Верификация параллельных программных и аппаратных систем

Курс лекций

Карпов Юрий Глебович
профессор, д.т.н., зав.кафедрой
“Распределенные вычисления и компьютерные сети”
Санкт-Петербургского политехнического университета

karpov@dcn.infos.ru

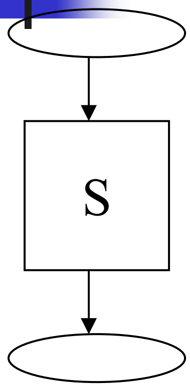
План курса

1. Введение
2. Метод Флойда-Хоара доказательства корректности программ
3. Исчисление взаимодействующих систем (CCS) Р.Милнера
4. Темпоральные логики
5. Алгоритм model checking для проверки формул CTL
6. Автоматный подход к проверке выполнения формул LTL
7. Структура Крипке как модель реагирующих систем
8. Темпоральные свойства систем
9. Система верификации Spin и язык Promela. Примеры верификации
10. Применения метода верификации model checking
11. BDD и их применение
12. Символьная проверка моделей
13. Количественный анализ дискретных систем при их верификации
14. Верификация систем реального времени (I)
15. Верификация систем реального времени (II)
16. Консультации по курсовой работе

Лекция 2

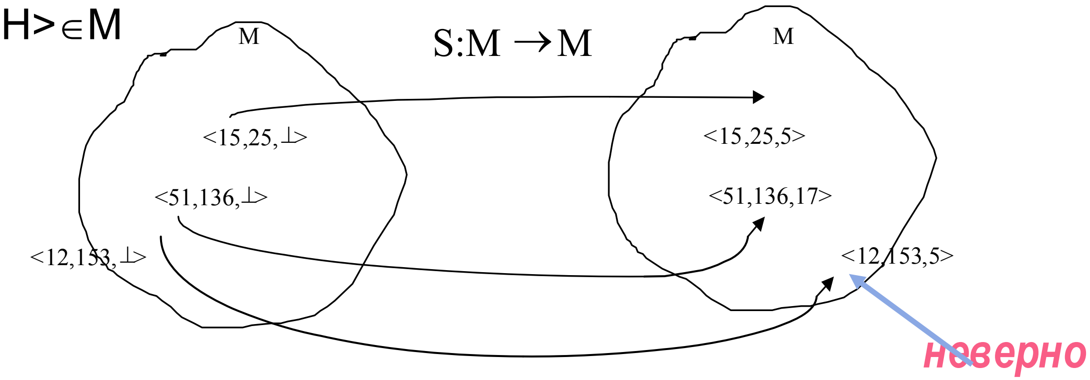
Метод Флойда-Хоара доказательства корректности программ

Тестирование и верификация программ обработки данных



S вычисляет НОД

<m,n,H>∈M



Как можно **гарантировать** правильность программы?

Нужно сформулировать, что программа ДОЛЖНА делать, и проверить, делает ли она это

Тестирование – проверка соответствия вход-выход в программе

“*Тестированием нельзя доказать правильность программы*”- Эдсгер Дейкстра

Полное тестирование программы нахождения НОД требует $2^{64}=10^{19}$ тестов

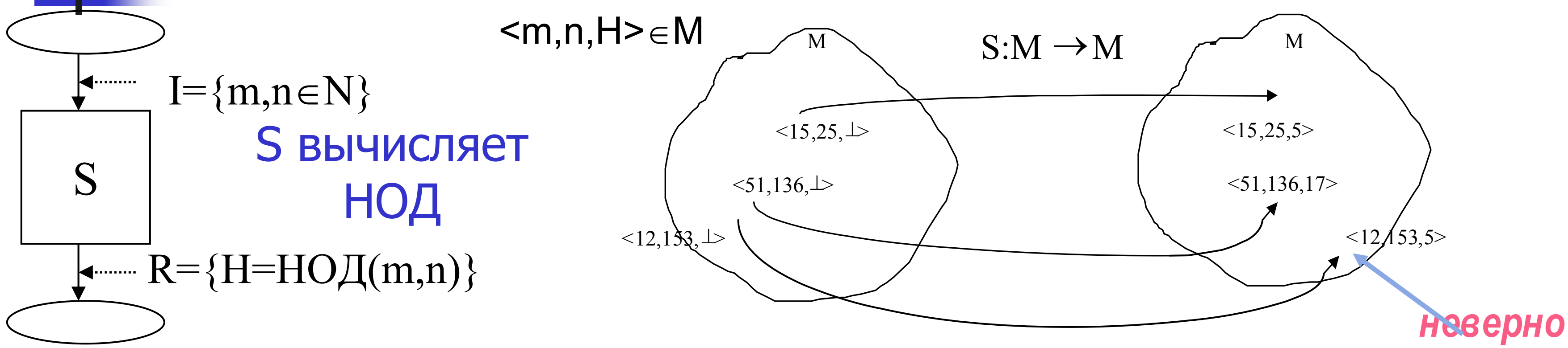
Мы хотим проверить правильность преобразования для ***ВСЕХ*** входных наборов

Поэтому необходимо **доказательство** правильности, т.е. **ВЕРИФИКАЦИЯ**

Например, сформулируем УТВЕРЖДЕНИЕ:

Если m и n – любые натуральные числа в начале программы, ***то*** при завершении программы S переменная H будет равна НОД от m и n

Тестирование и верификация программ обработки данных



Как можно **гарантировать** правильность программы?

Нужно сформулировать, что программа ДОЛЖНА делать, и проверить, делает ли она это

Тестирование – проверка соответствия вход-выход в программе

"*Тестированием нельзя доказать правильность программы*"- Эдсгер Дейкстра

Полное тестирование программы нахождения НОД требует $2^{64}=10^{19}$ тестов

Мы хотим проверить правильность преобразования для ***ВСЕХ*** входных наборов

Поэтому необходимо **доказательство** правильности, т.е. **ВЕРИФИКАЦИЯ**

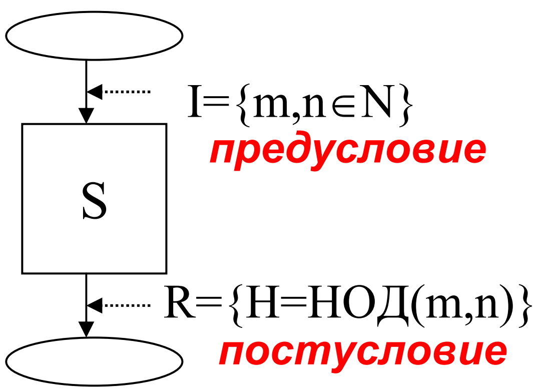
Например, сформулируем УТВЕРЖДЕНИЕ:

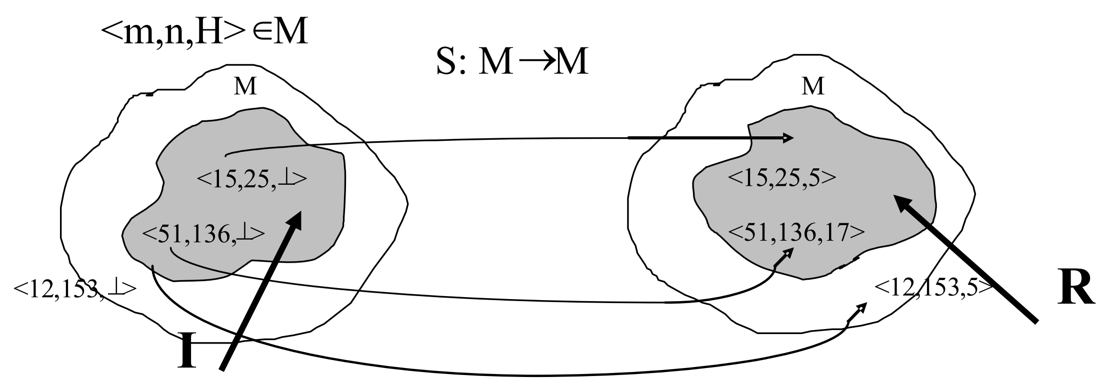
Если m и n – любые натуральные числа в начале программы, ***то*** при завершении программы S переменная H будет равна НОД от m и n

Спецификация программ обработки данных (1)

Программа - преобразователь на множестве всех ее возможных ***состояний*** (не всегда, иногда результат - файлы, операции ввода-вывода, и т.п.) Такие программы называются ТРАНСФОРМАЦИОННЫМИ

Состояние – вектор значений переменных программы. Их бесконечное число.





Как ***конечным образом*** описать все исходные и “правильные” финальные состояния???

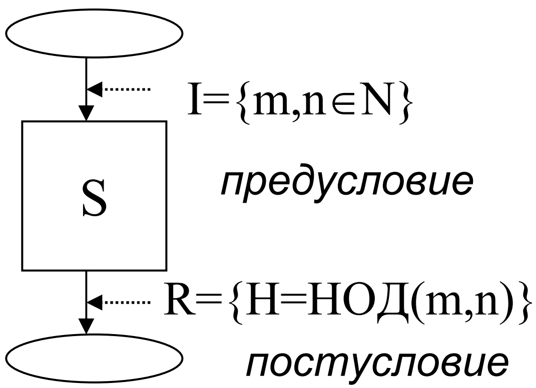
Средством описания ***подмножеств*** (бесконечных) множества является **предикат.**

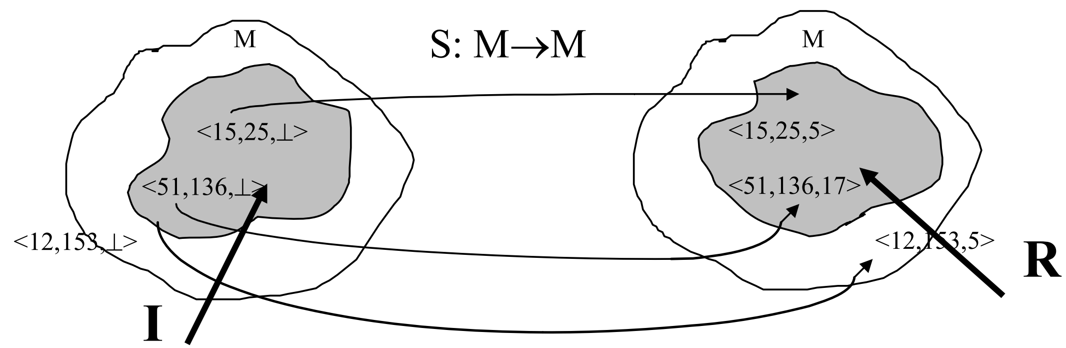
Например: x>y – все те пары x и y, в которых x > y (а их бесконечное число)

z+2x = y - определяет все тройки <x, y, z>, в которых это отношение соблюдается

<51, 136,17> - удовлетворяет предикату H=НОД(m, n), а <12,153,5> - нет

Спецификация программ обработки данных (2)





Формальная спецификация программы в двух формах:

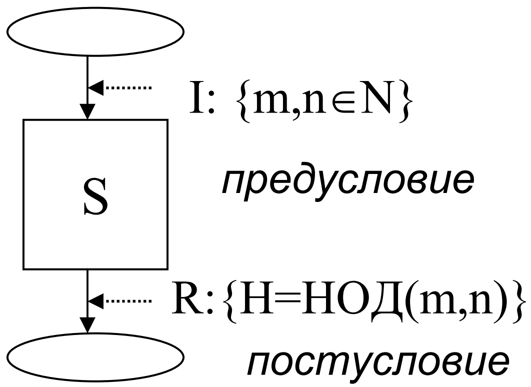
А: *“**Если** предусловие* **I** *истинно до начала работы программы* **S**,
* **И** **S** завершится, **ТО** после завершения* **S** *будет истинно постусловие* **R**”

Это частичная (partial) корректность программы: { I } S { R }

B: *“**Если** предусловие* **I** *истинно до начала работы программы* **S**,
* **ТО** **S** завершится, **И** после завершения **S** будет истинно постусловие* **R**”

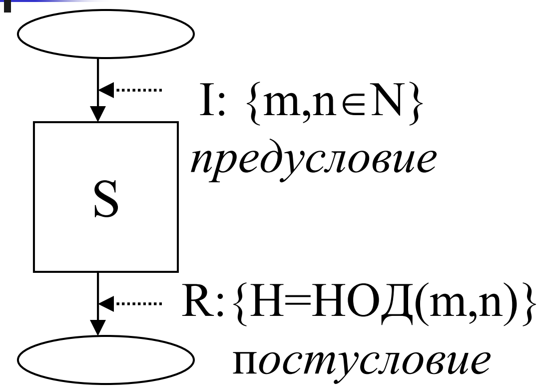
Это полная (тотальная, total) корректность программы: [I] S [R]

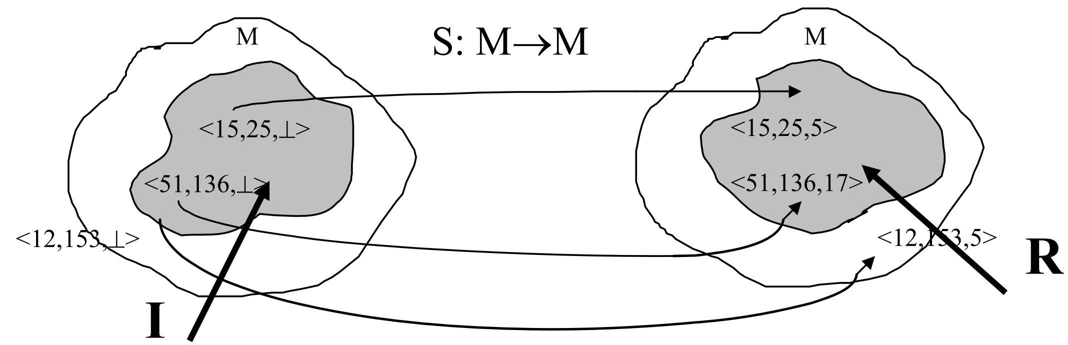
Total correctness = Partial correctness + Termination



- *Входной предикат* (или *предусловие*) определяет, при каких возможных значениях входных переменных должна работать программа S
- *Выходной предикат* (или *постусловие*) определяет какие значения выходных переменных программы S являются корректными при условии, что предусловие выполняется

Свойство спецификации программ





Спецификация требований не связана с алгоритмом!

Примеры:

все сортировки $I: (\forall i \in 1,\ldots,n)\ x_i \in \Re$ $R: (\forall i \in 1,\ldots,n-1)\ x_i \le x_{i+1}$

все программы нахождения НОД I: (m, n∈N) R: H= НОД(m,n)}

Простые примеры. Частичная корректность

{ I } S {R} – частичная корректность программы S относительно предусловия I и постусловия R

Пример: {X =1 } *S* {X = 2}

Если X=1 до начала программы S*, И S завершится, ТО после завершения* S *X=2*

{X =1 } *X:=X+1* {X = 2}	утверждение истинно
{X =1 } *X:=*X+2 {X = 2}	утверждение ложно
{X=1 } *while True do Skip* {X=2}	утверждение истинно

Простые примеры. Полная корректность

[I] S [R] – полная корректность S относительно предусловия I и постусловия R

Пример: [X =1] *S* [X = 2]

Если до начала программы S *X равно 1, ТО S завершится И после завершения* S *X равно 2*

[X=1] *X:=X+1* [X=2] утверждение истинно

[X=1] *X:=2; while True do Skip* [X=2] утверждение ложно (не завершается)

Завершение программы доказывается дополнительно к доказательству частичной корректности

Доказать завершение может быть сложно

Простые примеры

- {True} S {R} –

  если S завершится, будет выполнено условие R
- {P} S {True} –

  истинно всегда, для любых P и S
- [True] S [R] –

  при любых исходных данных программа S завершается и ее результат удовлетворяет R
- [I] S [True] –

  если до начала программы S ее состояние удовлетворяет I, то она остановится (завершится)

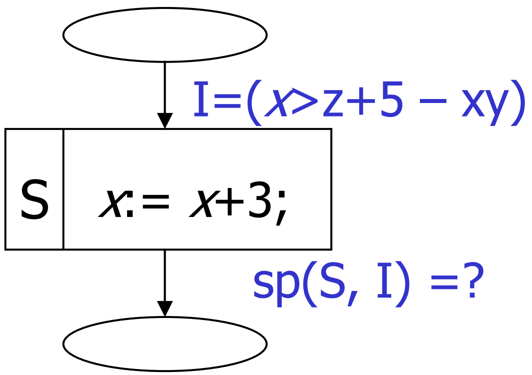
Это только внешняя спецификация

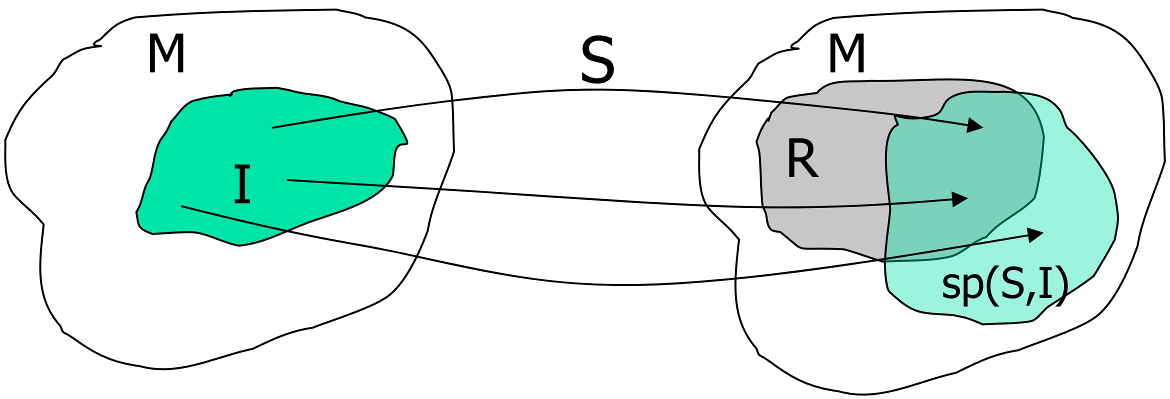
Мы не рассматривали программу, что она делает

Программа как преобразователь предикатов

Программа преобразует данные, следовательно изменяется состояние программы. Поэтому и утверждения, которые были справедливы до начала программы, изменятся

Программу можно рассматривать как *ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЬ ПРЕДИКАТОВ* (Р. Флойд). По предусловию I в начале программы можно вычислить сильнейшее постусловие (strongest postcondition), sp(S,I)



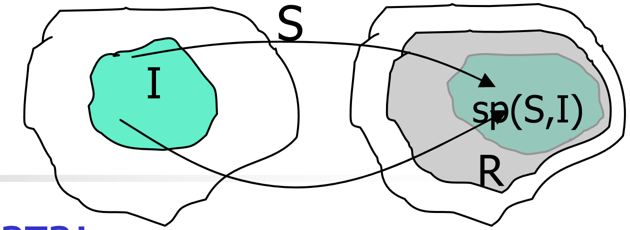


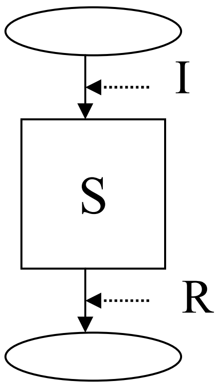
Каким предикатом описывается множество тех векторов программных переменных, в которые преобразовались по завершении программы S все те вектора, которые удовлетворяли I до начала работы S?

После *завершения* программы S *x* возрастет на 3

Поэтому, если I ≡ *x*>z+5 - xy, то sp(S, I) ≡ *x*>z+8 – xy + 3y

Корректность программы как преобразователя предикатов





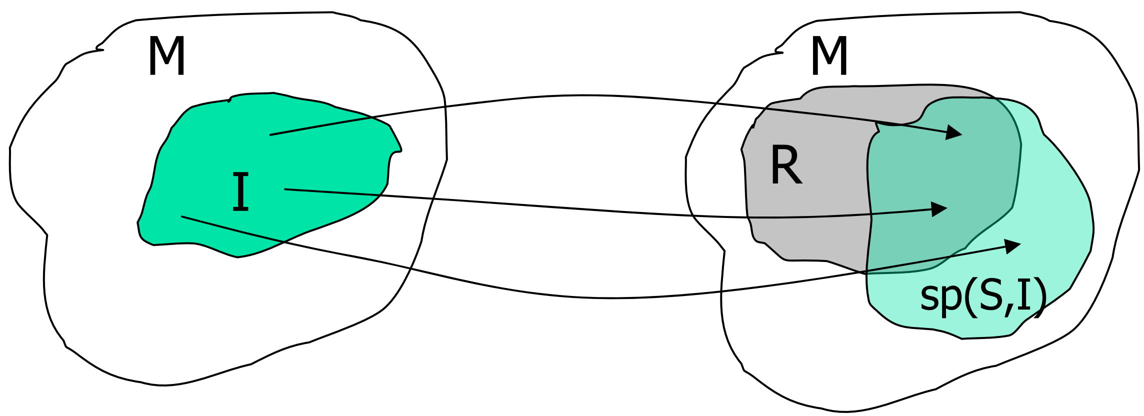
Итак, у нас есть программа S и три предиката:

I – предусловие - условие, которому должны удовлетворять программные переменные до выполнения программы

R – постусловие, которому должны удовлетворять программные переменные после выполнения программы (постусловие)

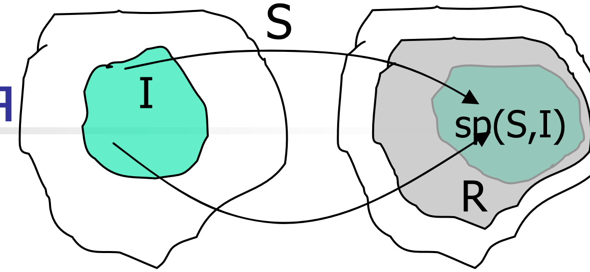
sp(S,I) – сильнейшее постусловие, которому точно удовлетворяют программные переменные после выполнения программы S после ее завершения, если они удовлетворяли предусловию I

Какое между ними должно быть соотношение, чтобы программа была корректна?



Программа S (частично) корректна тогда и только тогда, когда sp(S,I) целиком лежит в R, т.е. sp(S,I) $\Rightarrow$R

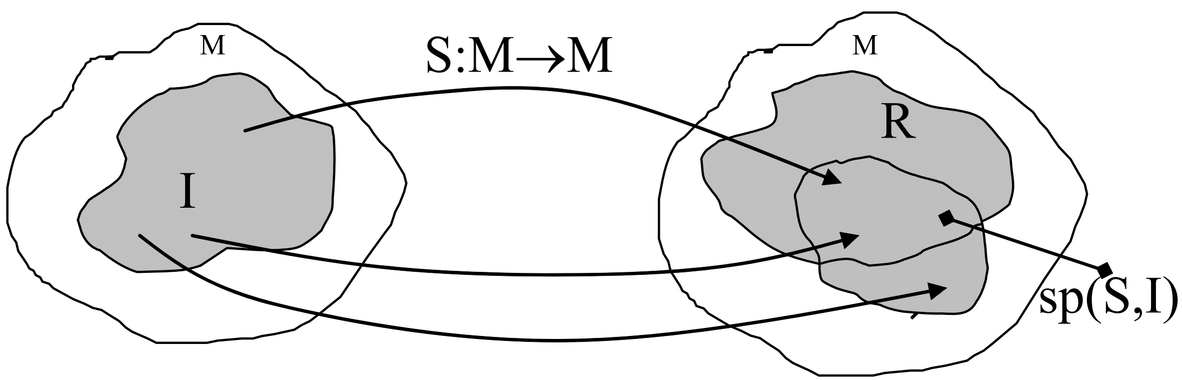
Проверка корректности программы на основе сильнейшего постусловия



Спецификация требований к программе S:

Пусть заданы S, предусловие **I** и постусловие **R** (ASSERTIONS)

{I} S {R}: ***если*** I *истинно до начала* S, ***то*** *после завершения* S утверждение R станет *истинным*

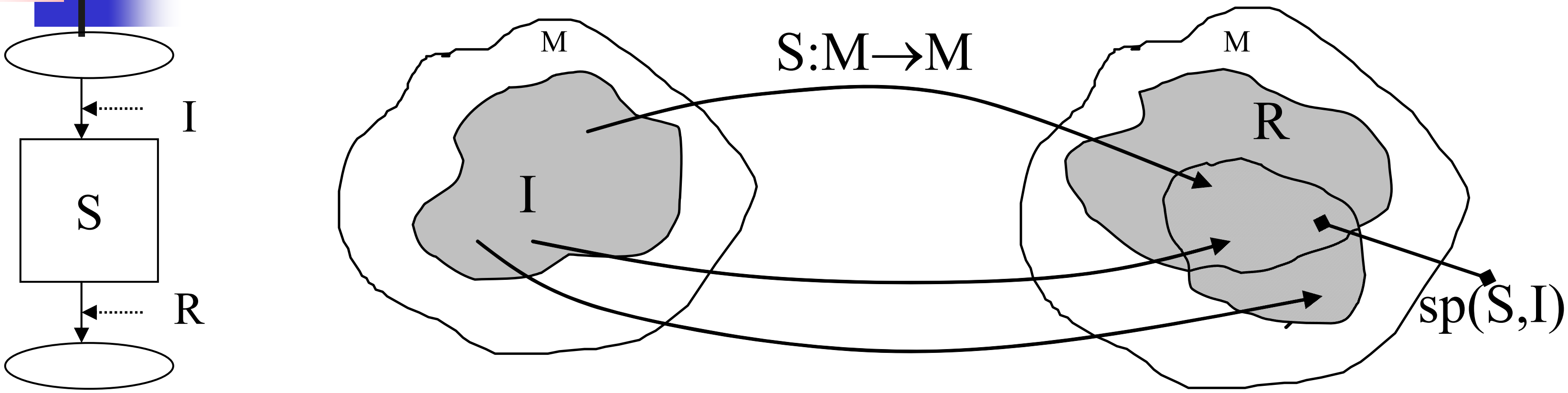


Теорема. {I}S{R} ≡ (sp(S,I) ⇒ R)

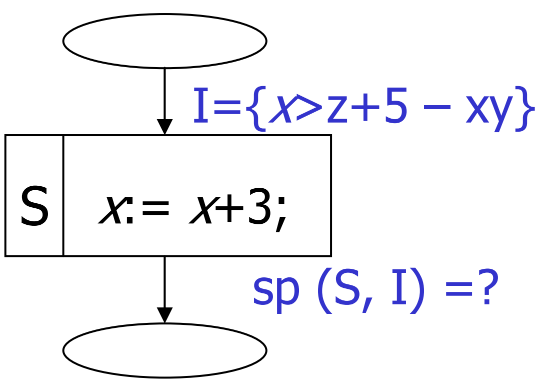
т.е. {I}S{R} *истинно тогда и только тогда, когда* R является логическим следствием sp(S,I)

Программа S частично корректна относительно предусловия I и постусловия R тогда и только тогда, когда sp(S,I) ⇒ R

Как определить сильнейшее постусловие программы?



- Правила преобразования предикатов операторами программы (т.е. правила построения сильнейшего постусловия sp(S,I) по заданным программе S и предикату I) являются определением формальной семантики (смысла) программы.
- ***sp(S,I) - сильнейшее*** *постусловие, поскольку предикату* sp(S, I) *удовлетворяют только те заключительные состояния программы* S, *в которые могут перейти все начальные состояния* S, *удовлетворяющие* I



Как *формально* определить правила преобразования *любого* предиката операторами языка?

Возьмем простейший оператор – оператор присваивания

Как операторы языка преобразуют предикаты?

I={*x*>z+5 – xy}
x:= *x*+3;
sp (S, I) =?

Определим *формально*, как операторы языка преобразуют *любой* предикат. Пусть I(*x*) – предусловие оператора *x* :=f(*x*)

Обозначим x′ значение *x после завершения* программы *x* :=f(*x*)

Очевидно, x′= f(*x*) (*именно равно, а не присвоить*!)
sp(S, I) = I(*x*) (старое x не изменилось! I формулировалось для старых значений x, и это соотношение для старого значения x осталось)
Но sp должно быть выражено для новых значений x, т.е. для x′

Как выразить старое значение x через новое?

Очевидно, что соотношение между старым *x* и новым x′: $x = f^{-1}(x')$
Таким образом: sp (x:=f(x), I(x)) = I (f^{-1}(x))

Это - *формальная семантика* оператора присваивания

Для нашего примера: x′ := f(x) = x+3; x = x′-3; f^{-1}(x)=x-3;
sp(S, I) = (x-3) > z+5 – (x-3)y ≡ x > z+8 – xy + 3y

Школьный пример

- Задача для 7 класса:

  "Если график функции $y = x^2 - 6x + 2$ сдвинуть на одну единицу вправо вдоль оси x, то график какой функции получится?"

Задачу можно сформулировать в наших терминах:

$I=\{y = x^2 - 6x + 2\}$

$\quad x := x+1;$

$sp\ (S, I) = ?$

$$sp\ (S, I) = sp\ (x{:=}f(x), I(x)) = I(f^{-1}(x)) =$$

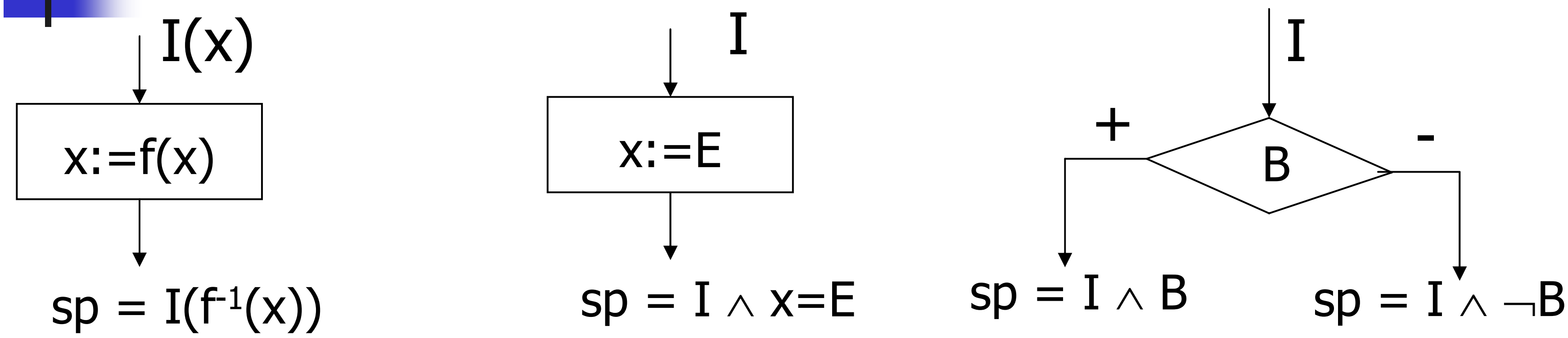
$$\{ y = (x-1)^2 - 6(x-1) + 2 = \{x^2 - 8x + 9\}$$

Ответ:

После сдвига графика на 1 вправо по оси X, получим график функции

$y = x^2 - 8x + 9$

Сильнейшее постусловие программы: формальная семантика

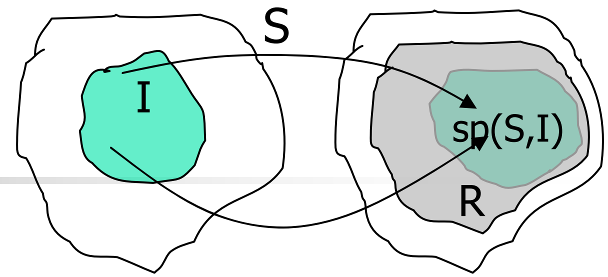


Формальная семантика операторов программы

Она строится только для ограниченных программ:

- на структурном языке программирования (фактически, блок-схемы)
  - без массивов
  - без использования адресной арифметики
  - без подпрограмм
  - без взаимодействия с окружением
  - … … …

Проверка корректности простейших программ



Примеры

	S1	S2	S3	S4
I	x+y=10;	x+y=10;	x =10; y=z;	x =10y+z/y-1;
S	z:=x+y	x:=x+2	x:=x+y	x:=xy+y
R	z=10;	x+y>11;	z > x;	x ≥ z;

$$sp(S, I) \Rightarrow (?)\ R$$

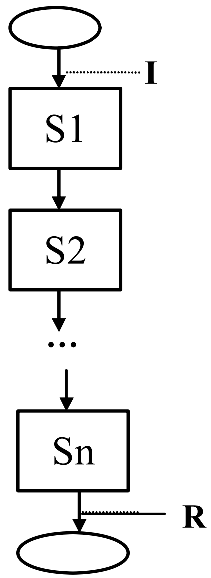
S1: sp(S1, I) ≡ (x+y=10) & (z=x+y);   sp(S1, I) ⇒ z=10   S1 корректна

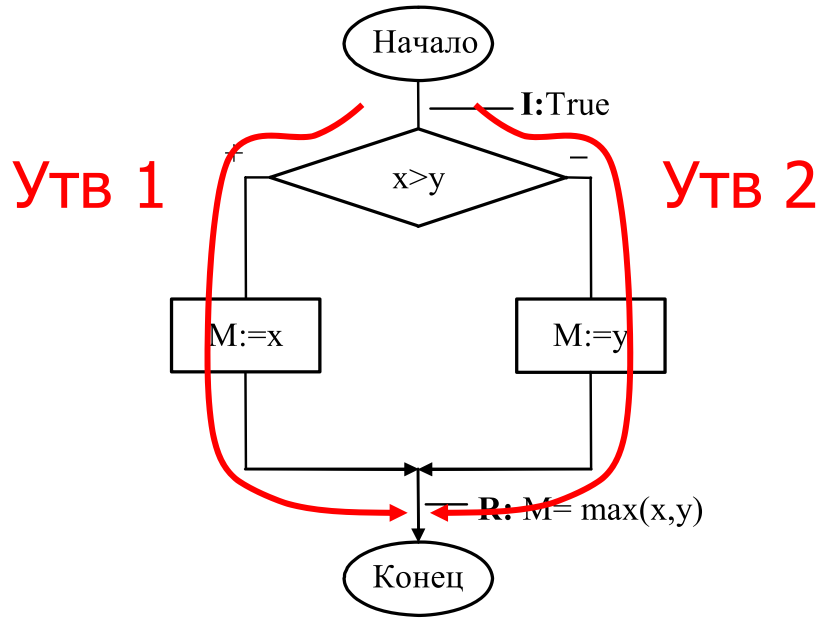
S2: sp(S2, I) ≡ (x-2+y=10);   sp (S2, I) ⇒x+y >11   S2 корректна

S3: sp(S3, I) ≡ (x-y=10) & (y=z);   [sp(S3, I) ⇒ ? z>x]   S3 некорректна

S4: sp(S4, I) ≡ (x-y)/y=10y+z/y-1 ≡ x = $10y^2$+z ; sp(S4, I)⇒? x≥z S4 корректна

Доказательство корректности ациклических программ: “протаскивание” предикатов



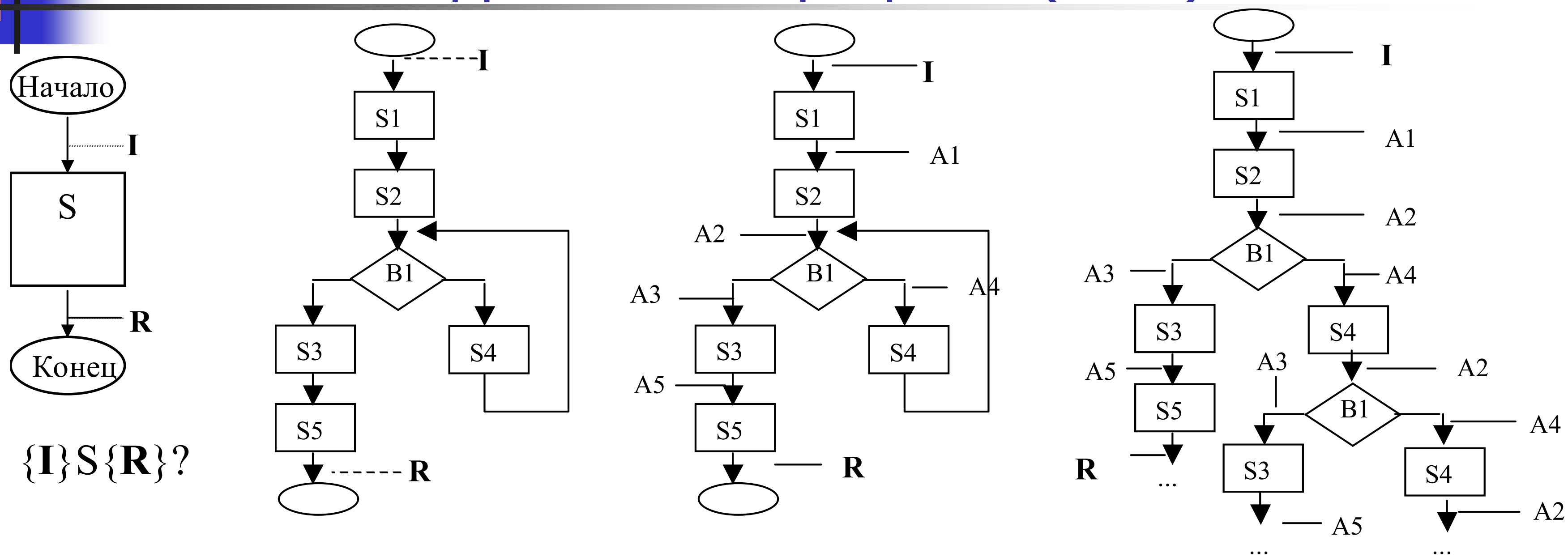


Для доказательства аннотированной программы поиска максимума двух значений, x и y, нужно доказать истинность двух предикатов:

sp(S,I)⇒R: Утверждение 1: True $\wedge$ (x>y) $\wedge$ (M=x) $\Rightarrow$ M=max(x,y)

Утверждение 2: True $\wedge$ $\neg$(x>y) $\wedge$ (M=y) $\Rightarrow$ M=max(x,y)

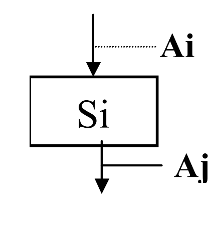
Индуктивный метод Р.Флойда доказательства частичной корректности программ (1967)



{**I**}S{**R**}?

Роберт Флойд: каждая стрелка блок-схемы снабжается утверждением, и для каждого блока Si доказывается истинность утверждения {Ai} Si {Aj}

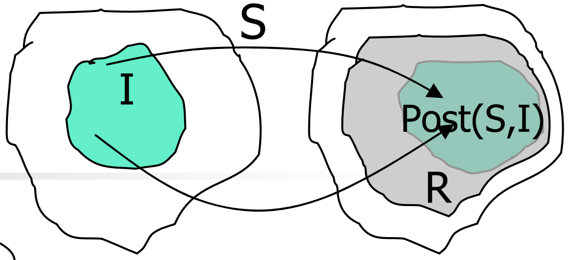
Теорема. Пусть для каждого утверждения {Ai} Si {Aj} доказана его истинность. Тогда, если **I** истинно, то каждое утверждение, встретившееся на пути вычислений, (в том числе и R) истинно



По индукции следует {**I**}S{**R**} – но только ***если программа завершается*** (т.е. если **R когда-нибудь** встретится на каждом пути)

Ai - Assertions

Пример: программа нахождения максимума



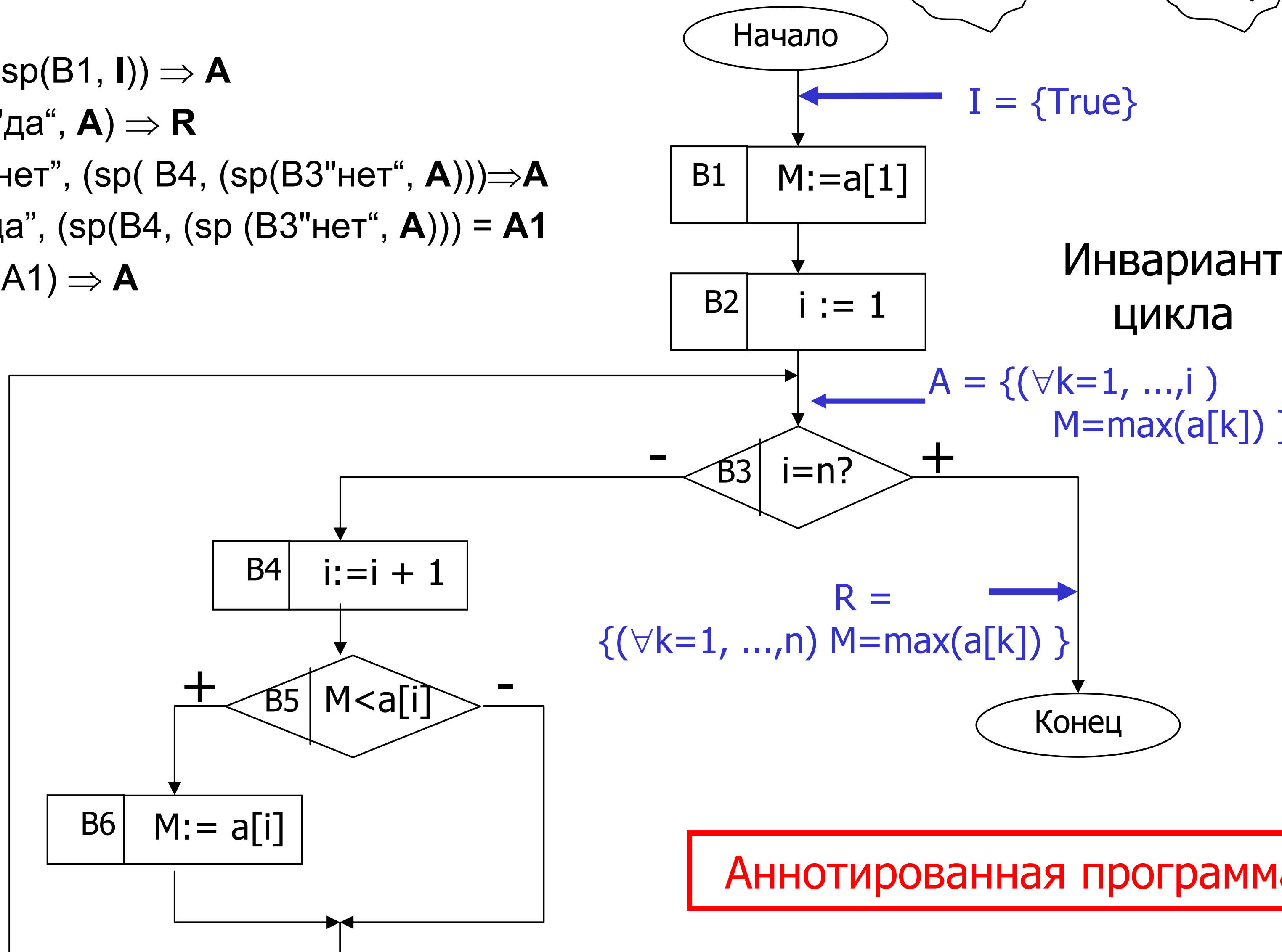
T1: sp (B2, sp(B1, **I**)) ⇒ **A**

T2: sp (B3 "да“, **A**) ⇒ **R**

T3: sp(B5"нет”, (sp(B4, (sp(B3"нет“, **A**)))⇒**A**

T4: sp(B5"да”, (sp(B4, (sp (B3"нет“, **A**))) = **A1**

T5: sp(B6, A1) ⇒ **A**



Аннотированная программа

Инвариант цикла: задача о кофейных зернах

Задача. В банке находится несколько черных и белых кофейных зерен

- Пока это возможно, повторяем следующий процесс:
  случайно выбираем из банки два зерна;

  если они одного цвета, то выбрасываем их, а в банку кладем черное;

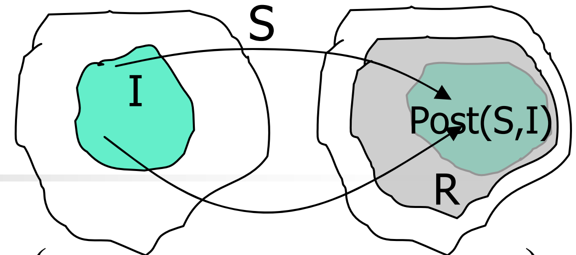
  если они разного цвета, то черное выбрасываем, белое возвращаем

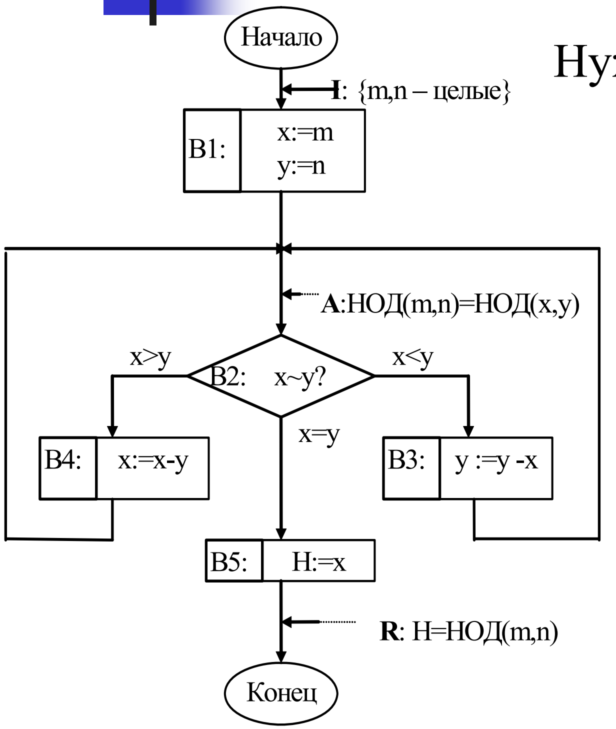
  В конце концов в банке останется всего одно зерно
- **ВОПРОС:** какого цвета это оставшееся зерно, если известно, сколько было вначале в банке черных и белых зерен?
- Попытка решить задачу, используя тестовые примеры, обычно не приводит к решению. Нужно задачу, алгоритм ПОНЯТЬ!
- Если решение каким-то образом найдено, то обосновать его почти невозможно без привлечения понятия *инварианта цикла*, т.е. такого свойства, которое будет истинным вначале и остается истинным после выполнения каждого шага цикла
- Инвариант: четность белых не меняется. Поэтому :

  Решение : *было четное число белых – останется черное,*
  было нечетное число белых – останется белое

  Гарантия завершения: на каждом шаге число зерен уменьшается на 1

Доказательство частичной корректности программы НОД





Нужно доказать четыре утверждения (истинность предикатов):

1. sp(B1, **I**) $\Rightarrow$ **A**
2. sp(B3, sp($B2_{x<y}$, A)) $\Rightarrow$ **A**
3. sp(B4, sp($B2_{x>y}$, A)) $\Rightarrow$ **A**
4. sp(B5, sp($B2_{x=y}$, A)) $\Rightarrow$ **R**

или:

1. m,n – целые $\wedge$ x=m $\wedge$ y=n $\Rightarrow$ НОД(m,n)=НОД(x,y)
2. x<y+x $\wedge$ НОД(m,n)=НОД(x,y+x) $\Rightarrow$ НОД(m,n)=НОД(x,y)
3. x+y>y $\wedge$ НОД(m,n)=НОД(x+y,y) $\Rightarrow$ НОД(m,n)=НОД(x,y)
4. x=y $\wedge$ НОД(m,n)=НОД(x,y) $\wedge$ H=x $\Rightarrow$ H=НОД(m,n)]

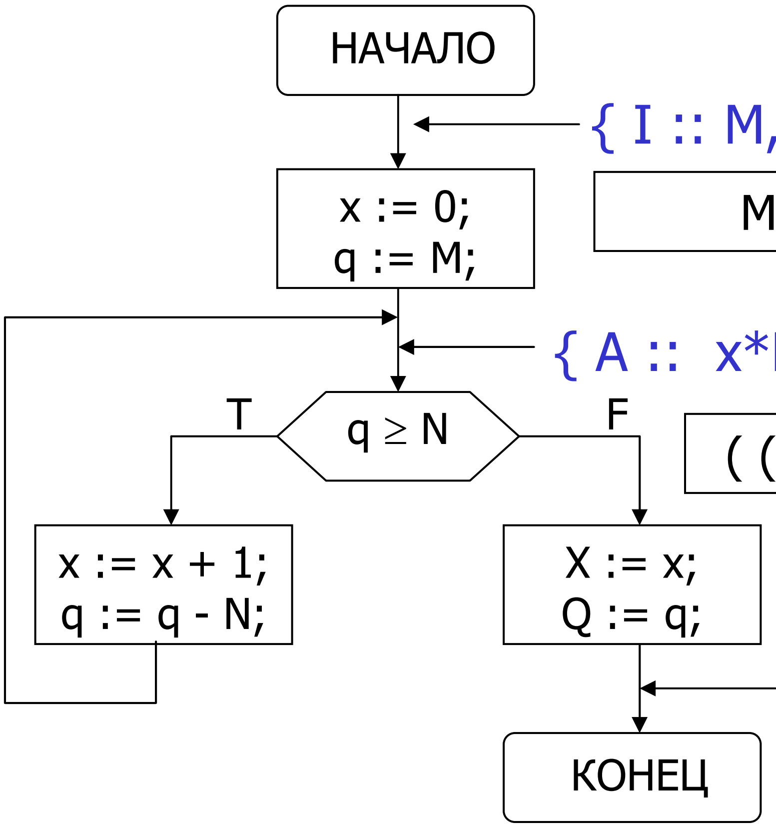
Программа снабжается кроме **I** и **R** ***только одним*** дополнительным утверждением: ***инвариантом цикла*** A

Программа ***частично корректна:*** при отрицательном m либо n программа входит в бесконечный цикл

Формулировка утверждений требует проникновения в суть алгоритма

Пример: программа целочисленного деления

Доказываем истинность трех утверждений



$\{ I :: M, N \in \aleph \}$

$M, N \in \aleph \wedge x=0 \wedge q=M \Rightarrow x*N + q = M$

$\{ A :: x*N + q = M \}$

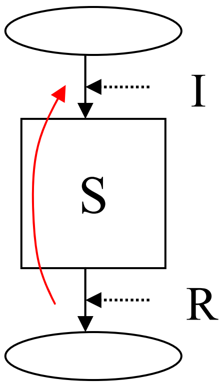
$((x-1)*N + q+N = M) \wedge q \geq N \Rightarrow (x*N + q = M)$

$\{ R :: X*N + Q = M \wedge Q<N \}$

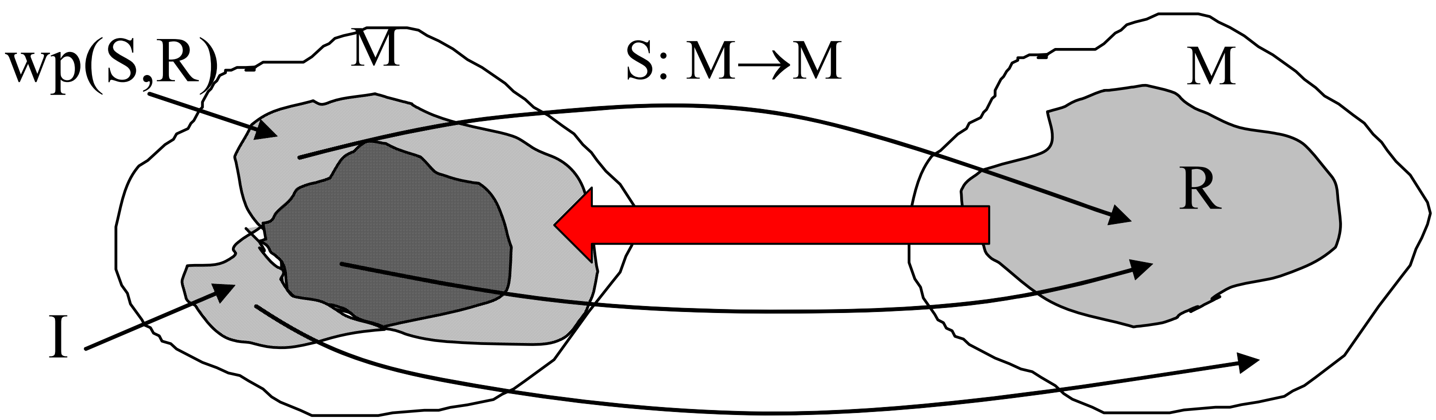
$(x*N + q = M) \wedge q<N \wedge X=x \wedge Q=q \Rightarrow$
$(X*N + Q = M \wedge Q<N)$

- Программа находит частное X и остаток Q от деления M на N
- Программа частично корректна. При N=0 она не завершается

Слабейшее предусловие программы

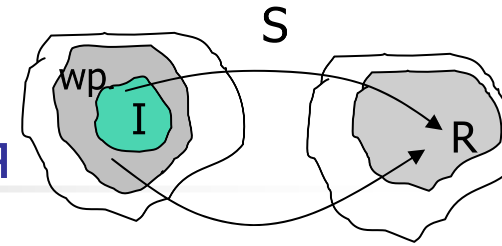


Формальная семантика программы – слабейшее предусловие, weakest precondition: wp(S,R)– *предикат, которому удовлетворяют **все те** начальные состояния программы* S, *которые неизбежно приведут к такому заключительному состоянию* S, которое будет *удовлетворять* заданному предикату. Введено Эдсгером Дейкстрой в его книге “Дисциплина программирования”



Программа S корректна, если I $\Rightarrow$ wp(S,R)

Вычисление слабейшего предусловия



wp(S,R) = ?
x:= x+3;
z:= 2;
{R: x>z}

Неформально: ***После*** *завершения* программы *x* возрастет на 3, а z станет равно 2. Для того, чтобы после завершения программы *x стало больше z,* нужно, чтобы *до начала программы* было *x*>-1

Определим *формально,* как по *любому* постусловию-предикату R и программе S построить слабейший предикат wp(S,R).

Пусть R(x) – предикат *после* выполнения оператора x := f(x). Обозначим x'- значение x *после завершения* оператора x := f(x).

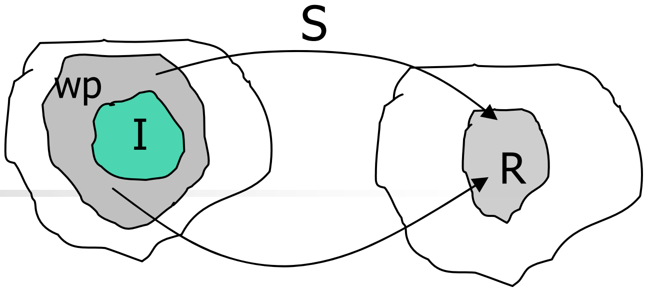
Следовательно, x' = f(x).

Предикат wp(S,R) выражен через новое значение x, т.е. через x'.

Отсюда wp(S,R) = R(x') = R(f(x)).

Для примера: wp(S, R) $\equiv$ $x' > z' \equiv x+3 > 2 \equiv x > -1$, т.е. получено то соотношение, которое ранее было найдено рассуждениями

Доказательство корректности простейших программ



Примеры

I: x+y=10;
S1 z:=x+y
R: z=10;

I: x+y=10;
S2 x:=x+2
R: x+y>11;

I: x =10; y=z;
S3 x:=x+y
R: z > x;

I: x =10y+z/y-1;
S4 x:=xy+y
R: x ≥ z;

I ⇒(?) wp(S, R) Следует ли wp из предусловия?

S1: wp(S1, R) ≡ (x+y=10); x+y=10 ⇒ (x+y=10) S1 корректна

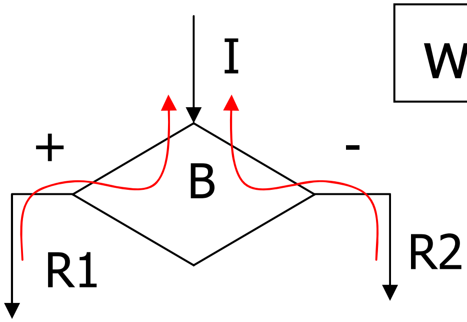
S2: wp(S2, R) ≡ (x+2+y>11); x+y=10 ⇒ (x+2+y>11) S2 корректна

S3: wp(S3, R) ≡ (z>x+y); (x=10)&(y=z) ⇏ (z>x+y) S3 некорректна

S4: wp(S4, R) ≡ (xy+y>z); x =10y+z/y-1 ⇒ (xy+y>z) S4 корректна

Использование wp очень упрощает построение формулы преобразованного предиката

Корректность условного оператора: sp и wp



$wp(B+, R1) = B \Rightarrow R1$

$wp(B-, R2) = \neg B \Rightarrow R2$

Являются ли доказательства с помощью sp и wp эквивалентными??

Доказательство с помощью сильнейшего постусловия sp:
$I \,\&\, B \Rightarrow R1;\quad I \,\&\, \neg B \Rightarrow R2$

Доказательство с помощью слабейшего предусловия wp:
$I \Rightarrow (B \Rightarrow R1)\,;\; I \Rightarrow (\neg B \Rightarrow R2)$

Сведем обе формулы к каноническому представлению - СКНФ

$I \,\&\, B \Rightarrow R1 =$ свойство импликации
$\neg(I \,\&\, B) \vee R1 =$ формула де Моргана
$\neg I \vee \neg B \vee R1$

$I \Rightarrow (B \Rightarrow R1) =$ свойство импликации
$\neg I \vee (\neg B \vee R1) =$ ассоциативность
$\neg I \vee \neg B \vee R1$

Аксиоматический метод А.Хоара (1969)

Метод Флойда сводит доказательство программы к доказательству формул логики предикатов, с использованием свойств целых, операций арифметики и т.д.

Антони Хоар предложил свести верификацию к строгому доказательству теорем, рассматривая формальную аксиоматическую теорию с аксиомами и правилами вывода, обеспечивающую формальное доказательство порождаемых утверждений как теорем этой теории

А.Хоар выбрал язык программирования, который оперирует только с целыми и имеет следующие операторы:

x:= f	- оператор присваивания
S1; S2	- последовательность операторов
if B **then** S1 **else** S2 **fi**	- условный оператор
while B **do** S **od**	- оператор цикла

Логика программирования

$$\frac{H1;\ H2;\ \ldots,\ Hn}{C}$$

Логическая система состоит из:

- Правил построения формул теории
- Выделенных формул - аксиом
- Правил вывода теорем - одних истинных формул из других истинных формул

Логика программирования – это логическая система для доказ св-в программ:

- Формула – это предикат или тройки {P}S{Q}, где P и Q – предикаты, S - программа
- Аксиомы (для указанного языка): – одна аксиома присваивания $\{P_{X \leftarrow E}\}$ X:=E {P}, аксиомы арифметики для целых и для прикладной области (например, НОД(x,x) = x)
- Правила вывода:

Правило композиции:

$$\frac{\{P\}\ S1\ \{P1\};\ \{P1\}\ S2\ \{Q\}}{\{\ P\ \}\ S1;\ S2\ \ \{\ Q\ \}}$$

Правило следствия:

$$\frac{I \Rightarrow P;\ \{\ P\ \}\ S\ \{\ Q\ \};\ Q \Rightarrow R}{\{\ I\ \}\ \ S\ \ \{\ R\ \}}$$

Правило итерации:

$$\frac{\{\ P\&B\ \}\ \ S\ \ \{\ P\ \}}{\{\ P\}\ \ \textbf{while}\ B\ \textbf{do}\ S\ \textbf{od}\ \{\ P\&\neg B\}}$$

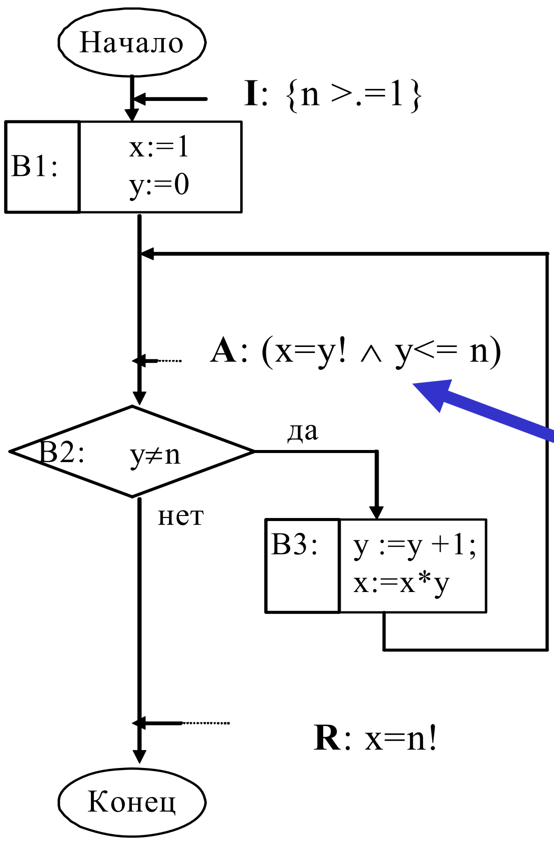
Правило выбора 1:

$$\frac{\{P\&B\}\ S\ \{Q\};\ \ P\&\ \neg B \Rightarrow Q}{\{\ P\ \}\ \textbf{if}\ B\ \textbf{then}\ S\ \textbf{fi}\ \{\ Q\ \}}$$

Правило выбора 2:

$$\frac{\{P\&B\}\ S1\ \{Q\};\ \ \{P\&\ \neg B\}\ S2\ \{Q\ \}}{\{\ P\ \}\ \textbf{if}\ B\ \textbf{then}\ S1\ \textbf{else}S2\ \textbf{fi}\ \{\ Q\ \}}$$

Пример аннотированной программы: n!



{I: n≥1}
x:=1;
y:=0;
{A: x=y! ∧ y≤n }
  while (y≠n)
    do
    y:=y+1;
    x:=x*y
  od
{ R: x=n!}

Инвариант

Использование аннотированных программ

```
{I: n≥1}
x:=1;
y:=0;
{A: x=y! ∧ y≤n }
   while (y≠n)
      do
      y:=y+1;
      x:=x*y
   od
{ R: x=n!}
```

- Во многих языках программирования в программы могут быть добавлены аннотации (assertions)
- При выполнении программы каждая аннотация проверяется на текущих значениях программных переменных, и в случае, если аннотация вычисляется как false, генерируется прерывание "ОШИБКА ВРЕМЕНИ ВЫПОЛНЕНИЯ ПРОГРАММЫ"

Примеры доказательства методом Хоара

Примеры:

- $\{X = 1\}\ X:=X+1\ \{X = 2\}$ теорема
- $X=1 \Rightarrow X+1 = 2$ теорема
- $\{X = 1\}\ X:=X+1\ \{X = 3\}$ не теорема

Доказательство – это цепочка формул, каждая из которых либо аксиома, либо теорема, полученная из теорем и аксиом по правилам вывода

Доказать:

$\{ x > 3 \}$
if $x < 25$ **then** $x := 2 * x$ **fi**
$\{ x \geq 8 \}$

Структура:

$\{ P \}$
if B **then** S **fi**
$\{ Q \}$

Доказательство:

1. $\{ 2*x>=8 \}\ x := 2*x\ \{ x \geq 8 \}$ - Аксиома $\{R\}\ S\ \{Q\}$
2. $(x > 3)\ \&\ (x < 25) \Rightarrow (2*x>=8)$ $P\&B \Rightarrow R$
   доказываем из аксиом арифметики (x – целое!)
3. $\{P\ \&\ B\}\ S\ \{Q\}$ - по Правилу следствия,
   поскольку $\{R\}\ S\ \{Q\}$ и $P\&B \Rightarrow R$
4. $x>3\ \&\ x >= 25 \Rightarrow x \geq 8$ доказываем $P\&\neg B \Rightarrow Q$
5. $\{ P \}$ **if** B **then** S **fi** $\{ Q \}$ по Правилу выбора 1

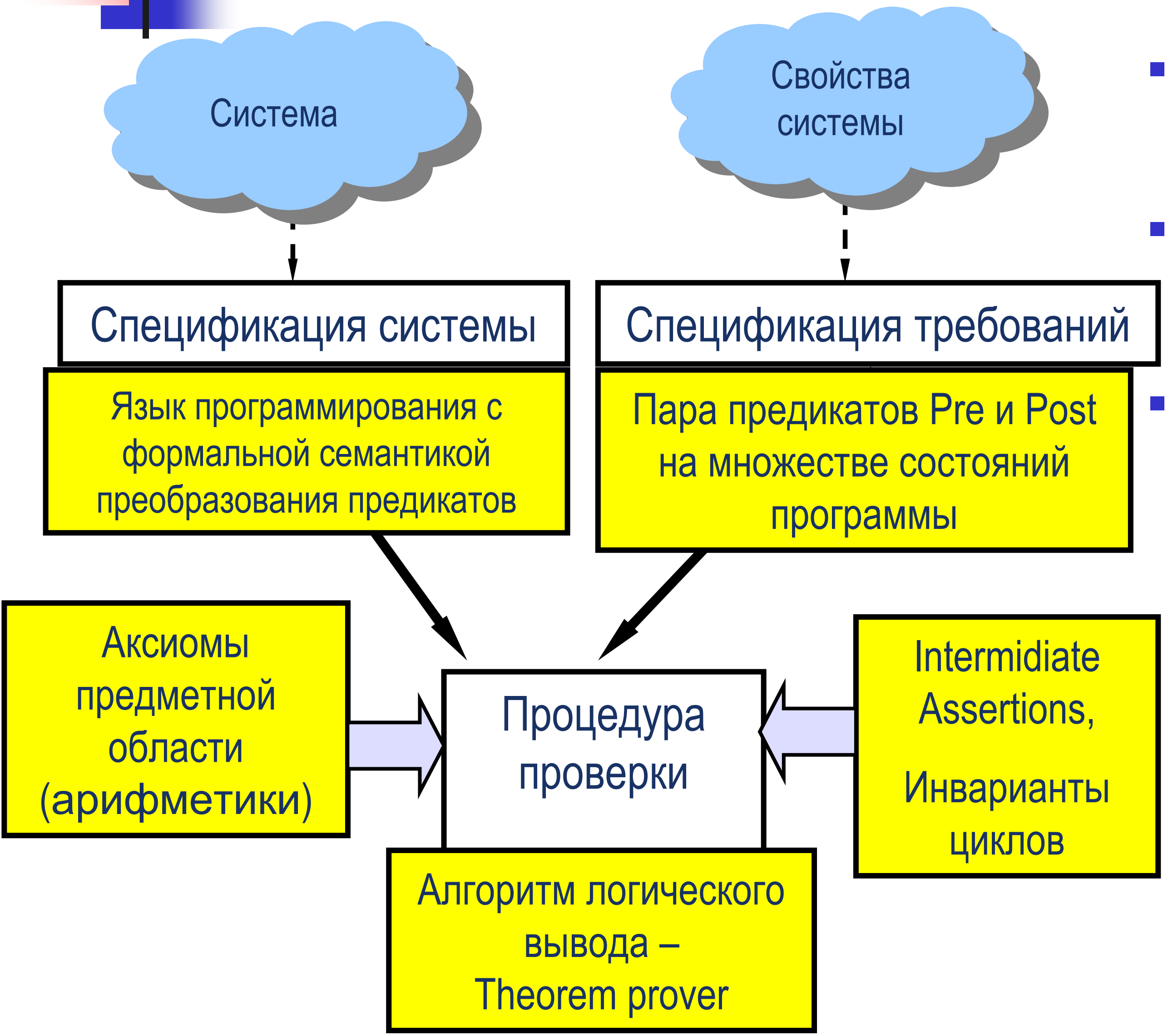
Правило следствия:

$$\frac{I \Rightarrow P;\ \{ P \}\ S\ \{ Q \};\ Q \Rightarrow R}{\{ I \}\ S\ \{ R \}}$$

Правило выбора 1:

$$\frac{\{P\&B\}\ S\ \{Q\};\ \ P\&\neg B \Rightarrow Q}{\{ P\}\ \textbf{if}\ B\ \textbf{then}\ S\ \textbf{fi}\ \ \{Q \}}$$

Индуктивный метод верификации программ (HOL, Isabelle , …)



- Спецификация – на языке программирования
  - Для операторов языка определена ***семантика преобразования предикатов***
- Спецификация требований
  - Описываются как пара вход-выходных утверждений
  - Добавляются инварианты циклов и промежуточные утверждения, которые отражают идею алгоритма
- Процедура проверки
  - Не очень эффективна (частично автоматизированная) система доказательства теорем, работает с помощью пользователя)

Общая характеристика дедуктивной верификации

- Дедуктивная верификация имеет две составных части:
  - верифицируемые свойства представляются в виде предикатов – логических формул, а программа – как преобразователь предикатов;
  - доказательство корректности программы сводится к доказательству выполнимости логической формулы дедукцией (логическим выводом) в подходящем логическом исчислении (со сформулированными аксиомами и правилами вывода)
- Семантика программ (то, как конструкции программы преобразуют предикаты) может быть представлена очень точно:
  - неограниченные структуры данных (целые, списки, деревья и т.п.);
  - неограниченные программные конструкции (рекурсия, циклы)

  Это позволяет представить и проверить тонкие свойства программ
- Достижение этой точности имеет свою цену: трудно предсказать, какой объем ресурсов (времени, памяти) может потребоваться для выполнения задачи верификации конкретной программы: в общем случае, проблема доказательства свойств программ, работающих с бесконечными структурами, алгоритмически неразрешима

Пример верификации с помощью theorem prover (с использованием системы Isabelle)

- Сообщение СМИ 01.10.2009

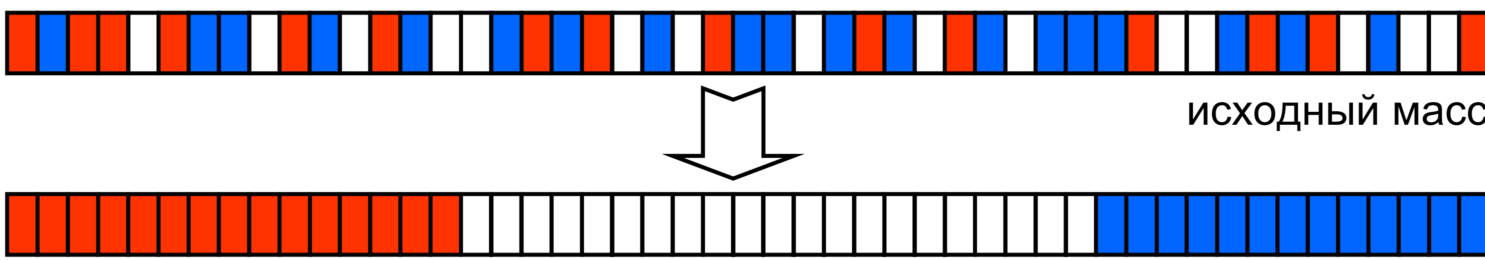
  - Research Centre of Excellence компании NISTA (Australia) объявил о завершении работы по формальному доказательству корректности ядра ОС. Доказанная ОС - The Secure Embedded L4 (seL4) microkernel содержит 7,500 строк C code. Было формально доказано 10,000 промежуточных теорем, доказательство заняло 200,000 строк. Доказательство было поддержано интерактивной системой доказательства теорем Isabelle

  - Это результат 4-х летнего труда группы из 12 исследователей NICTA под руководством Dr Klein, PhD студентов и нескольких других работников

  - Этот экстраординарный результат открывает путь к разработке нового поколения ПО с беспрецедентным уровнем надежности. Это одно из самых длинных из когда-либо выполненных формальных доказательств с помощью формальных средств theorem-proving

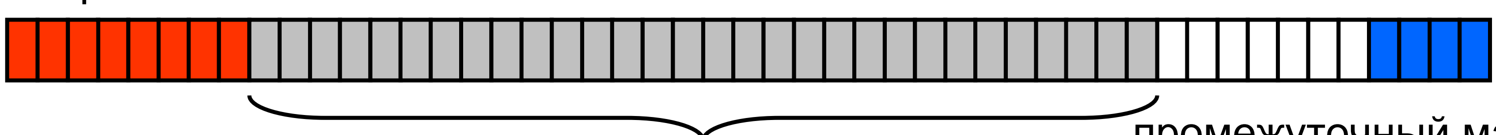
Разработка корректных программ

- Э.Дейкстра: “*Программы нужно сразу строить корректными*”.
  В книге “Дисциплина программирования” приведено множество примеров такого подхода к разработке
- “Голландский национальный флаг” – сортировка массива из трех типов объектов – “красных”, “белых” и “синих”, которые должны в результате стоять именно в этом порядке. Программа должна справляться со всеми случаями вырождения: отсутствием одного или нескольких цветов



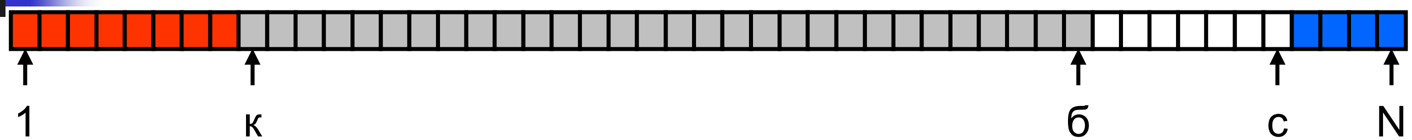
Как подойти к разработке программы?

Выбрать ИНВАРИАНТ!



Крайними состояниями инварианта являются исходный и результирующий массивы

Формализация инварианта



A $\equiv$ [$\forall$i: (1$\le$i<к)] M[i] - красный
& [$\forall$i: (б<i$\le$с)] M[i] - белый
& [$\forall$i: (с<i$\le$N)] M[i] - синий
& [$\forall$i: (к$\le$i$\le$б)] M[i] - неотсортированный
& (к$\ge$1) & (б$\le$с) & (с$\le$N)

Очевидно, что:
A & (к>б) $\Rightarrow$ массив M отсортирован
(массив неотсортированных пуст)

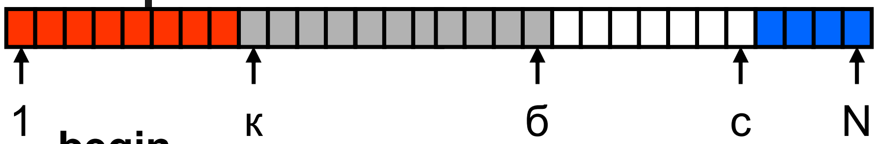
Разработка программы сводится к построению цикла, который при сохранении инварианта уменьшает зону неотсортированных

```
begin
  { [∀i: (1≤i≤N) ] M[i] - неотсортированные}
  к,б,с:=1,N,N;
  /* инвариант A стал истинным */
do
  <пока зона не отсортированных непуста> →
  <уменьшить зону не отсортированных, не изменяя A>
od
  { R≡ массив M отсортирован }
end
```

Программа частично корректна, если A – инвариант цикла

Программа полностью корректна, если зона неотсортированных уменьшается на каждом шаге цикла

Разработка программы, корректной по построению



A ≡ [∀i: (1≤i<к)] M[i] - красный
& [∀i: (б<i≤с)] M[i] - белый
& [∀i: (с<i≤N)] M[i] - синий
& [∀i: (к≤i≤б)] M[i] - неотсортированный
& (к≥1) & (б≤с) & (с≤N)

begin
{ [∀i: (1≤i≤N)] M[i] – неотсортированный }
к,б,с:=1,N,N;
{A ≡ инвариант цикла}
do
к ≤б →
if M[б] = белый → б:=б-1;
[] M[б] = красный → поменять местами (M[б], M[к]); к:=к+1;
[] M[б] = синий → поменять местами (M[б], M[с]); с, б:=с-1, б-1;
fi
od
{R≡массив M отсортирован}
end

Охраняемые команды Дейкстры:

begin
{ I }
S0
{A}
do
G →
if G1 → S1;
[] G2 → S2;
[] G3 → S3
fi
od
{R}
end

Для верификации программы нужно доказать:
1. sp (S0, I) ⇒ A или I ⇒ wp(S0, A)
2. A&¬G⇒R, т.е. A&(к<б) ⇒ R
3 -5. sp(Si, A&G&Gi)⇒ A или A⇒wp(Si, A&G&Gi)
6. ***Завершение программы***: нужно доказать,
что **б-к** уменьшается при каждом прохождении цикла

Guarded Commands – охраняемые команды

Предложены Э. Дейкстрой, использованы и в других приложениях, например, в языке Холзманна Promela (Protocol Meta Language)

В условном операторе при истинности нескольких защит выбирается случайно одна любая. Если все защиты ложны, то это ошибка

Оператор цикла завершается, если ни одна из защит не является истинной

Guarded Command: :: G → Op,

Оператор присваивания: x, y,z := E1,E2,E3

Условный оператор:

if

:: <command1>

:: …

:: <command n>

fi

Оператор цикла:

do

:: <command1>

:: …

:: <command n>

od

Пример: Алгоритм Эвклида в этом языке запишется так:

```
x, y := m, n
do
   :: x>y → x:=x-y
   :: y>x → y:=y-x
od
print x
```

Заключение

- Тестированием нельзя доказать корректность программы
- Тестирование – проверка работы программы на одном конкретном входном ее состоянии. Предикат (ASSERTION) описывает бесконечное множество возможных состояний. Рассматривая программу как преобразователь предикатов, можем рассуждать о корректности программы
- Доказательство корректности программы методом Флойда-Хоара сводится к расстановке утверждений в теле программы и доказательству теорем логики первого порядка, полученных из преобразованных предикатов в некоторой дедуктивной системе
- Спецификация программы – это пара предикатов <*входной-выходной*> для каждого блока. Как минимум, дополнительно требуется один предикат в каждом цикле (*инвариант цикла*) вдобавок к начальному и заключительному. Формулировка утверждений требует проникновения в существо, основные идеи алгоритма, часто требует полного понимания (ultimate understanding) программы
- Формальная семантика языка задается сильнейшим постусловием либо слабейшим предусловием для каждого типа операторов и правилами вывода

Заключение (2)

- Индуктивный метод Флойда и аксиоматический метод Хоара доказывают только частичную корректность программы; полная (total) корректность требует дополнительного доказательства завершаемости
- Метод Хоара – это формализация метода Флойда: сведение доказательства к формальной модели исчисления с аксиомами и правилами вывода, т.е. к аксиоматической системе
- Метод не может быть полностью автоматизирован из-за неполноты логики
- Сегодня есть мощные инструменты, частично автоматизирующие доказательство (например, HOL(Higher Order Logic), Isabelle и PVS (Prototype Verification System))
- Реальное доказательство требует "ручного сопровождения" – определения тысяч детальных лемм
- Пример: Isabelle Verification of BDD Normalization (алгоритм нормализации Брайанта доказан в 2005 г.)
- Пример: доказательство корректности алгоритма деления с плавающей точкой в процессоре AMD5K86 потребовало введение 1600 определений и лемм [1]
- В книге "*Дисциплина программирования*" Э.Дейкстра предложил методику разработки программ совместно с доказательством их корректности, т.е. корректных по построению

[1] Brock B. et.al. *ACL2 theorems about commercial microprocessors*. Proc. of the Formal Methods in Computer-Aided Design, Nov.1996, p.275-293

Персоналии: Роберт Флойд

- Robert Floyd (1936-2001) – выдающийся ученый в области информатики (США)
- Закончил школу в 14, получил Бакалавра в 17, стал профессором в 27 (Carnegie Mellon U), полным профессором в 33 (Станфордского университета).
- Получил премию Тьюринга в 1978 за вклад в методологию в следующих областях CS:
  - создание эффективного надежного ПО
  - терия синтаксического анализа (парсинг)
  - семантика языков программирования
  - автоматическая верификация программ
  - автоматический синтез программ
  - анализ алгоритмов

(Wikipedia)

Персоналии: Антони Хоар

- Sir Charles Antony Richard Hoare (род. 1934), известный, как Антони Хоар или C.A.R. Hoare – выдающийся английский ученый в области информатики
  - наиболее известен созданием Quicksort- наиболее широко используемых алгоритмов сортировки (в возрасте 26 лет)
  - Реализовал Алгол-60
- Разработал также
  - "хоаровскую логику программ" для проверки корректности программ
  - Формальный язык CSP (Communicating Sequential Processes), на основе которого создан язык программирования Occam (след лекция)
- Получил премию Тьюринга 1980 г. за "фундаментальный вклад в определение и разработку языков программирования"

(Wikipedia)

Персоналии: Эдсгер Дейкстра

- Edsger W.Dejkstra (1930 - 2002) – выдающийся голландский ученый в области информатики
  - разработал первую ОС THE для работы с параллельными процессами
  - вместе с двумя другими учеными построил одну из первых ЭВМ X1 (1956) за год. Для разводки печатных плат разработал алгоритм поиска кратчайшего пути на графе, известный как “алгоритм Дейкстры”
  - участвовал в разработке Алгол-60 и компилятора для него
- Разработал также
  - структурное программирование
  - нотацию ПОЛИЗ при трансляции
  - алгоритм банкира для синхронизации процессов при захвате ресурсов
  - семафоры для синхронизации процессов
  - с 1970 года основные интересы – формальная верификация, математическое доказательство корректности. Книга Дисциплина программирования – об этом
- Стал лауреатом премии Тьюринга 1972 г. за “фундаментальный вклад в разработку языков программирования”

(Wikipedia)

Спасибо за внимание

Задачи

1. Доказать корректность:
   - $\{X=x \wedge Y=y\}$ X:=X+Y; Y:=Y-X; X:=X-Y $\{Y=x \wedge X=y\}$
   - {X=R+Y*Q} R:= R-Y; Q:= Q+1 {X= R+Y*Q}

2. Построить программу суммирования элементов массива и доказать ее корректность

3. Разработать программу определения минимального элемента массива и доказать ее корректность

4. Доказать корректность следующей программы возведения *x* в степень *y*:

```
function exponential (x,y);
  int x,y;
  begin
     int i, z;
       z=1; i=1;
       while (i≠y) do
          z*=x; i=i+1;
      return z;
 end
```

5. Построить и доказать программу “*Национальный флаг королевства Маврикий*”. Флаг Маврикия имеет четыре полосы: красная, синяя, желтая, зелёная.

Заключение

- Тестированием нельзя доказать корректность программы
- Тестирование – проверка работы программы на одном конкретном входном ее состоянии. Предикат (аннотация, ASSERTION) описывает бесконечное множество возможных состояний. Рассматривая программу как преобразователь предикатов, можем рассуждать о корректности программы
- Доказательство корректности программы методом Флойда-Хоара сводится к расстановке утверждений в теле программы и доказательству теорем логики первого порядка, полученных из преобразованных предикатов в некоторой дедуктивной аксиоматической теории
- Спецификация программы – это пара предикатов <*входной-выходной*> для каждого блока. Как минимум, дополнительно требуется один предикат в каждом цикле (*инвариант цикла*) вдобавок к начальному и заключительному. Формулировка утверждений требует проникновения в существо, основные идеи алгоритма, часто требует полного понимания (ultimate understanding) программы
- Формальная семантика языка задается сильнейшим постусловием для каждого типа операторов и правилами вывода

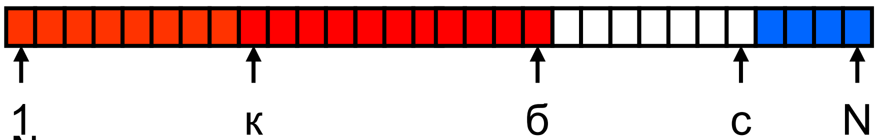
Заключение (2)

- Индуктивный метод Флойда и аксиоматический метод Хоара доказывают только частичную корректность программы; полная (total) корректность требует дополнительного доказательства завершаемости
- Метод Хоара – это формализация метода Флойда: сведение доказательства к формальной модели исчисления с аксиомами и правилами вывода, т.е. к аксиоматической теории
- Метод не может быть полностью автоматизирован из-за неполноты логики
- Сегодня есть мощные инструменты, частично автоматизирующие доказательство (например, HOL(Higher Order Logic), Isabelle и PVS (Prototype Verification System))
- Реальное доказательство требует "ручного сопровождения" – определения тысяч детальных лемм
- Примеры использования системы верификации Isabelle :
  - в 2005 г. была доказана корректность алгоритма нормализации BDD.
  - в 1996 г. была доказана корректность алгоритма деления с плавающей точкой в процессоре AMD5K86. Это потребовало введения 1600 определений и лемм [1]
- В книге "*Дисциплина программирования*" Э.Дейкстра предложил методику разработки программ совместно с доказательством их корректности, т.е. метод разработки алгоритмов, корректных по построению

[1] Brock B. et.al. *ACL2 the*Nov.1996, *orems about commercial microprocessors*. Proc. of the Formal Methods in Computer-Aided Design, p.275-293

Задачи (продолжение)

6. Проверить корректность второго варианта программы "*Голландский национальный флаг"*, анализируя самый левый элемент зоны не отсортированных элементов:




```
begin
  к,б,с:=1,N,N;
do
  к ≤ б →
      if   M[к] = красный → поменять местами (M[к], M[б]); к:=к+1;
        [] M[к] = белый → б:=б-1;
        [] M[к] = синий → поменять местами (M[к], M[с]); с:=с-1;
                          поменять местами элементы (M[к], M[б]); б:=б-1;
      fi
od
End
```

7. Доказать методами Флойда и Хоара программу вычисления факториала
8. Построить программу вычисления факториала по спецификации {X=n} S {Y=n!}