

## B. 倒立振子の安定化制御

---

### 1 制御対象と制御目的

#### 倒立振子系

制御対象として、図 B.1 に示されるような倒立振子系を考える。モノレール上に台車が置かれ、台車上のモノレールと直角な軸に 1 本の棒が取り付けられ、棒はその軸まわりに自由に回転できる。台車はベルトとプーリを介して、モータにより駆動され、モノレール上を走行できる。すなわち、棒 (振子) は鉛直線とモノレールにより定まる平面に拘束されて、台車によって動かされるようになっている。

#### 観測出力と操作入力

倒立振子系の観測出力として、エンコーダにより、つぎの 2 つが測定できる。

1° 台車の基準位置からの変位  $r$  に比例する電圧  $y_1$

2° 棒の鉛直線となす角度  $\theta$  に比例する電圧  $y_2$

一方、操作入力は、つぎのものである。

1° モータの駆動アンプへの入力電圧  $u$

ここで、モータにより駆動される台車には、 $u$  に比例した駆動力が働くものとする。

#### 制御目的

この倒立振子系は、2 つの平衡点もつ。1 つは棒が鉛直線に沿って垂れ下がった状態、もう 1 つは棒が鉛直線に沿って倒立した状態である。前者は、棒を揺らせば、いわゆる振子となり、揺れは時間が立てば止まるので、安定平衡点である。後者は、いわゆる倒立振子であるが、倒立状態にある棒を少しでもつければ、真っ逆さまに落ちて行くので、不安定平衡点である。このような倒立振子系に対する制御目的として、つぎを考える。

1° 倒立状態にある棒が何らかの原因で傾いたとき、台車を動かして、棒をすみやかに倒立状態に戻す (不安定平衡点の安定化)。

2° 倒立位置を指定した位置に移動させる。

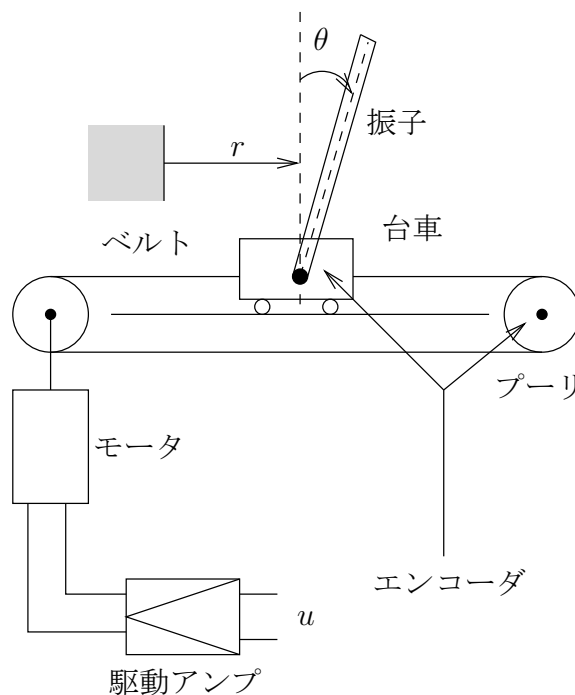


図 B.1 : 倒立振子系

## 2 数式モデル

制御目的を達成する制御システムを設計するためにまず、倒立振子系について、状態方程式と観測方程式から成る数式モデルを導出する。

### 2.1 状態方程式

図 B.2 を参照して、台車と振り子に関する運動方程式がつぎのように得られる。

$$M\ddot{r} = au - F_H - f\dot{r} \quad (1)$$

$$J\ddot{\theta} = \ell F_V \sin \theta - \ell F_H \cos \theta - c\dot{\theta} \quad (2)$$

$$m \frac{d^2}{dt^2}(r + \ell \sin \theta) = F_H \quad (3)$$

$$m \frac{d^2}{dt^2}(\ell \cos \theta) = F_V - mg \quad (4)$$

ここで、 $M$ ,  $f$  は台車の質量と摩擦係数、 $m$ ,  $\ell$ ,  $J$ ,  $c$  は振り子の質量、回転軸・重心間距離、重心まわり慣性モーメント、回転軸摩擦係数、 $F_H$ ,  $F_V$  は振り子が台車から受ける水平抗力と垂直抗力である。また、 $u$  は駆動アンプへの入力電圧、 $a$  は駆動アンプへの入力電圧から台車への駆動力までのゲインである。

いま、4 つの状態変数から成るベクトル、すなわち状態  $x$  を

$$x = \begin{bmatrix} r \\ \theta \\ \dot{r} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

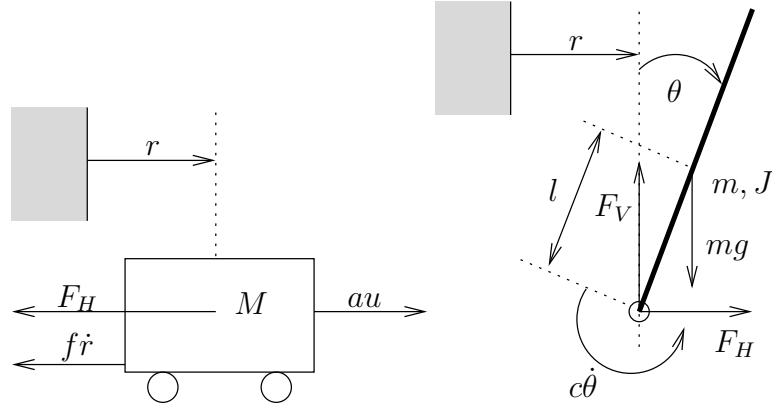


図 B.2 : 数式モデル導出のための参考図

のように定義すると, (1)–(4) 式から, 倒立振子系の非線形状態方程式は

$$\dot{x} = f(x, u) = \begin{bmatrix} \dot{r} \\ \dot{\theta} \\ K^{-1} \begin{bmatrix} -f\dot{r} + m\ell \sin \theta \cdot \dot{\theta}^2 + au \\ mgl \sin \theta - c\dot{\theta} \end{bmatrix} \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} M + m & m\ell \cos \theta \\ m\ell \cos \theta & J + m\ell^2 \end{bmatrix} \quad (5)$$

のように得られる。

ところで, 倒立振子系については, その制御目的から, 不安定平衡点  $x = 0$  の近傍での挙動を表す状態方程式を知れば十分である。そこで, この基準状態まわりで一次近似された状態方程式を求めることを考える。

倒立振子系に対する状態方程式は, つぎのように得られる。

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (6)$$

ここで

$$A = \begin{bmatrix} 0_{2 \times 2} & I_2 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0_{2 \times 1} \\ B_2 \end{bmatrix}$$

ただし

$$A_{21} = K^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & mgl \end{bmatrix}, \quad A_{22} = K^{-1} \begin{bmatrix} -f & 0 \\ 0 & -c \end{bmatrix}, \quad B_2 = K^{-1} \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} M + m & m\ell \\ m\ell & J + m\ell^2 \end{bmatrix}$$

**問題 1:** (1)–(4) 式から (5) 式を導出しなさい。また, ラグランジェの運動方程式を用いて, (5) 式を導出しなさい。

**問題 2:**  $\theta$  を微小範囲で考え,  $\sin \theta \simeq \theta$ ,  $\cos \theta \simeq 1$ ,  $\dot{\theta}^2 \simeq 0$  のように近似して, (6) 式を導出しなさい。また, 次式から (6) 式を導出しなさい。

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=0, u=0}, \quad B = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{x=0, u=0}$$

## 2.2 観測方程式

2つの観測出力は

$$\begin{aligned} y_1 &= c_1 r \\ y_2 &= c_2 \theta \end{aligned}$$

のように表される。ここで、 $c_1$  は変位・電圧変換係数、 $c_2$  は角度・電圧変換係数である。これらから成るベクトルすなわち出力  $y$  を

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

のように定義すると、倒立振子系に対する観測方程式として

$$y = Cx$$

ただし

$$C = \begin{bmatrix} N & 0_{2 \times 2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix} \quad (7)$$

を得る。

**問題 3:**  $A_{21}$ ,  $A_{22}$ ,  $B_2$  の各要素を、物理パラメータを用いて表しなさい。

表 B.1 : 物理パラメータ

$m$	[kg]	0.038
$\ell$	[m]	0.13
$M$	[kg]	1.49
$f$	[kg/s]	15.10
$J$	[kgm <sup>2</sup> ]	$4.5 \times 10^{-4}$
$c$	[kgm <sup>2</sup> /s]	$2.1 \times 10^{-4}$
$a$	[N/V]	0.73
$c_1$	[V/m]	1.0
$c_2$	[V/rad]	1.0
$g$	[m/s <sup>2</sup> ]	9.8

## 3 物理パラメータの決定

倒立振子系の数式モデル (6) と (7) に含まれる物理パラメータの例を表 B.1 に示す。以下では、各パラメータの決定法について述べる。

### 3.1 準備

倒立振子装置、駆動アンプ、PC はすでに結線を済ませてあるので、インストラクターの了解なしにむやみに変更を加えてはならない。また、実験を通して、倒立振子装置の取扱いは慎重に行うこと。特に、操作ミスや不適当な制御システム実施のために、台車を暴走させることがある。その場合、衝突した台車を傷めるばかりでなく、手を挟む、振子が飛ぶ等の危険が伴うことがあるので十分注意すること。

PC の構成は、つぎの通りである。

1° PC 本体 (nx6320/CT, HP Compaq 製)

2° ソフトウェア (Jamox<sup>1</sup>, RTMATX/MATX<sup>2</sup>)

その他、つぎのものが実験に必要である。

1° バネ秤 (200g, 1kg, 2kg:各 1 本)

2° 鋼尺 (600mm:1 本)

まず、倒立振子の制御系設計およびリアルタイム制御を行うため Jamox を起動しなさい。

### 3.2 $m$ と $\ell$ の測定

振子を装置から取り外し、バネ秤で  $m$  を測定しなさい。つぎに、振子を鋼尺のエッジ上でバランスさせて、重心の位置を定め、 $\ell$  を測定しなさい。

### 3.3 $c_1$ と $c_2$ の測定

$c_1$  と  $c_2$  は、

$$c_1 = 1.0$$

$$c_2 = 1.0$$

のようにソフトウェア内で設定済である。

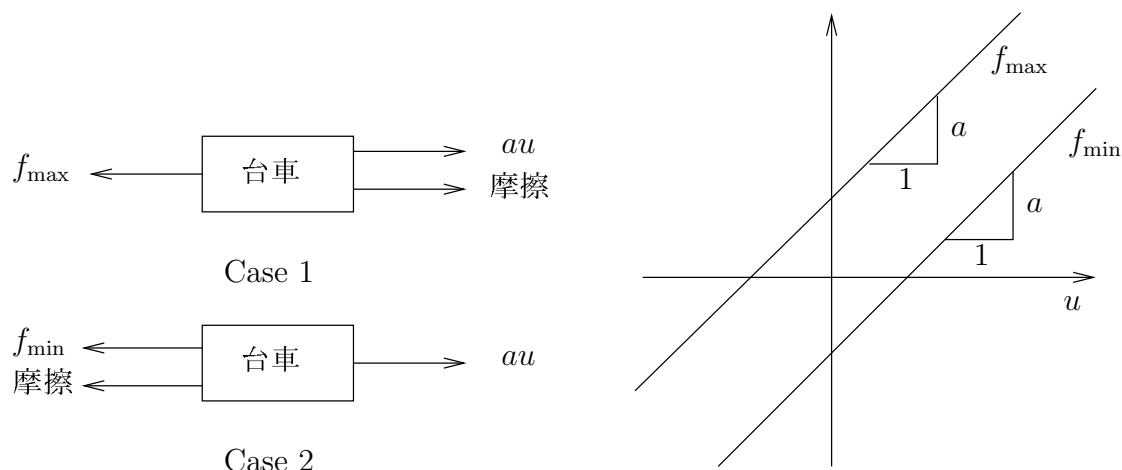
### 3.4 $a$ の測定

モータに一定電圧を加え、バネばかりで台車を引き、台車が正の方向に動き出すときの力 ( $au + \text{摩擦}$ 力) を  $f_{\max}$ 、負の方向に動き出すときの力 ( $au - \text{摩擦}$ 力) を  $f_{\min}$  とする。図 B.3 に示すように  $u$  と  $f_{\max}$ ,  $f_{\min}$  の関係をいくつかの電圧について調べ、最小 2 乗法によって 1 次関数を求め、この傾きを  $a$  とする。

アクチュエータへの入力を変更する方法については、実験マニュアルを参考にすること。なお、振子は台車から取り外しておく。

<sup>1</sup><http://jamox.mklab.org/>からフリーで入手できる。

<sup>2</sup><http://www.matx.org/>からフリーで入手できる。

図 B.3 : パラメータ  $a$  の決定

### 3.5 $M$ と $f$ の測定

台車は外見は小さいが、台車を手で動かしてみると、かなり重たい。これはモータ (ギヤ付) の軸のトルクがあるためである。そこで、 $M$  と  $f$  は、アンプ・モータ・プーリ・ベルト・台車系の等価質量と等価摩擦係数として決定する。

振子を台車から取り外して、台車のステップ応答を測定する。このときの運動方程式は

$$M\ddot{r} = au - f\dot{r}$$

であり、 $u$  から  $r$  までの伝達関数  $G$  を求めると

$$G(s) = \frac{K}{s(Ts + 1)}$$

となる。ただし、

$$K = \frac{a}{f}, \quad T = \frac{M}{f} \quad (8)$$

である。初期状態をゼロとすると、このシステムのステップ応答は

$$r(t) = KU_0(Te^{-\frac{t}{T}} + t - T) \quad (9)$$

である (図 8 参照)。ただし、 $U_0$  はステップの高さである。(9) 式において  $t \rightarrow \infty$  とすれば

$$r(t) = KU_0(t - T)$$

となり、これから  $T$  と  $K$  を求め (図 8 参照)、(8) 式より  $M$  と  $f$  を決定することができる。

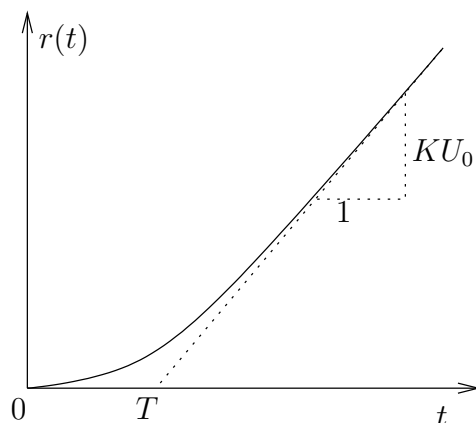


図8 台車のステップ応答

さて、つぎの手順により、 $M$  と  $f$  を決定しなさい。なお、振子は台車から取り外しておく。

1. 台車を左端に寄せて、右側に十分なスペースをとる。
2. アンプ全面左上の SW1 が OFF であることを確認して、右下の電源を ON にする。
3. 実験マニュアルにしたがって台車の応答波形を計測し、波形のグラフを描画する。
4. グラフより  $T$  と  $K$  を求め、(8) 式より  $M$  と  $f$  を計算する。

**問題 4:** (8) 式および (9) 式を導出しなさい。

**問題 5:**  $z$  の実験曲線と、測定した  $M$  と  $f$  を用いた  $z$  の理論曲線を重ねて描きなさい。

### 3.6 $J$ と $c$ の測定

振子を自由振動させることにより、 $J$  と  $c$  を測定できる。その数式モデルは

$$(J + m\ell^2)\ddot{\theta} = -mg\ell \sin \theta - c\dot{\theta} \quad (10)$$

$$y_2 = c_2\theta \quad (11)$$

で与えられる。 $\theta$  を微小範囲で考えると、(10)–(11) 式は

$$\ddot{y}_2 + 2\zeta\omega_n\dot{y}_2 + \omega_n^2 y_2 = 0$$

ただし

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{mg\ell(J + m\ell^2)}}, \quad \omega_n = \sqrt{\frac{mg\ell}{J + m\ell^2}}$$

のように書くことができる。この解は

$$0 < \zeta < 1$$

のとき、減衰振動となり

$$y_2(t) = \frac{y_2(0)}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \exp(-\omega_n \zeta t) \sin(\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t + \phi)$$

ただし

$$\phi = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta}$$

で与えられる。いま、減衰振動の周期を  $T_2$  とし、時刻  $t_1$  と  $t_2 = t_1 + T_2$  において波形  $y_2(t)$  の山が隣合うものとする。このときの振幅の減衰比は

$$\frac{|y_2(t_2)|}{|y_2(t_1)|} = \exp(-\lambda)$$

ただし

$$\lambda = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (12)$$

となる。この  $\lambda$  は対数減衰比と呼ばれる。また

$$T_2 = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} \quad (13)$$

が成り立つ。したがって、 $J, c$  は

$$J = \frac{mg\ell T_2^2}{4\pi^2 + \lambda^2} - m\ell^2, \quad c = \frac{2\lambda(J + m\ell^2)}{T} \quad (14)$$

のように与えられる。

さて、つぎの手順により、 $J$  と  $c$  を決定しなさい。

1. 台車をやや左に寄せておく。
2. アンプ全面左上の SW1 が OFF であることを確認して、右下の電源を ON にする。
3. 実験マニュアルにしたがって振子の応答波形を計測し、波形のグラフを描画する。
4. グラフより対数減衰率  $\lambda$  と周期  $T$  を求め、(14) 式より  $J$  と  $c$  を計算する。

**問題 6:** (14) 式を導出しなさい。

**問題 7:**  $y_2$  の実験曲線と、測定した  $J$  と  $c$  を用いた  $y_2$  の理論曲線を重ねて描きなさい。

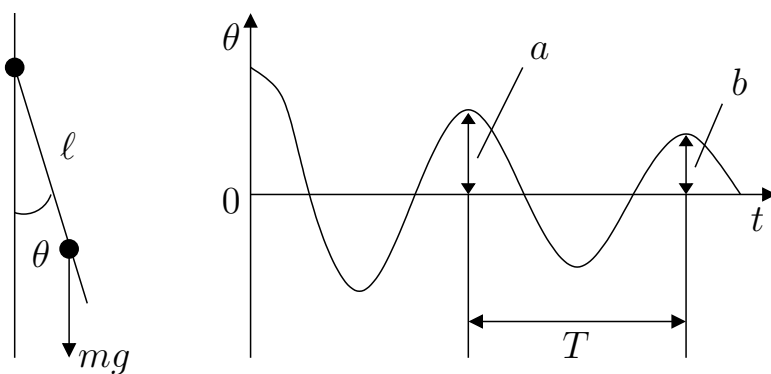


図 B.4 :  $J$  と  $c$  の測定



## 4 制御システム設計

### 4.1 特性解析

前節において数式モデルに含まれる物理パラメータの決定を終えた。したがって、(6)–(7)における行列  $A, B, C$  の値を計算できる。こうして数式モデルが確定すると、これに基づいて種々の特性解析を行うことができる。

まず、安定性については、行列  $A$  の固有値の実部を調べればよい。

つぎに、可制御性については、 $(A, B)$  に対し可制御性行列

$$N_c = \begin{bmatrix} B, & AB, & A^2B, & \dots, & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

を計算し、行列  $N_c$  が行フルランクなら可制御、そうでなければ不可制御と判定すればよい。ただし、 $n$  はシステムの次数 (倒立振子系の場合  $n = 4$ ) である。

また、可観測性については、 $(A^T, C^T)$  の可制御性を調べればよいが

$$N_o = [C^T \ A^T] = \begin{bmatrix} I_2 & 0 & A_{21}^T \\ 0 & I_2 & A_{22}^T \end{bmatrix}$$

のように、明らかに成立している。

**問題 8:** 倒立振子系の不安定モードを求め、人間の応答速度と比較しなさい。

**問題 9:** 可制御性行列のランクを以下のようにして調べなさい。

```
> rank(Nc)
```

### 4.2 制御システムの構成

図 B.5 に、倒立振子系に対する制御システムの構成を示す。制御則は

$$u = -F(x - x_{\text{ref}})$$

ただし

$$x_{\text{ref}} = \begin{bmatrix} y_c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

である。ここで、 $y_c$  は指定された倒立位置を表している。また、状態  $x$  は直接には得られないので ( $\dot{r}, \dot{\theta}$  の検出器はない)

$$\hat{x} \rightarrow x \quad (t \rightarrow \infty) \quad (15)$$

を満足させる最小次元オブザーバ

$$\dot{z} = \hat{A}z + \hat{B}y + \hat{J}u \quad (16)$$

$$\hat{x} = \hat{C}z + \hat{D}y \quad (17)$$

を用いる。ここで、オブザーバの次数は 2 である。したがって、設計すべき制御システムのパラメータは、つぎのものである。

1°  $F(1 \times 4)$

2°  $\hat{A}(2 \times 2), \hat{B}(2 \times 1), \hat{J}(2 \times 1), \hat{C}(4 \times 2), \hat{D}(4 \times 2)$

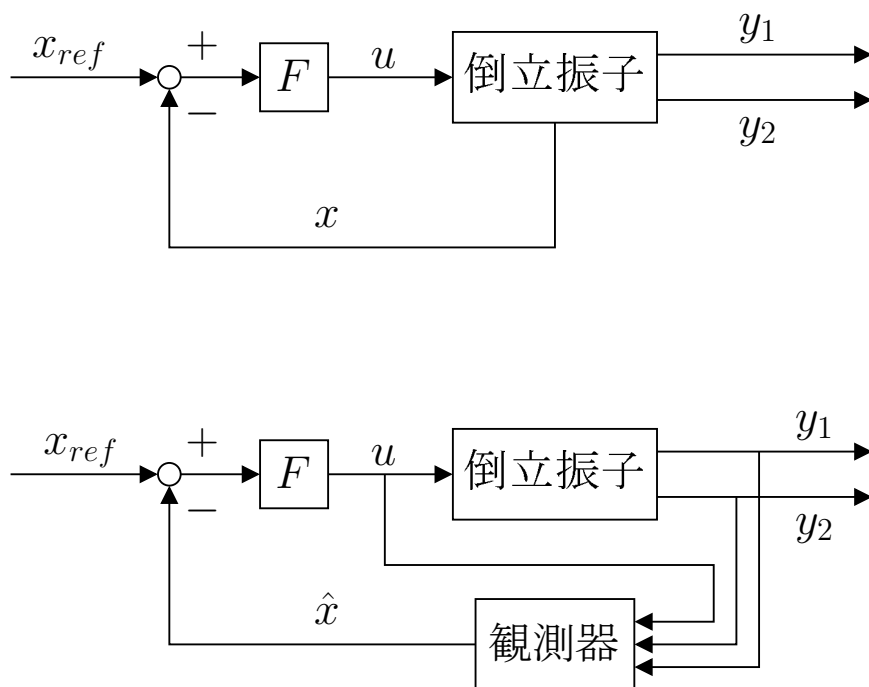


図 B.5 : 制御システムの構成

### 4.3 $F$ の設計

$F$  は、システムを安定化する状態フィードバック

$$u = -Fx \quad (18)$$

として求めればよい。

さて、(18) 式を LQ 問題の解として得るために、2 次形式評価関数

$$J = \int_0^\infty (x^T Q x + R u^2) dt \quad (19)$$

$$Q = \text{diag}(q_1^2, q_2^2, q_3^2, q_4^2), \quad R = 1 \quad (20)$$

を考える。ただし、 $\text{diag}(\dots)$  は、対角行列を表す。これは

$$J = \int_0^\infty (q_1^2 r^2 + q_2^2 \theta^2 + q_3^2 \dot{r}^2 + q_4^2 \dot{\theta}^2 + u^2) dt \quad (21)$$

のように表されることから、 $q_1, q_2, q_3, q_4$  は台車位置  $r$ 、振り子角度  $\theta$ 、台車速度  $\dot{r}$ 、振り子角速度  $\dot{\theta}$  の間のバランスをとる重み係数である。

(19)–(20) を最小にする (18) における  $F$  は、リカッチ方程式

$$A^T P + P A - P B R^{-1} B^T P + Q = 0$$

の解  $P > 0$  を求めて

$$F = R^{-1}B^T P$$

のように与えられる。

**問題 11:** (18) 式から  $u(t)$  の表現式を導出しなさい。

**問題 12:** (19)–(20) 式が (21) 式のように表されることを示しなさい。

**問題 13:** 重み行列を変数  $Q$  に設定し、状態フィードバックゲイン  $F$  を求めなさい。

#### 4.4 $\hat{A}$ , $\hat{B}$ , $\hat{J}$ , $\hat{C}$ , $\hat{D}$ の設計

オブザーバ (16)–(17) が (15) 式を満足するための十分条件は、ある行列  $U(1 \times 4)$  が存在して

$$\begin{aligned} UA &= \hat{A}U + \hat{B}C \\ UB &= \hat{J} \\ I &= \hat{C}U + \hat{D}C \end{aligned}$$

かつ  $\hat{A}$  が安定行列であることである。これらの条件を満足する、最も代表的なオブザーバの設計法は、Gopinath によって提案されたものである。

**問題 14:** オブザーバの極  $\lambda_1$  と  $\lambda_2$  を変数 `pole` に設定し、 $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$ ,  $\hat{J}$ ,  $\hat{C}$ ,  $\hat{D}$  を求めなさい。

#### 4.5 離散化

コントローラは連続時間で記述された (18) 式と (16)–(17) 式で与えられるが、計算機制御のためにはこれらを離散時間で記述しなければならない。いま、サンプリング間隔を  $\Delta$  とすると、その結果がつぎのように与えられる。

$$\begin{aligned} u[k] &= -F\hat{x}[k] \\ z[k+1] &= \hat{A}_d z[k] + \hat{B}_d y[k] + \hat{J}_d u[k] \\ \hat{x}[k] &= \hat{C}_d z[k] + \hat{D}_d y[k] \end{aligned}$$

ただし、 $k = 0, 1, \dots$  であり

$$\begin{bmatrix} \hat{A}_d & [\hat{B}_d \ \hat{J}_d] \\ 0 & I_3 \end{bmatrix} = \exp\left(\Delta \begin{bmatrix} \hat{A} & [\hat{B} \ \hat{J}] \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)$$

**問題 15:** 適当なサンプリング周期を `delta` に定義し、 $\hat{A}_d$ ,  $\hat{B}_d$ ,  $\hat{J}_d$  を求めなさい。

#### 4.6 シミュレーションによる設計パラメータの決定

制御システムの応答シミュレーションにより、倒立状態にある振子の位置を 5 秒間で右に 0.1[m] だけ移動させるとき、角度の振れ幅が 1[deg] 内に留まるよう、重み係数  $q_1, q_2, q_3, q_4$  を調整して、コントローラを設計しなさい。たとえば

$$q_1 = 1, \quad q_2 = 1, \quad q_3 = 1, \quad q_4 = 1 \quad \lambda_1 = -10, \quad \lambda_2 = -10$$

として、 $q_3$  だけを 1 から 100 の範囲で動かしてみなさい。なお、離散化は 8[msec] すなわち 0.008[sec] で行いなさい。

まず、次の手順によりコントローラを設計する。

1. シミュレーションのためのブロック線図が含まれるファイルを読み込む。
2. メインメニューから「(3) 制御系の設計」を選択する。
3. 重み行列  $Q$  と  $R$  の値を設定する。
4. オブザーバの極  $\lambda_1$  と  $\lambda_2$  の値を入力する。  
(LQ 最適レギュレータを変更した場合、オブザーバの設計を行う必要がある)
5. オブザーバを離散化するサンプリング周期 (= 0.008) を入力する。

次に、次の手順によりシミュレーションを行い、台車の位置、振子の角度、入力電圧の時系列データのグラフを描画する。

**問題 16:** コントローラの設計とシミュレーションを繰り返し実行し、目的を達成できるコントローラを求めよ。

## 5 制御システムの実現

### 5.1 制御実験

つぎの手順により、制御実験を行いなさい。

1. 台車を中央に移動させる。
2. アンプ全面左上の SW1 が OFF であることを確認して、右下の電源を ON にする。
3. 振子を時計方向に手で回転させ、倒立位置に移動する。
4. 画面に表示される入力の値の絶対値が小さいことを確認し、SW1 を ON にする。アクチュエータへの出力が始まり、振子の制御が行われる。

**問題 17:** 台車の目標値を一定時間毎にステップ状に変化させ、目標値への追従性とコントローラの設計パラメータ (重み行列、オブザーバの極) との関係を調べなさい。時間に余裕があれば、サンプリング周期を変更して、同様の実験を行いなさい。

### 参考文献

- [1] 梶原, 小菅, 古賀: 傾斜されたレール上の二重倒立振子の位置制御, 計測自動制御学会論文集, Vol.15, No.7 (1979)。
- [2] 梶原: 制御系 CAD, コロナ社 (1988)。
- [3] 吉川, 井村: 現代制御論, 昭晃堂 (1994)。
- [4] 古賀: Linux・Windows でできる MaTX による数値計算, 東京電機大学出版局 (2000)。

- [5 ] 古田, 佐野 : 基礎システム理論, コロナ社 (1978)。
- [6 ] 岸田, 古賀, Linux カーネル 2.6 を用いたリアルタイム制御パッケージの開発, 第 49 回システム制御情報学会研究発表講演会, pp.61–62 (2005)
- [7 ] 古賀, 岸田 : Linux のリアルタイム制御パッケージを用いた実験環境構築システム, FIT2006, pp.349–350 (2006)

