

Modul Praktikum Pemodelan Stokastik

Distribusi Eksponensial dan Proses Poisson

Disusun oleh: Tim Pengampu Mata Kuliah Pemodelan Stokastik

Pertemuan 5

Contents

1	Pendahuluan	3
1.1	Tujuan Pembelajaran	3
2	Distribusi Eksponensial	4
2.1	Definisi	4
2.2	Rata-rata dan Variansi	4
2.3	Sifat Memoryless	4
2.4	Aplikasi	4
3	Proses Poisson	5
3.1	Definisi	5
3.2	Hubungan dengan Distribusi Eksponensial	5
3.3	Sifat-sifat Penting	5
4	Uniform Distribution of Arrivals, Beta, dan Verifikasi Momen	8
4.1	Konsep	8
4.2	PDF Bersyarat	8
4.3	Distribusi Marginal S_k/t	8
4.4	Nilai Harapan dan Variansi	8
4.5	Dua Subinterval	9
5	Ilustrasi Grafik	10
5.1	Kurva PDF Eksponensial	10
5.2	Skema Waktu Kedatangan Proses Poisson	10
6	Contoh	11
6.1	Panggilan Masuk Call Center (Poisson dan Kondisionalitas)	11
6.2	Waktu Kedatangan ke-3	12
6.3	Distribusi Jumlah Kendaraan di Gerbang Tol	13
6.4	Bus di Terminal	13
6.5	Selisih Waktu Kedatangan ke-8 dan ke-9	13
6.6	Bus di Kuartal Ketiga	14
6.7	Studi Kasus: Kedatangan Pasien di IGD Rumah Sakit	15
6.8	Studi Kasus: Permintaan Ride-Hailing di Area Bandara	18

7	Latihan Praktikum	22
7.1	Jumlah Panggilan dan Waktu Kedatangan	22
7.2	Kuartal Lalu Lintas Gerbang Tol	22
7.3	Probabilitas Waktu Kedatangan ke-5	22
7.4	Peristiwa Gabungan pada Dua Subinterval (Tak Bersyarat)	22
7.5	Selisih Dua Statistik Orde (Simulasi + Ekspektasi Teoretis)	22
7.6	Studi Kasus: Hujan Foton pada Sensor CCD Teleskop	23
7.7	Studi Kasus Komprehensif: Kedatangan Pasien Klinik 24/7	23
8	Kesimpulan	25

1 Pendahuluan

Topik kali ini membahas dua komponen utama dalam pemodelan stokastik: **Distribusi Eksponensial** dan **Proses Poisson**. Kedua konsep ini menjadi dasar dalam memahami kejadian acak yang terjadi sepanjang waktu, seperti kedatangan pelanggan, panggilan telepon, kerusakan mesin, dan sebagainya.

Distribusi eksponensial digunakan untuk memodelkan waktu antar-kejadian dalam suatu proses Poisson. Sementara proses Poisson digunakan untuk memodelkan jumlah kejadian acak dalam suatu interval waktu tertentu.

1.1 Tujuan Pembelajaran

1. Menjelaskan keterkaitan proses Poisson, waktu antar kedatangan eksponensial (memoryless), dan uniform distribution of arrivals ketika dikondisikan pada $N(t) = n$.
2. Menurunkan dan menggunakan fakta statistik orde (order statistics) untuk waktu kedatangan (S_1, \dots, S_n) pada $[0, t]$ ketika $N(t) = n$.
3. Menggunakan bentuk Beta untuk distribusi marginal S_k/t serta menghitung

$$\mathbb{E}[S_k|N(t) = n] \text{ dan } \text{Var}(S_k|N(t) = n).$$

4. Mengaplikasikan pembagian interval (binomial splitting)

$$N(s)|N(t) = n \sim \text{Binomial}(n, s/t).$$

5. Melakukan simulasi dan verifikasi numerik di R untuk seluruh konsep di atas.

2 Distribusi Eksponensial

2.1 Definisi

Distribusi eksponensial menggambarkan waktu antar kedatangan (interarrival time) antara dua kejadian berturut-turut pada suatu proses Poisson dengan laju $\lambda > 0$. Fungsi kepadatan peluang (PDF)-nya adalah:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x > 0.$$

Fungsi distribusi kumulatif (CDF):

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0.$$

2.2 Rata-rata dan Variansi

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\lambda}, \quad \text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

2.3 Sifat Memoryless

Distribusi eksponensial adalah satu-satunya distribusi kontinu yang memiliki sifat *memoryless*:

$$\Pr(X > s + t \mid X > s) = \Pr(X > t).$$

Artinya, peluang bahwa waktu tambahan lebih dari t tidak tergantung pada seberapa lama waktu yang sudah berlalu.

2.4 Aplikasi

Distribusi eksponensial digunakan untuk memodelkan:

- Waktu antara kedatangan pelanggan ke loket.
- Waktu antar panggilan di call center.
- Umur komponen elektronik.
- Waktu antar kegagalan sistem.

3 Proses Poisson

3.1 Definisi

Proses Poisson adalah proses stokastik $\{N(t), t \geq 0\}$ yang menghitung jumlah kejadian dalam interval waktu $[0, t]$, dengan sifat:

1. $N(0) = 0$.
2. *Independent increments*: jumlah kejadian di interval yang tidak tumpang tindih saling bebas.
3. *Stationary increments*: distribusi jumlah kejadian hanya bergantung pada panjang interval.

Distribusi jumlah kejadian dalam interval $[0, t]$ adalah:

$$\Pr\{N(t) = n\} = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

3.2 Hubungan dengan Distribusi Eksponensial

Jika X_i menyatakan waktu antar kedatangan, maka $X_i \sim \text{Exp}(\lambda)$ dan $S_k = X_1 + X_2 + \dots + X_k$ adalah waktu kedatangan ke- k . Dengan demikian $N(t) = \max\{n : S_n \leq t\}$.

$$X_i \stackrel{iid}{\sim} \text{Exp}(\lambda), \quad S_k = \sum_{i=1}^k X_i.$$

3.3 Sifat-sifat Penting

- **Superposisi**: Gabungan dua proses Poisson dengan laju λ_1 dan λ_2 adalah proses Poisson dengan laju $\lambda_1 + \lambda_2$.
- **Pemisahan (thinning)**: Jika setiap kejadian dari proses Poisson laju λ dipilih dengan probabilitas p , maka kejadian terpilih membentuk proses Poisson baru dengan laju $p\lambda$ (kejadian sisanya laju $(1 - p)\lambda$).
- **Interarrival time**: Selang waktu antar kedatangan mengikuti distribusi eksponensial.

Fungsi Bantu dan Simulasi Dasar

```
# ==== Paket ====  
suppressWarnings({  
  if (!requireNamespace("ggplot2", quietly = TRUE)) install.  
    ↪ packages("ggplot2")  
})  
library(ggplot2)
```

```
# ==== Fungsi bantu ====
# Simulasi proses Poisson via interarrival ~ Exp(lambda)
simulate_poisson_process <- function(lambda, t_max) {
  # buffer banyak agar cukup panjang
  inter <- rexp(10 * ceiling(lambda * t_max) + 100, rate = lambda
  ↪ )
  times <- cumsum(inter)
  times[times <= t_max]
}
```

```
# Arrival times bersyarat  $N(t)=n$ : ambil  $n$  Uniform(0,t) dan
  ↪ urutkan
arrival_times_conditional <- function(n, t) {
  sort(runif(n, 0, t))
}
```

```
# Momen  $S_k$  /  $N(t)=n$ 
E_Sk <- function(k, n, t) k * t / (n + 1)
Var_Sk <- function(k, n, t) (k * (n - k + 1) * t^2) / ((n + 1)^2
  ↪ * (n + 2))
```

```
# Nilai pdf konstan pada region  $0 < s_1 < \dots < s_n < t$ 
joint_pdf_const <- function(n, t) factorial(n) / (t^n)
```

```
# Binomial splitting simulator
simulate_binomial_split <- function(n, s, t, R = 10000) {
  rbinom(R, size = n, prob = s/t)
}
```

Visualisasi Dasar

```
# PDF eksponensial untuk beberapa lambda
df_exp <- data.frame(x = seq(0, 5, length.out = 501))
df_exp$lam1 <- 1 * exp(-1 * df_exp$x)
df_exp$lam2 <- 2 * exp(-2 * df_exp$x)
```

```
library(tidyr)
df_long <- pivot_longer(df_exp, cols = c("lam1", "lam2"),
  names_to = "lambda", values_to = "fx")
df_long$lambda <- factor(df_long$lambda, levels = c("lam1", "lam2"
  ↪ ),
  labels = c("lambda_1", "lambda_2"))

ggplot(df_long, aes(x = x, y = fx, linetype = lambda)) +
  geom_line(linewidth = 1) + labs(x = "x", y = "f(x)",
  title = "PDF Eksponensial: perbandingan beberapa lambda") +
  ↪ theme_minimal()
# ggsave("pdf_eksponensial.png", width = 7, height = 4)
```

```

# Lintasan proses Poisson\set.seed(1)
arr <- simulate_poisson_process(lambda = 4, t_max = 2)
df_arr <- data.frame(time = arr)

ggplot(df_arr, aes(x = time, y = 0)) +
  geom_point() +
  geom_segment(aes(xend = time, yend = 0.1)) +
  labs(title = "Lintasan_Proses_Poisson_(lambda=4/jam)_s.d._t=2",
        x = "Waktu_(jam)", y = "") + theme_minimal()
# ggsave("lintasan_poisson.png", width = 7, height = 2.5)

```

```

set.seed(1)
lambda <- 4
t_max <- 2
arr <- simulate_poisson_process(lambda, t_max)
length(arr)
head(arr)

dfA <- data.frame(time = arr)
ggplot(dfA, aes(x = time, y = 0)) +
  geom_point() +
  geom_segment(aes(x = time, xend = time, y = 0, yend = 0.1)) +
  labs(title = "Lintasan Proses Poisson (    = 4/jam) s.d. t=2",
        x = "Waktu (jam)", y = "") + theme_minimal()

```

4 Uniform Distribution of Arrivals, Beta, dan Verifikasi Momen

Uniform Distribution of Arrivals

4.1 Konsep

Jika diketahui tepat n kejadian terjadi pada interval waktu $[0, t]$, maka waktu kedatangan (S_1, S_2, \dots, S_n) bersifat acak tetapi *terdistribusi seragam* pada interval tersebut. Secara formal:

$$(S_1, \dots, S_n) \mid N(t) = n \stackrel{d}{=} \text{statistik orde dari i.i.d. Unif}(0, t).$$

4.2 PDF Bersyarat

$$f(s_1, \dots, s_n \mid N(t) = n) = \frac{n!}{t^n}, \quad 0 < s_1 < s_2 < \dots < s_n < t.$$

Order Statistics dan Distribusi Beta

4.3 Distribusi Marginal S_k/t

Dari fakta bahwa (S_1, \dots, S_n) merupakan order statistics dari $\text{Uniform}(0, t)$, maka berlaku:

$$\frac{S_k}{t} \mid N(t) = n \sim \text{Beta}(k, n - k + 1).$$

4.4 Nilai Harapan dan Variansi

$$\mathbb{E}[S_k \mid N(t) = n] = \frac{kt}{n+1}, \quad \text{Var}(S_k \mid N(t) = n) = \frac{k(n-k+1)t^2}{(n+1)^2(n+2)}.$$

Uniform of Arrivals, Beta, dan Verifikasi Momen

```
# Kondisional N(t)=n: arrival times ~ order stats Uniform(0,t)
set.seed(2)
t <- 2; n <- 12
S <- arrival_times_conditional(n, t)
S
joint_pdf_const(n, t)
```

```
# Verifikasi E[S_k / N(t)=n]
set.seed(3)
R <- 10000; k <- 5
mean_Sk_emp <- mean(replicate(R, arrival_times_conditional(n, t)[
  ↪ k]))
c(empirical = mean_Sk_emp, theory = E_Sk(k, n, t))
```

```
c(empirical = mean_Sk_emp, theory = E_Sk(k, n, t))
```

```
# Bentuk Beta untuk S_k/t
set.seed(4)
k <- 3; n <- 12; t <- 1; R <- 20000
Sk_over_t <- replicate(R, arrival_times_conditional(n, t)[k]) / t

df_beta <- data.frame(x = Sk_over_t)
```

```
# Histogram + kurva Beta teoretis
ggplot(df_beta, aes(x = x)) +
  geom_histogram(aes(y = ..density..), bins = 40) +
  stat_function(fun = dbeta, args = list(shape1 = k, shape2 = n -
    ↪ k + 1),
    linewidth = 1) +
  labs(title = sprintf("S_k/t ~ Beta(k=%d, n-k+1=%d)", k, n - k +
    ↪ 1),
    x = "S_k/t", y = "Densitas") + theme_minimal()
# ggsave("beta_hist.png", width = 7, height = 4)
```

Binomial Splitting (Pemisahan Binomial)

4.5 Dua Subinterval

Untuk $0 < s < t$ dan $N(t) = n$ diketahui, jumlah kejadian pada $[0, s]$:

$$N(s) \mid N(t) = n \sim \text{Binomial}\left(n, \frac{s}{t}\right).$$

```
# Binomial splitting: N(s) | N(t)=n ~ Bin(n, s/t)
set.seed(5)
n <- 16; t <- 4; s <- 1; R <- 20000
X <- simulate_binomial_split(n, s, t, R)
c(mean_emp = mean(X), mean_theo = n * (s/t))
c(var_emp = var(X), var_theo = n * (s/t) * (1 - s/t))

# Probabilitas >= 3 kejadian pada kuartal ketiga
1 - pbinom(2, size = n, prob = s/t)
```

5 Ilustrasi Grafik

5.1 Kurva PDF Eksponensial

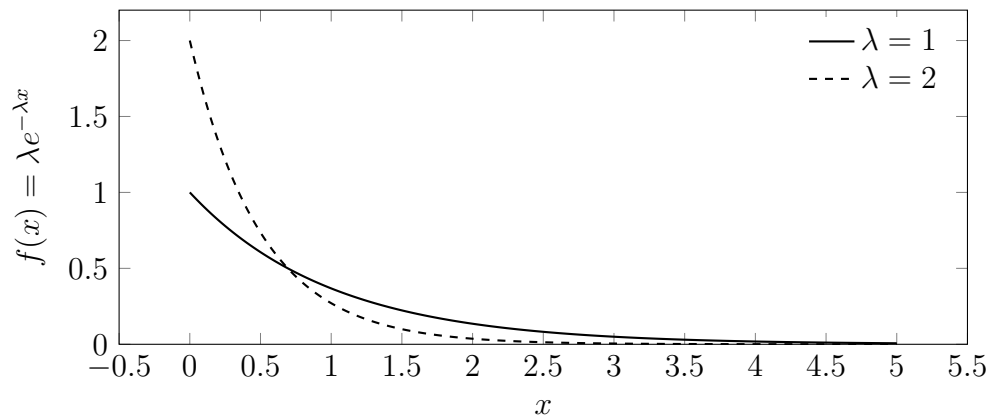


Figure 1: PDF eksponensial untuk beberapa nilai λ .

5.2 Skema Waktu Kedatangan Proses Poisson

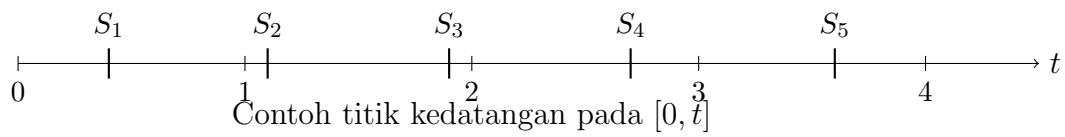


Figure 2: Skema garis waktu proses Poisson dan waktu kedatangan S_k .

6 Contoh

6.1 Panggilan Masuk Call Center (Poisson dan Kondisionalitas)

Sebuah call center menerima panggilan dengan laju rata-rata $\lambda = 5$ panggilan per jam (diasumsikan proses Poisson).

1. Hitung peluang bahwa dalam durasi $t = 2$ jam terjadi tepat 10 panggilan.
2. Diketahui bahwa selama $t = 2$ jam terjadi tepat $n = 12$ panggilan. Dengan menggunakan fakta *Uniform Distribution of Arrivals* (kondisional pada $N(t) = n$):
 - (a) Tentukan nilai harapan waktu kedatangan ke- k untuk $k = 1, 5, 12$, yaitu $\mathbb{E}[S_1]$, $\mathbb{E}[S_5]$, dan $\mathbb{E}[S_{12}]$.
 - (b) Tentukan varians waktu kedatangan pertama $\text{Var}(S_1)$.
 - (c) Tentukan ekspektasi jumlah panggilan pada jam pertama ($[0, 1]$ jam) dari total $n = 12$ panggilan pada $[0, 2]$ jam.

Penyelesaian.

1. Karena $N(t) \sim \text{Poisson}(\lambda t)$, maka

$$\Pr\{N(2) = 10\} = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{10}}{10!} = e^{-10} \frac{10^{10}}{10!}.$$

Interpretasi. Peluang terjadinya tepat 10 panggilan dalam 2 jam adalah sekitar nilai dari $e^{-10} \frac{10^{10}}{10!}$, sesuai karakteristik proses Poisson dengan rata-rata $\lambda t = 10$.

2. Kondisional pada $N(t) = n$, waktu kedatangan terurut (S_1, \dots, S_n) adalah *order statistics* dari n sampel i.i.d. $\text{Uniform}(0, t)$. Maka berlaku:

$$\mathbb{E}[S_k | N(t) = n] = \frac{k t}{n+1}, \quad \text{Var}(S_k | N(t) = n) = \frac{k(n-k+1)}{(n+1)^2(n+2)} t^2.$$

Dengan $t = 2$ dan $n = 12$ diperoleh:

$$\mathbb{E}[S_1] = \frac{1 \cdot 2}{13}, \quad \mathbb{E}[S_5] = \frac{5 \cdot 2}{13}, \quad \mathbb{E}[S_{12}] = \frac{12 \cdot 2}{13}.$$

Varians waktu kedatangan pertama:

$$\text{Var}(S_1) = \frac{1 \cdot (12 - 1 + 1)}{(13)^2(14)} (2)^2 \approx 0.0203 \text{ jam}^2.$$

Interpretasi. Rata-rata waktu kedatangan ke-1, ke-5, dan ke-12 masing-masing sekitar $\frac{2}{13}$ jam, $\frac{10}{13}$ jam, dan $\frac{24}{13}$ jam setelah awal pengamatan. Varians waktu kedatangan pertama yang kecil (0.0203 jam^2) menunjukkan penyebaran waktu yang relatif sempit di sekitar rata-rata.

3. (*Binomial splitting*). Diketahui $N(2) = 12$. Untuk interval $[0, 1]$ (panjang $s = 1$) di dalam $[0, 2]$ (panjang $t = 2$),

$$N(1) | N(2) = 12 \sim \text{Binomial}\left(12, \frac{s}{t}\right) = \text{Binomial}\left(12, \frac{1}{2}\right),$$

sehingga $\mathbb{E}[N(1) | N(2) = 12] = 12 \cdot \frac{1}{2} = 6$ panggilan.

Interpretasi. Ekspektasi 6 panggilan pada jam pertama menggambarkan sifat simetris dari pembagian waktu (*binomial splitting*), karena interval $[0, 1]$ merupakan separuh dari total durasi pengamatan $[0, 2]$.

```
# Parameter
lambda <- 5; t <- 2
```

```
# (1) Probabilitas  $N(2) = 10$ 
p_10 <- dpois(10, lambda * t) # equals  $\exp(-10) * 10^{10} / 10!$ 
```

```
# (2) Kondisional  $N(2) = 12$ 
n <- 12
E_Sk <- function(k, n, t) k * t / (n + 1)
Var_Sk <- function(k, n, t) (k * (n - k + 1) * t^2) / ((n + 1)^2
  ↪ * (n + 2))

c(E_S1 = E_Sk(1, n, t),
  E_S5 = E_Sk(5, n, t),
  E_S12 = E_Sk(12, n, t))

Var_Sk(1, n, t)
```

```
# (3) Ekspektasi jumlah panggilan pada jam pertama (binomial
  ↪ splitting)
#  $N(1) \mid N(2)=n \sim \text{Bin}(n, s/t)$  dengan  $s=1, t=2 \rightarrow E = n*(1/t)$ 
n * (1 / t)
```

Secara keseluruhan, soal ini mengilustrasikan keterkaitan antara tiga konsep utama: distribusi Poisson untuk jumlah kejadian, distribusi eksponensial untuk waktu antar kedatangan, dan distribusi seragam (serta binomial) ketika kondisi jumlah kejadian diketahui.

6.2 Waktu Kedatangan ke-3

Sebuah call center menerima panggilan telepon yang mengikuti proses Poisson dengan laju konstan. Dalam periode 3 jam, tercatat tepat $n = 5$ panggilan masuk. Tentukan **ekspektasi waktu kedatangan panggilan ke-3**, yaitu $\mathbb{E}[S_3 \mid N(3) = 5]$.

Penyelesaian. Diketahui bahwa waktu kedatangan panggilan $(S_1, S_2, S_3, S_4, S_5)$ merupakan *order statistics* dari lima variabel acak Uniform(0, 3) karena dikondisikan pada $N(3) = 5$. Maka berlaku rumus umum:

$$\mathbb{E}[S_k \mid N(t) = n] = \frac{k t}{n + 1}.$$

Substitusi $k = 3$, $n = 5$, dan $t = 3$ menghasilkan:

$$\mathbb{E}[S_3 \mid N(3) = 5] = \frac{3 \times 3}{6} = 1.5 \text{ jam.}$$

```
# Ekspektasi waktu kedatangan ke-3, dengan  $N(3)=5$ 
E_Sk(3, 5, 3)
```

Interpretasi. Rata-rata waktu kedatangan panggilan ke-3 adalah sekitar 1,5 jam setelah pengamatan dimulai. Ini berarti, secara rata-rata, panggilan ketiga terjadi tepat di pertengahan interval 3 jam, sesuai dengan sifat distribusi seragam bersyarat pada $N(3) = 5$.

6.3 Distribusi Jumlah Kendaraan di Gerbang Tol

Sebuah gerbang tol mencatat kedatangan kendaraan sebagai proses Poisson dengan laju konstan. Dalam periode 30 menit tercatat tepat $n = 15$ kendaraan melewati gerbang tol tersebut. Tentukan peluang bahwa sekurang-kurangnya 5 kendaraan melewati gerbang tol dalam 12 menit pertama.

Penyelesaian. Karena waktu kedatangan kendaraan bersifat seragam ketika kondisikan pada $N(30) = 15$, maka jumlah kendaraan yang melewati gerbang tol dalam $[0, 12]$ menit mengikuti distribusi binomial:

$$N(12) \mid N(30) = 15 \sim \text{Binomial}\left(15, \frac{12}{30}\right).$$

Peluang sekurang-kurangnya 5 kendaraan adalah:

$$\Pr\{N(12) \geq 5\} = 1 - \Pr\{N(12) \leq 4\} = 1 - F_{\text{textBin}}(4; n = 15, p = 12/30).$$

```
# Jumlah kendaraan minimum 5 dalam 12 menit pertama
1 - pbinom(4, size = 15, prob = 12/30)
```

Interpretasi. Model ini menunjukkan bagaimana konsep *binomial splitting* digunakan untuk menghitung probabilitas jumlah kejadian di subinterval tertentu, ketika total kejadian pada interval penuh diketahui. Dalam konteks ini, peluang tersebut mencerminkan kemungkinan terjadinya sedikitnya 5 kendaraan dalam 12 menit pertama dari total 15 kendaraan dalam 30 menit.

6.4 Bus di Terminal

Selama 4 jam (06:00–10:00) tiba 16 bus. Ekspektasi bus ke-6 tiba pada $\mathbb{E}[S_6] = \frac{6}{17} \times 4 = 1.41$ jam setelah 06:00.

```
Ekspektasi bus ke-6 (n=16, t=4)
E_Sk(6, 16, 4)
```

6.5 Selisih Waktu Kedatangan ke-8 dan ke-9

Dalam sebuah terminal bus, selama interval waktu 4 jam (pukul 06.00–10.00) tercatat tepat $n = 16$ kedatangan bus. Waktu kedatangan bus mengikuti proses Poisson homogen dengan laju konstan.

Tentukan nilai harapan dan varians dari selisih waktu kedatangan antara bus ke-8 dan ke-9, yaitu $W = S_9 - S_8$, di mana S_k menyatakan waktu kedatangan bus ke- k .

Penyelesaian. Diketahui bahwa $(S_1, S_2, \dots, S_{16}) \mid N(4) = 16$ merupakan *order statistics* dari 16 variabel acak $\text{Uniform}(0, 4)$. Maka waktu kedatangan ke-8 dan ke-9 masing-masing berdistribusi sebagai:

$$\frac{S_8}{4} \sim \text{Beta}(8, 9), \quad \frac{S_9}{4} \sim \text{Beta}(9, 8).$$

Namun secara analitik, kovarians antara dua statistik orde berurutan cukup kompleks. Oleh karena itu, pendekatan *simulasi Monte Carlo* digunakan untuk memperkirakan nilai harapan dan varians dari $W = S_9 - S_8$.

```
set.seed(77)
R <- 50000
sim_W <- replicate(R, {
  S <- arrival_times_conditional(16, 4) # waktu kedatangan
  # terurut
  S[9] - S[8] # selisih antar
  # kedatangan
})
c(E_emp = mean(sim_W), Var_emp = var(sim_W))
```

Interpretasi. Hasil simulasi memberikan nilai ekspektasi $\mathbb{E}[W]$ yang mendekati $t/(n+1) = 4/17 \approx 0.235$ jam, sesuai dengan selang rata-rata antar bus. Variansi empiris menunjukkan tingkat penyebaran waktu antar dua kedatangan yang berurutan. Nilai kecil dari varians menunjukkan bahwa jarak antar dua bus berurutan relatif konsisten di sekitar nilai rata-rata.

6.6 Bus di Kuartal Ketiga

Pada interval waktu 4 jam (06.00–10.00) tercatat tepat $n = 16$ kedatangan bus. Interval dibagi menjadi empat kuartal berdurasi sama:

$$[06:00, 07:00], [07:00, 08:00], [08:00, 09:00], [09:00, 10:00].$$

Tentukan peluang bahwa **setidaknya 3 bus** tiba pada *kuartal ketiga*, yaitu $[08:00, 09:00]$.

Penyelesaian. Dengan *uniform distribution of arrivals* bersyarat pada $N(4) = 16$, banyaknya bus pada tiap kuartal sama panjang mengikuti *binomial splitting*. Untuk satu kuartal dengan panjang 1 jam dari total $t = 4$ jam, peluang sebuah bus jatuh pada kuartal tersebut adalah $p = 1/4$. Maka

$$X \equiv N([08:00, 09:00]) \mid N(4) = 16 \sim \text{Binomial}\left(16, \frac{1}{4}\right).$$

Yang diminta:

$$\Pr\{X \geq 3\} = 1 - \Pr\{X \leq 2\} = 1 - F_{\text{Bin}}(2; n = 16, p = 1/4).$$

```
1 - pbinom(2, size = 16, prob = 1/4)
```

Interpretasi. Karena total 16 bus tersebar merata secara kondisional pada empat kuartal berdurasi sama, ekspektasi jumlah bus per kuartal adalah $16 \times \frac{1}{4} = 4$. Nilai peluang di atas menggambarkan kemungkinan bahwa realisasi pada kuartal ketiga tidak kurang dari tiga bus (mencakup 3, 4, ..., 16).

6.7 Studi Kasus: Kedatangan Pasien di IGD Rumah Sakit

Sebuah Instalasi Gawat Darurat (IGD) rumah sakit memodelkan kedatangan pasien sebagai proses Poisson. Pada rentang waktu pengamatan $t = 3$ jam (mis. 08.00–11.00), laju kedatangan rata-rata historis adalah $\lambda = 10$ pasien per jam.

Pada suatu hari, supervisor mencatat bahwa *tepat* $n = 30$ pasien tiba dalam 3 jam tersebut (yaitu $N(3) = 30$). Gunakan fakta-fakta *uniform distribution of arrivals* dan *binomial splitting* untuk menjawab pertanyaan berikut:

1. Berapa peluang bahwa **setidaknya 12 pasien** tiba pada jam pertama $[0, 1]$ (08.00–09.00), dengan syarat $N(3) = 30$?
2. Berapakah **ekspektasi waktu kedatangan pasien ke-10** $\mathbb{E}[S_{10} \mid N(3) = 30]$ (dalam jam sejak 08.00)?
3. Berapakah **varians waktu kedatangan pasien pertama** $\text{Var}(S_1 \mid N(3) = 30)$?
4. Buat **visualisasi** untuk:
 - (a) Histogram simulasi S_{10}/t dengan kurva teoretis Beta yang sesuai (*order statistics* bersyarat).
 - (b) *PMF* binomial untuk $N(1) \mid N(3) = 30$ (jumlah pasien jam pertama), serta tandai probabilitas $\Pr\{N(1) \geq 12\}$.

Penyelesaian.

1. (**Binomial splitting**) Karena $N(3) = 30$, jumlah pasien pada $[0, 1]$ adalah

$$N(1) \mid N(3) = 30 \sim \text{Binomial}\left(30, \frac{1}{3}\right).$$

Maka

$$\Pr\{N(1) \geq 12 \mid N(3) = 30\} = 1 - \Pr\{N(1) \leq 11\}.$$

2. (**Ekspektasi statistik orde**) Untuk S_k (waktu pasien ke- k) ketika $N(t) = n$:

$$\mathbb{E}[S_k \mid N(t) = n] = \frac{k t}{n + 1}.$$

Dengan $k = 10$, $t = 3$, $n = 30$:

$$\mathbb{E}[S_{10} \mid N(3) = 30] = \frac{10 \cdot 3}{31} \approx 0.9677 \text{ jam.}$$

3. (Varians statistik orde)

$$\text{Var}(S_k \mid N(t) = n) = \frac{k(n-k+1)}{(n+1)^2(n+2)} t^2.$$

Untuk $k = 1$, $t = 3$, $n = 30$:

$$\text{Var}(S_1 \mid N(3) = 30) = \frac{1 \cdot (30 - 1 + 1)}{(31)^2 \cdot 32} (3)^2 = \frac{30}{31^2 \cdot 32} \cdot 9 \approx 0.0088 \text{ jam}^2.$$

4. (Visualisasi)

- (a) Karena $(S_1, \dots, S_{30}) \mid N(3) = 30$ adalah *order statistics* dari i.i.d. $\text{Uniform}(0, 3)$, maka

$$\frac{S_{10}}{3} \mid N(3) = 30 \sim \text{Beta}(10, 21).$$

Histogram simulasi $\frac{S_{10}}{3}$ akan cocok dengan kurva $\text{Beta}(10, 21)$. (Lihat Figure 3)

- (b) *PMF* $N(1) \mid N(3) = 30$ mengikuti $\text{Binomial}(30, \frac{1}{3})$; plot *bar* dari $r = 0, \dots, 30$ beserta area (atau batang) untuk $r \geq 12$. (Lihat Figure 4)

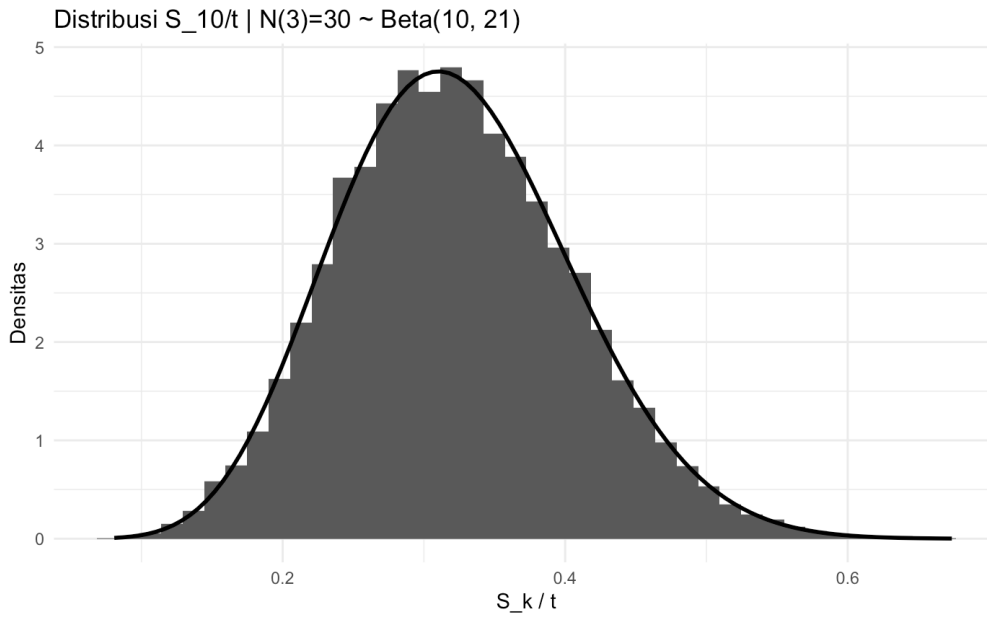


Figure 3: Histogram simulasi $S_{10}/3$ (abu-abu) dengan overlay kurva $\text{Beta}(10, 21)$ (garis).

Interpretasi.

- Nilai $\Pr\{N(1) \geq 12 \mid N(3) = 30\}$ menggambarkan peluang *lonjakan beban* pada jam pertama jika total 3 jam berisi 30 pasien. Angka ini membantu perencanaan jumlah tenaga medis pada awal shift.
- Nilai $\mathbb{E}[S_{10}] \approx 0.97$ jam menyiratkan, rata-rata pasien ke-10 datang sekitar pukul 08.58 jika pengamatan dimulai pukul 08.00 (karena 0.97 jam \approx 58 menit).

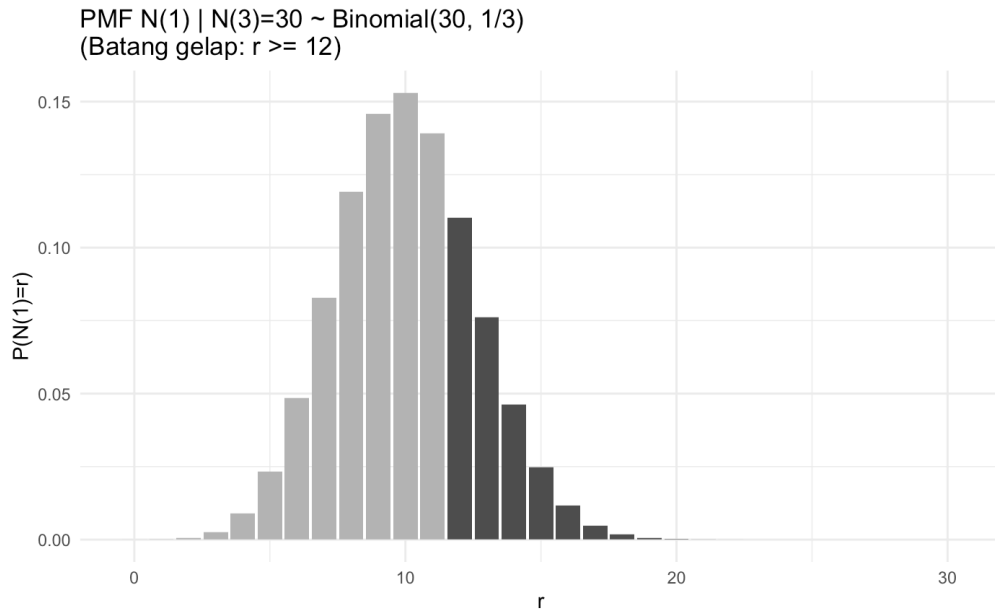


Figure 4: PMF $N(1) \mid N(3) = 30 \sim \text{Binomial}(30, 1/3)$. Batang gelap menandai $r \geq 12$.

- Varians kecil pada S_1 menunjukkan waktu kedatangan pasien pertama relatif tidak terlalu menyebar ketika jumlah total pasien telah diketahui.

```
# ---- Helper sesuai modul ----
arrival_times_conditional <- function(n, t) sort(runif(n, 0, t))

# Parameter kasus
t <- 3    # jam
n <- 30   # diketahui N(3)=30
k <- 10   # pasien ke-10

# (A) Histogram simulasi  $S_k/t$  dengan overlay  $\text{Beta}(k, n-k+1)$ 
set.seed(123)
R <- 20000
Sk_over_t <- replicate(R, arrival_times_conditional(n, t)[k]) / t

df_beta <- data.frame(x = Sk_over_t)

p1 <- ggplot(df_beta, aes(x = x)) +
  geom_histogram(aes(y = ..density..), bins = 40) +
  stat_function(fun = dbeta, args = list(shape1 = k, shape2 = n -
    ↪ k + 1),
               linewidth = 1) +
  labs(title = sprintf("Distribusi  $S_{\%d}/t \mid N(\%.0f)=\%.0f \sim \text{Beta}(\%$ 
    ↪  $d, \%d)$ ",
                      k, t, n, k, n-k+1),
       x = "S_k/ $t$ ", y = "Densitas") +
  theme_minimal()

ggsave("igd_beta_hist.png", p1, width = 7, height = 4, dpi = 150)
```

```
p1
```

```
# (B) PMF Binomial untuk  $N(1) \mid N(3)=30$ 
size <- n
prob <- 1/3
rvals <- 0:size
pmf <- dbinom(rvals, size = size, prob = prob)

df_bin <- data.frame(r = rvals, pmf = pmf,
                    ge12 = rvals >= 12)

p2 <- ggplot(df_bin, aes(x = r, y = pmf, fill = ge12)) +
  geom_col() +
  scale_fill_manual(values = c("grey70", "grey30"),
                    guide = "none") +
  labs(title = "PMF  $N(1) \mid N(3)=30 \sim \text{Binomial}(30, 1/3)$ \n(Batang_\n\rightarrow gelap:  $r \geq 12$ )",
        x = "r", y = "P(N(1)=r)") +
  theme_minimal()

ggsave("igd_binom_pmf.png", p2, width = 7, height = 4, dpi = 150)
p2
```

```
# Nilai peluang yang diminta:
p_ge_12 <- 1 - pbinom(11, size = n, prob = 1/3)
p_ge_12
```

6.8 Studi Kasus: Permintaan Ride-Hailing di Area Bandara

Layanan ride-hailing di area bandara dimodelkan sebagai proses Poisson homogen. Pada rentang pengamatan $t = 4$ jam (mis. 10.00–14.00), laju historis rata-rata adalah $\lambda = 8$ permintaan per jam.

Pada suatu hari, teramati **tepat** $n = 32$ permintaan ride-hailing dalam 4 jam tersebut (yaitu $N(4) = 32$). Gunakan *uniform distribution of arrivals* dan *binomial splitting* untuk menjawab:

1. Berapa peluang bahwa **sekurang-kurangnya 10 permintaan** terjadi pada jam pertama $[0, 1]$ (10.00–11.00), dengan syarat $N(4) = 32$?
2. Berapa **ekspektasi waktu permintaan ke-15** $\mathbb{E}[S_{15} \mid N(4) = 32]$ (jam sejak pukul 10.00)?
3. Berapa **varians waktu permintaan pertama** $\text{Var}(S_1 \mid N(4) = 32)$?
4. Buat **visualisasi**:
 - (a) Histogram simulasi S_{15}/t dengan overlay kurva Beta teoretis.
 - (b) *PMF* binomial untuk $N(1) \mid N(4) = 32$ (jumlah permintaan jam pertama) dan tandai $\Pr\{N(1) \geq 10\}$.

Penyelesaian.

1. (**Binomial splitting**) Kondisional pada $N(4) = 32$, jumlah kejadian di $[0, 1]$ mengikuti

$$N(1) \mid N(4) = 32 \sim \text{Binomial}\left(32, \frac{1}{4}\right),$$

sehingga

$$\Pr\{N(1) \geq 10 \mid N(4) = 32\} = 1 - \Pr\{N(1) \leq 9\}.$$

2. (**Ekspektasi statistik orde**) Untuk S_k (waktu kedatangan ke- k) dengan $N(t) = n$,

$$\mathbb{E}[S_k \mid N(t) = n] = \frac{k t}{n + 1}.$$

Dengan $k = 15$, $t = 4$, $n = 32$:

$$\mathbb{E}[S_{15} \mid N(4) = 32] = \frac{15 \cdot 4}{33} = \frac{60}{33} \approx 1.8182 \text{ jam}.$$

3. (**Varians statistik orde**)

$$\text{Var}(S_k \mid N(t) = n) = \frac{k(n - k + 1)}{(n + 1)^2(n + 2)} t^2.$$

Untuk $k = 1$, $t = 4$, $n = 32$:

$$\text{Var}(S_1 \mid N(4) = 32) = \frac{1 \cdot (32 - 1 + 1)}{(33)^2 \cdot 34} (4)^2 = \frac{32}{33^2 \cdot 34} \cdot 16 \approx 0.0138 \text{ jam}^2.$$

4. (**Visualisasi**)

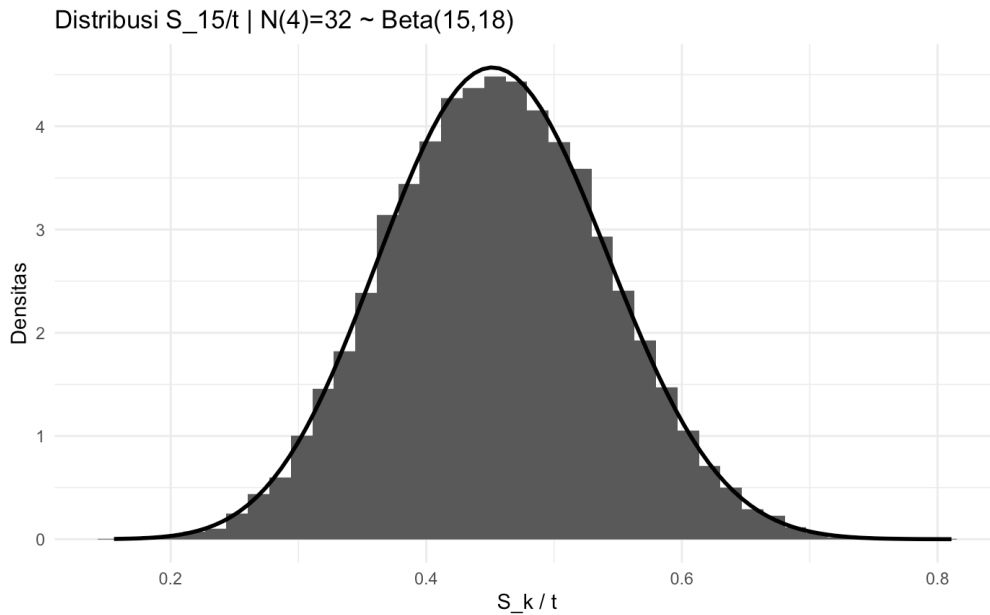


Figure 5: Histogram simulasi $S_{15}/4$ dengan overlay Beta(15, 18).

(a) Karena $(S_1, \dots, S_{32}) \mid N(4) = 32$ adalah *order statistics* $\text{Uniform}(0, 4)$, maka

$$\frac{S_{15}}{4} \mid N(4) = 32 \sim \text{Beta}(15, 18).$$

Histogram simulasi $\frac{S_{15}}{4}$ dibandingkan dengan kurva $\text{Beta}(15, 18)$. (Lihat Figure 5)

(b) $N(1) \mid N(4) = 32 \sim \text{Binomial}(32, \frac{1}{4})$. Plot *bar* $r = 0, \dots, 32$ dan tandai area untuk $r \geq 10$. (Lihat Figure 6)

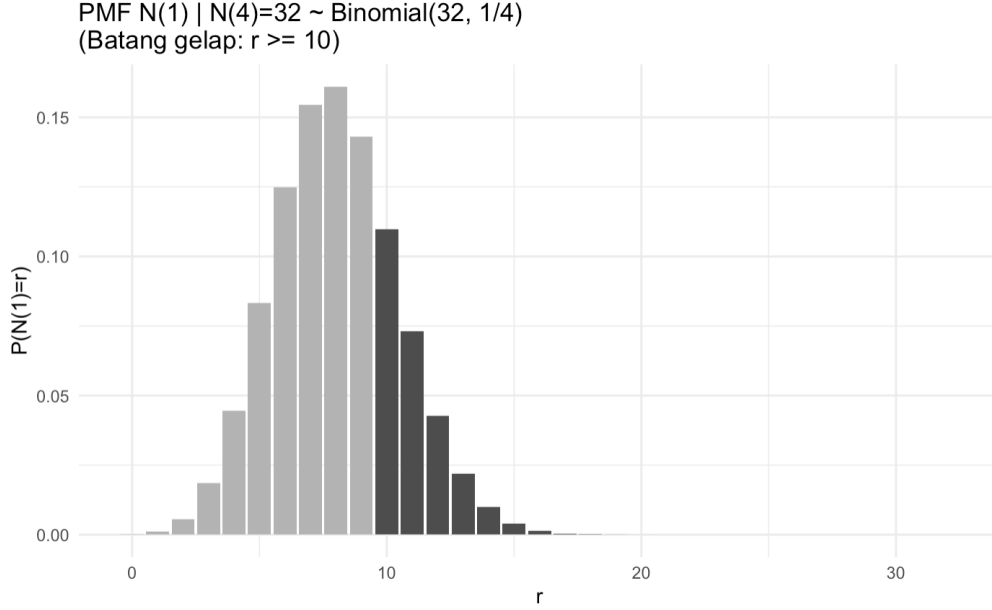


Figure 6: PMF $N(1) \mid N(4) = 32 \sim \text{Binomial}(32, 1/4)$. Batang gelap menandai $r \geq 10$.

Interpretasi.

- Nilai $\Pr\{N(1) \geq 10 \mid N(4) = 32\}$ memberi gambaran peluang *rush demand* di awal periode, penting untuk penjadwalan pengemudi.
- $\mathbb{E}[S_{15}] \approx 1.82$ jam \Rightarrow rata-rata permintaan ke-15 muncul sekitar pukul 11.49 (dari start 10.00).
- Varians kecil pada S_1 menunjukkan ketidakpastian waktu permintaan pertama relatif rendah ketika total permintaan sudah diketahui.

```
# Helper: arrival times bersyarat  $N(t)=n$  (order stats  $\text{Uniform}(0, t$ 
   $\rightarrow$  ))
arrival_times_conditional <- function(n, t) sort(runif(n, 0, t))

# Parameter kasus
t <- 4
n <- 32
k <- 15
```

```

# (A) Histogram simulasi  $S_k/t$  dengan overlay  $Beta(k, n-k+1)$ 
set.seed(202)
R <- 20000
Sk_over_t <- replicate(R, arrival_times_conditional(n, t)[k]) / t
df_beta <- data.frame(x = Sk_over_t)

p1 <- ggplot(df_beta, aes(x = x)) +
  geom_histogram(aes(y = ..density..), bins = 40) +
  stat_function(fun = dbeta, args = list(shape1 = k, shape2 = n -
    ↪ k + 1),
    linewidth = 1) +
  labs(title = sprintf("Distribusi  $S_{%d}/t|N(%.0f)=%.0f \sim Beta($ 
    ↪  $d, %d)$ ",
    k, t, n, k, n-k+1),
    x = " $S_k/t$ ", y = "Densitas") +
  theme_minimal()

ggsave("ride_beta_hist.png", p1, width = 7, height = 4, dpi =
  ↪ 150)
p1

```

```

# (B) PMF Binomial untuk  $N(1) \mid N(4)=32$ 
size <- n
prob <- 1/4
rvals <- 0:size
pmf <- dbinom(rvals, size = size, prob = prob)
df_bin <- data.frame(r = rvals, pmf = pmf, ge10 = rvals >= 10)

p2 <- ggplot(df_bin, aes(x = r, y = pmf, fill = ge10)) +
  geom_col() +
  scale_fill_manual(values = c("grey70", "grey30"), guide = "none
    ↪ ") +
  labs(title = "PMF  $N(1) \mid N(4)=32 \sim Binomial(32, 1/4) \setminus$ 
    ↪  $(Batang \setminus$ 
    ↪  $gelap: r \geq 10)$ ",
    x = "r", y = " $P(N(1)=r)$ ") +
  theme_minimal()

ggsave("ride_binom_pmf.png", p2, width = 7, height = 4, dpi =
  ↪ 150)
p2

```

```

# Nilai peluang yang diminta:
p_ge_10 <- 1 - pbinom(9, size = n, prob = 1/4)
p_ge_10

```

7 Latihan Praktikum

Kode R Pertolongan

```
# Helper functions
E_Sk <- function(k, n, t) k * t / (n + 1)
Var_Sk <- function(k, n, t) (k * (n - k + 1) * t^2) / ((n + 1)^2
  ↪ * (n + 2))
arrival_times_conditional <- function(n, t) sort(runif(n, 0, t))
```

7.1 Jumlah Panggilan dan Waktu Kedatangan

Sebuah call center memiliki laju kedatangan panggilan konstan $\lambda = 7$ panggilan/jam. Pertimbangkan durasi $t = 1.5$ jam.

1. Hitung $\Pr\{8 \leq N(1.5) \leq 12\}$.
2. Diketahui $N(1.5) = 9$. Hitung $\mathbb{E}[S_4 \mid N(1.5) = 9]$ dan $\text{Var}(S_4 \mid N(1.5) = 9)$.

7.2 Kuartal Lalu Lintas Gerbang Tol

Dalam interval $t = 2$ jam, tercatat tepat $n = 20$ kendaraan melewati gerbang tol (yakni $N(2) = 20$). Bagi interval menjadi empat kuartal berdurasi 0.5 jam.

1. Hitung $\Pr\{X \geq 6\}$ untuk jumlah kendaraan X pada kuartal ketiga (jam ke-1 s.d. 1.5).
2. Berapa ekspektasi jumlah kendaraan pada *setiap* kuartal?

7.3 Probabilitas Waktu Kedatangan ke-5

Dalam 3 jam tercatat tepat $n = 15$ panggilan ($N(3) = 15$). Tentukan:

1. $\Pr\{S_5 \leq 1.2 \text{ jam} \mid N(3) = 15\}$.
2. $\mathbb{E}[S_5 \mid N(3) = 15]$ dan $\text{Var}(S_5 \mid N(3) = 15)$.

7.4 Peristiwa Gabungan pada Dua Subinterval (Tak Bersyarat)

Narasi. Kedatangan pelanggan mengikuti proses Poisson dengan laju $\lambda = 4$ /jam. Hitung

$$\Pr\{N(0.5) \geq 3 \text{ dan } N(2) - N(0.5) \leq 5\}.$$

7.5 Selisih Dua Statistik Orde (Simulasi + Ekspektasi Teoretis)

Narasi. Dalam 4 jam tercatat tepat $n = 18$ kedatangan bus ($N(4) = 18$). Definisikan $W = S_{10} - S_8$.

1. Hitung $\mathbb{E}[W]$ secara teoretis.
2. Estimasi $\text{Var}(W)$ melalui simulasi Monte Carlo.

7.6 Studi Kasus: Hujan Foton pada Sensor CCD Teleskop

Dalam pengamatan bintang menggunakan teleskop, foton yang mencapai sensor CCD sering dimodelkan sebagai proses Poisson homogen. Selama *ekspose* $t = 1$ jam, laju kedatangan rata-rata foton dari sebuah target terang diasumsikan $\lambda = 600$ foton/jam (rata-rata 10 foton/menit).

Pada suatu malam, tercatat **tepat** $n = 600$ foton selama 1 jam (yakni $N(1) = 600$). Gunakan *uniform distribution of arrivals* dan *binomial splitting* untuk menjawab:

1. Berapa peluang bahwa **setidaknya 140 foton** jatuh pada 12 menit pertama ($[0, 0.2]$ jam) jika $N(1) = 600$?
2. Berapa **ekspektasi waktu kedatangan foton ke-100** $\mathbb{E}[S_{100} \mid N(1) = 600]$ (dalam jam sejak awal ekspose)?
3. Berapa **varians waktu foton pertama** $\text{Var}(S_1 \mid N(1) = 600)$?
4. Buat **visualisasi**:
 - (a) Histogram simulasi S_{100}/t dengan overlay kurva Beta teoretis.
 - (b) *PMF* binomial untuk $N(0.2) \mid N(1) = 600$ dan tandai $\Pr\{N(0.2) \geq 140\}$.

7.7 Studi Kasus Komprehensif: Kedatangan Pasien Klinik 24/7

Sebuah klinik 24/7 memodelkan kedatangan pasien sebagai *proses Poisson* dengan laju $\lambda = 6$ pasien per jam. Pada suatu hari, klinik mengamati periode $t = 3$ jam (mis. 08.00–11.00). Jawablah pertanyaan berikut.

(A) Komponen Tak Bersyarat (Poisson dan Eksponensial)

- (A1) Hitung $\Pr\{15 \leq N(3) \leq 20\}$.
- (A2) Misalkan X adalah waktu antar-kedatangan (interarrival). Hitung $\Pr\{X > 0.25 \text{ jam}\}$ dan jelaskan kaitannya dengan sifat *memoryless*.

(B) Kondisional $N(3) = 18$ (Uniform of Arrivals & Order Statistics)

Diketahui **tepat** $n = 18$ pasien datang dalam 3 jam (yaitu $N(3) = 18$).

- (B1) Tunjukkan bahwa (S_1, \dots, S_{18}) adalah *order statistics* dari i.i.d. $\text{Uniform}(0, 3)$ dan tuliskan pdf bersama $f(s_1, \dots, s_{18} \mid N(3) = 18)$.
- (B2) Hitung $\mathbb{E}[S_5 \mid N(3) = 18]$ dan $\text{Var}(S_5 \mid N(3) = 18)$.
- (B3) Hitung $\Pr\{S_5 \leq 1.2 \text{ jam} \mid N(3) = 18\}$.

(C) Pembagian Subinterval (Binomial & Multinomial Splitting)

Masih dengan kondisi $N(3) = 18$, bagi interval $[0, 3]$ sebagai berikut:

Kuartal jam:

$$[0, 1], (1, 2], (2, 3],$$

dan pembagian tidak sama:

$$A = [0, 0.5], B = (0.5, 2], C = (2, 3].$$

(C1) Untuk kuartal kedua $(1, 2]$, hitung $\Pr\{X_2 \geq 7 \mid N(3) = 18\}$.

(C2) Untuk (A, B, C) , nyatakan $(N_A, N_B, N_C) \mid N(3) = 18$ dan tuliskan pmf-nya. Hitung

$$\Pr\{N_A = 3, 10 \leq N_B \leq 12, N_C \geq 3 \mid N(3) = 18\}.$$

(Berikan bentuk penjumlahan; evaluasi numerik diperkenankan.)

(D) Selisih Statistik Orde (Simulasi + Ekspektasi Teoretis)

Definisikan $W = S_{10} - S_8$ (selisih waktu kedatangan pasien ke-10 dan ke-8).

(D1) Hitung $\mathbb{E}[W \mid N(3) = 18]$ secara teoretis.

(D2) Estimasi $\text{Var}(W \mid N(3) = 18)$ melalui simulasi Monte Carlo dan bandingkan nilai $\mathbb{E}[W]$ empiris dengan teoretis.

8 Kesimpulan

Distribusi eksponensial dan proses Poisson merupakan fondasi utama dalam pemodelan stokastik. Distribusi eksponensial menjelaskan waktu antar kejadian, sementara proses Poisson menjelaskan jumlah kejadian. Kombinasi keduanya melahirkan konsep lanjutan seperti uniform distribution of arrivals, order statistics (Beta), dan binomial/multinomial splitting, dengan aplikasi luas pada antrian, reliabilitas, dan telekomunikasi.