# Верификация параллельных программных и аппаратных систем

Курс лекций

Карпов Юрий Глебович
профессор, д.т.н., зав.кафедрой
“Распределенные вычисления и компьютерные сети”
Санкт-Петербургского политехнического университета
karpov@dcn.infos.ru

# План курса

1. Введение
2. Метод Флойда-Хоара доказательства корректности программ
3. Исчисление взаимодействующих систем (CCS) Р.Милнера
4. Темпоральные логики
5. Алгоритм model checking для проверки формул CTL
6. Автоматный подход к проверке выполнения формул LTL
7. Структура Крипке как модель реагирующих систем
8. Темпоральные свойства систем
9. Система верификации Spin и язык Promela. Примеры верификации
10. Применения метода верификации model checking
11. BDD и их применение
12. Символьная проверка моделей
13. Количественный анализ дискретных систем
14. Верификация систем реального времени ( I )
15. Верификация систем реального времени ( II )
16. Консультации по курсовой работе

# Лекция 13

*Количественный анализ дискретных систем*

# Расширения Model Checking: количественный анализ

Последнее время – огромное число расширений и различных приложений МС

Одна из групп [1] – в Университете Бирмингема (а сейчас в Оксфордском Университете), исследует возможность комбинации **вероятностного анализа, реального времени** и **МС**

***Ответы типа:***

Протокол выбора лидера:

***"С вероятностью 0.9 процесс выбора лидера завершится в течение 25 сек"***

Для протокола передачи мультимедийной информации

***"Вероятность доставки кадра в течение 10 временных шагов > 89%"***

Подход позволяет подсчитать истинность или ложность того, что данная темпоральная формула будет выполнена с заданной вероятностью в течение t единиц времени

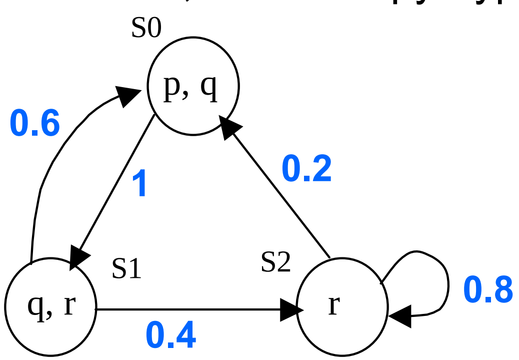
(в отличие от проверки ДОСТИЖИМОСТИ, выполняемой обычным процессом Model Checking)

В Uni. of Birmingham разработана система ***PRISM***, " Probabilistic Symbolic Model Checker "

(1) Marta Kwiatkowska (Uni. of Birmingham) "Model checking for probability and time" Proc. Conf. Logic in Computer Science, 2003, www.cs.bham.ac.uk/~dxp/prism/

# Model Checking и Вероятностный анализ

Модификация дискретной Марковской цепи (время считается неявно дискретными переходами из состояния в состояние, как и в структуре Крипке)




Помеченная дискретная Марковская цепь $(S, s_0, P, L)$ – это:

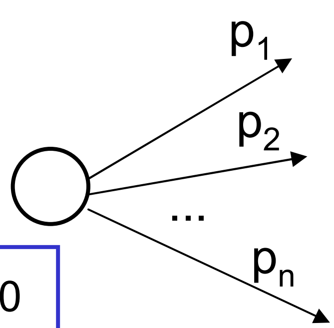
$S$ – конечное множество состояний,

$s_0$ – начальное состояние;

$L: S \to 2^{AP}$

$Pr: S\times S \to [0,1]$ – вероятностная матрица, такая, что $(\forall s \in S)\ \Sigma_{q\in S} Pr(s,q) = 1$

Можно считать эту модель и расширением структуры Крипке - к структуре Крипке просто добавляются вероятности переходов Pr(s,q) из p в q




$\Sigma_i\ p_i = 1$

Путь $\sigma = s_0 s_1 s_2 \ldots s_n$ – конечная цепочка состояний, такая, что $Pr(s_i,s_{i+1})>0$

***Вероятностная мера цепочки $\sigma$ :***

$Pr(\sigma)=1$ если $n=0$ (т.е. $\sigma$ состоит из одного состояния)

$Pr(\sigma) = Pr(s_0,s_1)\ Pr(s_1,s_2) \ldots Pr(s_{n-1},s_n)$ если $n>0$

# Вероятностная CTL – PCTL (Hansson & Jonsson'94)

PCTL (Probabilistic CTL) заменяет кванторы E и A в CTL вероятностным оператором $Pr_{\sim p}(\alpha)$, где $p \in [0,1]$, $\sim \in \{\leq, <, \geq, >\}$, например, $P_{>0.3}$ (Fq)

Формула состояния: $\varphi ::= q \mid \varphi_1 \vee \varphi_2 \mid \neg \varphi \mid P_{\sim p}(\alpha)$
где $\alpha$ -*формула пути:* $\alpha ::= X\,\varphi \mid \varphi_1\, U\, \varphi_2$

Операторы F и G выражаются через *Until:* $F\varphi = True\ U\ \varphi$, $G\varphi = \neg F \neg \varphi$

Семантика вероятностного оператора: ( $\alpha$ - формула пути, s – произвольное состояние, $Path_s$ – все пути из состояния s, $\sigma$ – путь )

$s \models P_{\sim p}(\alpha)$ iff $Pr\{\sigma \in Paths_s \mid \sigma \models \alpha\} \sim p$

В состоянии s вероятностная мера ~p выполняется для формулы пути $\alpha$, iff с этой мерой может быть выбран путь из состояния s, на котором выполняется формула $\alpha$

*Примеры:*

$P_{>0.7}(q\ U\ \neg r)$ – вероятность того, что на путях из данного состояния выполнится формула пути $(q\ U\ \neg r)$, больше 0.7

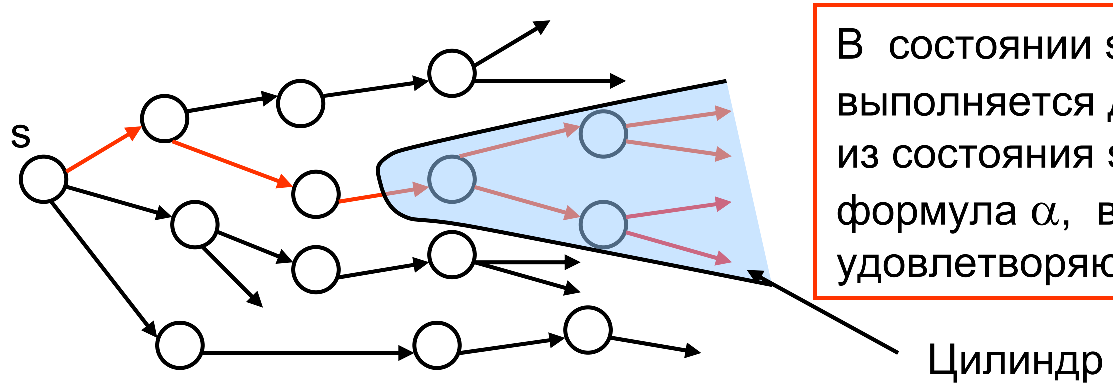
$P_{<0.1}(\ (P_{>0.2}\ Xq)\ U \neg r\ )$ вероятность того, что на путях из данного состояния выполнится формула пути $(P_{>0.2}\ Xq)\ U \neg r$, меньше 0.1

# Вероятностная CTL (2)

$P_{>0}(\alpha)$ соответствует квантору существования пути E - потому что только с некоторой вероятностью может быть выбран путь, на котором формула пути $\alpha$ выполняется

$P_{\geq 1}(\alpha)$ соответствует универсальному квантору пути A - потому что с единичной вероятностью будет выбран путь, на котором формула $\alpha$ выполняется

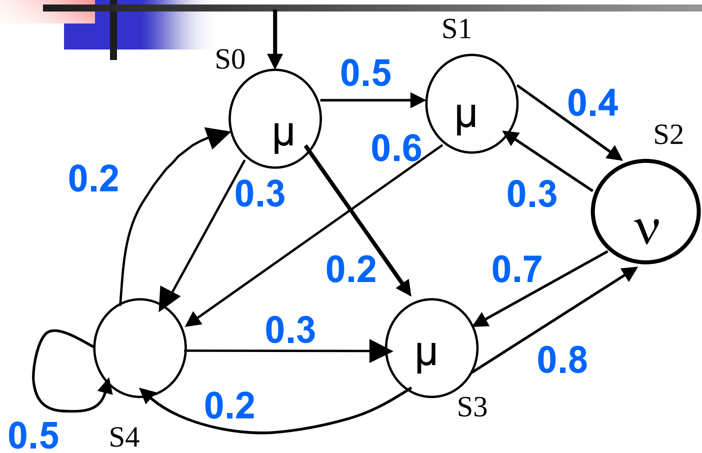
Каждому отрезку путей из состояния s соответствует некоторая вероятность его выбора. На некоторых путях из s формула $\alpha$ выполняется, на других – нет. Нас интересует совокупная вероятность выбора тех путей из s, на которых $\alpha$ выполняется




В состоянии s вероятностная мера ~p выполняется для формулы пути $\alpha$, iff путь из состояния s, на котором выполняется формула $\alpha$, выбирается с вероятностью, удовлетворяющей этой мере

Алгоритм верификации работает так же, как для CTL, индукцией по подформулам $\varphi$, определяя множество Sat($\varphi$ ) тех состояний, которые удовлетворяют формуле $\varphi$.

# Вычисление истинности PCTL формулы $P_{\sim p}X\mu$




| | $s_0$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | $s_4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $s_0$ | -- | 0.5 | – | 0.2 | 0.3 |
| $s_1$ | -- | -- | 0.4 | -- | 0.6 |
| $s_2$ | -- | 0.3 | -- | 0.7 | – |
| $s_3$ | -- | -- | 0.8 | -- | 0.2 |
| $s_4$ | 0.2 | -- | -- | 0.3 | 0.5 |

μ и ν - ф-лы состояния

Матрица вероятностей переходов

Вычислим $P_{\geq 0.6}$ Xμ, т.е. в каких состояниях вероятность формулы пути Xμ будет ≥0.6

| | $s_0$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | $s_4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $s_0$ | -- | 0.5 | – | 0.2 | 0.3 |
| $s_1$ | -- | -- | 0.4 | -- | 0.6 |
| $s_2$ | -- | 0.3 | -- | 0.7 | – |
| $s_3$ | -- | -- | 0.8 | -- | 0.2 |
| $s_4$ | 0.2 | -- | -- | 0.3 | 0.5 |

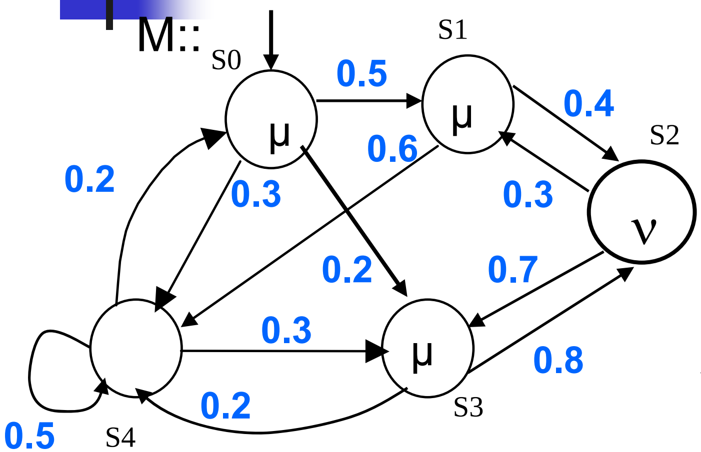
$$\times \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Сумма вероятностей того, что из $s_i$ за один шаг попадем в какое-нибудь состояние, в котором истинно μ

Единицами отмечены состояния, в которых удовлетворяется формула μ

ИТАК, формула состояний $P_{\geq 0.6}$ Xμ удовлетворяется в состояниях $s_0$ и $s_2$

# Вычисление истинности PCTL формулы Pr(μUν)

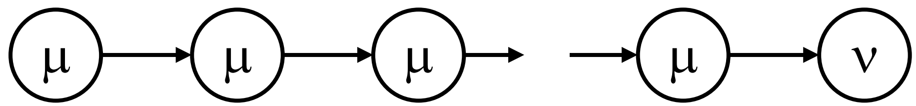



$M, \pi \models \mu U \nu$ iff $\pi = s_0 s_1 s_2 \ldots$ и

$\exists k \geq 0: M, s_k \models \nu$ и

$\forall j < k: M, s_j \models \mu$

π::




$S^{yes}$ – множество состояний, в которых выполняется ν ( т.е. множество Sat(ν) )

$S^{no}$ - множество состояний, в которых не выполняется ν, не выполняется μ, и тех, из которых не достижимы состояния из Sat(ν)

$S^{?}$ - множество состояний, в которых не выполняется ν, но выполняется μ

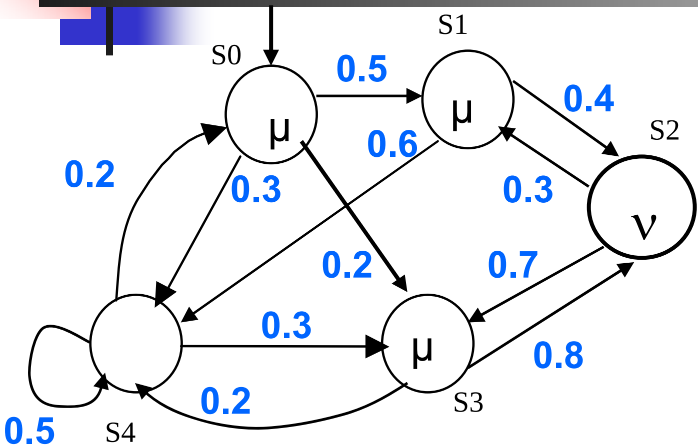
Определим: $x_s$ – вероятность выполнения формулы μUν в состоянии s

$x_s = 1$ – если $s \in S^{yes}$

$= 0$ – если $s \in S^{no}$

$= \sum_{t \in S} P(s,t) * x_t$ – если $s \in S^{?}$

# Вычисление истинности PCTL формулы $P_{\sim p}(\mu \, U \, \nu)$




| | $s_0$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | $s_4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $s_0$ | -- | 0.5 | – | 0.2 | 0.3 |
| $s_1$ | -- | -- | 0.4 | -- | 0.6 |
| $s_2$ | -- | 0.3 | -- | 0.7 | – |
| $s_3$ | -- | -- | 0.8 | -- | 0.2 |
| $s_4$ | 0.2 | -- | -- | 0.3 | 0.5 |

μ и ν - формулы состояния

Матрица вероятностей переходов

Вычислим $P_{\geq 0.8}$ (μUν), т.е. в каких состояниях вероятность формулы Φ = μUν будет ≥0.8

Пусть $x_s$ – это вероятность выполнения формулы Φ= μUν в состоянии s

Очевидно, что: $x_2 = 1$, $x_4 = 0$ (потому что в $s_2$ уже выполнено ν, а в $s_4$ – не вып и μ).

Вероятности выполнения Φ в других состояниях нужно считать: $x_s = \Sigma \, Pr(s, s') \times x_{s'}$

Система уравнений:

$x_0 = 0.5x_1+0.2x_3+0.3x_4$
$x_1 = 0.4x_2+0.6x_4$
$x_2 = 1$
$x_3 = 0.8x_2+0.2x_4$
$x_4 = 0$

⇒

Решаем:
$x_0 = 0.36$
$x_1 = 0.4$
$x_2 = 1$
$x_3 = 0.8$
$x_4 = 0$

⇒

Формула Φ выполняется в тех состояниях, в которых вероятность выбора “нужного” пути удовл вероятностной мере (≥0.8)

⇒

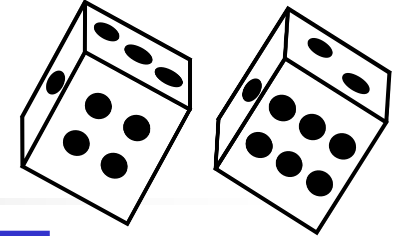
0
0
1
1
0

ИТАК, формула состояний $P_{\geq 0.8}$ μUν удовлетворяется в состояниях $s_2$ и $s_3$

# Частные случаи

- Вероятностная достижимость
  - достижение целевого множества состояний с вероятностной мерой ~p: $P_{\sim p}\mathbf{F}$ goal $= P_{\sim p}$ *True* **U** goal
- Вероятностный инвариант
  - свойство оставаться в множестве состояний, помеченных inv, с вероятностной мерой ~p: $P_{\sim p}\mathbf{G}$ inv $= P_{\sim p}(\neg($ *True* U $\neg$inv) )

# Казино: анализ игры в кости



Сорок различных ставок. Мы анализируем “*The Pass Bet*”

**I этап.**
***Первый бросок***

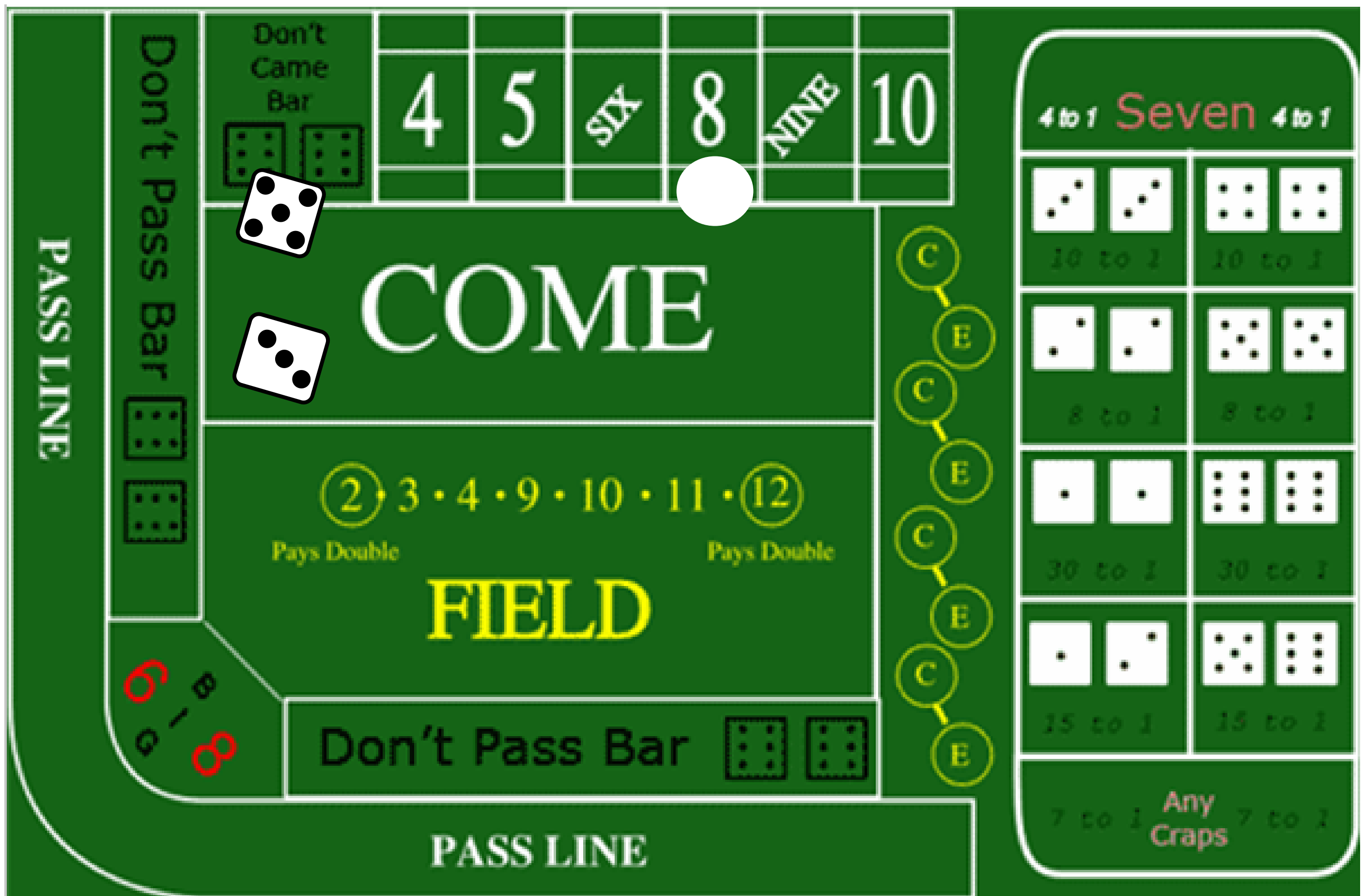
7,11 - *выигрыш*.
2,3,12 – проигрыш
4,5,6,8,9,10 = Point,
и на II этап

***Point запоминается – ставится фишка***

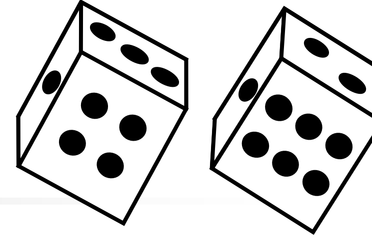
**II этап.**
***Набери Point***

Нужно выбросить Point раньше 7 (seven out)

Игрок ставит свои фишки на Pass Line. Бросает крупье



# Игра в кости. Ставка “The Pass Bet”



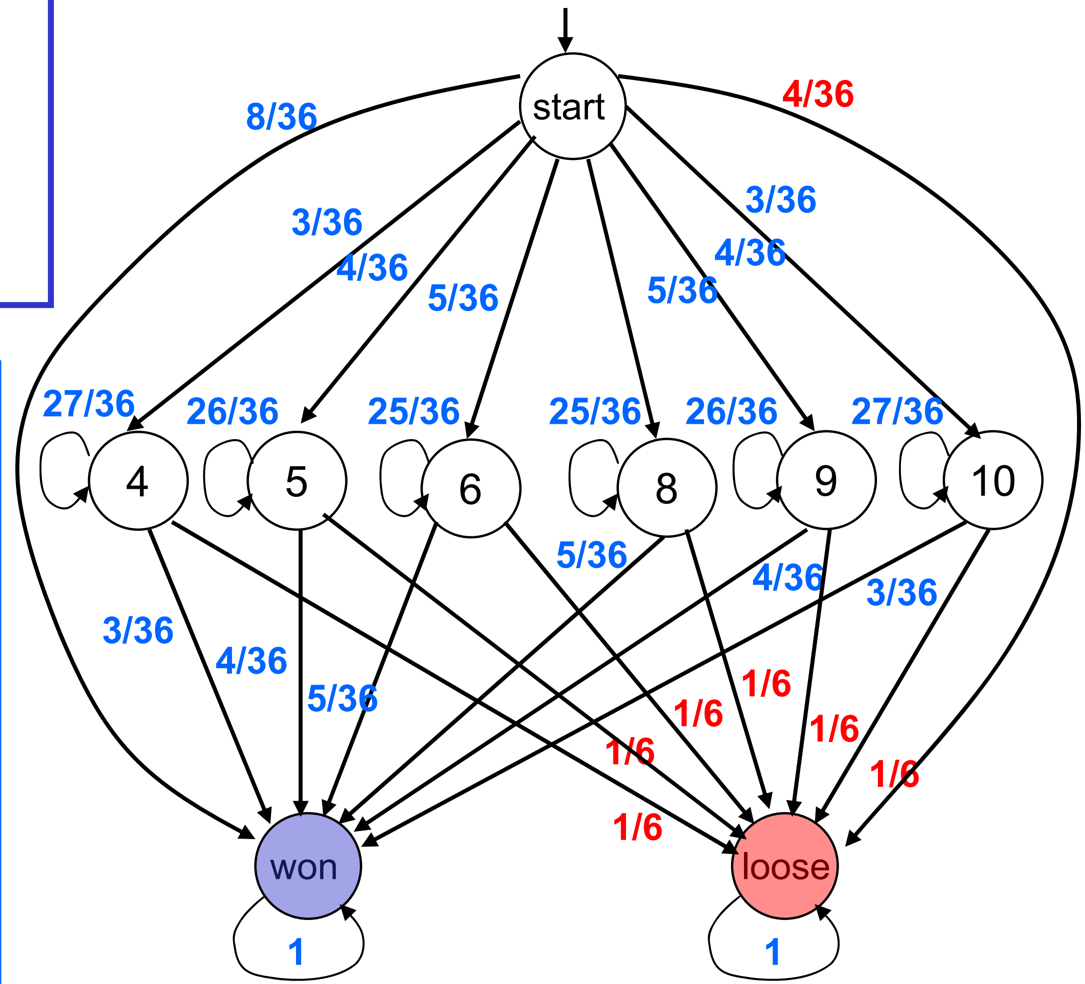
**I этап. *Первый бросок***
7,11 - *выигрыш.*
2,3,12 – проигрыш
4,5,6,8,9,10 = Очко (пункт), и на II этап

**II этап. *Набери очко (seven out)***
Нужно выбросить Очко раньше 7

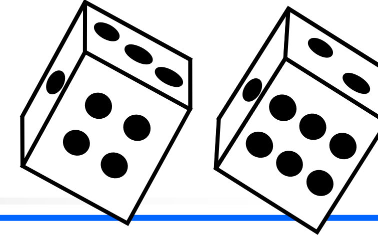
***Число благоприятных исходов:***

| | | |
|---|---|---|
| **2** ⇔ | 1,1 | ⇒ 1/36 |
| **3** ⇔ | 1,2; 2,1 | ⇒ 2/36 |
| **4** ⇔ | 1,3; 2,2; 3,1 | ⇒ 3/36 |
| **5** ⇔ | 1,4; 2,3; 3,2; 1,4 | ⇒ 4/36 |
| **6** ⇔ | 1,5; 2,4; 3,3; 4,2; 5,1 | ⇒ 5/36 |
| **7** ⇔ | 1,6; 2,5; 3,4; 4,3; 5,2; 6,1 | ⇒ 6/36 |
| **8** ⇔ | 2,6; 3,5; 4,4; 5,3; 6,2 | ⇒ 5/36 |
| **9** ⇔ | 3,6; 4,5; 5,4; 6,3 | ⇒ 4/36 |
| **10** ⇔ | 4,6; 5,5; 6,4 | ⇒ 3/36 |
| **11** ⇔ | 5,6; 6,5 | ⇒ 2/36 |
| **12** ⇔ | 6,6 | ⇒ 1/36 |

Хотим подсчитать Pr( **F** *won* )



# Вероятность выигрыша “The Pass Bet”



**_Решение:_** $x_{start}$ = 0.4929 .... против 0.5070

Pr(Fwon) = Pr(*true* U won)

$$x_{start} = 8/36\ x_{won} + 3/36\ x_4 + 4/36\ x_5 + 5/36\ x_6 + 3/36\ x_{10} + 4/36\ x_9 + 5/36\ x_8$$

$$x_4 = 27/36\ x_4 + 3/36\ x_{won}$$

$$x_5 = 26/36\ x_5 + 4/36\ x_{won}$$

$$x_6 = 25/36\ x_6 + 5/36\ x_{won}$$

$$x_8 = 25/36\ x_8 + 5/36\ x_{won}$$

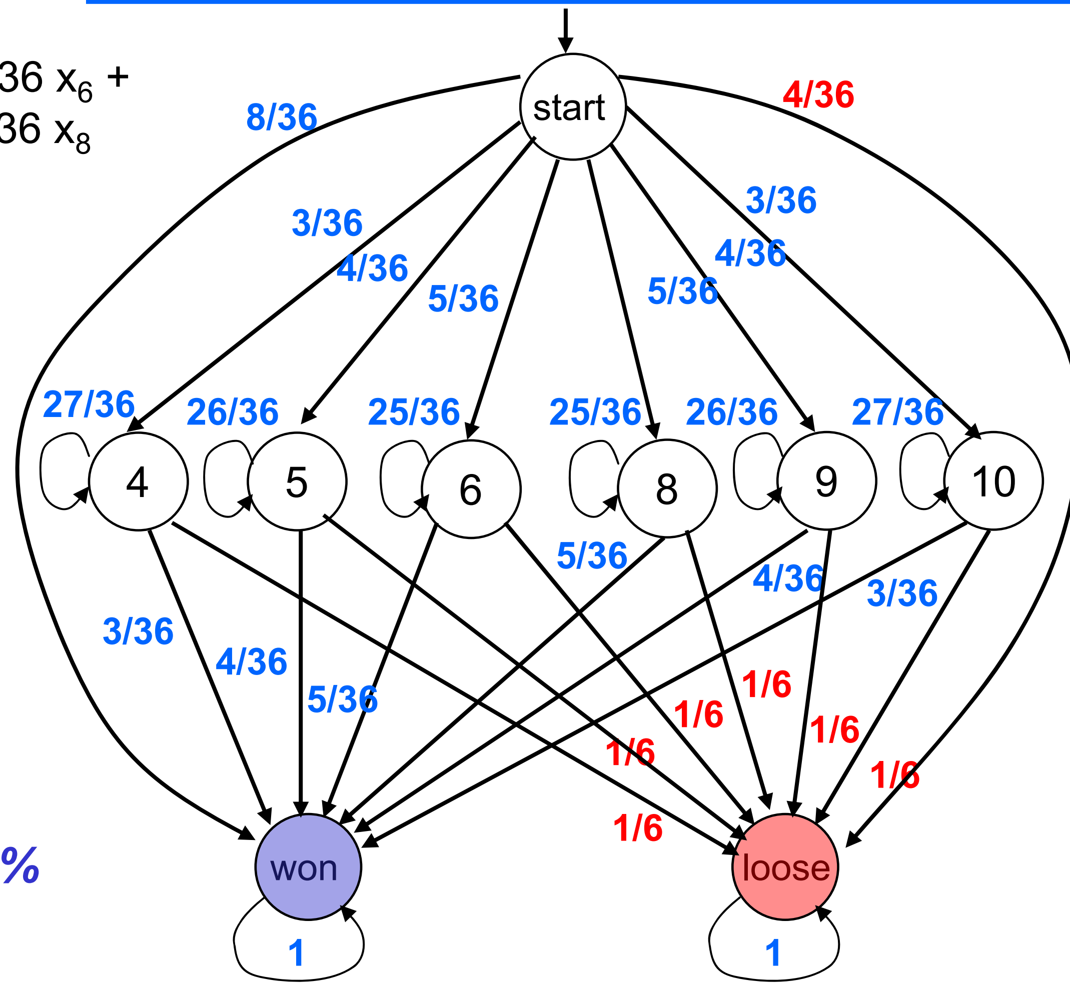
$$x_9 = 26/36\ x_9 + 4/36\ x_{won}$$

$$x_{10} = 27/36\ x_{10} + 3/36\ x_{won}$$

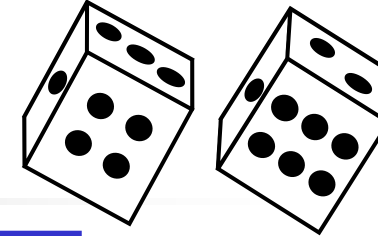
$$x_{won} = 1$$

$x_{loose}$ = 0 – // из $x_{loose}$ недостижимо $x_{won}$

$x_4$ = 1/3
$x_5$ = 2/5
$x_6$ = 5/11
$x_8$ = 5/11
$x_9$ = 2/5
$x_{10}$ = 1/3




***Казино имеет ~3%***



# Казино: анализ игры в кости

**I этап.**
***Первый бросок***

7,11 - *ПРОИГРЫШ*
3,12 – выигрыш
4,5,6,8,9,10 = Point,
и на II этап

Если выпала 2, то ставка возвращается игроку (ничья)

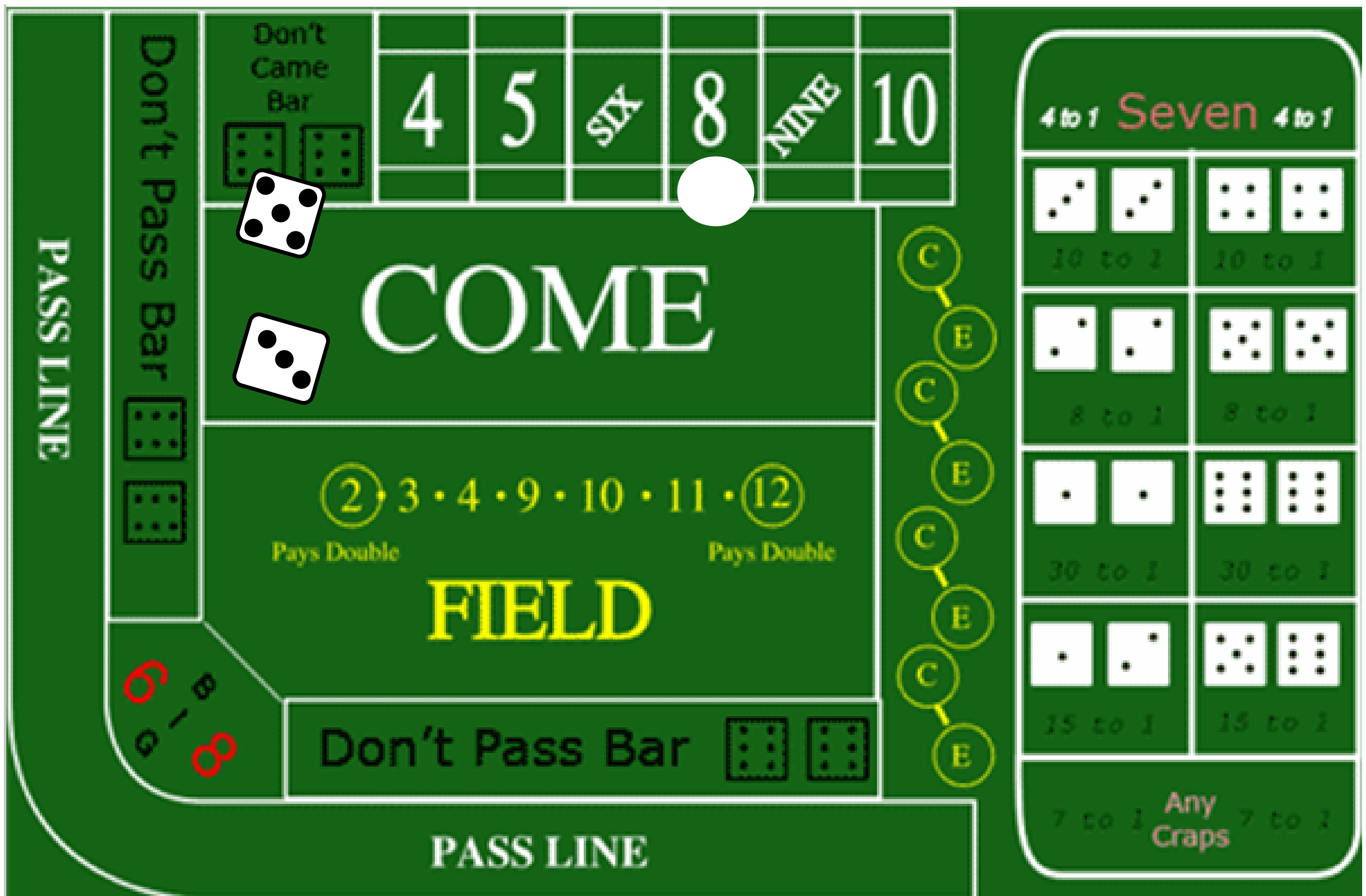
***Point (пункт) запоминается* – *ставится фишка***

**II этап.**
**НЕ *Набери Point***

Нужно выбросить 7 раньше Point (seven out)

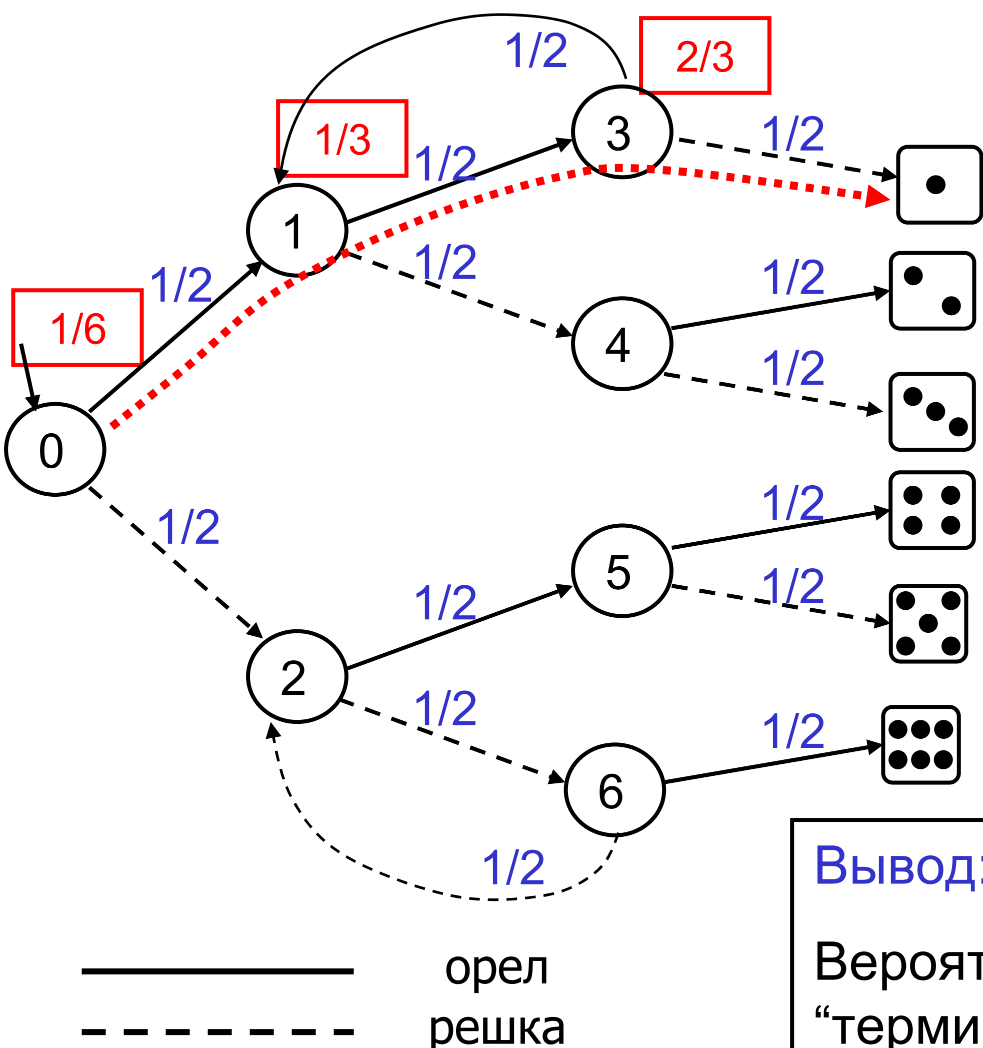
Ставка “*The Don’t Pass Bet*”

Игрок ставит свои фишки на Pass Line. Бросает крупье



# Пример: Моделирование одной монетой игральной кости

Knuth, Yao 1976




Pr( F " " ) = Pr(*true* U " ")

$x_0 = 1/2\ x_1 + 1/2\ x_2$

$x_1 = 1/2\ x_3 + 1/2\ x_4$

$x_2 = 0$ // Кость "1" недостижима

$x_3 = 1/2\ x1 + 1/2 \cdot 1$

$x4 = 0$ // Кость "1" недостижима

$x5 = 0$ // Кость "1" недостижима

$x6 = 0$ // Кость "1" недостижима

$x_0 = 1/6$ // Вероятность 1 в сост $s_0$

$x_1 = 1/3$

$x_3 = 2/3$

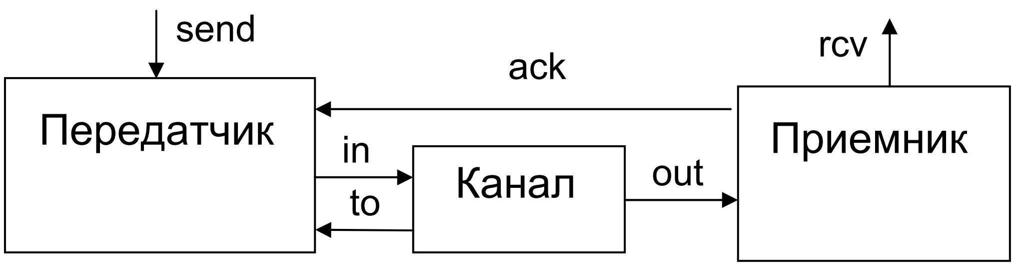
**Вывод:**

Вероятность достижения каждого из "терминальных" состояний = 1/6

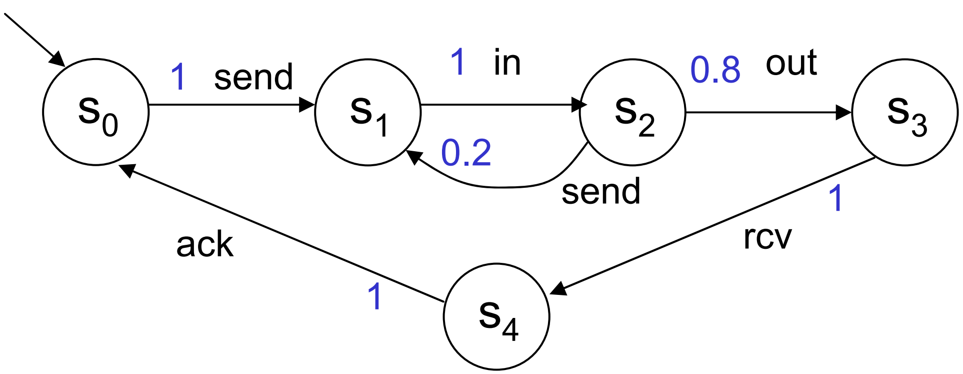
# Пример: передача сообщений по ненадежному каналу

Архитектура упрощенного протокола:

$Pr(Fs_4) = Pr(\mathit{true}\ U\ s_4)$




$$\boxed{\begin{aligned} x_0 &= 1*x_1 \\ x_1 &= 1*x_2 \\ x_2 &= 0.2*x_1 + 0.8*x_3 \\ x_3 &= 1*x_4 \end{aligned}}$$




$Pr(\ Fs_4) = 1$

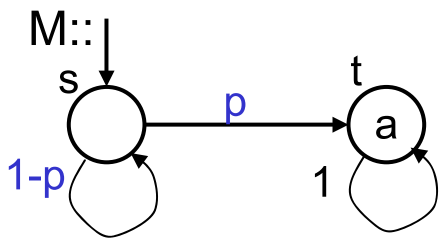
$\boxed{\text{Но} \quad s_0 \mid\neq AF\ s_4}$

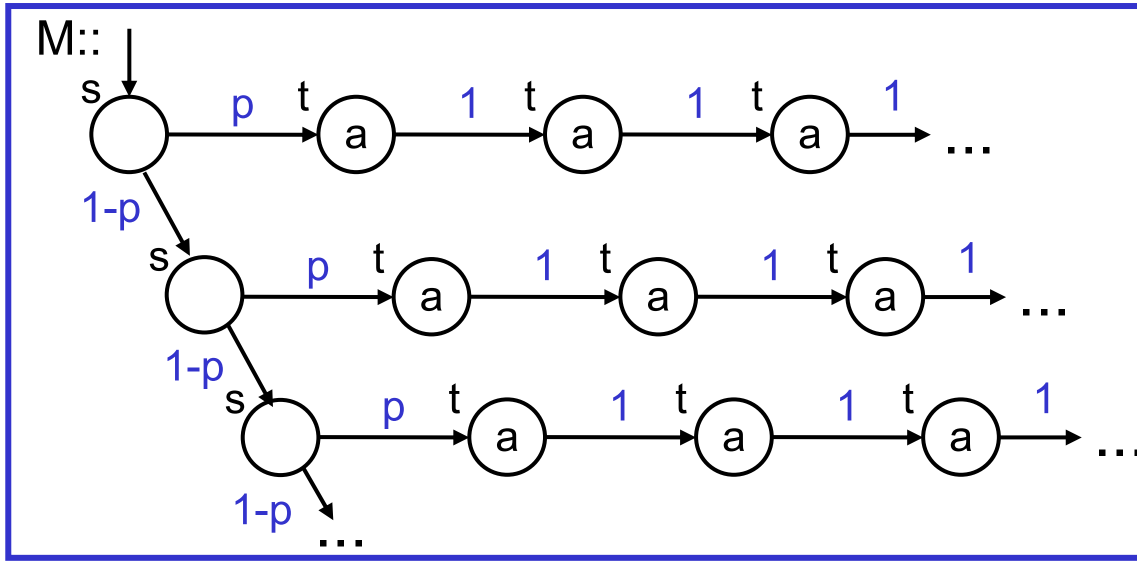
$\boxed{\text{Для этого протокола } A\ F\alpha \neq P_{=1}F\ \alpha}$

# Кванторы пути A и E в PCTL

Оказывается, A $\varphi \neq P_{=1}\,\varphi$

Аналогично, E $\varphi \neq P_{>0}\,\varphi$




$$x_s = (1\text{-}p)^*\, x_s + 1^*\, p_t$$
$$x_t = 1$$

$$x_s = 1$$

AFa НЕ выполняется на M

$P_{=1}$Fa выполняется на M

EG¬a выполняется на M

$P_{>0}$G¬a НЕ выполняется на M

Заметим, что путь $\sigma$ = ssss... несправедливый, его вероятность 0

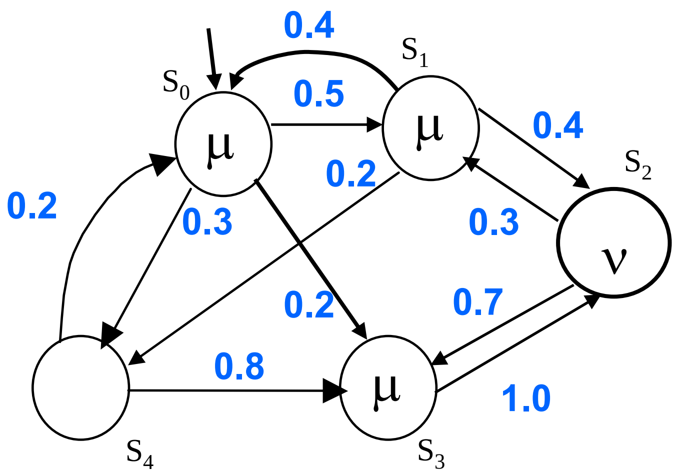
# Соотношения между формулами

- $s \models P_{\geq p}(\alpha) \equiv s \models \neg P_{<1-p}(\alpha)$
- $s \models P_{>p}(\alpha) \equiv s \models \neg P_{\leq 1-p}(\alpha)$
- $G\alpha \equiv \neg F \neg \alpha$
- $F\alpha \equiv \text{true } U\, \alpha$
- $F^{\leq n}\alpha \equiv \text{true } U^{\leq n}\, \alpha$
- $P_{\leq p}(G\, \alpha) \equiv P_{\geq 1-p}(F\, \neg\alpha)$
- $P_{]p,q]}(G^{\leq n}\, \alpha) \equiv P_{[1-p,1-q[}(F^{\leq n} \neg\alpha)$

# Учет временных ограничений

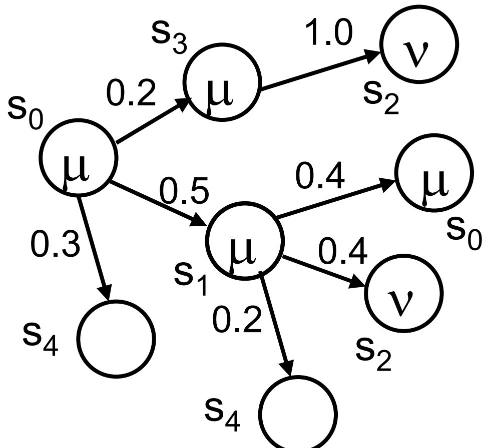
Вычисление истинности PCTL формулы $Pr_{\sim p}\ (\mu\ U^{\leq n}\ \nu)$

*Утверждение:* Формула $\mu U \nu$ выполнится не более, чем за n временных шагов, удовлетворяется с вероятностной мерой ~p



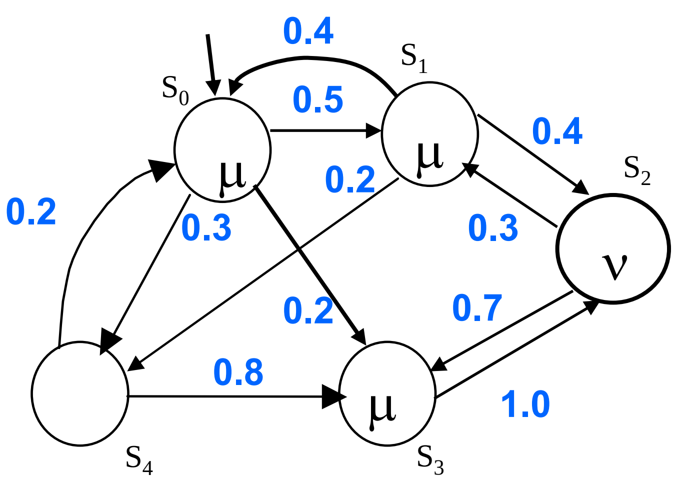

P::

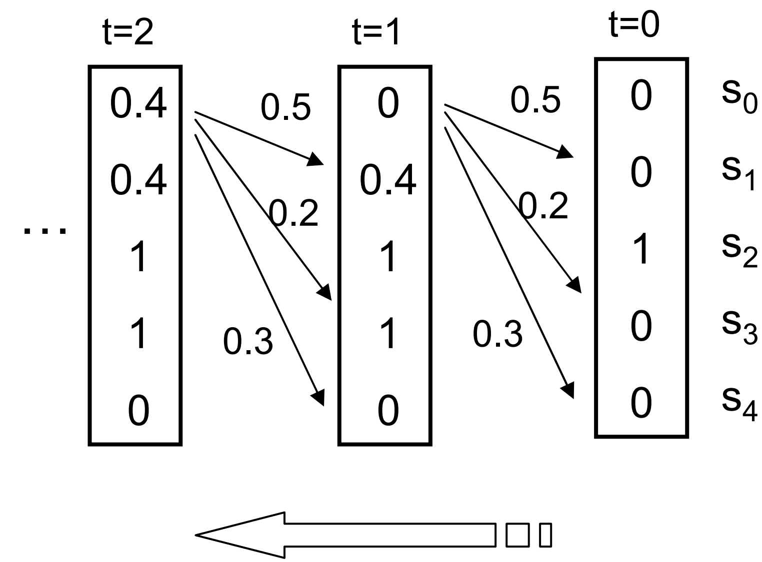
| | $s_0$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | $s_4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $s_0$ | -- | 0.5 | – | 0.2 | 0.3 |
| $s_1$ | 0.4 | -- | 0.4 | -- | 0.2 |
| $s_2$ | -- | 0.3 | -- | 0.7 | – |
| $s_3$ | -- | -- | 1.0 | -- | -- |
| $s_4$ | 0.2 | -- | -- | 0.8 | -- |

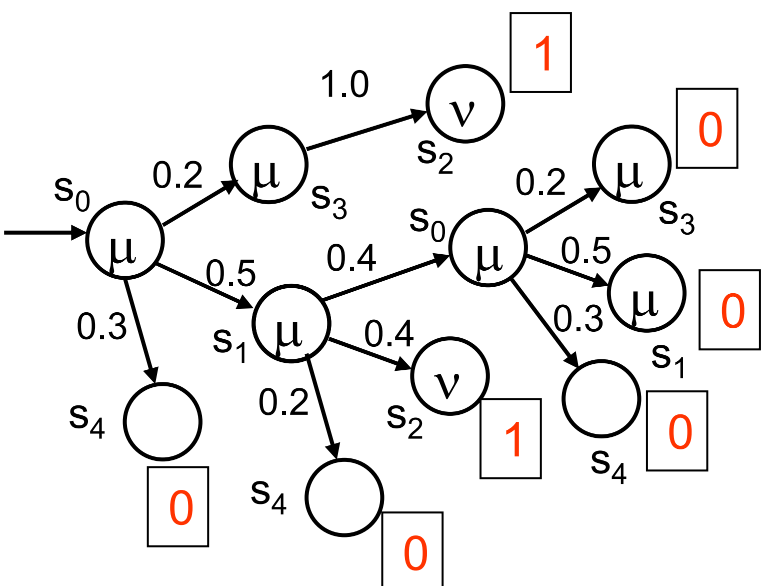



Развертка помеченной Марковской цепи

# Развертка вероятностной структуры по шагам времени




$\mu\ U^{\leq n}\ \nu$ : формула $\mu U \nu$ выполнится не более, чем за n временных шагов

За время $t \leq 0$ - в $s_2$ с вер 1

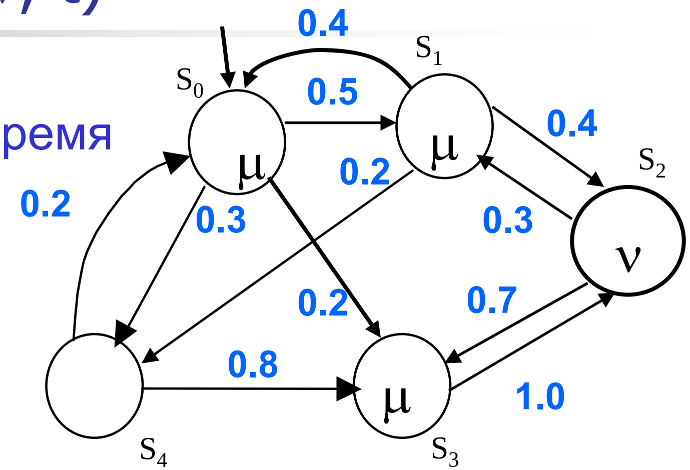
За время $t \leq 1$ - в $s_2$ и s3 с вер 1, в $s_1$ с вер 0.4

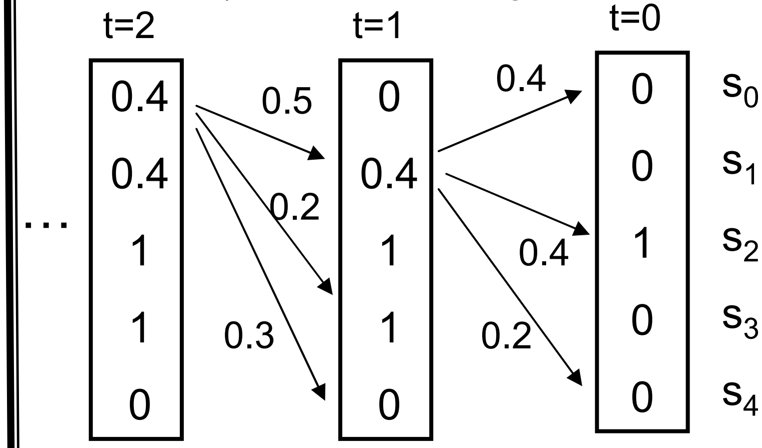
За время $t \leq 2$ - в s2 и s3 с вер 1, в $s_0$ и $s_1$ с вер 0.4

# Алгоритм вычисления $\Pr(s, \mu U \nu, t)$

Вероятность того, что в состоянии s формула $\nu$ выполнится не более, чем через t, а до этого все время будет выполняться $\mu$

```
begin
for all s∈S do
  if ν∈L(s) then P(s, μUν, 0) := 1   // ν   выполняется в s
       else Pr(s, μUν, 0) = 0;          // ν не выполняется в s
od;
for i=1 to t do
  for all s∈S do
    if ν∈L(s) then Pr(s, μUν, i) := 1; // ν выполняется в s
      else begin
        Pr(s, μUν, i) = 0;                    // ν не выполняется в s
        if μ∈L(s) then                       // если μ выполняется в s
         for all s'∈S do
          Pr(s, μUν, i) = Pr(s, μUν, i) + Pr(s, s') × Pr(s', μUν, i-1)
         od
      end
  od
od
end
```



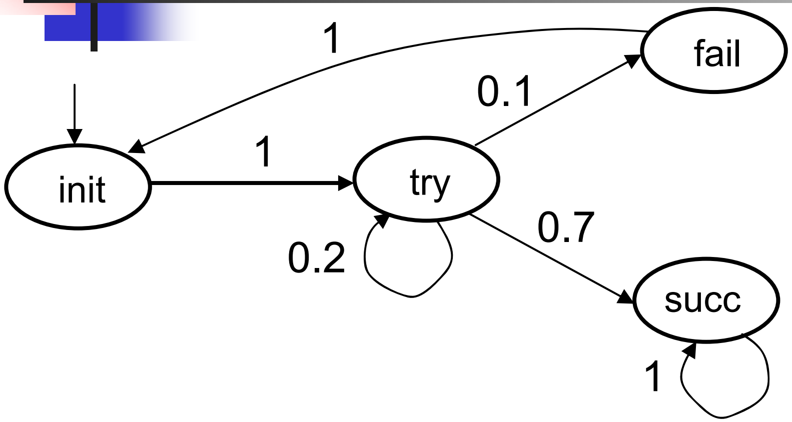




$\Pr(s_0, \mu U \nu, 0) = 0.$

$\Pr(s_0, \mu U \nu, 1) = 0.$

$\Pr(s_0, \mu U \nu, 2) = 0.4$

# Пример: упрощенная модель протокола



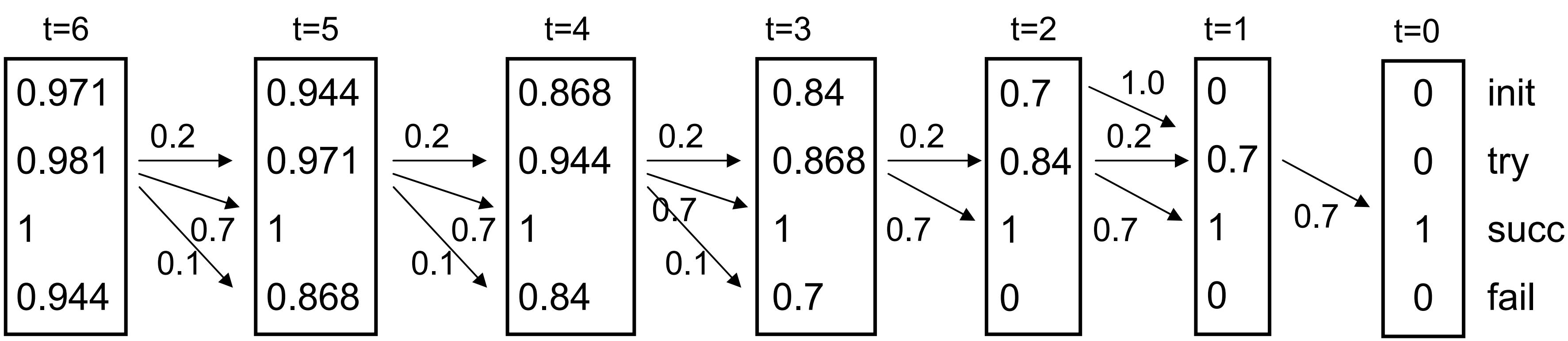

Проверим выполнение утверждения:

***“С вероятностью, не меньшей 0.95, сообщение будет успешно доставлено в течение 6 единиц времени”***

***Формально:*** $init \models P_{\geq 0.95}\ (F^{\leq 6}\ succ)$

Вычислим вероятность выполнения формулы: $init \models F^{\leq 6}\ succ$ ***“вероятность того, что сообщение будет успешно доставлено в течение не более, чем 6 единиц времени”,*** т.е. найдем Pr (init, true U succ, 6 )

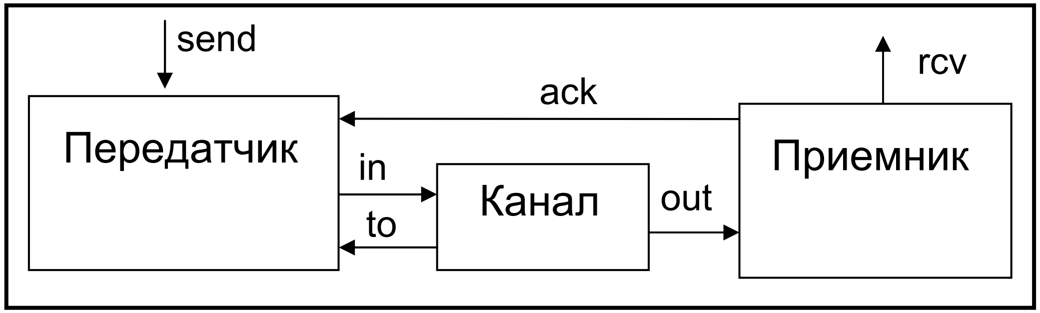
Подсчитаем Pr (s, true U succ, t ) для всех состояний структуры и всех t от t=0 до t=6

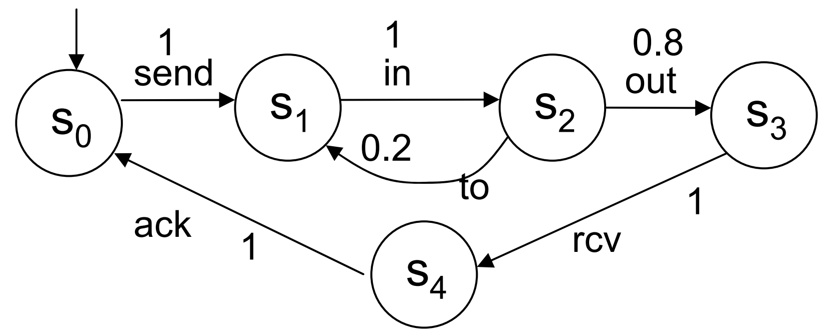



Эта вероятность оказалась 0.971. Следовательно, $init \models P_{\geq 0.95}\ (F^{\leq 6}\ succ)$

# Пример оценки “мягкого дедлайна”

Упрощенный протокол “альтернирующего бита”




Проверим свойство:

$$\Phi = \mathbf{AG}(at\_s_0 \Rightarrow \mathbf{P}_{\geq 0.9}\ \mathbf{F}^{\leq 5}\ at\_s_4) =$$
$$\neg\mathbf{EF}\ \neg(at\_s_0 \Rightarrow \mathbf{P}_{\geq 0.9}\ \mathbf{F}^{\leq 5}\ at\_s_4)$$

Синтаксический анализ:

$f_1 = at\_s_0$
$f_2 = at\_s_4$
$f_3 = \mathbf{P}_{\geq 0.9}\ \mathbf{F}^{\leq 5}\ f_2$
$f_4 = f_1 \Rightarrow f_3$
$f_5 = \neg f_4$
$f_6 = \mathbf{EF}\ f_5$
$f_7 = \neg f_6$

$f_1 : \{ s_0 \}$
$f_2 : \{ s_4 \}$
$f_3 : \{ s_1, s_2, s_3, s_4 \}$
$f_4 : \{ s_1, s_2, s_3, s_4 \}$
$f_5 : \{ s_0 \}$
$f_6 : \{ s_0, s_1, s_2, s_3, s_4 \}$
$f_7 : \{ \ \}$

| | t=5 | t=4 | t=3 | t=2 | t=1 | t=0 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $s_0$ | 0.8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $s_1$ | 0.96 | 0.8 | 0.8 | 0 | 0 | 0 |
| $s_2$ | 0.96 | 0.96 | 0.8 | 0.8 | 0 | 0 |
| $s_3$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| $s_4$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Свойство Φ НЕ выполняется для этого протокола

# Система верификации PRISM

- Позволяет выполнить анализ систем, включающих вероятность и время
- Разработана в Uni Birmingham в конце 2001
- Распространяется свободно для исследований и обучения
- В 2005 уже около 3000 скачало
- Сотни статей, исследующих проблемы с помощью системы Prism
- Основана на символьных алгоритмах, BDD, алгоритмах анализа Марковских цепей
- Сайт www.cs.bham.ac.uk/~dxp/prism/ - методические материалы, алгоритмы, ...

# Система верификации PRISM (2)

- Функциональность
  - Реализован model checking для стохастических систем, Probabilistic temporal logic
  - Используются модели:
    - дискретные и непрерывные цепи Маркова,
    - Марковские решающие процессы
  - Высокоуровневый язык представления моделей
  - Спецификации свойств вида:
    - $P<0.01$ [true U $\leq$100 error] – "*вероятность того, что система достигнет состояния error в течение не более 100 временных единиц, меньше, чем 0.01*"
    - P = ? [true U $\leq$50 terminate] – "*какова вероятность того, что система достигнет состояния terminate в течение не более 50 временных единиц?*"

Спасибо за внимание

# Пример: игра в кости. Крепс

**Ставка**

**“The Pass Bet”**

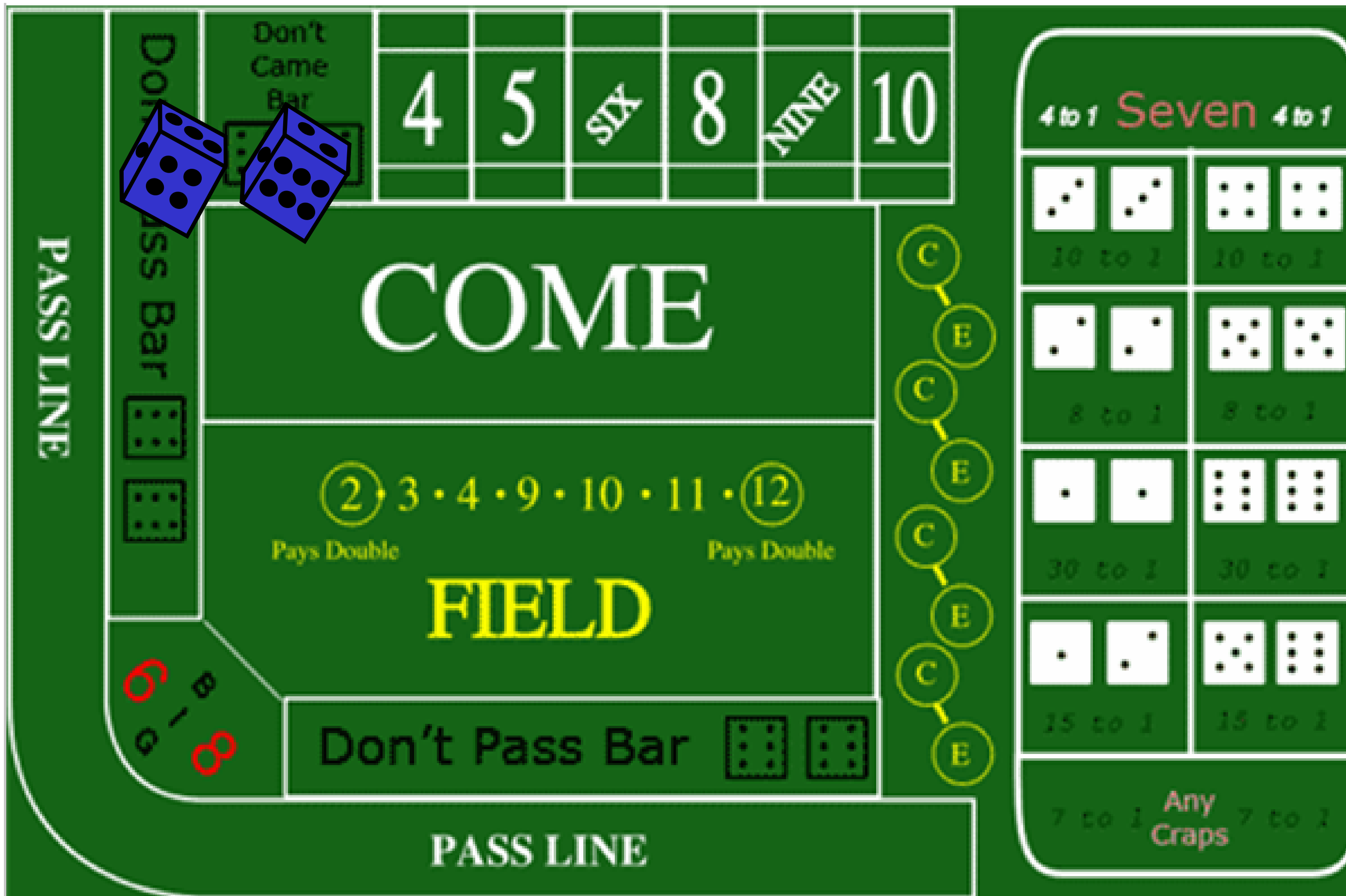
**(Проходит)**

**I этап.**
***Первый бросок***

7,11 - *выигрыш*.
2,3,12 – проигрыш
4,5,6,8,9,10 = очко,
и на II этап

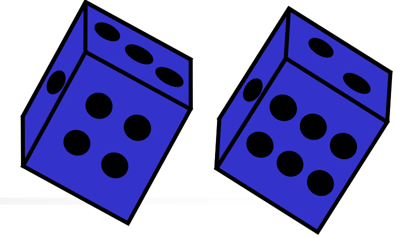
**II этап.**
***Набери очко***

Нужно выбросить очко раньше 7




Сорок различных ставок. Мы анализируем “*The Pass Bet*”

# Игра в кости. Ставка “The Pass Bet”



Правила: Бросаются две кости

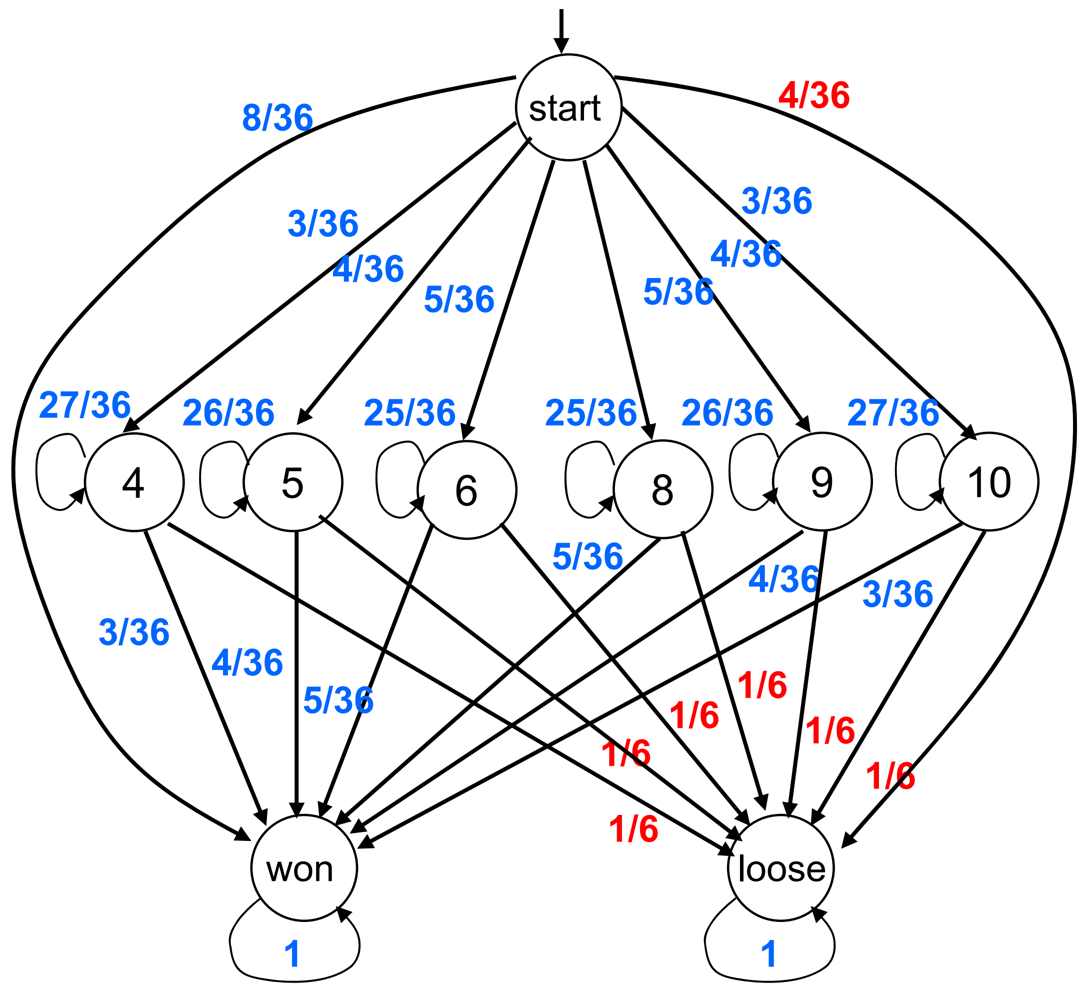
**I этап. *Первый бросок***
7,11 - *выигрыш.*
2,3,12 – проигрыш
4,5,6,8,9,10 = Очко, и на II этап

**II этап. *Набери очко***
Нужно выбросить Очко раньше 7

***Число благоприятных исходов:***

| | | |
|---|---|---|
| **2** ⇔ | 1,1 | ⇒ 1/36 |
| **3** ⇔ | 1,2; 2,1 | ⇒ 2/36 |
| **4** ⇔ | 1,3; 2,2; 3,1 | ⇒ 3/36 |
| **5** ⇔ | 1,4; 2,3; 3,2; 1,4 | ⇒ 4/36 |
| **6** ⇔ | 1,5; 2,4; 3,3; 4,2; 5,1 | ⇒ 5/36 |
| **7** ⇔ | 1,6; 2,5; 3,4; 4,3; 5,2; 6,1 | ⇒ 6/36 |
| **8** ⇔ | 2,6; 3,5; 4,4; 5,3; 6,2 | ⇒ 5/36 |
| **9** ⇔ | 3,6; 4,5; 5,4; 6,3 | ⇒ 4/36 |
| **10** ⇔ | 4,6; 5,5; 6,4 | ⇒ 3/36 |
| **11** ⇔ | 5,6; 6,5 | ⇒ 2/36 |
| **12** ⇔ | 6,6 | ⇒ 1/36 |

Хотим подсчитать P( **F** *won* )



# Игра в кости. Вероятность выигрыша

*$x_i$ – вероятность того, что из состояния i можно достигнуть won*

***Казино имеет ~3%***

$$x_{start} = 8/36\, x_{won} + 3/36\, x_4 + 4/36\, x_5 + 5/36\, x_6 + 3/36\, x_{10} + 4/36\, x_9 + 5/36\, x_8$$

$x_4 = 27/36\, x_4 + 3/36\, x_{won}$

$x_5 = 26/36\, x_5 + 4/36\, x_{won}$

$x_6 = 25/36\, x_6 + 5/36\, x_{won}$

$x_8 = 25/36\, x_8 + 5/36\, x_{won}$

$x_9 = 26/36\, x_9 + 4/36\, x_{won}$

$x_{10} = 27/36\, x_{10} + 3/36\, x_{won}$

$x_{won} = 1$

$x_{loose} = 0$ – // из $x_{loose}$ недостижимо $x_{won}$

$x_4 = 1/3$

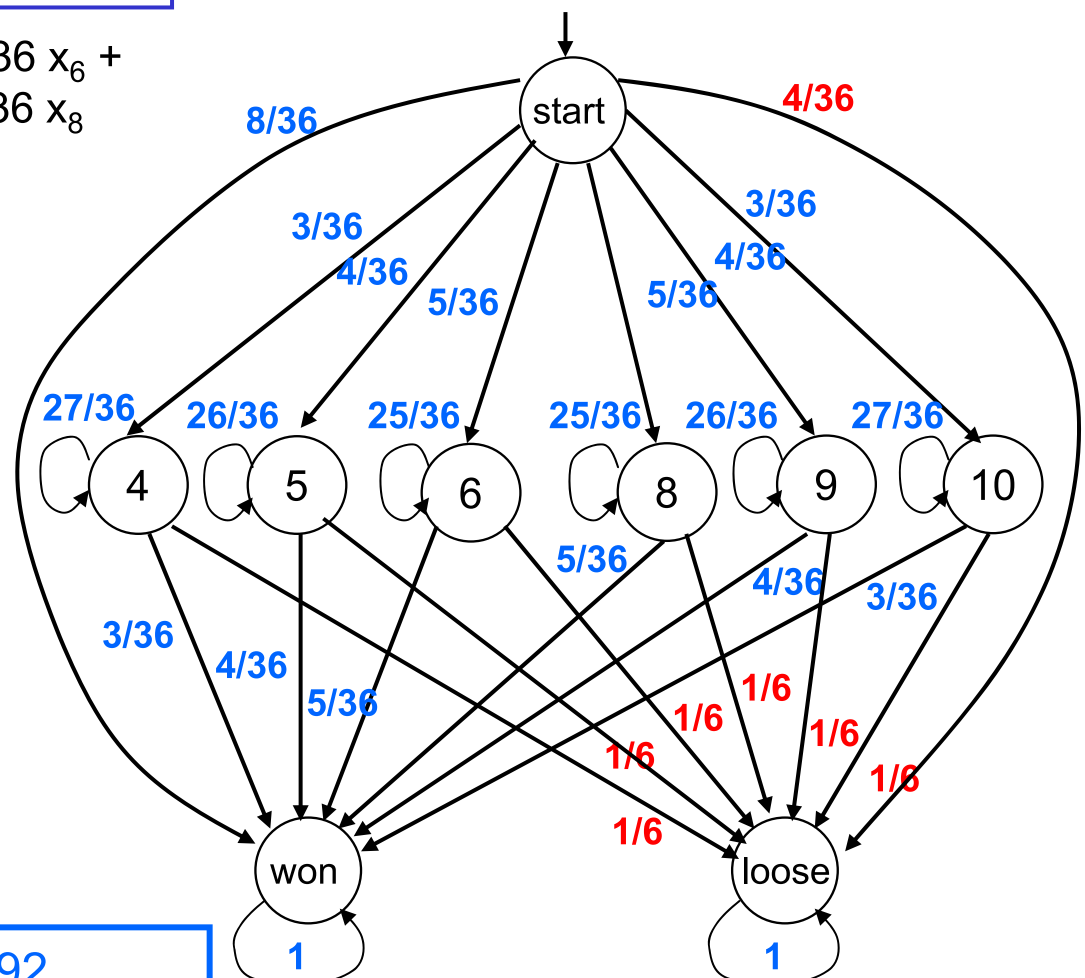
$x_5 = 2/5$

$x_6 = 5/11$

$x_8 = 5/11$

$x_9 = 2/5$

$x_{10} = 1/3$




***Решение:*** $x_{start} = 0.4929292\ ....$