

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«НОВОСИБИРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ» (НОВОСИБИРСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ, НГУ)

Механико-математический факультет

Кафедра вычислительных систем

Направление подготовки «Прикладная математика и информатика», бакалавриат

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА БАКАЛАВРА

Радустова Александра Вячеславовича

Численное моделирование ионно-звуковой волны, возникающей
при отражении потока плазмы от проводящей стенки

«К защите допущена»

И. о. заведующего кафедрой

д.ф.-м.н., профессор РАИ

Марченко М.А.

(Фамилия, И.О.)

« 30 »

..... 2025г.



Научный руководитель

Ст. преп. кафедры ВС

к.ф.-м.н.

Лисейкина Т.В.

(Фамилия, И.О.)

« 30 »

..... 2025г.



Дата защиты: « 16 » июня 2025г.

Новосибирск, 2025

Реферат

Название работы: Численное моделирование ионно-звуковой волны, возникающей при отражении потока плазмы от проводящей стенки.

При отражении неизотермического потока плазмы, в котором температура ионов много меньше температуры электронов, от проводящей стенки образуется взаимопроникающее течение противоположно направленных потоков. Их взаимодействие приводит к генерации ионно-звуковой волны [1]. Поведение такой волны зависит от скорости набегающего потока. В работе численно исследована структура одномерной ионно-звуковой волны, в зависимости от скорости набегающего потока. Проведено сравнение результатов, полученных на основе двух физико-математических моделей. В первой модели поведение обеих компонент плазмы описывается кинетическим уравнением Власова, во второй предполагается, что электроны удовлетворяют распределению Больцмана. Для решения кинетического уравнения Власова используется метод частиц в ячейках [2], при этом движение частиц реализуется схемой второго порядка точности. Для решения уравнения Пуассона с Больцмановскими электронами применяется метод квазилинеаризации [3]. Проведено распараллеливание алгоритмов, показана эффективность работы параллельной программы на кластере ЦКП ССКЦ ИВМиМГ СО РАН на доступном числе узлов до 48.

Количество страниц: 29

Количество использованных источников: 6

Количество иллюстраций: 11

Количество таблиц: 3

Ключевые слова: ионно-звуковая волна, кинетическое уравнение Власова, Больцмановское распределение электронов, квазилинеаризация, переднее возмущение электростатического потенциала, метод частиц в ячейках, неизотермическая плазма, численное моделирование, система уравнений Власова-Максвелла.

Содержание

ВВЕДЕНИЕ	4
1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ	6
2 КИНЕТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ С РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ БОЛЬЦМАНА ДЛЯ ЭЛЕКТРОНОВ	6
2.1 Описание модели	6
2.2 Результаты численного моделирования	8
2.3 Гидродинамические уравнения	11
2.4 Формула скорости ионно-звукового солитона	14
3 ПОЛНОСТЬЮ КИНЕТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ	17
3.1 Описание модели	17
3.2 Результаты численного моделирования	19
4 МЕТОДЫ И АЛГОРИТМЫ	22
4.1 Решение уравнения Власова	22
4.2 Восстановление плотности заряда	22
4.3 Решение уравнений движения частиц	23
4.4 Метод квазилинеаризации для решения нелинейного уравнения Пуассона	24
4.5 Вычисление электрического поля в полностью кинетической модели	25
5 РАСПАРАЛЛЕЛИВАНИЕ	26
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	28
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	29

ВВЕДЕНИЕ

В работе численно решается задача формирования и распространения ионно-звуковой волны в неизотермической плазме. Реализованы две физико-математические модели. Первая модель основана на кинетическом описании ионов в предположении Больцмановского распределения для электронов. Во второй модели для электронов используется кинетическое описание, причём соотношение масс ионов и электронов соответствует реальному.

Изученные в работе волны на больших временах представляют собой ионно-звуковые солитоны с волновым задним шлейфом. Они являются основой ударных волн, формирующихся при столкновении неизотермических потоков плазмы, в которых температура ионной компоненты намного превышает температуру электронов [6].

В рассмотренной задаче ионно-звуковая волна формируется в результате взаимодействия взаимопроникающих потоков плазмы, которые в свою очередь образуются в результате отражения неизотермического потока плазмы от проводящей стенки. Целью работы является численное исследование поведения такой волны от скорости набегающего потока плазмы.

В работе на основе системы уравнений Власова - Максвелла численно реализуются две модели: модель с Больцмановскими электронами и полностью кинетическая. В Больцмановской модели электроны имеют распределение Больцмана, уравнение Власова для ионов решается методом частиц в ячейках, а электростатический потенциал находится из решения уравнения Пуассона методом квазилинеаризации. В полностью кинетической модели уравнение Власова для обеих компонент плазмы решается методом частиц в ячейках.

Обе модели реализованы в одномерной постановке в отсутствие магнитного поля. Это позволило провести расчёты на достаточно мелкой сетке и проследить эволюцию волны на больших временах вплоть до образования изолированного возмущения (ионно-звукового солитона).

В модели с Больцмановскими электронами численно получена зависимость скорости распространения солитона от его амплитуды. Сравнение с выведенной в гидродинамическом приближении формулой такой зави-

симости [1] показало, что в определенном диапазоне параметров имеется хорошее соответствие результатов расчётов и теоретической оценки.

Работа состоит из Введения, пяти глав и Заключения. В Главе 1 приводится постановка задачи. Глава 2 посвящена описанию кинетической модели с распределением Больцмана для электронов. Воспроизводится вывод системы гидродинамических уравнений [6] для плотности и средней скорости ионов. На основе этих уравнений получена формула зависимости скорости ионно-звукового солитона от его амплитуды [1]. Приведено сравнение результатов расчётов с теоретической оценкой. В Главе 3 описывается физико-математическая модель, в которой для обеих компонент плазмы используется кинетическое приближение. Приводятся результаты численного моделирования. Глава 4 посвящена краткому описанию методов и алгоритмов, использованных для реализации моделей, описанных в Главах 2 и 3. А именно описываются решение уравнение Власова методом частиц в ячейках [2], восстановление плотности заряда, решение уравнений движения, метод квазилинеаризации для решения нелинейного уравнения Пуассона и вычисление электрического поля в полностью кинетической модели. В Главе 5 описаны алгоритмы распараллеливания моделей. Полученная зависимость скорости расчётов от числа использованных процессорных элементов позволяет сделать вывод об эффективности распараллеливания. Выводы и основные результаты работы приведены в Заключении.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим следующую задачу: имеется одномерный поток бесстолкновительной неизотермической плазмы, обладающий начальной скоростью v_{in} , в котором температура ионов много меньше температуры электронов. При его отражении от проводящей стенки (на Рис. 1 справа) образуется взаимопроникающее течение противоположно направленных потоков. Их взаимодействие приводит к генерации ионно-звуковой волны, распространяющейся в направлении от стенки. Задача состоит в исследовании поведения такой волны от скорости набегающего потока.

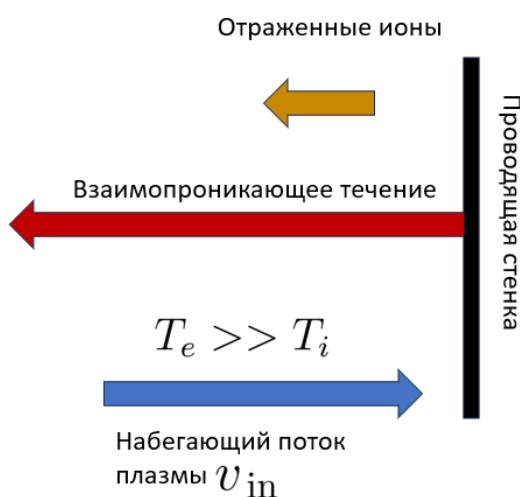


Рис. 1 – Схематическая постановка задачи

2. КИНЕТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ С РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ БОЛЬЦМАНА ДЛЯ ЭЛЕКТРОНОВ

2.1. Описание модели

Рассмотрим физико-математическую модель, в которой для описания ионов используется кинетическое уравнение Власова, в то время как электронная плотность имеет распределение Больцмана. В одномерном случае в декартовой системе координат с осью x , направленной вдоль направления скорости потока плазмы, система уравнений Власова-Пуассона выглядит

следующим образом

$$\begin{cases} \frac{df_i}{dt} = \frac{\partial f_i}{\partial t} + v \frac{\partial f_i}{\partial x} + \frac{q}{m} E \frac{\partial f_i}{\partial v} = 0, \\ n_e = n_0 \exp\left(\frac{e\varphi}{KT_e}\right), \\ \frac{\partial E}{\partial x} = \left(4\pi(q \int f_i dv - en_e)\right), \end{cases}$$

где $f_i(x, v, t)$ - функция распределения ионов, t - время, n_e - плотность электронов, n_0 - начальная концентрация потока плазмы, e - заряд электрона, φ - электростатический потенциал, K - постоянная Больцмана, T_e - температура электронов, E - напряженность электрического поля, x - координаты ионов, v - скорости ионов, q - заряд ионов, m - масса ионов.

Выберем в качестве масштабов следующие величины: $\lambda_D = \sqrt{\frac{T_e}{4\pi n_0 e^2}}$ - дебаевская длина, $v_0 = \sqrt{\frac{KT_e}{m}}$ - скорость ионного звука, $t_0 = \frac{\lambda_D}{v_0}$ - характерное время, $\varphi_0 = \frac{KT_e}{e}$ и выпишем систему уравнений в безразмерном виде в переменных $x' = \frac{x}{\lambda_D}$, $v' = \frac{v}{v_0}$, $t' = \frac{t}{t_0}$, $\varphi' = \frac{\varphi}{\varphi_0}$, $n'_i = \frac{n_i}{n_0}$.

Получим

$$\frac{\partial f_i}{\partial t'} + v' \frac{\partial f_i}{\partial x'} - \frac{\partial \varphi'}{\partial x'} \frac{\partial f_i}{\partial v'} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi'}{\partial x'^2} = \exp(\varphi') - n'_i, \quad (2)$$

где для рассмотренного случая $q = e$ (водородная плазма), $n'_i = \int f_i dv'$.

Уравнения (1), (2) будем решать в области $x' \in [0, x_{max}]$. Граничные условия

$$\varphi'|_0 = 0, \quad \left. \frac{\partial \varphi'}{\partial x'} \right|_{x_{max}} = 0, \quad f'_i|_0 = const. \quad (3)$$

Уравнение (1) является уравнением гиперболического типа и имеет две характеристики.

$$\frac{dx'}{dt'} = v', \quad \frac{dv'}{dt'} = -\frac{\partial \varphi'}{\partial x'}. \quad (4)$$

Для решения уравнения (1) используется метод частиц в ячейках [2], а для решения уравнения (2) с граничными условиями (3) - метод квазилинеаризации [3]. Краткое описание численных алгоритмов приведено в Главе 4.

На Рис. 2 представлена блок-схема вычислений.

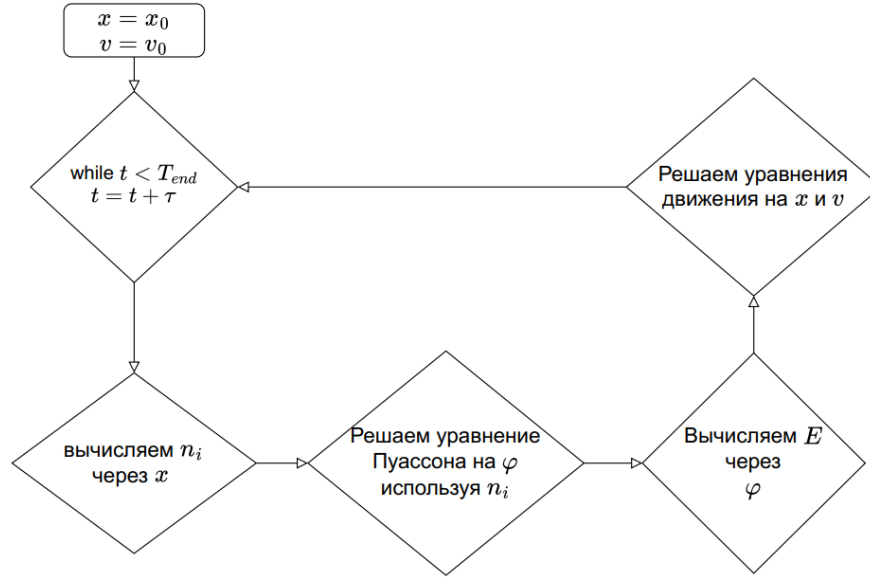


Рис. 2 – Блок-схема вычислений: в начальный момент времени в расчётной области размещены частицы с координатами и скоростями $x|_{t=0}$, $v|_{t=0}$. По координатам частиц на каждом временном шаге вычисляется плотность частиц, затем решается уравнение Пуассона (2). По найденному распределению потенциала вычисляется электрическое поле в точках положения частиц. Координаты и скорости частиц на новом временном шаге находятся из уравнения (4).

2.2. Результаты численного моделирования

На рисунке 3 представлены графики распределения потенциала при разной скорости набегающего потока u_0 от $0.1v_0$ до $0.8v_0$ в последовательные моменты времени. При отражении потока плазмы от стенки формируется распространяющееся налево возмущение с осцилляторным шлейфом. Амплитуда переднего возмущения незначительно увеличивается со временем. Скорость переднего возмущения на больших временах почти постоянна. С увеличением скорости набегающего потока меняется профиль колебания потенциала от гладкого $u_0 = 0.1v_0$ - $u_0 = 0.3v_0$ к острому $u_0 > 0.3v_0$. На больших временах прослеживается тенденция отрыва переднего возмущения от шлейфа и формирование солитона.

На Рис. 4 представлены фазовые плоскости ионов для скоростей потока $u_0 = 0.1v_0$ и $u_0 = 0.8v_0$.

В то время как для $u_0 = 0.1v_0$ фазовая плоскость ионов имеет регулярную структуру, повторяющую распределение потенциала, Рис. 3 для

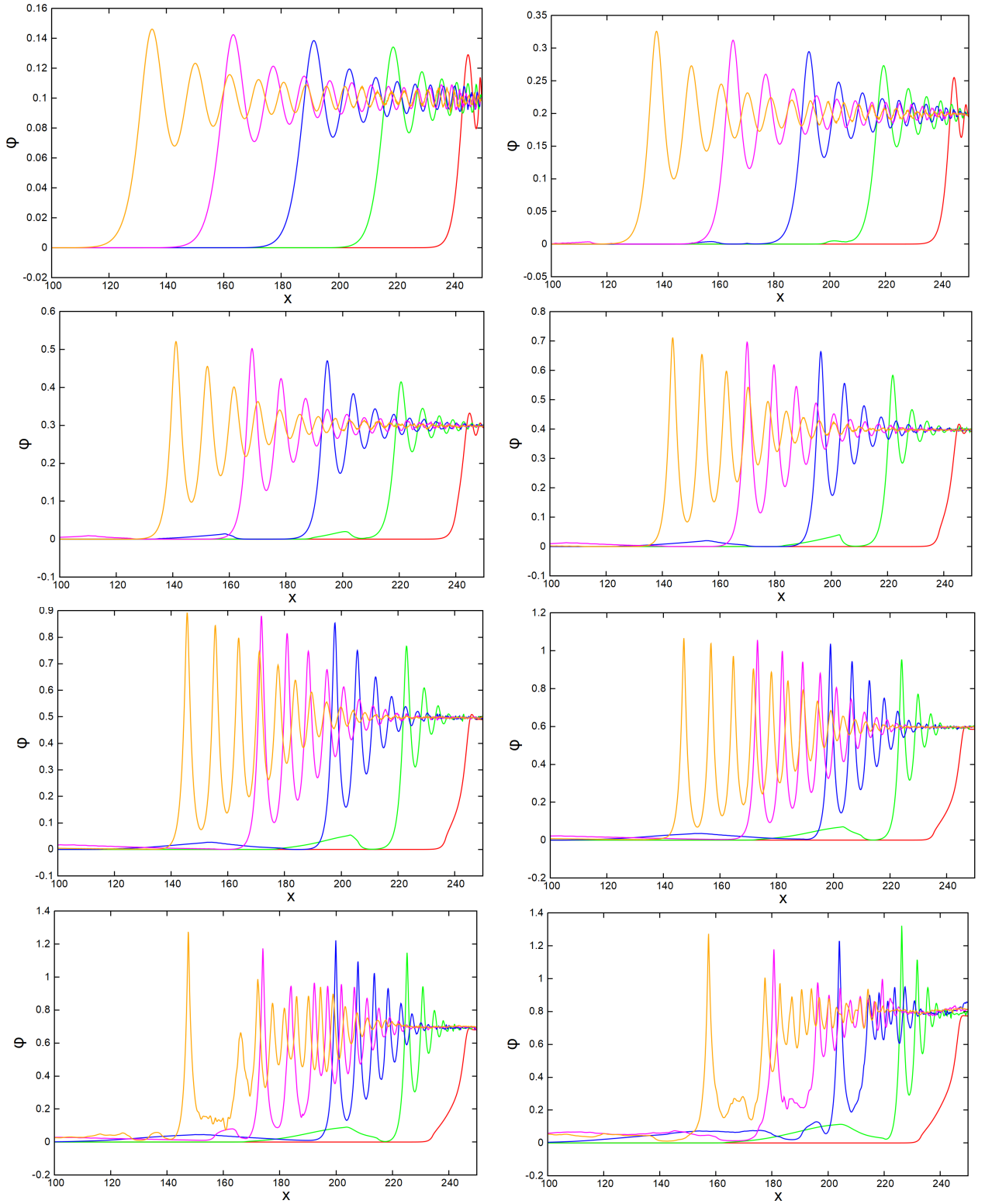


Рис. 3 – Распределение потенциала в последовательные моменты времени $t = 30, 60, 90, 120, 150t_0$ для $u_0 = 0.1v_0 - u_0 = 0.8v_0$. Сетка имеет количество узлов $i_{max} = 2501$. Длина области $x_{max} = 250$, шаг по пространству $h = 0.1$, шаг по времени $\tau = 0.025$, количество частиц в ячейке $N_p = 50$, количество частиц в начале расчёта $N = 125000$.

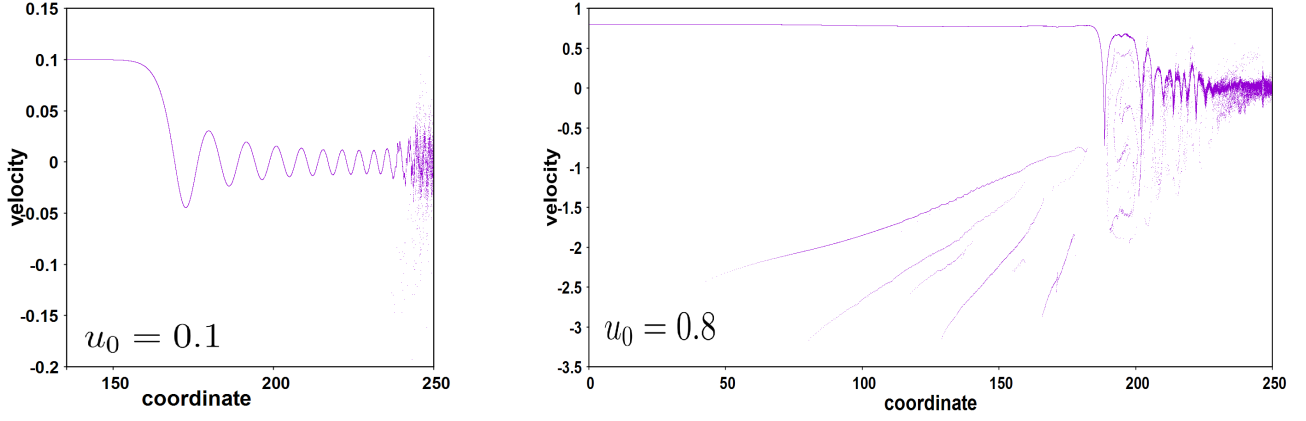


Рис. 4 – Распределение ионов на фазовой плоскости для $u_0 = 0.1v_0$ и $u_0 = 0.8v_0$ при $t = 90t_0$. Сетка имеет количество узлов $i_{\max} = 2501$, длина области $x_{\max} = 250$, шаг по пространству $h = 0.1$, шаг по времени $\tau = 0.025$, количество частиц в ячейке $N_p = 50$, количество частиц в начале расчёта $N = 125000$.

$u_0 = 0.1v_0$, при большой скорости потока фазовая плоскость имеет сложную структуру. Видны частицы со скоростями, значительно превышающими как скорость звука v_0 , так и скорость переднего возмущения. Кроме того имеются частицы "запертые" в области между соседними пиками потенциала.

Проведенные расчёты позволяют найти зависимость скорости переднего возмущения потенциала от его амплитуды. Результаты представлены в таблице 1.

Таблица 1: Зависимость скорости переднего возмущения v_{comp} от амплитуды потенциала φ_{max} и скорости потока u_0 .

	$u_0 = 0.1$	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
v_{comp}	1.059	1.11	1.2	1.28	1.38	1.47	1.582	1.58
φ_{max}	0.147	0.33	0.52	0.71	0.895	1.06	1.26	1.27

Отметим, что скорость переднего возмущения относительно неподвижной плазмы вычисляется по формуле $v_{comp} = \frac{\Delta x}{\Delta t} + u_0$, где Δx - расстояние, пройденное возмущением за время Δt , так как в задаче возмущение потенциала распространяется в движущемся со скоростью u_0 потоке плазмы.

Для сравнения численных результатов с теорией воспроизведем вывод зависимости скорости ионно-звукового солитона от его амплитуды в гидродинамическом приближении.

2.3. Гидродинамические уравнения

Из уравнения Власова

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{q}{m} E \frac{\partial f}{\partial v} = 0, \quad (5)$$

выведем уравнение для средней скорости

$$u = \frac{\int v f dv}{\int f dv} \quad (6)$$

и концентрации

$$n = \frac{N}{V} \int f dv \quad (7)$$

ионов плазмы. Здесь N - полное число ионов плазмы, V - занятый им объём. Для этого проинтегрируем уравнение Власова по пространству скоростей

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{q}{m} E \frac{\partial f}{\partial v} \right) dv = 0. \quad (8)$$

Разобьём интеграл (8) по аддитивности, получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial t} dv + \int_{-\infty}^{\infty} v \frac{\partial f}{\partial x} dv + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q}{m} E \frac{\partial f}{\partial v} dv = 0.$$

Проанализируем каждое из трёх слагаемых

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial t} dv = \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} f dv.$$

Теперь воспользуемся определением концентрации (7)

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} f dv = \frac{\partial}{\partial t} \frac{nV}{N} = \frac{V}{N} \frac{\partial}{\partial t} n.$$

Преобразуем второе слагаемое, используя определение средней скорости (6)

$$\int_{-\infty}^{\infty} v \frac{\partial f}{\partial x} dv = \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} v f dv = \frac{\partial}{\partial x} u \int_{-\infty}^{\infty} f dv = \frac{\partial}{\partial x} \frac{unV}{N}.$$

Последнее слагаемое равно нулю, так как

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{q}{m} E \frac{\partial f}{\partial v} dv = \frac{q}{m} E [f(\infty) - f(-\infty)] = 0.$$

Теперь соберем все слагаемые вместе

$$\frac{V}{N} \frac{\partial}{\partial t} n + \frac{\partial}{\partial x} \frac{unV}{N} = 0. \quad (9)$$

Разделив (9) на $\frac{V}{N}$, получим

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial(un)}{\partial x} = 0. \quad (10)$$

Теперь умножим уравнение Власова на v и проинтегрируем по пространству скоростей:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{q}{m} E \frac{\partial f}{\partial v} \right) v dv = 0. \quad (11)$$

Распишем его по аддитивности

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial t} v dv + \int_{-\infty}^{\infty} v^2 \frac{\partial f}{\partial x} dv + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q}{m} E \frac{\partial f}{\partial v} v dv = 0.$$

Рассмотрим отдельно каждое слагаемое:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial t} v dv = \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} f v dv = \frac{\partial}{\partial t} u \int_{-\infty}^{\infty} f dv = \frac{V}{N} \frac{\partial}{\partial t} (un),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{q}{m} E \frac{\partial f}{\partial v} v dv = \frac{q}{m} E (v f|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f dv) = -\frac{q}{m} E n \frac{V}{N}.$$

Для преобразования второго слагаемого в (11) нам потребуется использовать определение давления

$$P = \frac{N}{V} m \int (v - u)^2 f dv = \frac{N}{V} m \int (v^2 - 2uv + u^2) f dv.$$

Пользуясь определениями средней скорости (6) и концентрации (7) распишем подынтегральную сумму

$$P = \frac{N}{V} m \int v^2 f dv - \frac{N}{V} m \int 2uv f dv + \frac{N}{V} m \int u^2 f dv. \quad (12)$$

Применим оператор дифференцирования $\frac{\partial}{\partial x}$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{N}{V} m \int v^2 f dv - \frac{N}{V} m \int 2uv f dv + \frac{N}{V} m \int u^2 f dv \right).$$

Преобразуем

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{N}{V} m \int v^2 f dv - 2mu^2n + mu^2n \right).$$

Из (12) выражаем слагаемое $\frac{\partial}{\partial x} \int v^2 f dv$

$$\frac{\partial}{\partial x} \int v^2 f dv = \frac{V}{Nm} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{V}{N} \frac{\partial}{\partial x} u^2 n.$$

В итоге получим

$$\frac{V}{N} \frac{\partial}{\partial t} (un) - \frac{q}{m} En \frac{V}{N} + \frac{V}{Nm} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{V}{N} \frac{\partial}{\partial x} u^2 n = 0.$$

Разделим последнее уравнение на $\frac{V}{N}$ и домножим на m . Получим

$$m \frac{\partial}{\partial t} (un) - qEn + \frac{\partial P}{\partial x} + m \frac{\partial}{\partial x} u^2 n = 0.$$

Распишем производную по времени

$$mu \frac{\partial n}{\partial t} + mn \frac{\partial u}{\partial t} - qEn + \frac{\partial P}{\partial x} + m \frac{\partial}{\partial x} u^2 n = 0. \quad (13)$$

Из (10) выразим $\frac{\partial n}{\partial t}$ и подставим в (13). Получим

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{\partial(un)}{\partial x},$$

$$-mu \frac{\partial}{\partial x} (nu) + mn \frac{\partial u}{\partial t} - qEn + \frac{\partial P}{\partial x} + m \frac{\partial}{\partial x} u^2 n = 0.$$

В первом слагаемом распишем частную производную по координате

$$-mun \frac{\partial}{\partial x} u - mu^2 n \frac{\partial}{\partial x} n + mn \frac{\partial u}{\partial t} - qEn + \frac{\partial P}{\partial x} + m \frac{\partial}{\partial x} u^2 n = 0.$$

Раскроем производную по координате в последнем слагаемом суммы

$$-m u n \frac{\partial}{\partial x} u - m u^2 \frac{\partial}{\partial x} n + m n \frac{\partial u}{\partial t} - q E n + \frac{\partial P}{\partial x} + 2 m u n \frac{\partial}{\partial x} u + m u^2 \frac{\partial}{\partial x} n = 0.$$

Приводим подобные слагаемые и получаем

$$m n \frac{\partial u}{\partial t} + m n u \frac{\partial u}{\partial x} = q n E - \frac{\partial P}{\partial x}. \quad (14)$$

2.4. Формула скорости ионно-звукового солитона

Добавив к системе гидродинамических уравнений (10) и (14) уравнение Пуассона, и предположив, что $T_i \ll T_e$, получим следующую систему

$$\begin{cases} \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial(u n)}{\partial x} = 0, \\ m n \frac{\partial u}{\partial t} + m n u \frac{\partial u}{\partial x} = -q n \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \\ \Delta \varphi = -4\pi \left(q(n - n_0 \exp(\frac{e\varphi}{KT_e})) \right). \end{cases} \quad (15)$$

Будем искать зависимость скорости изолированного возмущения потенциала от его амплитуды. Перейдем в систему координат, движущуюся со скоростью возмущения потенциала v . Для этого сделаем замену переменных $z = x - vt$, $t = \tau$ и перепишем систему уравнений (15) в новых переменных

$$\begin{cases} -v \frac{\partial n}{\partial z} + \frac{\partial n}{\partial \tau} + \frac{\partial(u n)}{\partial z} = 0, \\ -v m n \frac{\partial u}{\partial z} + m n \frac{\partial u}{\partial \tau} + m n u \frac{\partial u}{\partial z} = -q n \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \\ \Delta \varphi = -4\pi \left(q(n - n_0 \exp(\frac{e\varphi}{KT_e})) \right). \end{cases}$$

Будем искать стационарное решение, то есть $\frac{\partial}{\partial \tau} = 0$. Заметим, что из расчётов при малых скоростях потока форма переднего возмущения имеет вид, изображенный на Рис. 5.

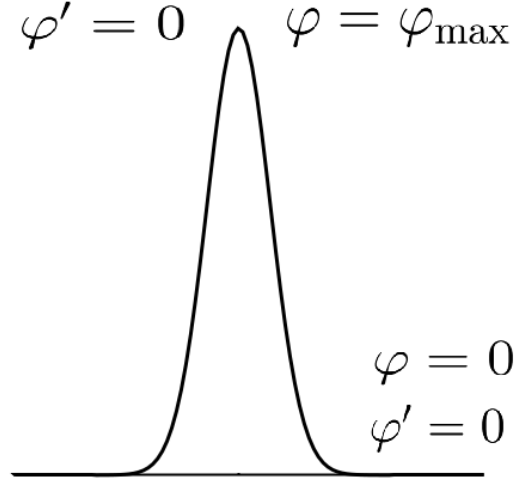


Рис. 5 – схематическое изображение изолированного переднего возмущения потенциала

$$\begin{cases} -v \frac{\partial n}{\partial z} + \frac{\partial(un)}{\partial z} = 0, \\ -vmn \frac{\partial u}{\partial z} + mnu \frac{\partial u}{\partial z} = -qn \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -4\pi \left(q(n - n_0 \exp(\frac{e\varphi}{KT_e})) \right). \end{cases} \quad (16)$$

Так как $v = const$, то проинтегрировав первое уравнение системы (16), получим

$$\begin{cases} -nv + un = c_1, \quad c_1 = const, \\ mu(\frac{u}{2} - v) = -q\varphi + c_2, \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -4\pi \left(q(n - n_0 \exp(\frac{e\varphi}{KT_e})) \right). \end{cases} \quad (17)$$

Выразим u из первого уравнения системы (17). Получим $u = \frac{c_1}{n} + v$. Подставим его во второе уравнение

$$m(\frac{c_1}{n} + v)(\frac{\frac{c_1}{n} + v}{2} - v) = -q\varphi + c_2, \quad c_2 = const.$$

Приведем подобные

$$\begin{aligned} \frac{m}{2}(\frac{c_1^2}{n^2} - v^2) &= -q\varphi + c_2, \\ \frac{c_1^2}{n^2} &= v^2 - \frac{2}{m}q\varphi + \frac{2c_2}{m}, \end{aligned}$$

$$n = c_1 \sqrt{\frac{1}{v^2 - \frac{2}{m}q\varphi + \frac{2}{m}c_2}}.$$

Подставим полученное выражение для концентрации в уравнение Пуассона и определим константы c_1 и c_2

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -4\pi q \left(c_1 \sqrt{\frac{1}{v^2 - \frac{2}{m}q\varphi + \frac{2}{m}c_2}} - n_0 \exp\left(\frac{e\varphi}{KT_e}\right) \right).$$

При $\varphi = 0$ $n = n_0$ для любых v . Поэтому $c_2 = 0$, $c_1 = n_0 v$. Тогда

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -4\pi q n_0 \left(v \sqrt{\frac{1}{v^2 - \frac{2}{m}q\varphi}} - \exp\left(\frac{e\varphi}{KT_e}\right) \right).$$

Домножим на первую производную $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -4\pi q n_0 \frac{\partial \varphi}{\partial z} \left(v \sqrt{\frac{1}{v^2 - \frac{2}{m}q\varphi}} - \exp\left(\frac{e\varphi}{KT_e}\right) \right)$$

и преобразуем

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} ((\varphi')^2) = -4\pi q n_0 \frac{\partial \varphi}{\partial z} \left(v \sqrt{\frac{1}{v^2 - \frac{2}{m}q\varphi}} - \exp\left(\frac{e\varphi}{KT_e}\right) \right).$$

Проинтегрируем один раз

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 = 8\pi n_0 v m \sqrt{\frac{mv^2 - 2q\varphi}{m}} + 8\pi n_0 K T_e \exp\left(\frac{q\varphi}{KT_e}\right) + C, \quad C = const.$$

Так как рассматривается изолированное возмущение (солитон) (Рис. 5), то при $\varphi = 0$, $\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$, значит

$$mv^2 + K T_e + C = 0.$$

Отсюда $C = (-K T_e - v^2 m) 8\pi n_0$.

Если профиль потенциала гладкий, то при $\varphi = \varphi_{max}$ и $\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$. Значит,

$$v^2 = \frac{KT_e}{2m} \cdot \frac{\left(\exp\left(\frac{q\varphi_{max}}{KT_e}\right) - 1\right)^2}{\exp\left(\frac{q\varphi_{max}}{KT_e}\right) - 1 - \frac{q\varphi_{max}}{KT_e}}. \quad (18)$$

Заметим, что формула верна при $\frac{mv^2}{2} > q\varphi$. В таблице 2 приведено сравнение численной зависимости скорости переднего возмущения v_{comp} от амплитуды потенциала φ_{max} (см. Таблицу 1) с теоретической оценкой v , сделанной по формуле (18).

Таблица 2: Скорость переднего возмущения потенциала и его амплитуда. Сравнение результатов расчётов с теоретической оценкой (18)

u_0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
v_{comp}	1.059	1.11	1.2	1.28	1.38	1.47	1.582	1.58
φ_{max}	0.147	0.33	0.52	0.71	0.895	1.06	1.26	1.27
v	1.051	1.20	1.198	1.285	1.377	1.467	1.587	1.587

Скорость переднего возмущения численно вычисляется как $v_{comp} = \frac{\Delta x}{\Delta t} + u$. Полученный численный результат находится в хорошем соответствии с теоретической оценкой.

3. ПОЛНОСТЬЮ КИНЕТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

3.1. Описание модели

Рассмотрим физико-математическую модель, в которой для описания ионов и электронов используется кинетическое уравнение Власова. Будем рассматривать одномерный случай. Возьмём декартову систему координат с осью x , направленной вдоль направления скорости потока плазмы. Система уравнений Власова-Гаусса выглядит следующим образом

$$\begin{cases} \frac{df_i}{dt} = \frac{\partial f_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial f_i}{\partial x_i} + \frac{q}{m_i} E \frac{\partial f_i}{\partial v_i} = 0, \\ \frac{df_e}{dt} = \frac{\partial f_e}{\partial t} + v_e \frac{\partial f_e}{\partial x_e} - \frac{e}{m_e} E \frac{\partial f_e}{\partial v_e} = 0, \\ \frac{\partial E}{\partial x_i} = 4\pi(q \int f_i dv_i - e \int f_e dv_e), \end{cases} \quad (19)$$

где $f_i(x_i, v_i, t)$ - функция распределения ионов, $f_e(x_e, v_e, t)$ - функция распределения электронов, t - время, x_i - координаты ионов, x_e - координаты электронов, q - заряд ионов, e - заряд электронов, m_i - масса ионов, m_e - масса электронов, v_i - скорость ионов, v_e - скорость электронов, E - напряженность электрического поля.

Выберем в качестве масштаба следующие величины: $m_e, m_i = 1836 \cdot m_e$, $\lambda_D = \sqrt{\frac{T_e}{4\pi n_0 e^2}}$ - дебаевская длина, $t_0 = \frac{\lambda_D}{v_0}$ - характерное время, n_0 - начальная концентрация потока плазмы, $\varphi_0 = \frac{KT_e}{e}$, E_0 - начальное распределение электрического поля, $v_0 = \sqrt{\frac{KT_e}{m_e}}$ - тепловая скорость электронов. Выпишем систему уравнений (19) в безразмерных переменных $x'_i = \frac{x_i}{\lambda_D}$, $x'_e = \frac{x_e}{\lambda_D}$, $t' = \frac{t}{t_0}$, $n'_i = \frac{n_i}{n_0}$, $n'_e = \frac{n_e}{n_0}$, $v'_i = \frac{v_i}{v_0}$, $v'_e = \frac{v_e}{v_0}$, $\varphi' = \frac{\varphi}{\varphi_0}$, $E' = \frac{E}{E_0}$. Получим

$$\begin{cases} \frac{\partial f_i}{\partial t'} + v'_i \frac{\partial f_i}{\partial x'_i} + E' \frac{\partial f_i}{\partial v'_i} = 0, \\ \frac{\partial f_e}{\partial t'} + v'_e \frac{\partial f'_e}{\partial x'_e} + E' \frac{\partial f'_e}{\partial v'_e} = 0, \\ \frac{\partial E'}{\partial x'_i} = n'_i - n'_e, \end{cases} \quad (20)$$

где для рассмотренного случая $q = e$ (водородная плазма), $n'_e = \int f_e dv'_e$, $n'_i = \int f_i dv'_i$. Уравнения (20) рассматриваем в области $x'_i, x'_e \in [0, x_{\max}]$. Поставим граничное условие на проводящей стенке

$$E'|_{x_{\max}} = 0. \quad (21)$$

Уравнения Власова системы (20) будем решать, используя метод частиц в ячейках [2]. Решение уравнения Гаусса системы (20) будем находить напрямую, используя распределения плотности ионов и электронов (см. Глава 4 Раздел 4.5).

На Рис. 6 представлена блок-схема вычислений.

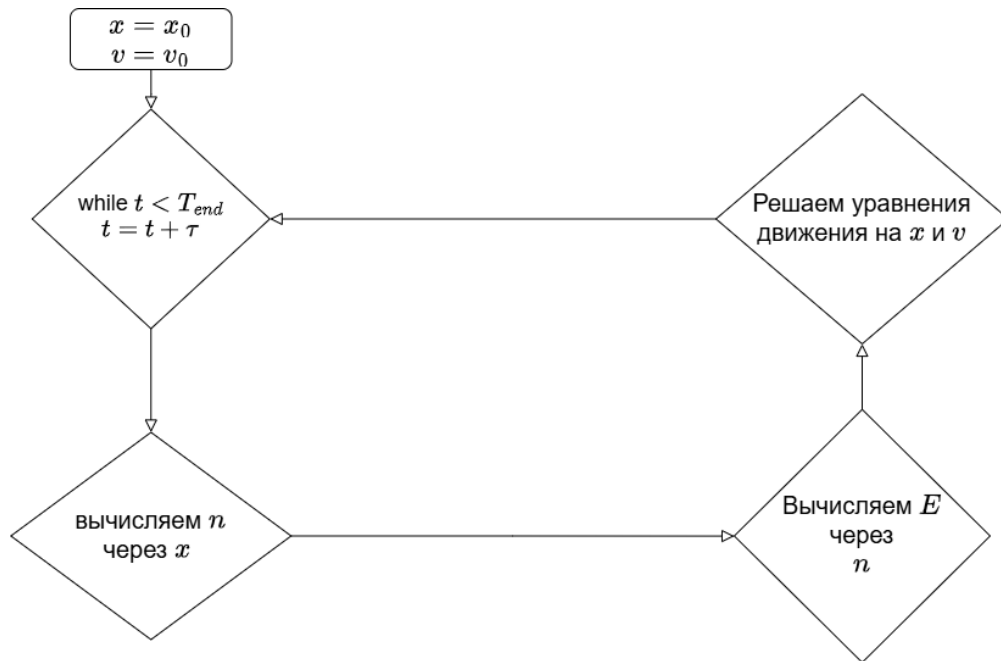


Рис. 6 – Блок-схема вычислений: в начальный момент времени в расчётной области размещены частицы с координатами и скоростями $x|_{t=0}$, $v|_{t=0}$. По координатам частиц на каждом временном шаге вычисляется плотность ионов и электронов, после чего считается электрическое поле. По имеющемуся на сетке распределению электрического поля вычисляется с помощью линейной интерполяции сила в точке положения каждой частицы.

3.2. Результаты численного моделирования

На Рис. 7, 8, 9 представлены фазовые плоскости ионов при различных скоростях набегающего потока u_0 . Фазовые плоскости имеют сложную структуру. Можно заметить частицы, имеющие скорости, значительно превышающие как скорость звука v_0 , так и скорость переднего возмущения.

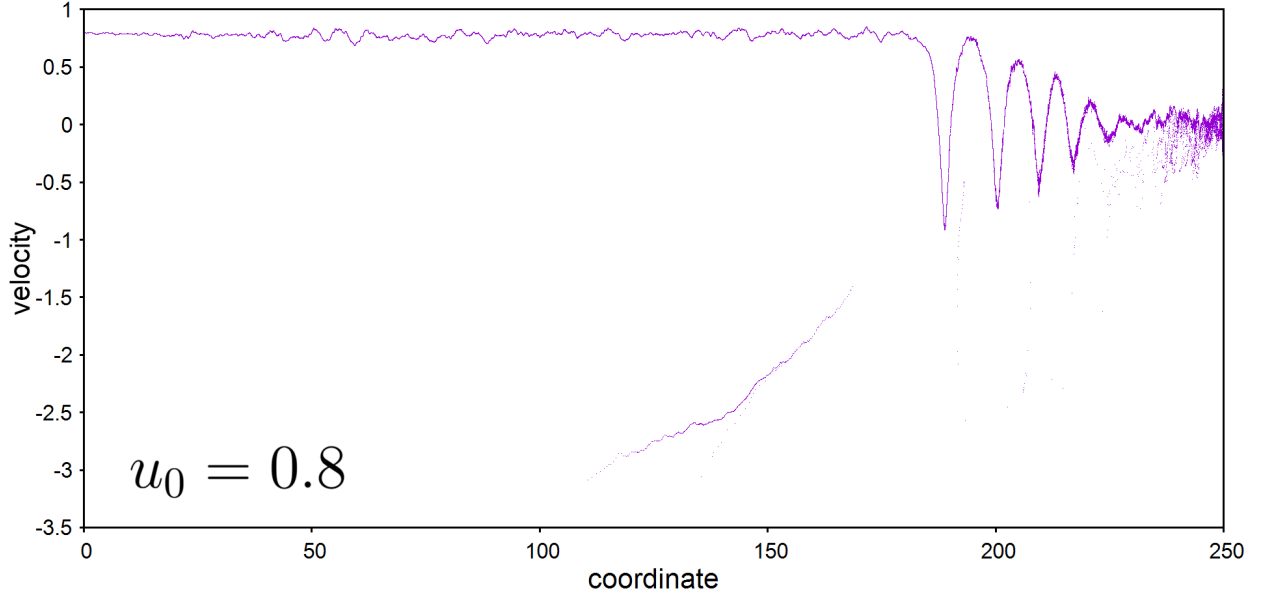


Рис. 7 – Распределение ионов на фазовой плоскости для $u_0 = 0.8v_0$ при $t = 1980t_0$. Сетка имеет количество узлов $i_{max} = 2501$. Длина области $x_{max} = 250$, шаг по пространству $h = 0.1$, шаг по времени $\tau = 0.025$, количество частиц в ячейке $N_p = 50$, количество частиц в начале расчёта $N = 125000$.

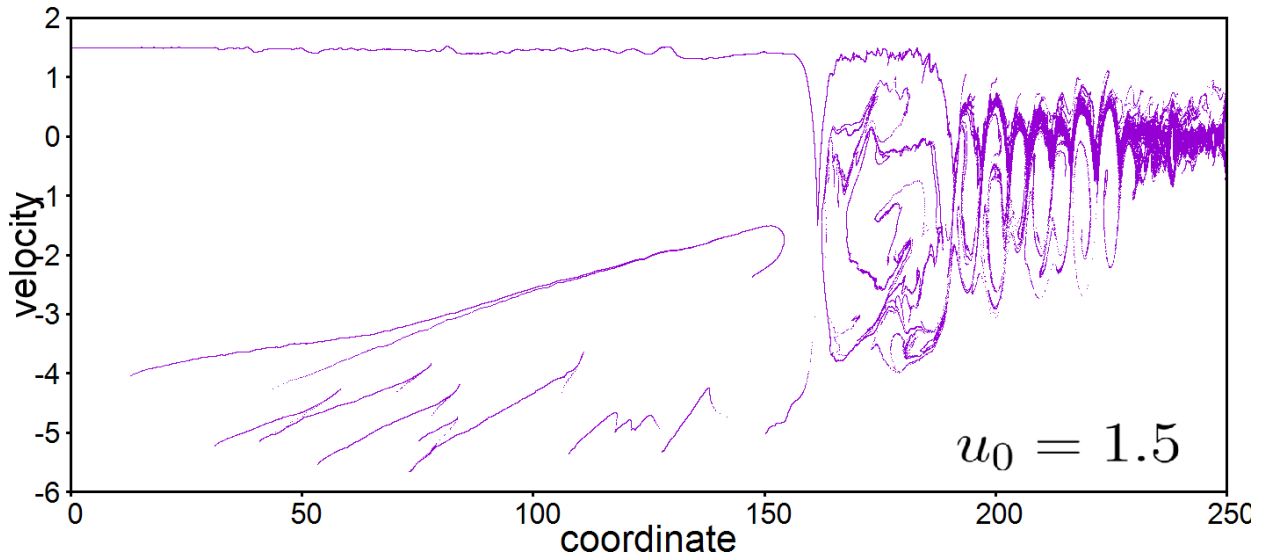


Рис. 8 – Распределение ионов на фазовой плоскости для $u_0 = 1.5v_0$ при $t = 2500t_0$. Сетка имеет количество узлов $i_{max} = 2501$. Длина области $x_{max} = 250$, шаг по пространству $h = 0.1$, шаг по времени $\tau = 0.025$, количество частиц в ячейке $N_p = 500$, количество частиц в начале расчёта $N = 1250000$.

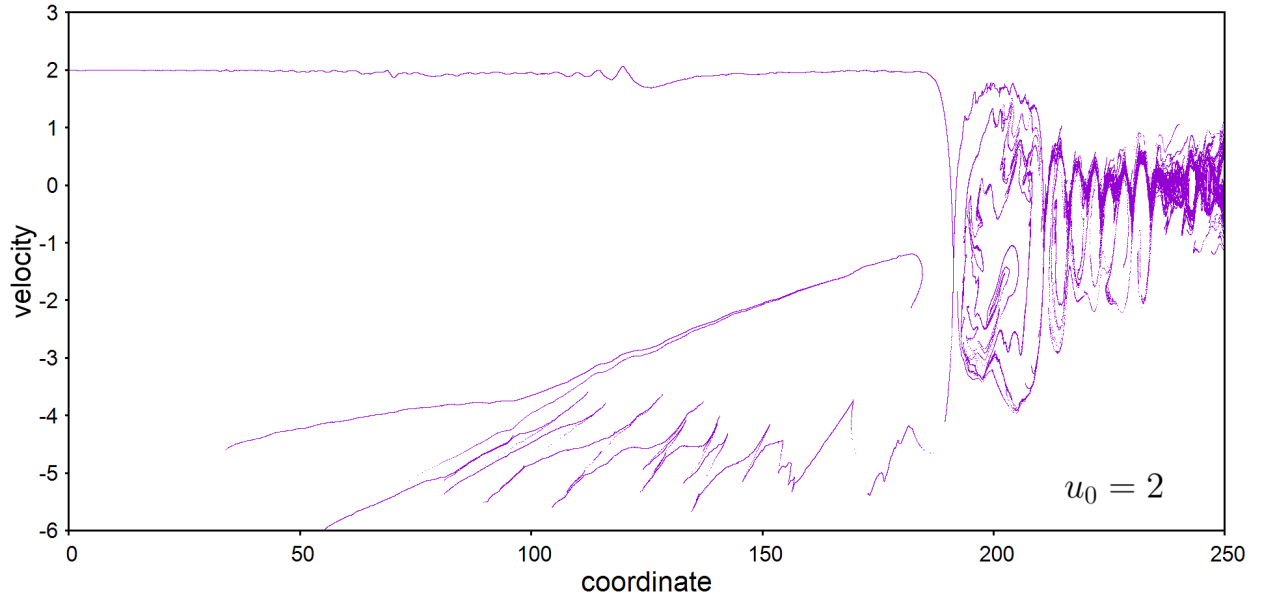


Рис. 9 – Распределение ионов на фазовой плоскости для $u_0 = 2v_0$ при $t = 2000t_0$. Сетка имеет количество узлов $i_{max} = 2501$. Длина области $x_{max} = 250$, шаг по пространству $h = 0.1$, шаг по времени $\tau = 0.025$, количество частиц в ячейке $N_p = 500$, количество частиц в начале расчёта $N = 1250000$.

4. МЕТОДЫ И АЛГОРИТМЫ

4.1. Решение уравнения Власова

Для решения уравнения Власова (5) для функции распределения частиц (только ионов в модели, описанной в Главе 2, ионов и электронов в полностью кинетической модели, Глава 3) используется метод частиц в ячейках [2]. В этом методе плазма представляется набором большого числа модельных частиц, траектории которых являются характеристиками уравнения Власова (4). В рассмотренном одномерном случае частицы движутся в электрическом поле, которое удовлетворяет закону Гаусса, в котором плотность заряда выступает в качестве источника. Электрическое поле и электростатический потенциал вычисляются на расчётной сетке. В связи с этим, при реализации метода частиц необходимо уметь вычислять плотности заряда на этой расчётной сетке, а также интерполировать силы со стороны электрического поля из узлов сетки в точку положения частицы. Конкретные алгоритмы кратко описаны ниже.

4.2. Восстановление плотности заряда

Пусть модельная плазма состоит из N частиц, находящихся в некотором объёме V . Каждая частица имеет свою массу m и заряд q . Её положение характеризуется координатой x и скоростью v .

Непосредственное применение функции распределения точечных частиц

$$f(x, v, t) = \sum_{n=1}^N \delta(x - x_n) \delta(v - v_n)$$

привело бы к возникновению флуктуаций плотности из-за ограниченного числа частиц и расходимости электрического поля на малых расстояниях [2]. Для уменьшения флуктуаций в методе частиц используются функции распределения для частиц конечного размера

$$\bar{f}(x, v, t) = \int f(x', v, t) R(x, x') dx' = \sum_{n=1}^N R(x - x_n) \delta(v - v_n). \quad (22)$$

Для одинаковых частиц с зарядом q распределение плотности заряда, вычисленное с использованием (22), имеет вид

$$\bar{\rho}(x, t) = q \sum_{n=1}^N R(x, x_n)$$

Функция R должна удовлетворять условию $\int_V R(x, x') dx = 1$, означающему сохранению заряда каждой частицы. В данной работе используется следующая функция:

$$R(x, x') = \begin{cases} (2\Delta)^{-1}, & |x - x'| \leq \Delta. \\ 0, & (|x - x'| > \Delta) \end{cases} \quad (23)$$

Плотность заряда $\bar{\rho}(x)$, восстановленная при помощи R из (23), будет разрывной кусочно-постоянной функцией. Значения плотности заряда на расчётной сетке вычисляются следующим образом

$$\rho_i = \frac{q}{h} \int_{x_i-h/2}^{x_i+h/2} \sum_{n=1}^N R(x - x_n) dx, \quad (24)$$

где ρ_i - значение плотности заряда в i -ом узле сетки, h - шаг сетки, $x_i = i \cdot h$. Для $\Delta = \frac{h}{2}$ формула (24) соответствует обратной линейной интерполяции заряда частицы между двумя ближайшими к ней узлами сетки. Для наглядности на Рис. 10 изображено восстановление плотности заряда в j -ом узле.

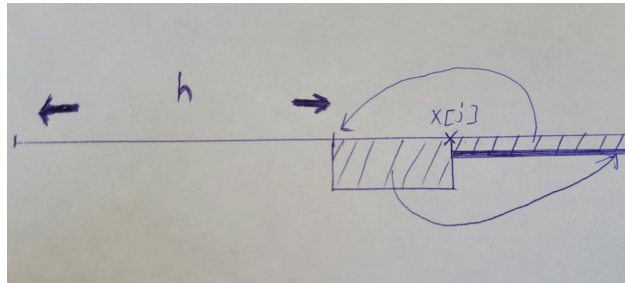


Рис. 10 – Обратная линейная интерполяция

4.3. Решение уравнений движения частиц

Для решения уравнения движения частиц (4) используется схема с перешагиванием. Она имеет второй порядок точности по времени. Это до-

стигается вычислением скоростей и координат в сдвинутых на полшага моментах времени.

$$x^{n+1} = x^n + \tau \cdot v^{n+1/2}, \quad v^{n+3/2} = v^{n+1/2} + \frac{\tau q}{m} \cdot E(x^{n+1}). \quad (25)$$

Электрическое поле в правой части уравнения (25) для скорости должно быть вычислено в точке положения частицы x^{n+1} . Для этого значения полей в узлах сетки интерполируются в точку положения частицы при помощи линейной интерполяции из двух ближайших к ней узлов сетки следующим образом

$$E(x^{n+1}) = \frac{1}{h} \cdot \left(E_{i-1}(x_i - x^{n+1}) + E_i(x^{n+1} - x_{i-1}) \right), \quad x_{i-1} < x^{n+1} < x_i.$$

Здесь E_i и E_{i-1} - значения электрического поля в i - ом и $i - 1$ - ом узле соответственно.

4.4. Метод квазилинеаризации для решения нелинейного уравнения Пуассона

Решение уравнения Пуассона (2) будем искать, используя метод квазилинеаризации [3]. Этот итерационный метод обладает очень быстрой сходимостью для данной задачи. Скорость сходимости обусловлена хорошим начальным приближением потенциала. Для аппроксимации второй производной в уравнении Пуассона используется конечно-разностная схема второго порядка. Итерационный алгоритм выглядит следующим образом

$$\frac{\varphi_{i-1}^{s+1} - 2\varphi_i^{s+1} + \varphi_{i+1}^{s+1}}{h^2} = \exp(\varphi_i^s)(1 - \varphi_i^s + \varphi_i^{s+1}) - n_i.$$

Здесь φ_i^s - значение сеточной функции на s - ой итерации, $\varphi_i^0 = \varphi_i^n$. Кроме того, φ_i^s должна удовлетворять граничным условиям (3). Для нахождения φ^{s+1} используется метод скалярной прогонки [4].

Для вычисления электрического поля используется уравнение

$$E = -\frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

то есть

$$E_{i+1/2} = \frac{\varphi_i - \varphi_{i+1}}{h}.$$

Второй порядок аппроксимации достигается вычислением потенциала и поля в сдвинутых на полшага узлах расчётной сетки.

4.5. Вычисление электрического поля в полностью кинетической модели

В полностью кинетической модели нет необходимости вычислять электростатический потенциал, а можно вычислить поле напрямую из распределения плотности. Действительно, электрическое поле удовлетворяет закону Гаусса. В безразмерных переменных

$$\frac{\partial E}{\partial x} = n_i - n_e.$$

На правой границе расчётной области $E = 0$. Плотности частиц вычисляются по координатам в серединах ячеек аналогично тому, как это показано в разделе 4.2. Тогда схема

$$E_{k+1} - E_k = h \cdot \tilde{n}_{k+1/2},$$

где $\tilde{n}_{k+1/2} = n_{i,k+1/2} - n_{e,k+1/2}$ с граничным условием $E_{i_{max}} = 0$ позволяет вычислить электрическое поле в узлах сетки со вторым порядком последовательно, начиная с крайней правой ячейки.

5. РАСПАРАЛЛЕЛИВАНИЕ

Проведено распараллеливание алгоритмов с использованием стандарта MPI. Поскольку в методе частиц нет явной зависимости скоростей отдельных частиц от скоростей координат других частиц, то он легко распараллеливается путём распределения частиц по подобластям. В работе используется следующая реализация. Область моделирования делится на одинаковые подобласти, число которых равно числу процессорных элементов. Каждый процессорный элемент сохраняет характеристики только тех частиц, которые находятся в его подобласти. В процессе расчёта частицы могут перемещаться в область, принадлежащую соседнему процессорному элементу. Поэтому на каждом временном шаге нужно осуществлять пересылку частиц между процессорными элементами. Для того, чтобы пересылка была эффективной, нужно группировать частицы в три популяции: большая часть частиц остаётся на "своём" процессорном элементе, часть частиц должна быть переслана направо, оставшаяся часть налево в соседние процессорные элементы. На каждом временном шаге частицы сортируются по координатам при помощи процедуры быстрой сортировки, группируются и пересылаются между процессорными элементами за один вызов процедуры пересылки. Заметим, что крайний левый процессорный элемент может отправлять частицы только соседнему правому, а крайний правый наоборот, только соседнему левому. Остальные процессорные элементы могут передавать частицы соседним слева и справа.

Вычисление плотности заряда на каждом временном шаге осуществляется следующим образом. Каждый процессорный элемент вычисляет плотность по "своим" частицам. Затем все вычисленные значения собираются в общий массив, который передаётся всем процессорным элементам, при помощи MPI-процедуры `MPI_Allreduce`. Вычисление потенциала в модели с распределением Больцмана для электронов и вычисление электрического поля дублируются на всех процессорных элементах.

На Рис. 11 представлена блок-схема вычислений в полностью кинетической модели с использованием параллельных алгоритмов.

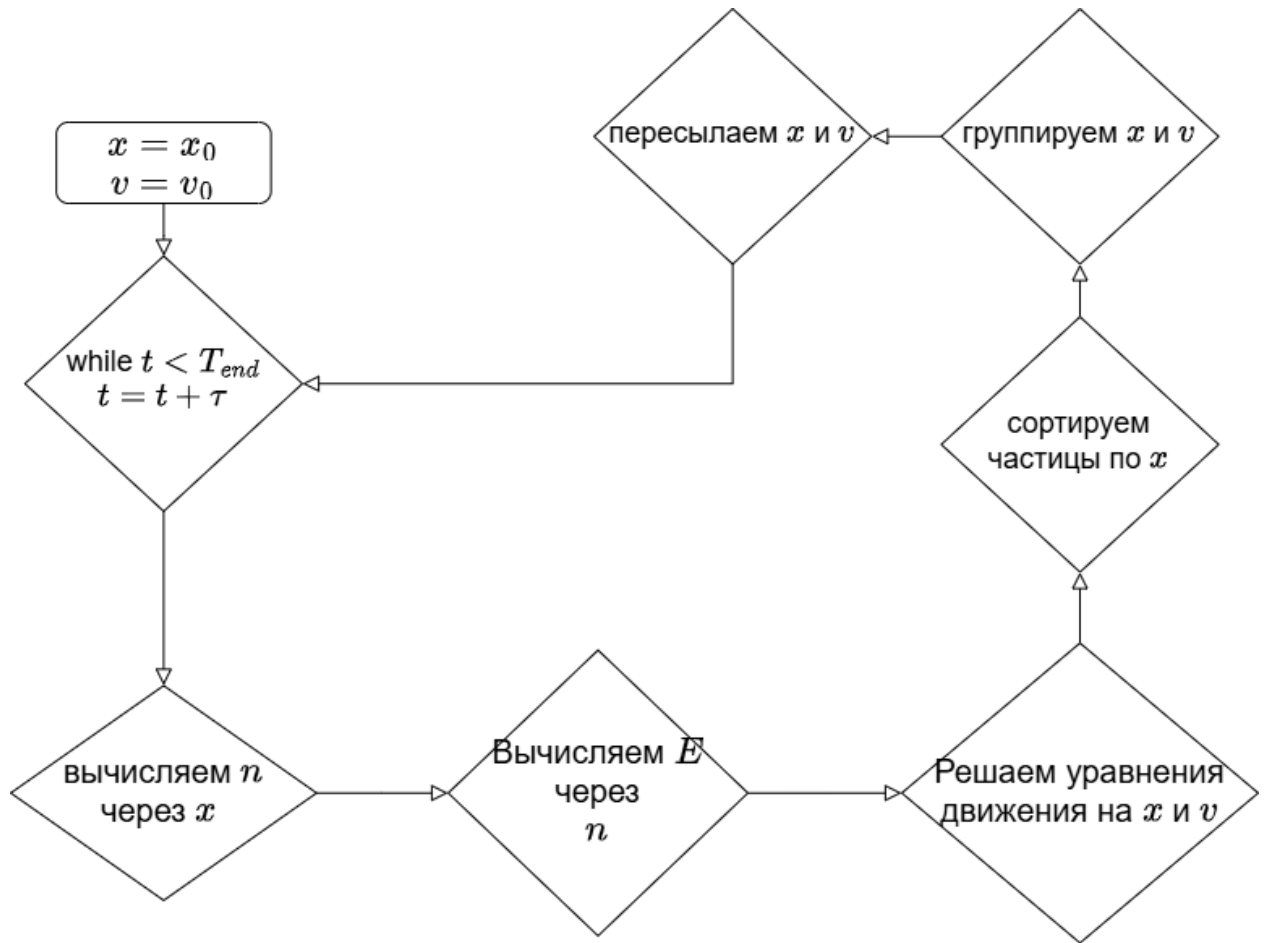


Рис. 11 – Блок-схема вычисления в модели, имеющей полностью кинетическое описание с использованием параллельных алгоритмов.

Исследована масштабируемость программы, коэффициенты ускорения для разного количества узлов представлены в таблице 3.

Количество процессорных элементов	Время расчёта в секундах	Ускорение
2	3356	1
5	1830	1.84
7	1302	2.58
10	1119	3
12	937	3.58
20	808	4.15
30	592	5.67
48	474	7.08

Таблица 3: Масштабируемость. Ускорение вычисляется по отношению к расчёту для двух процессорных элементов. В расчётах использовались следующие параметры: количество частиц в ячейке $N_p = 20000$, сетка имеет $i_{\max} = 1200$ ячеек, время расчёта $t = 100t_0$, где $t_0 = \frac{\lambda_D}{v_0}$, λ_D - дебаевская длина, v_0 - тепловая скорость электронов (см. Глава 3 Раздел 3.1)

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе были численно реализованы две физико-математические модели на основе системы уравнений Власова-Пуассона для исследования процесса формирования и распространения ионно-звукового возмущения в неизотермической плазме. Используемые алгоритмы протестированы, созданы программы на языке `c++` для моделирования отражения потока плазмы от проводящей стенки. Проведенные расчёты для разных скоростей набегающего на стенку потока показали, что в результате взаимодействия разнонаправленных плазменных потоков формируется ионно-звуковое возмущение, представляющее собой распространяющийся от стенки горб потенциала с осцилляторным шлейфом. Результаты расчётов продемонстрировали, что структура волны зависит от скорости набегающего потока. Проведено сравнение зависимости скорости переднего возмущения потенциала от его амплитуды с теоретической формулой, полученной в гидродинамическом приближении [1]. Для диапазона параметров, использованного в расчётах, обнаружено хорошее соответствие с теорией. С целью проведения расчётов на мелкой сетке с большим количеством частиц до больших моментов времени было проведено распараллеливание алгоритмов и программ. Показана эффективность работы параллельной программы на кластере ЦКП ССКЦ ИВМиМГ СО РАН на доступном числе узлов до 48.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арцимович Л. А., Сагдеев Р. З. Физика плазмы для физиков. – М.: Атомиздат. – 1979.
2. Березин Ю. А., Вшивков В. А. Метод частиц в динамике разреженной плазмы. – Новосибирск:Наука. – 1980.
3. Беллман Р., Калаба Р. Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи. – М.:Мир. – 1969. С. 43-45
4. Калиткин Н.Н. Численные методы. – М.:Наука. –1978.
5. Liseykina T.; Dudnikova G.; Vshivkov V.; Malkov M. Ion-acoustic shocks with reflected ions: modeling and PIC simulations// <https://archive.org/details/arxiv-1503.07774/mode/2up>, 2015
6. Krall N.A.; Trivelpiece A.W. Principles of Plasma Physics. –San Francisco Press. – 1986.