Modul Praktikum Pemodelan Stokastik

Generalizations of the Poisson Process

Disusun oleh: Tim Pengampu Mata Kuliah Pemodelan Stokastik

Pertemuan 6

Contents

1 Pendahuluan

Proses Poisson merupakan model dasar yang banyak digunakan dalam analisis proses stokastik. Namun, dalam praktik nyata, asumsi bahwa laju kedatangan (λ) bersifat konstan sering kali tidak realistis. Untuk memodelkan fenomena nyata yang lebih kompleks, modul ini membahas tiga bentuk perluasan (*generalizations*) dari proses Poisson, yaitu:

1. **Nonhomogeneous Poisson Process (NHPP):** laju kedatangan $\lambda(t)$ bergantung pada waktu.
2. **Compound Poisson Process (CPP):** setiap kedatangan membawa besaran acak tambahan (*claim size*, *reward*, atau *shock*).
3. **Conditional / Mixed Poisson Process (MPP):** laju λ sendiri merupakan variabel acak.

Model-model ini sangat berguna untuk memodelkan fenomena dinamis seperti jumlah pelanggan per jam, klaim asuransi, transaksi e-commerce, hingga banyaknya bug dalam sistem perangkat lunak.

1.1 Tujuan Pembelajaran

Setelah menyelesaikan modul ini, mahasiswa diharapkan mampu:

1. Menjelaskan konsep dasar dan perbedaan antara NHPP, CPP, dan MPP.
2. Menurunkan rumus nilai harapan dan variansi masing-masing proses.
3. Mengimplementasikan simulasi ketiga proses menggunakan bahasa R.
4. Menginterpretasikan hasil perhitungan dalam konteks aplikatif.

2 Nonhomogeneous Poisson Process (NHPP)

2.1 Definisi

Sebuah proses $\{N(t), t \geq 0\}$ disebut **Nonhomogeneous Poisson Process** jika:

1. $N(0) = 0$,
2. Proses memiliki *independent increments*,
3. Untuk setiap $h \to 0$:

$$P\{N(t+h) - N(t) = 1\} = \lambda(t)h + o(h), \quad P\{N(t+h) - N(t) \geq 2\} = o(h)$$

Fungsi intensitas kumulatif:

$$m(t) = \int_0^t \lambda(u)\, du$$

Ekpektasi dan variansi

$$E[N(t)] = Var[N(t)] = m(t)$$

Distribusi:

$$N(t_2) - N(t_1) \sim Poisson(m(t_2) - m(t_1))$$

Untuk setiap $t > s$,

$$\Pr\{N(t) - N(s) = k\} = \frac{[\Lambda(t) - \Lambda(s)]^k}{k!} e^{-[\Lambda(t) - \Lambda(s)]},$$

di mana $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(u)\, du$ disebut *cumulative intensity function.*

2.2 Contoh 1

Pasien tiba di *emergency room* dengan

$$\lambda(t) = 5 + 3\sin\left(\frac{\pi t}{12}\right)$$

Hitung ekspektasi pasien antara pukul 6 sampai 18.

Penyelesaian. Hitung $E[N(18) - N(6)]$.

$$E[N(18) - N(6)] = \int_6^{18} [5 + 3\sin(\pi t/12)]dt = [5t - \frac{36}{\pi}\cos(\pi t/12)]_6^{18} = 60$$

$$\boxed{E[N(18) - N(6)] = 60 \text{ pasien}}$$

```
lambda <- function(t) 5 + 3 * sin(pi * t / 12)
E_N <- integrate(lambda, 6, 18)$value
E_N  # = 60
```

```
curve(5 + 3*sin(pi*x/12), 0, 24,
      xlab="Waktu␣(jam)", ylab=expression(lambda(t)),
      main="Intensitas␣NHPP␣(Pasien␣per␣Jam)")
abline(v=c(6,18), col="red", lty=2)
```

Interpretasi: Intensitas pasien meningkat pada siang hari dan menurun di malam hari, menghasilkan pola kedatangan tidak stasioner.

2.3 Contoh 2

Laju kedatangan meningkat linear dari 2 ke 8 selama 4 jam:

$$\lambda(t) = 2 + 1.5t, \quad 0 \le t \le 4.$$

$$\Lambda(t) = \int_0^t (2 + 1.5u)du = 2t + 0.75t^2.$$

Simulasikan NHPP selama 4 jam dan bandingkan hasil dengan $\mathbb{E}[N(4)] = \Lambda(4) = 14$.

Penyelesaian. .

```
lambda <- function(t) 2 + 1.5 * t
Lambda <- function(t) 2 * t + 0.75 * t^2
Lambda(4)  # expected mean = 14
```

```
simulate_NHPP <- function(Tmax, lambda, Lambda) {
  t <- 0; N <- 0; times <- c()
  while (TRUE) {
    # Sampling exponential with current rate
    u <- runif(1)
    t_star <- -log(u) / max(lambda(seq(0, Tmax, 0.1)))
    t <- t + t_star
    if (t > Tmax) break
    # Thinning step
    if (runif(1) < lambda(t) / max(lambda(seq(0, Tmax, 0.1)))) {
      N <- N + 1
      times <- c(times, t)
    }
  }
  list(N = N, arrival_times = times)
}
```

```
set.seed(123)
sim <- simulate_NHPP(4, lambda, Lambda)
sim$N
hist(sim$arrival_times, breaks=10, main="Arrival␣Times␣NHPP",
   ↪ xlab="time")
```

Interpretasi: rata-rata kedatangan mendekati 14 dengan variasi lebih besar di akhir interval, karena intensitas meningkat terhadap waktu.

3 Compound Poisson Process (CPP)

3.1 Definisi

Dalam banyak aplikasi (misal: klaim asuransi, total pendapatan, total kerusakan), setiap kedatangan membawa *nilai acak* X_i.

Proses **Compound Poisson** didefinisikan sebagai:

$$Y(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i, \quad N(t) \sim \text{Poisson}(\lambda t),$$

dengan X_i i.i.d. dan independen terhadap $N(t)$.

Ekpektasi dan variansi

$$\mathbb{E}[Y(t)] = \lambda t\, \mathbb{E}[X], \qquad \text{Var}[Y(t)] = \lambda t\, \mathbb{E}[X^2].$$

Distribusi $Y(t)$ adalah *campuran diskret-kontinu*, sering digunakan untuk memodelkan total kerugian asuransi. CPP menggambarkan total akumulasi dari sejumlah event acak, seperti total klaim asuransi, total penjualan, atau total kerusakan mesin.

3.2 Contoh 1

Sebuah perusahaan asuransi menerima rata-rata 2 klaim per hari. Setiap klaim bernilai $Y_i \sim Exp(mean = 1000)$. Hitung ekspektasi dan standar deviasi total klaim selama 30 hari.

Penyelesaian.

$$E[Y^2] = 2(1000^2)$$

$$E[X(30)] = 2 \times 30 \times 1000 = 60{,}000$$

$$Var[X(30)] = 2 \times 30 \times (2 \times 10^6) = 1.2 \times 10^8$$

$$SD = \sqrt{1.2 \times 10^8} = 10{,}954$$

$$\boxed{E[X] = 60{,}000, \quad SD[X] = 10{,}954}$$

$$\boxed{Totalklaim = \$60{,}000 \pm 10{,}954}$$

```
lambda <- 2; t <- 30; EX <- 1000
EY2 <- 2 * EX^2
EXt <- lambda * t * EX
VarXt <- lambda * t * EY2
SDXt <- sqrt(VarXt)
c(EXt, SDXt)
```

Simulasi Distribusi:

```
set.seed(10)
n_sim <- 10000
N <- rpois(n_sim, lambda*t)
Y <- rexp(sum(N), rate=1/1000)
X_total <- tapply(Y, rep(1:length(N), N), sum)
hist(X_total, breaks=40, col="lightblue",
     main="Simulasi Total Klaim CPP",
     xlab="Total Klaim (USD)")
```

Interpretasi: Variabilitas total klaim tinggi karena adanya ketidakpastian besar klaim (Y_i).

3.3 Contoh 2

Suatu perusahaan menerima klaim asuransi dengan laju 2 klaim/jam. Besar klaim $X_i \sim \text{Exp}(mean = 500{,}000)$ rupiah. Hitung nilai ekspektasi dan varians total klaim dalam 5 jam.

Penyelesaian.

$$\mathbb{E}[Y(5)] = 2 \times 5 \times 500{,}000 = 5{,}000{,}000, \quad \text{Var}[Y(5)] = 2 \times 5 \times (2.5 \times 10^{11}) = 2.5 \times 10^{12}.$$

```
lambda <- 2; t <- 5
EX <- 5e5; VarX <- (5e5)^2
EYt <- lambda * t * EX
VYt <- lambda * t * (EX^2 + VarX - EX^2)  # VarX = EX^2 for
   exponential
EYt; VYt
```

```
set.seed(10)
# Simulasi Compound Poisson
set.seed(42)
simulate_CPP <- function(lambda, t, rate) {
  N <- rpois(1, lambda * t)
  X <- rexp(N, rate = 1 / 5e5)
  sum(X)
}
```

```
R <- 1e4
Yvals <- replicate(R, simulate_CPP(lambda, t, rate = 1 / 5e5))
mean(Yvals); var(Yvals)
hist(Yvals, breaks=30, main="Total Claim Distribution (CPP)")
```

Interpretasi: distribusi total klaim cenderung miring ke kanan dengan variansi tinggi menggambarkan ketidakpastian total klaim walau laju rata-rata tetap.

4 Conditional or Mixed Poisson Process (MPP)

4.1 Definisi

Dalam **Mixed Poisson Process**, laju λ tidak konstan, tetapi merupakan variabel acak Λ dengan distribusi tertentu.

Kondisional pada $\Lambda = \ell$, proses adalah Poisson homogen dengan laju ℓ:

$$N(t) \mid \Lambda = \ell \sim \text{Poisson}(\ell t).$$

Distribusi marginal diperoleh dari campuran:

$$\Pr\{N(t) = k\} = \int_0^\infty e^{-\ell t} \frac{(\ell t)^k}{k!} f_\Lambda(\ell)\, d\ell.$$

Ekpektasi dan variansi

$$E[N(t)] = E[\Lambda]t, \quad Var[N(t)] = E[\Lambda]t + Var[\Lambda]t^2$$

Jika $Var[N] > E[N]$, maka terjadi *overdispersion*.

4.2 Contoh 1

Jumlah spam email mengikuti $\Lambda \sim \Gamma(4, 0.5)$. Hitung $E[N(8)]$ dan $Var[N(8)]$.

Penyelesaian.

$$E[\Lambda] = 8,\ Var[\Lambda] = 16$$

Untuk $t = 8$ jam:

$$E[N(8)] = 8 \times 8 = 64, \quad Var[N(8)] = 8(8) + 16(8^2) = 1088$$

$$Var/Mean = 1088/64 = 17 > 1 \Rightarrow \text{Overdispersion signifikan.}$$

```
alpha <- 4; beta <- 0.5; t <- 8
E_L <- alpha / beta; Var_L <- alpha / beta^2
E_N <- E_L * t
Var_N <- E_L * t + Var_L * t^2
c(E_N, Var_N, Var_N / E_N)
```

Simulasi Visualisasi Overdispersion:

```
set.seed(77)
Lambda <- rgamma(10000, shape=4, rate=0.5)
N_mix <- rpois(10000, Lambda*8)
hist(N_mix, breaks=40, col="lightgreen",
     main="Distribusi Mixed Poisson (Overdispersed)",
     xlab="Jumlah Kejadian per 8 jam")
```

Interpretasi: Variansi lebih besar dari mean karena ketidakpastian dalam Λ.

4.3 Contoh 2

Misalkan $\Lambda \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$ dengan pdf

$$f_\Lambda(\ell) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \ell^{\alpha-1} e^{-\beta\ell}.$$

Maka distribusi $N(t)$ mengikuti **Negative Binomial**:

$$\Pr\{N(t) = k\} = \binom{\alpha + k - 1}{k} \left(\frac{t}{t+\beta}\right)^k \left(\frac{\beta}{t+\beta}\right)^\alpha.$$

$$\mathbb{E}[N(t)] = \frac{\alpha t}{\beta}, \qquad \text{Var}[N(t)] = \frac{\alpha t}{\beta}\left(1 + \frac{t}{\beta}\right).$$

Contoh: Jumlah panggilan harian ($t = 1$) dipengaruhi cuaca melalui $\Lambda \sim \text{Gamma}(3, 1)$.

```
alpha <- 3; beta <- 1; t <- 1
# (1) Expected value and variance
ENt <- alpha * t / beta
VarNt <- ENt * (1 + t / beta)
ENt; VarNt
```

```
# (2) Simulasi Mixed Poisson
set.seed(77)
simulate_MPP <- function(alpha, beta, t) {
  lambda <- rgamma(1, shape = alpha, rate = beta)
  rpois(1, lambda * t)
}
R <- 1e5
Nvals <- replicate(R, simulate_MPP(alpha, beta, t))
mean(Nvals); var(Nvals)
barplot(table(Nvals)/R, main="Mixed Poisson ~ Negative Binomial Approx.")
```

Interpretasi: Variabilitas total lebih besar dari Poisson murni menggambarkan ketidakpastian tambahan dari fluktuasi laju harian (*overdispersion*). Distribusi ini umum pada model jumlah kecelakaan, panggilan call-center cuaca-sensitif, dan data insiden keuangan.

5 Contoh Praktikum

5.1 Integrasi Generalized Poisson Process

Sebuah platform *e-commerce* mencatat transaksi pembelian pelanggan setiap jam. Analisis menunjukkan bahwa:

$$\lambda(t) = 10 + 5\sin\left(\frac{\pi t}{12}\right)$$

menunjukkan *Nonhomogeneous Poisson Process (NHPP)*.

Nilai transaksi tiap pembelian mengikuti:

$$Y_i \sim \text{Normal}(\mu = 100, \sigma = 20)$$

(*Compound Poisson Process*).

Selain itu, intensitas rata-rata transaksi harian bersifat acak mengikuti:

$$\Lambda \sim \text{Gamma}(\alpha = 4, \beta = 0.2)$$

(*Mixed Poisson Process*).

Hitung dan interpretasikan:

1. Ekspektasi jumlah transaksi antara pukul 06.00–18.00.
2. Ekspektasi total pendapatan.
3. Variansi total pendapatan jika mempertimbangkan ketidakpastian Λ.
4. Buat simulasi Monte Carlo untuk memverifikasi hasil secara empiris.

Penyelesaian. .

1. Ekspektasi jumlah transaksi (NHPP):

$$E[N(18) - N(6)] = \int_6^{18} \lambda(t)\,dt = \int_6^{18} \left(10 + 5\sin\left(\frac{\pi t}{12}\right)\right) dt$$

$$E[N(18) - N(6)] = 10(12) - \frac{60}{\pi}[\cos(18\pi/12) - \cos(6\pi/12)] = 120$$

$$\boxed{E[N] = 120 \text{ transaksi}}$$

2. Ekspektasi total pendapatan (Compound Poisson):

$$E[X] = E[N] \times E[Y] = 120 \times 100 = 12{,}000$$

$$\boxed{E[X] = 12{,}000 \text{ unit pendapatan}}$$

3. Variansi total pendapatan (Mixed Compound Poisson):

$$E[\Lambda] = \frac{\alpha}{\beta} = 20, \quad Var[\Lambda] = \frac{\alpha}{\beta^2} = 100$$

$$E[Y^2] = Var[Y] + (E[Y])^2 = 20^2 + 100^2 = 10{,}400$$

Untuk durasi 12 jam ($t = 12$):

$$Var[X] = tE[\Lambda]E[Y^2] + t^2Var[\Lambda](E[Y])^2$$

$$Var[X] = 12(20)(10{,}400) + 12^2(100)(100)^2 = 146{,}496{,}000$$

$$SD[X] = \sqrt{146{,}496{,}000} \approx 12{,}103$$

$$\boxed{SD[X] \approx 12{,}103}$$

4. Interpretasi:

- Ekspektasi 120 transaksi dengan total rata-rata pendapatan 12.000 unit.
- Deviasi standar besar menunjukkan fluktuasi tinggi akibat variasi nilai transaksi dan intensitas harian.
- Model ini mencakup seluruh generalisasi Poisson: waktu tidak homogen, nilai acak per transaksi, dan laju acak antar hari.

```
# (1) Ekspektasi jumlah transaksi (NHPP)
lambda <- function(t) 10 + 5*sin(pi*t/12)
E_N <- integrate(lambda, 6, 18)$value
E_N  # Hasil: 120 transaksi
```

```
# (2) Ekspektasi total pendapatan (Compound)
EY <- 100
EX <- E_N * EY
EX  # 12.000 unit
```

```
# (3) Variansi total (Mixed Compound Poisson)
alpha <- 4; beta <- 0.2; t <- 12
E_L <- alpha / beta
Var_L <- alpha / (beta^2)
VarY <- 20^2
EY2 <- VarY + EY^2

VarX <- t * E_L * EY2 + t^2 * Var_L * (EY^2)
SDX <- sqrt(VarX)
c(EX, SDX)
```

```
# ==========================================
# (4) SIMULASI MONTE CARLO
# ==========================================
set.seed(123)
R <- 5000  # jumlah simulasi
Lambda <- rgamma(R, shape = alpha, rate = beta)
Sim_X <- numeric(R)

for (i in 1:R) {
  N <- rpois(1, Lambda[i]*t)
  Y <- rnorm(N, mean = EY, sd = 20)
  Sim_X[i] <- sum(Y)
```

```
}

mean(Sim_X)    # Ekspektasi empiris
sd(Sim_X)      # Simpangan baku empiris
```

```
# ==========================================
# (5) VISUALISASI HASIL
# ==========================================
par(mfrow=c(1,2))

# Kurva laju NHPP
curve(lambda(x), 0, 24,
      col="blue", lwd=2, ylim=c(0,16),
      main="Intensitas NHPP (lambda(t))",
      xlab="Waktu (jam)", ylab=expression(lambda(t)))
abline(v=c(6,18), col="red", lty=2)

# Histogram hasil simulasi
hist(Sim_X, breaks=40, col="lightblue",
     main="Distribusi Total Pendapatan (Simulasi)",
     xlab="Total Pendapatan", freq=FALSE)
abline(v=mean(Sim_X), col="red", lwd=2)
```

5.2 Visualisasi NHPP: $\lambda(t)$, $m(t)$, dan Kedatangan

Tujuan. Menampilkan bentuk intensitas $\lambda(t)$, fungsi nilai harapan kumulatif $m(t) = \int_0^t \lambda(u)\,du$, dan membandingkan *rate empiris* hasil simulasi kedatangan dengan $\lambda(t)$.

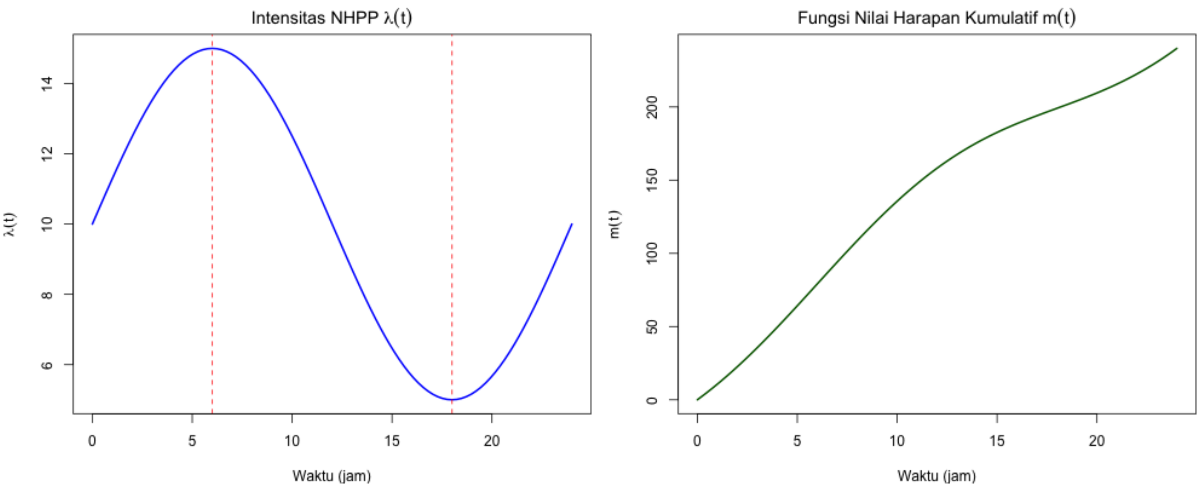

Figure 1: NHPP: (kiri) $\lambda(t)$; (kanan) $m(t) = \int_0^t \lambda(u)\,du$.

```
# ---------- NHPP VISUALS ----------
lambda <- function(t) 10 + 5 * sin(pi * t / 12)
m <- function(t) 10 * t - (60/pi) * cos(pi * t / 12) + (60/pi)   #
    ↪  C(0)=0
```

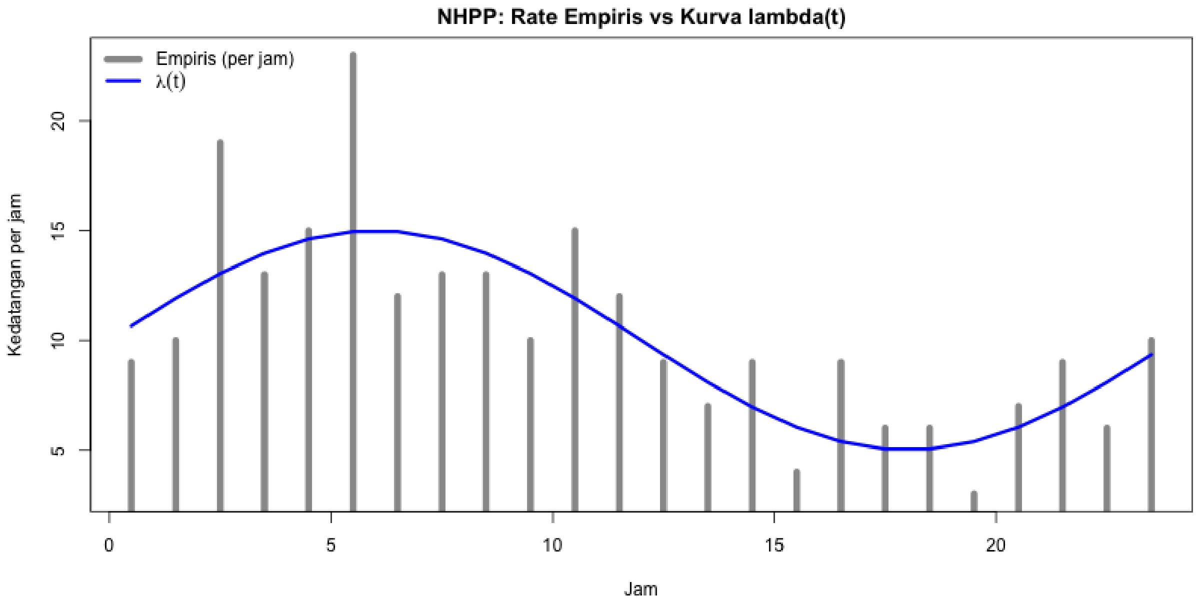

Figure 2: Perbandingan *rate empiris* (batang) dan $\lambda(t)$ (garis).

```
# (A) Plot lambda(t) dan m(t)
png("nhpp_lambda_m.png", width=1000, height=400)
par(mfrow=c(1,2), mar=c(4,4,2,1))
curve(lambda(x), 0, 24, lwd=2, col="blue",
      xlab="Waktu␣(jam)", ylab=expression(lambda(t)),
      main=expression(paste("Intensitas␣NHPP␣", lambda(t))))
abline(v=c(6,18), col="red", lty=2)

curve(m(x), 0, 24, lwd=2, col="darkgreen",
      xlab="Waktu␣(jam)", ylab=expression(m(t)),
      main=expression(paste("Fungsi␣Nilai␣Harapan␣Kumulatif␣", m(
   ↪ t))))
dev.off()
```

```
# (B) Simulasi NHPP via thinning untuk melihat rate empiris
set.seed(123)
thinning_nhpp <- function(Tmax, lambda_fun, ngrid=240) {
  grid <- seq(0, Tmax, length.out = ngrid)
  lam_vals <- lambda_fun(grid)
  lam_max <- max(lam_vals)
  t <- 0; times <- numeric(0)
  while (TRUE) {
    t <- t - log(runif(1)) / lam_max
    if (t > Tmax) break
    if (runif(1) < lambda_fun(t) / lam_max) times <- c(times, t)
  }
  times
}
arr <- thinning_nhpp(24, lambda)
```

```
# Rate empiris per jam dibanding lambda(t) (dibin per 1 jam)
breaks <- 0:24
counts <- hist(arr, breaks=breaks, plot=FALSE)$counts
mid <- (head(breaks, -1) + tail(breaks, -1))/2  # titik tengah
   ↪ tiap jam
emp_rate <- counts / 1  # per jam

png("nhpp_emp_rate_vs_lambda.png", width=800, height=400)
par(mfrow=c(1,1), mar=c(4,4,2,1))
plot(mid, emp_rate, type="h", lwd=6, col="gray60",
     xlab="Jam", ylab="Kedatangan␣per␣jam",
     main="NHPP:␣Rate␣Empiris␣vs␣Kurva␣lambda(t)")
lines(mid, lambda(mid), lwd=3, col="blue")
legend("topleft", bty="n", lwd=c(6,3), col=c("gray60","blue"),
       legend=c("Empiris␣(per␣jam)", expression(lambda(t))))
dev.off()
```

Interpretasi.

- **Plot** $\lambda(t)$: berbentuk gelombang—tinggi di siang/sore, rendah malam—mencerminkan pola sibuk–sepi harian. Garis vertikal putus-putus menandai interval analisis (06–18).
- **Plot** $m(t)$: kurva *cembung ke atas* saat λ tinggi dan *lebih landai* saat λ rendah (karena $m'(t) = \lambda(t)$).
- **Rate empiris vs** $\lambda(t)$: batang abu-abu (rate per jam hasil simulasi) berosilasi mengikuti garis biru $\lambda(t)$. Ketidakcocokan kecil wajar (fluktuasi acak). Semakin banyak simulasi/interval lebih lebar, *fit* makin mendekati $\lambda(t)$.

5.3 Visualisasi CPP: Sampel Lintasan dan Histogram Total

Tujuan. Memahami *jump process* $X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$ dan distribusi total $X(t)$ pada horizon tetap.

```
# ---------- CPP VISUALS ----------
set.seed(42)
lambda_cpp <- 2       # per hari
EY <- 1000            # mean klaim
t_hor <- 30           # hari
```

```
# (A) Satu lintasan (step/jump plot) untuk X(t)
N <- rpois(1, lambda_cpp * t_hor)
arrival <- sort(runif(N, 0, t_hor))
Y <- rexp(N, rate = 1/EY)
Xt <- cumsum(Y)
png("cpp_sample_path.png", width=800, height=400)
par(mar=c(4,4,2,1))
plot(c(0, arrival), c(0, Xt), type="s", lwd=2, col="darkorange",
     xlab="Waktu␣(hari)", ylab="X(t)",
     main="CPP:␣Sampel␣Lintasan␣Akumulasi␣(Jump␣Process)")
dev.off()
```

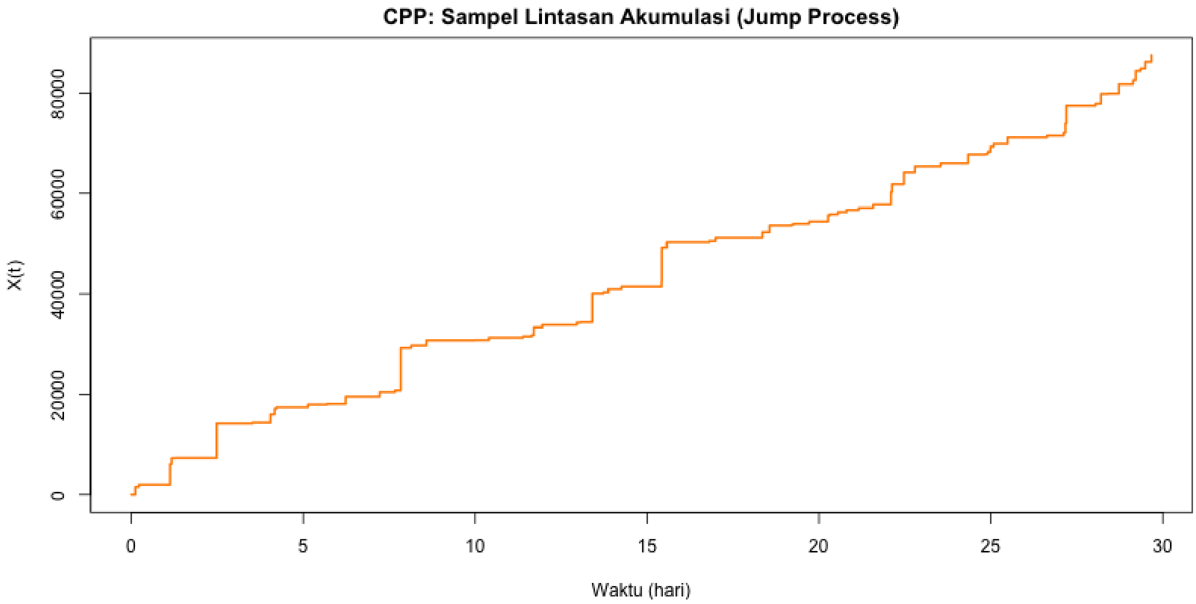

Figure 3: CPP: Sampel lintasan $X(t)$ (jump process).

```
# (B) Histogram X(t) (total pada akhir horizon) dari simulasi
R <- 10000
Xtot <- numeric(R)
for (r in 1:R) {
  Nr <- rpois(1, lambda_cpp * t_hor)
  Yr <- rexp(Nr, rate = 1/EY)
  Xtot[r] <- sum(Yr)
}
EX_theory <- lambda_cpp * t_hor * EY
VarX_theory <- lambda_cpp * t_hor * (2*EY^2)
SD_theory <- sqrt(VarX_theory)

png("cpp_hist_total.png", width=800, height=450)
hist(Xtot, breaks=40, col="lightblue", border="white",
     main="CPP: Histogram Total X(t) pada t = 30 hari",
     xlab="Total X(t)")
abline(v=EX_theory, col="red", lwd=3)
legend("topright", bty="n",
       legend=c(paste0("Mean teori = ", round(EX_theory,0)),
                paste0("SD teori   = ", round(SD_theory,0))),
       text.col=c("red","black"))
dev.off()
```

Interpretasi.

- **Lintasan (step plot)**: garis *tangga* menunjukkan kenaikan diskret saat klaim tiba; tinggi lompatan = besar klaim Y_i.
- **Histogram** $X(t)$: terlihat *skew kanan* (ekor panjang) karena Y_i eksponensial. Garis merah adalah rata-rata teoretis $\lambda t\, E[Y]$; penyebaran sesuai $SD = \sqrt{\lambda t\, E[Y^2]}$.

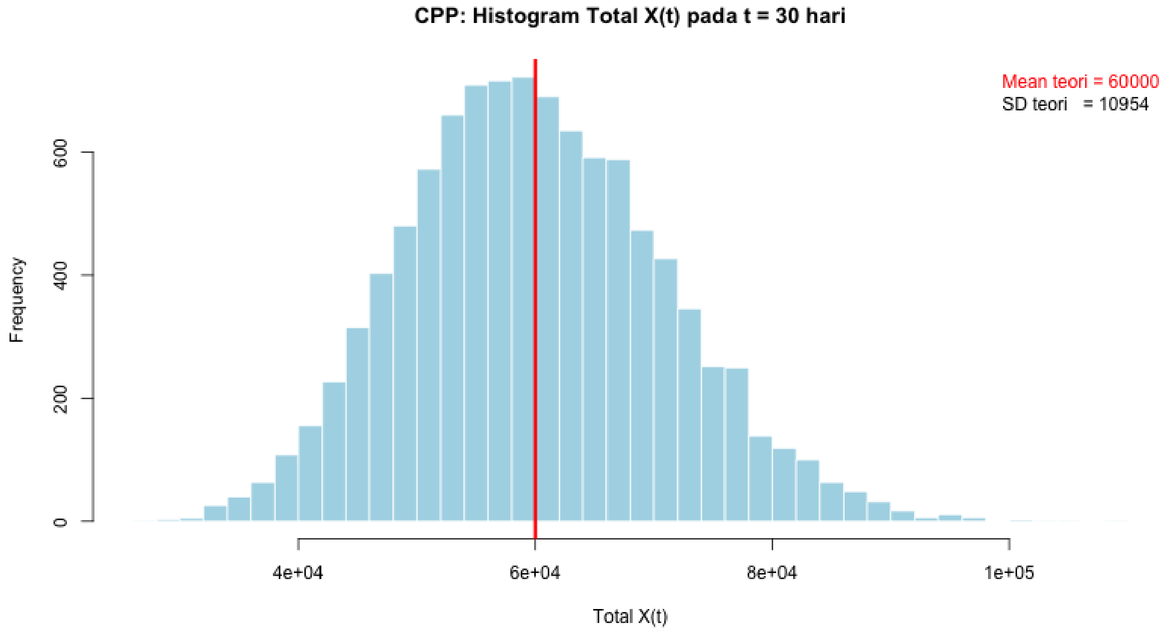

Figure 4: CPP: Histogram total $X(t)$ pada $t = 30$ hari (garis merah $= E[X(t)]$).

5.4 Visualisasi MPP: Overdispersion (Poisson vs Mixed)

Tujuan. Menunjukkan bahwa ketidakpastian laju Λ menyebabkan **variansi** jumlah kejadian yang *lebih besar dari mean* (overdispersion), berbeda dari Poisson biasa yang $Var = Mean$.

```
# ---------- MPP VISUALS ----------
set.seed(77)
alpha <- 4; beta <- 0.5; t_mpp <- 8
E_L <- alpha / beta
# Simulasi Mixed Poisson:
R <- 50000
lam <- rgamma(R, shape=alpha, rate=beta)
Nmix <- rpois(R, lam * t_mpp)
```

```
# Simulasi Poisson homogen dengan mean sama (pembanding):
Npoi <- rpois(R, E_L * t_mpp)

png("mpp_overdispersion.png", width=900, height=420)
par(mfrow=c(1,2), mar=c(4,4,2,1))
hist(Npoi, breaks=50, col="gray80", border="white",
     main="Poisson␣Homogen␣(Var␣=␣Mean)", xlab="Hitungan␣dalam␣8␣
       ↪ jam", freq=FALSE)
abline(v=mean(Npoi), col="red", lwd=3)

hist(Nmix, breaks=50, col="lightgreen", border="white",
     main="Mixed␣Poisson␣(Overdispersed)", xlab="Hitungan␣dalam␣8
       ↪ ␣jam", freq=FALSE)
abline(v=mean(Nmix), col="red", lwd=3)
dev.off()
```

```
# Ringkasan numerik (opsional)
c(mean_pois = mean(Npoi), var_pois = var(Npoi),
  mean_mix = mean(Nmix), var_mix = var(Nmix),
  ratio_mix = var(Nmix)/mean(Nmix))
```

Interpretasi.

- **Panel kiri (Poisson homogen)**: histogram sempit; variansi empiris $\approx$ mean $\Rightarrow$ sesuai sifat Poisson.
- **Panel kanan (Mixed Poisson)**: histogram lebih lebar (ekor lebih tebal); rasio $Var/Mean \gg 1 \Rightarrow$ terjadi **overdispersion**.
- Secara praktis, model Mixed lebih cocok untuk data yang menunjukkan *fluktuasi antar periode* (cuaca, promosi, perilaku pengguna).

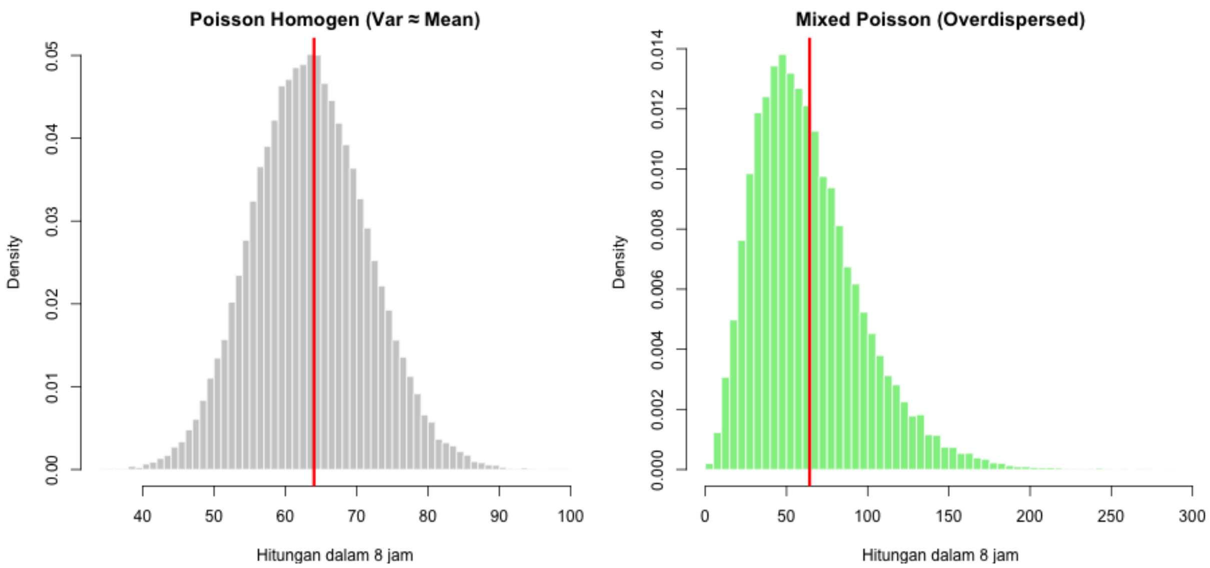

Figure 5: Perbandingan Poisson homogen vs Mixed Poisson (overdispersion).

5.5 Visualisasi Latihan Integratif (NHPP + CPP + MPP)

Tujuan. Menggabungkan ketiga gagasan dalam satu eksperimen: laju harian acak (MPP), variasi waktu dalam hari (NHPP), dan nilai transaksi acak (CPP).

```
# ---------- INTEGRATED VISUAL ----------
set.seed(2025)
alpha <- 4; beta <- 0.2; t_int <- 12
EY <- 100; sdY <- 20
R <- 4000
```

```
# Simulasi Mixed-Compound homogen (agregat per 12 jam)
lam_day <- rgamma(R, shape=alpha, rate=beta)    # laju harian
    ↪ acak
```

```
Nsim <- rpois(R, lam_day * t_int)
Xsim <- sapply(Nsim, function(n) sum(rnorm(n, EY, sdY)))

png("integrated_hist.png", width=850, height=420)
par(mfrow=c(1,2), mar=c(4,4,2,1))
hist(Nsim, breaks=40, col="khaki", border="white",
     main="Hitungan␣Transaksi␣(12␣jam)", xlab="N", freq=FALSE)
abline(v=mean(Nsim), col="red", lwd=3)

hist(Xsim, breaks=40, col="skyblue", border="white",
     main="Total␣Pendapatan␣(12␣jam)", xlab="X", freq=FALSE)
abline(v=mean(Xsim), col="red", lwd=3)
dev.off()
```

Interpretasi.

- **Histogram N (kiri)**: lebih lebar dari Poisson homogen karena Λ acak.
- **Histogram X (kanan)**: *right-skewed* karena akumulasi dari jumlah transaksi acak dan nilai transaksi yang berdistribusi Normal (penjumlahan banyak Normal akan mendekati Normal, namun variasi N menambah ketebalan ekor).
- Garis merah menandai rata-rata empiris; bandingkan dengan hasil analitik pada seksi latihan.

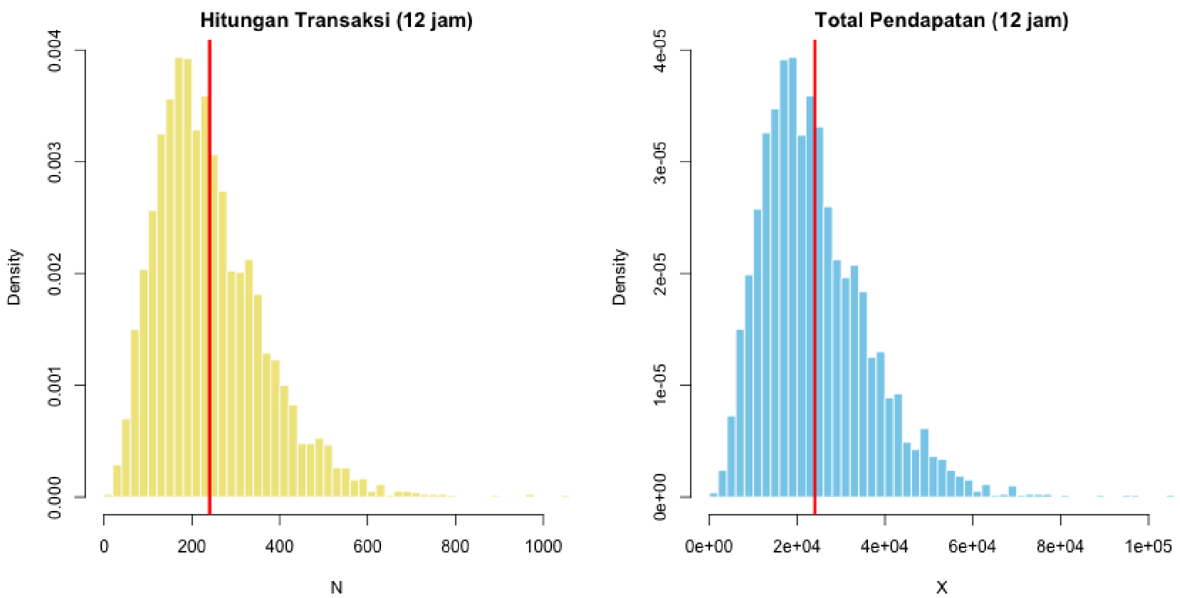

Figure 6: Latihan integratif: distribusi jumlah transaksi dan total pendapatan (12 jam).

6 Latihan Praktikum Generalizations of the Poisson Process

6.1 NHPP: Ekspektasi dan Probabilitas Interval

Sebuah layanan darurat dimodelkan sebagai NHPP dengan intensitas linear

$$\lambda(t) = 4 + 0.5\,t, \quad 0 \le t \le 6 \text{ (kejadian/jam)}.$$

1. Hitung ekspektasi kedatangan pada interval $[2, 6]$.
2. Hitung peluang tepat $k = 10$ kedatangan pada $[2, 6]$.
3. Verifikasi numerik dengan simulasi.

6.2 CPP: Mean/Var dengan Klaim Gamma dan Simulasi

Klaim asuransi datang menurut Poisson($\lambda = 3$ per jam). Dalam $t = 4$ jam, besar klaim identik i.i.d. $Y_i \sim \Gamma(k = 2, \theta = 500)$ (scale).

1. Hitung $E[X(t)]$ dan $Var[X(t)]$ untuk $X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$.
2. Simulasikan distribusi $X(4)$.

6.3 MPP: Mean/Var dan Peluang dengan Negative Binomial

Jumlah paket data per jam mengikuti Mixed Poisson dengan $\Lambda \sim \Gamma(\alpha = 5, \beta = 0.25)$ (rate). Untuk periode $t = 2$ jam:

1. Hitung $E[N(t)]$ dan $Var[N(t)]$.
2. Hitung $P\{N(t) \ge 20\}$.
3. Simulasikan

6.4 (Homogen) Order Statistics Kondisional dan Simulasi

Dalam proses Poisson homogen pada $[0, 3]$, diketahui tepat $N(3) = 15$ kedatangan.

1. Hitung $E[S_5 \mid N(3) = 15]$ dan $Var(S_5 \mid N(3) = 15)$, dengan S_k waktu kedatangan ke-k.
2. Estimasikan $P\{S_5 \le 1.2 \mid N(3) = 15\}$.
3. Simulasikan

6.5 Mixed-Compound: Mean/Var Total Pendapatan (Normal) dan Simulasi

Suatu gerai online memiliki laju transaksi harian acak $\Lambda \sim \Gamma(\alpha = 4, \beta = 0.2)$. Periode observasi $t = 12$ jam. Nilai transaksi per event $Y_i \sim \mathcal{N}(\mu = 100, \sigma = 25)$.

1. Hitung $E[X]$ dan $Var[X]$ untuk total pendapatan X.
2. Verifikasi via simulasi Monte Carlo dan tampilkan histogram X.
3. Simulasikan

7 Kesimpulan

Ketiga generalisasi Poisson memperluas fleksibilitas model stokastik:

- NHPP menangani *intensitas bervariasi terhadap waktu.*
- CPP memodelkan *total akumulasi* dari kejadian acak.
- MPP menangkap *heterogenitas antar periode.*

Ketiganya dapat dikombinasikan lebih lanjut (misalnya: *Mixed Compound Nonhomogeneous Poisson Process*) untuk aplikasi yang kompleks seperti risiko asuransi dinamis dan reliabilitas sistem.