1 $\xi \sim R(0,\theta)$ $\vec{x_n}$ — выборка

оценки θ: $\tilde{\theta}_1 = 2\bar{x}$

$\tilde{\theta}_2 = x_{min}$

$\tilde{\theta}_3 = x_{max}$ $\tilde{\theta}_5 = \left(x_1 + \dfrac{\sum_{k=2}^{n} x_k}{n-1}\right)$

а) проверка на несмещенность и состоятельность

оценка несмещенная, если

$$\forall \theta \in \Theta \quad M[\tilde{\theta}(\vec{x_n})] = \theta$$

оценка состоятельная, если

$$\forall \theta \in \Theta \quad \tilde{\theta} \xrightarrow{P} \theta$$

Th (дост усл состоятельности):

Если оценка $\tilde{\theta}$ — несмещенная,

$D[\xi] \to 0$ при $n \to \infty$,

то она состоятельна.

$p(x) = \frac{1}{\theta} \{(0,\theta)\}$

$M\xi = \int_0^\theta x \frac{1}{\theta} dx = \frac{\theta}{2}$

$D\xi = M[\xi^2] - M^2[\xi] = \frac{\theta^2}{3} - \frac{\theta^2}{4} = \frac{\theta^2}{12}$

$\tilde{\theta}_1 = 2\bar{x}$:

$M[\tilde{\theta}_1] = M[2\bar{x}] = M[2 \frac{1}{n} \sum x_i] =$

$= \frac{2}{n} M[\sum x_i] = \frac{2}{n} \sum M[x_i] =$

x_i — независ и одинаково распр
$x \sim R(0,\theta)$

$= \frac{2}{n} n M[\xi] = 2M[\xi] = \theta$

$\Rightarrow \tilde{\theta}_1$ — несмещенная

$D[\tilde{\theta}_1] = D[\frac{2}{n} \sum x_i] = (\frac{2}{n})^2 D[\sum x_i] =$

x_i — независимы и одинаков
распред $x \sim R(0,\theta)$

$= \frac{4}{n^2} \sum D[x_i] = \frac{4}{n^2} n D[\xi] =$

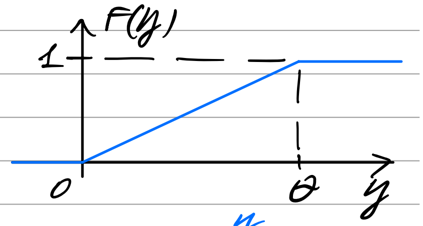
$= \frac{4}{n} D[\xi] = \frac{\theta^2}{3n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

⇒ По Тн (дост усл состоятельности):

$\tilde{\theta}_1$ — несмещенная и $D\tilde{\theta}_1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\tilde{\theta}_1$ — состоятельна

$\tilde{\theta}_2 = x_{min} = x_{(1)}$:



$M[\tilde{\theta}_2] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y q(y)\, dy$

$x_i \sim R(0,\theta)$ $\quad x_i \sim F(y)$ $\qquad F(x) = \frac{y}{\theta}$

$x_{(1)} \sim \underbrace{1-(1-F(y))^n}_{\varphi(y)}$

$q(y) = \varphi'(y) = n(1-F(y))^{n-1} F'(y) =$

$= n\left(1-\frac{y}{\theta}\right)^{n-1} \frac{1}{\theta} \{(0,\theta)\}$

$M[\tilde{\theta}_2] = \int\limits_0^{y} y n \left(1-\frac{y}{\theta}\right)^{n-1} \frac{1}{\theta}\, dy = \left\{t = 1-\frac{y}{\theta}\right\} =$

$= \int\limits_0^1 \theta(1-t) n t^{n-1} \cancel{\frac{1}{\theta}} \cancel{\theta} dt =$

$= n\theta\left(\int\limits_0^1 t^{n-1} dt - \int\limits_0^1 t^n dt\right) =$

$$= n\theta\,\frac{1}{n} - n\theta\,\frac{1}{n+1} = \frac{\theta}{n+1}$$

$\Rightarrow \tilde{\theta}_2$ — смещенная оценка

$\Rightarrow \tilde{\theta}_2' = (n+1)\tilde{\theta}_2 = (n+1)x_{min}$

— исправленная несмещенная оценка

$$M[\tilde{\theta}_2^2] = \int_0^1 \theta^2 (1-t)^2 n t^{n-1}\, dt =$$

$$= n\theta^2 \left(\int_0^1 t^{n-1} dt - 2\int_0^1 t^n dt + \int_0^1 t^{n+1} dt \right) =$$

$\cancel{n^2} + 3\cancel{n} + 2 - \cancel{2n^2} - \cancel{4n} + \cancel{n^2} + \cancel{n}$

$$= n\theta^2 \left(\frac{1}{n} - 2\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right) = \frac{2\theta^2}{(n+1)(n+2)}$$

$$D[\tilde{\theta}_2] = M[\tilde{\theta}_2^2] - M^2[\tilde{\theta}_2] =$$

$$= \frac{2\theta^2}{(n+1)(n+2)} - \frac{\theta^2}{(n+1)^2} = \frac{\theta^2}{n+1}\left[\frac{2}{n+2} - \frac{1}{n+1} \right] =$$

$$= \frac{n\theta^2}{(n+1)^2(n+2)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \tilde{\theta}_2 \text{ — смещенная} \\ D[\tilde{\theta}_2] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{достаточное условие не работает}$$

$D[\tilde{\theta}_2'] = D[(n+1)\tilde{\theta}_2'] =$

$$= (n+1)^2 \frac{n\theta^2}{(n+1)^2(n+2)} \not\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

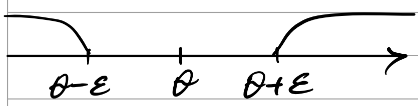
$\Rightarrow$ дост усл не работает.

по определению состоятельности:

$\forall\theta>0 \qquad \tilde{\theta}_2 \xrightarrow{P} \theta$

$\forall\varepsilon>0 \qquad P(|\tilde{\theta}_2-\theta| \geq \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\underset{x_{min}}{\underset{\parallel}{\tilde{\theta}_2}} \leq \theta-\varepsilon$ или $\underset{x_{min}}{\underset{\parallel}{\tilde{\theta}_2}} \geq \theta+\varepsilon$



$x_i \sim R(0,\theta)$

$P(x_{min} \geq \theta+\varepsilon) = 0$

$P(x_{min} \leq \theta-\varepsilon) = P(x_{min} < \theta-\varepsilon) = \Phi(\theta-\varepsilon)$

т.к. распределение непрерывно
т.е. $\Delta F(x_{min}=\theta-\varepsilon)=0$
скачков нет

$$= \{\Phi(y) = 1-(1-F(y))^n\} =$$

$$= 1-(1-F(\theta-\varepsilon))^n = 1-\left(1-\frac{\theta-\varepsilon}{\theta}\right)^n =$$

$0<\theta-\varepsilon<\theta$

$0<\varepsilon<\theta$

$$=1-\left(\frac{\varepsilon}{\theta}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

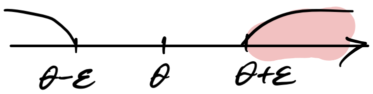
$$\exists\, \varepsilon=\frac{\theta}{2}:\quad P(|\tilde{\theta}_2-\theta|\geq\varepsilon)\xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \neq 0$$

$\Rightarrow$ $\tilde{\theta}_2$ — не является состоятельной

по определению состоятельности:

$$\forall\varepsilon>0\quad P(|\tilde{\theta}_2'-\theta|\geq\varepsilon)\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\underset{\substack{\parallel \\ (n+1)x_{min}}}{\tilde{\theta}_2'}\geq\theta+\varepsilon \quad \text{или} \quad \underset{\substack{\parallel \\ (n+1)x_{min}}}{\tilde{\theta}_2'}\leq\theta-\varepsilon$$



$$P(|(n+1)x_{min}-\theta|\geq\varepsilon)\geq$$

$$\geq P((n+1)x_{min}\geq\theta+\varepsilon)=$$

$$=P\left(x_{min}\geq\frac{\theta+\varepsilon}{n+1}\right)=1-P\left(x_{min}<\frac{\theta+\varepsilon}{n+1}\right)=$$

$$=1-\Phi\left(\frac{\theta+\varepsilon}{n+1}\right)=\left(1-F\left(\frac{\theta+\varepsilon}{n+1}\right)\right)^n=$$

$n\geq n_0$!

$$=\left(1-\frac{\theta+\varepsilon}{\theta(n+1)}\right)^n\xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-\frac{\theta+\varepsilon}{\theta}}>0$$

$\Rightarrow$ $\tilde{\theta}_2'$ — не является состоятельной

$\tilde{\theta}_3 = x_{max}$:

$\Psi(y) = (F(y))^n$ $\quad\quad y \in (0,\theta)$

$q(y) = \Psi'(y) = n(F(y))^{n-1}F'(y) = n\left(\frac{y}{\theta}\right)^{n-1}\frac{1}{\theta}$

$M[\tilde{\theta}_3] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y\,q(y)\,dy = \int\limits_0^{\theta} y^n \frac{n}{\theta^n}\,dy =$

$= \frac{n}{\theta^n}\,\frac{\theta^{n+1}}{n+1} = \frac{n\theta}{n+1}$

$\Rightarrow \tilde{\theta}_3$ — смещенная

$\Rightarrow \tilde{\theta}_3' = \frac{n+1}{n}\tilde{\theta}_3 = \frac{n+1}{n}x_{max}$

— несмещенная несмещ оценка

$M[\tilde{\theta}_3^2] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y^2 q(y)\,dy = \frac{n}{\theta^n}\,\frac{\theta^{n+2}}{n+2} = \frac{n\theta^2}{n+2}$

$D[\tilde{\theta}_3] = M[\tilde{\theta}_3^2] - M^2[\tilde{\theta}_3] = \frac{n\theta^2}{n+2} - \frac{n^2\theta^2}{(n+1)^2} =$

$= n\theta^2\left(\frac{1}{n+2} - \frac{n}{(n+1)^2}\right) = \frac{n\theta^2}{(n+2)(n+1)^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

но $\tilde{\theta}_3$ — смещенная $\Rightarrow$ дост усл сост не работает

$$D[\tilde{\theta}_3'] = D\left[\frac{n+1}{n} x_{max}\right] = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \frac{n\theta^2}{(n+2)(n+1)^2} =$$

$$= \frac{\theta^2}{n(n+2)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

⇒ По Th о дост усл состоятельности:

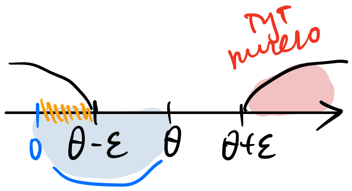
$\tilde{\theta}_3'$ — несмещ и $D[\tilde{\theta}_3'] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\tilde{\theta}_3'$ — состоятельна

по определению состоятельности:

$\forall \theta \in \Theta \qquad \tilde{\theta}_3 \xrightarrow{P} \theta$

$\forall \varepsilon > 0 \qquad P(|\tilde{\theta}_3 - \theta| \geq \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$



$x_i \sim (0,\theta]$

$x_{max} \geq \theta + \varepsilon$ или $x_{max} \leq \theta - \varepsilon$

$P(x_{max} \geq \theta + \varepsilon) = 0$

$x \sim R(0,\theta)$

распределение непрерывно ($\Delta F = 0$)

$$P(x_{max} \leq \theta - \varepsilon) = P(x_{max} < \theta - \varepsilon) =$$

$$= \Psi(\theta - \varepsilon) = \Psi(\theta - \varepsilon)\{(0,\theta]\} =$$

$\varepsilon < \theta$:

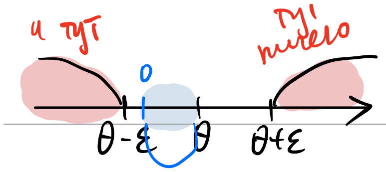
$$= (F(\theta-\varepsilon))^n = \left(\frac{\theta-\varepsilon}{\theta}\right)^n =$$

$$= \left(1 - \frac{\varepsilon}{\theta}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$\theta - \varepsilon \leq 0$

$\varepsilon \geq \theta$

$\Psi(\theta - \varepsilon) = 0$



$x_i \sim (0,\theta]$

⇒ $\tilde{\theta}_3$ состоятельна

$$\tilde{\theta}_4 = \left(x_1 + \frac{\sum_{k=2}^{n} x_k}{n-1} \right):$$

$$M[\tilde{\theta}_4] = M[x_1 + \frac{1}{n-1}\sum x_i] =$$

$$= M[x_1] + \frac{1}{n-1}\sum Mx_i =$$

$$= M\xi + M\xi = 2M\xi = \theta$$

$\Rightarrow \tilde{\theta}_4$ – несмещенная

$$D[\tilde{\theta}_4] = D[x_1] + \frac{1}{(n-1)^2}\sum_{k=2}^{n} Dx_i =$$

$$= \frac{\theta^2}{12} + \frac{\theta^2}{12(n-1)^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\theta^2}{12}$$

$\Rightarrow$ дост усл состоят не работает

по определению: $\tilde{\theta}_4 \xrightarrow{P} \theta \quad \forall \theta \in \Theta$

по св-ву сходимости:

$$\begin{matrix} \xi_n \xrightarrow{P} \xi \\ \eta_n \xrightarrow{P} \eta \end{matrix} \Rightarrow \xi_n + \eta_n \xrightarrow{P} \xi + \eta$$

$\xi_n = x_1 \xrightarrow{P} \xi \qquad \eta_n = \frac{1}{n-1}\sum_{k=2}^{n} x_k \xrightarrow{P} ?$

по ЗБЧ Хинчина:

ξ_i незав и одинак расп, $M\xi_i$ — конечно $\Rightarrow \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i \xrightarrow{P} M\xi_i$

$\Rightarrow x_i$ независ и одинак расп

$Mi = \frac{\theta}{2}$ — конечно

$\Rightarrow \eta_n = \frac{1}{n-1}\sum_{k=2}^{n} x_i \xrightarrow{P} Mx_i = \frac{\theta}{2}$

$\Rightarrow \tilde{\theta}_4 = \xi_n + \eta_n \xrightarrow{P} \xi + \frac{\theta}{2} \neq \theta$

$\Rightarrow \tilde{\theta}_4$ — не явл состоятельной

8) сравнение исправленных оценок (по дисперсии)

$\tilde{\theta}_1$ эффективнее $\tilde{\theta}_2$, если

$\forall \theta \in \Theta \quad D\tilde{\theta}_1 \leqslant D\tilde{\theta}_2$

$\exists \theta \in \Theta \quad D\tilde{\theta}_1 < D\tilde{\theta}_2$

$$D\tilde{\theta}_1 = \frac{\theta^2}{3n} \qquad D\tilde{\theta}_3' = \frac{\theta^2}{n(n+2)}$$

$n>1$: $\quad \frac{1}{3n} \qquad \frac{1}{n(n+2)}$

$$\frac{1}{n(n+2)} < \frac{1}{3n}$$

$$\frac{1}{n+2} < \frac{1}{3}$$

$\forall \theta \in \Theta \quad D\tilde{\theta}_3' < D\tilde{\theta}_1$

$\Rightarrow$ $\tilde{\theta}_3$ эффективнее $\tilde{\theta}_1$

$\tilde{\theta}_2'$ — не явл состоятельн

θ_4 — не явл состоятельн

$\boxed{2}$

$$p(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

$n = 25$

c) Определить плотность распределения ср арифм зн-ов выборки

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

ЦПТ: $$\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i - M\xi}{\sqrt{D\xi}}\sqrt{n} \rightsquigarrow N(0,1)$$

$$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x p(x)\,dx = \int_0^{+\infty} x e^{-x}\,dx =$$

$$= -xe^{-x}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = 1$$

$$M\xi^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x)\,dx = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x}\,dx =$$

$$-x^2e^{-x}\Big|_0^{+\infty} + 2\int_0^{+\infty} x e^{-x}\,dx = 2$$

$$D\xi = M\xi^2 - M^2\xi = 1$$

$$\Rightarrow \frac{\bar{x} - 1}{1}\sqrt{n} \rightsquigarrow N(0,1)$$

$\bar{x} \sim N\left(M\xi, \frac{D\xi}{n}\right) = N\left(1, \frac{1}{25}\right)$

f) Найти плотность распр med и сравнить с bootstrap

$\Rightarrow$ Медиана $x_{(13)}$ n-нечетное

из 3 задачи $\longrightarrow$ $h(t) = H'(t) = np(x)\, C_{n-k}^{k-1} (F(t))^{k-1} (1-F(t))^{n-k}$

в силу непр $F(t)$

$F(t) = \int_0^{x_0} p(x)\,dx = 1 - e^{-x_0}$

$med \sim h(t) = 25 \cdot e^{-x} (1-e^{-x})^{12} e^{-12x} =$

$= 25 e^{-13x} (1-e^{-x})^{12}$

$\boxed{3}$ $\xi \sim p(x)$, $\theta > 0$

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\frac{x}{\theta}}}{\theta}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

$n = 3$ — объем выборки

оценки θ: $\tilde{\theta}_1 = \bar{x}$, $\tilde{\theta}_3 = x_{(2)}$

$$M[\xi] = \int_{-\infty}^{+\infty} x p(x) dx = \int_0^{+\infty} x \frac{e^{-\frac{x}{\theta}}}{\theta} dx =$$

$$= \{ t = +\frac{x}{\theta}, \ x = +\theta t \} =$$

$$= \int_0^{+\infty} + t e^{-t} \theta dt = \theta$$

$$M[\xi^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x) dx = \int_0^{+\infty} x^2 \frac{e^{-\frac{x}{\theta}}}{\theta} dx =$$

$$= \{ t = \frac{x}{\theta}, \ x = \theta t \} =$$

$$= \int_0^{+\infty} \theta^2 t^2 \frac{e^{-t}}{\theta} \theta dt = 2\theta^2$$

$$D[\xi] = M[\xi^2] - M^2[\xi] = 2\theta^2 - \theta^2 = \theta^2$$

а) проверка на несмещенность

$M[\tilde{\theta}_1] = M[\bar{x}] = M[\frac{1}{n}\sum x_i] =$

$= \frac{1}{n}\sum Mx_i = M\xi = \theta$

$\Rightarrow \tilde{\theta}_1$ — несмещенная

$M[\tilde{\theta}_2] = M[x_{(2)}] =$

$= \int_{-\infty}^{+\infty} x h(x) dx =$ плотность на следующей странице

т.к. смотрим на выборку как на сл велич с одинак распр ξ

$n=3$
$k=2$

$= \int_0^{+\infty} x n p(x) C_n^{k-1} (F(x))^{k-1} (1-F(x))^{n-k} dx =$

$= \{ t = \frac{x}{\theta}, \quad x = \theta t \} =$

$C_2^1 = 2$

$= \int_0^{+\infty} \cancel{\theta} t \cdot 3 \cdot \frac{1}{\cancel{\theta}} e^{-t} \cdot 2 \cdot (1-e^{-t}) e^{-t} \theta dt =$

$= 6\theta \int_0^{+\infty} t (1-e^{-t}) e^{-2t} dt =$

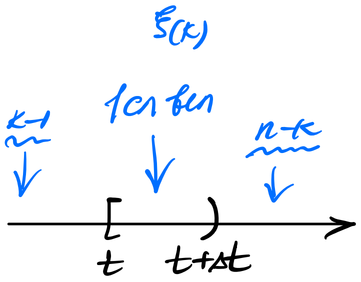
$= 6\theta \left(\int_0^{+\infty} te^{-2t} dt - \int_0^{+\infty} te^{-3t} dt \right) =$

$= 6\theta \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9} \right) = \frac{5}{6}\theta$

$\Rightarrow \tilde{\theta}_2$ — смещенная

$\Rightarrow \tilde{\theta}_2' = \frac{6}{5}\tilde{\theta}_2$ — исправленная оценка

(4) Закон распределения k-той порядковой статистики



$\vec{\xi}$: $\xi_i \sim F(x)$ и независ

ξ_i — абс непрерыв

$\xi_{(k)} \sim ?$

$P(t \le \xi_{(k)} < t+\Delta t) =$ без излишних, т.к. одинак распр

$= \underset{n}{C_n^1} P(t \le \xi < t+\Delta t)\cdot C_{n-1}^{k-1}(P(\xi<t))^{k-1}\cdot$

$\underset{1}{\cdot}\, C_{n-k}^{n-k}(P(\xi \ge t+\Delta t))^{n-k} =$

$H(t)$ — функция распределения $\xi_{(k)}$

$P(a \le \xi < b) = F(b) - F(a)$

$$\frac{H(t+\Delta t)-H(t)}{\Delta t} =$$

$$= n \underbrace{\boxed{\frac{F(t+\Delta t)-F(t)}{\Delta t}}}_{p(x)} C_{n-k}^{k-1}(F(t))^{k-1}(1-F(t+\Delta t))^{n-k} =$$

$$h(t) = H'(t) = np(x)\, C_{n-k}^{k-1}(F(t))^{k-1}(1-\underline{\underline{F(t)}})^{n-k}$$

в силу непр $F(t)$

$$F(t) = \int_0^{x_0} p(x)\,dx = \int_0^{x_0} \frac{e^{-\frac{x}{\theta}}}{\theta}\,dx = \left\{ t = \frac{x}{\theta},\ x = \theta t \right\} =$$

$$= \int_0^{x_0/\theta} \frac{1}{\theta} e^{-t}\,\theta\,dt = 1 - e^{-\frac{x_0}{\theta}}$$

b) эффективность оценок

$$D[\tilde{\theta}_1] = D[\frac{1}{n}\sum x_i] = \frac{1}{n^2}\sum D\xi = \frac{1}{3}\theta^2$$

$$M[\tilde{\theta}_2^{\,2}] = M[x_{(2)}^2] =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 h(x)\,dx =$$

$$= \int_0^{+\infty} x^2 n p(x)\, C_n^{k-1} (F(x))^{k-1} (1-F(x))^{n-k}\, dx =$$

$$= \{\, t = \frac{x}{\theta},\quad x = \theta t \,\} =$$

$$= \int_0^{+\infty} \theta^2 t^2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{\cancel{\theta}} e^{-t} \cdot 2 \cdot (1 - e^{-t})\, e^{-t}\, \cancel{\theta}\, dt =$$

$$= 6\theta^2 \int_0^{+\infty} t^2 (1 - e^{-t}) e^{-2t}\, dt =$$

$$= 6\theta^2 \left(\int_0^{+\infty} t^2 e^{-2t} dt - \int_0^{+\infty} t^2 e^{-3t} dt \right) =$$

$$= 6\theta^2 \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{27} \right) = \frac{19}{18}\theta^2$$

$M[\tilde{\theta}_2] = \frac{5}{6}\theta$

$$D[\tilde{\theta}_2] = M[\tilde{\theta}_2^{\,2}] - M^2[\tilde{\theta}_2] = \frac{13}{36}\theta^2$$

$$D[\tilde{\theta}_2'] = D[\frac{6}{5}\tilde{\theta}_2] = \left(\frac{6}{5}\right)^2 D[\tilde{\theta}_2] = \frac{13}{25}\theta^2$$

$$D[\tilde{\theta}_1] = \frac{1}{3}\theta^2 < \frac{13}{25}\theta^2 = D[\tilde{\theta}_2'] \quad \forall n$$

$\Rightarrow$ $\tilde{\theta}_1$ эффективнее $\tilde{\theta}_2$!

c) Неравенство Крамера-Рао

Неравенство Крамера-Рао:

1. регулярность оценки
2. регулярность модели
3. $I(\theta)$
4. нижняя грань нер-во Кр-Рао

Пусть вероят модель регулярна,

$\tilde{g}(\vec{x}_n)$ — регулярная оценка эфф ф-ции $g(\theta)$,

тогда $$D[\tilde{g}(\vec{x}_n)] \geqslant \frac{(g'(\theta))^2}{n I(\theta)}$$

Замечание ($g(\theta)=\theta$):

$$D[\tilde{\theta}] \geqslant \frac{1}{n I(\theta)}$$

$$\left.\begin{aligned} g(\theta)&=\theta \\ g'(\theta)&=1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow g(\theta) — \text{эфф}$$

$g(\theta)$ – ф-ция по выбору

Статистика $\tilde{g}(\vec{x}_n)$ называется регулярной оценкой ф-ции $g(\theta)$, если она несмещенная,

смена интеграции (*)

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{+\infty}\!\!\dots\!\int \tilde{g}(\vec{x}_n)\mathcal{L}(\vec{x}_n,\theta)\,d\vec{x}_n = \int_{-\infty}^{+\infty}\!\!\dots\!\int \tilde{g}(\vec{x}_n)\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}\,d\vec{x}_n,$$

где $\mathcal{L}(\vec{x}_n,\theta)=\prod_{i=1}^{n}\rho(x_i,\theta)$

(1) $\mathcal{L}(\vec{x}_n)$ fix θ – плотность (*) распред-ся вектора $\vec{x}_n$

(2) $\mathcal{L}(\theta)$ fix $\vec{x}_n$ – функция правдоподобия

Тh достаточное усл-и регулярности

Пусть 1. $\tilde{g}(\vec{x}_n)$ – несмещ оценка $g(\theta)$,

2. модель регулярна

3. $D[\tilde{g}(\vec{x}_n)]$ – огранич на $\forall$ компакте из Θ

тогда оценка явл регулярной.

1. $\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2'$ — несмещённые из а)

2. модель регулярна

3. $D[\tilde{\theta}_1] = \frac{1}{3}\theta^2 = \frac{\theta^2}{n}$

$D[\tilde{\theta}_2'] = \frac{13}{25}\theta^2 =$

θ — ограничена на компакте

как непрерывная функция

(Тм Вейерштрасса

$\Rightarrow$ ограничена и достиг верхней, нижней грани)

$\Rightarrow$ $D[\tilde{\theta}_1]$ и $D[\tilde{\theta}_2]$ — ограничены на компакте $\forall \theta \in \Theta$

$\Rightarrow$ выполнены Тм о достаточных условиях регулярности

$\Rightarrow$ $\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2'$ — регулярные

$\xi \sim \rho(x,\theta)$ $\theta \in \Theta \subset R$ вероят модель

Вероят модель назыв регулярной,

если 1. $\rho(x,\theta)$ непр дифф по θ на Θ

2. $\frac{\partial}{\partial\theta}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\rho(x,\theta)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial}{\partial\theta}\rho(x,\theta)\,dx$

3. $I(\theta)$ непр на Θ инф Фишера

4. $I(\theta) > 0$ на Θ

Проверим модель на регулярность:

1. $p(x,\theta)$ непр дифф по θ на Θ $(\theta > 0)$

2. перестановка $\frac{\partial}{\partial \theta}$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \int_{-\infty}^{+\infty} p(x,\theta)\,dx = 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \theta} p(x,\theta)\,dx = \int_{0}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{e^{-\frac{x}{\theta}}}{\theta} \right) dx =$$

$$= \int_{0}^{+\infty} \left[-\frac{1}{\theta^2} e^{-\frac{x}{\theta}} + \frac{1}{\theta} \left(\frac{x}{\theta^2} \right) e^{-\frac{x}{\theta}} \right] dx =$$

$$= \left\{ t = +\frac{x}{\theta} \qquad x = +t\theta \right\} =$$

$$= \frac{1}{\theta} \int_{0}^{+\infty} \left[-e^{-t} + t e^{-t} \right] dt =$$

$$= \frac{1}{\theta} \left[e^{-t} - (t+1) e^{-t} \right] \Big|_{0}^{+\infty} =$$

$$= \frac{1}{\theta} \left(t e^{-t} \right) \Big|_{0}^{+\infty} = 0 \qquad \begin{matrix} t \to +\infty \\ x \to +\infty \end{matrix}$$

3. $I(\theta)$ непр на Θ Информация Фишера

$$I(\theta) = M\left[\left(\frac{\partial \ln p(x,\theta)}{\partial \theta}\right)^2\right] =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial \ln p(x,\theta)}{\partial \theta}\right)^2 p(x,\theta)\, dx =$$

$$= \int_0^{+\infty} \left(\frac{\theta}{e^{-x/\theta}}\right)^{\cancel{2}} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} p(x,\theta)\right)^2 \cancel{\frac{e^{-x/\theta}}{\theta}}\, dx =$$

$$= \int_0^{+\infty} \left[-\frac{1}{\theta} + \frac{x}{\theta^2}\right]^2 \frac{e^{-\frac{x}{\theta}}}{\theta}\, dx =$$

$$= \left\{ t = \frac{x}{\theta} \qquad x = t\theta \right\} =$$

$$= \frac{1}{\theta^2} \int_0^{+\infty} [-1+t]^2 \frac{e^{-t}}{\theta}\, \theta\, dt = \frac{1}{\theta^2}$$

$\Rightarrow I(\theta)$ – непр на Θ

4. $I(\theta) > 0$ на Θ

$I(\theta) = \frac{1}{\theta^2} > 0$ на Θ $(\theta > 0)$

$\Rightarrow$ модель регулярна

Модель регулярна
оценки регулярны
(ф-ция дифф) $\Big\} \Rightarrow$ по нер-ву Крамера-Рао

$$D[\tilde{\theta}_1] \geqslant \frac{1}{nI(\theta)} = \frac{\theta^2}{2}$$

$$D[\tilde{\theta}_2'] \geqslant \frac{1}{nI(\theta)} = \frac{\theta^2}{2}$$

Статистика $\tilde{g}_{eff}(\vec{x_n})$ называется эффективной оценкой $g(\theta)$, если она регулярна

$$D[\tilde{g}_{eff}(\vec{x_n})] = \inf_{\substack{\text{по всем} \\ \text{регулярным оценкам}}} D[\tilde{g}(\vec{x_n})]$$

$$= \inf\left(\frac{1}{3}\theta^2, \frac{19}{25}\theta^2\right) = \frac{1}{3}\theta^2$$

$\Rightarrow \tilde{\theta}_1 = \bar{x}$ — эффективная оценка

($\tilde{\theta}_1$ эффективнее $\tilde{\theta}_2'$)