ЗАДАНИЕ 2 (ММФ, 3 курс, 6 семестр)
Численное решение краевых задач для уравнения Пуассона
7 февраля 2013 г., Паасонен В.И.

Найти решение некоторой смешанной краевой задачи для уравнения Пуассона в прямоугольной области:

$$U_{xx} + U_{yy} = f(x, y), \quad x \in [a, b], \quad y \in [c, d]$$

методом установления решения краевой задачи для нестационарного уравнения теплопроводности с теми же граничными условиями

$$V_t = V_{xx} + V_{yy} - f(x, y), \quad 0 < t < \infty.$$

Известно, что при стационарных граничных условиях (не зависящих от псевдовремени t) решение $V(x, y, t)$ уравнения теплопроводности при любом начальном распределении температур $V(x, y, 0) = V_0(x, y)$ стремится при $t \to \infty$ к решению $U(x, y)$ соответствующей краевой задачи для уравнения Пуассона.

Зададим равномерную сетку с шагом τ по псевдовремени и шагами h_1, h_2 по x, y

$$h_1 = \frac{b-a}{N_x}, \quad h_2 = \frac{d-c}{N_y},$$

где N_x, N_y — число шагов сетки по пространственным переменным. Приближенное решение уравнения теплопроводности на слое с номером n, обозначаемое v^n, будем считать $n-$ ым итерационным приближением для решения разностного аналога уравнения Пуассона

$$\Lambda_1 u + \Lambda_2 u = f,$$

где вторые производные аппроксимируются обычными трехточечными разностными аналогами вторых производных:

$$\Lambda_1 u_{\ m\ j} = \frac{u_{\ m-1\ j} - 2u_{\ m\ j} + u_{\ m+1\ j}}{h_1^2},$$

$$\Lambda_2 u_{\ m\ j} = \frac{u_{\ m\ j-1} - 2u_{\ m\ j} + u_{\ m\ j+1}}{h_2^2}.$$

Контроль сходимости итераций осуществляется сравнением величины невязки

$$\varepsilon^n = \|\Lambda_1 v^n + \Lambda_2 v^n - f\|$$

с наперед заданным порогом сходимости ε. При достижении этого порога ($\varepsilon^n < \varepsilon$) текущее итерационное приближение v^{n+1} принимается за приближенное решение u разностной краевой задачи для уравнения Пуассона. Различие между точным решением U уравнения Пуассона и решением u его разностного аналога зависит от детальности пространственной сетки и порядка точности. Относительная ошибка приближенного решения характеризуется величиной

$$\delta(h_1, h_2) = \frac{\|u - U\|}{\|U\|}.$$

На границах области, как правило, задаются значения искомого решения (условия первого рода, или условия Дирихле), либо первые производные решения (условия второго рода, или условия Неймана), либо линейная связь между значениями функции и ее производной (условия третьего рода, или условия теплообмена с внешней средой):

$$U = w, \quad \frac{\partial U}{\partial \eta} = -q, \quad \frac{\partial U}{\partial \eta} = -\alpha(U - w).$$

Здесь η — внешняя нормаль к границе, q и w — поток и температура среды, зависящие от точки границы, α — заданный постоянный коэффициент теплоотдачи.

Предлагается решить два варианта краевых задач:

а) Задача Дирихле, когда всюду на границах прямоугольной области задано значение искомой функции;

б) Смешанная краевая задача, когда на одной-двух сторонах прямоугольной области поставлены условия второго или третьего рода, а на прочих сторонах заданы условия Дирихле.

Задание состоит в том, чтобы с помощью представленных ниже итерационных разностных методов найти приближенное решение предложенных краевых задач для уравнения Пуассона, на последовательности сгущающихся сеток исследовать поведение ошибки $\delta(h_1, h_2)$ и сравнить практически наблюдаемый порядок точности с теоретическим.

1. Явная схема:

$$\frac{v^{n+1} - v^n}{\tau} = \Lambda_1 v^n + \Lambda_2 v^n - f^n.$$

2. Схема расщепления:

$$\frac{v^{n+1/2} - v^n}{\tau} = \Lambda_1 v^{n+1/2} - f^n,$$

$$\frac{v^{n+1} - v^{n+1/2}}{\tau} = \Lambda_2 v^{n+1}.$$

3. Схема продольно-поперечной прогонки:

$$\frac{v^{n+1/2} - v^n}{\tau/2} = \Lambda_1 v^{n+1/2} + \Lambda_2 v^n - f^n,$$

$$\frac{v^{n+1} - v^{n+1/2}}{\tau/2} = \Lambda_1 v^{n+1/2} + \Lambda_2 v^{n+1} - f^n.$$

4. Схема стабилизирующей поправки:

$$\frac{v^{n+1/2} - v^n}{\tau} = \Lambda_1 v^{n+1/2} + \Lambda_2 v^n - f^n,$$

$$\frac{v^{n+1} - v^{n+1/2}}{\tau} = \Lambda_2 (v^{n+1} - v^n).$$

5. Схема приближенной факторизации:

$$(E - \tau\Lambda_1) v^{n+1/2} = (\Lambda_1 + \Lambda_2) v^n - f^n,$$

$$(E - \tau\Lambda_2) \frac{v^{n+1} - v^n}{\tau} = v^{n+1/2}.$$

6. Попеременно - треугольный метод:

$$(E - \tau\Lambda_1^- - \tau\Lambda_2^-) v^{n+1/2} = (\Lambda_1 + \Lambda_2) v^n - f^n,$$

$$(E - \tau\Lambda_1^+ - \tau\Lambda_2^+) \frac{v^{n+1} - v^n}{\tau} = v^{n+1/2},$$

где

$$\Lambda_1^- v_{mj} = \frac{-v_{mj} + v_{m-1\ j}}{h_1^2}, \quad \Lambda_1^+ v_{mj} = \frac{v_{m+1\ j} - v_{m\ j}}{h_1^2},$$

$$\Lambda_2^- v_{mj} = \frac{-v_{mj} + v_{m\ j-1}}{h_2^2}, \quad \Lambda_2^+ v_{mj} = \frac{v_{m\ j+1} - v_{m\ j}}{h_2^2}.$$

7. Итерационный метод Якоби:

$$\frac{v^n_{m-1\ j} - 2v^{n+1}_{m\ j} + v^n_{m+1\ j}}{h_1^2} + \frac{v^n_{m\ j-1} - 2v^{n+1}_{m\ j} + v^n_{m\ j+1}}{h_2^2} = f^n_{m\ j}.$$

8. Итерационный метод Зейделя:

$$\frac{v^{n+1}_{m-1\ j} - 2v^{n+1}_{m\ j} + v^n_{m+1\ j}}{h_1^2} + \frac{v^{n+1}_{m\ j-1} - 2v^{n+1}_{m\ j} + v^n_{m\ j+1}}{h_2^2} = f^n_{m\ j}.$$

Краевые задачи:

0. Условия Дирихле всюду.
1. На левой границе условие Неймана.
2. На правой границе условие Неймана.
3. На нижней границе условие Неймана.
4. На верхней границе условие Неймана.

5. На левой границе условие третьего рода.
6. На правой границе условие третьего рода.
7. На нижней границе условие третьего рода.
8. На верхней границе условие третьего рода.
9. На левой и правой границах условие Неймана.
10. На нижней и верхней границах условие Неймана.
11. На левой и нижней границах условие Неймана.
12. На левой и верхней границах условие Неймана.
13. На правой и нижней границах условие Неймана.
14. На правой и верхней границах условие Неймана.

Ниже приведены данные для нескольких тестовых краевых задач для уравнения Пуассона. Входные данные w, q для постановки граничных условий находятся из точного решения.

1. Точное решение $u(x,y) = \cos(x+y)\sin(xy)$,

$$a = \pi/2, \quad b = 3\pi/2, \quad c = \pi/2, \quad d = 3\pi/2,$$

$$f(x,y) = -\cos(x+y)\sin(xy)(2+x^2+y^2) - 2\sin(x+y)\cos(xy)(x+y).$$

2. Точное решение $u(x,y) = \sin^2(x+y)\cdot xy$,

$$a = \pi/2, \quad b = 3\pi/2, \quad c = \pi/2, \quad d = 3\pi/2,$$

$$f(x,y) = 2\sin\left(2(x+y)\right)\cdot(x+y) + 4\cos\left(2(x+y)\right)\cdot xy.$$

3. Точное решение $u(x,y) = \exp^{xy}\cos\left(2\pi(x+y)\right)$,

$$a = 0, \quad b = 1, \quad c = 0, \quad d = 1.$$

$$f(x,y) = \exp^{xy}\cos\left(2\pi(x+y)\right)(x^2+y^2-8\pi^2) - 4\pi\exp^{xy}\sin\left(2\pi(x+y)\right)(x+y)$$

4. Точное решение $u(x,y) = \exp^{xy}\cos\left(2\pi(x^2+y)\right)$

$$a = 0, \quad b = 1, \quad c = 0, \quad d = 1,$$

$$f(x,y) = \exp^{xy}\cos\Big(2\pi(x^2+y)\Big)(x^2+y^2-4\pi^2-16\pi^2x^2) -$$
$$-4\pi\exp^{xy}\sin\Big(2\pi(x^2+y)\Big)(1+x+2xy).$$