ЗАДАНИЕ 3 (ММФ, 3 курс, 6 семестр)
Численное решение краевых задач для уравнения переноса
7 февраля 2013 г., Паасонен В.И.

1. Найти решение начально-краевой задачи:

$$U_t + U_x = 0, \quad x \in [0, 1], \quad t \in [0, 1],$$

$$U(x, 0) = 0, \quad x > 0,$$

$$U(0, t) = 1, \quad U(1, t) = 0, \quad t \geq 0$$

с помощью схемы (при $\alpha \leq 0.5$ добавить искусственную вязкость):

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} + \Delta_0 u^* = 0, \quad \Delta_0 u_i = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h},$$

$$u^* = \alpha u^{n+1} + (1 - \alpha) u^n, \quad \alpha \in [0, 1].$$

2. Найти решение начально-краевой задачи:

$$U_t + U_x = 0, \quad x \in [0, 1], \quad t \in [0, 1],$$

$$U(x, 0) = 0, \quad x > 0,$$

$$U(0, t) = 1, \quad U(1, t) = 0, \quad t \geq 0$$

с помощью схемы:

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} + \Delta u^* = 0, \quad \Delta u_i = \frac{3u_i - 4u_{i-1} + u_{i-2}}{2h},$$

$$u^* = \alpha u^{n+1} + (1 - \alpha) u^n, \quad \alpha \in [0, 1].$$

3. Найти решение начально-краевой задачи:

$$U_t + U_x = 0, \quad x \in [0, 1], \quad t \in [0, 1],$$

$$U(x, 0) = 0, \quad x > 0,$$

$$U(0, t) = 1, \quad U(1, t) = 0, \quad t \geq 0$$

с помощью трехслойной схемы:

$$\frac{3u^{n+1} - 4u^n + u^{n-1}}{2\tau} + \Delta_0 u^{n+1} = 0, \quad \Delta_0 u_i = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h}.$$

4. Найти решение начально-краевой задачи:

$$U_t + U_x = 0, \quad x \in [0,1], \quad t \in [0,1],$$

$$U(x,0) = 0, \quad x > 0,$$
$$U(0,t) = 1, \quad U(1,t) = 0, \quad t \geq 0$$

с помощью схем:

$$a) \quad \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} + \Delta_- u^n = 0, \quad \Delta_- u_i = \frac{u_i - u_{i-1}}{h},$$

$$b) \quad \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} + \Delta_0 u^{n+1} = 0, \quad \Delta_0 u_i = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h},$$

показать, что решение схемы а) при $\tau/h = 1$ совпадает с точным решением задачи.

5. Найти решение начально-краевой задачи:

$$U_t + \phi_x = 0, \quad \phi = U^2/2 \quad x \in [0,1], \quad t \in [0,1],$$

$$U(x,0) = 0.5, \quad x > 0,$$
$$U(0,t) = 1.5, \quad U(1,t) = 0.5, \quad t \geq 0$$

с помощью схемы Лакса:

$$\frac{u_i^{n+1} - 0.5(u_{i+1}^n + u_{i-1}^n)}{\tau} + \Delta_0 \phi_i^n = 0, \quad \Delta_0 \phi_i = \frac{\phi_{i+1} - \phi_{i-1}}{2h}.$$

6. Найти решение начально-краевой задачи:

$$U_t + \phi_x = 0, \quad \phi = U^2/2 \quad x \in [0,1], \quad t \in [0,1],$$

$$U(x,0) = -3x + 1, \quad x > 0,$$
$$U(0,t) = 1, \quad U(1,t) = -2, \quad t \geq 0$$

с помощью схемы предиктор-корректор (добавить искусственную вязкость):

$$\frac{u_{i+1/2}^{n+1/2} - 0.5(u_{i+1}^n + u_i^n)}{0.5\tau} + \Delta_+ \phi_i^n = 0, \quad \Delta_+ \phi_i = \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{h},$$

$$\frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\tau}+\Delta_0\phi^{n+1/2}=0, \quad \Delta_0\phi_i=\frac{\phi_{i+1/2}-\phi_{i-1/2}}{2h}.$$

7. Найти решение начально-краевой задачи:

$$U_t+\phi_x=0, \quad \phi=U^2/2 \quad x\in[0,1], \quad t\in[0,1],$$

$$U(x,0)=-3x+1, \quad x>0,$$

$$U(0,t)=1, \quad U(1,t)=-2, \quad t\geq 0$$

с помощью модифицированной схемы предиктор-корректор $0\leq\varepsilon\leq 0.5$:

$$\frac{u_{i+1/2}^{n+1/2}-0.5(u_{i+1}^n+u_i^n)}{(0.5+\varepsilon)\tau}+\Delta_+\phi_i^n=0, \quad \Delta_+\phi_i=\frac{\phi_{i+1}-\phi_i}{h},$$

$$\frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\tau}+\Delta_0\phi^{n+1/2}=0, \quad \Delta_0\phi_i=\frac{\phi_{i+1/2}-\phi_{i-1/2}}{2h}.$$

8. Найти решение начально-краевой задачи:

$$U_t+\phi_x=0, \quad \phi=U^2/2 \quad x\in[0,1], \quad t\in[0,1],$$

$$U(x,0)=-2x+1, \quad x>0,$$

$$U(0,t)=1, \quad U(1,t)=-1, \quad t\geq 0$$

с помощью схемы Мак-Кормака:

$$\frac{\tilde{u}^{n+1}-u^n}{\tau}+\Delta_+\phi^n=0, \quad \Delta_+\phi_i=\frac{\phi_{i+1}-\phi_i}{h},$$

$$\frac{\bar{u}^{n+1}-u^n}{\tau}+\Delta_-\tilde{\phi}^n=0, \quad \Delta_-\phi_i=\frac{\phi_i-\phi_{i-1}}{h},$$

$$u^{n+1}=0.5(\tilde{u}^{n+1}+\bar{u}^{n+1}).$$

9. Найти решение начально-краевой задачи:

$$U_t+\phi_x=0, \quad \phi=U^2/2 \quad x\in[0,1], \quad t\in[0,1],$$

$$U(x,0)=x, \quad x>0,$$

$$U(0,t)=0, \quad U(1,t)=\frac{1}{1+t}, \quad t\geq 0$$

с помощью схем (объяснить совпадение численного и точного решения для схемы а))

$$a) \quad \frac{u^{n+1}-u^n}{\tau} + u^n \Delta_- u^{n+1} = 0, \quad \Delta_- u = \frac{u_i - u_{i-1}}{h},$$

$$b) \quad \frac{u^{n+1}-u^n}{\tau} + \Delta_0 u^{n+1} = 0, \quad \Delta_0 u = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h}.$$

10. Найти решение начально-краевой задачи:

$$U_t + \phi_x = 0, \quad \phi = U^2/2 \quad x \in [0,1], \quad t \in [0,1],$$

$$U(x,0) = x, \quad x > 0,$$

$$U(0,t) = 0, \quad U(1,t) = \frac{1}{1+t}, \quad t \geq 0$$

с помощью схемы:

$$[E + \frac{h^2}{6}\Lambda]\frac{u^{n+1}-u^n}{\tau} + u^n \Delta_0 \frac{u^{n+1}+u^n}{2} = 0, \quad \Delta_0 u = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h},$$

где Λ — обычный трехточечный разностный аналог двойного дифференцирования.

Задание заключается в численном решении начально-краевых задач для линейного и нелинейного уравнения переноса разностными методами из приведенного выше перечня с представлением графиков точного и приближенного решения. Кроме того, путем расчета на последовательности сгущающихся сеток какого-нибудь нетривиального гладкого решения уравнения переноса требуется исследовать совпадение практически наблюдаемого порядка точности с теоретическим.

ПРИЛОЖЕНИЕ. Искусственная вязкость.

Если схема диссипативна (множитель возрастания ошибки на шаге счета по модулю строго меньше единицы, или, иначе говоря, схема сильно устойчива), то осцилляции в окрестности разрывов сглаживаются, погрешность гасится. Если же схема не диссипативна (модуль возрастания ошибки больше или равен единице, или схема не является устойчивой или сильно устойчивой), то в схеме нет механизма сглаживания ошибки осциллирующего характера. В этом случае на помощь приходит так называемая искусственная вязкость. Введение искусственной вязкости осуществляется добавлением к правой части разностной схемы разностного аналога диссипативного слагаемого $\mu h u_{xx}$ на нижнем либо верхнем слое, или же на их линейной комбинации так, чтобы схема аппроксимировала дифференциальное уравнение

$$u_t + u_x = \mu h u_{xx}, \quad \mu > 0.$$

Эта операция сопряжена с включением в схему дополнительной погрешности первого порядка $O(h)$. Заметим, что если исходная схема имела первый порядок аппроксимации, то и схема с искусственной вязкостью будет того же порядка. Для схем второго порядка искусственная вязкость понижает порядок до первого. Понятие искусственной и аппроксимационной вязкости тесно связано с понятием первого дифференциального приближения схем. Если первое дифференциальное приближение схемы не параболично, схема требует использования искусственной вязкости, иначе не будет устойчивости счета.