

41.20. Para tranquilizar el balanceo del barco, en éste se instalaron tres estabilizadores. La parte principal de cada uno de ellos es un volante de 110 tf de peso. Durante el trabajo de los estabilizadores sus volantes efectúan 910 r.p.m.

Calcular la magnitud de la presión lateral suplementaria sobre los cojinetes pilotos del árbol del volante, provocada por el desplazamiento del centro de gravedad del volante a 1,08 mm respecto al eje de rotación, a causa de la heterogeneidad del metal y de la inexactitud de elaboración del volante.

Respuesta: La presión $N = 109{,}7$ tf y está dirigida a lo largo de la recta que pasa por el eje de rotación y el centro de gravedad.

41.21. Una barra homogénea de peso P y de longitud l gira con una velocidad angular constante ω alrededor de un eje fijo vertical, perpendicular a la barra y que pasa por su extremo.

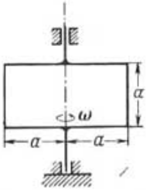
Determinar la fuerza de extensión en la sección transversal de la barra a una distancia a del eje de rotación.

Respuesta: $F=\frac{P(l^2-a^2)\omega^2}{2gl}$.

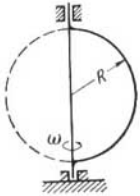
41.22. Una placa rectangular homogénea de peso P gira uniformemente alrededor de un eje vertical con una velocidad angular ω.

Determinar la fuerza de rotura de la placa en la dirección perpendicular al eje de rotación, en la sección transversal que pasa por el eje de rotación.

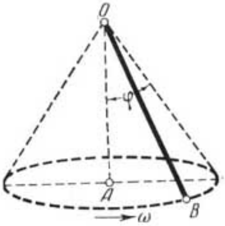
Respuesta: $\frac{Pa\omega^2}{4g}$.



Para el problema 41.22.



Para el problema 41.23.



Para el problema 41.24.

41.23. Un disco circular homogéneo de radio R y de peso P gira con una velocidad angular constante ω alrededor de su diámetro vertical.

Determinar la fuerza de rotura del disco a lo largo del diámetro.

Respuesta: $\frac{2PR\omega^2}{3\pi g}$.

41.24. Una barra fina rectilínea homogénea de longitud l y de peso P gira con una velocidad angular constante ω alrededor de un punto fijo O (una articulación esférica) describiendo una superficie cónica con eje OA y vértice en el punto O.

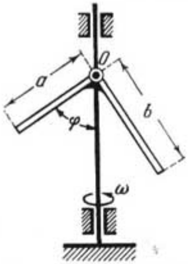
Calcular el ángulo de desviación de la barra de la dirección vertical, así como la magnitud N de la presión que ejerce la barra sobre la articulación O.

Respuesta: $\varphi=\arccos\frac{3g}{2l\omega^2}$; $N=\frac{1}{2}\frac{P}{g}l\omega^2\sqrt{1+\frac{7g^2}{4l^2\omega^4}}$.

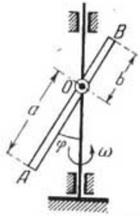
41.25. En un tacómetro centrífugo dos barras finas rectilíneas homogéneas de longitudes a y b están unidas rígidamente bajo un ángulo recto, cuyo, vértice O está articulado con el árbol vertical; el árbol gira con una velocidad angular constante ω.

Hallar la relación entre ω y el ángulo de desviación φ formado por la dirección de la barra de longitud a y la vertical.

Respuesta: $\omega^2 = 3g \dfrac{b^2 \cos\varphi - a^2 \operatorname{sen}\varphi}{(b^3 - a^3) \operatorname{sen} 2\varphi}$.



Para el problema 41.25.



Para el problema 41.26.

41.26. Una barra fina rectilínea homogénea AB está articulada en el punto O con un árbol vertical que gira con una velocidad angular constante ω.

Determinar el ángulo de desviación φ de la barra de la vertical, si $OA = a$ y $OB = b$.

Respuesta: $\cos\varphi = \dfrac{3}{2} \dfrac{g}{\omega^2} \dfrac{a-b}{a^2 - ab + b^2}$.

§ 42. PRESIÓN DEL CUERPO SÓLIDO QUE GIRA SOBRE EL EJE DE ROTACIÓN

42.1. El centro de gravedad de un volante que pesa 3000 kgf se encuentra a la distancia de 1 mm del eje horizontal del árbol; las distancias entre los cojinetes y la rueda son iguales.

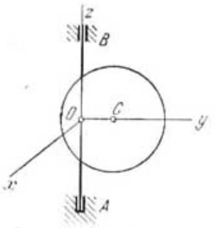
Hallar las presiones sobre los cojinetes cuando el eje hace 1200 r.p.m. El volante tiene el plano de simetría perpendicular al eje de rotación.

Respuesta: La presión sobre cada cojinete es la resultante de dos fuerzas, una de las cuales es igual a 1500 kgf y está dirigida verticalmente, y la otra es igual a 2400 kgf y está dirigida paralelamente a la recta que une el centro geométrico de la rueda, que se encuentra en el eje del árbol, con el centro de gravedad de la rueda.

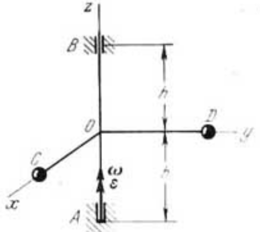
42.2. Un disco circular homogéneo de masa M gira uniformemente con una velocidad angular ω alrededor de un eje inmóvil, situado en el plano del disco a la distancia $OC=a$ de su centro de gravedad C.

Determinar las presiones dinámicas del eje sobre la quicionera A y el rodamiento B, si $OB=OA$. Los ejes x e y están unidos constantemente con el disco.

Respuesta: $X_A=X_B=0$; $\quad Y_A=Y_B=\frac{Ma\omega^2}{2}$.



Para el problema 42.2.



Para el problema 42.3.

42.3. En el eje vertical AB, que gira uniformemente con una aceleración angular ε, se han sujetado dos cargas C y D por medio de dos barras OC y OD mutuamente perpendiculares, y además perpendiculares al eje AB; $OC=OD=r$.

Determinar las presiones dinámicas del eje AB sobre la quicionera A y el rodamiento B. Considerar las cargas C y D como masas puntiformes de peso P cada una. Las masas de las barras se desprecian. En el momento inicial el sistema se encontraba en reposo. Los ejes x e y están ligados constantemente con las barras.

Respuesta: $X_A=X_B=\frac{P}{2g}r\varepsilon(\varepsilon t^2+1)$;

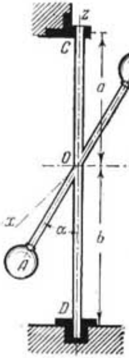
$$Y_A=Y_B=\frac{P}{2g}r\varepsilon(\varepsilon t^2-1).$$

42.4. Una barra AB de longitud $2l$, en cuyos extremos se encuentran cargas de peso P cada una, gira uniformemente con una velocidad angular ω alrededor de un eje vertical Oz que pasa por el punto medio O de la barra. La distancia desde el punto O hasta el cojinete C es igual a a, y hasta la quicionera D, a b. El ángulo entre la barra AB y el eje Oz mantiene una magnitud constante α.

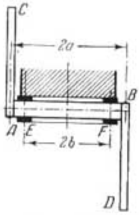
Sin tener en cuenta el peso de la barra y las dimensiones de las cargas, determinar las proyecciones de las presiones sobre el cojinete C y la quicionera D en el momento cuando la barra se encuentra en el plano Oyz.

Respuesta: $X_C = X_D = 0$; $Y_C = -Y_D = \frac{Pl^2\omega^2 \operatorname{sen} 2\alpha}{g(a+b)}$;

$Z_D = -2P$.



Para el problema 42.4.



Para el problema 42.5.

42.5. En los extremos del eje AB se han encajado dos manivelas idénticas AC y BD de longitud l y de peso Q, enchavetadas bajo un ángulo de 180° una respecto a la otra. El eje AB de longitud $2a$ y de peso P gira en los cojinetes E y F, situados simétricamente a la distancia $2b$ uno del otro, con una velocidad angular constante ω.

Determinar las presiones N_E y N_F sobre los cojinetes en el momento cuando la manivela AC está dirigida verticalmente hacia arriba. Se puede considerar la masa de cada manivela uniformemente repartida a lo largo de su eje.

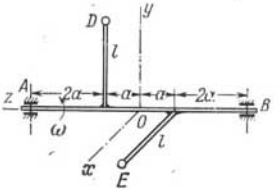
Respuesta: La presión $N_E = \frac{1}{2}P + Q - \frac{al\omega^2}{2bg}Q$, cuando $N_E > 0$ está dirigida verticalmente hacia abajo, cuando $N_E < 0$, verticalmente hacia arriba.

La presión $N_F = \frac{1}{2}P + Q + \frac{al\omega^2}{2bg}Q$ está dirigida verticalmente hacia abajo.

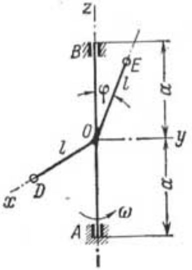
42.6. A un eje horizontal AB, que gira con una velocidad angular constante ω, están sujetadas dos barras iguales perpendiculares a éste, cuya longitud es l y situadas en planos mutuamente perpendiculares (véase el dibujo). En los extremos de la barras se encuentran dos esferas D y E con masa m cada una.

Determinar la presión dinámica del eje sobre los apoyos A y B. Considerar las esferas como puntos materiales, no tener en cuenta las masas de las barras.

Respuesta: $N_A = N_B = \frac{\sqrt{5}}{3} ml\omega^2$.



Para el problema 42.6.



Para el problema 42.7.

42.7. Al eje vertical AB, que gira con una velocidad angular constante ω, están sujetadas rígidamente dos barras. La barra OE forma con el eje un ángulo φ, la barra OD es perpendicular al plano en el que se encuentran el eje AB y la barra OE. Vienen dadas las dimensiones: $OE = OD = l$, $AB = 2a$. En los extremos de las barras están sujetadas dos esferas E y D con masa m cada una.

Determinar las presiones dinámicas del eje sobre los apoyos A y B. Considerar las esferas D y E como masas puntiformes, no tomar en cuenta las masas de las barras.

Respuesta: $X_A = X_B = \frac{ml\omega^2}{2}$;

$$Y_A = \frac{ml\omega^2 (a - l\cos\varphi)\,\text{sen}\,\varphi}{2a};$$

$$Y_B = \frac{ml\omega^2 (a + l\cos\varphi)\,\text{sen}\,\varphi}{2a}.$$

42.8. Utilizando los datos del problema 34.1, determinar la presión dinámica del cigüeñal sobre los cojinetes K y L. El cigüeñal gira uniformemente con la velocidad angular ω. Durante la resolución del problema se pueden usar las respuestas de los problemas 34.1 y 34.24.

Respuesta: $X_K = -X_L = \frac{3}{2} md \frac{a+b}{4a+3b} \omega^2$;

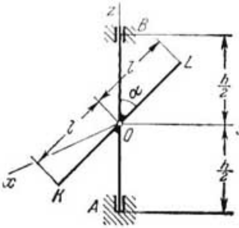
$$Y_K = -Y_L = \frac{\sqrt{3}}{2} md \frac{a+b}{4a+3b} \omega^2.$$

42.9. Una barra homogénea KL, fijada por su centro en un eje vertical AB bajo un ángulo α, gira uniformemente alrededor de este eje con una aceleración angular ε.

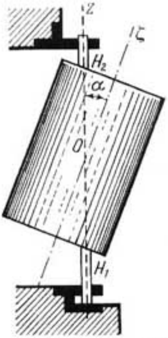
Determinar la presión dinámica del eje AB sobre la quicionera A y el cojinete B, si: P es el peso de la barra, $2l$ es su longitud, $OA=OB=h/2$; $OK=OL=l$. En el instante inicial el sistema estaba en reposo.

Respuesta: $X_B=-X_A=\frac{Pl^2}{6gh}\varepsilon \operatorname{sen} 2\alpha$;

$$Y_B=-Y_A=\frac{Pl^2}{6gh}\varepsilon^2 t^2 \operatorname{sen} 2\alpha.$$



Para el problema 42.9.



Para el problema 42.10.

42.10. Un cilindro recto circular homogéneo de peso P, de longitud $2l$ y de radio r gira con una velocidad angular constante ω alrededor del eje vertical Oz que pasa por el centro de gravedad O del cilindro; el ángulo α entre el eje del cilindro $O\zeta$ y el eje Oz es constante. La distancia H_1H_2 entre la quicionera y el cojinete es igual a h.

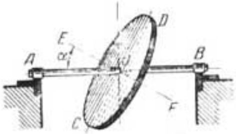
Determinar las presiones laterales: N_1 sobre la quicionera y N_2 sobre el cojinete.

Respuesta: Las presiones N_1 y N_2 tienen la misma magnitud

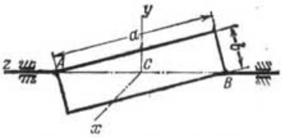
$$P\frac{\omega^2 \operatorname{sen} 2\alpha}{2gh}\left(\frac{1}{3}l^2-\frac{1}{4}r^2\right),$$

pero son de sentidos opuestos.

42.11. Calcular las presiones sobre los cojinetes A y B durante la rotación de un disco fino circular homogéneo CD de una turbina de vapor alrededor del eje AB, suponiendo que este eje pasa por el centro O del disco, pero, a causa del ensanchamiento incorrecto del manguito, forma con la perpendicular al plano del disco el ángulo $AOE = \alpha = 0{,}02$ rad. Viene dado: el peso del disco es de 3,27 kgf, su radio es igual a 20 cm, la velocidad angular corresponde a 30 000 r.p.m., la distancia $AO = 50$ cm, $OB = 30$ cm; el eje AB se considera absolutamente rígido, se acepta que sen $2\alpha = 2\alpha$.



Para el problema 42.11.



Para el problema 42.12.

Respuesta: Las presiones causadas por el peso del disco son: 1,23 kgf sobre el cojinete A y 2,04 kgf sobre el B: las presiones sobre los cojinetes provocadas por la rotación del disco tienen una misma magnitud igual a 822 kgf, pero son de sentidos opuestos.

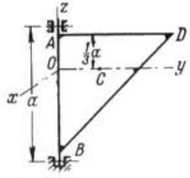
42.12. Una placa homogénea rectangular de peso P gira uniformemente alrededor de su diagonal AB con la velocidad angular ω.

Determinar las presiones dinámicas de la placa sobre los apoyos A y B, si las longitudes de los lados son a y b.

Respuesta: $X_A = 0;\; Y_A = \dfrac{-Pab\omega^2(a^2 - b^2)}{12g(a^2 + b^2)^{3/2}};$

$$X_B = 0;\; Y_B = \frac{Pab\omega^2(a^2 - b^2)}{12g(a^2 + b^2)^{3/2}}.$$

42.13. ¿Con qué velocidad angular debe girar elrededor del cateto $AB = a$ una placa homogénea, que tiene la forma de un triángulo rectángulo isósceles ABD, para que la presión lateral sobre el apoyo inferior B sea igual a cero? Considerar que la distancia entre los apoyos equivale a la longitud del cateto AB.



Respuesta: $\omega = 2\sqrt{\dfrac{g}{a}}$.

Para el problema 42.13.

42.14. La parte giratoria de una grúa se compone de un brazo CD de longitud L y de peso G, de un contrapeso E y de una carga K de pesos iguales a P (véase el dibujo para el problema 34.34). Durante la conexión del momento de frenado constante la grúa, que hasta este instante giraba con una velocidad angular correspondiente a $n = 1{,}5$ r.p.m., se para dentro de $2s$.

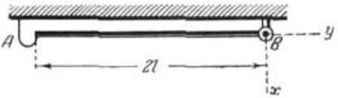
Considerando el brazo como una vig fina homogénea, y el contrapeso junto con la carga como masas puntiformes, determinar *las reacciones dinámicas de los apoyos A y B de la grúa al final* de su frenado. La distancia entre los apoyos de la grúa es $AB = 3$ m, $P = 5$ tf, $G = 8$ tf, $\alpha = 45°$, $L = 30$ m, $l = 10$ m, el centro de gravedad de todo el sistema se encuentra sobre el eje de rotación; la desviación de la carga del plano de la grúa se desprecia. Los ejes x, y *están ligados con la grúa. El brazo CD se halla en el plano yz.*

Indicación. Utilizar la respuesta del problema 34.34. (haciendo $Q = P$).

Respuesta: $Y_A = -Y_B = 0$; $X_B = -X_A \cong 6,2$ tf.

§ 43. PROBLEMAS MIXTOS

43.1. Una viga pesada homogénea AB de longitud $2l$ y de peso Q, tiene los extremos fijos y se encuentra en posición horizontal. *En un momento determinado el extremo A se libera* y la viga empieza a caer girando alrededor del eje horizontal que pasa por el extremo B; en el momento cuando la viga se encuentra en posición vertical, se libera el extremo B.



Para el problema 43.1.

Determinar la trayectoria del centro de gravedad y la velocidad angular ω para el movimiento posterior de la viga.

Respuesta: 1) La parábola $y^2 = 3lx - 3l^2$;

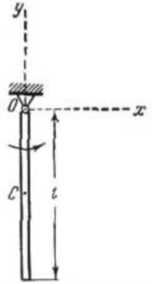
$$2)\ \omega = \sqrt{\frac{3g}{2l}}.$$

43.2. Una barra pesada homogénea de longitud l está suspendida por su extremo superior de un eje horizontal O. Cuando la barra se encontraba en la posición vertical se le transmitió una velocidad angular $\omega_0 = 3\sqrt{\frac{g}{l}}$. Al dar media vuelta la barra se libera del eje O.

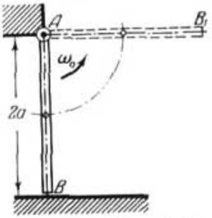
Determinar la trayectoria del centro de gravedad y la velocidad angular de rotación ω para el movimiento posterior de la barra.

Respuesta: 1) La parábola $y_C = \frac{l}{2} - \frac{2}{3l} x_C^2$;

$$2)\ \omega = \sqrt{\frac{3g}{l}}.$$



Para el problema 43.2.



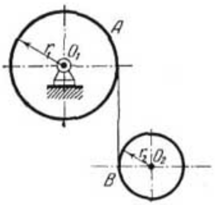
Para el problema 43.3.

43.3. Una barra homogénea AB de longitud $2a$ está suspendida por su extremo A; el otro extremo B se encuentra cerca del piso. Comunicando a la barra una velocidad angular inicial ω_0 se libra el extremo A en el instante cuando la barra está en la posición horizontal. El movimiento ulterior de la barra libre se efectúa sólo bajo la acción de la fuerza de gravedad.

Hallar para qué velocidad inicial ω_0 la barra caerá sobre el piso en posición vertical.

Respuesta: $\omega_0^2 = \frac{g}{4a}\left[6 + \frac{\pi^2(2k+1)^2}{\pi(2k+1)+2}\right]$,
donde $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$

43.4. Dos hilos flexibles están enrollados sobre dos cilindros circulares homogéneos A y B de pesos respectivamente iguales a P_1 y P_2 y de radios r_1 y r_2; las espiras de estos hilos están dispuestas simétricamente respecto a los planos medios, paralelos a las bases de los cilindros; los ejes de los cilindros son horizontales, sus generatrices son perpendiculares a las líneas de máxima pendiente. El eje del cilindro A es fijo; el cilindro B cae del estado de reposo bajo la acción de la fuerza de gravedad.



Para el problema 43.4.

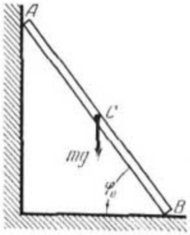
Determinar en el instante t después del comienzo del movimiento, suponiendo que los hilos siguen aún enrollados sobre los dos cilindros: 1) las velocidades angulares ω_1 y ω_2 de los cilindros 2) el camino s recorrido por el centro de gravedad del cilindro B, 3) la tensión T de los hilos.

14* Зак. 1374/516

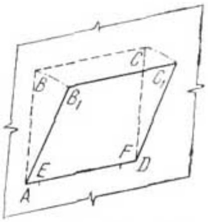
Respuesta: 1) $\omega_1 = \dfrac{2gP_2}{r_1(3P_1+2P_2)}\,t$, $\quad \omega_2 = \dfrac{2gP_1}{r_2(3P_1+2P_2)}\,t$;

$$2)\ s = \frac{g(P_1+P_2)}{3P_1+2P_2}\,t^2; \quad 3)\ T = \frac{P_1P_2}{2(3P_1+2P_2)}.$$

43.5. Una barra homogénea AB de longitud a se ha colocado en un plano vertical bajo un ángulo φ_0 respecto al horizonte de tal modo que con su extremo A se apoya en una pared lisa vertical, y con el extremo B, en un piso liso horizontal; luego la barra se deja caer sin velocidad inicial.



Para el problema 43.5.



Para el problema 43.7.

1) Determinar la velocidad angular y la aceleración angula de la barra.

2) Hallar el ángulo φ_1 que formará la barra con el horizonte en el instante cuando ésta se aleje de la pared.

Respuesta: 1) $\dot\varphi = -\sqrt{\dfrac{3g}{a}(\operatorname{sen}\varphi_0 - \operatorname{sen}\varphi)}$, $\quad \ddot\varphi = \dfrac{3g}{2a}\cos\varphi$;

$$2)\ \operatorname{sen}\varphi_1 = \frac{2}{3}\operatorname{sen}\varphi_0.$$

43.6. Utilizando los datos del problema anterior, determinar la velocidad angular $\dot\varphi$ de la barra y la velocidad de su extremo inferior en el instante cuando la barra cae sobre el piso.

Respuesta: $\dot\varphi = \sqrt{\dfrac{3g}{a}\left(1-\dfrac{1}{9}\operatorname{sen}^2\varphi_0\right)\operatorname{sen}\varphi_0}$;

$$v_A = \frac{1}{3}\operatorname{sen}\varphi_0\sqrt{ga\operatorname{sen}\varphi_0}.$$

43.7. Una tabla fina homogénea $ABCD$ de forma rectangular y de altura $AB = 2l$, está adosada a un muro vertical y se apoya sobre dos clavos lisos E y F sin cabezas; la distancia $AE = FD$. En un instante determinado la tabla comienza a caer con una velocidad angular inicial infinitamente pequeña, girando alrededor de la recta AD.

Determinar el ángulo α que formará la tabla con el muro en el instante cuando ella salte de los clavos. El caso de deslizamiento de la tabla sobre los clavos sin saltar de éstos se excluye.

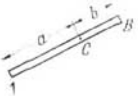
Respuesta: $\alpha = \arccos\frac{1}{3} = 70°32'$.

43.8. Dos discos giran alrededor de un mismo eje con velocidades angulares ω_1 y ω_2; los momentos de inercia de los discos respecto a este eje son J_1 y J_2.

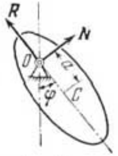
Determinar la pérdida de energía cinética en el caso cuando ambos discos se acoplan bruscamente por un embrague de fricción de masa despreciable.

Respuesta: $\Delta T = \frac{1}{2}\frac{J_1 J_2}{J_1 + J_2}(\omega_1 - \omega_2)^2$.

43.9. La aceleración angular de una barra AB de masa m en un movimiento plano es en el instante examinado igual a ε. El radio de inercia de la barra respecto al eje que pasa por su centro de gravedad C perpendicularmente al plano de movimiento de la barra es igual a ρ; las distancias desde el centro de gravedad C a los extremos A y B son respectivamente iguales a a y b. La masa de la barra se reemplaza por dos masas puntiformes concentradas en los extremos A y B de tal modo que la suma de las masas reducidas es igual a la masa de la barra, y el centro de inercia de las masas reducidas coincide con el centro de gravedad de la barra.



Para el problema 43.9.



Para el problema 43.10.

Determinar si el vector principal y el momento principal de las fuerzas de inercia de las masas reducidas son respectivamente iguales al vector principal y al momento principal de las fuerzas de inercia de la barra.

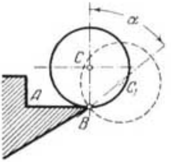
Respuesta: Los vectores principales de las fuerzas de inercia de las masas reducidas y de la barra son geométricamente iguales, los momentos principales se diferencian en la magnitud
$m(ab - \rho^2)\,\varepsilon$.

43.10. Un cuerpo sólido de peso P oscila alrededor de un eje horizontal O perpendicular al plano del dibujo. La distancia del eje de suspensión al centro de gravedad C es igual a a; el radio de inercia del cuerpo respecto al eje que pasa por el centro de gravedad perpendicularmente al plano del dibujo es igual a ρ. En el instante inicial el cuerpo fue desviado de su posición de equilibrio a un ángulo φ_0 y abandonado sin velocidad inicial.

Determinar las dos componentes $\boldsymbol{R}$ y $\boldsymbol{N}$ de la reacción del eje situadas a lo largo de la dirección que pasa por el punto de suspensión y por el centro de gravedad del cuerpo perpendicularmente a éste. Expresarlas en función del ángulo φ de desviación del cuerpo de la vertical.

Respuesta: $R = P\cos\varphi + \dfrac{2Pa^2}{\rho^2+a^2}(\cos\varphi - \cos\varphi_0);$

$$N = P\frac{\rho^2}{\rho^2+a^2}\operatorname{sen}\varphi.$$



Para el problema 43.11.

43.11. Un cilindro pesado homogéneo, al recibir una velocidad inicial infinitamente pequeña cae sin deslizamiento de una plazuela horizontal AB, cuyo borde B está afilado y es paralelo a la generatriz del cilindro. El radio de la base del cilindro es r. En el instante cuando el cilindro se separa de la plazuela el plano que pasa por el eje del cilindro y el borde B forma con la posición vertical un ángulo $CBC_1 = \alpha$.

Determinar la velocidad angular del cilindro en el instante cuando éste se separa de la plazuela, así como el ángulo α. El rozamiento de rodadura y la resistencia del aire se desprecian.

Respuesta: $\omega = 2\sqrt{\dfrac{g}{7r}}; \quad \alpha = \arccos\dfrac{4}{7} = 55{,}1^\circ.$

43.12. Sobre la superficie lateral de un cilindro circular de eje vertical, alrededor del cual éste puede girar sin rozamiento, se han recortado una ranura lisa helicoidal de ángulo de paso α. En el instante inicial el cilindro está en reposo; en la ranura se mete una bola pesada que cae por la ranura sin velocidad inicial y hace girar el cilindro. Viene dado: la masa del cilindro es M, su radio es R, la masa de la bola es m; la distancia entre la bola y el eje se considera igual a R, el momento de inercia del cilindro es igual a $\frac{1}{2}MR^2$.

Determinar la velocidad angular ω del cilindro en el instante cuando la bola desciende a una distancia h.

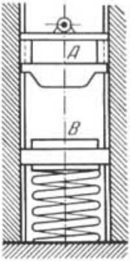
Respuesta: $\omega = \dfrac{2m\cos\alpha}{R}\sqrt{\dfrac{2gh}{(M+2m)(M+2m\operatorname{sen}^2 2\alpha)}}.$

§ 44. CHOQUE

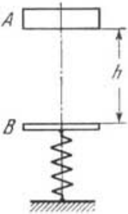
44.1. La maza A de un martinete de percusión cae desde una altura de 4,905 m y choca contra el yunque B sujetado a un muelle. El peso de la maza es de 10 kgf, el peso del yunque, 5 kgf.

Determinar con qué velocidad empieza él movimiento del yunque después del choque, si la maza se mueve junto con éste.

Respuesta: 6,54 m/s.



Para el problema 44.1.



Para el problema 44.2.

44.2. Una carga A de peso P cae sin velocidad inicial desde una altura h contra la losa B del peso p sujetada a un muele cuyo coeficiente de rigidez es igual a c.

Hallar la magnitud s de compresión del muelle después del choque suponiendo que el coeficiente de recuperación es igual a 0.

Respuesta: $s = \frac{P}{c} + \sqrt{\frac{P^2}{c^2} + 2h\frac{P^2}{c(P+p)}}$.

44.3. En un aparato para la determinación experimental del coeficiente de recuperación una bola hecha del material a experimentar cae sin velocidad inicial dentro de un tubo de cristal vertical desde una altura determinada $h_1 = 50$ cm contra una placa fija horizontal de un material correspondiente.

Determinar el coeficiente de recuperación, si después del choque la bola saltó a la altura $h_2 = 45$ cm.

Respuesta: $k = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}} = 0{,}95$.

44.4. Una bola elástica cae verticalmente desde una altura h sobre una placa horizontal, bota hacia arriba, cae de nuevo sobre la placa, etc. repitiendo estos movimientos.

Hallar el camino recorrido por la bola hasta pararse, si el coeficiente de recuperación durante el choque es igual a k.

Respuesta: $s=\frac{1+k^2}{1-k^2}h$.

44.5. Un martinete a vapor de 12 tf de peso cae con una velocidad de 5 m/s sobre un yunque, cuyo peso junto con el de la pieza a forjar es igual a 250 tf.

Hallar el trabajo A_1, que se absorbe por la pieza a forjar, y el trabajo A_2, perdido en el estremecimiento del cimiento, así como calcular el rendimiento η del martinete; el choque no es elástico.

Respuesta: $A_1=14\,600$ kgfm; $A_2=700$ kgfm; $\eta=0{,}95$.

44.6. Hallar las velocidades después del choque absolutamente elástico de dos bolas idénticas que se desplazan al encuentro una de la otra con las velocidades v_1 y v_2.

Respuesta: Después del choque las bolas cambian sus velocidades.

44.7. Dos bolas elásticas idénticas A y B se desplazan al encuentro una de la otra.

¿Para qué relación de velocidades antes del choque la bola A se parará después del choque? El coeficiente de recuperación durante el choque es igual a k.

Respuesta: $\frac{v_A}{v_B}=\frac{1+k}{1-k}$.

44.8. Determinar la relación de las masas m_1 y m_2 de dos bolas en los dos casos siguientes: 1) la primera bola está en reposo; se efectúa un choque central, después del cual la segunda bola se queda en reposo; 2) las bolas se encuentran con volocidades iguales pero de sentidos opuestos; después del choque central la segunda bola permanece en reposo. El coeficiente de recuperación es igual a k.

Respuesta: 1) $\frac{m_2}{m_1}=k$; 2) $\frac{m_2}{m_1}=1+2k$.

44.9. Tres bolas absolutamente elásticas de masas m_1, m_2 y m_3 se hallan en una ranura lisa a cierta distancia entre sí. La primera bola, lanzada con cierta velocidad inicial, choca con la segunda que está en reposo, ésta, adquiriendo movimiento choca a su vez con la tercera bola que permanece en reposo.

¿Cuál debe ser la magnitud de la masa m_2 de la segunda bola para que la velocidad de la tercera sea máxima?

Respuesta: $m_2=\sqrt{m_1m_3}$.

44.10. Una bola de peso m_1 que se desplaza uniformemente con la velocidad v_1 choca con una bola de masa m_2 en reposo, de tal modo que su velocidad durante el choque forma un ángulo α con la línea que une los centros de las bolas.

Determinar: 1) la velocidad de la primera bola después del choque, suponiendo que el choque es absolutamente inelástico; 2) la velocidad de cada bola después del choque, suponiendo que el choque es elástico con un coeficiente de recuperación igual a k.

Respuesta: 1) $u_1 = v_1 \sqrt{\operatorname{sen}^2\alpha + \left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right)^2 \cos^2\alpha}$;

2) $u_1 = v_1 \sqrt{\operatorname{sen}^2\alpha + \left(\frac{m_1 - km_2}{m_1+m_2}\right)^2 \cos^2\alpha}$,

$u_2 = v_1 \frac{m_1(1+k)\cos\alpha}{m_1+m_2}$.

44.11. Una bola absolutamente elástica, cuyo centro se desplaza rectilíneamente con la velocidad, v, choca bajo un ángulo α contra un plano vertical liso.

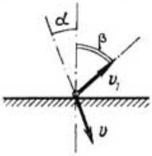
Determinar la velocidad de la bola después del choque.

Respuesta: El ángulo de rebote es igual al ángulo de incidencia, los módulos de las velocidades antes del choque y después de éste son iguales.

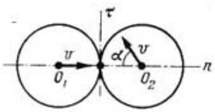
44.12. Una bola de acero cae sobre una placa de acero horizontal bajo un ángulo de 45° y rebota bajo un ángulo de 60° respecto a la vertical.

Calcular el coeficiente de recuperación durante el choque.

Respuesta: $k = 0{,}58$.



Para el problema 44.13.



Para el problema 44.14.

44.13. Una bola cae oblicuamente sobre un plano horizontal fijo con la velocidad v y rebota del plano con la velocidad $v_1 = \frac{v\sqrt{2}}{2}$.

Determinar el ángulo de caída α y el ángulo de rebote β, si el coeficiente de recuperación durante el choque es $k = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

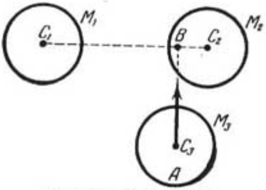
Respuesta: $\alpha = \frac{\pi}{6}$; $\beta = \frac{\pi}{4}$.

44.14. Dos bolas idénticas absolutamente elásticas, en movimiento de translación, chocan con velocidades de un mismo módulo v. Antes del choque, la velocidad de la bola izquierda estaba dirigida hacia la derecha a lo largo de la línea de los centros de las bolas, la velocidad de la bola derecha, formaba con dicha línea un ángulo α (véase el dibujo).

Hallar las velocidades de las bolas después del choque.

Respuesta: $u_{1n} = -v\cos\alpha$; $u_{1\tau} = 0$; $u_{2n} = v$; $u_{2\tau} = v \operatorname{sen}\alpha$.

El eje n está dirigido por la línea de centros a la derecha, el eje τ, hacia arriba.



Para el problema 44.15.

44.15 Hay tres bolas idénticas: M_1, M_2, M_3 de radio R, la distancia entre los centros $C_1C_2 = a$.

Determinar sobre qué recta AB, perpendicular a línea C_1C_2, debe encontrarse el centro C_3 de la tercera bola para que ésta, después de recibir una velocidad inicial dirigida por AB, al chocar con la bola M_2 le dé un golpe central a la bola M_1; las bolas son absolutamente elásticas y tienen movimiento de translación.

Respuesta: La distancia de la recta AB al centro C_2 es igual a $BC_2 = \frac{4R^2}{a}$.

44.16. Para consolidar el suelo para el cimiento de un edificio se hincan pilotes de peso $P = 50$ kgf con un martinete, cuyo percutor de peso $P_1 = 450$ kgf cae sin velocidad inicial desde una altura $h = 2$ m; durante los últimos diez golpes el pilote se profundiza a una distancia $\delta = 5$ cm.

Determinar la resistencia media del suelo al hincar el pilote. Considerar el golpe inelástico.

Respuesta: $S = 16{,}2$ tf.

44.17. Dos bolas de masas m_1 y m_2 están suspendidas de dos hilos paralelos de longitudes l_1 y l_2 de tal modo que sus centros se encuentran a una misma altura. La primera bola ha sido desviada de la vertical a un ángulo α_1 y luego abandonada sin velocidad inicial.

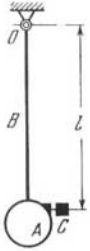
Determinar el ángulo de desviación límite α_2 de la segunda bola, si el coeficiente de recuperación es igual a k.

Respuesta: $\operatorname{sen}\frac{\alpha_2}{2} = \frac{m_1(1+k)}{m_1+m_2}\sqrt{\frac{l_1}{l_2}}\operatorname{sen}\frac{\alpha_1}{2}$.

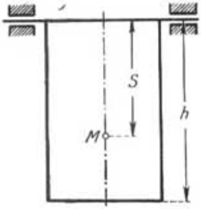
44.18. El péndulo de una máquina de golpear se compone de un disco de acero A de 10 cm de radio y de 5 cm de anchura y de una barra de acero circular B de 2 cm de diámetro y de 90 cm de longitud.

¿A qué distancia l del plano horizontal, en el que se halla el eje de rotación O, debe ser colocada la pieza a golpear C para que el eje no soporte el golpe? El impulso de golpe está situado en el plano del dibujo y está dirigido horizontalmente.

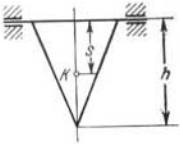
Respuesta: $l = 97{,}5$ cm.



Para el problema 44.18.



Para el problema 44.19.



Para el problema 44.20.

44.19. Determinar la posición del centro de impacto de un blanco rectangular de tiro. La altura del blanco es igual a h.

Respuesta: $s = \frac{2}{3} h$.

44.20. Determinar la posición del centro de impacto K de un blanco triangular de tiro. La altura del blanco es igual a h.

Respuesta: $s = \frac{1}{2} h$.

44.21. Dos poleas giran en un mismo plano alrededor de sus ejes con las velocidades angulares ω_{10} y ω_{20}.

Determinar las velocidades angulares ω_1 y ω_2 de las poleas después de acoplarlas con una correa. Considerar las poleas como discos circulares de igual densidad y de radios R_1 y R_2; el deslizamiento y la masa de la correa se desprecian.

Respuesta: $\omega_1 = \dfrac{R_1^3\omega_{10} + R_2^3\omega_{20}}{R_1(R_1^2 + R_2^2)}$;

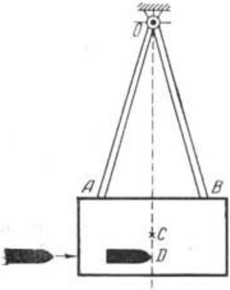
$$\omega_2 = \frac{R_1^3\omega_{10} + R_2^3\omega_{20}}{R_2(R_1^2 + R_2^2)}.$$

44.22. El péndulo balistico que se utiliza para medir la velocidad de un proyectil, se compone de un cilindro AB suspendido del eje horizontal O, el cilindro está abierto por el extremo A y está lleno de arena; el proyectil al entrar en el cilindro provoca el giro del péndulo alrededor del eje O un ángulo determinado.

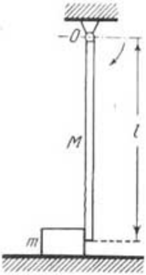
Está dado: M es la masa del péndulo; $OC=h$ es la distancia entre su centro de gravedad C y el eje O; ρ es el radio de inercia respecto al eje O; m es la masa del proyectil; $OD=a$ es la distancia entre la línea de acción del impulso de golpe y el eje; α es el ángulo de desviación del péndulo.

Determinar la velocidad del proyectil suponiendo que el eje O del péndulo no sufre el golpe; $ah=\rho^2$.

Respuesta: $v=\frac{2(Mh+ma)}{m}\sqrt{\frac{g}{a}}\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}$.



Para el problema 44.22.

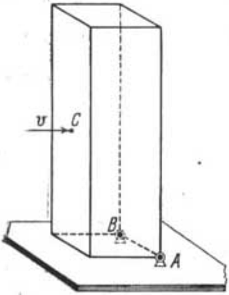


Para el problema 44.23.

44.23. Una barra homogénea de masa M y de longitud l, fijada por su extremo superior en la articulación cilíndrica O, cae sin velocidad inicial de la posición horizontal. En la posición vertical la barra golpea un cuerpo de masa m y le comunica movimiento sobre un plano horizontal rugoso. El coeficiente de rozamiento de deslizamiento es f.

Determinar el camino recorrido por la carga, considerando el golpe inelástico.

Respuesta: $s=\frac{3l}{2f}\frac{M^2}{(M+3m^2)}$.



Para el problema 44.24.

44.24. Un prisma recto homogéneo de base cuadrada está situado sobre un plano horizontal y puede girar alrededor de la arista AB que se halla en este mismo plano. La arista de la base del prisma es igual a a, su altura es $3a$, la masa es $3m$. Una bola de masa m choca contra el centro C de la cara lateral opuesta a la arista AB con una velocidad horizontal v.

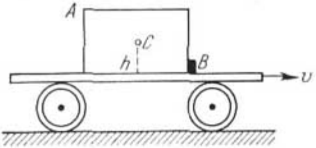
Suponiendo que el golpe es inelástico y la masa de la bola está concentrada en su centro, que después del golpe permanece en el punto C, determinar el valor mínimo de la velocidad v para el cual el prisma se tumbará.

Respuesta: $v = \frac{1}{3}\sqrt{53\, ga}$.

44.25. Una plataforma con la carga prismática AB, situada sobre ésta, rueda sobre rieles horizontales con la velocidad v. La plataforma tiene un saliente contra el cual se apoya la arista B de la carga, impidiendo que ésta se deslice por la plataforma hacia adelante, pero sin molestar el giro alrededor de la arista B. Está dado: h es la altura del centro de gravedad de la carga sobre la plataforma, ρ es el radio de inercia de la carga respecto a la arista B.

Determinar la velocidad angular ω de rotación de la carga alrededor de la arista B en el instante de la parada instantánea de la plataforma.

Respuesta: $\omega = \frac{hv}{\rho^2}$.



Para el problema 44.25.

44.26. Suponiendo que con los datos del problema anterior la carga es un paralelepípedo rectangular homogéneo, la longitud de la arista del cual a lo largo de la plataforma es igual a 4 m, y la altura es de 3 m, hallar la velocidad con la cual la carga se tumbará.

Respuesta: $v = 30{,}7$ km/h.

§ 45. DINÁMICA DEL PUNTO Y DEL SISTEMA DE MASA VARIABLE (DE COMPOSICIÓN VARIABLE)

45.1. Plantear la ecuación de movimiento de un péndulo de masa variable en un medio cuya resistencia es proporcional a la velocidad. La masa del péndulo varía según la ley dada $m = m(t)$ por medio de la separación de las partículas, la velocidad relativa de las cuales es igual a 0. El largo del hilo del péndulo es l. El péndulo sufre la acción de la fuerza de resistencia que es proporcional a su velocidad angular: $R=-\beta\dot{\varphi}$.

Respuesta: $\ddot{\varphi}+\frac{\beta}{m(t)\,l}\dot{\varphi}+\frac{g}{l}\operatorname{sen}\varphi=0.$

45.2. Hallar la ecuación diferencial del movimiento ascendente de un cohete. La velocidad efectiva v_e de eyección de los gases *) se considera constante. La masa del cohete varía según la ley $m=m_0f(t)$ (la ley de combustión). La fuerza de resistencia del aire es la función dada de la velocidad y la posición del cohete: $R(x, \dot{x})$.

Respuesta: $\ddot{x}=-g-\frac{\dot{f}(t)}{f(t)}v_e-\frac{R(x,\dot{x})}{m_0f(t)}.$

45.3. Integrar la ecuación de movimiento en el problema anterior para $m=m_0(1-\alpha t)$ y $R=0$. La velocidad inicial del cohete sobre la superficie de la tierra es igual a cero. ¿A qué altura se encontrará el cohete en los instantes $t=10, 30, 50$ s siendo $v_e=2000$ m/s y $\alpha=\frac{1}{100}\,\text{s}^{-1}$?

Respuesta: $x(t)=\frac{v_e}{\alpha}[(1-\alpha t)\ln(1-\alpha t)+\alpha t]-\frac{gt^2}{2}$;

$x(10)=0{,}54$ km; $x(30)=5{,}65$ km; $x(50)=18{,}4$ km.

45.4. Un cohete de masa inicial m_0 asciende verticalmente en el campo homogéneo de la fuerza de gravedad con una aceleración constante ng (g es la aceleración de la gravitación terrestre).

Despreciando la resistencia de la atmósfera y suponiendo que la velocidad efectiva v_e de eyección de los gases es constante, determinar: 1) la ley de variación de la masa del cohete; 2) la ley de variación de la masa del cohete en ausencia del campo de gravitación.

Respuesta: 1) $m=m_0e^{-\frac{n+1}{v_e}gt}$,

2) $m=m_0e^{-\frac{ng}{v_e}t}$.

45.5. La masa del cohete descrito en el problema 45.2 varía hasta $t=t_0$ de acuerdo con la ley $m=m_0e^{-\alpha t}$.

Despreciando la fuerza de resistencia hallar el movimiento del cohete y, suponiendo que en el instante t_0 todo el combustible

---

*) El empuje de impulsión se determina por la fórmula $P_m=-\frac{dm}{dt}v_e$, donde v_e es la velocidad efectiva de eyección.

está consumido, determinar la altura máxima de ascenso del cohete. En el instante inicial el cohete estaba sobre la tierra y su velocidad era igual a cero.

Respuesta: $H=\frac{\alpha v_e}{2gl}[\alpha v_e-g]\,t_0^2$, donde v_e es la velocidad efectiva de eyección de los gases del cohete.

45.6. Para los datos del problema anterior, determinar el valor de α que corresponde a la altura máxima posible de ascenso del cohete $H_{máx}$ y calcular $H_{máx}$ (es necesario considerar la magnitud $\mu=\alpha t_0=\ln\frac{m_0}{m_1}$ constante; m_1 es la masa del cohete en el instante t_0).

Respuesta: $\alpha=\infty$ (combustión instantánea);

$$H_{máx}=\frac{\mu^2}{2g}v_e^2.$$

45.7. Para los datos de los problemas 45.5 y 45.6, y aceptando el coeficiente de sobrecarga igual a $k=\frac{\alpha v_e}{g}$, determinar la altura de ascenso H del cohete en función de $H_{máx}$.

Respuesta: $H=H_{máx}\frac{k-1}{k}$.

45.8. Un cohete se despega de la Luna verticalmente a su superficie. La velocidad efectiva de eyección $v_e=2000$ m/s. El número de Tsiolkovsky $z=5$*).

Determinar cuál debe ser el tiempo de combustión del propulsante para que el cohete alcance la velocidad $v=3000$ m/s (suponer que la aceleración de la fuerza de gravedad cerca de la Luna es constante e igual a 1,62 m/s^2).

Respuesta: ≈ 2 min 4 s.

45.9. Un cohete se desplaza en el campo homogéneo de la fuerza de gravedad hacia arriba con una aceleración constante w.

Despreciando la resistencia de la atmósfera y considerando que la velocidad efectiva v_e de eyección de los gases es constante, determinar el tiempo T, durante el cual la masa del cohete disminuirá en dos veces.

Respuesta: $T=\frac{v_e}{w+g}\ln 2$.

45.10. La velocidad efectiva de eyección de los gases de un cohete es $v_e=2,4$ km/s.

¿Cuál debe ser la relación de la reserva de propulsante al peso del cohete sin propulsante para que después de la combustión del

---

*) Se llama número de Tsiolkovsky la relación de la masa de despegue del cohete a su masa sin combustible.

propulsante el cohete, que se desplaza fuera del campo de gravitación y de la atmósfera, alcance la velocidad de 9 km/s?

Respuesta: El peso del propulsante debe constituir aproximadamente el 98% del peso de lanzamiento del cohete.

45.11. Un cohete se encuentra en movimiento de translación en ausencia de gravitación y de resistencia del medio. La velocidad efectiva de eyección de los gases es $v_e = 2400$ m/s.

Determinar el número de Tsiolkovsky, si en el instante de la combustión completa del propulsante la velocidad del cohete será igual a 4300 m/s.

Respuesta: $z \approx 6$.

45.12. Un cuerpo de masa variable con velocidad inicial igual a cero se desplaza con una aceleración constante w por unas guías horizontales. La velocidad efectiva de eyección de los gases v_e es constante.

Despreciando la resistencia, determinar el camino recorrido por el cuerpo hasta el momento cuando su masa disminuye k veces.

Respuesta: $s = \frac{v_e^2}{2w} (\ln k)^2$.

45.13. Resolver el problema anterior, suponiendo que el cuerpo está sometido a la acción de la fuerza de deslizamiento.

Respuesta: $s = \frac{wv_e^2}{2(w+fg)^2} (\ln k)^2$, donde f es el coeficiente de rozamiento de deslizamiento.

45.14. Un cuerpo de masa variable se desplaza por unas guías especiales tendidas a lo largo del ecuador. La aceleración tangencial $w_\tau = a$ es constante.

Sin tener en cuenta la resistencia al movimiento, determinar cuántas veces disminuirá la masa del cuerpo después de hacer una vuelta alrededor de la Tierra, si la velocidad efectiva de eyección de los gases $v_e = \text{const}$. ¿Cuál debe ser la aceleración a para que el cuerpo, después de efectuar una vuelta, alcance la velocidad orbital?

Respuesta: $e^{\frac{2}{v_e}\sqrt{\pi R a}}$ veces; $a = \frac{g}{4\pi}$.

45.15. Determinar en el problema anterior la masa del propulsante quemado en el instante cuando la presión del cuerpo sobre las guías es igual a cero.

Respuesta: $m_p = m_0 \left(1 - e^{-\frac{\sqrt{gR}}{v_e}}\right)$.

45.16. Un cuerpo se desliza sobre rieles horizontales. La eyección de los gases se efectúa verticalmente hacia abajo con una velocidad efectiva constante v_e. La velocidad inicial del cuerpo es v_0.

Hallar la ley de variación de la velocidad del cuerpo y la ley de su movimiento, si la variación de la masa se efectúa de acuerdo con la ley $m=m_0-at$. El coeficiente de rozamiento de deslizamiento es igual a f.

Respuesta: $v=v_0-f\left[gt-v_e\ln\frac{m_0}{m_0-at}\right]$;

$$s=v_0t-f\left\{\frac{gt^2}{2}-v_e\left[t\ln m_0+\frac{m_0-at}{a}\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\times(\ln(m_0-at)-1)\right]\right\}.$$

45.17. Resolver el problema anterior, si la variación del propulsante se efectúa de acuerdo con la ley $m=m_0e^{-\alpha t}$. Determinar el valor de α para el cual el cuerpo se desnlazará con una velocidad constante v_0.

Respuesta: $v=v_0-f(g-\alpha v_e)t$; $s=v_0t-f(g-\alpha v_e)\times$
$\times\frac{t^2}{2}$; $\alpha=\frac{g}{v_e}$.

45.18. ¿Qué camino recorrerá un cohete por un tramo rectilíneo activo en el vacío y en ausencia de fuerzas de gravitación durante su aceleración desde la velocidad inicial igual a cero hasta una velocidad igual a la velocidad efectiva de eyección de productos de combustión v_e, conociendo la masa inicial del cohete m_0 y el consumo por segundo β?

Respuesta: $s=\frac{v_em_0}{\beta}\cdot\frac{e-2}{e}$, donde e es el número de Neper.

45.19. Un cohete se desplaza rectilíneamente fuera del campo de gravitación y en ausencia de resistencia.

Determinar el trabajo de la fuerza de empuje en el instante cuando se quema todo el propulsante. La masa inicial del cohete es m_0, su masa final es m_1. La velocidad efectiva de eyección v_e es constante.

Respuesta: $A=m_1v_e^2[\ln z-(z-1)]$; $z=\frac{m_0}{m_1}$.

45.20. Un cohete se desplaza rectilíneamente ıuera del campo de gravitación en el vacío y en ausencia de las fuerzas de gravitación.

¿Para qué relación z de las masas inicial m_0 y final m_1 su rendimiento mecánico, que se define como la relación de la energía cinética del cohete después de la combustión del propulsante a la energía consumida, tiene el valor máximo?

Respuesta: z es la raíz de la ecuación $\ln z = \frac{2(z-1)}{1+z}$.

45.21. Un avión de masa m_0 aterriza con la velocidad v_0 sobre un aeródromo polar. A consecuencia de la congelación la masa del avión durante el movimiento después del aterrizaje crece según la fórmula $m = m_0 + at$, donde $a = \text{const}$. La resistencia al movimiento del avión por el aeródromo es proporcional a su peso (el coeficiente de proporcionalidad es f).

Determinar el intervalo de tiempo hasta la parada del avión teniendo en cuenta (T) la variación de su masa y despreciándola (T_1). Hallar la ley de variación de la velocidad en función del tiempo.

Respuesta: $T = \frac{m_0}{a}\left(\sqrt{1 + \frac{2av_0}{fgm_0}} - 1\right)$;

$$T_1 = \frac{v_0}{fg};$$

$$v = \frac{m_0 v_0 - fg/2\,(2m_0 + at)\,t}{m_0 + at}.$$

45.22. Las velocidades efectivas de eyección de la primera y la segunda etapas de un cohete de dos etapas son respectivamente iguales a $v_e^{(1)} = 2400$ m/s y $v_e^{(2)} = 2600$ m/s.

Suponiendo que el movimiento se efectúa fuera del campo de gravitación y de la atmósfera, determinar los números de Tsiolkovsky para asegurar la velocidad final $v_1 = 2400$ m/s de la primera etapa y la velocidad final $v_2 = 5400$ m/s de la segunda etapa.

Respuesta: $z_1 = 2{,}72$; $z_2 = 3{,}17$.

45.23. Suponiendo que en un cohete de tres etapas los números de Tsiolkovsky y las velocidades efectivas v_e de eyección son los iguales para las tres etapas, hallar el número de Tsiolkovsky para $v_e = 2{,}4$ km/s, si después de la combustión de todo el propulsante la velocidad del cohete es igual a 9 km/s (despreciar la influencia del campo de gravitación y la resistencia de la atmósfera).

Respuesta: $z = 3{,}49$.

45.24. En ausencia de gravitación y de resistencia de la atmósfera, un cohete de tres etapas tiene un movimiento de traslación. Las velocidades efectivas de eyección y los números de Tsiolkovsky son los mismos para las tres etapas y respectivamente iguales a $v_e = 2500$ m/s, $z = 4$.

Determinar las velocidades del cohete después de la combustión del propulsante de la primera etapa, de la segunda y de la tercera.

Respuesta: $v_1 = 3465$ m/s; $v_2 = 6930$ m/s; $v_3 = 10\,395$ m/s.

45.25. En el instante cuando una nave cósmica, que se aproxima a la Luna, se encuentra a una distancia H de su superficie y tiene una velocidad v_0, dirigida hacia el centro de la Luna, se conecta el motor de frenado.

Teniendo en cuenta que la fuerza de gravitación es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia de la nave al centro de la Luna y que la masa de la nave varía según la ley $m = m_0 e^{-\alpha t}$ (m_0 es la masa del cohete en el instante de la conexión del motor de frenado, α — es un número constante), hallar el valor de α para el cual la nave efectúa un alunizaje suave (es decir, su velocidad de alunizaje será igual a cero). La velocidad efectiva de eyección de los gases v_e es constante. El radio de la Luna es igual a R.

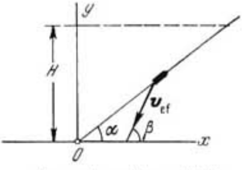
Respuesta: $\alpha = \dfrac{v_0^2}{2v_e H} + \dfrac{gR}{v_e(R+H)}$.

45.26. Hallar la ley de variación de la masa de un cohete que empieza a ascender verticalmente con una velocidad inicial igual a cero, si su aceleración w es constante y la resistencia del medio es proporcional al cuadrado de la velocidad (b es el coeficiente de proporcionalidad). El campo de la fuerza de gravedad se considera homogéneo. La velocidad efectiva de eyección de los gases v_e es constante.

Respuesta: $m = \left(m_0 + \dfrac{2bv_e^2 w^2}{(w+g)^3}\right) e^{-\frac{w+g}{v_e}t} -$
$$- \frac{bw^2}{w+g} t^2 + \frac{2v_e bw^2}{(w+g)^2} t - \frac{2v_e^2 bw^2}{(w+g)^3}.$$

45.27. Un cohete se desplaza en un campo homogéneo de la fuerza de la gravedad a lo largo de una recta con una aceleración constante w. Esta recta forma un ángulo α con el plano horizontal trazado a la superficie de la Tierra en el punto de lanzamiento del cohete.

Suponiendo que la velocidad efectiva de eyección de los gases v_e es constante en magnitud y dirección, determinar la relación de la masa inicial del cohete a la masa del cohete sin propulsante (el número de Tsiolkovsky), si en el instante de combustión de todo el propulsante el cohete está a una distancia H de dicho plano tangente.



Para el problema 45.27.

Respuesta: $z = e^{\frac{\cos\alpha}{v_e \cos\beta}\sqrt{\frac{2wH}{\operatorname{sen}\alpha}}}$, donde β es el ángulo formado por la velocidad v_e y el plano tangente, igual a
$$\beta = \arccos \frac{w\cos\alpha}{\sqrt{w^2+g^2+2gw\operatorname{sen}\alpha}}.$$

45.28. Un cuerpo de masa variable se desplaza con una aceleración constante w por guías rectilíneas rugosas que forman con el horizonte un ángulo α.

Suponiendo que el campo de gravedad es homogéneo y la resistencia de la atmósfera al movimiento del cuerpo es linealmente proporcional a la velocidad (b es el coeficiente de resistencia), hallar la ley de variación de la masa del cuerpo. La velocidad efectiva de eyección de los gases v_e es constante; el coeficiente de rozamiento de deslizamiento entre el cuerpo y las guías es igual a f.

Respuesta: $m=\left(m_0-\frac{bwv_e}{w_1^2}\right)e^{-\frac{w_1}{v_e}t}-\frac{bw}{w_1}\left(t-\frac{v_e}{w_1}\right)$, donde $w_1=$ $=w+g(\operatorname{sen}\alpha+f\cos\alpha)$, m_0 es la masa inicial del cuerpo.

45.29. Un aeróstato de peso Q sube verticalmente y lleva consigo un cable depositado sobre la tierra. El aeróstato está sometido a la acción de la fuerza sustentadora P, de la fuerza de gravedad y de la fuerza de resistencia proporcional al cuadrado de la velocidad: $R=-\beta\dot{x}^2$. El peso de la unidad de longitud del cable es γ.

Plantear la ecuación del movimiento del aeróstato.

Respuesta: $\ddot{x}=-g+\frac{Pg}{Q+\gamma x}-\frac{\beta g+\gamma}{Q+\gamma x}\dot{x}^2$.

45.30. Para los datos del problema anterior, determinar la velocidad de elevación del aeróstato. En el instante inicial el aeróstato está inmóvil a la altura H_0.

Respuesta:
$$\dot{x}^2=\frac{Pg}{(\beta g+\gamma)}\left[1-\left(\frac{Q+\gamma H_0}{Q+\gamma x}\right)^{2\left(1+\beta\frac{g}{\gamma}\right)}\right]-$$
$$-\frac{2g}{2\beta g+3\gamma}\left[1-\left(\frac{Q+\gamma H_0}{Q+\gamma x}\right)^{3+2\beta\frac{g}{\gamma}}\right]\cdot(Q+\gamma x).$$

45.31. Una gota de agua esférica cae verticalmente en la atmósfera saturada de vapor de agua. A consecuencia de la condensación la masa de la gota crece proporcionalmente al área de su superficie (el coeficiente de proporcionalidad es α). El radio inicial de la gota es r_0, su velocidad inicial es v_0, la altura inicial es h_0.

Determinar la velocidad de la gota y la ley de variación de su altura en función del tiempo (despreciar la resistencia al movimiento).

Indicación. Mostrar que $dr=\alpha\,dt$ y pasar a la nueva variable independiente r.

Respuesta:
$$x=h_0+\frac{v_0r_0}{2\alpha}\left[1-\left(\frac{r_0}{r}\right)^2\right]-\frac{g}{8\alpha^2}\times$$
$$\times\left[r^2-2r_0^2+\frac{r_0^4}{r^2}\right];$$
$$v=v_0\frac{r_0^3}{r^3}-\frac{g}{4\alpha}\left[r-\frac{r_0^4}{r^3}\right],\ \text{donde } r=r_0+\alpha t.$$

45.32. Resolver el problema anterior suponiendo que sobre la gota actúa, además de la fuerza de gravedad, una fuerza de resistencia proporcional al área de la sección transversal máxima y a la velocidad de la gota: $R=-4\beta\pi r^2 v$ (β es un coeficiente constante).

Respuesta:
$$x=h_0-\frac{1}{3\beta+2\alpha}\left[\frac{g r_0^{\frac{1}{\alpha}(4\alpha+3\beta)}}{4\alpha+3\beta}+\right.$$
$$\left.+v_0 r_0^{\frac{3}{\alpha}(\beta+\alpha)}\right]\left[r^{-\frac{1}{\alpha}(3\beta+2\alpha)}-\right.$$
$$\left.-r_0^{-\frac{1}{\alpha}(3\beta+2\alpha)}\right]-\frac{g\left(r^2-r_0^2\right)}{2\alpha(4\alpha+3\beta)},$$
$$v=\frac{gr}{4\alpha+3\beta}+\left[\frac{g r_0^{\frac{1}{\alpha}(4\alpha+3\beta)}}{4\alpha+3\beta}+\right.$$
$$\left.+v_0 r_0^{\frac{3}{\alpha}(\alpha+\beta)}\right] r^{-\frac{3}{\alpha}(\alpha+\beta)},$$
donde $r=r_0+\alpha t$.

45.33. Una cadena pesada homogénea enrollada en ovillo está situada en el borde de una mesa horizontal, al principio un eslabón de la cadena pende inmóvilmente de la mesa.

Dirigiendo el eje x verticalmente hacia abajo y suponiendo que en el instante inicial $x=0$, $\dot{x}=0$, determinar el movimiento de la cadena.

Respuesta: $x=\frac{1}{6}gt^2$.

45.34. El extremo de una cadena depositada sobre el suelo está fijada en una vagoneta estacionada sobre un tramo inclinado de vía que forma un ángulo α con el horizonte. El coeficiente de rozamiento de la cadena sobre el suelo es f. El peso de la unidad de longitud de la cadena es γ, el peso de la vagoneta es P. La velocidad inicial de la vagoneta es v_0.

Determinar la velocidad de la vagoneta en un instante arbitrario y hallar la condición necesaria para la cual la vagoneta se puede parar.

Respuesta:
$$\frac{\dot{x}^2}{2}=\frac{P^2 v_0^2}{2(P+\gamma x)^2}+\frac{Pg}{3\gamma}\operatorname{sen}\alpha\left[1-\frac{P^2}{(P+\gamma x)^2}\right]+$$
$$+\frac{1}{3}gx\operatorname{sen}\alpha+\frac{fPg}{6\gamma}\left[1-\frac{P^2}{(P+\gamma x)^2}\right]\cos\alpha-$$
$$-\frac{1}{3}fgx\cos\alpha.$$

La vagoneta puede pararse si se cumple la desigualdad $f>\operatorname{tg}\alpha$.

45.35. Un punto material de masa m se atrae a un centro fija de acuerdo con la ley de gravitación universal newtoniana. La masa del centro varía en el transcurso del tiempo según la ley $M = \frac{M_0}{1+\alpha t}$.

Determinar el movimiento del punto.

Indicación. Pasar a las coordenadas nuevas con ayuda de las relaciones $\xi = \frac{x}{1+\alpha t}$, $\eta = \frac{y}{1+\alpha t}$ y al tiempo reducido $\tau = \frac{1}{\alpha(1+\alpha t)}$.

Respuesta: Las ecuaciones del movimiento en las coordenadas ξ, η son (f es la constante de gravitación)

$$\frac{d^2\xi}{d\tau^2} + f\frac{M_0\xi}{\rho^2} = 0;$$

$$\frac{d^2\eta}{d\tau^2} + f\frac{M_0\eta}{\rho^2} = 0;$$

$$\rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2},$$

es decir, responden a las ecuaciones ordinarias en el caso de masas constantes. Por lo tanto, en función de las condiciones iniciales en las variables ξ y η las órbitas pueden ser elípticas, parabólicas o hiperbólicas.

45.36. Para comunicar rápidamente al rotor de un giroscopio el número de revoluciones necesario se utiliza el arranque reactivo. En el cuerpo del rotor se fijan petardos de pólvora de masa total m_0, cuyos productos de combustión se expulsan por unas toberas especiales. Considerar los petardos de pólvora como puntos situados a una distancia r del eje de rotación del rotor. La componente tangencial de la velocidad efectiva de eyección de los productos de combustión v_e es constante.

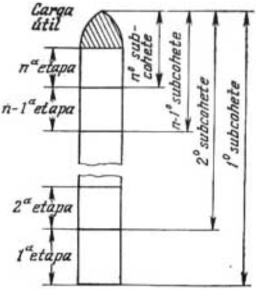
Suponiendo que el gasto total de la masa de pólvora en un segundo es igual a q, determinar la velocidad angular ω del rotor en el instante de la combustión completa de la pólvora, si el rotor está sometido a la acción de un momento de resistencia constante igual a M. El radio del rotor es R. En el instante inicial el rotor estaba en reposo.

Respuesta: $\omega = \frac{Rqv_e - M}{r^2 q} \ln \frac{J_0}{J_{rot}}$, donde $J_0 = J_{rot} + m_0 r^2$, J_{rot} es el momento de inercia de rotor respecto al eje de rotación.

45.37. De acuerdo con los datos del problema anterior, hallar la velocidad angular del rotor después de la combustión completa de la pólvora, si el rotor está sometido a la acción de un momento de resistencia proporcional a su velocidad angular (b es el coeficiente de proporcionalidad).

Respuesta: $\omega = \frac{Rv_e q}{b}\left[1-\left(\frac{J_{\text{rot}}}{J_0}\right)^{\frac{b}{r^2 q}}\right].$

45.38. Un cohete de varias etapas se compone de la carga útil y de las etapas. Cada etapa se separa del cohete después de consumir su propulsante. Por subcohete se comprende la combinación de la etapa en funcionamiento, todas las etapas pasivas y la carga útil; para el subcohete que se examina todas las etapas pasivas y la carga útil se considera como "carga útil", es decir, cada cohete se considera como un cohete de una etapa. En el dibujo están indicados la numeración de las etapas y de los subcohetes.



Para el problema 45.38.

Sea q el peso de la carga útil, P_i el peso del propulsante en la i-ésima etapa, Q_i el peso seco (sin propulsante) de la i-ésima etapa, G_i, el peso total del i-ésimo subcohete.

Introduciendo el número de Tsiolkovsky para cada subcohete $z_i = \frac{G_i}{G_i - P_i}$ y la característica constructiva de cada etapa (la relación del peso total de una etapa a su peso seco) $s_i = \frac{Q_i + P_i}{Q_i}$, determinar el peso de lanzamiento total de todo el cohete, el peso del k-ésimo subcohete, el peso del propulsante de la k-ésima etapa, el peso seco de la k-ésima etapa.

Indicación. Para resolver el problema se introduce α_i, que es el "peso relativo" del i-ésimo subcohete, es decir, la relación del peso inicial del subcohete al peso de su carga útil:

$$\alpha_1 = \frac{G_1}{G_2}; \quad \alpha_2 = \frac{G_2}{G_3}, \ \ldots,$$

$$\alpha_n = \frac{G_n}{q}.$$

Respuesta: $G_1 = q\prod_{i=1}^{n} z_1 \prod_{i=1}^{n} \frac{s_i - 1}{s_i - z_i}; \qquad G_k = q\prod_{i=k}^{n} z_i \prod_{i=k}^{n} \frac{s_i - 1}{s_i - z_i};$

$$P_k = \frac{z_k - 1}{z_k} G_k;$$

$$Q_k = \frac{P_k}{s_k - 1} \text{ (fórmulas de Fertregt).}$$

45.39. Un cohete de dos etapas está destinado para comunicar a la carga útil $q=100$ kgf la velocidad $v=6000$ m/s. Las velocidades efectivas de eyección de los gases son las mismas para las dos etapas e iguales a $v_e=2400$ m/s. Las características constructivas de la primera y segunda etapas son respectivamente iguales a $s_1=4$, $s_2=5$ (véase el problema 45.38).

Despreciando la fuerza de gravitación de la Tierra y la resistencia de la atmósfera, determinar el número de Tsiolkovsky para los subcohetes primero y segundo, para los cuales el peso de lanzamiento del cohete G_1 es mínimo.

Respuesta: $z_1=3{,}2$; $z_2=4$; $G_1=19{,}2$ tf.

45.40. Utilizando los datos del problema anterior, determinar el peso del propulsante y el peso en seco de cada etapa.

Indicación. Utilizar las fórmulas de la respuesta del problema 45.38.

Respuesta: $P_1=13{,}2$ tf; $P_2=1{,}2$ tf; $Q_1=4{,}4$ tf;
$Q_2=0{,}3$ tf.

45.41. Un cohete de cuatro etapas está compuesto de cuatro cohetes. La característica constructiva s y la velocidad efectiva v_e de todos los cohetes son las mismas e iguales a $s=4{,}7$, $v_e=2{,}4$ km/s.

¿Cuál debe ser el peso de lanzamiento del cohete para que éste comunique a la carga de 1 tf una velocidad $v=9000$ m/s? (Utilizar las fórmulas de la respuesta del problema 45.38.)

Respuesta: 372 tf.

Capítulo XI

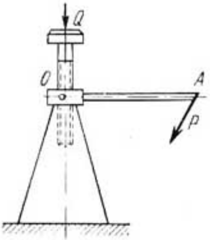
MECÁNICA ANALÍTICA

§ 46. PRINCIPIO DE DESPLAZAMIENTOS VIRTUALES

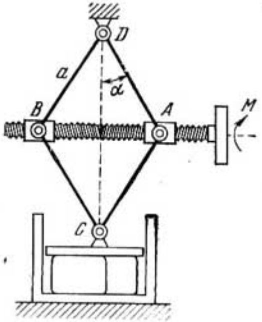
46.1. Una carga Q se eleva con auxilio de un gato que se pone en movimiento por una manivela $OA = 0,6$ m. Al extremo de la manivela, perpendicularmente a ella, se aplica una fuerza $P = 16$ kgf.

Determinar la magnitud de la carga Q, si el paso del tornillo del gato h es igual a 12 mm.

Respuesta: $Q = 5020$ kgf.



Para el problema 46.1.



Para el problema 46.2.

46.2. Sobre el volante de una prensa de rótula actúa un momento de rotación M; el eje del volante tiene en sus extremos un filete de tornillo de paso h de dirección contraria, y pasa a través de dos tuercas articuladas en dos vértices del rombo de barras con lado a; el vertice superior del rombo está sujetado inmóvilmente, el inferior, está fijado a la plancha horizontal de la prensa.

Determinar la fuerza de presión de la prensa sobre la pieza a comprimir en el momento cuando el ángulo en el vértice del rombo es igual a 2α.

Respuesta: $P = \pi \frac{M}{h} \operatorname{cotg} \alpha$.

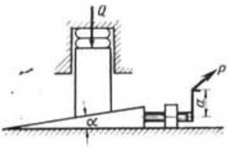
46.3. Determinar la relación entre los valores absolutos de las fuerzas $\boldsymbol{P}$ y $\boldsymbol{Q}$ en una prensa de cuña, si la fuerza $\boldsymbol{P}$ está aplicada al extremo de la palanca de longitud a perpendicularmente al eje del tornillo y de la palanca. El paso del tornillo es igual a h. El ángulo en el vértice de la cuña es igual a α.

Respuesta: $Q = P\dfrac{2\pi a}{h \operatorname{tg} \alpha}$.

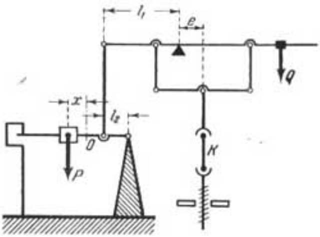
46.4. El dibujo muestra el esquema de una máquina para el ensayo de alargamiento de las muestras.

Determinar la relación entre el esfuerzo X en la muestra K y la distancia x entre la carga P y su posición nula O, si con ayuda de la carga Q la máquina está equilibrada de tal modo que para la posición cero de la carga P y en ausencia del esfuerzo en la muestra K todas las palancas están situadas horizontalmente. Son conocidas las distancias l_1, l_2 y e.

Respuesta: $X = P\dfrac{xl_1}{el_2}$.



Para el problema 46.3.



Para el problema 46.4.

46.5. Las cargas K y L ligadas por un sistema de palancas, mostradas en el dibujo, se encuentran en equilibrio.

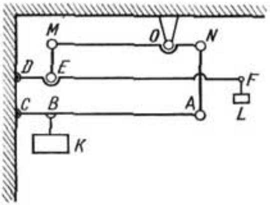
Determinar la relación entre los pesos de las cargas, si se sabe que

$$\frac{BC}{AC} = \frac{1}{10}, \quad \frac{ON}{OM} = \frac{1}{3}, \quad \frac{DE}{DF} = \frac{1}{10}.$$

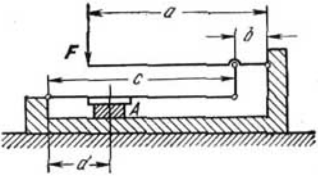
Respuesta: $P_L = \dfrac{BC}{AC} \cdot \dfrac{ON}{OM} \cdot \dfrac{DE}{DF} P_K = \dfrac{1}{300} P_K$.

46.6. Determinar el valor absoluto de la fuerza Q, que comprime la muestra A, en la prensa de palanca mostrada en el dibujo. Viene dado: $F = 100$ N, $a = 60$ cm, $b = 10$ cm, $c = 60$ cm, $d = 20$ cm.

Respuesta: $Q = 1800$ N.



Para el problema 46.5.

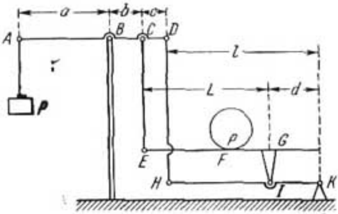


Para el problema 46.6.

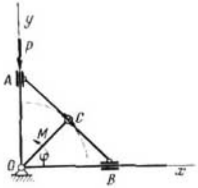
46.7. Una carga de peso P se halla en el punto F de una plataforma. La longitud $AB=a$; $BC=b$; $CD=c$; $IK=d$; la longitud de la plataforma $EG=L$.

Determinar la relación entre las longitudes b, c, d y l para la cual el peso p de la pesa que equilibra la carga P, no depende de la posición de la última sobre la plataforma, y hallar el peso p en este caso.

Respuesta: $\frac{b+c}{b}=\frac{l}{d}$; $\quad p=\frac{b}{a}P$.



Para el problema 46.7.



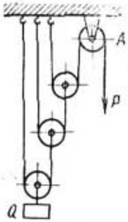
Para el problema 46.8.

46.8. La corredera A del mecanismo de un elipsógrafo está sometida a la acción de una fuerza P dirigida por la guía de la corredera hacia el eje de rotación O de la manivela OC.

¿Cuál debe ser el momento de rotación aplicado a la manivela OC para que el mecanismo esté en equilibrio cuando la manivela OC forma con la guía de la corredera un ángulo φ?

El mecanismo está situado en el plano horizontal: $OC=AC=CB=l$.

Respuesta: $M=2Pl\cos\varphi$.



Para el problema 46.9.

46.9. Un polipasto está compuesto de una polea fija A y de n poleas móviles.

Determinar, para el caso de equilibrio, la relación de la carga Q que se eleva al esfuerzo P aplicado al extremo del cable que desciende de la polea móvil A.

Respuesta: $\frac{Q}{P}=2^n$.

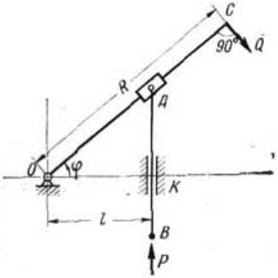
46.10. En un mecanismo de colisa, cuando la palanca OC oscila alrededor del eje horizontal O, la corredera A, desplazándose a lo largo de la palanca OC, hace moverse la barra AB que se desplaza en las guías verticales K. Están dadas las dimensiones: $OC=R$, $OK=l$ (véase el dibujo).

¿Qué fuerza Q debe ser aplicada perpendicularmente a la manivela OC en el punto C para equilibrar la fuerza P dirigida a lo largo de la barra AB hacia arriba?

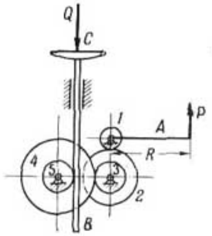
Respuesta: $Q=\frac{Pl}{R\cos^2\varphi}$.

46.11. En el mecanismo de un gato, al girar la palanca A de longitud R comienzan a girar los piñones *1, 2, 3, 4* y *5* que ponen en movimiento la cremallera B del gato.

¿Qué fuerza debe ser aplicada perpendicularmente a la palanca, en su extremo, para que en el estado de equilibrio del gato el platillo C desarrolle una presión igual a 480 kgf?



Para el problema 46.10.



Para el problema 46.11.

Los radios de los piñones son respectivamente iguales a: $r_1=3$ cm, $r_2=12$ cm, $r_3=4$ cm, $r_4=16$ cm; $r_5=3$ cm, la longitud de la palanca $R=18$ cm.

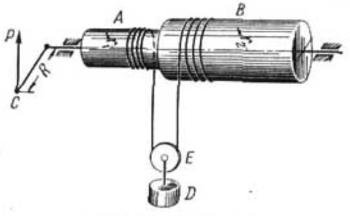
Respuesta: $P=Q\frac{r_1r_3r_5}{r_2r_4R}=5$ kgf.

46.12. Un cabrestante diferencial está compuesto de dos árboles A y B acoplados rígidamente, que se ponen en rotación mediante la manivela C de longitud R.

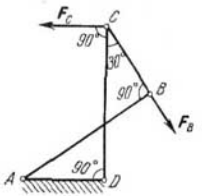
La carga D de peso Q que se eleva está fijada en la polea móvil E sostenida por el cable. Al girar la manivela C la rama izquierda del cable se desenrolla del árbol A de radio r_1, y la rama derecha se enrolla sobre el árbol B de radio r_2 $(r_2 > r_1)$.

¿Qué fuerza P debe ser aplicada perpendicularmente a la manivela en su extremo, para equilibrar la carga D, si $Q = 720$ kgf, $r_1 = 10$ cm, $r_2 = 12$ cm y $R = 60$ cm?

Respuesta: $P = Q\frac{r_2 - r_1}{2R} = 12$ kgf.



Para el problema 46.12.



Para el problema 46.13.

46.13. En el mecanismo de un antiparalelogramo $ABCD$, los elementos AB, CD y BC están ligados entre sí por las articulaciones cilíndricas B y C, y mediante las articulaciones cilíndricas A y D están fijados en el soporte AD. Al elemento CD, en la articulación C, se ha aplicado una fuerza horizontal F_C.

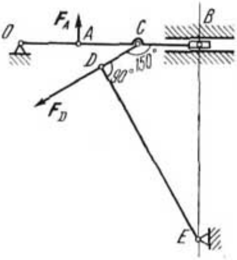
Calcular el valor absoluto de la fuerza F_B, aplicada a la articulación B perpendicularmente al elemento AB, si el mecanismo está en equilibrio en la posición indicada en el dibujo. Viene dado: $AD = BC$, $AB = CD$, $\angle ABC = \angle ADC = 90°$, $\angle DCB = 30°$.

Respuesta: $F_B = 2F_C$.

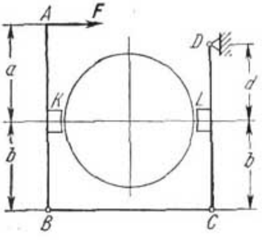
46.14. Un mecanismo de biela y manivela OAB está unido en el punto medio de la biela AB con la barra CD, con ayuda de la articulación cilíndrica C. Las barras CD y DE están ligadas por la articulación cilíndrica D.

Determinar la relación entre los valores absolutos de las fuerzas $\boldsymbol{F}_A$ y $\boldsymbol{F}_D$, respectivamente perpendiculares a las barras OA y DE, cuando el mecanismo está en equilibrio en la posición indicada en el dibujo. Viene dado: $\angle DCB = 150°$, $\angle CDE = 90°$.

Respuesta: $F_D = 4F_A$.



Para el problema 46.14.

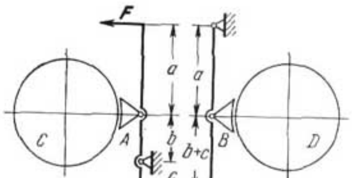


Para el problema 46.15.

46.15. El freno de zapatas y de bandaje de un vagón de tranvía está compuesto de tres tirantes AB, BC y CD articulados en B y C. Bajo la acción de la fuerza horizontal F las zapatas K y L, fijadas respectivamente en los tirantes AB y CD, se aprietan contra la rueda.

Determinar las presiones $\boldsymbol{N}_K$ y $\boldsymbol{N}_L$ de las zapatas sobre la rueda. Las dimensiones están indicadas en el dibujo. El vagón está en reposo.

Respuesta: $N_K = F\frac{a+b}{b}$, $N_L = F\frac{a}{b}\frac{b+d}{d}$.



Para el problema 46.16.

46.16. En el dibujo viene representado el esquema del freno de zapatas y de bandaje de un vagón de tranvía.

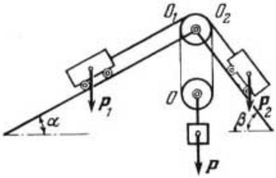
Determinar la relación entre las magnitudes a, b y c para la cual las zapatas A y B, bajo la acción de la fuerza $\boldsymbol{F}$, se aprietan contra los bandajes de las ruedas C y D con fuerzas de igual valor absoluto. Hallar también la magnitud de esta fuerza. Las ruedas se consideran inmóviles.

Respuesta: $\frac{a}{b} = \frac{a+b+c}{c}$; $\quad Q = F\frac{a+b}{2b}$.

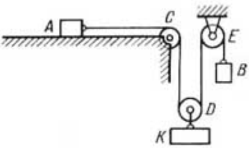
46.17. Hallar los pesos P_1 y P_2 de dos cargas que, mediante una carga de peso P, se mantienen en equilibrio sobre planos inclinados respecto al horizonte bajo los ángulos α y β, si las cargas P_1 y P_2 están fijadas en los extremos de un cable que, de la carga P_1, por intermediario de la polea O_1 montada sobre un eje horizontal, va a la polea móvil O que soporta la carga P, y luego, por intermediario de la polea O_2 montada sobre el eje de la polea O_1, a la carga P_2. Las poleas O_1 y O_2 son coaxiales.

Despreciar el rozamiento y las masas de las poleas y del cable.

Respuesta: $P_1=\dfrac{P}{2\operatorname{sen}\alpha}$; $P_2=\dfrac{P}{2\operatorname{sen}\beta}$.



Para el problema 46.17.



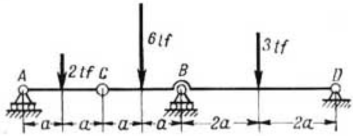
Para el problema 46.18.

46.18. Dos cargas A y B de un mismo peso están atadas a los extremos de un hilo imponderable e inextensible. A partir de la carga A el hilo pasa paralelamente al plano horizontal, contornea la polea fija C, luego pasa sobre la polea móvil D, contornea la polea fija E, donde al otro extremo del hilo está atada la carga B. Del eje de la polea móvil D pende una carga K de peso Q.

Determinar el peso P de cada carga A y B y el coeficiente de rozamiento de deslizamiento f de la carga A sobre el plano horizontal, si el sistema de cargas está en equilibrio.

Respuesta: $P=Q/2$; $f=1$.

46.19. Una viga compuesta AD, situada sobre tres apoyos, consta de dos vigas articuladas en el punto C. La viga está sometida a la acción de tres fuerzas verticales de 2 tf, 6 tf y 3 tf. Las dimensiones están indicadas en el dibujo.



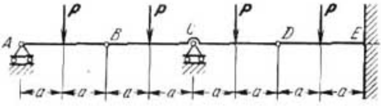
Para el problema 46.19.

Determinar las reacciones de los apoyos A, B y D.

Respuesta: $R_A=1$ tf; $R_B=10{,}5$ tf; $R_D=-0{,}5$ tf.

46.20. Determinar el momento de rotación que debe ser aplicado sobre el tramo BD a la viga AD, examinada en el problema anterior, para que la reacción del apoyo D sea igual a cero.

Respuesta: $M = 2a$ tfm.



Para el problema 46.21.

46.21. Una viga compuesta AE, situada sobre dos apoyos A y C, consta de tres vigas AB, BD y DE articuladas en B y D. La sección E de la viga DE está encastrada en una pared.

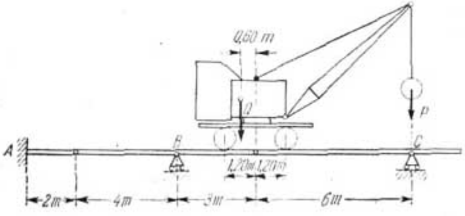
Determinar la componente vertical de la reacción en la sección E. Las vigas están sometidas a la acción de cuatro fuerzas verticales iguales a P. Las dimensiones están indicadas en el dibujo.

Respuesta: $R = 0{,}5P$.

46.22. Determinar el momento m_E del par que surge en el empotramiento de la viga DE examinada en el problema anterior.

Respuesta: $m_E = 0$.

46.23. Una grúa locomotora está apoyada en los rieles fijados sobre dos vigas horizontales de dos claros con articulaciones intermediarias. La grúa de peso $Q = 16$ tf lleva una carga $P = 3$ tf.



Para el problema 46.23.

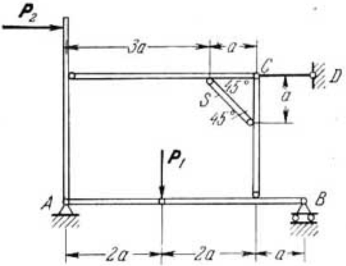
Determinar el momento del par reactivo en el empotramiento, en la posición de la grúa indicada en el dibujo.

Respuesta: $M_A = -\frac{1}{2}(1{,}95Q + 3{,}60P) = -21$ tfm.

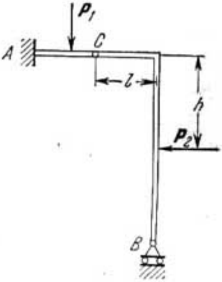
46.24. La construcción del andamio de un tanque rectangular está compuesta de marcos de madera cerrados, cuyas vigas están articuladas entre sí. La inmovilidad del marco se asegura por dos apoyos cilíndricos A y B y la barra CD.

Determinar el esfuerzo S en la riostra durante la acción de las fuerzas $\boldsymbol{P}_1$ y $\boldsymbol{P}_2$.

Respuesta: $S = 12P_1\sqrt{2}$.



Para el problema 46.24.



Para el problema 46.25.

46.25. La armazón de una plataforma está compuesta de unos marcos en Γ con articulaciones intermediarias C. Los extremos superiores de los marcos están rígidamente empotrados en una pared de hormigón, los extremos inferiores se apoyan en apoyos cilíndricos móviles.

Determinar la reacción vertical del empotramiento al actuar las fuerzas $\boldsymbol{P}_1$ y $\boldsymbol{P}_2$.

Respuesta: $Y_A = P_1 - P_2 \frac{h}{l}$.

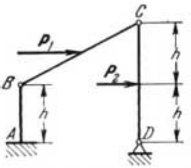
46.26. Dos vigas BC y CD están articuladas en C, mediante una articulación cilíndrica B están fijadas en un montante vertical AB encastrado en la sección A, y mediante una articulación cilíndrica D están unidas con el piso. Las vigas están sometidas a la acción de las fuerzas horizontales $\boldsymbol{P}_1$ y $\boldsymbol{P}_2$.

Determinar la componente horizontal de la reacción en la sección A. Las dimensiones están indicadas en el dibujo.

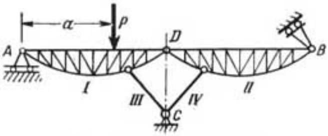
Respuesta: $R = P_1 + \frac{1}{2} P_2$.

46.27. Determinar el momento m_A del par reactivo que surge en el empotramiento A del montante AB examinado en el problema anterior.

Respuesta: $m_A = \left(P_1 + \frac{1}{2} P_2\right) h$.



Para el problema 46.26.



Para el problema 46.28.

46.28. Dos armaduras *I* y *II* articuladas en *D* están fijadas por medio de las barras *III* y *IV* en el suelo con ayuda de una articulación *C*; en los puntos *A* y *B* estas armaduras descansan sobre apoyos de rodillos. La armadura *I* está cargada por una fuerza vertical $\boldsymbol{P}$ a una distancia a del apoyo *A*.

Hallar la reacción del rodillo *B*.

Indicación. Determinar preliminarmente la posición de los centros instantáneos de velocidades C_1 y C_2 de las armaduras *I* y *II*.

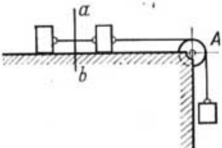
Respuesta: $R_B = P\frac{a}{b}\frac{DC_2}{DC_1}$, donde b es el brazo de la reacción $\boldsymbol{R}_B$ respecto al centro instantáneo C_2. La reacción $\boldsymbol{R}_B$ está dirigida perpendicularmente al plano de deslizamiento del rodillo *B* de izquierda a derecha hacia abajo.

§ 47. ECUACIÓN LINEAL DE LA DINÁMICA *)

47.1. Tres cargas de peso *P* cada una están ligadas por un hilo imponderable e inelástico tendido a través de un bloque inmóvil imponderable *A*. Dos cargas se encuentran en un plano liso horizontal y la tercera está suspendida verticalmente.

Determinar la aceleración del sistema y la tensión del hilo en la sección *ab*.

Respuesta: $w = \frac{1}{3}g, \quad T = \frac{1}{3}P.$



Para el problema 47.1.

47.2. Resolver el problema anterior, teniendo en cuenta la masa del bloque y suponiendo que durante el movimiento de las cargas el bloque *A* gira alrededor del eje inmóvil. El peso del bloque, que es un disco continuo homogéneo, es igual a $2P$.

Respuesta: $w = \frac{1}{4}g, \quad T = \frac{1}{4}P.$

*) Recomendamos resolver los problemas marcados con una estrella utilizando además las ecuaciones de Lagrange.

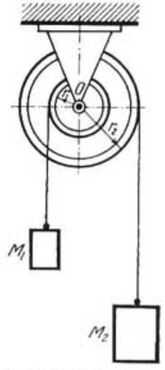
47.3. Dos cargas, la M_1 de peso P_1 y la M_2 de peso P_2, están suspendidas de dos hilos flexibles inextensibles enrollados (como está indicado en el dibujo) sobre dos tambores de radios r_1 y r_2 montados sobre un eje común; las cargas se desplazan bajo la acción de la fuerza de gravedad.

Determinar la aceleración angular ε de los tambores, despreciando sus masas y la masa de los hilos.

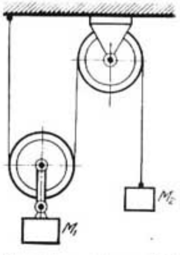
Respuesta: $\varepsilon = g\dfrac{P_2r_2 - P_1r_1}{P_1r_1^2 + P_2r_2^2}$.

47.4. Para los datos del problema anterior, determinar la aceleración angular ε y las tensiones T_1 y T_2 de los hilos, teniendo en cuenta las masas de los tambores, para los datos siguientes: $P_1 = 20$ kgf, $P_2 = 34$ kgf, $r_1 = 5$ cm, $r_2 = 10$ cm, el peso del tambor pequeño es igual a 4kgf, el del tambor grande es igual a 8 kgf. Se supone que las masas de los tambores están uniformemente repartidas sobre sus superficies exteriores.

Respuesta: $\varepsilon = 49\text{s}^{-2}$; $T_1 = 25$ kgf; $T_2 = 17$ kgf.



Para el problema 47.3.



Para el problema 47.5.

47.5. Dos cargas M_1 de 10 N de peso y M_2 de 8 N de peso están suspendidas del sistema de poleas representado en el dibujo.

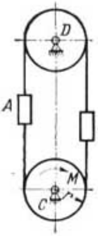
Calcular la aceleración w_2 de la carga M_2 y la tensión del hilo. Las masas de las poleas se desprecian.

Respuesta: $w_2 = 2{,}8$ m/s²; $T = 5{,}7$ N.

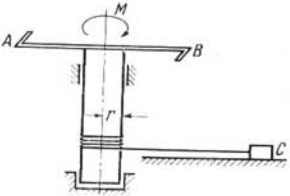
47.6. Un momento de rotación M está aplicado a la polea inferior C de un elevador.

Calcular la aceleración de la carga A de peso P_1 que se eleva sabiendo que el peso del contrapeso B es igual a P_2; las poleas C y D de radio r y de peso Q cada una son cilindros homogéneos. La masa de la correa se desprecia.

Respuesta: $w = g\dfrac{M + (P_2 - P_1)r}{(P_1 + P_2 + Q)r}$.



Para el problema 47.6.



Para el problema 47.7.

47.7. El árbol de un cabrestante de radio r se pone en movimiento por un momento de rotación constante M aplicado a la palanca AB.

Calcular la aceleración de la carga C de peso P, si el coeficiente de rozamiento de deslizamiento de la carga sobre el plano horizontal es igual a f. Las masas del cable y del cabrestante se desprecian.

Respuesta: $w = g\dfrac{M - fPr}{Pr}$.

47.8. Resolver el problema anterior teniendo en cuenta la masa del cabrestante, cuyo momento de inercia respecto al eje de rotación es igual a J.

Respuesta: $w = g\dfrac{r(M - fPr)}{gJ + Pr^2}$.

47.9. La carga A de peso P, descendiendo por un plano inclinado bajo un ángulo α al horizonte, pone en rotación, con ayuda de un hilo imponderable e inextensible, un tambor B de peso Q y de radio r.

Calcular la aceleración angular del tambor, si éste se considera como un cilindro circular homogéneo. La masa de la polea fija C se desprecia.

Respuesta: $\varepsilon = \dfrac{2Pg \operatorname{sen} \alpha}{r(2P + Q)}$.

47.10. Un hombre empuja una carretilla aplicando una fuerza horizontal $\boldsymbol{F}$.

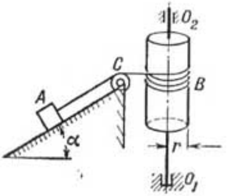
Determinar la aceleración de la caja de la carretilla, si el peso de la caja es igual a P_1, el peso de cada una de las cuatro ruedas es igual a P_2, el radio de las ruedas es r, el coeficiente de rozamiento de rodadura es f_{rod}. Considerar las ruedas como los discos continuos circulares que ruedan sin deslizamiento sobre los rieles.

Respuesta: $w=g\dfrac{F-\dfrac{f_{rod}}{r}(P_1+4P_2)}{P_1+6P_2}$.

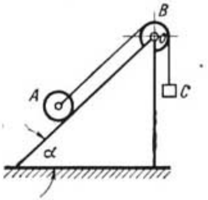
47.11. Un cilindro A de peso Q desciende rodando por un plano inclinado y, con ayuda de un hilo imponderable e inextensible que pasa sobre una polea B, hace subir la carga C de peso P. La polea B gira a su vez alrededor del eje fijo O perpendicular a su plano. El cilindro A y la polea B se consideran como discos circulares homogéneos de iguales pesos y radios. El plano inclinado forma con el horizonte un ángulo α.

Determinar la aceleración del eje del cilindro.

Respuesta: $w=g\dfrac{Q\operatorname{sen}\alpha-P}{2Q+P}$.



Para el problema 47.9.



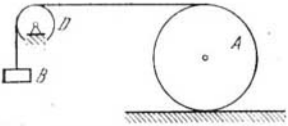
Para el problema 47.11.

47.12. Una carga B de peso P pone en movimiento un cilindro A de peso Q y de radio r, con ayuda de un hilo enrollado sobre el cilindro.

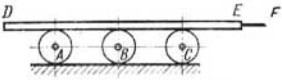
Calcular la aceleración de la carga B, si el cilindro rueda sin deslizamiento; el coeficiente de rozamiento de rodadura es f_{rod}. La masa de la polea D se desprecia.

Respuesta: $w=8g\dfrac{P-\dfrac{f_{rod}}{2r}Q}{3Q+8P}$.

47.13. Una barra DE de peso Q está situada sobre tres cilindros A, B y C de peso P cada uno. La barra está sometida a la acción de una fuerza horizontal $\boldsymbol{F}$, dirigida a la derecha, que pone



Para el problema 47.12.



Para el problema 47.13.

en movimiento la barra y los cilindros. El deslizamiento entre la barra y los cilindros, así como entre los cilindros y el plano horizontal no existe.

Hallar la aceleración de la barra DE. Considerar que los cilindros son circulares homogéneos.

Respuesta: $w = \frac{8gF}{8Q + 9P}$.

47.14. Determinar la aceleración de la carga M_2 examinada en el problema 47.5 teniendo en cuenta las masas de las poleas que se consideran como discos continuos homogéneos de 4 N de peso cado uno.

Respuesta: $w_2 = 0{,}7$ m/s^2.

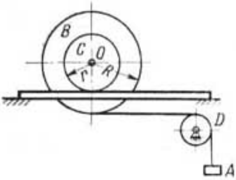
47.15. La carga A de peso P, descendiendo hace rodar sin deslizamiento el árbol C de radio r sobre un riel horizontal por medio de un hilo imponderable e inextensible que pasa sobre una polea imponderable fija D y enrollado sobre la polea B. La polea B de radio R, va encajada rígidamente sobre el árbol C de radio r; su peso total es igual a Q, su radio de inercia respecto al eje O, perpendicular al plano del dibujo, es igual a ρ.

Calcular la aceleración de la carga A.

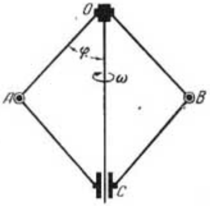
Respuesta: $w = g\frac{P(R-r)^2}{P(R-r)^2 + Q(\rho^2 + r^2)}$.

47.16. Un regulador centrífugo gira alrededor del eje vertical con una velocidad angular constante ω.

Determinar el ángulo de desviación de las palancas OA y OB de la vertical teniendo solamente en cuenta el peso p de cada bola y



Para el problema 47.15.



Para el problema 47.16.

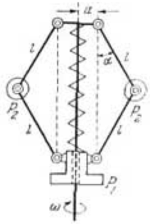
el peso p_1 del manguito C. Todas las barras tienen una misma longitud l.

Respuesta: $\cos\varphi = \frac{(p+p_1)g}{pl\omega^2}$.

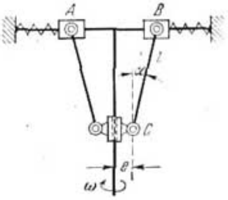
47.17. Un regulador centrífugo gira con una velocidad angular constante ω.

Hallar la relación entre la velocidad angular del regulador y el ángulo α de desviación de sus barras de la vertical, si el manguito de peso P_1 se presiona hacia abajo por un resorte de coeficiente de rigidez c cuyo extremo superior está fijado en el eje del regulador; cuando $\alpha = 0$ el resorte está en estado no deformado. Los pesos de las bolas son iguales a P_2, la longitud de las barras es igual a l, los ejes de suspensión de las barras se encuentran a una distancia a del eje del regulador. Los pesos de las barras y del resorte se desprecian.

Respuesta: $\omega^2 = g\frac{P_1+P_2+2lc(1-\cos\alpha)}{P_2(a+l\operatorname{sen}\alpha)}\operatorname{tg}\alpha$.



Para el problema 47.17.

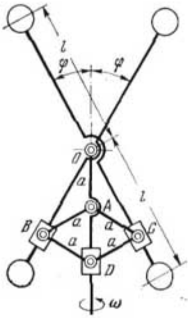


Para el problema 47.18.

47.18. Un regulador centrífugo de muelle está compuesto de dos cargas A y B de pesos $P_A = P_B = 15$ kgf montadas sobre la barra lisa horizontal del manguito C de peso $P_C = 10$ kgf, unida con el eje del regulador, de dos tirantes de longitud $l = 25$ cm y de muelles que presionan las cargas contra el eje de rotación; la distancia entre las articulaciones de los tirantes y el eje de rotación es $e = 3$ cm, el coeficiente de rigidez de los muelles es $c = 15$ kgf/cm.

Calcular la velocidad angular del regulador para un ángulo de apertura $\alpha = 60°$, si para el ángulo $\alpha_0 = 30°$ las muelles se encuentran en estado no tensado. El peso de los tirantes y el rozamiento se desprecian.

Respuesta: $n = 188$ r.p.m.



Para el problema 47.19.

47.19. En un regulador cuatro cargas de igual peso P están fijadas en los extremos de dos palancas de brazos iguales de longitud igual a $2l$, que pueden girar en el plano del regulador alrededor del extremo del árbol O y que forman con el eje del árbol un ángulo variable φ. Las palancas AB y AC de longitud a están articuladas con el árbol en el punto A situado a una distancia $OA = a$ del extremo del árbol O. Estas palancas, a su vez, están articuladas en los puntos B y C con las barras BD y CD de longitud a que llevan el manguito D de peso Q. En los puntos B y C hay unas correderas que se deslizan a lo largo de las palancas que soportan las cargas. El regulador gira con una velocidad angular constante ω.

Hallar la relación entre el ángulo φ y la velocidad angular ω cuando el regulador está en equilibrio.

Respuesta: El regulador puede estar en equilibrio solamente cuando $\omega = \sqrt{\frac{2gQa}{Pl^2}}$ independientemente del ángulo φ.

47.20*. Un hilo homogéneo, cuyo extremo soporta una carga A de peso P, contornea la polea fija B y la móvil C, sube hacia la polea fija D y pasa paralelamente al plano horizontal donde a su extremo se ha sujetado una carga E de peso P. En el eje de la polea C está fijada una carga K de peso Q. El coeficiente de rozamiento de la carga E sobre el plano horizontal es igual a f.

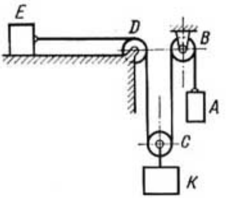
Para qué condición la carga K descenderá, si las velocidades iniciales de todas las cargas son iguales a cero? Calcular la aceleración de la carga K. Despreciar las masas de las poleas y del hilo.

Respuesta: $Q > P(1+f)$; $\quad w = g\frac{Q-P(1+f)}{Q+2P}$.

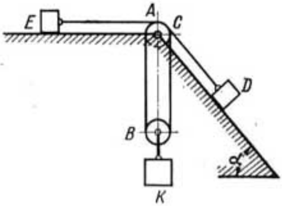
47.21*. Dos cargas D y E de peso P cada una están atadas a los extremos de un hilo imponderable e inextensible. Este hilo parte de la carga E, pasa sobre la polea fija A, luego contornea la polea móvil B, sube a la polea fija C coaxial con la polea A, pasa paralelamente al plano liso inclinado donde una carga D está atada a su extremo. El plano inclinado forma con el horizonte un ángulo α. Una carga K de peso Q está atada a la polea móvil B. El coeficiente de rozamiento de deslizamiento de la carga E sobre el plano horizontal es igual a f. Las masas de las poleas se desprecian.

Hallar la condición con la cual la carga K descenderá. Determinar la aceleración de esta carga. En el instante inicial las velocidades de todas las cargas eran iguales a cero.

Respuesta: $Q > P(f + \operatorname{sen} \alpha)$; $\quad w = g \dfrac{Q - P(f + \operatorname{sen} \alpha)}{Q + 2p}$.



Para el problema 47.20.



Para el problema 47.21.

47.22*. Un prisma A de peso P se desliza sobre la cara lateral lisa del prisma B de peso Q, que forma con el plano horizontal un ángulo α.

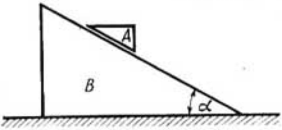
Determinar la aceleración del prisma B. Despreciar el rozamiento entre el prisma B y el plano horizontal.

Respuesta: $w = g \dfrac{P \operatorname{sen} 2\alpha}{2(Q + P \operatorname{sen}^2 \alpha)}$.

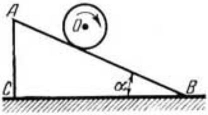
47.23*. Sobre un plano horizontal liso se ha colocado un prisma triangular ABC de peso P que puede deslizarse sin rozamiento sobre este plano; un cilindro circular homogéneo de peso Q rueda sin deslizamiento sobre la cara AB del prisma.

Determinar la aceleración del prisma.

Respuesta: La aceleración está dirigida hacia la izquierda y es igual a $\dfrac{Q \operatorname{sen} 2\alpha}{3(P + Q) - 2Q \cos^2 \alpha} g$.



Para el problema 47.22.



Para el problema 47.23.

47.24*. Un hilo pasa sobre las poleas A y B de ejes fijos y soporta la polea móvil C; los trozos del hilo que no se encuentran sobre las poleas son paralelos. La polea C está cargada por una pesa $P = 4$N; las cargas de pesos $P_1 = 2$N y $P_2 = 3$N están fijadas en los extremos del hilo.

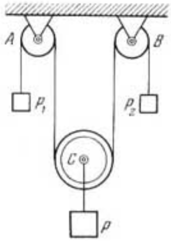
Calcular las aceleraciones de las tres cargas. Despreciar las masas de las poleas, del hilo y el rozamiento en los ejes.

Respuesta: $w=\frac{1}{11}g$ (hacia arriba); $w_1=\frac{1}{11}g$ (hacia arriba); $w_2=\frac{3}{11}g$ (hacia abajo).

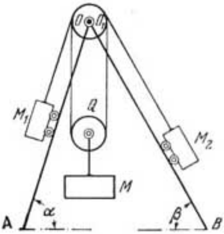
47.25*. Dos cargas M_1 y M_2 del mismo peso p se desplazan por dos guías inclinadas OA y OB situadas en el plano vertical bajo los ángulos α y β al horizonte; el hilo que une estas cargas parte de M_1, pasa por la polea O, que gira alrededor del eje horizontal, contornea la polea móvil Q, que soporta una carga M de peso P, luego pasa por la polea O_1 y llega a la carga M_2. Las poleas O y O_1 son coaxiales.

Hallar la aceleración w de la carga M. Despreciar el rozamiento, así como las masas de las poleas y del hilo.

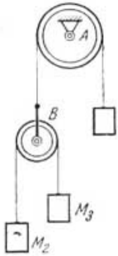
Respuesta: $w=g\,\frac{P-p(\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\beta)}{P+2p}$.



Para el problema 47.24.



Para el problema 47.25.



Para el problema 47.27.

47.26*. Resolver el problema anterior sustituyendo las cargas M_1 y M_2 por dos cilindros de peso P y de radio r cada uno. Considerar los cilindros como discos continuos circulares homogéneos. El coeficiente de rozamiento de rodadura de los cilindros sobre los planos inclinados es igual a f_{rod}. Los hilos están fijados en los ejes de los cilindros.

$$\textit{Respuesta: } w=g\,\frac{P-p\left[\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\beta+\frac{f_{rod}}{r}(\cos\alpha+\cos\beta)\right]}{P+3p}.$$

47.27*. Viene dado un sistema de dos poleas, la fija A y la móvil B, y de tres cargas M_1, M_2 y M_3 suspendidas con ayuda de hilos inextensibles, así como se muestra en el dibujo. Las masas de las cargas son respectivamente iguales a m_1, m_2 y m_3; $m_1 < m_2+m_3$ y $m_2 \leqslant m_3$. Las masas de las poleas se desprecian.

Hallar la relación de las masas m_1, m_2 y m_3 para la cual la carga M_1 descenderá en el caso cuando las velocidades iniciales de las cargas son iguales a cero.

Respuesta: Debe ser $m_1 > \frac{4m_2m_3}{m_2+m_3}$.

47.28*. Cuando el carro de grúa A choca con el tope elástico B, la carga D suspendida de una barra imponderable comienza a oscilar.

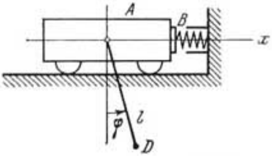
Escribir las ecuaciones diferenciales del movimiento del sistema material, si m_1 es la masa del carro, m_2 es la masa de la carga, l es la longitud de la barra, c es el coeficiente de rigidez del resorte del tope B. Despreciar las masas de las ruedas y todas las fuerzas de resistencia. Tomar como origen del eje x el extremo izquierdo del resorte no deformado.

Respuesta: $(m_1+m_2)\ddot{x}+m_2l\ddot{\varphi}\cos\varphi-m_2l\dot{\varphi}^2\operatorname{sen}\varphi=-cx;$
$\ddot{x}\cos\varphi+l\ddot{\varphi}=-g\operatorname{sen}\varphi.$

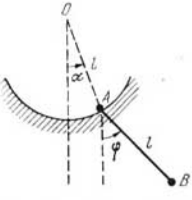
47.29*. Utilizando la respuesta del problema anterior, calcular el período de oscilaciones pequeñas de la carga en ausencia del tope B.

Indicación. Despreciar término que contiene el factor $\dot{\varphi}^2$; considerar que $c=0$, $\operatorname{sen}\varphi\approx\varphi$, $\cos\varphi\approx 1$.

Respuesta: $T=2\pi\sqrt{\frac{m_1}{m_1+m_2}}\sqrt{\frac{l}{g}}$.



Para el problema 47.28.



Para el problema 47.30.

47.30*. Una masa puntiforme A de peso P_1 se desplaza en el plano vertical sobre la superficie interior lisa de un cilindro fijo de radio l. La masa puntiforme B de peso P_2, ligada con la masa A por un tirante imponderable AB de longitud l, puede oscilar alrededor del eje A perpendicularmente al plano del dibujo. Las posiciones de las masas A y B se han determinado con auxilio de los ángulos α y φ, contados a partir de la vertical.

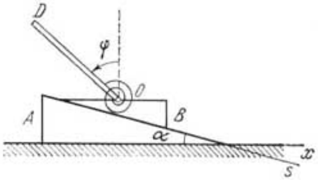
Escribir las ecuaciones diferenciales del movimiento del sistema material compuesto de los puntos A y B que están ligados por medio del tirante imponderable AB.

Respuesta: $(m_1+m_2)\,l\ddot{\alpha}+m_2 l\ddot{\varphi}\cos(\varphi-\alpha)-m_2 l\dot{\varphi}^2\operatorname{sen}(\varphi-\alpha)=$
$=-(P_1+P_2)\operatorname{sen}\alpha,$
$l\ddot{\varphi}+l\ddot{\alpha}\cos(\varphi-\alpha)+l\dot{\alpha}^2\operatorname{sen}(\varphi-\alpha)=-g\operatorname{sen}\varphi,$
donde $m_1=\frac{P_1}{g},\quad m_2=\frac{P_2}{g}.$

47.31*. Haciendo uso de la respuesta del problema anterior, escribir las ecuaciones diferenciales de las oscilaciones pequeñas del sistema material examinado.

Indicación. Despreciar los términos que contienen los multiplicadores $\dot{\varphi}^2$ y $\dot{\alpha}^2$, considerar también que $\operatorname{sen}(\varphi-\alpha)\approx\varphi-\alpha$, $\cos(\varphi-\alpha)\approx 1$, $\operatorname{sen}\alpha\approx\alpha$, $\operatorname{sen}\varphi\approx\varphi$.

Respuesta: $(m_1+m_2)\,l\ddot{\alpha}+m_2 l\ddot{\varphi}=-(P_1+P_2)\,\alpha,$
$l\ddot{\varphi}+l\ddot{\alpha}=-g\varphi,$ donde $m_1=\frac{P_1}{g},\quad m_2=\frac{P_2}{g}.$



Para el problema 47.32.

47.32*. El prisma B de peso P_2 se desliza sobre la cara del prisma fijo A que forma con el horizonte un ángulo α. Una barra fina homogénea OD de peso P_1 y de longitud l va acoplada al prisma B por medio de un resorte helicoidal con coeficiente de rigidez c y de una articulación cilíndrica O. La barra efectúa oscilaciones alrededor del eje O perpendicular al plano del dibujo. Las posiciones del prisma B y de la barra OD se han definido por las coordenadas s y φ.

Escribir las ecuaciones diferenciales del movimiento del sistema material constituido por el prisma B y la barra OD. Las fuerzas de rozamiento se desprecian.

Respuesta: $(m_1+m_2)\ddot{s}+\frac{1}{2}m_1 l\dot{\varphi}^2\operatorname{sen}(\varphi+\alpha)-\frac{1}{2}\times$
$\times m_1 l\ddot{\varphi}\cos(\varphi+\alpha)=(P_1+P_2)\operatorname{sen}\alpha,$
$\frac{1}{3}m_1 l^2\ddot{\varphi}-\frac{1}{2}m_1 l\ddot{s}\cos(\varphi+\alpha)=\frac{1}{2}P_1 l\operatorname{sen}\varphi-c\varphi,$
donde $m_1=\frac{P_1}{g},\quad m_2=\frac{P_2}{g}.$

47.33*. Utilizando la respuesta del problema anterior, calcula el período de oscilaciones pequeñas de la barra OD, si $P_1 l \cos^2\alpha < 2c$

Indicación. Considerar que $\operatorname{sen}\varphi \approx \varphi$, $\cos(\varphi+\alpha) \approx \cos\alpha - \varphi \operatorname{sen}\alpha$, luego despreciar los términos que contienen los factores $\dot\varphi^2$ y $\varphi \cdot \ddot\varphi$.

Respuesta: $T = 2\pi l \sqrt{\dfrac{m_1[m_1(1+3\operatorname{sen}^2\alpha)+4m_2]}{6(m_1+m_2)(2c - P_1 l \cos^2\alpha)}}$.

47.34*. Resolver el problema 47.32, suponiendo que el prisma A de peso P_3 se desplaza sobre un plano horizontal liso; su posición se determina por la coordenada x.

Respuesta:
$$(m_1+m_2+m_3)\ddot{x} + (m_1+m_2)\ddot{s}\cos\alpha + m_1\frac{l}{2}\dot\varphi^2 \operatorname{sen}\varphi - m_1\frac{l}{2}\ddot\varphi\cos\varphi = 0,\quad (m_1+m_2)\ddot{x}\cos\alpha + (m_1+m_2)\ddot{s} + m_1\frac{l}{2}\dot\varphi^2\operatorname{sen}(\varphi+\alpha) - m_1\frac{l}{2}\ddot\varphi\cos(\varphi+\alpha) = (P_1+P_2)\operatorname{sen}\alpha,\ \frac{1}{3}m_1l^2\ddot\varphi - \frac{1}{2}m_1l\ddot{x}\cos\varphi - \frac{1}{2}m_1l\ddot{s}\cos(\varphi+\alpha) = \frac{1}{2}P_1l\operatorname{sen}\varphi - c\varphi,$$
donde $m_1 = \dfrac{P_1}{g}$, $m_2 = \dfrac{P_2}{g}$, $m_3 = \dfrac{P_3}{g}$.

§ 48. ECUACIONES DE LAGRANGE DE SEGUNDO GÉNERO

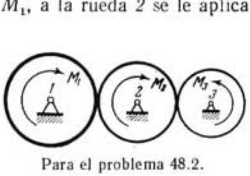
48.1. La transmisión de rotación entre dos árboles mutuamente perpendiculares que se cortan, se realiza por medio de dos ruedas dentadas cónicas que tienen z_1 y z_2 dientes respectivamente; los momentos de inercia de los árboles con las ruedas encajadas sobre éstos son respectivamente iguales a J_1 y J_2.

Determinar la aceleración angular del primer árbol si éste sufre la acción del momento de rotación M_1, y el segundo, la del momento de resistencia M_2. No tomar en cuenta el rozamiento en los rodamientos.

Respuesta: $\varepsilon_1 = \dfrac{M_1 - kM_2}{J_1 + k^2J_2}$, donde $k = \dfrac{z_1}{z_2}$.

48.2. En el engranaje representado en el dibujo, la rueda *1* se pone en movimiento por un momento M_1, a la rueda *2* se le aplica el momento de resistencia M_2 y a la rueda *3*, el momento de resistencia M_3.

Hallar la aceleración angular de la primera rueda, considerando todas las ruedas como discos homogéneos con masas m_1, m_2, m_3 y radios r_1, r_2, r_3 respectivamente.



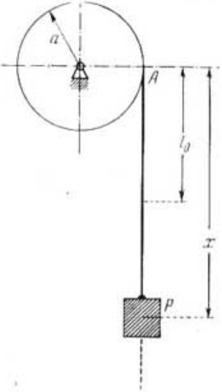
Para el problema 48.2.

Respuesta: $\varepsilon_1 = \dfrac{2\left(M_1 \frac{r_1}{r_2} M_2 - \frac{r_1}{r_3} M_3\right)}{(m_1+m_2+m_3)\,r_1^2}$.

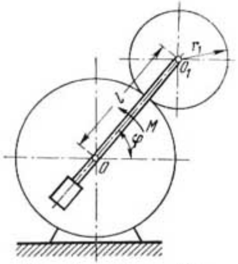
48.3. Determinar el movimiento de la carga de peso P suspendida de un cable homogéneo de peso P_1 y de longitud l; el cable está enrollado sobre un tambor de radio a y de peso P_2; el eje de rotación es horizontal. Despreciar el rozamiento. Suponer que la masa del tambor está uniformemente repartida por su llanta. En el instante inicial $t=0$ el sistema estaba en reposo. La longitud de la parte pendiente de la cuerda es l_0.

Indicación. Despreciar las dimensiones del tambor en comparación con la longitud de la parte pendiente de la cuerda.

Respuesta: $x = -\dfrac{Pl}{P_1} + \left(l_0 + \dfrac{Pl}{P_1}\right) \operatorname{ch} \sqrt{\dfrac{P_1 g}{(P+P_1+P_2)\,l}}\, t$.



Para el problema 48.3.



Para el problema 48.4.

48.4. En un mecanismo epicíclico el piñón móvil de radio r_1 está montado sobre la manivela con un contrapeso, la cual gira alrededor del eje del piñón fijo bajo la acción del momento aplicado M.

Determinar la aceleración angular de rotación de la manivela y el esfuerzo circunferencial S en el punto de contacto de los piñones, si la distancia entre los ejes de piñones es igual a l, el momento de inercia de la manivela con el contrapeso respecto a su eje de rotación es igual a J_0, la masa del piñón móvil es m_1, su momento de inercia respecto a su eje es J_1. Despreciar el rozamiento. El centro de gravedad del piñón y de la manivela con el contrapeso está sobre el eje de rotación de la manivela.

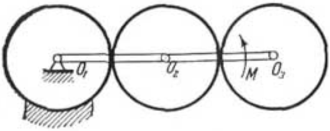
Respuesta: $\varepsilon = \dfrac{M}{J_0 + m_1 l^2 + J_1 \dfrac{l^2}{r_1^2}}$;

$$S = \frac{J_1 l}{r_1^2}\varepsilon.$$

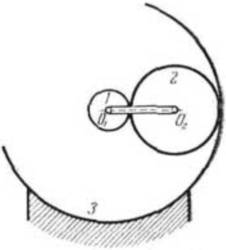
48.5. En un mecanismo planetario el piñón de eje O_1 está fijo; un momento de rotación M está aplicado a la palanca O_1O_3; el mecanismo está dispuesto en el plano horizontal.

Calcular la aceleración angular de la palanca considerando los piñones como discos homogéneos de iguales masas m y de iguales radios r. La masa de la palanca se desprecia.

Respuesta: $\varepsilon_1 = \dfrac{M}{22\,mr^2}$.



Para el problema 48.5.



Para el problema 48.6.

48.6. El piñón *2*, de la transmisión representada en el dibujo, que se pone en movimiento por la palanca O_1O_2, rueda sin deslizamiento sobre la superficie interior del piñón fijo *3* y pone en rotación, alrededor del eje fijo O_1, el piñón *1*. Se sabe que el piñón *1* gira diez veces más rápido que la palanca.

Considerando los piñones como discos homogéneos de un mismo grosor y hechos de un mismo material, hallar la aceleración angular de la palanca suponiendo que al piñón *1* está aplicado un momento de resistencia constante M_1 y a la palanca, un momento de rotación constante M; el mecanismo está situado en el plano horizontal. La masa de la palanca se desprecia.

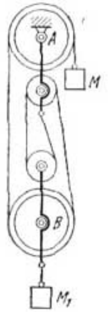
Respuesta: La aceleración angular de la palanca es $\varepsilon = \dfrac{M - 10\,M_1}{1300\,J}$, donde J es el momento de inercia del piñón *1* respecto a su eje de rotación.

48.7. La carga M de 101 kgf de peso eleva con ayuda de un polipasto la carga M_1, cuyo peso junto con el collar móvil es igual a 320 kgf. El polipasto tiene cuatro poleas: las poleas grandes son de 16 kgf de peso cada una, las pequeñas son de 8 kgf cada una, los radios de las poleas grandes son iguales a r, los de las pequeñas son iguales a r_1.

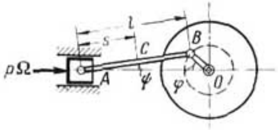
Determinar la aceleración de la carga M.

Durante la determinación de la energía de las poleas se supone que sus masas están uniformemente repartidas por las circunferencias de éstas.

Respuesta: $0{,}1\,g$.



Para el problema 48.7.



Para el problema 48.8.

48.8. Un mecanismo de manivela está compuesto de un pistón de masa m_1, una biela AB de masa m_2, una manivela OB, un árbol y un volante; J_2 es el momento de inercia de la biela respecto a su centro de masas C; J_3 es el momento de inercia de la manivela OB, del árbol y del volante respecto al eje; Ω es el área del pistón; p es la presión sobre el pistón; l es la longitud de la biela; s es la distancia entre el punto A y el centro de gravedad de la biela; r es la longitud de la manivela OB; M es el par de resistencia que actúa sobre el árbol.

Escribir las ecuaciones de movimiento del mecanismo suponiendo que el ángulo de giro de la biela ψ es pequeño, es decir, considerando que $\operatorname{sen}\psi=\psi$ y $\cos\psi=1$; el ángulo de giro φ de la manivela se toma como coordenada generalizada. El mecanismo está situado en el plano horizontal.

Respuesta:
$$\Big[(m_1+m_2)\,r^2\operatorname{sen}^2\varphi+(J_2+ms^2)\times\left(\frac{r}{l}\right)^2\cos^2\varphi+J_3\Big]\ddot{\varphi}+\Big[(m_1+m_2)\,r^2-(J_2+ms^2)\left(\frac{r}{l}\right)^2\Big]\cos\varphi\operatorname{sen}\varphi\dot{\varphi}^2=-M+p\Omega r\operatorname{sen}\varphi.$$

48.9. En una máquina para la compensación estática, los cojinetes están inclinados bajo un ángulo α respecto a la vertical. El rotor, colocado en el cojinete, posee un momento de inercia J

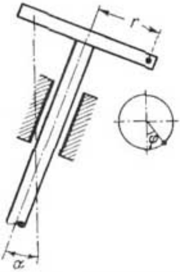
(respecto de su eje) y porta una masa no equilibrada m a la distancia r del eje.

Escribir la ecuación diferencial de movimiento del rotor y determinar la frecuencia de oscilaciones pequeñas alrededor de la posición de equilibrio.

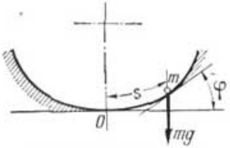
Respuesta: $(mr^2+J)\ddot{\varphi}+mgr\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\varphi=0,$

$$k=\sqrt{\frac{mgr\operatorname{sen}\alpha}{mr^2+J}},$$

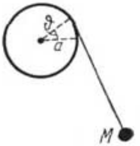
donde φ es el ángulo de giro del rotor.



Para el problema 48.9.



Para el problema 48.10.



Para el problema 48.11.

48.10. Un punto material de masa m se desplaza bajo la acción de la fuerza de gravedad a lo largo de una guía cicloidal definida por la ecuación $s=4a\operatorname{sen}\varphi$, donde s es el arco contado a partir del punto O, φ es el ángulo formado por la tangente a la cicloide con el eje horizontal.

Determinar el movimiento del punto.

Respuesta: $s=A\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{a}}\,t+\varphi_0\right)$, donde A y φ_0 son constantes de integración.

48.11. Escribir la ecuación de movimiento del péndulo compuesto de un punto material M de masa m, suspendido de un hilo enrollado sobre un cilindro fijo de radio r. En la posición de equilibrio, la longitud de la parte del hilo que pende del cilindro es igual a l. La masa del hilo se desprecia.

Respuesta: $(l+r\vartheta)\ddot{\vartheta}+r\dot{\vartheta}^2+g\operatorname{sen}\vartheta=0$, donde ϑ es el ángulo de desviación del péndulo de la vertical.

48.12. Escribir la ecuación de movimiento del péndulo compuesto de un punto material de masa m suspendido de un hilo, cuya longitud varía de acuerdo con una ley arbitrariamente dada $l=l(t)$.

Respuesta: $\ddot{\varphi}+2\frac{\dot{l}}{l}\dot{\varphi}+\frac{g}{l}\operatorname{sen}\varphi=0$, donde φ es el ángulo de desviación del hilo de la vertical.

48.13. En el problema anterior, determinar el movimiento del péndulo en el caso de oscilaciones pequeñas, cuando el hilo se alarga uniformemente de acuerdo con la ley

$$l(t)=l_0+ct.$$

Indicación. Tomar $l(t)$ como variable independiente.

Respuesta: $$\varphi=\frac{1}{\sqrt{l(t)}}\left[C_1J_1\left(2\sqrt{\frac{g}{c^2}l(t)}\right)+C_2Y_1\times\right.$$
$$\left.\times\left(2\sqrt{\frac{g}{c^2}l(t)}\right)\right].$$

donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias, J_1, Y_1 son las funciones de Bessel y de Neumann de primer orden.

48.14. El punto de suspensión del péndulo compuesto de un punto material de masa m, suspendido de un hilo inextensible de longitud l, se desplaza de acuerdo con la ley dada $\xi=\xi_0(t)$ por una recta inclinada que forma con el horizonte un ángulo α.

Escribir la ecuación de movimiento del péndulo.

Respuesta: $\ddot{\varphi}+\frac{g}{l}\operatorname{sen}\varphi+\frac{\ddot{\xi}}{l}\cos(\varphi-\alpha)=0.$

Para el problema 48.15.

48.15. Dos árboles coplanares que forman entre sí un ángulo α, están unidos por una articulación cardán. Los momentos de inercia de los árboles son iguales a J_1 y J_2.

Escribir la ecuación de movimiento del primer árbol, si él está sometido a la acción de momento de rotación M_1 y al otro árbol está aplicado un par de resistencia M_2. Despreciar el rozamiento en los cojinetes.

Respuesta: $$\left[J_1+J_2\left(\frac{\cos\alpha}{1-\operatorname{sen}^2\alpha\cos^2\varphi}\right)^2\right]\ddot{\varphi}-$$
$$-\frac{J_2\operatorname{sen}^2\alpha\cos^2\alpha\operatorname{sen}^2\varphi}{(1-\operatorname{sen}^2\alpha\cos^2\varphi)^3}\dot{\varphi}^2=M_1-M_2\times$$
$$\times\frac{\cos\alpha}{1-\operatorname{sen}^2\alpha\cos^2\varphi},$$

donde φ es el ángulo de giro del primer árbol.

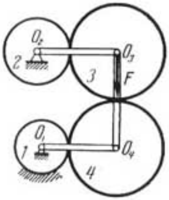
48.16. Para los datos del problema anterior, hallar el movimiento del primer árbol en el caso cuando el ángulo α entre los árboles es pequeño. Hacer los cálculos con la aproximación de α^2.

Respuesta: $\varphi = \frac{1}{2}\frac{M_1 - M_2}{J_1 + J_2}t^2 + C_1 t + C_2$, donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias.

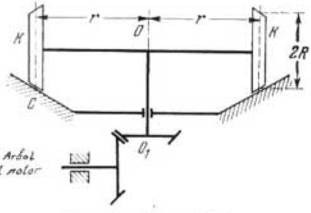
48.17. El mecanismo epicíclico, representado en el dibujo, situado en el plano horizontal, está compuesto de las manivelas O_1O_4 y O_2O_3, de la biela O_3O_4 y de cuatro piñones *1*, *2*, *3*, y *4* de radios respectivamente iguales a $r_1 = 50$ mm, $r_2 = 80$ mm, $r_3 = 120$mm, $r_4 = 150$ mm; $O_1O_2 = O_3O_4 = 270$ mm; $O_1O_4 = O_2O_3 = 200$ mm. El piñón *1* es fijo.

Considerando que los piñones son discos homogéneos de un mismo grosor y que están hechos de un mismo material, y despreciando las masas de las palancas y las fuerzas de rozamiento, calcular la magnitud del esfuerzo F (considerándolo constante y dirigido a lo largo de O_4O_3) que debe ser aplicado a la palanca O_3O_4 para girar la palanca O_2O_3 un ángulo de 30° en el curso de 1 s, si en el instante inicial el sistema estaba inmóvil y $\angle O_2O_3O_4 = 90°$; el peso de los piñones móviles es igual a 30 kgf.

Respuesta: $F = 0,48\left[\int_0^{\pi/6}\frac{d\varphi}{\sqrt{\operatorname{sen}\varphi}}\right]^2$ kgf $= 1,03$ kgf.



Para el problema 48.17.



Para el problema 48.18.

48.18. Las moletas K, K se ponen en movimiento desde el árbol del motor mediante una transmisión, cuyo esquema está representado en el dibujo. Cada moleta pesa 3 tf, su radio medio es $R = 1$ m, el radio de rotación es $r = 0,5$ m. Se supone que el eje instantáneo de rotación de la moleta pasa por el punto medio C de la llanta. La relación de los radios de los piñones de la transmisión cónica del motor al árbol vertical O_1O es igual a 2/3. La moleta se considera como un disco homogéneo de radio R y se desprecian las masas de todas las partes móviles en comparación con las masas de las moletas.

Calcular el momento de rotación constante que debe ser aplicado al árbol del motor para comunicar al eje vertical O_1O una velocidad angular de 120 r.p.m. 10 s después del arranque del motor. Las fuerzas de resistencia se desprecian.

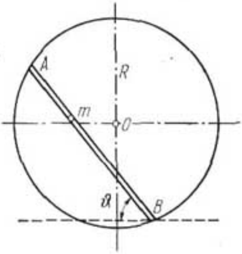
Respuesta: 320 kgfm.

48.19. Un cono circular homogéneo rueda sobre un plano rugoso inclinado bajo un ángulo α respecto del horizonte. La longitud de la generatriz del cono es l, el ángulo de abertura es 2β.

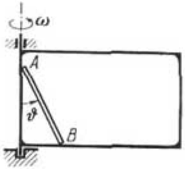
Escribir la ecuación de movimiento del cono.

Indicación. Como coordenada generalizada se debe tomar el ángulo ϑ formado por la generatriz en contacto con la línea de máxima pendiente del plano.

Respuesta: $\ddot{\vartheta} + \dfrac{g \operatorname{sen} \alpha}{l\left(\cos^2\beta + \frac{1}{5}\right)} \operatorname{sen} \vartheta = 0.$



Para el problema 48.20.



Para el problema 48.21.

48.20. Un punto material de masa m se desplaza con una velocidad relativa constante v sobre una barra homogénea de masa M y de longitud $2a$, cuyos extremos se deslizan por una circunferencia lisa de radio R situada en el plano horizontal.

Determinar el movimiento de la barra. En el instante inicial el punto material estaba en el centro de gravedad de la barra.

Respuesta: $\vartheta - \vartheta_0 = C \operatorname{arctg} \dfrac{vt}{\sqrt{R^2 - a^2 + \frac{M}{m}\left(R^2 - 2\frac{a^2}{3}\right)}}$,

donde ϑ_0 y C son constantes arbitrarias.

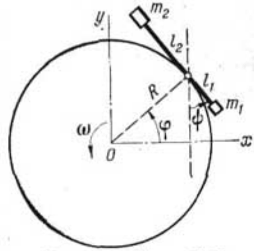
48.21. Los extremos de una barra homogénea pesada AB de longitud $2a$ y de masa M, se deslizan sin rozamiento sobre las barras horizontal y vertical de un marco que gira con una velocidad angular constante ω alrededor del lado vertical.

Escribir la ecuación de movimiento de la barra y determinar la posición de equilibrio relativo.

Respuesta: $\frac{4}{3}Ma^2\ddot{\vartheta} - \frac{4}{3}M\omega^2 a^2 \operatorname{sen}\vartheta\cdot\cos\vartheta -$
$- Mga\operatorname{sen}\vartheta = 0$, donde ϑ es el ángulo formado por la barra con la vertical. En la posición de equilibrio $\vartheta = 0$ (el equilibrio es inestable).

48.22. Una palanca que soporta en sus extremos las masas concentradas m_1 y m_2 está articulada a la circunferencia de un disco homogéneo de radio R. Las distancias entre las masas y la articulación son respectivamente iguales a l_1 y l_2. El disco gira alrededor del eje vertical perpendicular a su plano con una velocidad angular ω.

Escribir la ecuación de movimiento de la palanca y determinar su posición relativa de equilibrio. La masa de la palanca se desprecia. El eje de rotación de la palanca es paralelo al eje de rotación del disco.



Para el problema 48.22.

Respuesta: $(m_1l_1^2 + m_2l_2^2)\ddot{\psi} - R\omega^2(m_1l_1 - m_2l_2)\cos(\psi - \omega t) = 0$.
Para $m_1l_1 = m_2l_2$ la palanca está en equilibrio relativo indiferente. Para $m_1l_1 \neq m_2l_2$ existen dos posiciones de equilibrio relativo, para las cuales $\psi = \omega t \pm \frac{\pi}{2}$, es decir, la palanca está dirigida por el radio.

48.23. Resolver el problema anterior suponiendo que el disco gira en el plano vertical (tener en cuenta la fuerza de gravedad).

Respuesta: $(m_1l_1^2 + m_2l_2^2)\psi - R\omega^2(m_1l_1 - m_2l_2)\cos(\psi - \omega t) +$
$+ (m_1l_1 - m_2l_2)g\operatorname{sen}\psi = 0$.
Para $m_1l_1 \neq m_2l_2$ el equilibrio relativo es imposible.

48.24. Un disco fino de masa M puede deslizarse sin rozamiento con su superficie sobre el plano horizontal. Un punto material de masa m se desplaza sobre la superficie superior rugosa del disco. Las ecuaciones del movimiento relativo del punto en coordenadas cartesianas x e y, ligadas con el disco y con origen en su centro de gravedad, están dadas en la forma $x = x(t)$, $y = y(t)$. El momento de inercia del disco respecto a su centro de gravedad es igual a J.

Determinar la ley de variación de la velocidad angular del disco. En la posición inicial el disco estaba inmóvil.

Respuesta: $\left[J+\frac{mM}{m+M}(x^2+y^2)\right]\dot{\varphi}+\frac{mM}{m+M}(x\dot{y}-y\dot{x})=$

$$=\frac{mM}{m+M}(x_0\dot{y}_0-y_0\dot{x}_0),$$

donde x_0, y_0, $\dot{x}_0$, $\dot{y}_0$ son los valores de las coordenadas y de las proyecciones de la velocidad del punto en el instante inicial.

48.25. Un punto material se desplaza con una velocidad relativa $v=\alpha t$ a lo largo de la circunferencia de radio R del disco descrito en el problema anterior.

Hallar la ley de movimiento del disco.

Respuesta: $\varphi=-\frac{mM}{2(m+M)}\frac{R\alpha}{J+\frac{mM}{m+M}R^2}t^2=\frac{\beta}{2R}t^2;$

$$\xi=-\frac{mR}{m+M}\cos\frac{\alpha+\beta}{2R}t^2;$$

$$\eta=-\frac{mR}{m+M}\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2R}t^2;$$

donde φ es el ángulo de giro del disco, ξ y η son las coordenadas del centro de gravedad del disco en el sistema cartesiano fijo con origen en el centro de inercia del sistema.

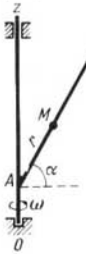
48.26. Un punto material M se desplaza bajo la acción de la fuerza de gravedad a lo largo de una recta AB que gira con una velocidad angular constante ω alrededor de un eje vertical fijo. La recta AB forma con la horizontal un ángulo α.

Determinar la ley del movimiento del punto.

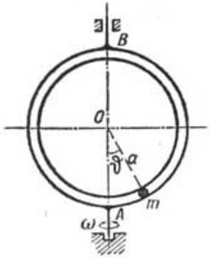
Respuesta: La distancia del punto móvil al punto de intersección de la recta con el eje vertical es

$$r=C_1e^{\omega t\cos\alpha}+C_2e^{-\omega t\cos\alpha}+\frac{g}{\omega^2}\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos^2\alpha},$$

donde C_1 y C_2 son las constantes de integración.



Para el problema 48.26.



Para el problema 48.27.

48.27. Un punto material de masa m se desplaza por una circunferencia de radio a que gira con una velocidad angular constante ω alrededor del diámetro vertical AB.

Escribir la ecuación de movimiento del punto y determinar el momento M necesario para mantener la constancia de la velocidad angular.

Respuesta: $\ddot{\vartheta}+\left(\frac{g}{a}-\omega^2\cos\vartheta\right)\operatorname{sen}\vartheta=0;$

$$M=2ma^2\operatorname{sen}\vartheta\cdot\cos\vartheta\cdot\omega\dot{\vartheta}.$$

48.28. Un punto material de masa m se desplaza en el interior de un tubo liso que representa una circunferencia de radio a; el tubo gira libremente alrededor del diámetro vertical. El momento de inercia del tubo respecto al diámetro vertical es igual a J.

Escribir las ecuaciones de movimiento del sistema, considerando que el tubo gira bajo la acción de un momento constante M. (Véase el dibujo para el problema 48.27.)

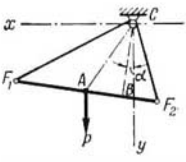
Respuesta: $ma^2\ddot{\vartheta}-ma^2\operatorname{sen}\vartheta\cos\vartheta\cdot\dot{\varphi}^2+mga\operatorname{sen}\vartheta=0,$

$$J\ddot{\varphi}+ma^2\operatorname{sen}^2\vartheta\cdot\ddot{\varphi}+2ma^2\operatorname{sen}\vartheta\cos\vartheta\cdot\dot{\vartheta}\dot{\varphi}=M$$

(ϑ es el ángulo que define la posición del punto en el tubo, φ es el azimut del tubo).

48.29. Una viga homogénea de peso P y de longitud $2l$ está suspendida por sus extremos de una cuerda de longitud $2a$ que pasa sobre una polea fija C.

Despreciando la masa de la cuerda y suponiendo que la polea es muy pequeña, escribir las expresiones para las energías cinética y potencial del sistema.



Para el problema 48.29.

Indicación. La trayectoria del punto C respecto al segmento F_1F_2 es una elipse de eje mayor igual a $2a$ y de focos en los puntos F_1 y F_2; tomar por una de las coordenadas generalizadas la anomalía excéntrica de la elipse, es decir, el ángulo φ que se define con ayuda de las relaciones

$$AB=a\cos\varphi;\quad BC=\sqrt{a^2-l^2}\operatorname{sen}\varphi;$$

por la segunda coordenada generalizada aceptar el ángulo α entre el eje vertical y y la perpendicular BC a la barra.

Respuesta: La energía cinética del sistema es:

$$T=\frac{P}{2g}\left[\left(\frac{l^2}{3}+a^2\cos^2\varphi+b^2\operatorname{sen}^2\varphi\right)\dot{\alpha}^2-2ab\dot{\varphi}\dot{\alpha}+\right.$$

$$\left.+\frac{a^2b^2+l^4\operatorname{sen}^2\varphi\cos^2\varphi}{a^2\cos^2\varphi+b^2\operatorname{sen}^2\varphi}\dot{\varphi}^2\right].$$

La energía potencial del sistema es:

$$\Pi=-P(b\operatorname{sen}\varphi\cos\alpha-a\cos\varphi\operatorname{sen}\alpha);\quad b=\sqrt{a^2-l^2}.$$

48.30. El extremo A de una barra delgada homogénea AB de peso P y de longitud $2l$ se desliza sobre una recta vertical, el extremo B, sobre un plano horizontal.

Escribir las ecuaciones de movimiento de la barra y hallar sus primeras integrales.

Respuesta: Las ecuaciones de movimiento son:

$$\ddot{\varphi}-\dot{\vartheta}^2 \operatorname{sen}\varphi\cos\varphi=\frac{3}{4}\frac{g}{l}\operatorname{sen}\varphi;$$

$$\ddot{\vartheta}\operatorname{sen}^2\varphi+2\dot{\vartheta}\dot{\varphi}\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi=0$$

(φ es el ángulo de inclinación de la barra a la vertical, ϑ es el ángulo formado por la proyección de la barra sobre el plano horizontal con el eje Ox). Las primeras integrales son:

$$\dot{\vartheta}\operatorname{sen}^2\varphi=C_1;\ \dot{\varphi}^2+\dot{\vartheta}^2\operatorname{sen}^2\varphi+\frac{3}{2}\frac{g}{l}\cos\varphi=C_2$$

(C_1 y C_2 son constantes arbitrarias).

48.31. Escribir las ecuaciones de movimiento de un péndulo matemático de masa m suspendido de un hilo elástico; la longitud del hilo en la posición de equilibrio es l, su rigidez es c.

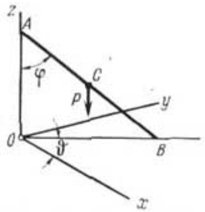
Respuesta: $(1+z)\ddot{\varphi}+2\dot{z}\dot{\varphi}+\frac{g}{l}\operatorname{sen}\varphi=0;$

$$\ddot{z}-(1+z)\dot{\varphi}^2+\frac{c}{m}z+\frac{g}{l}(1-\cos\varphi)=0,$$

donde φ es el ángulo de desviación del péndulo de la vertical, z es el alargamiento relativo del hilo.

48.32. En el problema anterior, determinar el movimiento del péndulo en el caso de oscilaciones pequeñas.

Respuesta: $z=A\operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{c}{m}}t+\alpha\right),\ \varphi=B\operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t+\beta\right),$
donde A, α, B, β son constantes arbitrarias.



Para el problema 48.30.

Para el problema 48.33.

48.33. Un extremo de un hilo inextensible está enrollado sobre un cilindro homogéneo de radio R, el otro extremo está fijado en el punto fijo O. El cilindro desciende desenrollando el hilo y al mismo tiempo oscila alrededor del eje horizontal que pasa por el punto de suspensión del hilo.

Despreciando el peso del hilo, escribir las ecuaciones diferenciales de movimiento del cilindro.

Respuesta: $\ddot{\rho} - R\ddot{\varphi} - \frac{2}{3}\rho\dot{\varphi}^2 = \frac{2}{3} g \cos\varphi;$

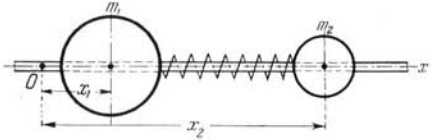
$$\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\varphi}) - R\rho\dot{\varphi}^2 = -g\rho \operatorname{sen}\varphi.$$

48.34. Utilizando los resultados obtenidos en el problema anterior, escribir la ecuación diferencial de oscilaciones pequeñas del cilindro, si el movimiento comienza a partir del estado de reposo cuando $t=0$, $\rho=\rho_0$, $\varphi=\varphi_0\neq 0$.

Respuesta: $\frac{d}{dt}[F^2(t)\varphi] + gF(t)\varphi = 0,$

donde $F(t) = \frac{gt^2}{3} + \rho_0 - R\varphi_0.$

48.35. Determinar el movimiento de un sistema compuesto de dos masas m_1 y m_2 fijadas sobre una barra lisa horizontal (el eje Ox); las masas, unidas por un resorte de rigidez c, pueden desplazarse en movimiento de avance a lo largo de la barra; la distancia entre los centros de gravedad de las masas, cuando el resorte no está deformado, es igual a l; el estado inicial del sistema para $t=0$ se define por los valores siguientes de las velocidades y coordenadas de los centros de gravedad de las masas: $x_1=0$, $\dot{x}_1=u_0$, $x_2=l$, $\dot{x}_2=0$.



Para el problema 48.35.

Respuesta: $x_1 = \frac{1}{m_1+m_2}\left\{m_1u_0t + \frac{m_2u_0}{k}\operatorname{sen} kt\right\};$

$$x_2 - l = \frac{1}{m_1+m_2}\left\{m_1u_0t - \frac{m_1u_0}{k}\operatorname{sen} kt\right\};$$

$$k = \sqrt{c\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)}.$$

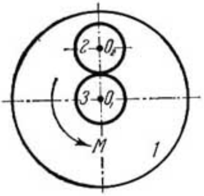
48.36. El eje de rotación O_2 del piñón *2* se halla sobre el volante *1* que gira alrededor del eje vertical O_1 bajo la acción del momento constante M aplicado a él. El piñón *2* está engranado con el piñón *3* que puede girar alrededor del eje independientemente del volante. La rotación del piñón *3* está impedida por un resorte espiral, no representado en el dibujo, cuyo momento reactivo $c\psi$ es proporcional al ángulo de giro ψ del piñón *3*.

Determinar el movimiento del sistema, considerando los piñones como discos homogéneos de iguales radios a y masas m y suponiendo que el momento de inercia del volante respecto al eje O_1 es igual a $20\ ma^2$. En el instante inicial el sistema estaba en reposo.

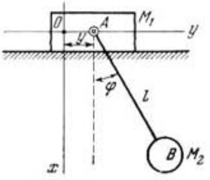
Respuesta: $\psi=\frac{M}{26c}\left(1-\cos 1{,}02\sqrt{\frac{c}{ma^2}}\,t\right)$;

$$\varphi=\frac{Mt^2}{52ma^2}+\frac{M}{676c}\left(1-\cos 1{,}02\sqrt{\frac{c}{ma^2}}\,t\right),$$

donde φ es el ángulo de rotación del volante.



Para el problema 48.36.



Para el problema 48.37.

48.37. Escribir las ecuaciones de movimiento de un péndulo elíptico compuesto de la corredera M_1 de masa m_1, que se desliza sin rozamiento sobre un plano horizontal, y de una bola M_2 de masa m_2, unida con la corredera por medio de una barra AB de longitud l. La barra puede girar alrededor del eje A unido con la corredera y perpendicular al plano del dibujo. La masa de la barra se desprecia.

Respuesta: $\frac{d}{dt}\left[(m_1+m_2)\dot y+m_2l\dot\varphi\cos\varphi\right]=0$;

$$l\ddot\varphi+\cos\varphi\,\ddot y+g\,\mathrm{sen}\,\varphi=0.$$

48.38. Determinar el período de oscilaciones pequeñas del péndulo elíptico descrito en el problema anterior.

Respuesta: $T=2\pi\sqrt{\frac{m_1}{m_1+m_2}\frac{l}{g}}$.

48.39. Escribir las ecuaciones de movimiento del péndulo elíptico (véase el problema 48.37), teniendo en cuenta el efecto de la fuerza constante de rozamiento de deslizamiento de la corredera sobre las guías. El coeficiente de rozamiento es igual a f.

Respuesta: $\frac{d}{dt}[(m_1+m_2)\dot{y}+m_2 l\dot{\varphi}\cos\varphi]=$

$$=-f\,[(m_1+m_2)\,g+m_2 l\cos\varphi\dot{\varphi}^2+m_2 l\,\mathrm{sen}\,\varphi\ddot{\varphi}]\,\mathrm{sign}\,\dot{y},$$

$$l\ddot{\varphi}+\cos\varphi\ddot{y}+g\,\mathrm{sen}\,\varphi=0,$$

donde

$$\mathrm{sign}\,\dot{y}=\begin{cases} +1 & \text{cuando } \dot{y}>0, \\ -1 & \text{para } \quad \dot{y}<0. \end{cases}$$

48.40. Un cilindro rugoso de masa m y de radio r rueda sin deslizamiento sobre la superficie interior de un cilindro hueco de masa M y de radio R que puede girar alrededor de su eje horizontal O. Los momentos de inercia de los cilindros respecto a sus ejes son iguales a $\frac{1}{2}mr^2$ y MR^2.

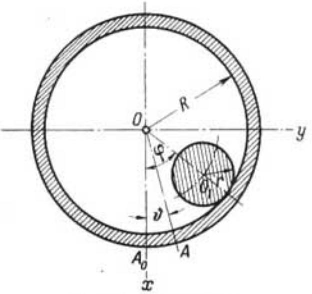
Escribir las ecuaciones de movimiento del sistema y hallar sus primeras integrales.

Respuesta: $MR^2\dot{\vartheta}-\frac{1}{2}mR\,[(R-r)\,\dot{\varphi}-R\dot{\vartheta}]=C_1,$

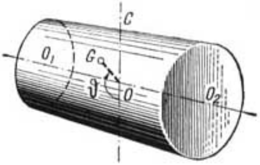
$$\frac{1}{2}MR^2\dot{\vartheta}^2+\frac{1}{4}m\,[(R-r)\,\dot{\varphi}-R\dot{\vartheta}]^2+$$

$$+\frac{m}{2}(R-r)^2\,\dot{\varphi}^2-mg\,(R-r)\cos\varphi=C_2,$$

donde φ es el ángulo de giro del segmento que une los ejes de los cilindros y ϑ es el ángulo de giro del cilindro exterior.



Para el problema 48.40.



Para el problema 48.41.

48.41. Un cuerpo de peso P puede girar alrededor del eje horizontal O_1O_2 que a su vez gira con una velocidad angular constante ω alrededor del eje vertical OC. El centro de gravedad G del cuerpo está situado a una distancia l del punto O sobre la recta perpendicular a O_1O_2.

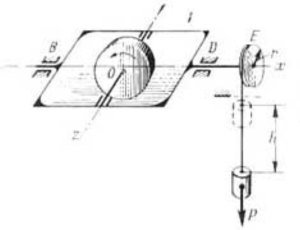
Suponiendo que los ejes O_1O_2 y OG son los ejes principales de inercia del cuerpo en el punto O, escribir la ecuación de movimiento. Los momentos de inercia del cuerpo respecto a los ejes principales son iguales a A, B, C.

Respuesta: $A\ddot{\vartheta} - \omega^2 (C - B) \operatorname{sen} \vartheta \cos \vartheta = -Pl \operatorname{sen} \vartheta$, donde ϑ es el ángulo de giro alrededor de O_1O_2.

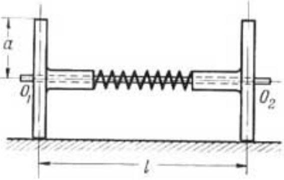
48.42. El marco I de un giroscopio equilibrado se pone en rotación alrededor del eje BD por la carga P mediante un hilo y la polea E de radio r.

Determinar la presión sobre los cojinetes B y D del marco, condicionada por el momento giroscópico, en la posición cuando la carga desciende a una distancia h. A y C son los momentos de inercia del rotor respecto a los ejes Ox, Oz, A_1 es el momento de inercia del marco respecto al eje Ox. La masa de la polea E se desprecia. El rotor efectúa n r.p.s. La distancia $BD = b$.

Respuesta: $R_B = R_D = \frac{M}{b} = \frac{2Cnn}{b} \sqrt{\frac{2ph}{A + A_1 + \frac{p}{g} r^2}}$.



Para el problema 48.42.



Para el problema 48.43.

48.43. Un sistema, compuesto de dos ruedas idénticas de radio a cada una, que pueden girar independientemente alrededor del eje común O_1O_2 normal respecto a éstas de longitud l, rueda sobre un plano horizontal. Las ruedas están unidas por un resorte de rigidez c que trabaja a la torsión. La masa de cada rueda es M; C es el momento de inercia de la rueda respecto al eje de rotación; A es el momento de inercia de la rueda respecto al diámetro.

Escribir las ecuaciones de movimiento del sistema y determinar el movimiento que responde a las condiciones iniciales $\varphi_1 = 0$, $\dot{\varphi}_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, $\dot{\varphi}_2 = \omega$ (φ_1, φ_2 son los ángulos de giro de las ruedas). Despreciar la masa del eje.

Respuesta: $\varphi_1=\frac{1}{2}\left(\omega t-\frac{\omega}{k}\operatorname{sen} kt\right);$

$$\varphi_2=\frac{1}{2}\left(\omega t+\frac{\omega}{k}\operatorname{sen} kt\right);$$

$$k=\sqrt{\frac{2c}{Ma^2+C+4A\left(\frac{a}{l}\right)^2}}.$$

48.44. Hallar el trabajo que hace falta realizar para comunicar a una carretilla de masa M una velocidad u en los casos siguientes:

1) Un cilindro homogéneo de masa m y de radio r está puesto (transversalmente) sobre el piso de la carretilla. El radio de inercia del cilindro respecto a su eje es ρ. El cilindro puede rodar sobre el piso de la carretilla sin deslizamiento.

2) Dicho cilindro está fijado en el piso de la carretilla. Las masas de las ruedas se desprecian.

Respuesta: $A_1=\frac{M}{2}\left(1+\frac{M}{m}\frac{\rho^2}{\rho^2+r^2}\right)u^2;$

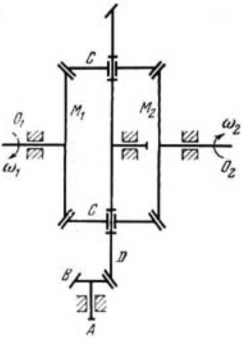
$$A_2=\frac{M}{2}\left(1+\frac{m}{M}\right)u^2;\quad A_2>A_1.$$

48.45. Hallar la aceleración de una carretilla sobre la plata forma de cual rueda un cilindro circular, si la propia carretilla rueda sin deslizamiento sobre un plano inclinado respecto al horizonte bajo un ángulo α y paralelo a la plataforma de la carretilla; las generatrices del cilindro son perpendiculares a las líneas de máxima pendiente de la plataforma. La masa de la carretilla sin ruedas es M, la masa de todas las ruedas es m, la masa del cilindro es M_1. Considerar las ruedas como discos continuos homogéneos.

Respuesta: $w=\frac{6M+6m+2M_1}{6M+9m+2M_1}g\operatorname{sen}\alpha.$

48.46. En el regulador diferencial representado en el dibujo, los ejes O_1 y O_2, que giran en sentidos opuestos con las velocidades angulares ω_1 y ω_2, van dotados de los piñones M_1 y M_2 y están engranados por medio de dos pares de piñones satélites C con el piñón D que sirve de palanca de los piñones satélites. Si ω_1 es igual a ω_2 el piñón D permanece fijo. En el caso contrario D empieza a girar y por intermedio del eje A pone en movimiento un dispositivo regulador no representado en el dibujo; el último crea los momentos que se transmiten a los ejes O_1 y O_2, el eje adelantado frenará y el eje retrasado aumentará su velocidad angular.

Suponiendo que estos momentos son proporcionales a la velocidad angular del piñón D (el coeficiente de proporcionalidad se designa con n) y de magnitudes iguales para uno y otro eje y



Para el problema 48.46.

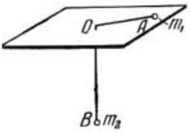
designando con J el momento de inercia del sistema reducido al eje O_1O_2, hallar la ley de variación de las velocidades angulares ω_1 y ω_2, si sus valores iniciales ω_{10} y ω_{20} no son iguales. Se considera que los momentos de inercia J_1 y J_2 de los ejes O_1 y O_2 con los piñones M_1 y M_2 son iguales; J_D es el momento de inercia del piñón D y de las partes del mecanismo puestas en movimiento por este piñón por intermedio del árbol A reducido al eje de rotación del piñón D; durante la solución del problema figura además el momento de inercia J_C de los piñones satélites respecto a su eje de rotación propia (esta magnitud no figura en el resultado final). Por momento de inercia del sistema reducido al eje del árbol se comprende la suma $J = 2J_1 + J_D + 4J'_C$, donde J'_C es el momento de inercia de un piñón satélite respecto al eje O_1O_2.

Respuesta: $\omega_1 = \frac{1}{2}\omega_{10}(1+e^{-\lambda t}) + \frac{1}{2}\omega_{20}(1-e^{-\lambda t})$,

$$\omega_2 = \frac{1}{2}\omega_{10}(1-e^{-\lambda t}) + \frac{1}{2}\omega_{20}(1+e^{-\lambda t}),$$

donde $\lambda = \frac{2n}{J}$.

48.47. Dos masas puntiformes m_1 y m_2 se han fijado a los extremos A y B de un hilo que pasa por un orificio O hecho en el plano horizontal liso de una mesa. La primera masa se queda siempre sobre la superficie de la mesa, la segunda se desplaza por la vertical que pasa por el punto O. En el instante inicial $OA = r_0$, la velocidad de la masa m_2 es igual a cero, mientras que la velocidad v_0 de la masa m_1 está dirigida perpendicularmente a la posición inicial del trozo OA del hilo.



Para el problema 48.47.

Demostrar que en esta condición la masa m_2 efectúa movimiento oscilatorio; hallar la amplitud a de esta oscilación y dar la expresión de su período T. Considerar el hilo como imponderable, inextensible y absolutamente flexible.

Respuesta: $a = |r_0 - r_1|$, $T = \sqrt{\frac{2(m_1+m_2)}{m_2 g}} \times$

$$\times \left| \int_{r_0}^{r_1} \frac{r\,dr}{\sqrt{(r_0 - r)(r - r_1)(r + r_2)}} \right|,$$

donde $r_{1,2} = \sqrt{\frac{m_1 v_0^2}{4m_2 g}\left(2r_0 + \frac{m_1 v_0^2}{4m_2 g}\right)} \pm \frac{m_1 v_0^2}{4m_2 g}$.

48.48. Un disco homogéneo de radio R y de masa M puede girar alrededor de su eje horizontal O. Un punto material de masa m está suspendido del disco con ayuda de un hilo AB de longitud l.

Escribir las ecuaciones de movimiento del sistema.

Respuesta: $\left(m + \frac{M}{2}\right) R^2 \ddot{\varphi} + mRl \cos(\varphi - \psi)\ddot{\psi} + mRl \operatorname{sen}(\varphi - \psi) \times$
$\times \dot{\psi}^2 + mgR \operatorname{sen} \varphi = 0,$

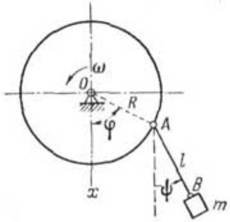
$mRl \cos(\varphi - \psi)\ddot{\varphi} + ml^2\ddot{\psi} - mRl \operatorname{sen}(\varphi - \psi)\dot{\varphi}^2 +$
$+ mgl \operatorname{sen} \psi = 0.$

donde φ es el ángulo de giro del disco, ψ es el ángulo de desviación del hilo de la vertical.

48.49. El disco del sistema descrito en el problema anterior gira con una velocidad angular constante ω.

Escribir la ecuación de movimiento del punto material.

Respuesta: $\ddot{\psi} - \omega^2 \frac{R}{l} \operatorname{sen}(\omega t - \psi) +$
$+ \frac{g}{l} \operatorname{sen} \psi = 0.$



Para el problema 48.48.

48.50. Una rueda se desplaza sin deslizamiento sobre un plano horizontal. El radio de la rueda es a, su masa es M; C es el momento de inercia de la rueda respecto al eje que pasa por el centro de la rueda perpendicularmente a su plano; A es el momento de inercia de la rueda respecto a su diámetro.

Escribir la ecuación de movimiento de la rueda.

Indicación. Utilizar las ecuaciones de Lagrange con multiplicadores para sistemas no holonomos.

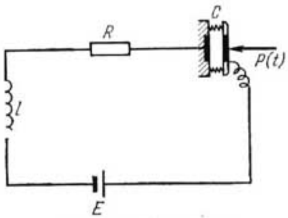
Respuesta: $\frac{d}{dt}(A\dot{\psi}\,\mathrm{sen}^2\,\vartheta) - C(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\vartheta)\,\dot{\vartheta}\,\mathrm{sen}\,\vartheta = 0,$

$$(C + ma^2)\frac{d}{dt}(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\vartheta) - ma^2\dot{\vartheta}\dot{\psi}\,\mathrm{sen}\,\vartheta = 0,$$

$$(A + ma^2)\ddot{\vartheta} - A\dot{\psi}^2\,\mathrm{sen}\,\vartheta\cos\vartheta + (C + ma^2)\times$$
$$\times(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\vartheta)\,\dot{\psi}\,\mathrm{sen}\,\vartheta = -mga\cos\vartheta,$$

donde φ es el ángulo de rotación de la rueda alrededor del eje perpendicular a su plano; ϑ es el ángulo de inclinación del plano de la rueda respecto al horizonte; ψ es el azimut del plano vertical que contiene el diámetro de la rueda y que pasa por el punto de contacto.

48.51. Un micrófono de condensador está compuesto de una bobina de autoinducción, una resistencia óhmica y un condensador, cuyas placas están ligadas por resortes de rigidez total c, montados en serie. El circuito está conectado a una pila de fuerza electromotriz continua E, la placa del condensador está sometida a la acción de una fuerza variable $p(t)$. El coeficiente de autoinducción de la bobina es L, la resistencia óhmica es R, la capacidad del condensador en la posición de equilibrio del sistema es C_0, la distancia entre las placas en esta posición es a, la masa de la placa móvil del condensador es m.



Para el problema 48.51.

Introducir las coordenadas generalizadas eléctricas y mecánicas y escribir las ecuaciones de movimiento del sistema en forma de Lagrange.

Indicación. 1. La energía potencial del condensador es igual a $V = \frac{q^2}{2C}$ (C es la capacidad del condensador, q es la carga en sus armaduras); la energía electrocinética se calcula por la fórmula $T = \frac{1}{2}Li^2$ (L es el coeficiente de autoinducción, $i = \frac{dq}{dt}$ es la intensidad de corriente en el circuito).

2. Como coordenadas generalizadas se toman la variación de la carga del condensador q y el desplazamiento de los resortes de la posición de equilibrio. Entonces la carga total será $q_0 + q$ y el desplazamiento total $x_0 + x$, aquí q_0 es la carga del condensador, x_0 es el desplazamiento de los resortes de su posición neutral a la posición de equilibrio del sistema.

Respuesta: $m\ddot{x} + cx - \frac{E}{a}q - \frac{q^2}{2C_0a} = p(t);$

$$L\ddot{q} + R\dot{q} - \frac{E}{a}x + \frac{q}{C_0} - \frac{qx}{aC_0} = 0.$$

48.52. Determinar la frecuencia de oscilaciones libres pequeñas del micrófono de condensador descrito en el problema anterior. Despreciar la resistencia del circuito eléctrico.

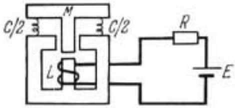
Respuesta: $k_{1,2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{c}{m}+\frac{1}{C_0L}\pm\sqrt{\left(\frac{c}{m}-\frac{1}{C_0L}\right)^2+4\frac{E^2}{a^2mL}}}$.

48.53. Determinar las oscilaciones eléctricas que surgen en el micrófono de condensador descrito en el problema 48.51 en el caso de la aplicación brusca de una presión constante p_0 a la placa del micrófono. Para simplificar los cálculos se desprecia la masa de la placa móvil y se considera que la resistencia óhmica del circuito es igual a cero; se deben omitir también los términos no lineales en las ecuaciones de movimiento.

Respuesta: Para $ca>\frac{q_0^2}{C_0a}$, la carga del condensador es igual a

$$q=\frac{p_0q_0}{ca\left(1-\frac{q_0^2}{cC_0a^2}\right)}\left[1-\cos\sqrt{\frac{1}{C_0L}\left(1-\frac{q_0^2}{cC_0a^2}\right)}\,t\right].$$

48.54. En el dibujo se muestra el esquema principal del captador electromagnético que se utiliza para registrar las oscilaciones mecánicas. La masa de la armadura es M, la rigidez de los resortes es c. El coeficiente de autoinducción de la bobina varía a consecuencia de la variación de la longitud del juego de aire en el conductor magnético $L=L(x)$ (x es el desplazamiento vertical de la armadura de la posición cuando los resortes no están tensados). A la bobina se ha conectado un circuito eléctrico compuesto de una pila de fuerza electromagnética dada E. La resistencia óhmica del circuito es R.



Para el problema 48.54.

Escribir las ecuaciones de movimiento del sistema y determinar su posición de equilibrio.

Indicación. Tomar como coordenadas generalizadas el desplazamiento x del inducido y la carga q correspondiente a la corriente i en el circuito $\left(i=\frac{dq}{dt}\right)$.

Respuesta: Las ecuaciones de movimiento son:

$$L\ddot{q}+R\dot{q}+\dot{q}\dot{x}\frac{\partial L}{\partial x}=E;\qquad M\ddot{x}-\frac{1}{2}\frac{\partial L}{\partial x}\dot{q}^2+cx=Mg.$$

En la "posición de equilibrio" $x=x_0$ e $i=\dot{q}=i_0$, donde $i_0=\frac{E}{R}$; $cx_0=Mg+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)_0 i_0^2$.

48.55. Escribir las ecuaciones de oscilaciones pequeñas alrededor de la posición de equilibrio del captador electromagnético descrito en el problema anterior.

Indicación. Tomar como coordenadas generalizadas la variación de la carga e y el desplazamiento vertical del inducido de la posición de equilibrio ξ. Desarrollar la función $L(x)$ en serie $L=L(x_0+\xi)=L_0+L_1\xi+\ldots$ y limitarse en esta serie a los dos primeros términos.

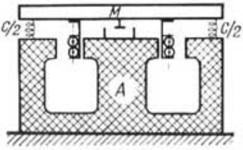
Respuesta: $L_0\ddot{e}+R\dot{e}+L_1 i_0\dot{\xi}=0; \quad M\ddot{\xi}+c\xi-L_1 i_0\dot{e}=0.$

48.56. La base del captador, descrito en el problema 48.54, efectúa oscilaciones verticales pequeñas de acuerdo con la ley $\xi=\xi_0 \operatorname{sen} \omega t$.

Determinar la ley del movimiento del inducido y la corriente en el circuito eléctrico del captador.

Respuesta:
$$i=\frac{M\xi_0\omega^3}{\Delta} L_1 i_0 \{R(c-M\omega^2)\cos\omega t+ [L_1^2 i_0^2\omega+L_0\omega(c-M\omega^2)] \operatorname{sen}\omega t\},$$
$$x=\frac{M\xi_0\omega^3}{\Delta}\{-[L_1^2 i_0^2 L_0\omega^2+ (R^2+L_0^2\omega^2)(c-M\omega^2)] \operatorname{sen}\omega t+\omega L_1^2 i_0^2 R\cos\omega t\},$$
donde $\Delta=R^2(c-M\omega^2)^2+\omega^2[L_1^2 i_0^2+L_0(c-M\omega^2)]^2$.

48.57. Un sistema móvil electromecánico está compuesto de un imán permanente cilíndrico de polos concéntricos A, que crean un campo radial, y del inducido de masa M que se apoya en un resorte de rigidez c. El inducido está acoplado con una bobina de alambre de n espiras y con un amortiguador mecánico, cuya resistencia es proporcional a la velocidad del inducido (el coeficiente de resistencia es β), el radio medio de la bobina es r; su coeficiente de autoinducción es L; su resistencia óhmica es R, la inducción magnética en el espacio del imán es B. A los bornes de la bobina se ha aplicado una tensión variable $V(t)$.



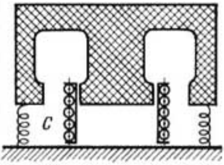
Para el problema 48.57.

Escribir las ecuaciones de movimiento del sistema.

Indicación. Las fuerzas generalizadas correspondientes a la interacción de la bobina y del imán son iguales a $Q_q=-2\pi rnB\dot{x}$, $Q_x=2\pi rnB\dot{q}$ (Q_q es la fuerza electromotriz que se induce en el circuito eléctrico, Q_x es la fuerza de interacción de la bobina con el imán).

Respuesta: $L\ddot{q}+R\dot{q}+2\pi rnB\dot{x}=V(t);$
$M\ddot{x}+\beta\dot{x}+cx-2\pi rnB\dot{q}=0.$

48.58. Una bobina de alambre de n espiras y de radio r, unida con un sistema registrador eléctrico esquematizado por un circuito de coeficiente de autoinducción L y de resistencia óhmica R, está fijada en la base de un sismógrafo. El núcleo magnético, que crea un campo magnético radial que se caracteriza en el espacio por la inducción magnética B, se apoya en la base por medio de resortes de rigidez total c. El núcleo está sometido también a la acción de una fuerza de resistencia, proporcional a su velocidad, provocada por el amortiguador que crea la fuerza de resistencia $\beta\dot{x}$.



Para el problema 48.58.

Escribir las ecuaciones que determinan el desplazamiento del núcleo, y la corriente en el circuito en el caso de oscilaciones verticales pequeñas de la base del sismógrafo de acuerdo con la ley $\xi = \xi_0 \operatorname{sen} \omega t$.

Indicación. Las fuerzas generalizadas correspondientes a la interacción de la bobina y del imán están dadas por las fórmulas $Q_q = -2\pi rnB\dot{x}$ y $Q_x = 2\pi rnB\dot{q}$.

Respuesta: $M\ddot{x} + \beta\dot{x} + cx - 2\pi rnB\dot{q} = M\xi_0\omega^2 \operatorname{sen} \omega t;$

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + 2\pi rnB\dot{x} = 0.$$

§ 49. INTEGRALES DEL MOVIMIENTO, TRANSFORMACIÓN DE RAUSS, ECUACIONES CANÓNICAS DE HAMILTON, ECUACIONES YAKOBI—HAMILTON, PRINCIPIO DE HAMILTON—OSTROGRADSKI

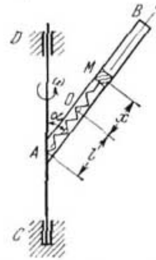
49.1. Un tubo AB gira alrededor del eje vertical CD con una velocidad angular constante ω, formando con el eje un ángulo α. Dentro del tubo se encuentra un muelle con rigidez c, un extremo del cual está sujetado al punto A; en el otro extremo del muelle está fijado un cuerpo M de masa m que resbala sin rozamiento dentro del tubo. En el estado no deformado el largo del muelle es $OA = l$.

Aceptando la distancia x del cuerpo M hasta el punto O como coordenada generalizada, determinar la energía cinética T del cuerpo M, y la integral generalizada de la energía.

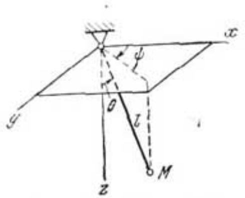
Respuesta: $T = \frac{1}{2} m [\dot{x}^2 + (l+x)^2\omega^2 \operatorname{sen}^2 \alpha];$

$$m\dot{x}^2 - m(l+x)^2 \omega^2 \operatorname{sen}^2 \alpha + cx^2 + 2mg \cos \alpha x = h,$$

donde h es la constante de integración.



Para el problema 49.1.



Para el problema 49.2.

49.2. Hallar las primeras integrales del movimiento de un péndulo esférico de largo l, cuya posición se determina por los ángulos θ y ψ.

Respuesta: 1) La integral que corresponde a la coordenada cíclica ψ (integral de los momentos de la cantidad de movimiento respecto al eje z) es: $\dot{\psi}\,\mathrm{sen}^2\,\theta = n$;

2) la integral de la energía es:

$\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta - 2\,\frac{g}{l}\cos\theta = h$, donde n y h son las constantes de integración.

49.3. *Un tacómetro giroscópico está instalado sobre una plataforma que gira con una velocidad angular constante u alrededor del eje ζ.*

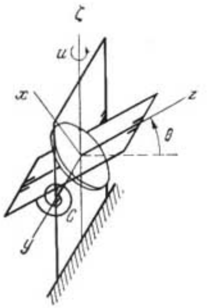
Determinar las primeras integrales del movimiento, si el coeficiente de rigidez del resorte espiral es igual a c, los momentos de inercia del giroscopio respecto a los ejes centrales principales x, y, z son respectivamente iguales a A, B y C, $B = A$; las fuerzas de rozamiento sobre el eje z de rotación propia del giroscopio se equilibran por un momento creado por el estator del motor eléctrico que pone en rotación el giroscopio; las fuerzas de rozamiento en el eje de precisión y se desprecian.

Respuesta: 1) La integral correspondiente a la coordenada cíclica φ (la integral de los momentos cinéticos respecto al eje z) es:

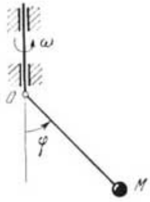
$\dot{\varphi} + u\,\mathrm{sen}\,\theta = n$;

2) la integral generalizada de la energía es:

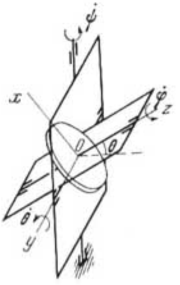
$A(\dot{\theta}^2 + u^2\cos^2\theta) + c\theta^2 = h$.



Para el problema 49.3.



Para el problema 49.4.



Para el problema 49.5.

49.4. Un punto material M está ligado con ayuda de una barra imponderable OM de longitud l con una articulación plana O, cuyo eje horizontal gira alrededor de la vertical con una velocidad angular constante ω.

Determinar la condición de estabilidad de la posición vertical inferior del péndulo, el período de sus oscilaciones pequeñas cuando el péndulo abandona esta posición, y la integral generalizada de la energía.

Respuesta: 1) $\omega^2 < \frac{g}{l}$; 2) $T = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{l} - \omega^2}}$;

$$3)\ \dot{\varphi}^2 - \omega^2 \operatorname{sen}^2 \varphi - 2\frac{g}{l}\cos\varphi = h.$$

49.5. Un giroscopio equilibrado se desplaza por inercia en una suspensión de cardán.

Determinar la energía cinética del sistema y las primeras integrales de las ecuaciones de movimiento, si el momento de inercia del marco exterior respecto al eje fijo de rotación ξ es igual a J_ξ, los momentos de inercia del marco interior respecto a los ejes principales x, y, z son iguales a J'_x, J'_y, J'_z, y los momentos de inercia correspondientes del giroscopio son iguales a J_x, J_y y J_z $(J_x = J_y)$.

Respuesta: 1) $T = \frac{1}{2}\{[J_\xi + J'_z + (J'_x + J_x - J'_z)\cos^2\theta]\,\dot{\psi}^2 +$

$$+ (J_y + J'_y)\,\dot{\theta}^2 + J_z(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\operatorname{sen}\theta)^2\};$$

2) la integral correspondiente a la coordenada cíclica φ (la integral de los momentos cinéticos del giroscopio respecto al eje z) es $\dot{\varphi} + \dot{\psi}\operatorname{sen}\theta = n$;

3) la integral correspondiente a la coordenada cíclica ψ (la integral de los momentos cinéticos de todo el sistema respecto al eje ξ) es

$$[J_\xi + J_z' + (J_x' + J_x - J_z')\cos^2\theta]\,\dot{\psi} + J_z n \operatorname{sen}\theta = n_1;$$

4) la integral de la energía es

$$[J_\xi + J_z' + (J_x' + J_x - J_z')\cos^2\theta]\,\dot{\psi}^2 + \\ + (J_y + J_y')\dot{\theta}^2 = h.$$

49.6. Despreciando la coordenada cíclica ψ, escribir la función de Rauss y la ecuación diferencial respecto a la coordenada θ para un péndulo esférico (véase el dibujo para el problema (49.2.).

Respuesta: $R = \frac{ml^2}{2}\left(\dot{\theta}^2 - \frac{n^2}{\operatorname{sen}^2\theta}\right)$, $\ddot{\theta} - n^2\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}^3\theta} + \frac{g}{l}\operatorname{sen}\theta = 0$,

donde $n = \dot{\psi}\operatorname{sen}^2\theta = \text{const}$.

49.7. Un punto de masa m se desplaza en un campo de fuerza central, cuya energía potencial es igual a $\Pi(r)$.

Determinando la posición del punto por las coordenadas polares r y φ y despreciando la coordenada cíclica φ, escribir la función de Rauss y la ecuación diferencial del movimiento respecto a la coordenada r.

Respuesta: 1) $R = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 - \frac{c^2}{r^2}\right)$,

2) $m\left(\ddot{r} - \frac{c^2}{r^3}\right) = -\frac{\partial\Pi}{\partial r}$,

donde $c = r^2\dot{\varphi} = \text{const}$, es la velocidad sectorial doble.

49.8. Un giroscopio está montado en una suspensión de cardán. Los momentos de las fuerzas externas M_ξ y M_y actúan sobre los ejes ξ e y de rotación de los marcos de la suspensión.

Despreciando la coordenada cíclica φ, hallar: 1) la función de Rauss, 2) las ecuaciones diferenciales del movimiento para las coordenadas ψ y θ, 3) los términos giroscópicos (véase el dibujo para el problema 49.5).

Respuesta: 1) $R = \frac{1}{2}[J_\xi + J_z' + (J_x' + J_x - J_z')\cos^2\theta]\,\dot{\psi}^2 +$

$$+ \frac{1}{2}(J_y + J_y')\dot{\theta}^2 + J_z n\dot{\psi}\operatorname{sen}\theta - \frac{1}{2}J_z n^2;$$

2) $[J_\xi + J_z' + (J_x' + J_x - J_z')\cos^2\theta]\,\ddot{\psi} -$

$$-2(J_x' + J_x - J_z')\cos\theta\operatorname{sen}\theta\,\dot{\theta}\dot{\psi} + J_z n\cos\theta\,\dot{\theta} = M_\xi,$$

$$(J_y + J_y')\ddot{\theta} + 2(J_x' + J_x - J_z')\cos\theta\operatorname{sen}\theta\,\dot{\psi}^2 -$$

$$- J_z n\cos\theta\,\dot{\psi} = M_y,$$

3) $J_z n\cos\theta\,\dot{\theta} - J_z n\cos\theta\,\dot{\psi}$.

49.9. Escribir la función de Hamilton y las ecuaciones canónicas del movimiento para el péndulo matemático de masa m y de longitud l, cuya posición se define por el ángulo φ de su desviación de la vertical. Verificar la equivalencia de las ecuaciones obtenidas a la ecuación diferencial ordinaria del movimiento del péndulo matemático.

Respuesta: 1) $H=\frac{1}{2}\frac{p^2}{ml^2}-mg\,l\cos\varphi;$

2) $\dot{\varphi}=\frac{p}{ml^2},\ \dot{p}=-mg\,l\operatorname{sen}\varphi.$

49.10. Un punto material de masa m está suspendido, con ayud de una barra imponderable de longitud l, de una articulación plana cuyo eje horizontal gira alrededor de la vertical con una velocidad angular constante ω (véase el dibujo para el problema 49.4).

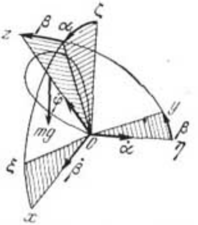
Escribir la función de Hamilton y las ecuaciones canónicas del movimiento.

Respuesta: 1) $H=\frac{1}{2}\frac{p^2}{ml^2}-\frac{ml^2}{2}\omega^2\operatorname{sen}^2\varphi-mg\,l\cos\varphi;$

2) $\dot{\varphi}=\frac{p}{ml^2},\ \dot{p}=ml^2\omega^2\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi-mgl\operatorname{sen}\varphi.$

49.11. La posición vertical del eje de simetría de un trompo, que se desplaza respecto del punto fijo O bajo la acción de la fuerza de gravedad, se define por los ángulos α y β.

Eliminando la coordenada cíclica φ (el ángulo de rotación propia) escribir para los ángulos α y β las funciones de Rauss y de Hamilton. La masa del trompo es igual a m, la distancia de su centro de gravedad al punto O es igual a l, el momento de inercia respecto a su eje de simetría z es igual a C, y respecto a los ejes x e y es igual a A.



Para el problema 49.11.

Respuesta: $R=\frac{1}{2}A(\cos^2\beta\dot{\alpha}^2+\dot{\beta}^2)-Cn\operatorname{sen}\beta\dot{\alpha},$

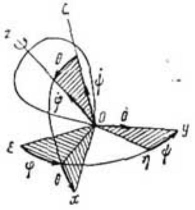
$$H=\frac{1}{2A}\left[\frac{(P_\alpha+Cn\operatorname{sen}\beta)^2}{\cos^2\beta}+P_\beta^2\right]+mgl\cos\alpha\cos\beta,$$

donde $n=\dot{\varphi}-\operatorname{sen}\beta\dot{\alpha}=\text{const.}$ (Aquí y en adelante los símbolos P_α y P_β, etc. son impulsos generalizados).

49.12. Valiéndose de los resultados obtenidos en el problema anterior, escribir para las variables canónicas de Hamilton las ecuaciones diferenciales de las oscilaciones pequeñas del trompo alrededor de su posición vertical superior.

Respuesta: $\dot{\alpha}=\frac{1}{A}(P_\alpha+Cn\beta)$; $\dot{P}_\alpha=mgl\alpha$; $\dot{\beta}=\frac{1}{A}P_\beta$;

$$\dot{P}_\beta=-\frac{Cn}{A}(P_\alpha+Cn\beta)+mgl\beta.$$



Para el problema 49.13.

49.13. La posición del eje de simetría z de un trompo, que se mueve alrededor del punto fijo O bajo la acción de la fuerza de gravedad, se define por los ángulos de Euler: por el ángulo de precesión ψ y el ángulo de nutación θ.

Escribir la ecuación de Hamilton para los ángulos ψ, θ y φ (el ángulo de rotación propia) y los impulsos correspondientes, si m es la masa del trompo, l es la distancia de su centro de gravedad al punto O, C es el momento de inercia respecto del eje z, A es su momento de inercia respecto a un eje arbitrario situado en el plano ecuatorial que pasa por el punto O.

Respuesta: $H=\frac{1}{2A}\left[\frac{(P_\psi-P_\varphi\cos\theta)^2}{\operatorname{sen}^2\theta}+P_\theta^2\right]+\frac{1}{2C}P_\varphi^2+mgl\cos\theta.$

49.14. Para los datos del problema anterior, escribir las ecuaciones canónicas del movimiento del trompo.

Respuesta: $\dot{\psi}=\frac{P_\psi-P_\varphi\cos\theta}{A\operatorname{sen}^2\theta}$; $\dot{P}_\psi=0$; $\dot{\theta}=\frac{P_\theta}{A}$;

$$\dot{P}_\theta=-\frac{(P_\varphi\cos\theta-P_\psi)(P_\psi\cos\theta-P_\varphi)}{A\operatorname{sen}^3\theta}+mgl\operatorname{sen}\theta;$$

$$\dot{\varphi}=-\frac{P_\psi-P_\varphi\cos\theta}{A\operatorname{tg}\theta\operatorname{sen}\theta}+\frac{P_\varphi}{C};\ \dot{P}_\varphi=0.$$

49.15. Un punto libre de masa unitaria se desplaza en el plano vertical xy bajo la acción de la fuerza de gravedad.

Escribir la ecuación diferencial en las derivadas parciales de Jacobi—Hamilton, y hallar su integral total (el eje y está dirigido verticalmente hacia arriba).

Respuesta: $\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2+gy=0;$

$$V=b_1t+b_2x-\frac{1}{3g}\sqrt{(-2gy-2b_1-b_2^2)^3}+C,$$

donde b_1, b_2 y C son constantes arbitrarias.

49.16. Utilizando los resultados del problema anterior y las propiedades de la integral total de la ecuación de Jacobi—Hamilton, hallar las primeras integrales de las ecuaciones de movimiento del punto.

Respuesta:
$$\frac{\partial V}{\partial b_1}=t+\frac{1}{g}\sqrt{-2gy-2b_1-b_2^2}=a_1,$$
$$\frac{\partial V}{\partial b_2}=x+\frac{b_2}{g}\sqrt{-2gy-2b_1-b_2^2}=a_2,$$
$$\frac{\partial V}{\partial x}=b_2=\dot{x},$$
$$\frac{\partial V}{\partial y}=\sqrt{-2gy-2b_1-b_2^2}=\dot{y},$$
donde a_1, a_2, b_1 y b_2 son constantes arbitrarias.

49.17. Un péndulo físico de masa M se mueve alrededor de un eje horizontal fijo O. El momento de inercia del péndulo respecto al eje de rotación es igual a J, la distancia de su centro de gravedad a su eje de rotación es l.

Escribir la ecuación diferencial de Jacobi—Hamilton, hallar su integral total y las primeras integrales del movimiento del péndulo (el nivel de energía potencial cero debe tomarse en el nivel del eje del péndulo).

Respuesta: 1) $\displaystyle \frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2J}\left(\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)^2-Mgl\cos\varphi=0;$

2) $\displaystyle V=bt+\sqrt{2J}\int_{\varphi_0}^{\varphi}\sqrt{Mgl\cos\varphi-b}\,d\varphi;$

3) $\displaystyle t-\sqrt{\frac{J}{2}}\int_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{Mgl\cos\varphi-b}}=a,$

$\sqrt{2J}\sqrt{Mgl\cos\varphi-b}=J\dot{\varphi},$

donde a y b son las constantes de integración arbitrarias.

49.18. El movimiento de un trompo que tiene un punto fijo O se determina por los ángulos de Euler ψ, θ y φ.

Utilizando los resultados del problema 49.13, escribir la ecuación en las derivadas parciales de Jacobi—Hamilton y hallar su integral total.

Respuesta: 1) $\displaystyle \frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2A\operatorname{sen}^2\theta}\left(\frac{\partial V}{\partial \psi}-\frac{\partial V}{\partial \varphi}\cos\theta\right)^2+\frac{1}{2A}\left(\frac{\partial V}{\partial \theta}\right)^2+$
$\displaystyle +\frac{1}{2C}\left(\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)^2+mgl\cos\theta=0;$

2) $V=b_1t+b_2\psi+b_3\varphi+$
$\displaystyle +\int\sqrt{-2Ab_1-\frac{Ab_3^2}{C}-\frac{(b_2-b_3\operatorname{sen}\theta)^2}{\operatorname{sen}^2\theta}-}$
$\overline{-2Agl\cos\theta}\,d\theta.$

49.19. Los extremos de una cuerda están fijados en los puntos fijos A y B, la distancia entre los cuales es l.

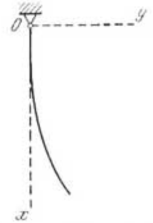
Considerando que la tensión T de la cuerda es constante en todos sus puntos, determinar la integral de acción según Hamilton para las vibraciones pequeñas de la cuerda. Se supone que las vibraciones se efectúan sólo en el plano xy, y que la cuerda está sometida solamente a la acción de las fuerzas de tensión, la densidad lineal de la cuerda es igual a ρ.

Respuesta: $$S=\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\int_{0}^{l}\left[\rho\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2-T\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]dx\,dt,$$ donde $y=y(x,\ t)$.

49.20. Valiéndose del principio de Hamilton—Ostrogradski y los resultados del problema anterior, escribir la ecuación diferencial de vibraciones de la cuerda.

Respuesta: $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, donde $a^2=\frac{T}{\rho}$; las condiciones límites son: $y(0,\ t)=y(l,\ t)=0$.

Para el problema 49.19.



Para el problema 49.21.

49.21. Un hilo absolutamente flexible homogéneo e inextensible de longitud l está suspendido por uno de sus extremos del punto O.

Determinar la integral de acción según Hamilton para las oscilaciones pequeñas del hilo alrededor de la vertical debidas a la acción de la fuerza de gravedad. La densidad lineal del hilo es igual a ρ.

Respuesta: $$S=\frac{\rho}{2}\int_{t_1}^{t_2}\int_{0}^{l}\left[\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2-g(l-x)\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]dx\,dt,$$ donde $y=y(x,\ t)$.

49.22. Utilizando el principio de Hamilton—Ostrogradski y los resultados obtenidos en el problema anterior, escribir la ecuación diferencial de oscilaciones pequeñas del hilo suspendido por uno de sus extremos.

Respuesta: $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=g\frac{\partial}{\partial x}\left[(l-x)\frac{\partial y}{\partial x}\right]$;

las condiciones límites son: 1) $y(0,\ t)=0$,

2) $y(l,\ t)$, $\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x=l}$ y $\left.\frac{\partial y}{\partial t}\right|_{x=l}$ son finitas.

Capítulo XII

DINÁMICA DEL VUELO CÓSMICO

§ 50. MOVIMIENTO KEPLERIANO (MOVIMIENTO BAJO LA ACCIÓN DE UNA FUERZA CENTRAL)

50.1. El módulo de la fuerza de gravitación universal que actúa sobre un punto material de masa m, se determina por la igualdad $F=m\frac{\mu}{r^2}$, donde $\mu=fM$ es el parámetro gravitacional del centro de atracción (M es su masa, f la constante gravitacional) y r es la distancia entre el centro de atracción y el punto atraído.

Conociendo el radio R de un cuerpo celeste y la aceleración g de la fuerza de gravedad *) sobre su superficie, determinar el parámetro gravitacional μ del cuerpo celeste y calcularlo para la Tierra, si su radio $R=6370$ km y $g=9{,}81$ m/s².

Respuesta: $\mu=gR^2$; para la Tierra $\mu=3{,}98\cdot 10^5$ km³/s².

50.2. Determinar el parámetro de gravitación μ_n y la aceleración de la fuerza de gravedad g_n sobre la superficie de un cuerpo celeste, si se conocen las relaciones de su masa M_n y su radio R_n a la masa M y al radio R de la Tierra. Calcular estas magnitudes para la Luna, Venus, Marte, Júpiter, para los cuales las relaciones correspondientes están dadas en la tabla siguiente:

	$M_n:M$	$R_n:R$
Luna	0,0123	0,273
Venus	0,814	0,958
Marte	0,107	0,535
Júpiter	317	10,95

Respuesta:

	μ (km³/s²)	g (m/s²)
Luna	$4{,}90\cdot 10^3$	1,62
Venus	$326\cdot 10^3$	8,75
Marte	$42{,}8\cdot 10^3$	3,69
Júpiter	$126\cdot 10^3$	26,0

*) Aquí y en adelante se considera que la fuerza de atracción del cuerpo celeste está dirigida hacia su centro; las aceleraciones de las fuerzas de gravedad g están dadas sin tomar en consideración la rotación de los cuerpos celestes.

50.3. Un punto material se desplaza uniformemente por una órbita circular a la altura H sobre la superficie de un cuerpo celeste de radio R bajo la acción de la fuerza de gravitación universal. Calcular la velocidad de movimiento v_1 y el período de revolución T del punto material *).

Respuesta: 1) $v_1 = \sqrt{\frac{\mu}{r}} = \sqrt{\frac{gR^2}{R+H}}$ (la velocidad circular a la altura H para el cuerpo celeste dado);

2) $T = 2\pi r \sqrt{\frac{r}{\mu}} = 2\pi \frac{(R+H)^{3/2}}{R\sqrt{g}}$.

Aquí r es la distancia del punto material al centro del cuerpo celeste, μ es su parámetro de gravitación, g es la aceleración de la fuerza de gravedad sobre su superficie.

50.4. Despreciando la altura de vuelo de un satélite artificial *de la superficie de un cuerpo celeste*, calcular la velocidad orbital v_1 y el correspondiente período orbital T para la Tierra, la Luna, Venus, Marte y Júpiter.

Respuesta:

	v_1 (km/s)	T (min)
Tierra . . .	7,91	84,3
Luna	1,68	108
Venus . . .	7,30	87,5
Marte . . .	3,54	101
Júpiter . . .	42,6	172

50.5. ¿A qué altura hace falta lanzar un satélite circular de la Tierra, que gira en el plano del ecuador, para que él se halle siempre por encima de un mismo punto de la Tierra?

Respuesta: $H = 35\,800$ km.

50.6. ¿Bajo qué ángulo β la trayectoria del satélite (la proyección de su trayectoria sobre la superficie de la Tierra) interseca el ecuador terrestre, si el satélite se desplaza por una órbita circular de altura H inclinada respecto al plano del ecuador bajo un ángulo α?

Respuesta: $\operatorname{tg}\beta = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha + \Omega\sqrt{(R+H)^3:\mu}}$, donde Ω es la velocidad angular de rotación diaria de la Tierra y μ es su parámetro de gravitación.

---

*) En todos los problemas de este capítulo se desprecia la resistencia de la atmósfera.

50.7. Un punto de masa m se atrae hacia un centro fijo de acuerdo con la ley de gravitación universal $F=m\frac{\mu}{r^2}$, donde μ es el parámetro de gravitación del centro de atracción.

Hallar la integral de la energía.

Respuesta: $v^2-2\frac{\mu}{r}=h.$

50.8. Determinar la altura H de la órbita circular de un satélite para la cual su energía potencial respecto a la superficie de un planeta de radio R es igual a su energía cinética.

Respuesta: $H=R/2.$

50.9. Calcular la velocidad de entrada de un meteorito en la atmósfera terrestre, si su velocidad en la infinidad $v_\infty=10$ km/s.

Respuesta: $v\approx 15$ km/s.

50.10. ¿Qué velocidad mínima v_2 hace falta comunicar a una nave cósmica sobre la superficie de un planeta para que se aleja a la infinidad?

Respuesta: $v_2=\sqrt{2}v_1$, la velocidad de liberación (v_1 es la velocidad orbital).

50.11. Determinar la velocidad de liberación para la Tierra, la Luna, Venus, Marte y Júpiter.

Respuesta:

	v_2 (km/s)
Tierra	11,2
Luna	2,37
Venus	10,3
Marte	5,0
Júpiter	60,2

50.12. Un punto se desplaza bajo la acción de una fuerza central.

Suponiendo que el módulo del radio vector $\boldsymbol{r}$ del punto depende del tiempo t en forma compleja en función del ángulo polar φ, determinar la velocidad y la aceleración del punto[*].

Respuesta: $v^2=c^2\left[u^2+\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2\right]$; $w_\varphi=0$, $w_r=\pm c^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\varphi^2}+u\right)$,

donde $u=\frac{1}{r}$, $c=r^2\dot{\varphi}=|\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}|=\text{const}$ es la velocidad sectorial duplicada; el signo más para la fuerza de repulsión, el signo menos para la fuerza de atracción.

[*] Aquí y en adelante se supone que el polo del sistema de coordenadas polares coincide con el centro de atracción (de repulsión).

50.13. Un punto de masa m se desplaza bajo la acción de una fuerza central por una sección cónica, cuya ecuación en coordenadas polares es

$$r=\frac{p}{1+e\cos\varphi},$$

donde p y e son el parámetro y la excentricidad de la trayectoria.

Determinar la fuerza que hace mover el punto.

Respuesta: $F_\varphi=0$, $F_r=-m\mu/r^2$, donde $\mu=c^2/p$ y c es la velocidad sectorial doble.

50.14. Un punto de masa m se atrae a un polo fijo de acuerdo con la ley de gravitación universal $F=m\mu r^2$.

Hallar la trayectoria de movimiento del punto.

Respuesta: Una curva de segundo orden (una sección cónica); cuya ecuación en coordenadas polares tiene la forma

$$r=\frac{p}{1+e\cos(\varphi-\varepsilon)},$$

donde $p=c^2/\mu$, e y ε son constantes arbitrarias de integración.

Indicación. Utilizar la respuesta del problema 50.12.

50.15. Un punto material se desplaza bajo la acción de la fuerza de gravitación universal por una trayectoria elíptica, cuya excentricidad $e<1$ y el parámetro es p.

Conociendo la integral de las áreas $c=r^2\dot{\varphi}=|\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}|$, determinar los semiejes a y b de la trayectoria elíptica y el periodo orbital T.

Respuesta: $a=\frac{p}{1-e^2}$, $b=\frac{p}{\sqrt{1-e^2}}$; $T=\frac{2\pi p^2}{c(1-e^2)^{3/2}}=2\pi\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}$.

50.16. Para los datos del problema anterior, determinar la aceleración del punto en los instantes cuando el punto pasa por el apogeo y el perigeo.

Respuesta: $w_a=\frac{c^2}{p^3}(1-e)^2$, $w_p=\frac{c^2}{p^3}(1+e)^2$.

50.17. Conociendo el período orbital T de un satélite alrededor de la Tierra por una órbita elíptica y la diferencia de su apogeo y su perigeo H, determinar la excentricidad de la órbita.

Respuesta: $e=H\sqrt[3]{\frac{\pi^2}{2\mu T^2}}$.

50.18. Un satélite se desplaza alrededor de un planeta de radio R por una órbita elíptica de excentricidad e.

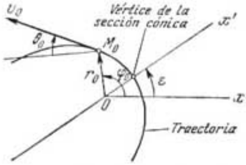
Hallar el semieje mayor de su órbita, si la relación de las lturas de su perigeo a su apogeo es igual a $\gamma < 1$.

Respuesta: $a = \frac{1-\gamma}{1-\gamma-e(1+\gamma)} R$.

50.19. Un punto se desplaza bajo la acción de la fuerza de gravitación universal $F = m\mu/r^2$.

Expresar la constante de la energía h (véase el problema 50.7) en función de los elementos de la trayectoria del punto y del parámetro de gravitación μ.

Respuesta: $h = -\mu/a$ para una trayectoria elíptica (a es el semieje mayor de la elipse), $h = 0$ para una trayectoria parabólica y $h = \mu/a$ para una trayectoria hiperbólica (a es el semieje real de la hipérbola).



Para el problema 50.20.

50.20. En el instante inicial, un punto material, que se desplaza de acuerdo con la ley de gravitación universal, se encontraba en la posición M_0 a una distancia r_0 del centro de atracción y su velocidad era v_0; el ángulo entre el vector velocidad v_0 y la línea del horizonte (la tangente trazada en el punto M_0 a la circunferencia, cuyo centro coincide con el centro de atracción) era igual a θ_0, el ángulo polar era igual a φ_0.

Determinar la excentricidad e y el ángulo ε entre el eje polar y la línea focal de la sección cónica *).

Respuesta: $e = \sqrt{1 + \frac{c^2}{\mu^2} h}$, $\operatorname{tg}(\varphi_0 - \varepsilon) = \frac{\operatorname{tg}\theta_0}{1 - \frac{r_0}{p}}$ donde $c = r_0 v_0 \cos\theta_0$ es la integral de las áreas, $h = v^2 - 2\mu/r$ es la integral de la energía.

50.21. Determinar la velocidad que debe ser comunicada a una nave cósmica para que ésta después de alcanzar la altura H sobre la superficie de un planeta y separarse de la última etapa del cohete se desplace por una trayectoria elíptica, parabólica o hiperbólica. El radio del planeta es R.

*) Como dirección positiva del eje focal de la sección cónica se toma la dirección del polo, que coincide con uno de los focos de la sección, al vértice más próximo.

Respuesta: $v_0 < v_2$, la trayectoria es una elipse,

$v_0 = v_2$, la trayectoria es una parábola,

$v_0 > v_2$, la trayectoria es una hipérbola,

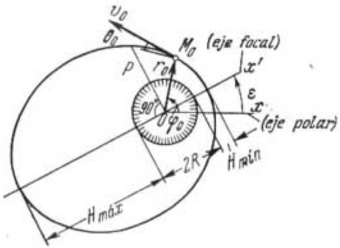
donde $v_2 = \sqrt{2\frac{gR^2}{R+H}} = \sqrt{2}v_1$ es la velocidad parabólica a la altura H (v_1 es la velocidad circular).

Indicación. Utilizar la respuesta del problema anterior.

50.22. En el instante cuando un vehículo espacial se separa de la última etapa del cohete él se encontraba en el punto M_0 a la altura $H = 230$ km sobre la superficie de la Tierra y su velocidad era $v_0 = 8{,}0$ km/s, el vector velocidad $\boldsymbol{v}_0$ formaba con la línea del horizonte (la tangente trazada en el punto M_0 a la circunferencia de radio $\boldsymbol{r}_0$) un ángulo $\theta_0 = 0{,}02$ rad.

Determinar la constante de las áreas c, el parámetro p de la trayectoria y la constante de la energía h.

Respuesta: $c = 52\,790$ km²/s; $p = 7002$ km; $h = -56{,}6$ km²/s².



Para el problema 50.22. y 50.23.

50.23. Para los datos del problema anterior, determinar la dirección del semieje mayor de la trayectoria elíptica de un satélite, la excentricidad e de la trayectoria, el apogeo y el perigeo (las distancias máxima $H_{máx}$ y mínima $H_{mín}$ del satélite hasta la superficie de la Tierra) y el período orbital T del satélite.

Respuesta: 1) $\varepsilon = \varphi_0 - 0{,}335$ rad, donde φ_0 es el ángulo polar inicial del radio vector $\boldsymbol{r}_0$;

2) $e = 0{,}0649$;

3) $H_{máx} = 1120$ km, $H_{mín} = 210$ km;

4) $T = 98{,}5$ min.

50.24. ¿Cuál debe ser la dirección de la velocidad inicial v_0 de una nave cósmica para que ésta caiga sobre la superficie de un planeta de radio R independientemente del valor de la velocidad inicial v_0?

Respuesta: Si la velocidad inicial está dirigida hacia el interior del cono descrito alrededor del planeta a partir del punto inicial.

50.25. ¿Para qué condiciones iniciales la trayectoria de una nave cósmica lanzada a la altura H sobre la superficie de un planeta de radio R no intersecará su superficie?

Respuesta: 1) $v_0^2 > v_1^2 \frac{2RH}{(R+H)^2 \cos^2 \theta_0 - R^2}$, donde v_1 es la velocidad circular para el planeta examinado a la altura H.

2) La velocidad inicial debe estar dirigida hacia el exterior del cono descrito alrededor del planeta a partir del punto inicial.

50.26. Hallar la relación entre los períodos orbitales T_i de los planetas alrededor del Sol y los semiejes mayores a_i de sus trayectorias elípticas.

Respuesta: $\frac{a_1^3}{T_1^2} = \frac{a_2^3}{T_2^2}$ para todos los planetas (la tercera ley de Kepler).

50.27. El período orbital de uno de los satélites de Júpiter llamado Io es de 1,77 días, el radio de su órbita es 5,91 veces mayor que el radio de Júpiter. La distancia media Júpiter—Sol es 5,20 veces mayor que la distancia media Tierra—Sol (5,20·23 000 radios terrestres), el período de revolución de Júpiter alrededor del Sol es 11 años y 314,84 días.

Determinar la relación de la masa de Júpiter a la del Sol (el radio de Júpiter es igual a 11,14 radios de la Tierra).

Respuesta: La masa de Júpiter es 1000 veces menor que la del Sol.

50.28. Por valor medio del radio vector $[r]$ de un punto que se desplaza por una órbita elíptica se comprende la magnitud que se define por la igualdad

$$[r] = \frac{1}{T} \int_0^T r \, dt,$$

donde T es el período de revolución.

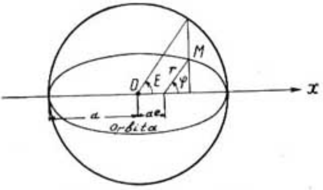
Determinar el valor medio del radio vector de un planeta, si a es el semieje mayor, e es la excentricidad de su trayectoria elíptica.

Respuesta: $[r]=a\left(1+\frac{1}{2}e^2\right)$.

50.29. Dos satélites de una misma masa, que se desplazan en el mismo sentido alrededor del centro de atracción por órbitas complanares, una de las cuales es circular de radio r_0 y la otra es elíptica de apogeo $8r_0$ y de perigeo r_0.

Suponiendo que los satélites mediante un empalme directo se unieron uno con el otro en el punto de contacto de sus órbitas y seguían desplazándose juntos, hallar el apogeo de su órbita nueva.

Respuesta: $r_a=\frac{49}{23}r_0$.



Para el problema 50.30.

50.30. Determinar la relación entre las anomalías verdadera φ y excéntrica E de un punto sobre una órbita elíptica de excentricidad e.

Respuesta: $\operatorname{tg}\frac{E}{2}=\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$.

50.31. Expresar la velocidad en cualquier punto de una órbita elíptica en función de la anomalía excéntrica.

Respuesta: $v=\sqrt{\frac{\mu}{a}}\sqrt{\frac{1+e\cos E}{1-e\cos E}}$.

50.32. Hallar sobre una órbita elíptica los puntos, cuyas velocidades de movimiento son iguales a la media geométrica de las velocidades en el perigeo y apogeo.

Respuesta: $E=\pm\frac{\pi}{2}$ (los puntos están situados en los extremos del eje menor de la elipse).

50.33. Conociendo las expresiones del radio vector de un punto que efectúa un movimiento elíptico alrededor del centro de atracción:

$$\boldsymbol{r}=\frac{p}{1+e\cos\varphi}\boldsymbol{e}_r,$$
$$\boldsymbol{r}=a(1-e\cos E)\boldsymbol{e}_r,$$

donde $\boldsymbol{e}_r$ es el versor del radio vector $\boldsymbol{r}$ trazado desde el centro de atracción, φ es la anomalía verdadera y E es la anomalía excéntrica, hallar las expresiones del vector de la velocidad orbital de este punto escritas en los sistemas de coordenadas orbital e inercial.

Respuesta: $\boldsymbol{v}=\sqrt{\frac{\mu}{p}}\,[\boldsymbol{e}_r e\operatorname{sen}\varphi+\boldsymbol{e}_\varphi(1+e\cos\varphi)]$;

$$\boldsymbol{v}=\sqrt{\frac{\mu}{p}}\left[-\boldsymbol{e}_1\frac{\sqrt{1-e^2}\operatorname{sen}E}{1-e\cos E}+\boldsymbol{e}_2\cdot\frac{(1-e^2)\cos E}{1-e\cos E}\right],$$

donde $\boldsymbol{e}_1$ es el versor dirigido del polo al perigeo, $\boldsymbol{e}_2$ es el versor de dirección perpendicular a $\boldsymbol{e}_1$.

50.34. ¿En qué punto de una órbita elíptica el ángulo de inclinación de la trayectoria respecto al horizonte local (el plano perpendicular al radio vector) alcanza su valor máximo?

Respuesta: $E=\pm\frac{\pi}{2}$.

50.35. Un satélite se desplaza por una órbita circular de radio $\boldsymbol{r}$ haciendo una revolución en el tiempo T. Al recibir un impulso radial de velocidad de magnitud u, el satélite pasa a una órbita elíptica.

Determinar el período de revolución por la órbita elíptica.

Respuesta: $T_1=\dfrac{T}{\left[1-\left(\dfrac{uT}{2\pi r}\right)^2\right]^{3/2}}$.

50.36. Un satélite se desplaza alrededor de la Tierra por una órbita circular de radio r haciendo una revolución durante el tiempo T. Al recibir un impulso tangencial de velocidad de magnitud u, el satélite pasa a una órbita elíptica.

Determinar el período de revolución T_1 por la órbita elíptica.

Respuesta: $T_1=\dfrac{T}{\left[1-\left(\dfrac{uT}{2\pi r}\right)^2-\dfrac{uT}{\pi r}\right]^{3/2}}$.

50.37. Un satélite se desplaza alrededor de la Tierra por una órbita circular de radio r.

Determinar la magnitud del impulso radial de velocidad que debe ser comunicado al satélite para que éste pase a una órbita elíptica de perigeo r_1.

Respuesta: $u=\sqrt{\frac{\mu}{r_1}}\left(\sqrt{\frac{r}{r_1}}-\sqrt{\frac{r_1}{r}}\right)$.

50.38. Una nave cósmica se desplaza con una velocidad $v=$ $=30$ km/s por una órbita de la Tierra de radio $r_1=150\cdot10^6$ km.

¿Qué impulso tangencial de velocidad u hace falta comunicarle para que en el afelio de su órbita nueva alcance la órbita de Marte ($r_2=228\cdot10^6$ km)?

Resolver el mismo problema para el caso del vuelo a la órbita de Venus ($r_3=108\cdot10^6$ km).

Respuesta: Para alcanzar la órbita de Marte: $u=2{,}95$ km/s;
Para alcanzar la órbita de Venus: $u=2{,}55$ km/s.

50.39. Un satélite se desplaza alrededor de la Tierra por una órbita elíptica de perigeo r_1 y de apogeo r_2.

Determinar la magnitud del acrecimiento tangencial de la velocidad u en el perigeo, para el cual el apogeo aumentara en H.

Respuesta: $u=\sqrt{\frac{2\mu}{r_1}}\left(\sqrt{\frac{r_2+H}{r_1+r_2+H}}-\sqrt{\frac{r_2}{r_1+r_2}}\right)$.

50.40. Una nave cósmica que se desplaza por una órbita circular de satélite debe despegar de ella recibiendo un impulso tangencial de velocidad y ponerse en una órbita hiperbólica con el valor dado de la velocidad en la infinidad v_∞.

¿Para qué valor del radio r_0 de la órbita circular inicial la magnitud del impulso necesario u será mínima?

Respuesta: $r_0=\frac{2\mu}{v_\infty^2}$.

§ 51. PROBLEMAS MIXTOS

51.1. Dos puntos libres, cuyas masas son m_1 y m_2, se mueven bajo la acción de las fuerzas de atracción mutua.

Determinar la ley de movimiento del primer punto respecto al segundo.

Respuesta: El movimiento relativo se realiza según las mismas leyes que el absoluto, con el parámetro gravitacional

$$\mu=f\cdot(m_1+m_2).$$

51.2. ¿Qué forma adquirirá la dependencia entre los períodos orbitales T_i de los planetas alrededor del Sol y los semiejes mayores a_i de sus órbitas elípticas, si se toma en consideración el movimiento del Sol provocado por la atracción del respectivo planeta?

Respuesta: $\frac{a_1^3}{T_1^2}:\frac{a_2^3}{T_2^2}=\frac{M+m_1}{M+m_2}$, donde m_1, m_2, M son las masas de los planetas y del Sol respectivamente (comparar con la respuesta del problema 50.26).

51.3. Dos bolas homogéneas de masas m_1 y m_2 y de radios R_1 y R_2 comienzan su movimiento a partir del estado de reposo bajo la acción de las fuerzas de atracción mutua.

Determinar la velocidad relativa v_r de colisión de estas bolas, si la distancia inicial entre sus centros era igual a L.

Respuesta: $v_r = \sqrt{2\mu\left(\frac{1}{R_1+R_2}-\frac{1}{L}\right)}$, donde $\mu = f(m_1+m_2)$.

51.4. Dos puntos de masas m_1 y m_2 comienzan su movimiento a partir del estado de reposo bajo la acción de las fuerzas de atracción mutua.

Determinar el tiempo T dentro del cual los puntos chocarán, si la distancia inicial entre ellos era igual a L.

Respuesta: $T = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{L^3}{2\mu}}$, donde $\mu = f(m_1+m_2)$.

51.5. Dos puntos libres de masas m_1 y m_2 se desplazan bajo la acción de las fuerzas de atracción mutua.

Determinar la ley del movimiento de los puntos respecto a su centro de masas C.

Respuesta: El movimiento relativo respecto al centro de masas se efectúa de acuerdo con las mismas leyes que el movimiento absoluto de parámetros de gravitación

$$\mu_1 = f\frac{m_2^3}{(m_1+m_2)^2} \quad \text{y}$$

$$\mu_2 = f\frac{m_1^3}{(m_1+m_2)^3}.$$

51.6. La proyección de una fuerza central sobre el radio vector es $-\left(\frac{\mu}{r^2}+\frac{\nu}{r^3}\right)$, donde $\mu > 0$ y ν son ciertas constantes.

Determinar la trayectoria del punto móvil.

Respuesta: 1) $\nu < c^2$, $r = \frac{p}{1+e\cos k(\varphi-\varepsilon)}$,

donde $c = r^2\dot{\varphi} = \text{const}$, $p = \frac{c^2-\nu}{\mu}$, $k^2 = 1-\frac{\nu}{c^2}$, e y ε son constantes arbitrarias;

2) $\nu = c^2$, $\frac{1}{r} = \frac{\mu}{c^2}\frac{\varphi^2}{2}+C_1\varphi+C_2$, C_1 y C_2 son constantes de integración;

3) $\nu > c^2$, $r = \frac{p}{1+e\,\mathrm{ch}\,K(\varphi-\varepsilon)}$,

donde $p = -\frac{\nu-c^2}{\mu}$, $k^2 = \frac{\nu}{c^2}-1$, e y ε son constantes arbitrarias.

51.7. Un vehículo espacial de masa m se aproxima a un planeta a lo largo de una recta que pasa por su centro.

¿A qué altura H sobre la superficie del planeta hace falta conectar el motor para que la fuerza constante de frenado igual a mT creada por éste asegure un aterrizaje suave (aterrizaje con la velocidad igual a cero)? La velocidad del vehículo espacial en el instante de conexión del motor es igual a v_0, el parámetro de gravitación del planeta es μ, su radio es R; despreciar la atracción de otros cuerpos celestes, la resistencia de la atmósfera y la variación de la masa del motor.

Respuesta: $H=\frac{1}{2T}\left\{\frac{\mu}{R}+TR+\frac{v_0^2}{2}\pm\right.$
$\left.\pm\sqrt{\left(\frac{\mu}{R}+TR+\frac{v_0^2}{2}\right)^2-4\mu T}\right\}-R$, el signo más se toma si $T>\mu/R^2$ y el signo menos, si $T<\mu/R^2$.

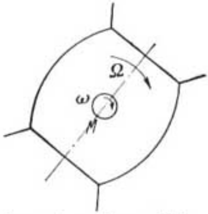
51.8. Determinar el trabajo útil que debe efectuar el motor de un cohete para elevar un vehículo espacial a una altura H sobre la superficie de un planeta y comunicarle a esta altura las velocidades circular y parabólica. El peso del vehículo sobre la superficie del planeta es igual a G, el radio del planeta es R. Despreciar la resistencia de la atmósfera.

Calcular este trabajo para la velocidad parabólica para la Tierra, si el peso del vehículo es igual a 5 tf.

Respuesta: $A_1=GR\frac{R+2H}{2(R+H)}$; $A_2=GR$,
$A_2=31\,850$ tfkm $=31{,}85\cdot10^9$ kgfm.

51.9. Un vehículo espacial gira con la velocidad angular Ω_0.

Determinar el trabajo total que debe efectuar el motor del volante M para parar la rotación del vehículo considerando que la rotación del último se realiza alrededor de un eje que se encuentra en movimiento de avance y que pasa por su centro de masas. El eje de rotación del volante coincide con el eje de rotación del vehículo; J y J_0 son los momentos de inercia del volante y del vehículo (con el volante) respecto al eje común de rotación.



Para el problema 51.9.

Respuesta: $A=\frac{1}{2}\frac{J_0(J_0-J)}{J}\Omega_0^2$.

51.10. Considerado que el estator del motor eléctrico del sistema descrito en el problema 51.9, crea un momento de rotación $M_{rot}=$ $=M_0-\varkappa\omega$, donde M_0 y $\varkappa$ son ciertas constantes positivas, hallar la condición necesaria para que el frenado de la rotación del vehículo espacial sea realizado en un intervalo de tiempo finito. Suponiendo que esta condición está cumplida calcular el tiempo T de frenado.

Respuesta: $M_0 > \alpha (J_0 - J)\,\Omega_0$, $\quad T = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{M_0}{M_0 - \alpha (J_0 - J)\,\Omega_0}$,

donde $\alpha = \varkappa \frac{J_0}{J (J_0 - J)}$.

51.11. Determinar el ángulo ψ que girará un vehículo espacial durante el frenado de la rotación, si éste se efectúa mediante los procedimientos descritos en los problemas 51.9. y 51.10.

Respuesta: $\psi = \frac{\Omega_0}{\alpha} - \frac{M_0 - \alpha (J_0 - J)\,\Omega_0}{\alpha^2 (J_0 - J)} \cdot \ln \frac{M_0}{M_0 - \alpha (J_0 - J)\,\Omega_0}$.

51.12. Para hacer girar el cuerpo de un vehículo espacial se utiliza un motor eléctrico-volante; la ecuación de movimiento de éste en el vehículo en rotación es $\dot{\omega} + \omega/T = u$, donde ω es la velocidad angular relativa del volante, T es su constante de tiempo, u es la tensión de mando que adquiere el valor de $\pm u_0$.

Determinar la duración t_1 de la aceleración $(u = u_0)$ y de frenado $t_2 (u = - u_0)$ del volante, si el cuerpo inicialmente sin rotación con su volante fijo debe ser girado un ángulo dado φ y parado. El eje de rotación del volante pasa por el centro de masas del vehículo; considerar el movimiento como plano. Los momentos de inercia del volante y del vehículo respecto al eje común de rotación son respectivamente iguales a J y J_0.

Respuesta: $t_1 = \tau + T \ln \left(1 + \sqrt{1 - e^{-\tau/T}}\right)$;

$t_2 = T \ln \left(1 + \sqrt{1 - e^{-\tau/T}}\right)$, donde $\tau = \frac{J_0 \varphi}{J u_0 T}$.

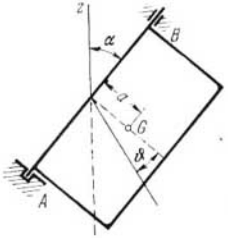
Capítulo XIII

ESTABILIDAD DEL EQUILIBRIO DEL SISTEMA, TEORÍA DE OSCILACIONES, ESTABILIDAD DEL MOVIMIENTO

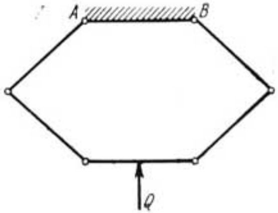
§ 52. DETERMINACIÓN DE LAS CONDICIONES DE EQUILIBRIO DEL SISTEMA. ESTABILIDAD DE EQUILIBRIO

52.1. El eje de rotación AB de una placa rectangular está inclinado bajo un ángulo α respecto a la vertical. Determinar el momento de fuerzas M respecto al eje AB que hace falta aplicar a la placa para que gire un ángulo ϑ. El peso de la placa es P; la distancia entre el centro de gravedad de la placa G y el eje AB es igual a a.

Respuesta: $M = Pa$ sen α sen ϑ.



Para el problema 52.1.



Para el problema 52.2.

52.2. Un hexágono de articulación compuesto por 6 barras idénticas homogéneas de peso p cada una, está situado en un plano vertical. El lado superior AB del hexágono está sujetado inmóvilmente en posición horizontal; los otros lados están dispuestos simétricamente respecto a la vertical que pasa por el centro de AB. Determinar la magnitud de la fuerza vertical Q que hace falta aplicar al punto medio del lado horizontal opuesto a AB para que el sistema se encuentre en equilibrio indiferente.

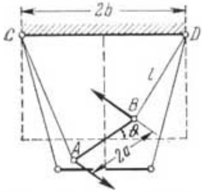
Respuesta: $Q = 3p$.

52.3. Un par de fuerzas de momento M está aplicado a una barra homogénea AB de longitud $2a$ y de peso Q suspendida de dos hilos de longitud l cada uno. La distancia entre los puntos de suspensión de los hilos, situados sobre una misma horizontal, es igual a $2b$.

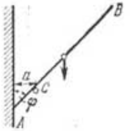
Hallar el ángulo ϑ que determina la posición de equilibrio de la barra.

Respuesta: En la posición de equilibrio, el ángulo ϑ se halla de la ecuación

$$M\sqrt{l^2-(a-b)^2-4ab\,\mathrm{sen}^2\frac{\vartheta}{2}}=Qab\,\mathrm{sen}\,\vartheta.$$



Para el problema 52.3.



Para el problema 52.4.

52.4. El extremo inferior A de una barra rectilínea homogénea AB de longitud $2l$ se apoya en un muro vertical y forma con el último un ángulo φ. La barra se apoya también en un clavo C paralelo al muro. El clavo se encuentra del muro a una distancia a.

Determinar el ángulo φ en la posición de equilibrio de la barra.

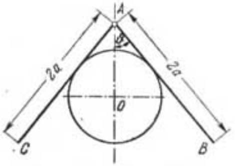
Respuesta: $\mathrm{sen}\,\varphi=\sqrt[3]{\frac{a}{l}}$.

52.5. Dos barras homogéneas pesadas articuladas en A se apoyan en un cilindro liso de radio r. La longitud de cada barra es igual a $2a$.

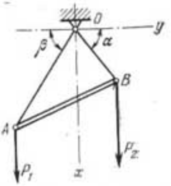
Determinar el ángulo 2ϑ de abertura de la barra correspondiente a la posición de equilibrio.

Respuesta: El ángulo ϑ se define de la ecuación $a\,\mathrm{tg}^3\vartheta-r\,\mathrm{tg}^2\,\vartheta-$ $-r=0$.

52.6. Una barra imponderable de longitud l pende de un hilo inextensible de longitud L que pasa por una polea infinitamente pequeña. Dos cargas P_1 y P_2 están fijadas en los extremos de esta barra.



Para el problema 52.5.



Para el problema 52.6.

Determinar la posición de equilibrio del sistema.

Respuesta: En una posición de equilibrio $\alpha=\beta$ y $\frac{OA}{OB}=\frac{P_2}{P_1}$; en una otra posición de equilibrio $y_1=y_2=0$, $x_1=$ $=\frac{1}{2}(L+l)$, $x_2=\frac{1}{2}(L-l)$, y por fin en una tercera posición de equilibrio

$$y_1=y_2=0,\quad x_1=\frac{1}{2}(L-l),\quad x_2=\frac{1}{2}(L+l).$$

52.7. Los extremos de una barra ponderable homogénea de longitud l pueden deslizarse sin rozamiento sobre una curva que se define por la ecuación $f(x, y)=0$.

Determinar la posición de equilibrio de la barra. (El eje y está dirigido por la vertical hacia arriba, el eje x, por la horizontal a la derecha).

Respuesta: Las coordenadas de los extremos de la barra que corresponden a las posiciones de equilibrio serán las soluciones del sistema

$$(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2-l^2=0,\quad f(x_1, y_1)=0,$$
$$f(x_2, y_2)=0,$$
$$2(y_2-y_1)\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial x_2}=(x_2-x_1)\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial y_2}+\frac{\partial f}{\partial y_1}\frac{\partial f}{\partial x_2}\right].$$

52.8. Los extremos de una barra ponderable homogénea de longitud l pueden deslizarse sin rozamiento por la parábola $y=ax^2$.

Determinar las posiciones de equilibrio posibles. (El eje y está dirigido verticalmente hacia arriba, el eje x, horizontalmente a la derecha).

Respuesta: La primera posición de equilibrio:

$$x_2=-x_1=\frac{l}{2},\quad y_1=y_2=a\frac{l^2}{4}.$$

La segunda posición de equilibrio se define de la ecuación $\operatorname{ch}\xi=\sqrt{al}$ según las fórmulas

$$x_1=-\frac{1}{2a}e^{-\xi},\quad y_1=\frac{1}{4a}e^{-2\xi},\quad x_2=\frac{1}{2a}e^{\xi},\quad y_2=\frac{1}{4a}e^{2\xi}.$$

52.9. Resolver el problema 52.7, suponiendo que la curva es una elipse $\left(f(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0\right)$, y que la longitud de la barra satisface la condición $l < 2a$.

Determinar las posiciones de equilibrio posibles de la barra.

Indicación. En lugar de las coordenadas cartesianas es necesario introducir la coordenada φ (la anomalía excéntrica) con ayuda de las relaciones $x = a \cos \varphi$, $y = b \operatorname{sen} \varphi$.

Respuesta: Las posiciones de equilibrio responden a los valores de las anomalias excéntricas que se determinan por las ecuaciones:

a) $\varphi_1 = 2\pi - \varphi_2$, $\operatorname{sen} \varphi_2 = \sqrt{\frac{l}{2b}}$ (existe cuando $l \leqslant 2l$);

b) $\operatorname{sen} \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} = \sqrt{\frac{l}{2a}}$, $\cos \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2} = \sqrt{\frac{1 - \frac{l}{2a}}{1 - \frac{b^2}{a^2}}}$

(existe cuando $a > b$ y $l < 2a$).

52.10. Un anillo A puede deslizarse sin rozamiento sobre un anillo de alambre liso de radio R, situado en el plano vertical. Una carga de peso P está suspendida de este anillo por medio de un hilo. Otra carga de peso Q está fijada en el extremo C de otro hilo que pasa sobre una polea infinitamente pequeña B situada en el extremo del diámetro horizontal del anillo grande.

Determinar las posiciones de equilibrio del anillo A y estudiar cuáles de ellos son estables.

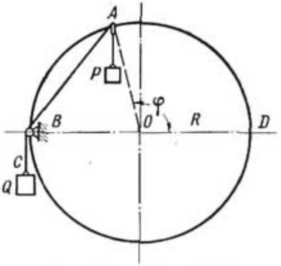
Indicación. Es necesario caracterizar la posición del anillo A por el ángulo central $\varphi = \angle DOA$. Hace falta considerar separadamente el equilibrio del anillo sobre las semicircunferencias superior e inferior.

Respuesta: Sobre la semicircunferencia superior $(0 < \varphi < \pi)$ para todos valores de Q/P existe una posición de equilibrio inestable $\operatorname{sen} \frac{\varphi_0}{2} = \frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{Q^2}{P^2} + 8} - \frac{Q}{P}\right)$, siendo $0 < \varphi_0 < \pi/2$. En la semicircunferencia inferior $(\pi < \varphi < 2\pi)$ para $Q/P \leqslant 1$ existe una posición de equilibrio estable

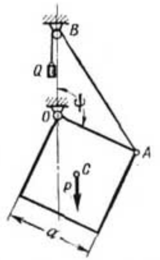
$$\operatorname{sen} \frac{\varphi_0}{2} = \frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{Q_2}{P^2} + 8} + \frac{Q}{P}\right),$$

en este caso $\pi < \varphi_0 < \frac{3\pi}{2}$.

52.11. Una placa cuadrada homogénea puede girar en el plano vertical alrededor de un eje que pasa por el ángulo O; el peso de la placa es P, la longitud de su lado es a. Al ángulo A de la placa



Para el problema 52.10.



Para el problema 52.11.

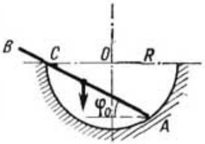
está atado un hilo de longitud l que pasa sobre una polea pequeña B que se encuentra a una distancia a del punto O por la vertical. Un peso $Q=\frac{\sqrt{2}}{2}P$ está fijado en este hilo.

Determinar las posiciones de equilibrio del sistema y estudiar su estabilidad.

Respuesta: Las posiciones de equilibrio responden a los valores siguientes del ángulo $\psi: \psi_1=\pi/6$, $\psi_2=\pi/2$, $\psi_3=3\pi/2$. La segunda y tercera posiciones de equilibrio son estables.

52.12. Una barra ponderable homogénea AB de longitud $2a$ se apoya en una guía curvilínea en forma de semicircunferencia de radio R.

Despreciando el rozamiento, determinar la posición de equilibrio y estudiar su estabilidad.



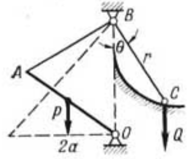
Para el problema 52.12.

Respuesta: En la posición de equilibrio la barra está inclinada a la línea horizontal bajo un ángulo φ_0 que se define de la ecuación

$$\cos\varphi_0=\frac{1}{8R}\left[a+\sqrt{a^2+32R^2}\right]$$

(se supone que $\sqrt{\frac{2}{3}}R<a<2R$). Esta posición de equilibrio es estable.

52.13. Un puente levadizo OA viene representado esquemáticamente en el dibujo en forma de una placa homogénea de peso P y de longitud $2a$. Una cuerda de longitud l, que pasa sobre una polea pequeña situada en la vertical a una distancia $2a$ por encima



Para el problema 52.13.

del punto O, está fijada en la parte media del borde de la placa. Otro extremo C de la cuerda está unido con un contrapeso que se desliza sin rozamiento por una guía curvilínea.

Determinar la forma de esta guía y el peso del contrapeso Q de tal modo que el sistema se encuentre en equilibrio indiferente. En la posición horizontal del puente levadizo el contrapeso C se encuentra sobre la recta OB.

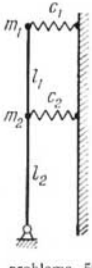
Respuesta: $Q=\frac{P}{\sqrt{2}}$; la ecuación de la guía en las coordenadas polares r, ϑ:

$$r^2=2\,(l-2\sqrt{2}\,a\cos\vartheta)\,r+4\sqrt{2}\,al-l^2-8a^2.$$

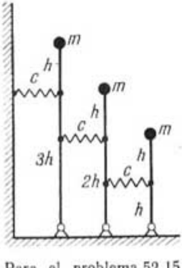
52.14. Estudiar la estabilidad de la posición vertical de equilibrio del péndulo doble "inverso" representado en el dibujo. El péndulo puede ser esquematizado en forma de dos puntos materiales de masas m_1 y m_2 ligados por las barras de longitudes l_1 y l_2. En la posición vertical de equilibrio los resortes (sus rigideces son c_1 y c_2) no están deformados.

Respuesta: Las condiciones de estabilidad son:

$$c_1l_1>m_1g;\qquad [(c_1+c_2)\,l_2-(m_1+m_2)\,g]\times$$
$$\times\,[c_1l_1-m_1g]>c_1^2l_1l_2.$$



Para el problema 52.14.

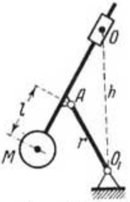


Para el problema 52.15.

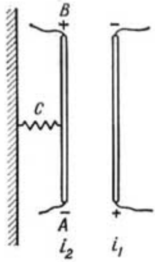
52.15. Estudiar la estabilidad de la posición vertical de equilibrio del sistema de péndulos representado en el dibujo; la longitud de la barra del primer péndulo es $4h$, la del segundo es $3h$ y la del tercero es $2h$. Las masas de todos los péndulos y las rigideces de todos los resortes son idénticos y respectivamente iguales a m y c. Las distancias de los puntos de fijación de los resortes hasta los centros de gravedad de las masas son iguales a h. Despreciar la masa de las barras y considerar las masas m como puntos materiales; los resortes no están deformados cuando los péndulos ocupan la posición vertical.

Respuesta: Las condiciones de equilibrio son

$$13ch^2-4mgh>0;$$
$$49c^2h^4-59mgch^3+12m^2g^2h^2>0;$$
$$36c^3h^6-153mgc^2h^5+130m^2g^2ch^4-24m^3g^3h^3>0.$$



Para el problema 52.16.



Para el problema 52.17.

52.16. En el péndulo de un palógrafo la carga M está colgada de la barra OM que pasa libremente a través del cilindro en rotación O y está articulada en el punto A con la palanca oscilante AO_1 que gira alrededor del eje O_1. La longitud de la palanca oscilante es r; la distancia del centro de gravedad de la carga a la articulación A es igual a l; la distancia $OO_1=h$.

Estudiar la estabilidad de la posición vertical de equilibrio del péndulo. Despreciar las dimensiones de la carga y el peso de las barras.

Respuesta: Para $\sqrt{rl}>h-r$, la posición de equilibrio es estable; para $\sqrt{rl}<h-r$, la posición de equilibrio es inestable.

52.17. Un conductor rectilíneo por el cual circula corriente de intensidad i_1 atrae un conductor AB paralelo a él; por el conductor AB circula corriente de intensidad i_2. La masa del conductor AB es m; a este conductor se ha acoplado un resorte de rigidez c; la longitud de cada uno de los conductores es l. En ausencia de corriente en el conductor AB la distancia entre los conductores es a.

Determinar las posiciones de equilibrio del sistema y estudiar su estabilidad.

Indicación. La fuerza de interacción de dos conductores paralelos de longitud l, por los cuales circula corriente de intensidad i_1 e i_2, y la distancia entre los cuales es d, se determina por la fórmula $F=\frac{2i_1i_2}{d}\,l$.

Respuesta: Para $\alpha=\frac{2i_1i_2l}{c}<\frac{a^2}{4}$ hay dos posiciones de equilibrio:

$$x_1=\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}-\alpha}.$$

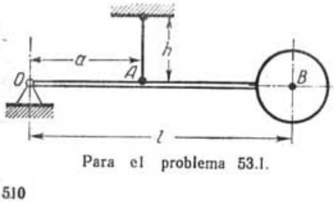
y

$x_2=\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}-\alpha}$; x_1 responde a la posición de equilibrio estable, x_2 responde a la posición de equilibrio inestable. Para $\alpha=a^2/4$ hay una sola posición de equilibrio, la cual es inestable. Para $\alpha>a^2/4$ no hay posiciones de equilibrio.

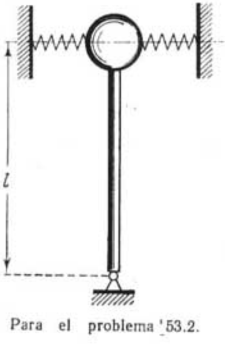
§ 53. OSCILACIONES PEQUEÑAS DEL SISTEMA CON UN SOLO GRADO DE LIBERTAD

53.1. Una barra rígida OB de longitud l puede balancearse libremente en una articulación esférica alrededor de su extremo O, y lleva una bola de peso Q en su otro extremo. La barra se mantiene en posición horizontal por medio de una cuerda vertical inextensible de largo h. La distancia $OA=a$. Si se levanta la bola perpendicularmente al plano del dibujo y luego se suelta, entonces el sistema empezará a oscilar. Sin tomar en cuenta la masa de la barra, determinar el período de las oscilaciones pequeñas del sistema.

Respuesta: $T=2\pi\sqrt{\frac{hl}{ag}}$.



Para el problema 53.1.



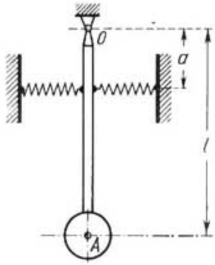
Para el problema 53.2.

53.2. Determinar el período de las oscilaciones pequeñas de un péndulo astático que se utiliza en algunos tipos de sismógrafos para registrar las oscilaciones del terreno. El péndulo se compone de una barra rígida de largo l, que lleva en su extremo una masa m presionada por dos resortes horizontales de rigidez c cuyos extremos están fijos. No tomar en cuenta la masa de la barra, y considerar los resortes en la posición de equilibrio, no tensados.

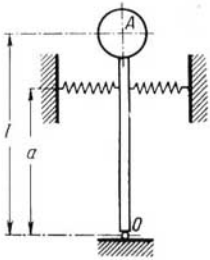
Respuesta: $T = \dfrac{2\pi}{\sqrt{2\dfrac{c}{m} - \dfrac{g}{l}}}$.

53.3. Un péndulo está compuesto por una barra rígida de longitud l que porta en su extremo una masa m. A la barra van fijados dos resortes de rigidez c a la distancia a de su extremo superior; los extremos opuestos de los resortes están fijados. Despreciando la masa de la barra, hallar el período de oscilaciones pequeñas del péndulo.

Respuesta: $T = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{2ca^2}{ml^2} + \dfrac{g}{l}}}$.



Para el problema 53.3.

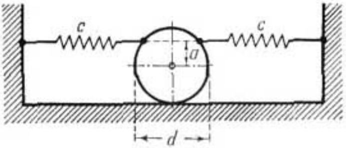


Para el problema 53.4.

53.4. Suponiendo que el péndulo descrito en el problema anterior se ha instalado de tal modo que la masa m se encuentra por encima del punto de suspensión, determinar la condición para la cual la posición de equilibrio vertical es estable, y hallar el período de oscilaciones pequeñas del péndulo.

Respuesta: $a^2 > \dfrac{mgl}{2c}$; $\quad T = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{2ca^2}{ml^2} - \dfrac{g}{l}}}$.

53.5. Un cilindro de diámetro d y de masa m puede rodar sin resbalamiento por un plano horizontal. Dos resortes iguales de rigidez c se han sujetado en el punto medio de la longitud del



Para el problema 53.5.

cilindro a la distancia a de su eje; los otros extremos de los resortes están fijos.

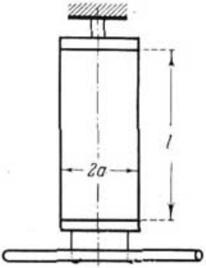
Determinar el período de oscilaciones pequeñas del cilindro.

Respuesta: $T = \dfrac{\pi\sqrt{3}}{1+2\dfrac{a}{d}}\sqrt{\dfrac{m}{c}}$.

53.6. Determinar el período de oscilaciones pequeñas de un metrónomo compuesto de un péndulo y una carga móvil adicional G de masa m. El momento de inercia de todo el sistema respecto del eje de rotación horizontal se varía deplazando la carga móvil G. La masa del péndulo es M; la distancia del centro de gravedad del péndulo hasta el eje de rotación O es igual a s_0; $OG = s$; el momento de inercia del péndulo respecto al eje de rotación es J_0.

Respuesta: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{J_0 + ms^2}{(Ms_0 - ms)g}}$.

Para el problema 53.6.



Para el problema 53.7.

53.7. Un cuerpo, que pende de dos hilos verticales de longitud l cada uno, se retuerce alrededor de un eje vertical situado en el plano de los hilos y equidistante de éstos (suspensión bifilar). La distancia entre los hilos es igual a $2a$; el radio de inercia del cuerpo respecto del eje de rotación es ρ.

Hallar el período de oscilaciones pequeñas del cuerpo.

Respuesta: $T = 2\pi \frac{\rho}{a} \sqrt{\frac{l}{g}}$.

53.8. Un aro circular está colgado de tres puntos fijos con ayuda de tres hilos inextensibles iguales de longitud l, de tal modo que el plano del aro es horizontal. En la posición de equilibrio del aro, los hilos están dispuestos verticalmente y dividen la circunferencia del aro en tres partes iguales.

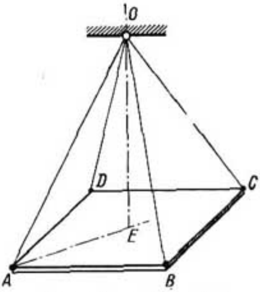
Hallar el período de oscilaciones pequeñas del aro alrededor del eje que pasa por el centro del aro.

Respuesta: $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$.

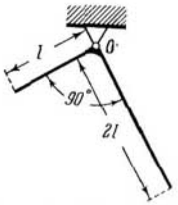
53.9. Una plataforma cuadrada pesada $ABCD$ de masa M está colgada, con ayuda de cuatro cables elásticos de rigidez c cada uno, de un punto fijo O que, en la posición de equilibrio del sistema, se encuentra a la distancia l, por la vertical, del centro E de la plataforma. La longitud de la diagonal de la plataforma es a.

Determinar el período de oscilaciones verticales del sistema.

Respuesta: $T = 2\pi \sqrt{\frac{M}{c} \frac{(a^2+4l^2)}{16l^2} \frac{1}{1+\frac{Mga^2}{16cl^3}}}$.



Para el problema 53.9.



Para el problema 53.10.

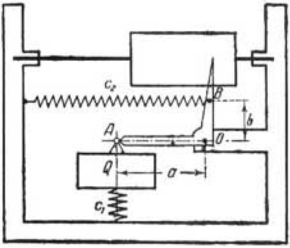
53.10. Un ángulo, formado por varillas finas homogéneas de longitud l y $2l$ con un ángulo entre ellas de 90°, puede girar alrededor del punto O.

Determinar el período de oscilaciones pequeñas alrededor de la posición de equilibrio.

Respuesta: $T = 2\pi \frac{\sqrt{6}}{\sqrt[4]{17}} \sqrt{\frac{l}{g}} = 7{,}53 \sqrt{\frac{l}{g}}$.

53.11. Determinar el período de oscilaciones pequeñas libres de un péndulo de peso Q cuyo eje de rotación forma un ángulo β con el plano horizontal. El momento de inercia del péndulo respecto del eje de rotación es J, la distancia desde el centro de gravedad hasta el eje de rotación es s.

Respuesta: $T=2\pi\sqrt{\dfrac{J}{Qs\cos\beta}}$.



Para el problema 53.12.

53.12. En un instrumento para el registro de las oscilaciones verticales de los cimientos de las máquinas, la carga de peso Q fijada en un muelle vertical cuyo coeficiente de rigidez es c_1, va articulada a una aguja en forma de palanca quebrada cuyo momento de inercia respecto del eje de rotación O es J y que se mantiene en posición de equilibrio mediante un resorte horizontal de coeficiente de rigidez c_2.

Determinar el período de oscilaciones libres de la aguja alrededor de su posición de equilibrio vertical, si $OA=a$ y $OB=b$. Las dimensiones de la carga y la influencia de la tensión inicial del resorte se desprecian.

Respuesta: $T=2\pi\sqrt{\dfrac{Jg+Qa^2}{g(c_1a^2+c_2b^2)}}$.

53.13. Un dispositivo amortiguador puede ser esquematizado en forma de un punto material de masa m unido con ayuda de n resortes de rigidez c con los vértices de un polígono regular. La longitud de cada resorte en estado libre es a, el radio de la circunferencia circunscrita al polígono es b.

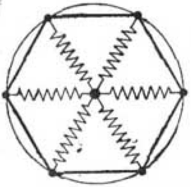
Determinar la frecuencia de oscilaciones libres horizontales del sistema dispuesto en el plano horizontal.

Indicación. Para calcular la energía potencial con una aproximación salvo de las magnitudes de segundo orden de pequeñez se debe determinar el alargamiento de los resortes con el mismo grado de precisión.

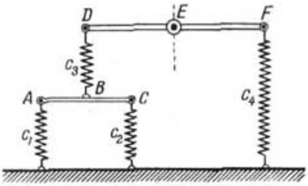
Respuesta: $k=\sqrt{\frac{nc}{2m}\frac{2b-a}{b}}$.

53.14. En el problema anterior, determinar la frecuencia de las oscilaciones perpendiculares al plano del polígono. Las fuerzas de gravedad se desprecian.

Respuesta: $k=\sqrt{\frac{nc(b-a)}{mb}}$.



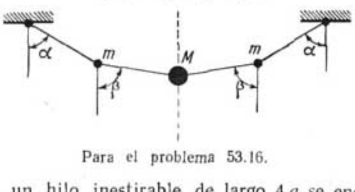
Para el problema 53.13.



Para el problema 53.15.

53.15. Determinar la frecuencia de las oscilaciones pequeñas verticales del punto material E que forma parte del sistema representado en el dibujo. La masa del punto material es m. Las distancias $AB=BC$ y $DE=EF$; las rigideces de los muelles, c_1, c_2, c_3, c_4, están dadas. Considerar las vigas AC y DF como rígidas, que no tienen masas.

Respuesta: $k=\sqrt{\frac{4}{m\left(\frac{1}{4c_1}+\frac{1}{4c_2}+\frac{1}{c_3}+\frac{1}{c_4}\right)}}$.



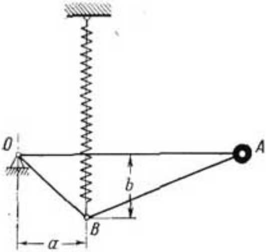
Para el problema 53.16.

53.16. En un hilo inestirable de largo $4a$ se encuentran tres cargas, cuyas masas son respectivamente iguales a m, M, m. El hilo está simétricamente suspendido por sus extremos de tal forma, que las partes final e inicial forman los ángulos α con la línea vertical y las partes centrales los ángulos β. El peso M realiza pequeñas oscilaciones verticales.

Determinar la frecuencia de las oscilaciones verticales libres del peso M.

Respuesta: $k=\sqrt{\dfrac{g(\cos^2\beta\operatorname{sen}\beta+\cos^2\alpha\operatorname{sen}\alpha)}{a\cos\beta\cos\alpha\operatorname{sen}(\beta-\alpha)\cos(\beta-\alpha)}}$;

$$2m=\frac{M\operatorname{sen}(\beta-\alpha)}{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta}.$$



Para el problema 53.17.

53.17. El sismógrafo vertical de B. B. Golitsin está formado por el cuadro AOB en el cual está fijada la carga de peso Q. El cuadro puede girar alrededor de su eje horizontal O. En el punto B del cuadro, que está situado a una distancia a del punto O, está fijado un muelle de tracción de rigidez c. En la posición de equilibrio, la varilla OA está horizontal. El momento de inercia del cuadro y de la carga con relación a O es igual a J, la altura del cuadro es b.

Despreciando la masa del muelle y considerando que el centro de gravedad de la carga y del cuadro se encuentra en el punto A, que está situado de O a una distancia l, determinar el período de las pequeñas oscilaciones del péndulo.

Respuesta: $k=\sqrt{\dfrac{ca^2-F_0b\left(1-\dfrac{b}{L}\right)}{J}}$,

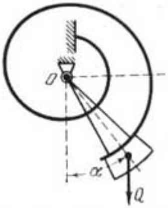
donde: $F_0=Q\dfrac{l}{a}$ es la tensión del muelle en la posición de equilibrio; L es el largo del muelle en la posición de equilibrio.

53.18. En un vibrógrafo destinado para el registro de las oscilaciones de los cimientos, conjuntos de las máquinas etc., el péndulo de peso Q se mantiene bajo un ángulo α a la vertical con ayuda de un muelle en espiral de rigidez c; el momento de inercia del péndulo con relación al eje de rotación O es igual a J, la distancia del centro de gravedad del péndulo hasta el eje de rotaciones es s.

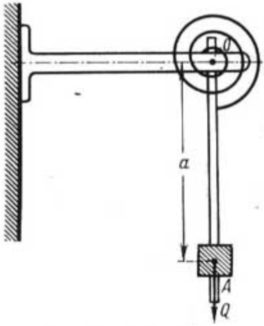
Determinar el período de oscilaciones libres del vibrógrafo.

Respuesta: $T=2\pi\sqrt{\dfrac{J}{Qs\cos\alpha+c}}$.

53.19. En un vibrógrafo para el registro de las oscilaciones horizontales, el péndulo OA, compuesto por una palanca y una carga, puede oscilar alrededor de su eje horizontal O cerca de la



Para el problema 53.18.



Para el problema 53.19.

posición vertical de equilibrio estable, manteniéndose en esta posición por su propio peso y un muelle helicoidal.

Conociendo el máximo momento estático del peso del péndulo $Qa = 4{,}5$ kgfcm, el momento de inercia con relación al eje O $J = 0{,}03$ kgf cm s^2 y el coeficiente de rigidez del muelle $c = 4{,}5$ kgf/cm, determinar el período de oscilaciones propias del péndulo para pequeños ángulos de inclinación.

Respuesta: $T = 0{,}364$ s.

53.20. Determinar la condición de estabilidad de la posición vertical superior de equilibrio del péndulo de peso P, si la rotación libre del péndulo está obstaculizada por un resorte en espiral de rigidez c. En la posición vertical superior del péndulo el resorte no está tensado. La distancia entre el centro de gravedad del péndulo y el punto de suspensión es igual a a.

Hallar también el período de oscilaciones pequeñas del péndulo, si su momento de inercia respecto al eje de rotación es J_0.

Respuesta: $c > Pa$; $T = 2\pi \sqrt{\dfrac{J_0}{c - Pa}}$.

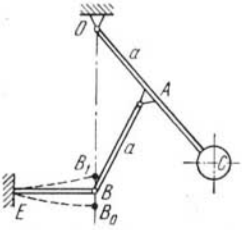
Para el problema 53.20

53.21. Mostrar que para $c < Pa$ el péndulo examinado en el problema anterior tendrá no menos de tres posiciones de equilibrio. Hallar también el período de oscilaciones pequeñas.

Respuesta: Para $\varphi=0$ la posición de equilibrio es inestable. La posición de equilibrio es estable para $\varphi=\varphi_0>0$, $\varphi=\varphi_0<0$, donde φ_0 es la raíz de la ecuación $\operatorname{sen}\varphi=\frac{c}{Pa}\varphi$.

$$T=2\pi\sqrt{\frac{J_0\varphi_0}{Pa\cos\varphi_0(\operatorname{tg}\varphi_0-\varphi_0)}}.$$

53.22. La varilla OA de un péndulo, con la ayuda de la biela AB está unida con una pequeña ballesta de acero EB de regidez c' En estado no tensado el muelle ocupa la posición EB_1, se sabe que al muelle es necesario aplicar la fuerza F_0, dirigida por OB, para llevarlo a la posición EB_0 correspondiente a la posición de equilibrio del péndulo; $OA=AB=a$, las masas de las varillas se desprecian. La distancia del centro de gravedad del péndulo hasta el eje de rotación $OC=l$, el peso del péndulo es Q. Con la finalidad de alcanzar el mejor isocronismo (independencia del período de oscilaciones del ángulo de inclinación inicial), el sistema está regulado de tal forma, que en la ecuación de movimiento del péndulo $\ddot{\varphi}=f(\varphi)=-\beta\varphi+\ldots$, el primero de los términos omitidos era del grado φ^5.



Para el problema 53.22.

Determinar la dependencia que debe tener lugar en este caso entre Q, F_0, c, a, l, y calcular el período de oscilaciones pequeñas del péndulo.

Respuesta: $Ql-2aF_0=12a^2c$;

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{2aF_0}{Ql}}}.$$

53.23. Mostrar que para los datos del problema anterior, el aumento del período de oscilaciones, siendo las inclinaciones del péndulo de la posición de equilibrio a un ángulo $\varphi_0=45°$, no sobrepasa de 0,4%. ¿Cuál será en estas condiciones la variación de período del péndulo simple?

Respuesta: Conservando en la ecuación del movimiento del péndulo el término φ^5, obtenemos:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{2aF_0}{Ql}}}\left(1+\frac{\varphi_0^4}{96}\right);$$

para el péndulo simple, siendo la inclinación igual a un ángulo de 45°, el cambio del período constituye un 4%.

53.24. Para los datos del problema 53.22, el péndulo está regulado de tal forma que $Ol = 2aF_0$.

Hallar el período de oscilaciones pequeñas del péndulo, si éste está inclinado de la posición de equilibrio a un ángulo φ_0.

Respuesta: $T = \frac{4l}{a\varphi_0}\sqrt{\frac{Q}{cg}}\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = 5{,}24\frac{l}{a\varphi_0}\sqrt{\frac{Q}{cg}}$.

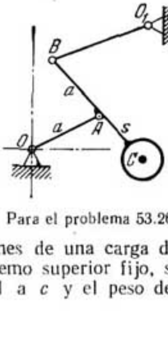
53.25. En el péndulo de un palógrafo, la carga M del péndulo está colgada de una varilla que pasa libremente a través del cilindro giratorio O, y articulada en el punto A con el balancín AO_1 que se balancea alrededor del eje fijo O_1.

¿Cúal debe ser la condición para que la posición vertical de la varilla OM del péndulo sea la posición de equilibrio estable? Hallar el período de oscilaciones pequeñas del péndulo cerca de esta posición. Las dimensiones de la carga y peso de las varillas se desprecian. (Las dimensiones de las varillas vienen dadas en el dibujo para el problema 52.16).

Respuesta: $h - r < \sqrt{rl}$; $T = 2\pi(h - r + l)\sqrt{\frac{r}{[rl-(h-r)^2]g}}$.

53.26. Despreciando la masa de las varillas, hallar el período de oscilaciones pequeñas del péndulo representado en el dibujo. El centro de gravedad de la carga se encuentra en la prolongación de la biela del mecanismo de guiado rectilíneo de cuatro eslabones articulados $OABO_1$. En la posición de equilibrio las varillas OA y BC, son verticales, la varilla O_1B es horizontal; $OA = AB = a$, $AC = s$.

Respuesta: $T = 2\pi\frac{s+a}{\sqrt{g(s-a)}}$.



Para el problema 53.26.

53.27. Determinar el período de oscilaciones de una carga de peso P, suspendida de un muelle con el extremo superior fijo, si el coeficiente de rigidez del muelle es igual a c y el peso del muelle es P_0.

Respuesta: $T = 2\pi\sqrt{\frac{P+\frac{1}{3}P_0}{cg}}$.

53.28. Al extremo inferior de una varilla elástica cilíndrica vertical cuyo extremo superior está fijo, se ha sujetado en su centro un disco horizontal con un momento de inercia J con relación al eje vertical que pasa por el centro. El momento de inercia de la varilla con relación a su eje es igual a J_0. El coeficiente de rigidez de la varilla al torcerse, o sea, el momento necesario para la torsión del extremo inferior de la varilla a un radián es igual a c.

Determinar el período de oscilaciones del sistema.

Respuesta: $T=2\pi\sqrt{\dfrac{J+\frac{1}{3}J_0}{c}}$.

53.29. Una carga de peso Q está fijada al centro de una viga apoyado libremente en sus extremos; el largo de la viga es l, el momento de inercia de la sección transversal es J, el módulo de elasticidad del material es E.

Determinar, despreciando el peso de la viga, el número de oscilaciones realizadas por la carga en un minuto.

Respuesta: $n=2080\sqrt{\dfrac{EJ}{Ql^3}}$.

Por unidad de medida se ha tomado el centimetro.

53.30. Una carga de peso Q está fijada en el centro de una viga libremente apoyada en sus extremos; el largo de la viga es l, el momento de inercia de su sección transversal es J, el módulo de elasticidad del material es E, el peso de la viga es Q_1.

Determinar (aproximadamente) el número de oscilaciones libres realizadas por la carga en un minuto.

Respuesta: $n=2080\sqrt{\dfrac{EJ}{\left(Q+\frac{17}{35}\right)l^3}}$.

Por unidad de medida se ha aceptado el centímetro.

53.31. La viga de sector rectangular de apoyo de un motor está cargada en su centro por una carga $Q=600$ kgf y apoyada en sus extremos. El momento de inercia de la sección transversal de la viga $J=210\ \text{cm}^4$, su peso lineal $q=11$ kgf/m, su largo $l=200$ cm, el módulo de elasticidad del material de la viga $E=2\cdot 10^6\ \text{kgf/cm}^2$.

Determinar la frecuencia de oscilaciones de la viga, considerándose masa y sin tomarla en consideración.

Respuesta: $k_1=63{,}4\ s^{-1}$, $k_2=64{,}0\ s^{-1}$.

53.32. Una viga portagrúa de peso lineal $q=49$ kgf/m, con un momento de inercia de su sección transversal $J=8360\ \text{cm}^4$ y con un largo $l=10$ m, está cargada en su centro por carga $Q=700$ kgf y está apoyada por sus extremos, el módulo de elasticidad del material de la viga $E=2\cdot 10^6\ \text{kgf/cm}^2$.

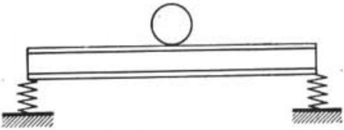
Hallar la frecuencia de oscilaciones de la viga considerando la masa de la misma y no considerándola.

Respuesta: $k_1=4{,}56\ s^{-1}$, $k_2=5{,}34\ s^{-1}$.

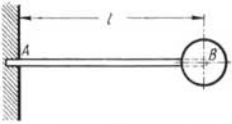
53.33. Una viga portagrúa, cuya sección tiene un momento de inercia $J = 180\ \text{cm}^4$, y su largo es $l = 4$ m, descansa sobre dos muelles de apoyo elásticos e iguales, cuya rigidez $c = 150$ kgf/cm, y lleva en su centro una carga de peso $Q = 200$ kgf.

Despreciando el peso de la viga, determinar el período de oscilaciones libres del sistema. El módulo de elasticidad del material de la viga $E = 2 \cdot 10^6\ \text{kgf/cm}^2$.

Respuesta: $T = 0{,}238$ s.



Para el problema 53.33.



Para el problema 53.34.

53.34. En el extremo B de una barra horizontal AB de longitud l, se encuentra una carga de peso Q, que realiza oscilaciones de período T. La barra está empotrada por el otro extremo. El momento de inercia de la sección de la barra con relación al eje central de la sección perpendicular al plano de las oscilaciones es igual a J.

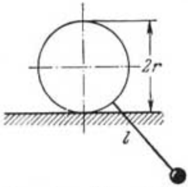
Determinar el módulo de elasticidad del material de la barra.

Respuesta: $E = \dfrac{4\pi^2 Q l^3}{3JgT^2}$.

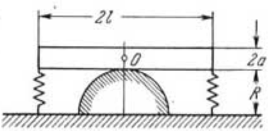
53.35. Un disco de masa M y de radio r puede rodar sin deslizamiento sobre una recta horizontal. Una barra imponderable de longitud l está fijada rígidamente al disco. En el extremo de la barra se ecuentra una masa puntiforme m.

Hallar el período de oscilaciones pequeñas del sistema.

Respuesta: $T = 2\pi \sqrt{\dfrac{3Mr^2 + 2ml^2}{2mg(r+l)}}$.



Para el problema 53.35.



Para el problema 53.36.

53.36. Una vara prismática de masa M y de sección transversal rectangular está colocada sobre un semicilindro circular rugoso de radio R. El eje longitudinal de la vara es perpendicular al eje del cilindro. La longitud de la vara es igual a $2l$, su altura equivale a $2a$. Los extremos de la vara están unidos con el piso mediante resortes de igual rigidez c.

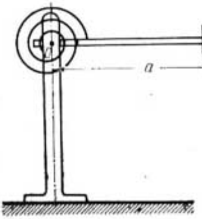
Suponiendo que la vara no se desliza por el cilindro, calcular el período de sus oscilaciones pequeñas. El momento de inercia de la vara respecto del eje transversal horizontal, que pasa por el centro de gravedad, es igual a J_0.

Respuesta: $T = 2\pi \sqrt{\dfrac{Ma^2 + J_0}{Mg(R-a) + 2cl^2}}$.

53.37. La agudeza de la curva de resonancia de un sistema con un grado de libertad, al actuar la fuerza de rozamiento proporcional a la velocidad, se caracteriza por la "mitad de la anchura" de la curva de resonancia. La "mitad de la anchura" de la curva de resonancia se mide por la diferencia entre dos frecuencias, para las cuales la amplitud de oscilación es igual a la mitad de la amplitud que corresponde a la resonancia.

Expresar la "mitad de la anchura" de la curva de resonancia Δ en función del "coeficiente de reglaje" $z = \dfrac{\omega}{k}$, y en función del coeficiente de amortiguación $\delta = \dfrac{n}{k}$. Escribir la fórmula aproximada para el caso $\delta \ll 1$, (ω es la frecuencia de la fuerza compelente, k es la frecuencia de oscilaciones propias, cuando la resonancia $z = 1$).

Respuesta: La "mitad de la anchura" de la curva de resonancia es igual a: $\Delta = z_2 - z_1 = \sqrt{1 - 2\delta^2 + 2\delta\sqrt{3+\delta^2}} - \sqrt{1 - 2\delta^2 - 2\delta\sqrt{3+\delta^2}}$, o bien cuando $\delta \ll 1$, entonces $\Delta \approx 2\sqrt{3\delta}$.



Para el problema 53.38.

53.38. En un vibrógrafo utilizado para el registro de las oscilaciones verticales, la barra OA, unida con la pluma registradora del aparato, puede girar alrededor del eje horizontal O. La barra OA lleva en su extremo A la carga Q y se mantiene en la posición horizontal de equilibrio por un muelle en espiral.

Determinar el movimiento relativo de la barra OA, si el vibrógrafo está fijado a un cimiento que realiza oscilaciones verticales según la ley $z = 2 \operatorname{sen} 25t$ mm. El coeficiente de rigidez del muelle $c = 0{,}1$ kgf/cm, el momento de inercia de la barra OA con el peso Q con relación a O es igual a $J = 0{,}4$ kgfcm s^2, $Qa = 10$ kgf cm. Despreciar las oscilaciones propias de la barra.

Respuesta: $\varphi = 0{,}0051 \operatorname{sen} 25t$.

53.39. En el vibrógrafo descrito en el problema 53.38, la barra está provista de un freno electromagnético en forma de placa de aluminio que oscila entre los polos de los imanes fijos. Las corrientes parásitas que surgen en la placa crean un frenado proporcional a la velocidad lineal de movimiento de la placa y llevado hasta el límite de aperiodicidad.

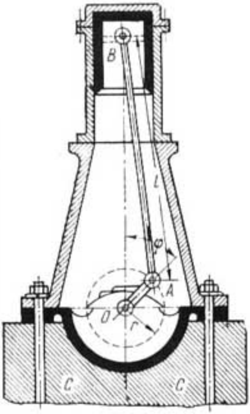
Determinar las oscilaciones forzadas de la aguja del aparato si este último está fijado a un cimiento que realiza oscilaciones verticales de acuerdo con la ley $z = h \operatorname{sen} pt$.

Respuesta: $x = \alpha\varphi = \dfrac{Qah}{Jg\left[1+\dfrac{c}{Jp^2}\right]} \operatorname{sen}(pt-\varepsilon)$;

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{2\sqrt{\dfrac{J}{c}}\,p}{1-\dfrac{J}{c}\,p^2}.$$

53.40. Un motor vertical de pes Q está fijado a un cimiento, el área de la base del cual es S; la rigidez específica del terreno es igual a λ. El largo de la manivela del motor es r, el largo de la viela es l, la velocidad angular del árbol es igual a ω, el peso del pistón y de los elementos desequilibrados que realizan movimiento alternativo es igual a P, el peso del cimiento es G; se debe considerar que la manivela está equilibrada con la ayuda de un contrapeso. La masa de la biela se desprecia.

Determinar las oscilaciones forzadas del cimiento.



Para el problema 53.40.

Indicación: En los cálculos omitir todos los términos que contienen la pequeña relación r/l a una potencia mayor que la primera.

Respuesta: El desplazamiento del centro de gravedad del cimiento de la situación de equilibrio es

$$\xi = \frac{Pr\omega^2}{(Q+G)(k^2-\omega^2)} \cos \omega t + \frac{r}{l}\,\frac{Pr\omega^2}{(Q+G)(k^2-4\omega^2)} \cos 2\omega t,$$

donde $k = \sqrt{\dfrac{\lambda S g}{Q+G}}$.

53.41. Calcular el peso del cimiento de un motor vertical que pesa $Q = 10$ tf, de tal forma que la amplitud de sus oscilaciones verticales forzadas no excedan de 0,25 mm. El área de la base del cimiento es $S = 100\ m^2$, la dureza específica del terreno que se encuentra bajo el cimiento es $\lambda = 50$ tf/m³. El largo de la manivela del motor $r = 30$ cm, el largo de la biela $l = 180$ cm, la velocidad angular del árbol $\omega = 240$ r.p.m. El peso del pistón y de otras piezas no equilibradas que realizan un movimiento de avance y retroceso es $P = 250$ kgf. Considerar la manivela equilibrada con la ayuda de un contrapeso, la masa de la biela se desprecia.

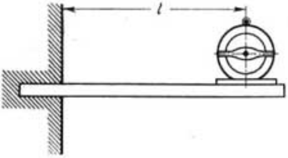
Indicación: Utilizar los resultados de la resolución del problema anterior y limitarse a la resolución aproximada omitiendo el término que contiene r/l. Comprobar la veracidad de la aproximación indicada.

Respuesta: $G = 366{,}6$ tf.

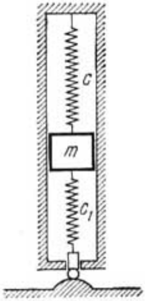
53.42. Un motor eléctrico de peso $Q = 1200$ kgf, se ha instalado sobre los extremos libres de dos vigas paralelas y horizontales, cuyos segundos extremos están empotrados en la pared. La distancia del eje del motor eléctrico hasta la pared es $l = 1{,}5$ m. El inducido del motor eléctrico gira con una velocidad $n = 1500$ r.p.m., el peso del inducido es $p = 200$ kgf, su centro de gravedad se encuentra del eje del árbol a una distancia $r = 0{,}05$ mm. El módulo de elasticidad del acero blando, del que está hecha la barra, es $E = 2 \cdot 10^6$ kgf/cm².

Determinar el momento de inercia de la sección transversal de tal forma que la amplitud de las oscilaciones forzadas no sobrepasen de 0,5 mm. El peso de la barra se desprecia.

Respuesta: $J = 8740$ cm⁴, o bien $J = 8480$ cm⁴.



Para el problema 53.42.



Para el problema 53.43.

53.43. El mecanismo de leva para el accionamiento de una válvula puede ser esquematizado en forma de masa m, fijada por un lado, con la ayuda de un muelle de rigidez c, a un punto fijo y que recibe por el otro lado, por intermedio de un muelle de rigidez c_1, movimiento desde la leva que efectúa movimiento de avance y cuyo perfil es tal, que el desplazamiento vertical se determina por las fórmulas:

$$x_1 = a\,[1-\cos\omega t] \text{ cuando } 0 \leqslant t \leqslant \frac{2\pi}{\omega},$$

$$x_2 = 0 \text{ cuando } t > \frac{2\pi}{\omega}.$$

Determinar el movimiento de la masa m.

Respuesta: Cuando $0 \leqslant t \leqslant \frac{2\pi}{\omega}$

$$x = \frac{c_1 a}{m(k^2-\omega^2)}\,[\cos kt - \cos\omega t] + \frac{c_1 a}{mk^2}\cdot[1-\cos kt],$$

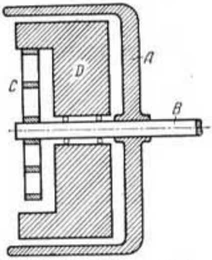
donde $k = \sqrt{\frac{c+c_1}{m}}$. Siendo $t > \frac{2\pi}{\omega}$ la masa realiza oscilaciones libres:

$$x = \left[\frac{c_1 a}{m(k^2-\omega^2)} - \frac{c_1 a}{mk^2}\right]\left[\cos kt - \cos k\left(t - \frac{2\pi}{\omega}\right)\right].$$

53.44. Para registrar las vibraciones torsionales se utiliza un torsiógrafo compuesto de una polea de aluminio blando A, acuñada en el árbol B, y el volante pesado D que puede girar libremente con relación al árbol B. El árbol está unido con el volante D por medio de un muelle en espiral de rigidez c. El árbol B se mueve por la ley:

$$\varphi = \omega t + \varphi_0 \operatorname{sen}\omega t$$

(rotación uniforme con superposición de las vibraciones armónicas). El momento de inercia del volante respecto del eje de rotación es J.



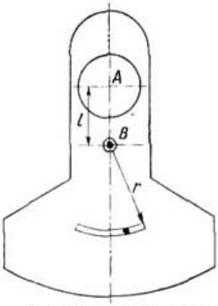
Para el problema 53.44.

Investigar las oscilaciones forzadas del volante del torsiógrafo

Respuesta: El ángulo de rotación relativa del volante es

$$\psi = \frac{\varphi_0\omega^2}{\frac{c}{J} - \omega^2}\operatorname{sen}\omega t.$$

53.45. Para la amortiguación de las oscilaciones del árbol cigüeñal de un motor de aviación en el contrapeso de dicho árbol se hace un canal en forma de arco de circunferencia de radio r, con su centro desplazado a una distancia $AB = l$ del eje de rotación. Por el canal puede moverse libremente un contrapeso adicional esquematizado en



Para el problema 53.45.

forma de punto material. La velocidad angular de rotación del árbol es ω.

Despreciando la influencia de la fuerza de gravedad, determinar la frecuencia de las oscilaciones pequeñas del contrapeso adicional.

Respuesta: $k=\omega\sqrt{\frac{l}{r}}$.

53.46. A una carga de peso P, que pende de un muelle de rigidez c, en el instante inicial se ha aplicado una fuerza constante F, cuya acción cesa al cabo de cierto tiempo τ.

Determinar el movimiento de la carga.

Respuesta: Cuando $0\leqslant t\leqslant\tau$

$$x=\frac{F}{c}\left[1-\cos\sqrt{\frac{cg}{P}}\,t\right];$$

Cuando $\tau\leqslant t$

$$x=\frac{F}{c}\left[\cos\sqrt{\frac{cg}{P}}\,(t-\tau)-\cos\sqrt{\frac{cg}{P}}\,t\right].$$

53.47. Determinar la máxima inclinación de la posición de equilibrio del sistema descrito en el problema anterior, en el caso de la acción de las fuerzas de diferente duración: 1) $\tau=0$, $\lim\limits_{\tau\to 0} E\tau=S$ (choque); 2) $\tau=\frac{T}{4}$; 3) $\tau=\frac{T}{2}$, donde T es el período de oscilaciones libres del sistema.

Respuesta: 1) $x_{\text{máx}}=\sqrt{\frac{g}{cP}}\,S$;

2) $x_{\text{máx}}=\sqrt{2}\,\frac{F}{c}=\sqrt{2}\,x_{\text{est}}$;

3) $x_{\text{máx}}=2\frac{F}{c}=2x_{\text{est}}$.

53.48. Hallar la ley del movimiento de un péndulo compuesto de un punto material que pende de un hilo inextensible de longitud l. El punto de suspensión del péndulo se mueve por la ley dada $\xi=\xi(t)$ por una recta horizontal.

Respuesta: El ángulo de inclinación del péndulo de la vertical φ varía de acuerdo con la ley

$$\varphi=c_1\operatorname{sen}kt+c_2\cos kt-\frac{\xi(t)}{l}+\frac{k}{l}\int_0^t\xi(\tau)\operatorname{sen}k(t-\tau)\,d\tau,$$

donde $k=\sqrt{\frac{g}{l}}$.

53.49. Sobre un punto material de peso P, colgado de un muelle de rigidez c, actúa la fuerza perturbadora dada por las condiciones:

$$F=0 \quad \text{cuando } t<0;$$
$$F=\frac{t}{\tau}F_0 \quad \text{siendo } 0\leqslant t\leqslant \tau;$$
$$F=F_0 \quad \text{para } t>\tau.$$

Determinar el movimiento del punto y hallar la amplitud de oscilaciones cuando $t>\tau$.

Respuesta: $x=\frac{F_0}{c}\left[1-\frac{2}{k\tau}\cos k\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\operatorname{sen}\frac{k\tau}{2}\right]$;

$$k=\sqrt{\frac{cg}{P}};\quad A=\frac{2F_0}{kc\tau}\operatorname{sen}\frac{k\tau}{2}.$$

53.50. Una carga P, suspendida de un resorte de rigidez c, está sometida a la acción de una fuerza perturbadora que varía de acuerdo con la ley $Q(t)=F\,|\operatorname{sen}\omega t\,|$.

Determinar las oscilaciones del sistema, que tienen una frecuencia igual a la de la fuerza perturbadora.

Respuesta: Para $0<t<\pi/\omega$

$$x=\frac{F_\omega}{mk(\omega^2-k^2)}\left[\operatorname{sen}kt+\operatorname{cotg}\frac{k\pi}{2\omega}\cos kt\right]-$$
$$-\frac{F}{m(\omega^2-k^2)}\operatorname{sen}\omega t;\quad k=\sqrt{\frac{cg}{P}}.$$

53.51. Determinar la velocidad angular crítica (respecto de las oscilaciones transversales) de un árbol ligero que lleva en su parte media un disco de peso P. Examinar los casos siguientes: 1) el árbol descansa por sus dos extremos sobre cojinetes largos (se puede considerar que los extremos están empotrados); 2) el árbol se apoya con uno de sus extremos sobre un cojinete largo (el extremo está empotrado) y con el otro, en un cojinete corto (el extremo está apoyado). La rigidez del árbol a la flexión es EJ, su longitud es l.

Respuesta: 1) $\omega_{cr}=\sqrt{\frac{192FJg}{Pl^3}}$; 2) $\omega_{cr}=\sqrt{\frac{768EJg}{7Pl^3}}$.

53.52. Determinar la velocidad crítica de rotación de un árbol ligero de longitud l, si el árbol descansa sobre dos cojinetes cortos, y su extremo saliente de longitud a porta un disco de peso P. La rigidez del árbol a la flexión es EJ.

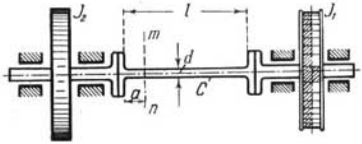
Respuesta: $\omega_{cr}=\sqrt{\frac{3EJg}{Pla^2}}$.

53.53. Calcular la velocidad crítica de rotación de un árbol pesado, uno de cuyos extremos descansa sobre un cojinete corto, y el otro, sobre un cojinete largo. La longitud del árbol es l, su rigidez a la flexión es EJ, el peso específico lineal es q.

Respuesta: $\omega_{cr}=15{,}4\sqrt{\frac{EJg}{ql^4}}$.

§ 54. OSCILACIONES PEQUEÑAS DE SISTEMAS CON VARIOS GRADOS DE LIBERTAD

54.1. Para estudiar experimentalmente el proceso de regulación de turbinas hidráulicas se ha construido un dispositivo compuesto de una turbina, cuyo rotor tiene un momento de inercia respecto al eje de rotación $J_1=5$ kgf cm s², un volante de momento de inercia $J_2=150$ kgf cm s² y de un árbol elástico C que une el rotor de la turbina con el volante; la longitud del árbol es $l=1552$ mm, su diámetro es $d=25{,}4$ mm; el módulo de cizallamiento del material del árbol es $G=880\,000$ kgf/cm².



Para el problema 54.1.

Despreciando la masa del árbol y la torsión de sus secciones gruesas hallar la sección mn del árbol que permanece inmóvil (sección nodal) durante las oscilaciones libres del sistema examinado, y calcular el periodo T de las oscilaciones libres del sistema.

Respuesta: $a=50$ mm; $T=0{,}09$ s.

54.2. Calcular la frecuencia de las oscilaciones libres de torsión del sistema compuesto de un árbol, uno de los extremos del cual está fijo y en el otro extremo y en su parte media están montados discos homogéneos. El momento de inercia de cada disco respecto al eje del árbol es J; la rigidez de torsión de los trozos del árbol es $c_1=c_2=c$. La masa del árbol se desprecia.

Respuesta: $k_1=0{,}62\sqrt{\frac{c}{J}}$; $k_2=1{,}62\sqrt{\frac{c}{J}}$.

54.3. Determinar la frecuencia de oscilaciones principales de torsión del sistema compuesto de un árbol y de tres discos idénticos encajados en éste. Dos discos están fijados en los extremos del árbol, el tercero, en su parte media. El momento de inercia de cada disco respecto al eje del árbol es J; la rigidez de los trozos del árbol a la torsión es $c_1=c_2=c$. La masa del árbol se desprecia.

Respuesta: $k_1=\sqrt{\frac{c}{J}}$; $k_2=\sqrt{3\frac{c}{J}}$.

54.4. Dos péndulos idénticos de longitud l y de masa m cada uno están ligados a la altura h por un resorte de rigidez c, cuyos extremos están fijados en las barras de los péndulos.

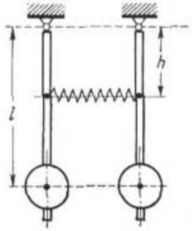
Determinar las oscilaciones pequeñas del sistema en el plano de la posición de equilibrio de los péndulos después de comunicar a uno de éstos una desviación a un ángulo α de su posición de equilibrio. Las velocidades iniciales de los péndulos son iguales a cero. Las masas de las barras y del resorte se desprecian.

Respuesta: $\varphi_1=\alpha\cos\frac{k_1+k_2}{2}t\cos\frac{k_2-k_1}{2}t$,

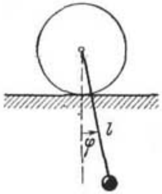
$$\varphi_2=\alpha\,\mathrm{sen}\,\frac{k_1+k_2}{2}t\,\mathrm{sen}\,\frac{k_2-k_1}{2}t,$$

donde φ_1 y φ_2 son los ángulos de desviación de los péndulos de la vertical y

$$k_1=\sqrt{\frac{g}{l}},\quad k_2=\sqrt{\frac{g}{l}+\frac{2ch^2}{ml^2}}.$$



Para el problema 54.4.



Para el problema 54.5.

54.5. Un disco de masa M puede rodar sin deslizamiento sobre un riel rectilíneo. Una barra imponderable de longitud l, en cuyo extremo se encuentra una carga puntiforme m, está articulada en el centro del disco.

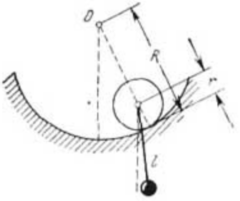
Hallar el período de oscilaciones pequeñas del péndulo.

Respuesta: $T=2\pi\sqrt{\frac{3M}{3M+2m}\frac{l}{g}}$.

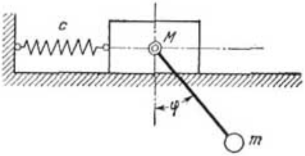
54.6. Sustituyendo en el problema anterior el riel rectilíneo por un arco de circunferencia de radio R, calcular las frecuencias de oscilaciones pequeñas del sistema examinado.

Respuesta: Las frecuencias principales son las raíces de la ecuación

$$\frac{3M}{3M+2m}k^4-\left[\frac{2(M+m)g}{(3M+2m)(R-r)}+\frac{g}{l}\right]k^2+$$
$$+\frac{2(M+m)g^2}{(3M+2m)(R-r)l}=0.$$



Para el problema 54.6.



Para el problema 54.7.

54.7. Un péndulo está compuesto de una corredera de masa M, que se desliza sin rozamiento sobre un plano horizontal, y de una bola de masa m unida con la corredera por una barra de longitud l que puede girar alrededor de un eje ligado con la corredera. La corredera está unida con un resorte de rigidez c, el otro extremo del cual está fijo.

Determinar las frecuencias de oscilaciones pequeñas del sistema.

Respuesta: Las frecuencias buscadas son las raíces de la ecuación:

$$k^4-\left[\frac{c}{M}+\frac{g}{l}\,\frac{M+m}{M}\right]k^2+\frac{c}{M}\frac{g}{l}=0.$$

54.8. Dos péndulos físicos idénticos están suspendidos de dos ejes paralelos horizontales, situados en un mismo plano horizontal y unidos por medio de un resorte elástico, cuya longitud en el estado no deformado es igual a la distancia entre los ejes de los péndulos.

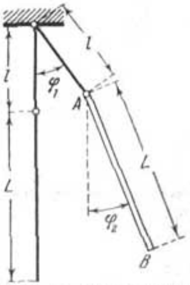
Despreciando las resistencias al movimiento y la masa del resorte, determinar las frecuencias y las relaciones de las amplitudes de las oscilaciones principales del sistema para pequeños ángulos de desviación de la posición de equlibrio. El peso de cada péndulo es P; su radio de inercia respecto al eje que pasa por el centro de gravedad paralelamente al eje de suspensión es ρ; la rigidez del resorte es c; las distancias del centro de gravedad del péndulo y del punto de fijación del resorte a los péndulos hasta el eje de suspensión son respectivamente iguales a l y h (véase el dibujo para el problema 54.4.).

Respuesta: $k_1^2=\frac{gl}{\rho^2+l^2}$; $k_2^2=\frac{(Pl+2ch^2)g}{P(\rho^2+l^2)}$;

$$\frac{A_1^{(1)}}{A_2^{(1)}}=+1;\qquad \frac{A_1^{(2)}}{A_2^{(2)}}=-1.$$

54.9. Una barra homogénea AB de longitud L está suspendida con ayuda de un hilo de longitud $l=0,5L$ de un punto fijo.

Despreciando la masa del hilo, determinar las frecuencias de oscilaciones principales del sistema y hallar la relación de las desviaciones de la barra y del hilo de la vertical para las oscilaciones principales primera y segunda.



Para el problema 54.9.

Respuesta: $k_1=0,677\sqrt{\frac{g}{l}}$; $k_2=2,558\sqrt{\frac{g}{l}}$; en la primera oscilación principal $\varphi_1=0,847\varphi_2$, en la segunda $\varphi_1=-1,180\varphi_2$, donde φ_1 y φ_2 son las amplitudes de los ángulos formados por el hilo y la barra con la vertical.

54.10. Suponiendo en el problema anterior que la longitud del hilo es muy grande en comparación con la de la barra y despreciando el cuadrado de la relación L/l, determinar la relación de la frecuencia inferior de oscilaciones libres del sistema a la frecuencia de oscilaciones del péndulo matemático de longitud l.

Respuesta: $1-\frac{1}{4}\frac{L}{l}$.

54.11. Suponiendo en el problema 54.9, que la longitud del hilo es muy pequeña en comparación con la de la barra y despreciando el cuadrado de la relación l/L, determinar la relación de la frecuencia inferior de oscilaciones libres del sistema a la frecuencia de oscilaciones de un péndulo físico, si el eje de rotación está situado en el extremo de la barra.

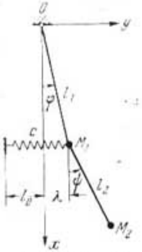
Respuesta: $1-\frac{9}{16}\frac{l}{L}$.

54.12. Determinar las frecuencias de oscilaciones principales de un péndulo matemático doble, si las masas de las cargas M_1 y M_2 son respectivamente iguales a m_1 y m_2, $OM_1=l_1$, $M_1M_2=l_2$, un resorte de masa despreciable está ligado con la carga M_1. La longitud del resorte en el estado no deformado es igual a l_0, la rigidez del resorte es c.

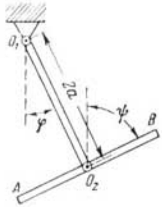
Respuesta: $k_{1,2}^2 = \dfrac{n_1^2 + n_2^2 \pm \sqrt{(n_1^2 - n_2^2)^2 + 4n_1^2 n_2^2 \gamma_{12}^2}}{2(1-\gamma_{12}^2)}$,

donde $n_1^2 = \dfrac{(m_1+m_2)g + cl_1}{(m_1+m_2)l_1}$, $n_2^2 = \dfrac{g}{l_2}$,

$\gamma_{12}^2 = \dfrac{m_2}{m_1+m_2}$.



Para el problema 54.12.



Para el problema 54.13.

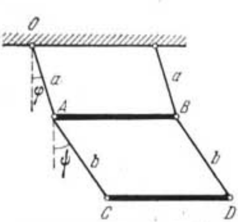
54.13. Un péndulo físico doble está compuesto de una barra rectilínea homogénea O_1O_2 de longitud $2a$ y de peso P_1, que gira alrededor de un eje horizontal fijo O_1, y de una barra rectilínea homogénea AB de peso P_2, articulada en su centro de gravedad con el extremo O_2 de la primera barra.

Determinar el movimiento del sistema, si en el instante inicial la barra O_1O_2 está desviada de la vertical a un ángulo φ_0, y la barra AB ocupa la posición vertical teniendo una velocidad angular inicial ω_0.

Respuesta: $\varphi = \varphi_0 \cos \sqrt{\dfrac{3P_1 + 2P_2}{4P_1 + 3P_2}\dfrac{g}{a}}\, t$;

$\psi = \omega_0 t$,

donde ψ es el ángulo formado por la barra AB con la dirección vertical.



Para el problema 54.14.

54.14. Una barra AB de peso P estaba suspendida por sus extremos A y B del techo por medio de dos hilos idénticos imponderables e inextensibles de longitud a. Una viga CD de peso Q está suspendida de esta barra AB por medio de dos hilos idénticos imponderables e inextensibles de longitud b.

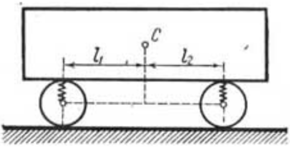
Suponiendo que las oscilaciones se efectúan en el plano vertical calcular las frecuencias de oscilaciones principales

Respuesta: $k_{1,2}^2 = \frac{n_1^2 + n_2^2 \pm \sqrt{(n_1^2 - n_2^2)^2 + 4n_1^2 n_2^2 \gamma_{12}^2}}{2(1 - \gamma_{12}^2)}$,

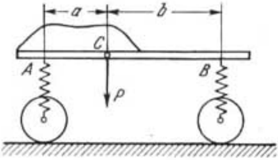
donde $n_1^2 = \frac{g}{a}$, $n_2^2 = \frac{g}{b}$, $\gamma_{12}^2 = \frac{Q}{P + Q}$.

54.15. Estudiar las oscilaciones de un vagón de ferrocarril en su plano vertical medio, si el peso de la parte suspendida del vagón es Q, las distancias del centro de gravedad de los planos verticales trazados por los ejes son $l_1 = l_2 = l$; el radio de inercia respecto al eje central paralelo a los ejes del vagón es ρ; la rigidez de los resortes para los dos ejes es idéntica: $c_1 = c_2 = c$.

Respuesta: $x = A \operatorname{sen}(k_1 t + \alpha)$, $\psi = B \operatorname{sen}(k_2 t + \beta)$, donde x es el desplazamiento vertical del centro de gravedad del vagón, ψ es el ángulo formado por el piso del vagón con el horizonte; A, B, α, β son constantes de integración; $k_1 = \sqrt{\frac{2cg}{Q}}$; $k_2 = \sqrt{\frac{2cgl^2}{Q\rho^2}}$.



Para el problema 54.15.



Para el problema 54.16.

54.16. Estudiar las oscilaciones libres pequeñas de una plata forma cargada de peso P que se apoya en los puntos A y B sobre dos resortes idénticos de rigidez c. El centro de gravedad C de la plataforma con la carga se encuentra sobre la recta AB; $AC = a$ y $CB = b$. La plataforma se ha sacado de su posición de equilibrio comunicándole a su centro de gravedad una velocidad inicial v_0 dirigida verticalmente hacia abajo sin desviación inicial. Despreciar las masas de los resortes y las fuerzas de rozamiento. El momento de inercia de la plataforma respecto al eje transversal horizontal que pasa por el centro de gravedad de la plataforma es igual a $J_C = 0{,}1\,(a^2 + b^2)\frac{P}{g}$. Las oscilaciones se efectúan en el plano vertical. Como coordenadas generalizadas tomar: y, la desviación del centro de gravedad de la posición de equilibrio hacia abajo, ψ, el ángulo de giro de la plataforma alrededor del centro de gravedad.

Respuesta: $y=\frac{v_0}{1-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}\left(\frac{1}{k_1}\operatorname{sen}k_1t-\frac{\alpha_1}{\alpha_2k_2}\operatorname{sen}k_2t\right)$,

$$\varphi=\frac{v_0\alpha_1}{1-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}\left(\frac{1}{k_1}\operatorname{sen}k_1t-\frac{1}{k_2}\operatorname{sen}k_2t\right),$$

$$k_{1,2}^2=\frac{6cg}{P}\left(1\pm\sqrt{1-0{,}278\frac{(a+b)^2}{a^2+b^2}}\right),$$

$$\alpha_1=\frac{2c-\frac{P}{g}k_1^2}{c(b-a)},\quad \alpha_2=\frac{2c-\frac{P}{g}k_2^2}{c(b-a)}.$$

54.17. La plataforma de una carretilla se apoya en los puntos A y B sobre dos resortes idénticos de rigidez c, la distancia entre los ejes de los resortes es $AB=l$, el centro de gravedad C de la plataforma está situado sobre la recta AB, que es el eje de simetría de la plataforma, a una distancia $AC=a=\frac{l}{3}$ del punto A (véase el dibujo para el problema 54.16). El radio de inercia de la plataforma respecto al eje que pasa por su centro de gravedad perpendicularmente a la recta AB y situado en el plano de la plataforma es igual a $0{,}2l$; el peso de la plataforma es Q.

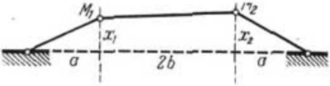
Hallar las oscilaciones pequeñas de la plataforma engendradas por un choque contra el centro de gravedad de la plataforma perpendicularmente a su plano. El impulso del choque es igual a S.

Respuesta: Sea z el desplazamiento vertical del centro de gravedad de la plataforma, φ su ángulo de giro alrededor del eje indicado en los datos del problema (ambas coordenadas se calculan a partir de la posición de equilibrio del centro de gravedad de la plataforma) hallamos:

$$z=\sqrt{\frac{g}{cQ}}S\left(0{,}738\operatorname{sen}1{,}330\sqrt{\frac{cg}{Q}}t+0{,}00496\times\right.$$
$$\left.\times\operatorname{sen}3{,}758\sqrt{\frac{cg}{Q}}t\right);$$
$$l\varphi=\sqrt{\frac{g}{cQ}}S\left(0{,}509\operatorname{sen}1{,}330\sqrt{\frac{cg}{Q}}t-0{,}180\times\right.$$
$$\left.\times\operatorname{sen}3{,}758\sqrt{\frac{cg}{Q}}t\right).$$

54.18. Dos puntos materiales idénticos M_1 y M_2 de peso Q cada uno están fijados simétricamente en un hilo extendido de longitud $2(a+b)$ a distancias iguales de sus extremos; la tensión del hilo es igual a p.

Determinar las frecuencias de oscilaciones principales y hallar las coordenadas principales.



Para el problema 54.18.

Respuesta: $k_1=\sqrt{\frac{pg}{Qa}}$, $k_2=\sqrt{\frac{pg}{Q}\left[\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right]}$.

Las coordenadas principales son: $\theta_1=\frac{1}{2}(x_1+x_2)$, $\theta_2=\frac{1}{2}(x_2-x_1)$.

54.19. Determinar las frecuencias de oscilaciones pequeñas de un punto material pesado que oscila alrededor de su posición de equilibrio sobre una superficie lisa, la parte cóncava de la cual está dirigida hacia arriba; los radios de curvatura principales de la superficie en el punto correspondiente a la posición de equilibrio son ρ_1 y ρ_2.

Respuesta: $k_1=\sqrt{\frac{g}{\rho_1}}$; $k_2=\sqrt{\frac{g}{\rho_2}}$.

54.20. Determinar las frecuencias de oscilaciones pequeñas de un punto material pesado alrededor de su posición de equilibrio que coincide con el punto más bajo de una superficie que gira con velocidad angular constante ω alrededor del eje vertical que pasa por este punto. Los radios de curvatura principales de la superficie en su punto más bajo son ρ_1 y ρ_2.

Respuesta: Las frecuencias de oscilaciones pequeñas son las raíces de la ecuación

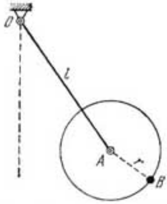
$$k^4-\left[2\omega^2+\frac{g}{\rho_1}+\frac{g}{\rho_2}\right]k^2+\left(\omega^2-\frac{g}{\rho_1}\right)\left(\omega^2-\frac{g}{\rho_2}\right)=0.$$

54.21. Un disco circular homogéneo de radio r y de masa M está articulado a una barra OA de longitud l que puede girar alrededor de un eje horizontal fijo. Un punto material B de masa m está fijado sobre la circunferencia del disco.

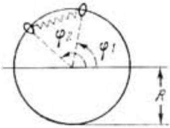
Determinar las frecuencias de oscilaciones libres del sistema. La masa de la barra se desprecia. El disco puede girar en el plano de oscilaciones de la barra OA.

Respuesta: Las frecuencias de oscilaciones libres son las raíces de la ecuación

$$k^4-\frac{M+m}{M+3m}\left[1+2\frac{m}{M}\frac{r+l}{r}\right]\frac{g}{l}k^2+\frac{2m(M+m)}{M(M+3m)}\frac{g^2}{lr}=0.$$



Para el problema 54.21.



Para el problema 54.22.

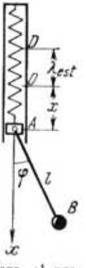
54.22. Dos anillos idénticos ligados por un resorte de rigidez c, cuya longitud en el estado no deformado es l_0, se han metido en una circunferencia de alambre de radio R, situada en el plano horizontal.

Determinar el movimiento de los anillos considerándolos como puntos materiales de masa m, si en el instante inicial la distancia entre ellos era igual a $l > l_0$ y la velocidad inicial era igual a cero.

Respuesta: $\varphi_1 = \beta\left(1 - \cos\sqrt{\frac{2c}{m}}\,t\right)$,

$$\varphi_2 = 2\alpha + \beta\left(1 + \cos\sqrt{\frac{2c}{m}}\,t\right),$$

$$\alpha = \arcsen\frac{l_0}{2R}, \quad \beta = \arcsen\frac{l - l_0}{2R}.$$



Para el problema 54.23.

54.23. Determinar las oscilaciones pequeñas de un péndulo matemático de longitud l y de peso P_2, suspendido de una corredera A de peso P_1 que se desplaza verticalmente y que está fijada a un resorte de rigidez c. La corredera sufre una resistencia a su movimiento proporcional a la velocidad (b es el coeficiente de proporcionalidad).

Hallar las condiciones, para las cuales en el caso cuando $b = 0$, las frecuencias principales del sistema examinado son iguales entre sí.

Respuesta: 1) $x = A_1 e^{-ht}\operatorname{sen}\left(\sqrt{k_1^2 - h^2}\,t + \varepsilon_1\right)$, $\varphi = A_2 \operatorname{sen}(k_2 t + \varepsilon_2)$, donde A_1, A_2, ε_1, ε_2 son constantes de integración,

$$h = \frac{bg}{2(P_1 + P_2)}, \quad k_1 = \sqrt{\frac{cg}{P_1 + P_2}}, \quad k_2 = \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

2) Las frecuencias principales serán iguales (para $b = 0$), si $c = \frac{P_1 + P_2}{l}$.

54.24. Dos barras rígidas idénticas de longitud R tienen el mismo punto de suspensión O. Las barras pueden girar independientemente una de la otra en el plano vertical alrededor del punto de suspensión. Dos cargas idénticas A y B de peso P cada una, unidas por un resorte de rigidez c, están fijadas en los extremos de las barras. La longitud del resorte en el estado no deformado es igual a l_0.

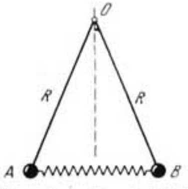
Despreciando el peso de las barras, hallar la ecuación para determinar las frecuencias principales de oscilaciones alrededor de la posición de equilibrio estable de las cargas.

Respuesta: $k^4-(n_1^2+n_2^2)k^2+n_1^2n_2^2-\gamma_{12}^2=0;$

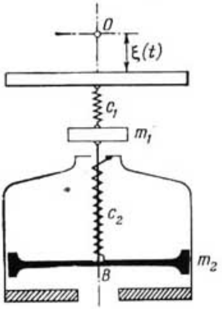
$$n_1^2=n_2^2=\frac{1}{2}\frac{g}{R}\frac{1+\cos^2\alpha}{\cos\alpha}+\frac{gc}{P}\cos^2\alpha,$$

$$\gamma_{12}^2=\frac{lg^2}{P^2R^4}\left(cR^2\cos^2\alpha+\frac{PR}{2}\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos\alpha}\right)^2,$$

$\alpha=\operatorname{arcsen}\frac{l}{2R}$, l se halla de la ecuación $l_0=$ $=l\left[1+\frac{P}{c\sqrt{4R^2-l^2}}\right]$.



Para el problema 54.24.



Para el problema 54.25.

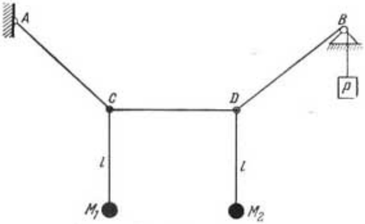
54.25. Un sistema mecánico, compuesto de una masa m_1 unida rígidamente en el punto B con el pistón de un amortiguador, está suspendido por medio de un resorte de rigidez c_1 de una plataforma que se desplaza de acuerdo con la ley dada $\xi=\xi(t)$. La cámara del amortiguador de masa m_2 se apoya en un resorte de rigidez c_2, cuyo extremo opuesto está fijado en el pistón. El rozamiento viscoso en el amortiguador es proporcional a la velocidad relativa del pistón y de la cámara; β es el coeficiente de resistencia.

Escribir la ecuación de movimiento del sistema.

Respuesta: $m_1\ddot{x}_1+\beta\dot{x}_1-\beta\dot{x}_2+(c_1+c_2)x_1-c_2x_2=c_1\xi(t)$;

$$m_2\ddot{x}_2-\beta\dot{x}_1+\beta\dot{x}_2-c_2x_1+c_2x_2=0.$$

54.26. Un alambre flexible elástico está tendido entre dos apoyos fijos A y B. La tensión se realiza por medio de una carga P colgada del extremo pendiente del alambre. Dos péndulos M_1 y M_2 que pueden oscilar en los planos perpendiculares al plano del dibujo, están suspendidos de los puntos C y D del alambre. Las distancias $AC=CD=DB=a$. Las masas de los hilos y del alambre se desprecian. Considerar cada péndulo como un punto material de masa m suspendido en un hilo de longitud l.



Para el problema 54.26.

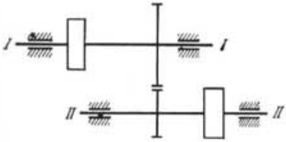
Determinar las frecuencias de oscilaciones libres pequeñas del sistema.

Indicación. Suponer que la relación $\frac{a}{l}\frac{mg}{P}$ es pequeña.

Respuesta: $k_1=\sqrt{\frac{g}{l}\left(1-\frac{a}{l}\frac{mg}{P}\right)}$;

$$k_2=\sqrt{\frac{g}{l}\left(1-\frac{1}{3}\frac{a}{l}\frac{mg}{P}\right)}.$$

54.27. Determinar las frecuencias de oscilaciones libres de torsión del sistema compuesto de dos árboles unidos mediante un engranaje. Los momentos de inercia de las masas encajadas sobre los árboles, y los momentos de inercia de los piñones respecto a los ejes de los árboles son $J_1=87\,500$ kgfcms², $J_2=56\,000$ kgfcms², $i_1=302$ kgfcms², $i_2=10{,}5$ kgfcms², la relación de transmisión es $k=z_1/z_2=5$, las rigideces de los árboles a la torsión son $c_1=316\cdot10^6$ kgfcm, $c_2=115\cdot10^6$ kgfcm. Las masas de los árboles se desprecian.



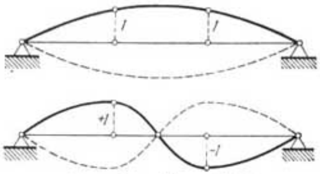
Para el problema 54.27.

Respuesta: $k_1=54{,}8\ \mathrm{s}^{-1}$; $k_2=2{,}38\cdot10^3\ \mathrm{s}^{-1}$.

54.28. Despreciando las masas de los piñones, determinar la frecuencia de oscilaciones libres de torsión del sistema descrito en el problema anterior.

Respuesta: $k = 58{,}7\ \mathrm{s}^{-1}$.

54.29. Hallar las frecuencias y las formas de las oscilaciones transversales principales de una viga de longitud l que descansa libremente sobre dos apoyos y está cargada en los puntos $x = \frac{1}{3} l$ y $x = \frac{2}{3} l$ por dos cargas iguales de peso Q. El momento de inercia



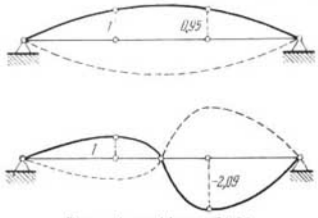
Para el problema 54.29.

de la sección transversal de la viga es J, el módulo de elasticidad es E. Despreciar la masa de la viga.

Respuesta: $k_1 = 5{,}69 \sqrt{\frac{EJg}{Ql^3}}$; $k_2 = 22{,}04 \sqrt{\frac{EJg}{Ql^3}}$;

$\frac{A_1^{(1)}}{A_2^{(1)}} = 1$; $\frac{A_1^{(2)}}{A_2^{(2)}} = -1$; las formas de las oscilaciones principales están indicadas en el dibujo.

54.30. Hallar las frecuencias y las formas de las oscilaciones principales transversales de una viga de longitud l apoyada en sus

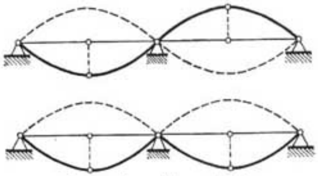


Para el problema 54.30.

extremos y que porta dos cargas $Q_1 = Q$ y $Q_2 = 0{,}5Q$ equidistantes de los apoyos a $\frac{1}{3} l$. Despreciar la masa de la viga.

Respuesta: $k_1 = 6{,}55\sqrt{\dfrac{EJg}{Ql^3}}$; $\quad k_2 = 27{,}2\sqrt{\dfrac{EJg}{Ql^3}}$;

$\dfrac{A_2^{(1)}}{A_1^{(1)}} = 0{,}95$; $\quad \dfrac{A_2^{(2)}}{A_1^{(2)}} = -2{,}09$; las formas de las oscilaciones principales están indicadas en el dibujo.



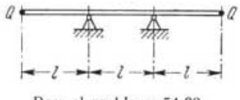
Para el problema 54.31.

54.31. Hallar las frecuencias y las formas de las oscilaciones principales de una viga de dos claros que soporta en la parte media de cada claro una carga; los pesos de las cargas y las longitudes de cada claro son iguales: $Q_1 = Q_2 = Q$; $l_1 = l_2 = l$. La masa de la viga se desprecia.

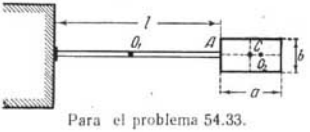
Respuesta: $k_1 = 6{,}93\sqrt{\dfrac{EJg}{Ql^3}}$; $\quad k_2 = 10{,}46\sqrt{\dfrac{EJg}{Ql^3}}$; las formas de las oscilaciones principales se muestran en el dibujo.

54.32. Hallar las frecuencias y las formas de las oscilaciones principales de dos cargas idénticas Q fijadas en los extremos de una viga de consola horizontal a iguales distancias de sus apoyos. La viga de longitud $3l$ descansa libremente sobre dos apoyos, la distancia entre éstos es igual a l. El momento de inercia de la sección transversal de la viga es J; el módulo de Young del material de la viga es E. Despreciar la masa de la viga.

Respuesta: $k_1 = \sqrt{\dfrac{6}{5}\dfrac{EJg}{Ql^3}}$; $\quad k_2 = \sqrt{2\dfrac{EJg}{Ql^3}}$.



Para el problema 54.32.



Para el problema 54.33.

54.33. Una placa homogénea rectangular de masa m está fijada en el extremo A de una viga de longitud l; otro extremo de la viga está encastrado. El sistema se encuentra en un plano horizontal y en éste efectúa oscilaciones libres alrededor de la pos ició de equilibrio.

Determinar las frecuencias y las formas de estas oscilaciones Las dimensiones de la placa son: $a=0,2l$, $b=0,1l$. Despreciar la masa de la viga.

Indicación. La fuerza Q y el momento M que deben ser aplicados al extremo A para provocar en este punto una flexión f y un giro φ de la tangente al eje curvado de la viga se definen por las fórmulas

$$f=pQ+sM, \quad \varphi=sQ+qM,$$

en el caso examinado de una viga homogénea encastrada por uno de sus extremos $p=\frac{l^3}{3EJ}$, $q=\frac{l}{EJ}$, $s=\frac{l^2}{2EJ}$.

Respuesta: Las frecuencias de las oscilaciones principales son respectivamente iguales a

$$0,804\sqrt{\frac{3EJ}{ml^3}}; \quad 20,7\sqrt{\frac{3EJ}{ml^3}};$$

la primera oscilación principal puede ser considerada como una oscilación de giro alrededor del punto O_1 situado sobre el eje de la viga a la izquierda del punto A a una distancia $O_1A=0,612\,l$; la segunda, como una oscilación de giro alrededor del punto O_2 situado sobre la prolongación del eje de la viga a una distancia $O_2A=0,106\,l$ a la derecha del punto A.

54.34. Un momento constante de rotación M se ha aplicado bruscamente al primero de los dos discos inicialmente inmóviles unidos por un árbol elástico de rigidez c; los momentos de inercia de los discos son J.

Despreciando la masa del árbol, determinar el movimiento ulterior del sistema.

Respuesta: $\varphi_1=\frac{M}{4l}t^2+\frac{M}{4c}\left(1-\cos\sqrt{2\frac{c}{J}}t\right)$;

$$\varphi_2=\frac{M}{4J}t^2-\frac{M}{4c}\left(1-\cos\sqrt{2\frac{c}{J}}t\right).$$

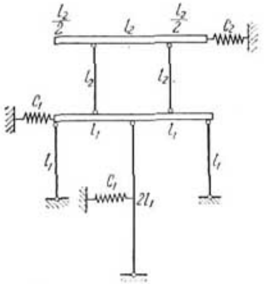
54.35. Un sistema de barras articuladas de dos filas se retiene en la posición vertical por tres resortes (véase el dibujo). Las barras son absolutamente rígidas y homogéneas; el peso de una longitud l es igual a G.

Suponiendo que los coeficientes de rigidez de los resortes son iguales a $c_1=c_2=\frac{10G}{l}$, determinar la estabilidad del equilibrio del sistema, así como las frecuencias y las formas f_1 y f_2 de las oscilaciones principales del sistema. Despreciar las masas de los resortes; $l_1=l_2=l$.

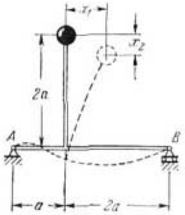
Respuesta: El equilibrio es estable;

$$k_1 = 0{,}412\sqrt{\frac{g}{l}}\,; \quad k_2 = 1{,}673\sqrt{\frac{g}{l}}\,;$$

$$f_1 = -1{,}455, \quad f_2 = 3{,}495.$$



Para el problema 54.35.



Para el problema 54.36.

54.36. Una carga de peso G está fijada en el vértice de un montante unido rígidamente con una viga AB que descansa libremente sobre dos apoyos.

Suponiendo que el momento de inercia de la sección transversal es J, y los módulos de elasticidad E de la viga y del montante son idénticos, determinar las frecuencias de las oscilaciones principales de flexión del sistema. Despreciar los pesos de la viga y del montante.

Respuesta: $k_1 = 0{,}497\sqrt{\frac{EJ}{Ga^3}g}$; $\quad k_2 = 1{,}602\sqrt{\frac{EJ}{Ga^3}g}$.

54.37. El cimiento de una máquina de peso $P_1 = 100$ tf instalado sobre un suelo elástico, efectúa oscilaciones forzadas verticales bajo la acción de una fuerza perturbadora vertical que varía según la ley $F = 10 \operatorname{sen} \omega t$. Para eliminar las oscilaciones de resonancia, que aparecen a la velocidad angular del árbol de la máquina $\omega = 100\ \mathrm{s}^{-1}$, en el cimiento se instala sobre resortes elásticos un amortiguador en forma de un bastidor pesado.

Calcular el peso P_2 del bastidor y la rigidez total c_2 de los resortes del amortiguador de tal manera que la amplitud de las oscilaciones forzadas del cimiento para dicha velocidad del árbol se reduzca a cero y la amplitud de oscilaciones del amortiguador no sea mayor que $A = 2$ mm.

Respuesta: $P_2 = 4{,}9$ tf; $c_2 = 5 \cdot 10^3$ tf/m.

54.38. Determinar las ecuaciones de las oscilaciones forzadas del sistema de discos descrito en el problema 54.2, cuando el disco medio está sometido a un momento perturbador $M = M_0 \operatorname{sen} pt$.

Respuesta: $\varphi_1 = \frac{M_0 (c - Jp^2)}{J^2 (p^2 - k_1^2)(p^2 - k_2^2)} \operatorname{sen} pt$,

$$\varphi_2 = \frac{M_0 c}{J^2 (p^2 - k_1^2)(p^2 - k_2^2)} \operatorname{sen} pt,$$

donde k_1 y k_2 son las frecuencias de las oscilaciones principales del sistema.

54.39. Un motor eléctrico de peso Q_1 está fijado sobre un cimiento elástico de hormigón (en forma de un paralelepípedo continuo) de peso Q_2 y rigidez c_2, instalado sobre un suelo rígido. El rotor de peso P va encajado sobre un árbol elástico horizontal, cuyo coeficiente de rigidez a la flexión es c_1; la excentricidad del rotor respecto al árbol es r; la velocidad angular del árbol es ω.

Determinar las oscilaciones forzadas verticales del estator del motor eléctrico. Tener en cuenta la masa del cimiento agregando un tercio de su masa a la masa del estator.

Respuesta:

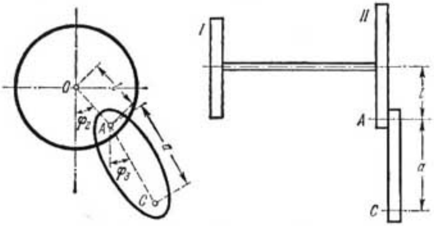
$$y = \frac{c_1 P g r \omega^2 \operatorname{sen} \omega t}{c_1 c_2 g^2 - \left[(c_1 + c_2) P + c_1 \left(Q_1 + \frac{1}{3} Q_2 \right) \right] g\omega^2 + P \left(Q_1 + \frac{1}{3} Q_2 \right) \omega^4},$$

donde y es la desviación del estator de la posición de equilibrio.

54.40. Una fuerza $F = F_0 \operatorname{sen} pt$ (F_0 y p son constantes) está aplicada al punto A de la viga AB (véase el problema 54.14). Esta fuerza forma siempre con el hilo OA un ángulo recto y está situada en el plano del movimiento de la viga. ¿Cúal debe ser la longitud b de los hilos mediante los cuales está suspendida la viga CD para que la amplitud de oscilaciones forzadas de la viga AB sea igual a cero?

Respuesta: $b = \frac{g}{p^2}$.

54.41. Para absorber las oscilaciones torsionales se fija en una de las masas oscilantes del sistema un péndulo. En el dibujo se muestra esquemáticamente el sistema compuesto de dos masas I y II que giran con una velocidad angular constante ω. El péndulo está fijado en la segunda masa. Los momentos de inercia de las masas respecto al eje de rotación son J_1 y J_2; el momento de inercia del péndulo respecto al eje paralelo al eje de rotación del sistema y que pasa por el centro de gravedad del péndulo es J_3. La distancia entre el eje de rotación del sistema y el eje de suspensión del péndulo es $OA = l$; la distancia entre el eje de suspensión y el eje paralelo que pasa por el centro de gravedad del péndulo es $AC=a$; la masa del péndulo es m. El coeficiente de elasticidad (rigidez a la torsión) del trozo del árbol entre las masas es c_1. A la segunda masa está aplicado un momento exterior $M=M_0$ sen ωt.



Para el problema 54.41.

Escribir las ecuaciones diferenciales del movimiento de ambas masas del sistema y del péndulo. Al plantear la expresión de la energía potencial del sistema, despreciar la energía potencial del péndulo en el campo de fuerza de gravedad.

Respuesta:
$$J_1\ddot\varphi_1+c_1(\varphi_1-\varphi_2)=0;$$
$$(J_2+ml^2)\ddot\varphi_2+mal\ddot\varphi_3\cos(\varphi_2-\varphi_3)+$$
$$+mal\dot\varphi_3^2\,\mathrm{sen}\,(\varphi_2-\varphi_3)+c_1(\varphi_2-\varphi_1)=M_0\,\mathrm{sen}\,\omega t;$$
$$(J_3+ma^2)\ddot\varphi_3+mal\ddot\varphi_2\cos(\varphi_2-\varphi_3)-$$
$$-mal\dot\varphi_2^2\,\mathrm{sen}\,(\varphi_2-\varphi_3)=0.$$

54.42. Los cuatro ángulos inferiores de un recipiente de forma cúbica se apoyan en cuatro resortes idénticos, la longitud del lado del cubo es $2a$. Las rigideces de los resortes en las direcciones de los ejes paralelos a los lados del cubo son iguales a c_x, c_y, c_z; el momento de inercia del cubo respecto a los ejes centrales principales es J.

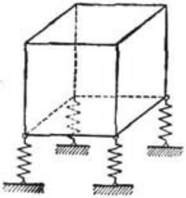
Escribir las ecuaciones de las oscilaciones pequeñas y determinar sus frecuencias en el caso cuando $c_x=c_y$. El peso del recipiente es igual a P.

Respuesta:
$$m\ddot x+c_xx-c_xa\varphi_2=0,$$
$$m\ddot y+c_yy+c_ya\varphi_1=0,$$
$$m\ddot z+c_zz=0,$$
$$J\ddot\varphi_1+c_yay+c_ya^2\varphi_1+c_za^2\varphi_1=0,$$
$$J\ddot\varphi_2+c_xa^2\varphi_2-c_xax+c_za^2\varphi_2=0,$$
$$J\ddot\varphi_3+c_xa^2\varphi_3+c_ya^2\varphi_3=0,$$
donde x, y, z son las coordenadas del centro del

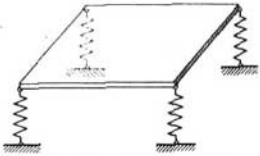
cubo, φ_1, φ_2, φ_3 son los ángulos de giro del cubo respecto a los ejes coordenados. Si $c_x = c_y$, entonces

$$k_z = \sqrt{\frac{c_z g}{P}}, \quad k_{\varphi 3} = \sqrt{\frac{2c_x a^2}{J}},$$

$$k^4 - \frac{m(c_x + c_z)a^2 + c_z J}{mJ} k^2 + c_x c_z \frac{a^2}{mJ} = 0.$$



Para el problema 54.42.

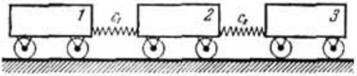


Para el problema 54.43.

54.43. Los cuatro ángulos de una placa homogénea rectangular horizontal de lados a y b están apoyados en cuatro resortes idénticos de rigidez c; la masa de la placa es M.

Determinar las frecuencias de oscilaciones libres.

Respuesta: $k_1 = \sqrt{4\frac{c}{M}}$; $\quad k_2 = k_3 = \sqrt{12\frac{c}{M}}$.



Para el problema 54.44.

54.44. Tres vagones cargados de pesos Q_1, Q_2 y Q_3 están enganchados entre sí. Las rigideces de los enganches son iguales a c_1 y c_2. En el instante inicial dos vagones están en la posición de equilibrio y el vagón derecho extremo está desviado de la posición de equilibrio a x_0.

Hallar las frecuencias de oscilaciones principales del sistema.

Respuesta: $k_1 = 0$, k_2 y k_3 son las raíces de la ecuación

$$k^4 - g\left[\frac{c_1}{Q_1} + \frac{c_1 + c_2}{Q_2} + \frac{c_2}{Q_3}\right]k^2 + g^2\left[\frac{c_1 c_2}{Q_1 Q_2} + \right.$$

$$\left. + \frac{c_2 c_1}{Q_2 Q_3} + \frac{c_1 c_2}{Q_3 Q_1}\right] = 0.$$

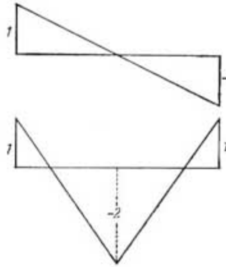
54.45. Para los datos del problema anterior, hallar las ecuaciones de movimiento de los vagones y construir las formas de las oscilaciones principales para el caso cuando los vagones son de igual peso $Q_1=Q_2=Q_3=Q$ y están unidos por medio de enganches de igual rigidez $c_1=c_2=c$.

Respuesta: $x_1=\frac{x_0}{3}-\frac{x_0}{2}\cos k_2 t+\frac{x_0}{6}\cos k_3 t$, $x_2=\frac{x_0}{3}-\frac{x_0}{3}\cos k_3 t$,

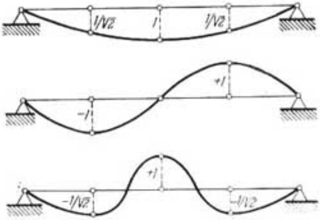
$$x_3=\frac{x_0}{3}+\frac{x_0}{2}\cos k_2 t+\frac{x_0}{6}\cos k_3 t,\ k_2=\sqrt{\frac{cg}{Q}},$$

$$k_3=\sqrt{3\frac{cg}{Q}}.$$

Las formas de las oscilaciones principales están mostradas en el dibujo.



Para el problema 54.45.



Para el problema 54.46.

54.46. Hallar las frecuencias y las formas de las oscilaciones principales del sistema compuesto de tres masas idénticas m fijadas sobre una viga a distancias iguales entre sí y de los apoyos. La viga descansa libremente sobre los apoyos, su longitud es l, el momento de inercia de su sección transversal es J, el módulo de Young del material de la viga es E.

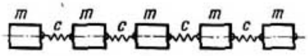
Respuesta: $k_1=4{,}93\sqrt{\frac{EJ}{ml^3}}$; $k_2=19{,}6\sqrt{\frac{EJ}{ml^3}}$;

$$k_3=41{,}8\sqrt{\frac{EJ}{ml^3}}.$$

Las formas de las oscilaciones principales están indicadas en el dibujo.

54.47. Un sistema de n masas idénticas m, ligadas por medio de resortes de rigidez c, forma un filtro mecánico para las oscilaciones longitudinales.

Conociendo la ley del movimiento de la masa izquierda $x=x_0$ sen ωt, mostrar que el sistema es un filtro de frecuencias bajas, es decir, que después de pasar la frecuencia ω por un límite



Para el problema 54.47.

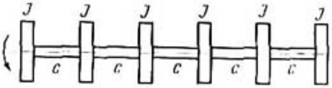
determinado, las amplitudes de oscilaciones forzadas de las masas por separado varían según el número de la masa de acuerdo con la ley exponencial y antes de pasar el límite, de acuerdo con la ley harmónica.

Respuesta: El filtro deja pasar las oscilaciones de frecuencias

$$0 < \omega < 2\sqrt{\frac{c}{m}}.$$

54.48. Un filtro de oscilaciones torsionales se esquematiza en forma de un árbol largo con discos encajados sobre éste.

Conociendo la ley del movimiento del disco izquierdo en forma de $\vartheta = \vartheta_0 \operatorname{sen} \omega t$, determinar las oscilaciones forzadas del sistema y calcular las amplitudes de oscilaciones de los discos por separado.



Para el problema 54.48.

Los momentos de inercia de los discos son J, las rigideces de los trozos del árbol entre los discos son idénticos e iguales a c.

Estudiar la solución obtenida y mostrar que el sistema es un filtro de bajas frecuencias.

Respuesta: $\vartheta_k = (\vartheta_0 \cos \mu k + c_1 \operatorname{sen} \mu k) \operatorname{sen} \omega t$, $\operatorname{sen} \frac{\mu}{2} = \frac{\omega}{2}\sqrt{\frac{J}{c}}$,

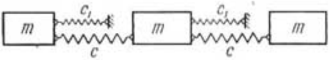
donde ϑ_k es el ángulo de giro del k-ésimo disco, c_1 es una constante que se determina de la condición límite en el otro extremo del árbol; el número del primer disco es cero; la frecuencia ω debe estar comprendida entre los límites

$$0 < \omega < 2\sqrt{\frac{c}{J}}.$$

54.49. Un sistema mecánico, que forma un filtro de banda para las oscilaciones longitudinales está compuesto de elementos, cada uno de los cuales está constituido por una masa m ligada con la masa del elemento siguiente por un resorte de rigidez c. Paralelamente a este resorte, con la masa va unido otro resorte de rigidez c_1 que une la masa m con un punto fijo.

La ley de oscilaciones longitudinales de la masa izquierda es $x=x_0 \operatorname{sen} \omega t$.

Mostrar que para los valores de ω que se encuentran en límites determinados, las amplitudes de oscilaciones de las masas aisla-

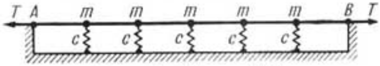


Para el problema 54.49.

das varían con la distancia según una ley harmónica. Hallar las frecuencias límites correspondientes.

Respuesta: La banda pasante se determina por la desigualdad

$$\sqrt{\frac{c_1}{m}} < \omega < \sqrt{\frac{c_1+4c}{m}}.$$



Para el problema 54.50.

54.50. Un sistema compuesto de un gran número de masas m, encajadas a una distancia a una de la otra sobre una cuerda AB, tendida con un esfuerzo T, y sostenidas por resortes de rigidez c, es un filtro de banda mecánico de oscilaciones transversales.

Calcular las frecuencias correspondientes a los límites de la banda pasante.

Respuesta: La banda pasante se define por la desigualdad

$$\sqrt{\frac{c}{m}} < \omega < \sqrt{\frac{c}{m}+\frac{4T}{ma}}.$$

54.51. Un hilo de longitud nl está suspendido verticalmente por un extremo y cargado de n puntos materiales de masas m a iguales distancias a uno del otro.

Escribir las ecuaciones de movimiento. Calcular para $n=3$ las frecuencias de oscilaciones transversales del sistema.

Respuesta: Las ecuaciones de movimiento son

$$\ddot{x}_k=\frac{g}{l}\left[(n-k)x_{k-1}-(2n-2k+1)x_k+(n-k+1)\times\right.$$
$$\left.\times x_{k+1}\right],$$

donde x_k es el desplazamiento transversal de la k-ésima partícula (la numeración se efectúa por arriba);

$$k_1=0{,}646\sqrt{\frac{g}{l}};\quad k_2=1{,}515\sqrt{\frac{g}{l}};$$

$$k_3=2{,}505\sqrt{\frac{g}{l}}.$$

54.52. Determinar las frecuencias de oscilaciones transversales libres de un hilo extendido con los extremos fijos que soporta n masas m distantes entre sí a l. La tensión del hilo es P.

Respuesta: $k=2\sqrt{\frac{P}{ml}}\operatorname{sen}\frac{\pi s}{2n}$; $\quad 1\leqslant s\leqslant n-1$.

§ 55. ESTABILIDAD DEL MOVIMIENTO

55.1. Un péndulo doble, formado por dos barras de longitud l y puntos materiales de masa m, está suspendido de un eje horizontal que gira con una velocidad angular constante ω alrededor del eje z.

Estudiar la estabilidad de la posición vertical de equilibrio del péndulo. Despreciar la masa de las barras.

Respuesta: Para $\frac{g}{l\omega^2}>1+\sqrt{\frac{1}{2}}$ la posición vertical de equilibrio del péndulo es estable.

55.2. Una bola ponderable se encuentra en un tubo liso doblado según la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ que gira alrededor del eje vertical Oz con una velocidad angular constante ω (el eje Oz está dirigido hacia abajo).

Determinar las posiciones de equilibrio relativo de la bola y estudiar su estabilidad.

Respuesta: Para $\omega^2\leqslant\frac{gc}{a^2}$ existen dos posiciones de equilibrio: a) $x=0$, $z=c$ (estable); b) $x=0$, $z=-c$ (inestable).

Para $\omega^2>\frac{gc}{a^2}$ existen tres posiciones de equilibrio: a) $x=0$, $z=+c$ (inestable); b) $x=0$, $z=-c$ (inestable); c) $z=\frac{gc^2}{\omega^2a^2}$ (estable).

55.3. Una bola ponderable se encuentra en un tubo liso doblado según la parábola $x^2=2pz$ y que gira con una velocidad angular constante ω alrededor del eje Oz. (El sentido positivo del eje Oz es de abajo hacia arriba.)

Determinar la posición de equilibrio relativo de la bola y estudiar su estabilidad.

Respuesta: Existe una sola posición de equilibrio $z=0$; ésta es estable para $\omega^2<g/p$ e inestable para $\omega^2>g/p$; para $\omega^2=g/p$ el equilibrio es indiferente.

55.4. Un punto material puede desplazarse por una curva plana lisa que gira alrededor del eje vertical con una velocidad angular ω. La energía potencial $V(s)$ del punto está dada y depende solamente de su posición que se determina por el arco s calculado a lo largo de la curva; $r(s)$ es la distancia del punto al eje de rotación.

Determinar la frecuencia de oscilaciones pequeñas del punto alrededor de su posición de equilibrio relativa.

Respuesta: $k^2=\frac{1}{m}\left(\frac{d^2V}{ds^2}-\frac{d}{ds}\left[mr\frac{dr}{ds}\right]\omega^2\right)_{s=s_0}$,

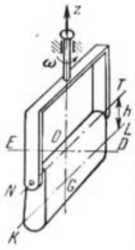
donde s_0 se determina de la ecuación

$$\left(\frac{dV}{ds}\right)_{s=s_0}=\omega^2\left(mr\frac{dr}{ds}\right)_{s=s_0}.$$

55.5. Un punto material de masa m describe una circunferencia de radio r_0 bajo la acción de una fuerza central de atracción proporcional al enésimo grado de la distancia: $F=ar^n$.

Hallar las condiciones, al cumplir las cuales la trayectoria del movimiento perturbado es próxima a la circunferencia inicial.

Respuesta: Para $n<-3$ el movimiento es inestable, para $n>-3$ éste es estable.



Para el problema 55,6.

55.6. Un cuerpo sólido oscila libremente alrededor del eje horizontal NT que gira alrededor del eje vertical Oz con una velocidad angular ω. El punto G es el centro de inercia del cuerpo; el plano NTG es el plano de simetría, el eje OG es el eje principal de inercia. El eje KL es paralelo a NT, el eje ED pasa por el punto O y es perpendicular a NT y OG. Los momentos de inercia del cuerpo respecto a los ejes OG, KL y ED son respectivamente iguales a C, A y B; h es la longitud del segmento OG; M es la masa del cuerpo.

Determinar las posiciones de equilibrio relativo posibles y estudiar su estabilidad.

Respuesta: A las posiciones de equilibrio relativo posibles responden los valores siguientes del ángulo de desviación de la línea OG del eje Oz:

a) $\varphi=0$ $\Big($estable si $B<C$; para $B>C$ es estable, si $\omega^2\angle\frac{Mgh}{B-C}$, e inestable para $\omega^2>\frac{Mgh}{B-C}\Big)$;

b) $\varphi=\pi$ inestable si $B>C$; para $B<C$ es estable, si $\omega^2>\frac{Mgh}{C-B}$, e inestable para $\omega^2<\frac{Mgh}{C-B}\Big)$;

c) $\varphi=\arccos\frac{Mgh}{(B-C)\omega^2}$ $\Big($existe si $\omega^2>\frac{Mgh}{|B-C|}$; es estable para $B>C$ e inestable para $B<C\Big)$.

55.7. Para los datos del problema 48.29, estudiar los movimientos pequeños del sistema cerca de la posición de equilibrio $\alpha=0$, $\varphi=\frac{\pi}{2}$ y aclarar si esta posición de equilibrio es estable o no.

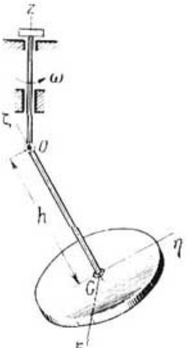
Respuesta: La posición de equilibrio $\alpha=0$, $\varphi=\frac{\pi}{2}$ es inestable.

55.8. Determinar las posiciones de equilibrio relativo de un péndulo suspendido, con ayuda de una articulación universal O, de un eje vertical que gira con una velocidad angular constante ω; el péndulo es simétrico respecto a su eje longitudinal; A y C son sus momentos de inercia respecto a los ejes principales centrales de inercia ξ, η y ζ; h es la distancia del centro de gravedad del péndulo a la articulación. Estudiar la estabilidad de las posiciones de equilibrio del péndulo y determinar el período de oscilaciones alrededor de la posición media de equilibrio.

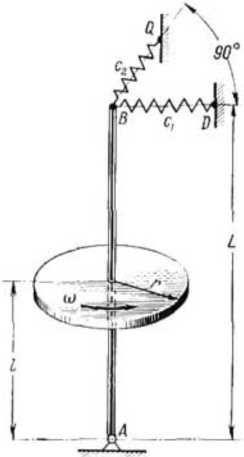
Respuesta: Las posiciones de equilibrio y su estabilidad se determinan por las fórmulas dadas en la respuesta del problema 55.6 (en éstas hay que hacer $B=A+Mh^2$). El período de oscilaciones

$$T=2\pi\omega\sqrt{\frac{(A+Mh^2)(A+Mh^2-C)}{(A+Mh^2-C)^2\omega^4-M^2g^2h^2}}.$$

55.9. El eje vertical de simetría de un disco fino circular homogéneo de radio r y de peso Q puede girar libremente alrededor



Para el problema 55.8.



Para el problema 55.9.

del punto A. Este eje se retiene en el punto B por dos resortes. Los ejes de estos resortes son horizontales y mutuamente perpendiculares, sus rigideces son respectivamente iguales a c_1 y c_2, $c_2 > c_1$. Los resortes están fijados en el eje del disco a una distancia L del apoyo inferior. La distancia del disco al apoyo inferior es l.

Determinar la velocidad angular ω que debe ser comunicada al disco para asegurar la estabilidad de rotación.

Respuesta: Para $Ql < c_1L^2$ el sistema es estable independientemente de la velocidad angular; para $Ql > c_2L^2$ el sistema es estable, si $\omega > \omega^*$, donde

$$\omega^* = \frac{\sqrt{gl(r^2+4l^2)}}{r^2}\left\{\sqrt{1-\frac{c_1L^2}{Ql}}+\sqrt{1-\frac{c_2L^2}{Ql}}\right\}.$$

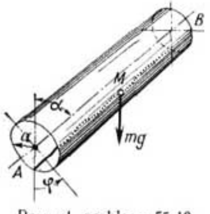
Para $c_1L^2 < Ql < c_2L^2$ el sistema es inestable independientemente de la velocidad angular.

55.10. Un punto material M se desplaza bajo la acción de la fuerza de gravedad sobre la superficie de un cilindro circular de radio a cuyo eje está inclinado bajo un ángulo α a la vertical.

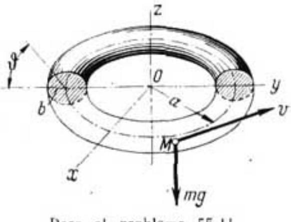
Estudiar la estabilidad del movimiento por las generatrices inferior ($\varphi = 0$) y superior ($\varphi = \pi$). Determinar el período de oscilaciones durante el movimiento por la generatriz inferior.

Respuesta: El movimiento por la generatriz superior es inestable, el período de oscilaciones durante la perturbación del movimiento a lo largo de la generatriz inferior es

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a}{g \operatorname{sen} \alpha}}.$$



Para el problema 55.10.



Para el problema 55.11.

55.11. Un púnto material está obligado a moverse sobre la *superficie lisa de un toro dado por las ecuaciones paramétricas* $x = \rho\cos\psi$; $y = \rho \operatorname{sen}\psi$; $z = b\operatorname{sen}\vartheta$; $\rho = a + b\cos\vartheta$ (el eje z está dirigido verticalmente hacia arriba).

Determinar los movimientos posibles del punto que se caracterizan por la constancia del ángulo ϑ, y estudiar su estabilidad.

Respuesta: Los valores $\vartheta = \vartheta_i = \text{const}$ se determinan de la ecuación
$(1 + \alpha \cos \vartheta_i) = \beta \operatorname{cotg} \vartheta_i$
donde $\alpha = \frac{b}{a}$, $\beta = \frac{g}{a\omega^2}$; $\dot{\psi} = \omega = \text{const}$. Esta ecuación admite dos soluciones esencialmente diferentes:
$-\frac{\pi}{2} < \vartheta_1 < 0$, $\frac{\pi}{2} < \vartheta_2 < \pi$.
El movimiento que corresponde a la primera solución es estable, el movimiento que corresponde a la segunda solución es inestable.

55.12. Estudiar la estabilidad del movimiento de un aro que rueda uniformemente con una velocidad angular ω sobre un plano horizontal. El plano del aro es vertical, su radio es a.

Respuesta: El movimiento es estable si $\omega^2 > \frac{g}{4a}$.

55.13. Una rueda de cuatro rayos dispuestos simétricamente se desplaza sobre un plano rugoso. El plano de la rueda es vertical. Las llantas de la rueda y los rayos están hechos de cable metálico pesado. El radio de la rueda es a, la velocidad de su centro en el movimiento inicial es v.

Estudiar la estabilidad de su movimiento.

Respuesta: El movimiento es estable si $v^2 > \dfrac{\pi + 2}{4\left(\pi + \frac{4}{3}\right)} ag$.

55.14. Estudiar la estabilidad del movimiento de un aro homogéneo de radio a que gira alrededor del diámetro vertical con la velocidad angular ω. El punto inferior del aro está en contacto con el plano horizontal.

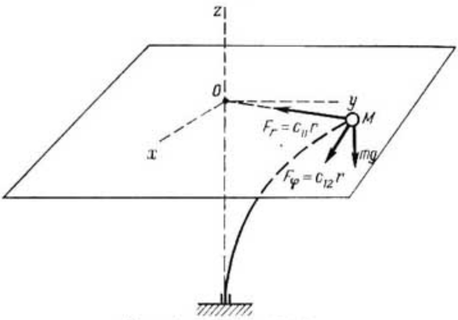
Respuesta: El movimiento es estable si $\omega^2 > \frac{2}{3} \frac{g}{a}$.

55.15. Un punto material de masa m, desviado de su posición de equilibrio está sometido a la acción de: una fuerza F_r proporcional en magnitud a la desviación $OM = r = \sqrt{x^2 + y^2}$ de esta posición y dirigida hacia ella una fuerza F_φ perpendicular a la primera (fuerza lateral) proporcional también a la desviación r:

$$|F_r| = c_{11} r, \quad F_\varphi = c_{12} r.$$

Estudiar con ayuda del método de oscilaciones pequeñas la estabilidad de la posición de equilibrio del punto.

Indicación. En tales condiciones se hallará una masa puntiforme fijada en el extremo libre de una barra comprimida y torcida (de unas mismas rigideces principales a la flexión), cuyo extremo inferior está encastrado. La forma recti-



Para el problema 55.15.

línea de la barra corresponde al estado de equilibrio. Los coeficientes c_{11}, c_{12} dependen de la fuerza comprimente, del momento de torsión, de la longitud de la barra y de las rigideces a la flexión y la torsión.

Respuesta: El equilibrio es inestable.

55.16. Durante el estudio de la estabilidad del movimiento del punto en el problema anterior tener en cuenta las fuerzas de resistencia proporcionales a la velocidad: $R_x = -\beta\dot{x}$, $R_y = -\beta\dot{y}$ (β es el coeficiente de resistencia).

Respuesta: El equilibrio es estable para $\beta^2 c_{11} > mc_{12}^2$.

55.17. Si las rigideces a la flexión de la barra descrita en el problema 55.15 no son iguales, entonces las reacciones del extremo de la barra que actúan sobre la masa m se determinan por las expresiones

$$F_x = -c_{11}x + c_{12}y, \quad F_y = c_{21}x - c_{22}y.$$

Estudiar con ayuda del método de oscilaciones pequeñas las condiciones de la estabilidad de equilibrio.

Respuesta: Para $(c_{11} - c_{22})^2 + 4c_{12}c_{21} > 0$ el equilibrio es estable.

55.18. La ecuación de movimiento del manguito del regulador centrífugo de un motor es

$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + cx = A(\omega - \omega_0),$$

donde x es el desplazamiento del manguito del regulador, m es el coeficiente de inercia del sistema, β es el coeficiente de resistencia, c es la rigidez de los resortes del regulador, ω es la velocidad angular instantánea y ω_0 es la velocidad angular media de la máquina, A es una constante. La ecuación de movimiento de la máquina es

$$J\frac{d\omega}{dt}=-Bx$$

(B es una constante, J es el momento de inercia reducido de las piezas en rotación del motor).

Establecer las condiciones de estabilidad del sistema compuesto del motor y del regulador.

Respuesta: El sistema es estable si

$$AB<J\frac{c\beta}{m}$$

(c, β, J, A, B se consideran positivos).

55.19. Un trompo simétrico, cuya punta se encuentra en un alojamiento fijo, gira alrededor de su eje vertical. Un segundo trompo simétrico, puesto sobre el primero, gira también alrededor del eje vertical. La punta del eje del segundo trompo se apoya en el alojamiento hecho en el eje del primer trompo. M y M' son las masas de los trompos superior e inferior, A y A' son sus momentos de inercia respecto a los ejes horizontales que pasan por las puntas, C y C' son sus momentos de inercia respecto a los ejes de simetría, c y c' son las distancias entre los centros de gravedad de los trompos y las puntas correspondientes, h es la distancia entre las puntas. Las velocidades angulares de los trompos son Ω y Ω'.

Hallar las condiciones de estabilidad del sistema.

Respuesta: El sistema es estable si todas las raices de la ecuación de cuarto grado

$$\begin{aligned}&[AA'+Mh^2(A-Mc^2)]\lambda^4+[A'C'\Omega'+\\&+C\Omega(A'+Mh^2)]\lambda^3+[A(M'c'+Mh)g+\\&+(A'+Mh^2)Mcg+CC'\Omega\Omega']\lambda^2+\\&+[C\Omega(M'c'+Mh)g+C'\Omega'Mcg]\lambda+\\&+Mc(M'c'+Mh)g^2=0\end{aligned}$$

son distintas y reales.

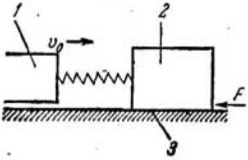
55.20. La pieza *1* tiene un movimiento de avance con una velocidad constante v_0 y transmite el movimiento, por intermedio de un resorte, a la corredera *2*. La fuerza de rozamiento entre la corredera y las guias *3* depende de la velocidad v de la corredera del modo siguiente:

$$H=H_0\operatorname{sign}v-\alpha v+\beta v^3,$$

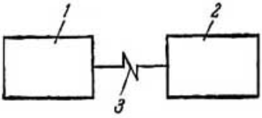
donde H_0, α, β son coeficientes positivos.

Determinar los valores de v_0 para los cuales el movimiento uniforme de la corredera es estable.

Respuesta: $v_0^2>\dfrac{\alpha}{3\beta}$.



Para el problema 55.20.



Para el problema 55.21.

55.21. Un grupo compuesto del motor *1* y de la máquina *2*, coplados por medio de un manguito elástico *3* de rigidez c, se considera como un sistema de dos masas. Al rotor del motor, cuyo momento de inercia es J_1, se ha aplicado un momento M_1 que depende de la velocidad angular $\dot{\varphi}$ del rotor del modo siguiente:

$$M_1 = M_0 - \mu_1(\dot{\varphi} - \omega_0).$$

Al árbol de la máquina, cuyo momento de inercia es J_2, se ha aplicado el momento de las fuerzas de resistencia M_2 que depende de la velocidad angular del árbol $\dot{\psi}$:

$$M_2 = M_0 - \mu_2(\dot{\psi} - \omega_0).$$

Los coeficientes μ_1 y μ_2 son positivos.

Determinar las condiciones para las cuales la rotación del sistema con una velocidad angular ω_0 es estable.

Respuesta: $\mu_1 > \mu_2$; $\frac{J_2}{J_1} > \frac{\mu_2}{\mu_1}$.

55.22. Las ecuaciones del movimiento perturbado son

$$\dot{x}_1 = -2x_1 - x_2 - x_3 - x_4, \quad \dot{x}_2 = x_1 - x_4,$$
$$\dot{x}_3 = -4x_1 + x_2 - x_3 - x_4, \quad \dot{x}_4 = 5x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4.$$

Determinar los números propios y la estabilidad del sistema.

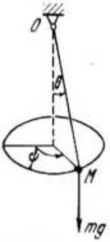
Respuesta: $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$; el movimiento es estable.

55.23. Las ecuaciones del movimiento perturbado son

$$\dot{x}_1 = -2x_1 - x_2 - x_3 - x_4, \quad \dot{x}_2 = x_1 - x_2,$$
$$\dot{x}_3 = -5x_1 - 2x_3 - 2x_4, \quad \dot{x}_4 = 6x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4.$$

Determinar los números propios y la estabilidad del sistema.

Respuesta: $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$; el movimiento es inestable (comparar con la respuesta del problema 55.22).



Para el problema 55.24.

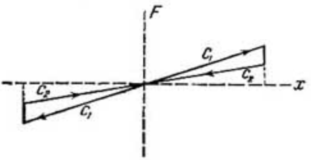
55.24. Estudiar la estabilidad del movimiento estacionario ($\theta=\text{const}$, $\dot\psi=\text{const}$) de un péndulo esférico respecto a las magnitudes θ, $\dot\theta$ y $\dot\psi$.

Indicación. Utilizar la relación lineal de integrales.

Respuesta: El movimiento es estable.

§ 56. OSCILACIONES NO LINEALES

56.1. Durante los ensayos de resortes se obtuvo una curva característica "triangular" de la variación de la fuerza elástica. La rama superior (c_1) de la característica corresponde a la desviación del resorte de su posición de equilibrio estático, la rama inferior (c_2) de la característica corresponde a su regreso a esta posición. En el instante inicial la desviación del resorte de su posición de equilibrio estático es x_0 y su velocidad inicial es igual a cero. La masa del resorte es m; sus coeficientes de rigidez son c_1 y c_2.



Para el problema 56.1.

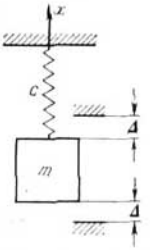
Escribir las ecuaciones de las oscilaciones libres del resorte para la primera mitad de un período completo de oscilaciones y hallar el período completo de oscilaciones T.

Respuesta: Cuando el resorte regresa a su posición de equilibrio estático $x=x_0\cos k_2t$; cuando el resorte se desvía de su posición de equilibrio estático

$$x=-x_0\frac{k_2}{k_1}\operatorname{sen}\left(k_1t-\frac{\pi}{2}\frac{k_1}{k_2}\right);\quad T=\pi\left(\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}\right);$$

$$k_1=\sqrt{\frac{c_1}{m}};\quad k_2=\sqrt{\frac{c_2}{m}}.$$

56.2. Determinar la ley de decrecimiento de las amplitudes de oscilaciones libres del resorte considerado en el problema anterior. Durante el registro de las oscilaciones libres se obtuvo la siguiente serie de amplitudes decrecientes: 13,0 mm, 7,05 mm, 3,80 mm, 2,05 mm, etc. Determinar de acuerdo con los datos del vibrograma la relación de los coeficientes de rigidez c_1/c_2 correspondientes a las ramas superior e inferior de la característica "triangular".



Para el problema 56.3.

Respuesta: Los valores sucesivos de las amplitudes en cada semiperíodo decrecen de acuerdo con la ley de una progresión geométrica con el denominador k_2/k_1; $c_1/c_2 = 3{,}4$.

56.3. Una masa m oscila sobre un resorte de coeficiente de rigidez c. A unas distancias iguales a Δ de la posición de equilibrio están instalados unos apoyos rígidos.

Suponiendo que el coeficiente de recuperación de los choques contra los apoyos es igual a 1, determinar la ley del movimiento del sistema durante las oscilaciones periódicas de frecuencia ω. Hallar los valores posibles de ω.

Respuesta: $x = \dfrac{\Delta}{\operatorname{sen}\dfrac{k\pi}{2\omega}} \operatorname{sen} k\left(t - \dfrac{\pi}{2\omega}\right)$ para $0 \leqslant t \leqslant \dfrac{\pi}{\omega}$ $\left(k^2 = \dfrac{c}{m}\right)$;

$\omega \geqslant k$.

56.4. Resolver el problema anterior suponiendo que hay solamente un apoyo inferior.

Respuesta: $x = -\dfrac{\Delta}{\cos\dfrac{\pi k}{\omega}} \cos\left(\dfrac{\pi}{\omega} - t\right)$ para $0 \leqslant t \leqslant \dfrac{2\pi}{\omega}$;

$k \leqslant \omega \leqslant 2k$.

56.5. Determinar la dependencia de la amplitud del primer armónico de oscilaciones libres de su frecuencia, en un sistema cuya ecuación de movimiento es

$$m\ddot{x} + F_0 \operatorname{sign} x + cx = 0.$$

Respuesta: $a_1 = \dfrac{4F_0}{\pi(m\omega^2 - c)}$.

56.6. El movimiento de un sistema se describe por la ecuación

$$\ddot{x} + (\dot{x}^2 + k^2x^2 - \alpha^2)\,\dot{x} + k^2x = 0.$$

Determinar la amplitud del proceso autooscilatorio que aparece en el sistema; estudiar su estabilidad.

Respuesta: $a = \alpha/k$; las autooscilaciones son estables.

56.7. Hallar las condiciones para las cuales en el sistema considerado en el problema 55.20, pueden aparecer autooscilaciones próximas a las oscilaciones harmónicas de frecuencia $k = \sqrt{\dfrac{c}{m}}$, donde c es el coeficiente de rigidez del resorte y m es la masa de la corredera. Determinar aproximadamente la amplitud de estas autooscilaciones.

Respuesta: $0{,}8\,\frac{\alpha}{3\beta} < v_0^2 < \frac{\alpha}{3\beta}$;

$$a^2 \approx \frac{4}{k^2}\left(\frac{\alpha}{3\beta} - v_0^2\right).$$

56.8. Suponiendo que en el sistema examinado en el problema 55.20, la fuerza de rozamiento H es constante e igual a H_2 cuando $v \gtrless 0$ o igual a H_1 cuando $v = 0$ (rozamiento en reposo), determinar el período de autooscilaciones. Considerar que la masa de la corredera es m, y el coeficiente de rigidez del resorte es c.

Respuesta: $T = t_1 + \frac{1+\alpha^2}{k\alpha}(1 - \cos kt_1)$, donde

$$\alpha = \frac{(H_1 - H_2)\,k}{cv_0}, \quad k = \sqrt{\frac{c}{m}},$$

t_1 es la raíz más pequeña de la ecuación.
$\alpha \operatorname{sen} kt_1 = \cos kt_1 - 1$.

56.9. La masa m está ligada con una base fija por medio de un resorte de rigidez c y un amortiguador de rozamiento en seco, cuya fuerza de resistencia no depende de la velocidad y es igual a H. A distancias iguales Δ de la posición de equilibrio están instalados unos apoyos.

Suponiendo que el coeficiente de recuperación de los choques contra los apoyos es igual a 1, calcular el valor de H para el cual la fuerza perturbadora $F \cos \omega t$ no puede provocar oscilaciones subarmónicas de resonancia de frecuencia ω/s (s es un número entero).

Indicación. Determinar las condiciones de existencia de un régimen periódico róximo a las oscilaciones libres del sistema de frecuencia ω/s.

Respuesta: Para s par $H > 0$; para s impar

$$H > F\,\frac{\omega k}{|k^2 - \omega^2|}\operatorname{cotg}\frac{\pi s k}{2\omega}\left(\frac{\omega}{s} > k\right).$$

56.10. El centro de un cilindro circular homogéneo que rueda sin deslizamiento sobre un plano horizontal, está ligado por un resorte con un punto fijo O situado sobre la misma horizontal que el centro del disco. La masa del cilindro es igual a m, el coeficiente de rigidez del resorte es c. En la posición de equilibrio el resorte no está deformado, su longitud es igual a l.

Determinar la dependencia del período de oscilaciones pequeñas del cilindro alrededor de la posición de equilibrio de la amplitud a al conservar en la ecuación de movimiento los términos que contienen la tercera potencia del desplazamiento.

Respuesta: $T = 4l\sqrt{6\frac{m}{c}}\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^4 - x^4}} =$

$= 4\sqrt{3}\sqrt{\frac{m}{c}}\frac{l}{a}K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right),$

donde K es la integral elíptica completa de primer orden.

56.11. Calcular por el método del parámetro pequeño la amplitud a y el período T de las autooscilaciones que aparecen en un sistema cuyo movimiento se determina por la ecuación

$$\ddot{x} + k^2x = \mu\{(a^2 - x^2)\dot{x} - \gamma x^3\}.$$

Respuesta: $a = 2\alpha$; $T = \frac{2\pi}{k}\left(1 - \frac{3\mu\gamma\alpha^2}{2k^2}\right)$.

56.12. Las ecuaciones de movimiento de un péndulo en un medio con resistencia y bajo la acción de un momento constante, que actúa en un solo sentido, son

$$\ddot{\varphi} + 2h\dot{\varphi} + k^2\varphi = M_0 \quad \text{para} \quad \dot{\varphi} > 0,$$
$$\ddot{\varphi} + 2h\dot{\varphi} + k^2\varphi = 0 \quad \text{para} \quad \dot{\varphi} < 0,$$

donde h, k, M_0 son magnitudes constantes.

Suponiendo que $\frac{2h}{k} \ll 1$, $\frac{M_0}{k^2} \ll 1$ aplicar el método de coeficientes que varían lentamente para hallar el movimiento estacional del péndulo.

Respuesta: Las autooscilaciones son estables. El radio ρ del ciclo límite en el plano $(\varphi, \dot{\varphi})$ es igual a $\frac{1}{hT}\frac{M_0}{k^2}$, donde $T = \frac{\pi}{k}$.

56.13. Aplicando en el problema anterior el método de transformaciones puntiformes, hallar el punto fijo de la transformación.

Respuesta: $\varphi_0 = \frac{M_0}{k^2}\frac{1}{1 - e^{-hT}}$; $\dot{\varphi}_0 = 0$.