10 $H_0: \ \xi \sim p_0(x) = 1\{(0,1)\}$

$H_1: \ \xi \sim p_1(x) = \frac{e^{1-x}}{e-1}\{(0,1)\}$

Критерий проверки простых H_0 против H_1

Тh Неймана–Пирсона

$H_0: \ \xi \sim F_0(x)$

$H_1: \ \xi \sim F_1(x)$

$W = P(\vec{x_n} \in G_{1кр} \mid H_1) = \iint\limits_{G_{1кр}} L_1(\vec{x_n})\, d\vec{x_n} \to max$

$L_1 = \prod\limits_{i=1}^{n} p_i(x_i)$

два глаза на L:
1. плотность распр выборки
2. функция правдоподобия

т.к. выборка независ. и одинак. распред модель $H_1 \Rightarrow L_1$ – плотность распред выборки

фокус: $L_0(\vec{x_n})$ – при H_0

$W = \iint\limits_{G_{1кр}} \boxed{\frac{L_1(\vec{x_n})}{L_0(\vec{x_n})}} L_0(\vec{x_n})\, dx_n \longrightarrow max$

$l(\vec{x_n})$ – отношение правдоподобия логично предположить, что

$W - \max \longleftrightarrow \ell(\vec{x}_n) - \max$

$\Rightarrow G_{кр}: \ell(\vec{x}_n) \geq C$

C — находится из второго условия:

$\alpha_1 = P(\vec{x}_n \in G_{кр} \mid H_0) \leq \alpha$

$\Rightarrow P(\ell(\vec{x}_n) \geq C \mid H_0) \leq \alpha$

зная распределение ℓ, найдём C

↓

методы $\begin{cases} \text{точный} \\ \text{асимптотический} \\ \text{bootstrap} \end{cases}$

→ зная C, найдём $G_{кр}$ →

→ проверяем, попадает ли выборка в $G_{кр}$

а) построить наиболее мощный критерий проверки этих гипотез по выборке $n=1$ с уровнем значимости α, найти α_1, α_2 и W

$$n=1 \Rightarrow \ell=\frac{L_1(\vec{x_n})}{L_0(\vec{x_n})}=\frac{e^{1-x}}{e-1}\geqslant C$$

$$1-x \geqslant \ln C(e-1)$$

$$x \leqslant 1-\ln C(e-1)=A \Rightarrow \boxed{G_{1кр}: x \leqslant A}$$

второе условие: $\alpha_1=P(x\leqslant A \mid H_0)=\alpha$

$$\int_0^A p_0(x)dx = A=\alpha \Rightarrow \boxed{A=\alpha}$$

$$\Rightarrow \boxed{G_{1кр}: x\leqslant\alpha} \qquad \boxed{\alpha_1=\alpha}$$

$$\boxed{W=} P(x\leqslant\alpha \mid H_1)=\int_0^{\alpha} p_1(x)dx=\frac{1}{e-1}(-1)e^{1-x}\Big|_0^{\alpha}=$$

$$=\boxed{\frac{e}{e-1}\left(1-e^{-\alpha}\right)}$$

$$\boxed{\alpha_2=}1-W=\boxed{\frac{1}{e-1}\left(1-e^{1-\alpha}\right)}$$

б) построить наиболее мощный критерий проверки этих гипотез по выборке $n=2$ с уровнем значимости α, найти α_1, α_2, W

$$n=2 \Rightarrow l = \frac{L_1(\vec{x_n})}{L_0(\vec{x_n})} = \frac{p_1(x_1)\,p_1(x_2)}{p_0(x_1)\,p_0(x_2)} = \frac{e^{1-x_1}e^{1-x_2}}{(1-e)^2} \geqslant C$$

$$e^{-x_1}e^{-x_2} \geqslant \frac{C(e-1)^2}{e^2}$$

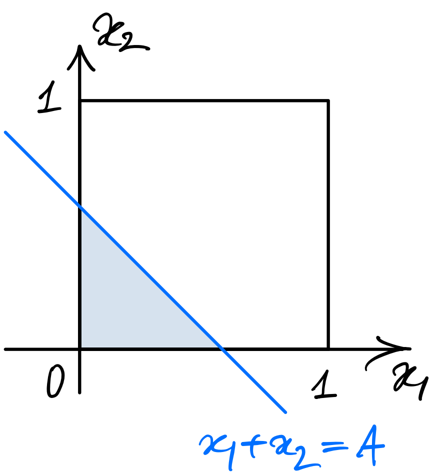
$$-x_1 - x_2 \geqslant \ln\left(\frac{C(e-1)^2}{e^2}\right) = -A$$

$$\Rightarrow G_{kp}: \ x_1 + x_2 \leqslant A$$

второе условие:

$$\alpha_1 = P(\vec{x_n} \in G_{kp} \mid H_0) = \alpha \qquad \boxed{\alpha_1 = \alpha}$$

$$P(x_1 + x_2 \leqslant A \mid H_0) = \alpha$$



x_1 и x_2 независимы и при H_0: $p_0(x_1) = p_0(x_2) = 1$

$$\iint\limits_{x_1+x_2\leqslant A} \underline{1 \cdot 1}\, dx_1 dx_2 = \frac{1}{2}A^2 = \alpha \quad \Rightarrow \quad A = \sqrt{2\alpha}$$

$$\Rightarrow G_{kp}: \ x_1 + x_2 \leqslant \sqrt{2\alpha}$$

при H_1:

$p_1(x_1)=p_1(x_2)=\frac{e^{1-x}}{e-1}$

$$\boxed{W=} P(\vec{x}_n \in G_{кр} \mid H_1) = P(x_1+x_2 \leqslant A \mid H_1) =$$

$$= \iint\limits_{x_1+x_2\leqslant A} \frac{e^{1-x_1} e^{1-x_2}}{(e-1)^2} dx_1 dx_2 =$$

$$= \frac{e^2}{(e-1)^2} \int_0^A e^{-x_1} dx_1 \int_0^{A-x_1} e^{-x_2} dx_2 =$$

$$= \frac{e^2}{(e-1)^2} \int_0^A e^{-x_1}\left(1-e^{-A+x_1}\right) dx_1 =$$

$$= \frac{e^2}{(e-1)^2} \int_0^A \left[e^{-x_1} - e^{-A}\right] dx_1 =$$

$$= \frac{e^2}{(e-1)^2}\left[1 - e^{-A} - Ae^{-A}\right] =$$

$$= \boxed{\frac{e^2}{(e-1)^2}\left[1-(\sqrt{2\alpha}+1)e^{-\sqrt{2\alpha}}\right]}$$

$$\boxed{\alpha_2 =} 1 - W =$$

$$= \boxed{\frac{1}{(e-1)^2}\left[2e-1-(\sqrt{2\alpha}+1)e^{2-\sqrt{2\alpha}}\right]}$$

c) построить наиболее мощный асимпт. критерий проверки этих гипотез по выборке объема n с ур. знач. α, найти α_1, α_2, W

$$l = \frac{L_1(\vec{x}_n)}{L_0(\vec{x}_n)} = \frac{\prod p_1(x_i)}{\prod p_0(x_i)} = \prod_{i=1}^{n} \frac{p_1(x_i)}{p_0(x_i)} \geqslant C$$

ЦПТ

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n}} \underbrace{\boxed{\ln \frac{p_1(x_i)}{p_0(x_i)}}}_{=\eta_i} \geqslant \ln C$$

$$G_{1кр}: \ln l \geqslant \ln C$$

ЦПТ: $$\frac{\sum \eta_i - nM\eta_i}{\sqrt{nD\eta_i}} \sim N(0,1)$$

! константу C считаем при H_0

$$\eta_i = \ln \frac{p_1(x_i)}{p_0(x_i)} = \ln \frac{e^{1-x_i}}{e-1} = \ln \frac{e}{e-1} - x_i$$

при H_0:

$$M\eta_i = M\left[\ln \frac{e}{e-1} - x_i\right] = \ln \frac{e}{e-1} - \frac{1}{2}$$

$$D\eta_i = D\left[\ln \frac{e}{e-1} - x_i\right] = Dx_i = \frac{1}{12}$$

$$\boxed{\alpha_1 =} P(\vec{x}_n \in G_{1кр} \mid H_0) = \boxed{\alpha}$$

$$P(\ln l \geqslant \ln C \mid H_0) = P(\sum \eta_i \geqslant \ln C \mid H_0)$$

воспользуемся ЦПТ:

$$= P\left(\underbrace{\frac{\sum \eta_i - n\left(\ln\frac{e}{e-1} - \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{n\frac{1}{12}}}}_{\xi \sim N(0,1)} \geq \overbrace{\frac{\ln C - n\left(\ln\frac{e}{e-1} - \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{n\frac{1}{12}}}}^{A}\right) =$$

$$= \int_A^{\infty} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,dx = \alpha \Rightarrow \boxed{A = u_{1-\alpha}}$$

найдем $G_{кр}$:

$$\ln \ell = \sum \eta_i = \sum\left(\ln\frac{e}{e-1} - x_i\right) = n\ln\frac{e}{e-1} - \sum x_i$$

$$u_{1-\alpha} = A = \frac{\ln C - n\left(\ln\frac{e}{e-1} - \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{n\frac{1}{12}}}$$

$$\ln C = n\ln\frac{e}{e-1} - \frac{n}{2} + \sqrt{\frac{n}{12}}\,u_{1-\alpha}$$

$$\ln \ell \geq \ln C$$

$$\cancel{n\ln\frac{e}{e-1}} - \sum x_i \geq \cancel{n\ln\frac{e}{e-1}} - \frac{n}{2} + \sqrt{\frac{n}{12}}\,u_{1-\alpha}$$

$$\Rightarrow \boxed{G_{кр}:\ \bar{x} \leq \frac{1}{2} - \frac{u_{1-\alpha}}{\sqrt{12n}}}$$

$$\sum \eta_i$$

теперь ЦПТ по H_1

$$W = (\vec{x}_n \in G_{1кр} \mid H_1) = P(\underset{\sum \eta_i}{-\ln \ell} \geq \ln C \mid \underline{\underline{H_1}}) =$$

по H_1:

$$M\eta_i = M\left[\ln\frac{e}{e-1} - x_i\right] = \ln\frac{e}{e-1} - \int_0^1 x\frac{e^{1-x}}{e-1}dx =$$

$$\int_0^1 x\frac{e^{1-x}}{e-1}dx = \frac{e}{e-1}\int_0^1 xe^{-x}dx =$$

$$= \left\{\begin{matrix} u = x & du = dx \\ dv = e^{-x}dx & v = -e^{-x} \end{matrix}\right\} =$$

$$= \frac{e}{e-1}\left[-xe^{-x}\Big|_0^1 + \int_0^1 e^{-x}dx\right] =$$

$$= \frac{e}{e-1}\left[-e^{-1} - e^{-1} + 1\right] = \frac{e}{e-1}\,\frac{e-2}{e} = \frac{e-2}{e-1}$$

$$M\eta_i = \ln\frac{e}{e-1} - \frac{e-2}{e-1}$$

$$D\eta_i = D\left[\ln\frac{e}{e-1} - x_i\right] = Dx_i = M\eta_i^2 - M^2\eta_i =$$

$$= \cancel{\ln^2\frac{e}{e-1}} + \cancel{2\,\frac{e-2}{e-1}\ln\frac{e}{e-1}} + \frac{2e-5}{e-1} -$$

$$-\left(\cancel{\ln^2\frac{e}{e-1}} - \cancel{2\,\frac{e-2}{e-1}\ln\frac{e}{e-1}} + \frac{(e-2)^2}{(e-1)^2}\right) =$$

$$= \frac{2e^2 - 7e + 5 - e^2 + 4e - 4}{(e-1)^2} = \frac{e^2 - 3e + 1}{(e-1)^2}$$

$$M\eta_i^2 = M\left[\ln\frac{e}{e-1} - x_i\right]^2 =$$

$$= \ln^2\frac{e}{e-1} - 2M\left[\ln\frac{e}{e-1} x_i\right] + M\left[x_i^2\right] =$$

$$= \ln^2\frac{e}{e-1} - 2\ln\frac{e}{e-1}\left[\ln\frac{e}{e-1} - \frac{e-2}{e-1}\right] + \frac{2e-5}{e-1} =$$

$$= -\ln^2\frac{e}{e-1} + 2\frac{e-2}{e-1}\ln\frac{e}{e-1} + \frac{2e-5}{e-1}$$

$$\int_0^1 x^2\frac{e^{1-x}}{e-1}dx = \frac{e}{e-1}\int_0^1 x^2 e^{-x}dx =$$

$$= \left\{\begin{matrix} u = x^2 & du = 2x\,dx \\ dv = e^{-x}dx & v = -e^{-x}\end{matrix}\right\} =$$

$$= \frac{e}{e-1}\left[-x^2e^{-x}\Big|_0^1 + 2\int_0^1 xe^{-x}dx\right] =$$

$$= \frac{e}{e-1}\left[-e^{-1}\right] + 2\frac{e}{e-1}\int_0^1 xe^{-x}dx =$$

$$= -\frac{1}{e-1} + 2\frac{e-2}{e-1} = \frac{2e-5}{e-1}$$

ЦПТ: (по Ц)

$$W = P\left(\boxed{\frac{\sum \eta_i - nM\eta_i}{\sqrt{nD\eta_i}}} \geq \boxed{\frac{\ln C - nM\eta_i}{\sqrt{nD\eta_i}}}\right) =$$

$= B$

$\gamma \rightsquigarrow N(0,1)$

$$= \int_B^{\infty} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,dx$$

$$B = \frac{\ln C - nM\eta_i}{\sqrt{nD\eta_i}} =$$

$$\ln C = n\ln\frac{e}{e-1} - \frac{n}{2} + \sqrt{\frac{n}{12}}\,u_{1-\alpha}$$

$$= \frac{n\left(\ln\frac{e}{\cancel{e-1}} - \frac{1}{2}\right) + \sqrt{\frac{n}{12}}\,u_{1-\alpha} - n\left(\ln\frac{e}{\cancel{e-1}} - \frac{e-2}{e-1}\right)}{\sqrt{nD\eta_i}} =$$

$$= \frac{n\left(\frac{e-2}{e-1} - \frac{1}{2}\right) + \sqrt{\frac{n}{12}}\,u_{1-\alpha}}{\sqrt{n\frac{e^2-3e+1}{(e-1)^2}}} = E + F\sqrt{n}$$

E, F – const

$$\frac{e-2}{e-1} - \frac{1}{2} = -0{,}082 \Rightarrow F < 0$$

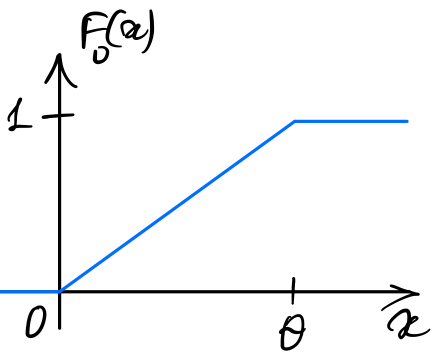
$\Rightarrow$ при $n \to +\infty$ $\quad B \to -\infty$

$B \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$

$$\Rightarrow W = \int_{B}^{\infty} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,dx = 1$$

Критерий проверки статистических гипотез называется состоятельным, если $W \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

$$\alpha_2 = 1 - W \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$



d) построить критерий по выборке объема n с $G_{кр}: x_{min} < C$ и уровнем значимости α, найти α_1, α_2, W

$G_{кр}: x_{min} < C$

$\alpha_1 = P(\vec{x}_n \in G_{кр} \mid H_0) = P(x_{min} < C \mid H_0) = \alpha$

$x_{min} \sim 1 - (1 - F(x))^n$

$H_0: \xi \sim p_0(x) = 1\{[0,1]\}$

$\alpha = P(x_{min} < C \mid H_0) = 1 - (1 - F_0(x))^n =$

$= 1 - (1 - C)^n \Rightarrow C = 1 - \sqrt[n]{1-\alpha}$

$\Rightarrow G_{кр}: x_{min} < 1 - \sqrt[n]{1-\alpha}$

$\alpha_1 = \alpha$, поскольку простая гипотеза

$W = P(\vec{x}_n \in G_{кр} \mid H_1) = P(x_{min} < C \mid H_1) =$

$= 1 - (1 - F_1(x))^n$

$H_1: \xi \sim p_1(x) = \dfrac{e^{1-x}}{e-1} \{[0,1]\}$

$$F_1(x)=\int_{-\infty}^{x} p_1(t)\,dt=\frac{e}{e-1}\int_0^x e^{-t}dt=\frac{e}{e-1}\left(1-e^{-x}\right)$$

$$W=1-(1-F_1(C))^n=1-\left(1-\frac{e}{e-1}\left(1-e^{-C}\right)\right)^n=$$

$$=1-\left(1-\frac{e}{e-1}\left(1-e^{-1+\sqrt[n]{1-\alpha}}\right)\right)^n=$$

$$=1-\left(\frac{-1}{e-1}+\frac{e^{\sqrt[n]{1-\alpha}}}{e-1}\right)^n$$

$$\alpha_2=1-W=\left(\frac{-1}{e-1}+\frac{e^{\sqrt[n]{1-\alpha}}}{e-1}\right)^n$$

проверим на состоятельность:

$$e^{\sqrt[n]{1-\alpha}}=e^{e^{\frac{1}{n}\ln(1-\alpha)}}=e^{\left(1+\frac{\ln(1-\alpha)}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}=$$

$$=e\left[1+\frac{\ln(1-\alpha)}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right]$$

$$W=1-\left(\frac{1}{e-1}\left(-1+e^{\sqrt[n]{1-\alpha}}\right)\right)^n=$$

$$=1-\left(\frac{1}{e-1}\left(-1+e\left[1+\frac{\ln(1-\alpha)}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right]\right)\right)^n=$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n=e^a$$

$$=1-\left(1+\frac{\ln(1-\alpha)}{n(e-1)}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{}$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} 1-e^{\frac{\ln(1-\alpha)}{e-1}}=1-(1-\alpha)^{\frac{1}{e-1}}$$

посчитаем: $\alpha=0{,}05$

$W=0{,}029$

$W \underset{n\to\infty}{\not\to} 1 \Rightarrow$ критерий не является состоятельным

11 $n=2$, $\alpha=0{,}2$ $\qquad W-?$

$\alpha_1 = P(\vec{x}_n \in G_{kp} \mid H_0) = \alpha = 0{,}2$

$G_{kp}: \ell \geqslant C$

табличка H_0:

$x_2 \backslash x_1$	(1,2)	3	4
(1,2)	1/4	1/12	1/6
3	1/12	1/36	1/18
4	1/6	1/18	1/9

$p(4) = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$

$p(3) = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}$

$p(1,2) = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$

набираем до $\alpha=0{,}2$

табличка H_1: кость сделана „нечестно"

$x_2 \backslash x_1$	(1,2)	3	4
(1,2)	1/4	1/8	1/8
3	1/8	1/16	1/16
4	1/8	1/16	1/16

$p(4) = \frac{1}{4}$

$p(3) = \frac{1}{4}$

$p(1,2) = \frac{1}{2}$

$n=2$:

$$\ell = \frac{p_1(x_1)\,p_1(x_2)}{p_0(x_1)\,p_0(x_2)}$$

$G_{кр}: \ell > C$

табличка ℓ:

$x_2 \backslash x_1$	(1,2)	3	4
(1,2)	1	3/2 max 2,3	4/3
3	3/2 max 2,3	9/4 max 1	9/8
4	4/3	9/8	9/16

$\to$ перебор $\alpha > 0{,}2$

табличка H_0:

$x_2 \backslash x_1$	(1,2)	3	4
(1,2)	1/4	1/12	1/6
3	1/12	1/36	1/18
4	1/6	1/18	1/9

$$\frac{1}{36} + 2\frac{1}{12} = \frac{7}{36}$$

$$\approx 0{,}19\overline{4}$$

$$< \alpha = 0{,}2$$

табличка H_1:

$x_2 \backslash x_1$	(1,2)	3	4
(1,2)	1/4	1/8	1/8
3	1/8	1/16	1/16
4	1/8	1/16	1/16

$\Rightarrow$ Скр: $\ell \geq \frac{3}{2}$

$\alpha_1 = P(\ell \geq 3/2 \mid H_0) = 7/36 \approx 0{,}2$

$W = P(\ell \geq 3/2 \mid H_1) = 5/16 \approx 0{,}3125$

$\alpha_2 = 1 - W = 0{,}6875$

Ответ: $W = 0{,}31$

12 ξ — коэффициент трения шины по мокрому асфальту

$D\xi = 0,1$

$n = 25 \to D\tilde{\xi} = 0,2 \quad M\tilde{\xi} = \xi$

построить критерий для проверки гипотез H_0 против H_1

построить график мощности

Контролируемый признак имеет нормальное распределение $\Rightarrow$

$\Rightarrow \xi \sim N(\theta_1, \theta_2^2) \qquad \theta_1 \in R, \theta_2 > 0$

$H_0: \theta_2^2 = 0,1$

$H_1: \theta_2^2 > 0,1$

Тh Фишера:

$$\frac{\bar{x} - \theta_1}{\theta_2}\sqrt{n} \sim N(0,1) \qquad \frac{\bar{x} - \theta_1}{S}\sqrt{n} \sim t(n-1)$$

$$\boxed{\frac{S^2(n-1)}{\theta_2^2} \sim \chi^2(n-1)}$$

Нас интересует дисперсия

$$\frac{S^2(n-1)}{\theta_2^2} \sim \chi^2(n-1)$$

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum (x_i - \bar{x})^2$$

$$\hat{\Delta} = \frac{0{,}2 \cdot 24}{0{,}1} = 48$$

возьмем один конец

$$p\text{-value} = 2P(\Delta \geq \hat{\Delta}) = 2\int_{48}^{\infty} q_{\chi^2(24)}(x)\,dx =$$

$$= 0{,}005$$

! сравниваем с $\frac{\alpha}{2}$ и $1-\frac{\alpha}{2}$

$$0{,}025 \not< 0{,}005 < 0{,}975$$

$\Rightarrow$ отвергаем гипотезу H_0

$$P(\vec{x}_n \in G_{кр} \mid H_0) = P(\Delta \geq C \mid H_0) = \alpha$$

$$W = P(\vec{x}_n \in G_{кр} \mid H_1) - ?$$

$$\int_{C}^{+\infty} q_{\chi^2(24)}(x)\,dx = \alpha = 0{,}05 \Rightarrow C = 36{,}41$$

$$\Rightarrow G_{кр}: \ \Delta \geq 36{,}41$$

$\theta_1 = a > 0$

$\theta_2 > 0$

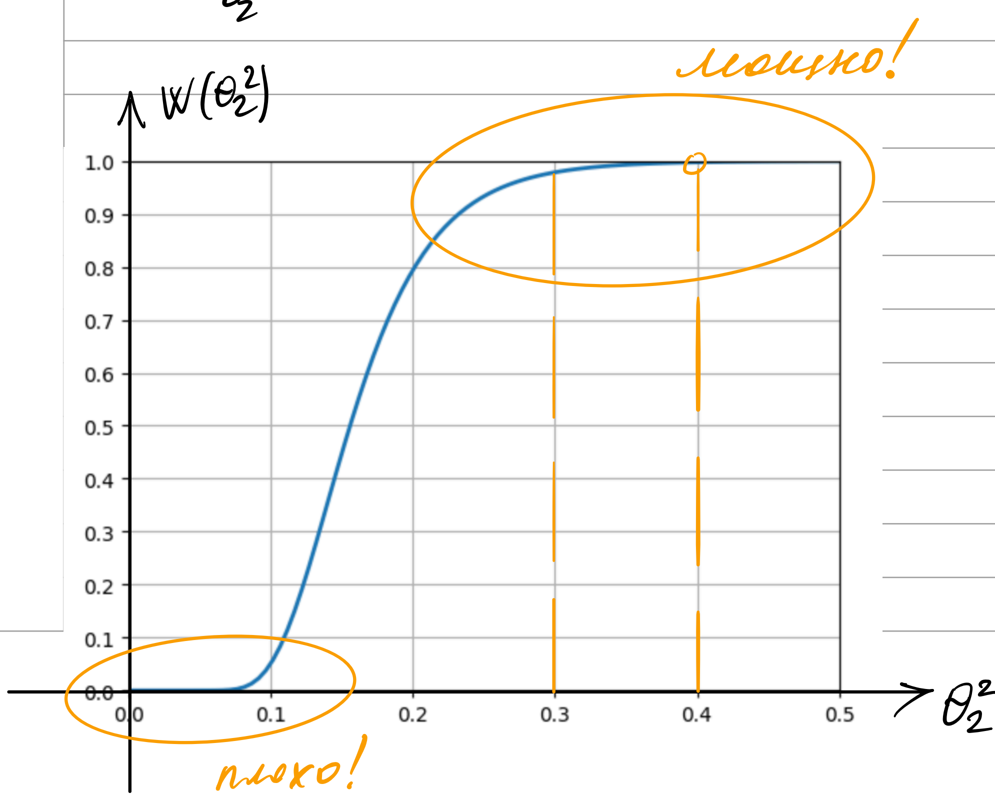
$$W = P(\vec{x}_n \in G_{кр} \mid H_1) = P(\Delta \geq C \mid H_1) =$$

$$= P\left(\frac{S^2(n-1)}{a^2} \geq 36{,}41 \mid H_1\right) =$$

$$= P\left(\frac{S^2(n-1)}{a^2} \cdot \frac{a^2}{\theta_2^2} \geq 36{,}41 \cdot \frac{a^2}{\theta_2^2} \mid H_1\right) =$$

$$= P\Big(\underbrace{\boxed{\frac{S^2(n-1)}{\theta_2^2}}}_{\sim \chi^2(24)} \geq 36{,}41 \cdot \frac{a^2}{\theta_2^2} \mid H_1\Big) =$$

$$= \int_{36{,}41 \frac{a^2}{\theta_2^2}}^{\infty} q_{\chi^2(24)}(x)\,dx = W(\theta_2)$$



13 $\vec{x}_n, \vec{y}_m$ — независимые выборки

$\vec{\xi} \sim N(a, \sigma_x^2)$ $\sigma_x^2 = 2$

$\vec{\eta} \sim N(b, \sigma_y^2)$ $\sigma_y^2 = 1$

$\bar{x} = -1{,}59\overline{6} \approx -1{,}6$

$\bar{y} = -2{,}6$

$x = \{-1.11, -6.10, 2.42\}$ $n = 3$

$y = \{-2.29, -2.91\}$ $m = 2$

$H_0: \ a = b$

альтернативы

$H_1: \ a > b, \ a < b, \ a \neq b$

$\bar{x} - a \sim N\left(0, \frac{\sigma_x^2}{n}\right)$ $\bar{y} - b \sim N\left(0, \frac{\sigma_y^2}{m}\right)$

Th Фишера:

$\frac{S_x^2(n-1)}{\sigma_x^2} \sim \chi^2(n-1)$ $\frac{\bar{x} - a}{S}\sqrt{n} \sim N(0,1)$

$\frac{S_y^2(m-1)}{\sigma_y^2} \sim \chi^2(m-1)$ $\frac{\bar{y} - b}{S}\sqrt{m} \sim N(0,1)$

$(\bar{x}-a)$ и $(\bar{y}-b)$ — независимы

$$\begin{pmatrix}\bar{x}-a\\ \bar{y}-b\end{pmatrix} \sim N\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\sigma_x^2/n & 0\\ 0 & \sigma_y^2/y\end{pmatrix}\right)$$

$2/3 + 1/2 = 7/6$

$$\hat{\Delta} = \bar{x}-\bar{y}-(a-b) \sim N\left(0, \frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma_y^2}{m}\right)$$

при справедливости H_0:

$$\Delta = \frac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma_y^2}{m}}} \sim N(0,1)$$

$$\Delta = \frac{(\bar{x}-\bar{y})\sqrt{nm}}{\sqrt{m\sigma_x^2 + n\sigma_y^2}} = \frac{(\bar{x}-\bar{y})\sqrt{6}}{\sqrt{7}} \approx 0{,}926$$

$G_{кр}\ (a>b)$: $\Delta \geqslant C$

$G_{кр}\ (a<b)$: $\Delta \leqslant C$

$G_{кр}\ (a\neq b)$: $|\Delta| \geqslant C$

нормальное распределение симметрично

$H_1: a > b$

$$\text{pvalue} = P(\Delta \geqslant |\hat{\tilde{\Delta}}|) = \int_{0{,}926}^{\infty} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,dx =$$

$$= 0{,}177 > \alpha = 0{,}05$$

$\Rightarrow$ нет оснований отвергать H_0

$H_1: a < b$

$$\text{pvalue} = P(\Delta \leqslant -|\hat{\tilde{\Delta}}|) = \int_{\infty}^{-0{,}926} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,dx =$$

$$= 0{,}177 > \alpha = 0{,}05$$

$\Rightarrow$ нет оснований отвергать H_0

$H_1: a \neq b$

$$\text{p-value} = P(|\Delta| \geqslant |\hat{\tilde{\Delta}}|) =$$

$$= \int_{-\infty}^{0{,}926} + \int_{0{,}926}^{\infty} = 0{,}35 > \alpha = 0{,}05$$

$\Rightarrow$ нет оснований отвергать H_0