ЗАДАНИЕ 1 (ММФ, 3 курс, 6 семестр)
Численное решение краевых задач для уравнения теплопроводности
7 февраля 2013 г., Паасонен В.И.

Плоский слой $a < x < b$ с начальным распределением температур $u(x,0) = u_0(x)$ в течение конечного времени $0 < t <= T$ подвергается внешнему тепловому воздействию.

При $x = a$:

a) первого рода $u(a,t) = w(t)$,

b) второго рода $u_x(a,t) = -q(t)$,

c) или третьего рода $u_x(a,t) = \alpha(u(a,t) - w(t))$,

и при $x = b$:

d) первого рода $u(b,t) = v(t)$,

e) второго рода $u_x(b,t) = r(t)$,

f) или третьего рода $u_x(b,t) = -\beta(u(b,t) - v(t))$.

Здесь функции $w(t), v(t)$ суть температуры среды вблизи соответствующей границы слоя, функции $q(t), r(t)$ имеют смысл внешних потоков тепла к границам слоя, а положительные постоянные α и β означают коэффициенты теплоотдачи, характеризующие теплосъем с поверхности (например, чем сильнее ветер, тем больше коэффициент теплоотдачи). В области изменения переменных $(a < x < b, 0 < t < T)$ температура $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению теплопроводности

$$u_t = u_{xx} + f,$$

где $f(x,t)$ - плотность внутренних источников тепла.

Уравнение теплопроводности аппроксимируется на равномерной сетке $x_i = a + ih, i = 0, ..., N; h = (b-a)/N$ неявной двухслойной разностной схемой

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Lambda(\sigma u^{n+1} + (1-\sigma)u^n) + g^n,$$

где u^n решение на временном слое $t = n\tau$, Λ — трехточечный разностный аналог операции двойного дифференцирования по пространственной переменной

$$(\Lambda z)_i = \frac{z_{i+1} - 2z_i + z_{i-1}}{h^2}.$$

Разностная схема имеет различную точность в зависимости от того, какое значение имеет вес схемы σ, как задана правая часть g^n и как аппроксимируются граничные условия.

1. Неявная схема с погрешностью $O(\tau + h^2)$. Вес схемы $\sigma \in (0, 1]$. При $\sigma = 0$ схема явная, этот случай не рассматриваем. Для правой части с точностью до величин $O(\tau)$ должно выполняться равенство $g^n = f(n\tau)$. Первые производные в граничных условиях при этом должны аппроксимироваться с точностью $O(\tau + h^2)$.

2. Схема повышенной точности с погрешностью $O(\tau^2 + h^4)$. В этом случае непременно $\sigma = 0.5 - h^2/(12\tau)$, для правой части должно выполняться равенство

$$g^n = f^n + \frac{\tau}{2} f_t^n + \frac{h^2}{12} f_{xx}^n + O(\tau^2 + h^4).$$

Например, можно задать g^n в одной из форм:

$$g^n = f^n + \frac{\tau}{2} f_t^n + \frac{h^2}{12} f_{xx}^n,$$

$$g^n = \frac{f^{n+1} + f^n}{2} + \frac{h^2}{12} \Lambda f^n,$$

$$g^n = f(n\tau + \tau/2) + \frac{h^2}{12} \Lambda f(n\tau + \tau/2).$$

Первые производные в граничных условиях при этом также должны аппроксимироваться с точностью $O(\tau^2 + h^4)$.

Об аппроксимации граничных условий см. Приложение 1.

Задание состоит в сравнении методов 1 и 2 на тестовых задачах при одном из сочетаний вариантов граничных условий (a, b, c) и (d, e, f) (в индивидуальных заданиях заданы разные сочетания). Тестовую задачу можно создать стандартным образом, исходя из "придуманного"решения $u(x, t)$. По нему устанавливается начальное распределение $u_0(x)$ и правая часть $f(x, t) = u_t - u_{xx}$, а после фиксации области, т. е. задания параметров a, b, T (при условиях третьего рода следует задать также коэффициенты теплоотдачи) устанавливаются зависимости от времени температур внешней среды и падающих тепловых потоков. Решая затем численно краевую задачу с установленными входными данными, в случае сходимости схемы получаем близкие к точным приближенные решения. Не следует брать в качестве точных решений самые простые функции (например, полиномы невысоких степеней), иначе погрешность может оказаться равной нулю тождественно. Порядок точности схемы устанавливается сравнением погрешностей на последовательности сеток.

Другой (нестрогий) способ тестирования состоит в задании некоторых простых входных данных, для которых можно предсказать качественное поведение решения. Выбор задач такого рода очень широк, зависит от воображения и от того, насколько нам близка физика. Если замечена практическая сходимость решения при детализации пространственной и временной сетки, то в этом случае можно сделать также и количественные апостериорные оценки. Для этого за "точное"решение принимают приближенное решение, полученное на самой детальной сетке, а решения на ряде менее детальных сеток сравнивают с этим решением, принятым условно за точное. В обоих случаях ошибку на последовательности сеток можно исследовать на предмет ее соответствия теоретически ожидаемому порядку погрешности.

Задание 1а. Решить численно уравнение теплопроводности методами 1 и 2 при граничных условиях первого рода на обеих границах и при самостоятельно выбранном точном решении, на последовательности сгущающихся сеток. Сравнить практически наблюдаемый порядок точности с теоретическим. Точное и приближенное решение изобразить графически.

Задание 1б. Решить задачу методами 1 и 2 при заданном сочетании граничных условий и при самостоятельно выбранном точном решении, на последовательности сгущающихся сеток. Сравнить практически наблюдаемый порядок точности с теоретическим. Точное и приближенное решение изобразить графически.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1. Аппроксимация первых производных в граничных условиях

Пусть на левой границе первая производная аппроксимируется по $(k+1)$ точке с коэффициентами $C_m (m=0,...,k)$:

$$(\Delta w)_0 = \frac{1}{h}\sum_{m=0}^{k} C_m w_m$$

Легко показать, что $\Delta w = w_x + O(h^k)$, если вектор-столбец C удовлетворяет системе уравнений

$$W(0,1,...,k)C = P,$$

где $W(0,1,...,k)$ — матрица Вандермонда вида

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & ... & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & ... & k-1 & k \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 1 & 2^k & ... & (k-1)^k & k^k \end{matrix}$$

а P — вектор-столбец с компонентами $(0,1,0,...,0)$.

В общем случае система уравнений имеет решение

$$C_m = (-1)^{m+1}\frac{1}{m}C_k^m, (m=1,...,k), C_0 = -(C_1 + C_2 + ... + C_k),$$

где C_k^m — число сочетаний из k по m (доказать в качестве самостоятельного упражнения). В данном случае нас интересуют только два варианта: $k=2$ и $k=4$.

На правой границе

$$(\Delta u)_N = \frac{1}{h}\sum_{m=0}^{k} B_m u_{N-m}$$

Вектор B удовлетворяет системе уравнений

$$W(0,-1,...,-k)B = P,$$

Легко установить, что $B_m = -C_m$ для всех m (докажите это самостоятельно).

По вопросу решения системы линейных алгебраических уравнений с длинными крайними строками см. Приложение 2.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2. Реализация трехточечной прогонки с "длинными" граничными условиями

Классическая прогонка решает трехточечные разностные уравнения с одно-или-двухточечными граничными условиями. Иначе говоря, решает систему $Mu = F$, где матрица M имеет трехдиагональную структуру. При длинных граничных условиях структура матрицы M отличается от трехдиагональной первой и последней строками, в которых находится более двух ненулевых элементов. В нашем случае это 3 или 5 элементов для схем 2-го и 4-го порядков точности по пространственной переменной. Ниже приводится структура матрицы для схемы повышенной точности $O(\tau^2 + h^4)$, звездочками отмечены ненулевые элементы матрицы.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
* & * & * & * & * & ... & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
* & * & * & 0 & 0 & ... & ... & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & * & * & * & 0 & ... & ... & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & * & * & * & ... & ... & 0 & 0 & 0 & 0 \\
... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\
0 & 0 & 0 & 0 & ... & ... & * & * & * & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & ... & ... & 0 & * & * & * & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & ... & ... & 0 & 0 & * & * & * \\
0 & 0 & 0 & 0 & ... & ... & * & * & * & * & *
\end{array}$$

Очевидно, вычитанием из первой (последней) строки линейной комбинации нескольких ближайших строк с подходящими коэффициентами матрица приводится к трехдиагональному виду. Этот процесс можно осуществлять также и последовательно, на каждом шаге уменьшая длину строки на единицу, при этом каждый раз требуется пересчитывать только два предпоследних элемента и правую часть.

После приведения матрицы к трехдиагональной форме задача решается трехточечной прогонкой.