Theoretische Mechanik SS-2022

Serie 3

Ausgabe: 26.04.2022, Abgabe: 03.05.2022 via Moodle

Aufgabe 1: Konservative Kräfte **3 Punkte**

Untersuchen Sie, ob die folgenden Kräfte konservativ sind. Wenn ja, berechnen Sie das Potential.

a) $\boldsymbol{F}_a = -k\boldsymbol{r}$, $k > 0$, konst.

b) $\boldsymbol{F}_b = -\frac{\alpha}{r^3}\boldsymbol{r}$, $\alpha > 0$, konst.

c) $\boldsymbol{F}_c = -m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})$, $\boldsymbol{\omega}$ =konst.

Aufgabe 2: Foucaultsches Pendel **1+2+3+2+6 Punkte**

Wir betrachten ein Foucaultsches Pendel mit Masse m und Länge ℓ. Leiten Sie die Bewegungsgleichungen her, indem Sie die Rotation der Erde betrachten. Machen Sie die Annahme sehr kleiner Schwingungen, sodass sich die Bewegungsgleichungen vereinfachen. Folgen Sie dabei den Schritten $a) - e)$.

a) Berechnen Sie die Fadenspannung $\vec{T}$.

b) Das Pendel befindet sich in einem Inertialsystem. Was sind die Kräfte, die auf die Masse wirken? Welche anderen Kräfte müssen auch betrachtet werden, wenn die Erde eine Winkelgeschwindigkeit ω hat? Stellen Sie die Bewegungsgleichung für dieses rotierende System auf.

c) Zeigen Sie, dass die Gleichungen im Komponentenform

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -T(x/\ell) + 2m\omega\dot{y}\cos\theta, \\ m\ddot{y} &= -T(y/\ell) + 2m\omega(\dot{x}\cos\theta + \dot{z}\sin\theta), \\ m\ddot{z} &= -T(\ell - z)/\ell - mg + 2m\omega\dot{y}\sin\theta \end{aligned}$$

mit der geographischen Breite θ sind. Nehmen Sie $\omega \ll |\dot{\vec{r}}|/\ell$ an.

d) Nun erfährt das Pendel sehr kleine Schwingungen um die Gleichgewichtsposition ($\frac{\ell-z}{\ell} \approx 1$), sodass die Bewegung nur in der xy-Ebene stattfindet ($\ddot{z} = \dot{z} = 0$). Stellen Sie die vereinfachten Bewegungsgleichungen auf. Hier sind die nichtlinearen Terme vernachlässigbar, da ω, x, und y klein sind.

e) Nutzen Sie $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$, $y(0) = A$, und $\dot{y}(0) = 0$ als Anfangsbedingungen um die Gleichungen von $d)$ zu lösen:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -K^2x + 2\alpha\dot{y}, \\ \ddot{y} &= -K^2y - 2\alpha\dot{x}, \end{aligned}$$

wobei $K = g/\ell$ und $\alpha = \omega\cos\theta$ sind. Es ist nützlich eine komplexe Zahl $u = x + iy$ zu definieren, sodass man nur eine Gleichung $\ddot{x} + i\ddot{y} = \ddot{u}$ löst. Verwenden Sie dazu einen passenden Ansatz. Sie sollten zur folgenden Lösung gelangen:

$$x(t) = A\cos\left(\sqrt{g/\ell}t\right)\sin(\omega\cos\theta t),$$
$$y(t) = A\cos\left(\sqrt{g/\ell}t\right)\cos(\omega\cos\theta t)\,.$$

Wie kann man dieses Ergebnis physikalisch interpretieren?

Hinweise:

- $\omega\cos(\theta) \ll \sqrt{g/\ell}$
- Eulersche Formel:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta,$$
$$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta.$$

- Trigonometrische Formeln:

$$2\sin\theta\cos\phi = \sin(\theta+\phi) + \sin(\theta-\phi),$$
$$2\cos\theta\cos\phi = \cos(\theta+\phi) + \cos(\theta+\phi).$$

Aufgabe 3: Computervisualisierung 3 **2 Punkte**

Plotten Sie 4 Beispiele des Kreuzprodukts von zwei beliebigen Vektoren in 3D. Verwenden Sie ein Visualisierungsprogramm ihrer Wahl.

Lösungsvorschlag in Python:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

o = [0,0,0] # Referenzpunkt
a = # Vektor A, Fuegen Sie hier einen Vektor hinzu
b = # Vektor B, auch hier
c = np.cross(a,b) # Kreuzprodukt AxB

fig = plt.figure()
ax = plt.axes(projection='3d')

ax.quiver(o,o,o,a,b,c)
plt.show()
```

Um die Pfeile richtig zu sehen, kann man die Achse mit geeigneten Werten anpassen, z.B.:

```
ax.set_xlim([-1.1,1.1])
ax.set_ylim([-1.1,1.1])
ax.set_zlim([-1.1,1.1])
```

Gesamt: 19 Punkte