

# 倒立振子の安定化制御

前田 拓

2017 年 7 月 12 日

# 目次

<b>第1章</b>	<b>はじめに</b>	<b>3</b>
1.1	目的	3
1.2	実験装置	3
<b>第2章</b>	<b>モデリング</b>	<b>5</b>
2.1	数式モデル	5
2.1.1	状態方程式	5
2.1.2	観測方程式	7
2.2	パラメータの同定	7
2.2.1	パラメータの検証	11
<b>第3章</b>	<b>制御系設計</b>	<b>13</b>
3.0.1	特性解析	13
3.0.2	制御システムの構成	14
3.0.3	状態フィードバック $F$ の設計	15
3.0.4	$\hat{A}$ , $\hat{B}$ , $\hat{C}$ , $\hat{D}$ , $\hat{J}$ の設計	15
3.0.5	制御システムの離散化	15
3.0.6	振り上げ制御と安定化	16
<b>第4章</b>	<b>シミュレーション</b>	<b>19</b>
4.0.1	重み行列変更に関するシミュレーション	19
4.0.2	オブザーバの極変更に関するシミュレーション	19
4.0.3	サンプリング周期変更に関するシミュレーション	21
4.0.4	振り上げ制御のシミュレーション	22
<b>第5章</b>	<b>実験</b>	<b>23</b>
5.0.1	実験装置	23
5.0.2	安定化制御の実験	23
5.0.3	重み行列	23
5.0.4	オブザーバの極	23
5.0.5	サンプリング周期	23
5.0.6	シミュレーションと実験結果の比較	23
5.0.7	目標値変更における安定化制御に関する考察	28
5.0.8	振り上げ制御	29
5.0.9	振り上げ制御に関する考察	29
<b>第6章</b>	<b>おわりに</b>	<b>31</b>



# 目次

1.1 図 1.1: 倒立振子系	3
2.1 図 2.1: モデリングのための力の分解	5
2.2 図 2.2: パラメータ $a$ の決定	8
2.3 図 2.3: 台車のステップ応答	9
2.4 図 2.4: 台車のステップ応答	10
3.1 図 3.1: 制御システムの構成	14
4.1 図 4.1: 重み行列による比較 (台車位置)	19
4.2 図 4.2: 重み行列による比較 (振子角度)	19
4.3 図 4.3: オブザーバの極による比較 (台車位置)	20
4.4 図 4.4: オブザーバの極による比較 (振子角度)	20
4.5 図 4.5: 台車速度の推定誤差	20
4.6 図 4.6: 振子角速度の推定誤差	20
4.7 図 4.7: サンプリング周期による比較 (台車位置)	21
4.8 図 4.8: サンプリング周期による比較 (振子角度)	21
4.9 図 4.9: 台車速度の推定誤差	21
4.10 図 4.10: 振子角速度の推定誤差	21
4.11 図 4.11: 台車位置	22
4.12 図 4.12: 振子角度	22
5.1 図 5.1: パターン 01 の台車位置	24
5.2 図 5.2: パターン 01 の振子角度	24
5.3 図 5.3: パターン 02 の台車位置	24
5.4 図 5.4: パターン 02 の振子角度	24
5.5 図 5.5: パターン 03 の台車位置	24
5.6 図 5.6: パターン 03 の振子角度	24
5.7 図 5.7: パターン 04 の台車位置	25
5.8 図 5.8: パターン 04 の振子角度	25
5.9 図 5.9: パターン 05 の台車位置	25
5.10 図 5.10: パターン 05 の振子角度	25
5.11 図 5.11: パターン 06 の台車位置	25
5.12 図 5.12: パターン 06 の振子角度	25
5.13 図 5.13: パターン 07 の台車位置	26
5.14 図 5.14: パターン 07 の振子角度	26
5.15 図 5.15: パターン 08 の台車位置	26
5.16 図 5.16: パターン 08 の振子角度	26

5.17 図 5.17: パターン 09 の台車位置 . . . . .	26
5.18 図 5.18: パターン 09 の振子角度 . . . . .	26
5.19 図 5.19: パターン 10 の台車位置 . . . . .	27
5.20 図 5.20: パターン 10 の振子角度 . . . . .	27
5.21 図 5.21: パターン 11 の台車位置 . . . . .	27
5.22 図 5.22: パターン 11 の振子角度 . . . . .	27
5.23 図 5.23: パターン 12 の台車位置 . . . . .	27
5.24 図 5.24: パターン 12 の振子角度 . . . . .	27

# 表 目 次

3.1	表 3.1: $A$ の固有値 . . . . .	13
4.1	表 4.1: 重み行列によるシミュレーションに用いるパラメータの種類 . . . . .	19
4.2	表 4.2: オブザーバの極によるシミュレーションに用いるパラメータの種類 . . . . .	20
4.3	表 4.3: サンプリング周期によるシミュレーションに用いるパラメータの種類 . . . . .	21
4.4	表 4.4: サンプリング周期によるシミュレーションに用いるパラメータの種類 . . . . .	22
4.5	表 4.5: 振り上げ後の安定化制御に用いるパラメータ . . . . .	22
5.1	表 5.1: シミュレーションと実験の比較に用いるパラメータ . . . . .	23



# 第1章 はじめに

## 1.1 目的

本実験の目的は, 倒立振り子を状態空間表現を用いて安定化制御し, 線形不変システムを設計することである. 具体的に, 次のことを目的とする.

- 倒立振り子が安定化制御を行っている状態において, 外乱による影響で振り子が傾いたとき, 倒立状態に戻ることができる (不安定平衡点の安定化).
- 倒立振り子系に一定周期のパルス入力を与え, 台車を目的の変位へ移動させる.
- 倒立振り子が入力なしで静止している状態から, 台車を動かすことにより振り子を振り上げ, 倒立状態にする (振り上げ制御).

## 1.2 実験装置

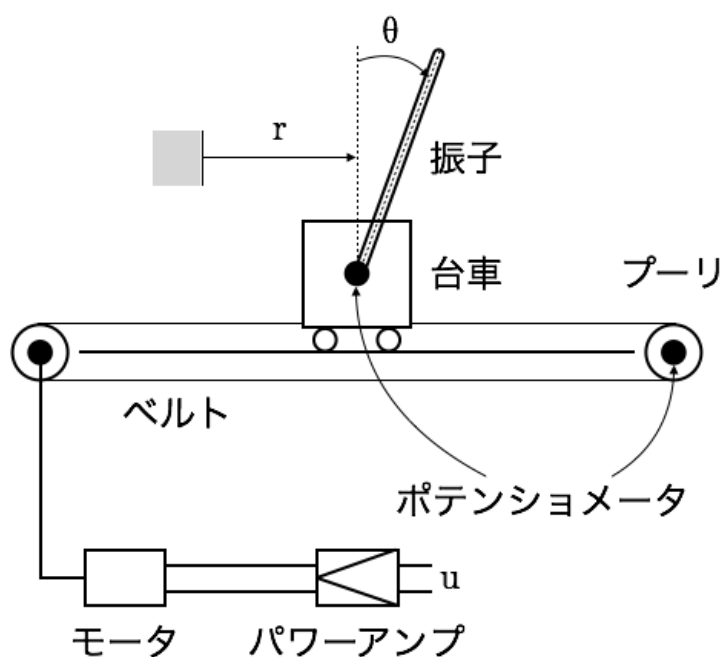


図 1.1: 倒立振り子系

図 1.1 は本実験で使用する倒立振り子系である. 系は, モータ, ベルト, プーリ系から成り, 台車はモータからの入力によりベルト上を水平方向に動くことができる. 台車の初期状態からの変位を  $r$  とする. また, 鉛直方向上向きから時計回りを正の方向として, 台車に取り付けられた振り子が回転した角度を  $\theta$  とする. ポテンシヨメータにより,  $r$  と  $\theta$  を測定し, 入力  $u$  を与える.





## 第2章 モデリング

### 2.1 数式モデル

制御器の設計のため, 倒立振り子の状態方程式, 観測方程式から数式モデルを導出する.

#### 2.1.1 状態方程式

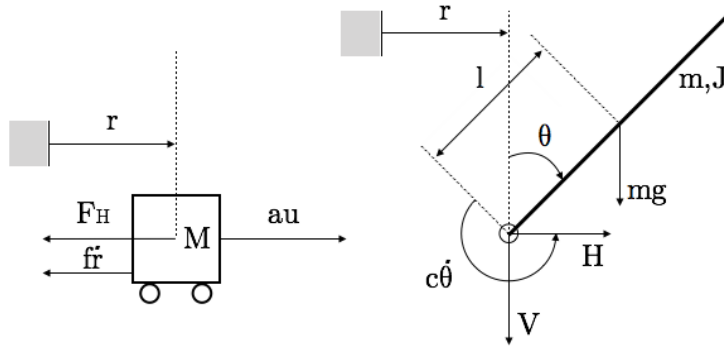


図 2.1: モデリングのための力の分解

図 2.1 から導出した倒立振り子の運動方程式を式 (2.1) から式 (2.4) に示す.

$$M\ddot{r} = au - F_H - f\dot{r} \quad (2.1)$$

$$J\ddot{\theta} = lF_V \sin \theta - lF_H \cos \theta - c\dot{\theta} \quad (2.2)$$

$$m \frac{d^2}{dt^2} (r + l \sin \theta) = F_H \quad (2.3)$$

$$m \frac{d^2}{dt^2} (l \cos \theta) = F_V - mg \quad (2.4)$$

ただし,  $M, f$  は台車の質量と摩擦係数,  $m, l, c, J$  は振り子の質量, 振り子の重心から回転軸までの距離, 回転軸摩擦係数, 重心周りに働く慣性モーメントである. また,  $F_H, F_V$  は振り子が台車から受ける水平効力と垂直抗力である.  $F$  はモータによる台車への駆動力であり, 定数  $a$ , 駆動アンプへの入力電圧  $u$  を用いて式 (2.5) で表される.

$$F = au \quad (2.5)$$

ここで, 系の状態  $x$  を 4 つの状態変数からなる縦ベクトルとする. すなわち,

$$x = \begin{bmatrix} r \\ \theta \\ \dot{r} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

と定義する. 次に, 式 (2.1) から式 (2.4) から倒立振子系の非線形方程式を求める. 式 (2.1), 式 (2.2) から  $F_H$  を消去すると, 式 (2.6) が得られる.

$$(M + m)\ddot{r} + (ml \cos \theta)\ddot{\theta} = au + (ml \sin \theta)\dot{\theta}^2 - f\dot{r} \quad (2.6)$$

また, 式 (2.2), 式 (2.3), 式 (2.4) から  $F_H, F_V$  を消去すると,

$$J\ddot{\theta} = l \left( m \frac{d^2}{dt^2} (l \cos \theta + mg) \right) \sin \theta - l \left( m \frac{d^2}{dt^2} (r + l \sin \theta) \right) \cos \theta$$

となり, 式 (2.7) が得られる.

$$ml \cos \theta \ddot{r} + (J + ml^2)\ddot{\theta} = mgl \sin \theta - c\dot{\theta} \quad (2.7)$$

式 (2.6), 式 (2.7) を行列表現すると,

$$\begin{bmatrix} M + m & ml \cos \theta \\ ml \cos \theta & J + ml^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{r} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f\dot{r} + ml(\sin \theta)\dot{\theta}^2 + au \\ mgl \sin \theta - c\dot{\theta} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \ddot{r} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M + m & ml \cos \theta \\ ml \cos \theta & J + ml^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -f\dot{r} + ml(\sin \theta)\dot{\theta}^2 + au \\ mgl \sin \theta - c\dot{\theta} \end{bmatrix}$$

となる. よって,

$$\dot{x} = f(x, u) = \begin{bmatrix} \dot{r} \\ \dot{\theta} \\ K^{-1} \begin{bmatrix} -f\dot{r} + ml(\sin \theta)\dot{\theta}^2 + au \\ mgl \sin \theta - c\dot{\theta} \end{bmatrix} \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} M + m & ml \cos \theta \\ ml \cos \theta & J + ml^2 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

が得られる. 本実験では, 不安定平衡点  $x = 0$  近傍で線形化したモデルを採用できる.  $\theta$  に関して式 (2.8) を一次近似すると,  $\sin \theta \approx \theta$ ,  $\cos \theta \approx 1$ ,  $\theta^2 \approx 0$  と近似できることから,

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{r} \\ \dot{\theta} \\ K^{-1} \begin{bmatrix} -f\dot{r} + au \\ mgl\theta - c\dot{\theta} \end{bmatrix} \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} M + m & ml \\ ml & J + ml^2 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

を得る. 線形化された倒立振子系の状態方程式は, 式 (2.10) のように表現される.

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (2.10)$$

ここで,

$$A = \begin{bmatrix} O_{2 \times 2} & I_2 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} O_{2 \times 1} \\ B_2 \end{bmatrix}$$

である. ただし,

$$A_{21} = K^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & mgl \end{bmatrix}, \quad A_{22} = K^{-1} \begin{bmatrix} -f & 0 \\ 0 & -c \end{bmatrix}, \quad B_2 = K^{-1} \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix}$$

である.

### 2.1.2 観測方程式

2つの観測出力は,

$$y_1 = c_1 r$$

$$y_2 = c_2 \theta$$

のように表される. ここで,  $c_1$  は変位・電圧変換係数,  $c_2$  は角度・電圧変換係数である. これらからなる縦ベクトル, すなわち出力  $y$  を,

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

と定義すると, 倒立振り子系に対する観測方程式を,

$$y = Cx \quad (2.11)$$

と表せる. ただし,

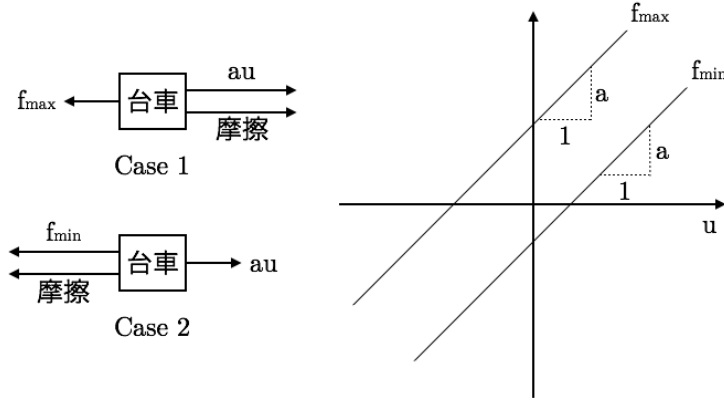
$$N = \begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} N & O_{2 \times 2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

である.

## 2.2 パラメータの同定

パラメータの同定のため, 以下の手順で測定を行う.

1. 実測できるパラメータ  $m$  (振子の質量 [kg]),  $l$  (振子の重心から回転軸までの長さ [m]) の測定を行う.
2. 駆動アンプへの入力電圧とモータ駆動力の変換係数  $a$  を求める.
  - (a) 振子を台車から取り外す.
  - (b) モータに一定電圧  $u$  を加え, ばねばかりで引き, 台車が正の方向に動き始めるときの力 ( $au + \text{摩擦}$  力) を  $f_{max}$ , 負の方向に動き始めるときの力 ( $au - \text{摩擦}$  力) を  $f_{min}$  とする. 測定は 10[V], 11[V], ..., 15[V] の各電圧に対して行う.
  - (c)  $f_{max}$ ,  $f_{min}$  それぞれの回帰直線の傾きを平均し, その値を  $a$  [N/V], すなわち入力電圧  $u$  [V] とモータ駆動力  $f$  [N] の変換係数とする.
3. 台車の変位  $r$  と  $y_1$  の変換係数を  $c_1 = 1.0$  [V/m], 振子の角度  $\theta$  と  $y_2$  の変換係数を  $c_2 = 1.0$  [V/rad] とする.
4. 以下の2通りの方法で台車系の質量  $M$  [kg] と摩擦係数  $f$  [kg/s] を求める.

図 2.2: パラメータ  $a$  の決定

- ステップ応答による方法

振子を台車から取り外したまま, 台車のステップ応答を測定する. そのとき, 台車の運動方程式は,

$$M\ddot{r} = au - fr \quad (2.12)$$

であり, 入力  $u$  から目標値  $r$  までの伝達関数  $G$  は,

$$G(s) = \frac{K}{s(Ts + 1)} \quad (2.13)$$

となる. ただし,

$$K = \frac{a}{f}, \quad T = \frac{M}{f} \quad (2.14)$$

である. 初期状態を零ベクトルとすれば, 台車のステップ応答は,

$$r(t) = KU_0 \left( T \exp\left(\frac{-t}{T}\right) + t - T \right) \quad (2.15)$$

である.(図 2.3 参照) ただし,  $U_0$  はステップ入力  $u$  の  $t > 0$  での値である. 式 (2.15) において,  $t \rightarrow \infty$  の極限をとると,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = KU_0(t - T) \quad (2.16)$$

となる. 図 2.3 を参考に, 式 (2.16) から  $T$ ,  $K$  を求め,

10[V], 11[V], ..., 15[V] の各電圧をステップ入力として与え, それぞれのステップ応答から求めたパラメータ  $T$ ,  $K$  を平均し,  $M$ ,  $f$  を決定する.

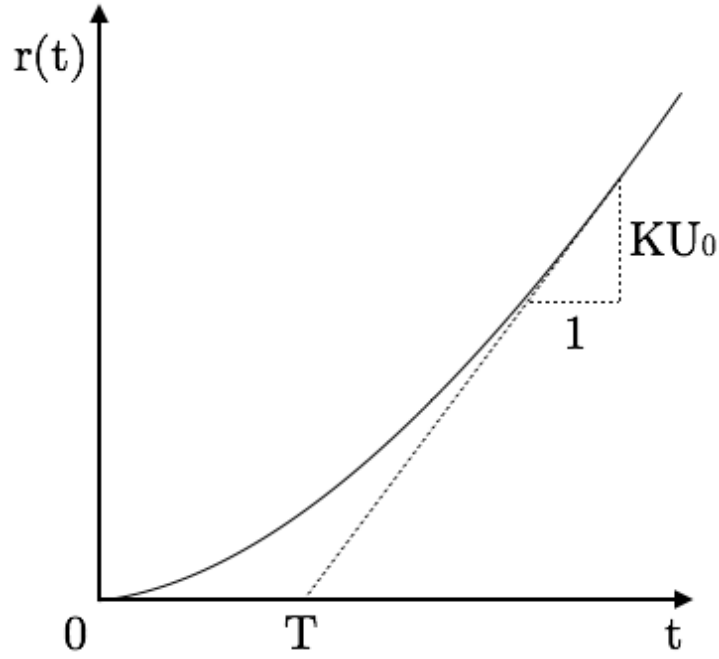


図 2.3: 台車のステップ応答

- フィードバックによる方法

台車の数式モデルである式 (2.12), 出力  $y_1 = c_1 r$  について, フィードバックにより入力を制御する. すなわち,

$$u = k(y_c - y_1) \quad (2.17)$$

とする ( $y_c = \text{const}$ ,  $k > 0$ ). このとき, 閉ループシステムの応答は,

$$M\ddot{y}_1 + f\dot{y}_1 + c_1 a k y_1 = c_1 a k y_c \quad (2.18)$$

となる (図 2.4 参照). 一方, 偏差  $z$  を加え, ばねばかりで引き, 台車が正の方向に動き始めるときの力

$$z = y_1 - y_c \quad (2.19)$$

により定義すると,  $z$  は以下の式 (2.20) に従う.

$$\ddot{z} + 2\zeta\omega_n\dot{z} + \omega_n^2 z = 0 \quad (2.20)$$

ただし,

$$\zeta = \frac{f}{2\sqrt{c_1 a k M}}, \quad \omega_n = \sqrt{\frac{c_1 a k}{M}} \quad (2.21)$$

である. 式 (2.20) の解は,

$$0 < \zeta < 1$$

のとき減衰振動となり, そのときの解は,

$$z(t) = \frac{z_0}{\sqrt{1-\zeta^2}} \exp(-\omega_n \zeta t) \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + \phi)$$

ただし,

$$\phi = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$$

で与えられる. ここで,  $z_0 = z(0) = -y_c$  である. いま,  $T$  とし, 時刻  $t_1$  と  $t_2 = t_1 + T$  において波形  $z$  の山が隣り合うものとする. このとき, 振幅の減衰比は,

$$\frac{|z_2(t_2)|}{z_2(t_1)} = \exp(-\lambda) \quad (2.22)$$

となる.  $\lambda$  は対数減衰比であり, 次が成り立つ.

$$\lambda = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} \quad (2.23)$$

従って, 式 (2.21), 式 (2.23) から, パラメータ  $M, f$  は,

$$M = \frac{c_1 a k T^2}{4\pi^2 + \lambda^2}, \quad f = \frac{2\lambda M}{T} \quad (2.24)$$

のようにして求まる.

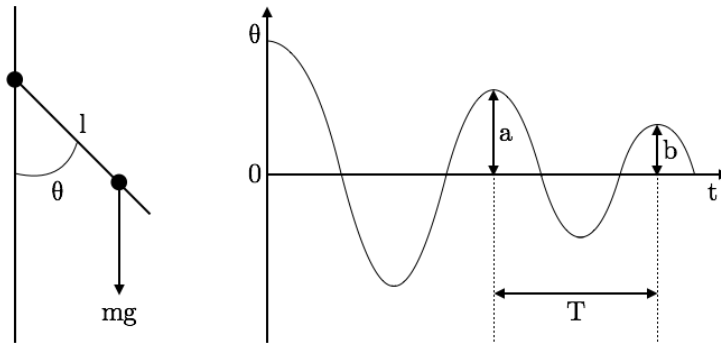


図 2.4: 台車のステップ応答

#### 5. パラメータ $J$ と $c$ の決定

振子を台車に取り付け, 台車を固定したまま振子を自由振動させることにより, パラメータ  $J, c$  を測定する. このとき, 振子の運動方程式は,

$$(J + ml^2)\ddot{\theta} = -mgl \sin \theta - c\dot{\theta} \quad (2.25)$$

$$y_2 = c_2 \theta \quad (2.26)$$

で与えられる.  $\theta$  を微小区間で考えると, 式 (2.25), 式 (2.26) は次のように書ける.

$$\ddot{y}_2 + 2\zeta\omega_n\dot{y}_2 + \omega_n^2 y_2 = 0 \quad (2.27)$$

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{mgl(J + ml^2)}}, \quad \omega_n = \sqrt{\frac{mgl}{J + ml^2}} \quad (2.28)$$

式 (2.27) の解で表される減衰振動の対数減衰率を  $\lambda$ , 周期を  $T$  とすると, 式 (2.23) が成り立つことから  $J$  と  $c$  は,

$$J = \frac{mglT^2}{4\pi^2 + \lambda^2} - ml^2, \quad c = \frac{2\lambda(J + ml^2)}{T} \quad (2.29)$$

のように与えられる.

### 2.2.1 パラメータの検証





## 第3章 制御系設計

### 3.0.1 特性解析

第2章で物理パラメータの決定と数式モデルの導出を行った。ここでは、決定したパラメータから、式 (2.9), 式 (2.10) の特性解析を行う。倒立振子の線形モデルの状態空間表現は以下のようになる。

$$A, B, C \text{ の値} \quad (3.1)$$

まず、行列  $A$  の安定判別を行う。 $A$  のすべての固有値に関して、実部が負であれば  $A$  は安定性行列である。すなわち、 $A$  の固有値  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$  に対し、

$$\operatorname{Re}[\lambda_i] < 0$$

が成立すればよい。MATX で  $A$  の固有値を算出した結果を表 3.1 に示す。

表 3.1:  $A$  の固有値

固有値	$\operatorname{Re}[\lambda_i]$
0	0
0	0
0	0
0	0

表 3.1 から、倒立振子系のシステムは不安定である。次に、システムの可制御性、可観測性を判別する。可制御性は、 $n$  をシステムの次数 (倒立振子系のシステムの次数は  $n = 4$ ) に対し、可制御性行列、

$$U_C = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

のランクがシステムの次数と等しければ満たされる。また、可観測性行列は、

$$U_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

であり、 $U_o$  のランクがシステムの次数と等しければ可観測となる。式 (3.1) において、MATX を用いて  $U_c, U_o$  のランクを計算した結果、以下のようになった。

$$U_c, U_o \text{ のランク}$$

以上から、倒立振り子系のシステムは不安定であり、可制御、可観測である。

### 3.0.2 制御システムの構成

図 3.1 に、倒立振り子系に対する制御システムの構成を示す。

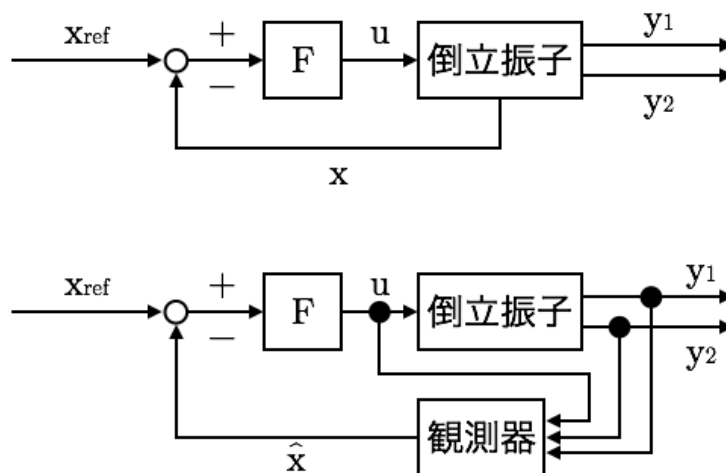


図 3.1: 制御システムの構成

制御系のフィードバックによる入力は、

$$u = -F(x - x_{ref})$$

ただし、

$$x_{ref} = \begin{bmatrix} y_c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

であり、 $y_c$  は指定された台車位置を表す。本実験では、 $\dot{r}$ ,  $\dot{\theta}$  の検出器は用いず、状態  $x$  は推定値  $\hat{x}$  において、

$$x = \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{x} \quad (3.2)$$

とする。また、式 (3.2) を満足する最小次元オブザーバ、

$$\hat{z} = \hat{A}z + \hat{B}y + \hat{J}u \quad (3.3)$$

$$\hat{x} = \hat{C}z + \hat{D}y \quad (3.4)$$

を用いる。ここで、オブザーバの次数は 2 であり、設計すべき制御システムは以下のようになる。

- $F(1 \times 4)$
- $\hat{A}(2 \times 2)$ ,  $\hat{B}(2 \times 2)$ ,  $\hat{J}(2 \times 1)$ ,  $\hat{C}(4 \times 2)$ ,  $\hat{D}(4 \times 2)$

### 3.0.3 状態フィードバック $F$ の設計

$F$  は、システムを安定化する状態フィードバック、

$$u = -Fx \quad (3.5)$$

を満たすように求める。式 (3.5) を LQ 問題として解くため、2 次形式評価関数、

$$J = \int_0^\infty (x^T Q x + R u^2) dt \quad (3.6)$$

$$Q = \text{diag}(q_1^2, q_2^2, q_3^2, q_4^2), R = 1 \quad (3.7)$$

を考える。ここで、 $\text{diag}(\dots)$  は、各引数を固有値にもつ対角行列を表す。これは、

$$J = \int_0^\infty (q_1^2 r^2 + q_2^2 \theta^2 + q_3^2 \dot{r}^2 + q_4^2 \dot{\theta}^2 + u^2) dt \quad (3.8)$$

と表せるから、 $q_1, q_2, q_3, q_4$  はそれぞれ、台車位置  $r$ , 振子角度  $\theta$ , 台車速度  $\dot{r}$ , 振子角速度  $\dot{\theta}$  に対する重み係数である。式 (3.6), 式 (3.7) を最小にする  $F$  は、リッカチ方程式、

$$A^T P + P A - P B R^{-1} B^T P + Q = 0$$

の解 ( $P > 0$ ) に対し、

$$F = R^{-1} B^T P$$

で与えられる。

### 3.0.4 $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}, \hat{J}$ の設計

式 (3.3), 式 (3.4) が式 (3.2) を満足するための十分条件は、ある行列  $U(1 \times 4)$  が存在して、

$$\begin{aligned} U A &= \hat{A} U + \hat{B} C \\ U B &= \hat{J} \\ I &= \hat{C} U + \hat{D} C \end{aligned}$$

であり、かつ  $\hat{A}$  が安定性行列であることである。これらの条件を満足するオブザーバを設計するため、Gopinath の方法を用いる。

### 3.0.5 制御システムの離散化

式 (3.5), 式 (3.3), 式 (3.4) で示した  $u, \hat{z}, \hat{x}$  は、連続時間上で設計される制御器である。そこで、計算機で制御器を表現するためこれらの離散時間化を行う。各サンプリングの間隔を  $\Delta$  とすると、

$$\begin{aligned} u[k] &= -F \hat{x}[k] \\ z[k+1] &= \hat{A}_d z[k] + \hat{B}_d y[k] + \hat{J}_d u[k] \\ \hat{x}[k] &= \hat{C}_d z[k] + \hat{D}_d y[k] \end{aligned}$$

と表せる。ただし、 $k = 0, 1, \dots$  において、

$$x_{ref} = \begin{bmatrix} \hat{A}_d & \begin{bmatrix} \hat{B}_d & \hat{J}_d \end{bmatrix} \\ 0 & I_3 \end{bmatrix} = \exp \Delta \begin{bmatrix} \hat{A} & \begin{bmatrix} \hat{B} & \hat{J} \end{bmatrix} \\ 0 & I_3 \end{bmatrix}$$

である。

### 3.0.6 振り上げ制御と安定化

台車と振子の運動方程式は、式 (2.6), 式 (2.7) から、

$$\begin{aligned} (M + m)\ddot{r} + (ml \cos \theta)\ddot{\theta} &= au + (ml \sin \theta)\dot{\theta}^2 - f\dot{r} \\ ml \cos \theta \ddot{r} + (J + ml^2)\ddot{\theta} &= mgl \sin \theta - c\dot{\theta} \end{aligned}$$

で与えられる。振子が鉛直上向きのをときを基準とする振子の力学的エネルギーは、

$$E = \frac{1}{2} (J + ml^2) \dot{\theta}^2 + mgl (\cos \theta - 1) \quad (3.9)$$

であり、力学的エネルギーの時間微分は、

$$\frac{dE}{dt} = (J + ml)\dot{\theta}\ddot{\theta} - mgl\dot{\theta} \sin \theta \quad (3.10)$$

となる。振り上げ処理を行うため、入力  $u$  を次のように計算する。

$$u = \frac{1}{a} (f\dot{r} - ml \sin \theta \dot{\theta}^2 + ml \cos \theta \ddot{\theta} + (M + m)v) \quad (3.11)$$

$$v = -\frac{c\dot{\theta}}{ml \cos \theta} + k(E - E_0)\text{sign}(\dot{\theta} \cos \theta) \quad (3.12)$$

$\text{sign}$  は符号関数であり、引数が 0 のとき 0 を、正のとき 1 を、負のとき  $-1$  を返す。式 (2.6) に式 (3.11) を代入すると、

$$\ddot{r} = v \quad (3.13)$$

を得る。式 (3.13), 式 (3.12) を式 (2.7) に代入すると、

$$(J + ml^2)\ddot{\theta} = mgl \sin \theta - ml \cos \theta (k(E - E_0)\text{sign}(\dot{\theta} \cos \theta)) \quad (3.14)$$

を得る。さらに、これを式 (3.10) に代入すると、

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= -ml\dot{\theta} \cos \theta (k(E - E_0)\text{sign}(\dot{\theta} \cos \theta)) \\ &= -mlk(E - E_0)\text{sign}(\dot{\theta} \cos \theta)\dot{\theta}(\cos \theta) \end{aligned}$$

となる。リアプノフ関数として、

$$V = \frac{(E - E_0)^2}{2} \quad (3.15)$$

を考えると、 $V$  の時間微分、

$$\begin{aligned}
\frac{dV}{dt} &= (E - E_0) \frac{dE}{dt} \\
&= -mlk(E - E_0)^2 \text{sign}(\dot{\theta} \cos \theta) \dot{\theta} (\cos \theta) \leq 0
\end{aligned} \tag{3.16}$$

これより、 $\dot{\theta} \cos \theta \neq 0$  のとき、 $V$  は減少して 0 に収束し、 $E$  は  $E_0$  に収束する。実際の制御では、台車の加速度目標  $v$  を制限し、

$$u = \frac{1}{a} \left( f\dot{r} - ml \sin \theta \dot{\theta}^2 + ml \cos \theta \ddot{\theta} + (M + m)v \right)$$

$$v = -\frac{c\dot{\theta}}{ml \cos \theta} + \text{sat}_{ng}(k(E - E_0) \text{sign}(\dot{\theta} \cos \theta))$$

とする。ただし、 $\text{sat}_{ng}$  は最小値  $-ng$ , 最大値  $ng$  の飽和関数である。また、 $n$  は重力加速度と台車の加速度の比である。さらに、 $k$  を大きくすればより早く  $E$  が  $E_0$  に収束する。



## 第4章 シミュレーション

目標値変更、振り上げ制御のシミュレーションを行い、重み行列、オブザーバの極、サンプリング周期、パラメータ  $k$ ,  $n$  を変更し、それぞれの変更による性能の違いを確認める。

### 4.0.1 重み行列変更に関するシミュレーション

目標値変更における安定化制御で、表 4.1 に示すパラメータを用いてシミュレーションを行う。

表 4.1: 重み行列によるシミュレーションに用いるパラメータの種類

パターン	重み行列 $Q$	オブザーバの極 $P$	サンプリング周期 $dt[s]$
パターン 1	$Q_1(1E6, 1E5, 1, 1)$	$P_1((-23,0), (-23,0))$	$dt_1:0.005$
パターン 2	$Q_2(1E5, 1E6, 1, 1)$	$P_2((-23,0), (-23,0))$	$dt_2:0.005$
パターン 3	$Q_3(1E6, 1E6, 1, 1)$	$P_3((-23,0), (-23,0))$	$dt_3:0.005$

表 4.1 に従ってシミュレーションを行った結果を図 4.1, 図 4.2 に示す。

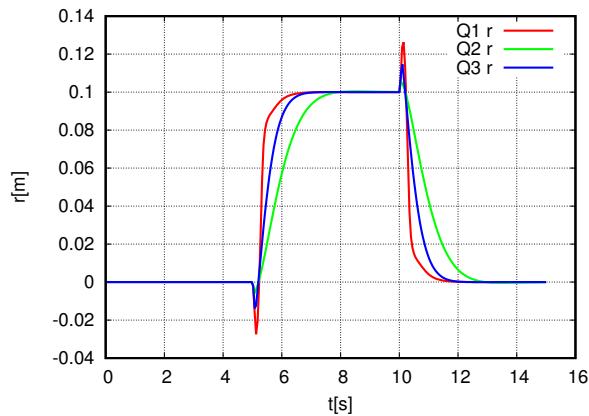


図 4.1: 重み行列による比較 (台車位置)

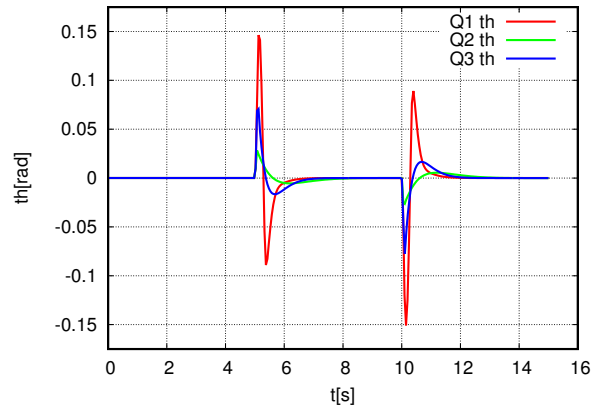


図 4.2: 重み行列による比較 (振り角度)

図 4.1 から、最も重みを大きくしたパターン 1 をみると、たしかに台車の目標位置への収束は速くなっているが、台車の位置を有線する一方で振子の角度の振幅は大きくなっている。一方で、振り角度の重みを最も大きくしたパターン 2 では、振り角度の振幅は小さく抑えられていると同時に、台車位置の目標値への収束が 3 パターンの中で最も遅くなっている。

### 4.0.2 オブザーバの極変更に関するシミュレーション

目標値変更における安定化制御で、表 4.2 に示すパラメータを用いてシミュレーションを行う。



表 4.2: オブザーバの極によるシミュレーションに用いるパラメータの種類

パターン	重み行列 $Q$	オブザーバの極 $P$	サンプリング周期 $dt[s]$
パターン 1	$Q_1(1E6, 1E5, 1, 1)$	$P_1((-23,0), (-23,0))$	$dt_1:0.005$
パターン 2	$Q_2(1E6, 1E5, 1, 1)$	$P_2((-50,0), (-50,0))$	$dt_2:0.005$

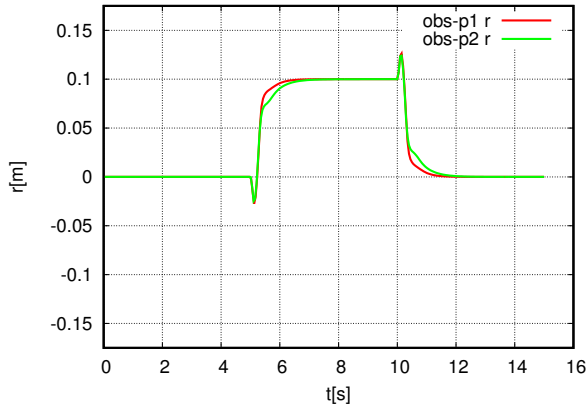


図 4.3: オブザーバの極による比較 (台車位置)

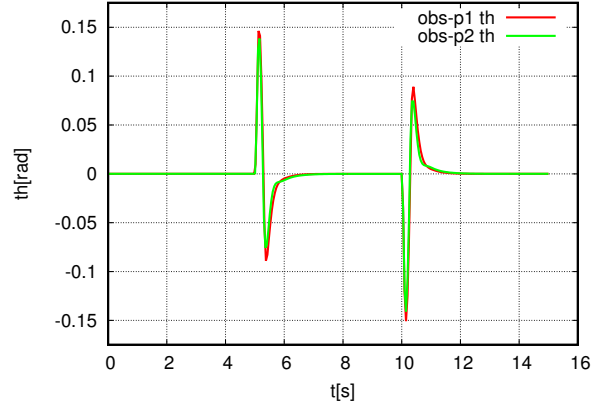


図 4.4: オブザーバの極による比較 (振り子角度)

表 4.2 に従ってシミュレーションを行った結果を図 4.3, 図 4.4 に示す。

台車位置、振り子角度だけでは変化が現れにくいので、それぞれのオブザーバの推定誤差を用いて比較を行う。図 4.5 に台車速度に関する推定誤差を、図 4.6 に振り子角速度に関する推定誤差を示す。

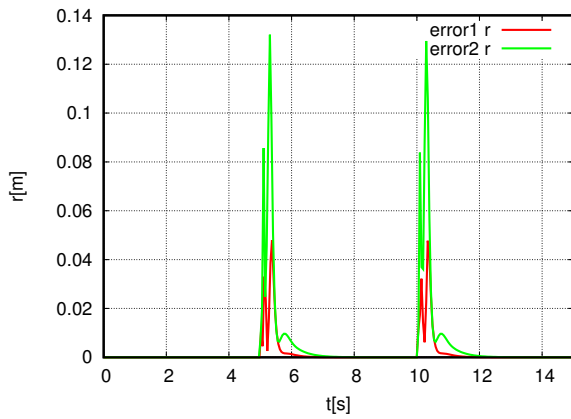


図 4.5: 台車速度の推定誤差

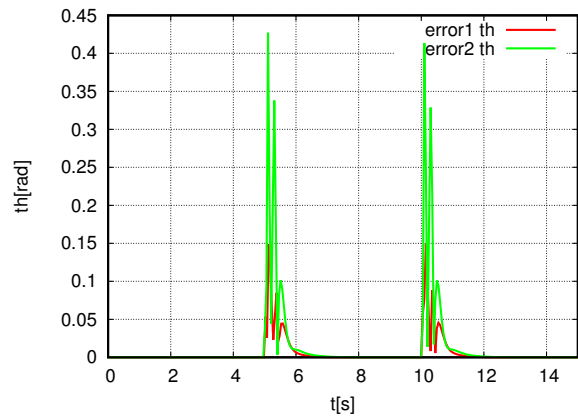


図 4.6: 振り子角速度の推定誤差

台車速度、振り子角度の推定誤差ともに、オブザーバの極が負の方向に虚軸から遠いほど推定誤差が大きくなっている。よって、このシミュレーション結果からはオブザーバの極は虚軸に近い極配置が好ましいと言える。実際には、極の絶対値がより大きいほど推定誤差は小さくなるが、本実験で行ったシミュレーションのパラメータでは既に極の絶対値が十分に大きく、オブザーバの極配置以外の要因により推定誤差が大きくなったと考察できる。