

MODUL 2 RANTAI MARKOV

Mika Alvionita Sitinjak

2025-09-15

RANTAI MARKOV

Proses stokastik, khususnya pada rantai Markov, memiliki hubungan erat dengan konsep matriks transisi. Dalam sebuah rantai Markov, probabilitas perpindahan dari suatu keadaan ke keadaan lain hanya bergantung pada keadaan saat ini dan tidak bergantung pada sejarah sebelumnya. Informasi mengenai peluang perpindahan ini dirangkum dalam matriks transisi, yaitu sebuah matriks yang berisi probabilitas transisi dari setiap keadaan ke keadaan lainnya. Setiap baris pada matriks transisi merepresentasikan distribusi peluang berpindah dari satu keadaan tertentu, sehingga jumlah elemen dalam setiap baris bernilai satu. Dengan demikian, matriks transisi menjadi alat utama untuk menganalisis dinamika proses stokastik, misalnya dalam menghitung probabilitas keadaan di masa depan, menentukan distribusi stasioner, serta memahami perilaku jangka panjang dari sistem stokastik tersebut.

Probabilitas Transisi

Dalam rantai Markov, probabilitas transisi merupakan konsep yang sangat penting karena menentukan bagaimana suatu sistem berpindah dari satu keadaan ke keadaan lainnya. Probabilitas transisi menggambarkan peluang suatu state i berubah menjadi state j dalam satu langkah, yang ditulis sebagai $P_{ij} = P(X_{t+1} = j | X_t = i)$. Kumpulan dari probabilitas ini disusun dalam bentuk matriks transisi, yang barisnya menunjukkan keadaan saat ini dan kolomnya menunjukkan keadaan berikutnya. Hubungannya dengan rantai Markov adalah bahwa evolusi sistem dari waktu ke waktu sepenuhnya dikendalikan oleh probabilitas transisi tersebut. Sifat dasar rantai Markov menyatakan bahwa keadaan di masa depan hanya bergantung pada keadaan saat ini, bukan pada riwayat sebelumnya. Oleh karena itu, matriks transisi menjadi alat utama untuk menganalisis perilaku rantai Markov, termasuk menghitung peluang berpindah dalam beberapa langkah ke depan dengan menggunakan pangkat dari matriks transisi P^2, P^3 dan seterusnya.

```
# install.packages("igraph") # jalankan sekali jika belum ada
library(igraph)

##
## Attaching package: 'igraph'

## The following objects are masked from 'package:stats':
##
##      decompose, spectrum
```

```

## The following object is masked from 'package:base':
##
##      union

# Matriks transisi sederhana 2 state
P <- matrix(c(
  0.8, 0.2, # dari S1 ke (S1,S2)
  0.4, 0.6 # dari S2 ke (S1,S2)
), nrow = 2, byrow = TRUE)

rownames(P) <- colnames(P) <- c("S1", "S2")

# Buat graf berarah
g <- graph_from_adjacency_matrix(P > 0, mode = "directed")

# Tambahkan label probabilitas
E(g)$label <- c(P[1,1], P[1,2], P[2,1], P[2,2])

# Gambar
plot(g,
  edge.arrow.size = 0.5,
  vertex.size = 30,
  vertex.color = "lightblue",
  main = "Diagram Probabilitas Transisi (2 state)")

```

Diagram Probabilitas Transisi (2 state)

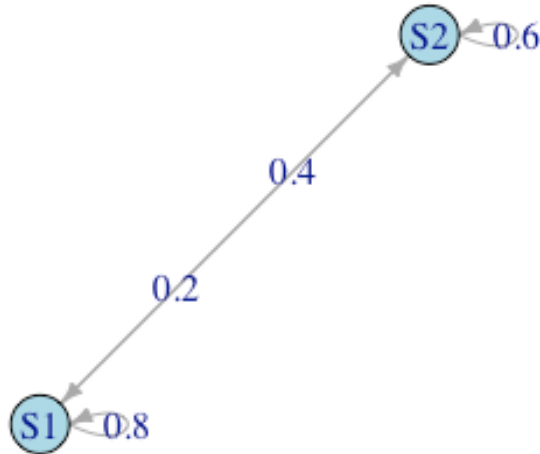


Diagram probabilitas transisi di atas menggambarkan sebuah rantai Markov sederhana dengan dua keadaan, yaitu $S1$ dan $S2$. Dari diagram terlihat bahwa jika sistem berada pada $S1$, maka ada peluang sebesar 0,8 untuk tetap berada di $S1$ dan peluang 0,2 untuk berpindah ke $S2$. Sebaliknya, jika sistem berada pada $S2$, maka terdapat peluang 0,4 untuk kembali ke $S1$ dan peluang 0,6 untuk tetap berada di $S2$. Dengan demikian, panah pada diagram menunjukkan arah perpindahan antarstate, sedangkan angka pada panah merupakan nilai probabilitas transisinya. Visualisasi ini membantu memahami bahwa evolusi keadaan dalam rantai Markov hanya ditentukan oleh keadaan saat ini melalui probabilitas transisi yang sudah ditetapkan.

Matriks Transisi

Rantai Markov adalah suatu proses stokastik yang pergerakannya dari satu keadaan ke keadaan lain hanya bergantung pada keadaan saat ini, tidak pada riwayat sebelumnya. Untuk merepresentasikan hubungan antarstate dalam rantai Markov, digunakan diagram transisi, yaitu gambaran grafis berupa titik (state) yang dihubungkan panah berlabel probabilitas, sehingga lebih mudah dipahami secara visual bagaimana kemungkinan perpindahan antarstate terjadi. Sementara itu, semua probabilitas transisi tersebut juga dapat disajikan dalam bentuk tabel matematis yang disebut matriks transisi, di mana setiap baris mewakili keadaan saat ini dan setiap kolom menunjukkan probabilitas berpindah ke keadaan berikutnya. Dengan demikian, rantai Markov menggambarkan

konsep dasarnya, diagram transisi memberikan representasi visualnya, dan matriks transisi menjadi bentuk matematis yang memudahkan perhitungan analitis, misalnya untuk mencari probabilitas beberapa langkah ke depan atau distribusi stasioner. Berikut contoh kasusnya.

Dalam studi epidemiologi sederhana, kita memodelkan perkembangan kondisi kesehatan seseorang dengan tiga keadaan: Sehat (S), Sakit Ringan (R), dan Sakit Parah (P). Seseorang yang saat ini Sehat berpeluang 80% tetap sehat, 15% menjadi sakit ringan, dan 5% menjadi sakit parah. Jika seseorang berada pada keadaan Sakit Ringan, ada 30% kemungkinan kembali sehat, 50% tetap sakit ringan, dan 20% menjadi sakit parah. Sementara itu, seseorang yang berada pada kondisi Sakit Parah memiliki peluang 10% pulih menjadi sehat, 20% membaik ke sakit ringan, dan 70% tetap sakit parah. Perubahan antar kondisi ini bisa digambarkan dengan diagram transisi untuk memberikan ilustrasi visual, dan secara matematis direpresentasikan dalam matriks transisi untuk memudahkan analisis lebih lanjut, misalnya menghitung probabilitas kondisi pasien setelah beberapa waktu. Berikut untuk menentukan matriks transisinya dan diagram transisinya

```
#Matriks transisi
P <- matrix(c(
  0.80, 0.15, 0.05, # Sehat -> (S, R, P)
  0.30, 0.50, 0.20, # Ringan -> (S, R, P)
  0.10, 0.20, 0.70 # Parah -> (S, R, P)
), nrow = 3, byrow = TRUE)

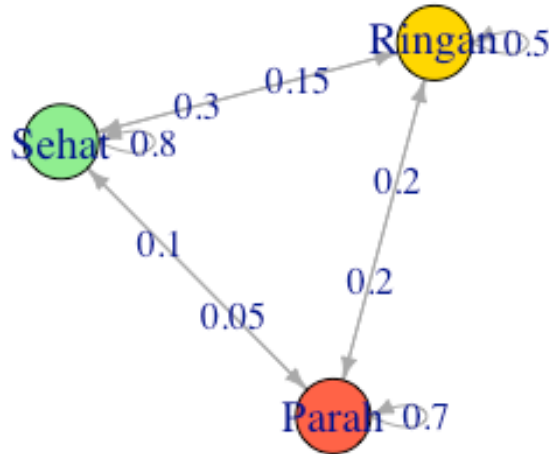
rownames(P) <- colnames(P) <- c("Sehat", "Ringan", "Parah")
P

##           Sehat Ringan Parah
## Sehat      0.8   0.15  0.05
## Ringan     0.3   0.50  0.20
## Parah      0.1   0.20  0.70

# Buat graf transisi
g <- graph_from_adjacency_matrix(P > 0, mode = "directed")
E(g)$label <- as.character(round(c(P), 2)) # Label edge = probabilitas
V(g)$color <- c("lightgreen", "gold", "tomato")
V(g)$size <- 40

plot(g,
      edge.arrow.size = 0.5,
      vertex.label.cex = 1.2,
      main = "Diagram Probabilitas Transisi Kesehatan")
```

Diagram Probabilitas Transisi Kesehatan



Kode R di atas digunakan untuk menggambarkan kasus kesehatan dalam bentuk matriks transisi dan diagram transisi. Pertama, matriks transisi P didefinisikan sebagai sebuah matriks 3×3 yang berisi probabilitas perpindahan antar kondisi kesehatan, yaitu Sehat, Sakit Ringan, dan Sakit Parah. Setiap baris mewakili kondisi saat ini, sementara kolom menunjukkan kemungkinan kondisi berikutnya, misalnya seseorang yang sehat berpeluang 0,80 tetap sehat; 0,15 menjadi sakit ringan; dan 0,05 sakit parah. Setelah matriks dibuat, fungsi `graph_from_adjacency_matrix` dari paket `igraph` digunakan untuk membentuk graf berarah berdasarkan matriks tersebut, di mana setiap edge (panah) diberi label sesuai nilai probabilitas transisi. Warna node dibedakan untuk memperjelas kondisi: hijau untuk sehat, kuning untuk sakit ringan, dan merah untuk sakit parah. Terakhir, fungsi `plot` memvisualisasikan diagram transisi dengan menampilkan node sebagai keadaan dan panah sebagai perpindahan antar keadaan sesuai probabilitasnya. Dengan demikian, kode ini memberikan representasi matematis sekaligus visual mengenai dinamika perpindahan kondisi kesehatan seseorang dalam kerangka rantai Markov.

CONTOH KASUS MENGGUNAKAN DATASET `AirPassengers`

Dataset `AirPassengers` adalah salah satu dataset klasik bawaan R yang berisi jumlah penumpang pesawat internasional per bulan dari Januari 1949 hingga Desember 1960. Data ini berbentuk deret waktu dengan total 144 pengamatan ($12 \text{ tahun} \times 12 \text{ bulan}$), diukur dalam ribuan penumpang. Secara umum, dataset ini menunjukkan tren peningkatan

jumlah penumpang dari tahun ke tahun, yang berarti industri penerbangan terus berkembang selama periode tersebut. Selain tren naik, data juga memperlihatkan adanya pola musiman (seasonality), yaitu jumlah penumpang cenderung lebih tinggi pada bulan-bulan tertentu seperti pertengahan tahun. Karena sifatnya yang sederhana namun kaya informasi, dataset ini sering digunakan sebagai contoh dalam analisis model berbasis rantai Markov.

```
# Data bawaan R
data("AirPassengers")
passengers <- as.numeric(AirPassengers)

# Kategorikan data ke dalam state (Low, Medium, High)
state <- cut(passengers,
             breaks = c(-Inf, 300, 400, Inf),
             labels = c("Low", "Medium", "High"))

# Buat pasangan transisi (bulan sekarang -> bulan berikutnya)
transitions <- table(head(state, -1), tail(state, -1))

# Matriks transisi
P <- prop.table(transitions, 1)
print("Matriks Transisi:")

## [1] "Matriks Transisi:"

print(round(P, 3))

##
##           Low Medium  High
## Low      0.951  0.049 0.000
## Medium   0.088  0.676 0.235
## High     0.000  0.259 0.741

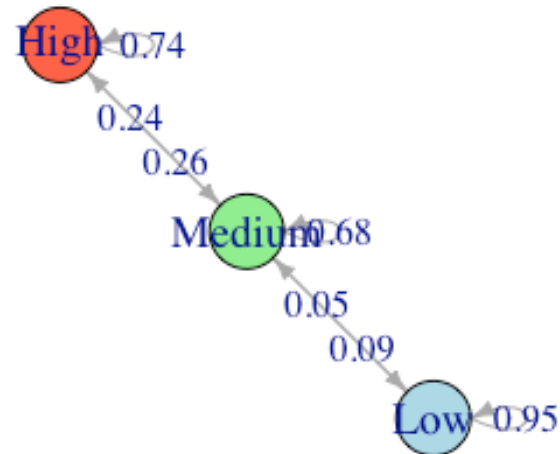
# Visualisasi menggunakan igraph
library(igraph)
g <- graph_from_adjacency_matrix(P > 0, mode = "directed")

# gunakan hanya probabilitas yg > 0 sebagai label edge
E(g)$label <- round(P[P > 0], 2)

V(g)$color <- c("lightblue", "lightgreen", "tomato")
V(g)$size <- 40

plot(g,
     edge.arrow.size = 0.5,
     vertex.label.cex = 1.2,
     main = "Diagram Transisi AirPassengers")
```

Diagram Transisi AirPassengers



Kode tersebut menggunakan dataset AirPassengers untuk membangun model sederhana berbasis rantai Markov. Pertama, data jumlah penumpang pesawat per bulan dikonversi menjadi bentuk numerik, kemudian dikategorikan ke dalam tiga state, yaitu Low (jumlah penumpang < 300), Medium (300–400), dan High (> 400). Setelah itu, dibuat tabel transisi yang mencatat bagaimana state bulan sekarang berpindah ke state bulan berikutnya, dan dari tabel tersebut dihitung matriks transisi P dengan fungsi `prop.table`, sehingga setiap baris merepresentasikan probabilitas berpindah dari suatu state ke state lain. Untuk memvisualisasikan perpindahan ini, paket `igraph` digunakan. Matriks transisi dikonversi menjadi graf berarah (`graph_from_adjacency_matrix`), kemudian setiap edge (panah) diberi label berupa nilai probabilitas transisi yang lebih besar dari nol. Warna node dibedakan untuk memperjelas state: biru muda untuk Low, hijau muda untuk Medium, dan merah untuk High. Akhirnya, fungsi `plot` menampilkan diagram transisi, yang memperlihatkan arah perpindahan antar state beserta peluangnya. Dengan demikian, kode ini tidak hanya menghitung peluang transisi dalam rantai Markov, tetapi juga memberikan representasi visual yang memudahkan pemahaman pola perubahan jumlah penumpang dari waktu ke waktu.