Modul 3 Distribusi Eksponensial

Indah Suciati

2025-10-01

Distribusi Eksponensial

Distribusi eksponensial adalah distribusi probabilitas kontinu yang banyak digunakan dalam teori peluang dan statistika, terutama untuk memodelkan waktu tunggu antar kejadian dalam suatu proses stokastik. Distribusi ini sering muncul dalam situasi ketika suatu peristiwa terjadi secara acak, dengan laju kejadian yang konstan sepanjang waktu. Contoh aplikasinya antara lain waktu antar kedatangan pelanggan ke sebuah layanan, umur pakai lampu pijar, waktu antar kerusakan mesin, atau waktu antar telepon yang masuk ke sebuah *call center*. Dengan demikian, distribusi eksponensial memiliki peranan penting dalam pemodelan stokastik.

Secara matematis, sebuah peubah acak X dikatakan berdistribusi eksponensial dengan parameter laju $\lambda > 0$ jika memiliki fungsi kepadatan peluang (pdf):

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x},\ x \geq 0.$$

Parameter λ menyatakan rata-rata banyaknya kejadian per satuan waktu, sehingga *mean* atau nilai harapan dari distribusi ini adalah $E(X) = \frac{1}{\lambda}$, dan variansnya adalah $Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$. Sebagai contoh, jika rata-rata kedatangan pelanggan adalah 12 orang per jam $(\lambda = 12)$, maka rata-rata waktu tunggu antar pelanggan adalah 1/12 jam atau 5 menit.

Dari fungsi kepadatan peluang tersebut, kita dapat menurunkan fungsi distribusi kumulatif (CDF) yang menyatakan peluang bahwa waktu tunggu X lebih kecil atau sama dengan suatu nilai x. Fungsi ini berguna untuk menghitung probabilitas bahwa suatu kejadian terjadi paling lambat pada waktu tertentu. Adapun CDF dari distribusi Eksponensial adalah sebagai berikut:

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}.$$

Selain itu, terdapat pula fungsi kebertahanan (*Survival Function*) yang menunjukkan peluang bahwa waktu tunggu X melebihi suatu nilai x atau dengan kata lain bahwa kejadian belum terjadi hingga waktu x. Fungsi kebertahanan pada distribusi eksponensial didefinisikan sebagai berikut:

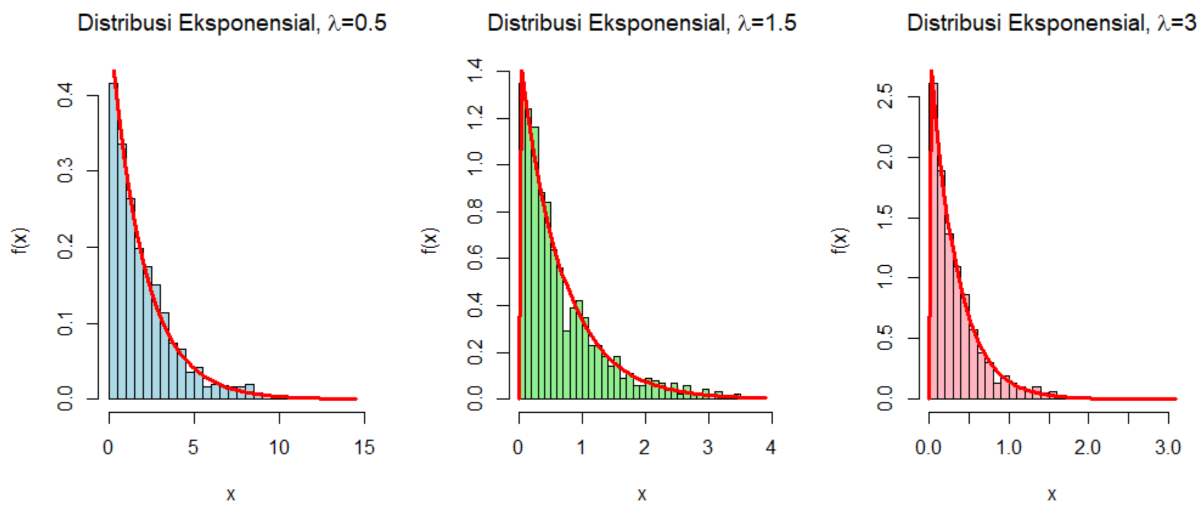
$$S(x) = P(X > x) = 1 - P(X \leq x) = 1 - F(x) = 1 - \left(1 - e^{-\lambda x}\right) = e^{-\lambda x}, x \geq 0.$$

Fungsi kebertahanan sangat penting dalam analisis reliabilitas dan teori antrian, karena dapat digunakan untuk menghitung peluang bahwa sebuah sistem, mesin, atau komponen masih berfungsi setelah melewati waktu tertentu.

Contoh Simulasi Distribusi Eksponensial

Dalam modul ini akan dilakukan pembangkitan bilangan acak yang berdistribusi eksponensial untuk $n = 1000$ dengan nilai parameter λ yang berbeda, yaitu $\lambda_1 = 0.5$, $\lambda_2 = 1.5$, $\lambda_3 = 3$ dan visualisasi data mengenai sebaran datanya.

```r
library(ggplot2)

# Jumlah Sampel
n <- 1000

# Parameter Lambda
lambda1 <- 0.5
lambda2 <- 1.5
lambda3 <- 3

# Simulasi Bilangan Acak Berdistribusi Eksponensial
set.seed(123)  # Agar hasil replikasi konsisten
data1 <- rexp(n, rate=lambda1)
data2 <- rexp(n, rate=lambda2)
data3 <- rexp(n, rate=lambda3)

# Visualisasi histogram sebaran data
par(mfrow=c(1,3)) # Menampilkan 3 plot sejajar
# Membuat Plot Simulasi dengan Lambda=0.5
hist(data1, breaks=30, probability=TRUE, col="lightblue",
     main=expression(paste("Distribusi Eksponensial, ", lambda, "=0.5")),
     xlab="x", ylab="f(x)")
curve(dexp(x, rate=lambda1), col="red", lwd=2, add=TRUE)

# Membuat Plot Simulasi dengan Lambda=1.5
hist(data2, breaks=30, probability=TRUE, col="lightgreen",
     main=expression(paste("Distribusi Eksponensial, ", lambda, "=1.5")),
     xlab="x", ylab="f(x)")
curve(dexp(x, rate=lambda2), col="red", lwd=2, add=TRUE)

# Membuat Plot Simulasi dengan Lambda=3
hist(data3, breaks=30, probability=TRUE, col="lightpink",
     main=expression(paste("Distribusi Eksponensial, ", lambda, "=3")),
     xlab="x", ylab="f(x)")
curve(dexp(x, rate=lambda3), col="red", lwd=2, add=TRUE)
```

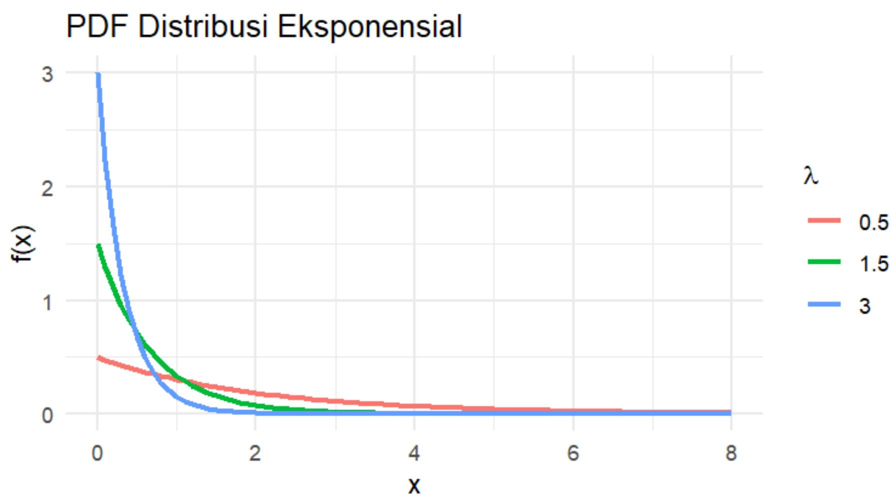


Kode di atas membangkitkan data acak dari distribusi eksponensial dengan tiga parameter laju yang berbeda, yaitu $\lambda_1 = 0.5$, $\lambda_2 = 1.5$, $\lambda_3 = 3$, masing-masing dengan jumlah sampel 1000. Dengan fungsi `rexp()`, dihasilkan tiga himpunan data acak yang kemudian divisualisasikan menggunakan histogram untuk melihat sebaran nilai acaknya. Agar hasil simulasi lebih informatif, setiap histogram ditambahkan kurva teoritis distribusi eksponensial (`dexp()`) dengan parameter yang sesuai. Penyusunan tiga plot sejajar (`par(mfrow=c(1,3))`) memungkinkan perbandingan bentuk distribusi antara ketiga nilai λ secara langsung. Hasil *output* menunjukkan bahwa semakin besar nilai λ, semakin curam penurunan kurva distribusi eksponensial, sehingga data terkonsentrasi lebih dekat ke nol. Pada $\lambda_1 = 0.5$, distribusi lebih lebar artinya data yang dihasilkan lebih menyebar ke kanan, sehingga missal waktu tunggu bisa sangat panjang karena distribusi lambat menurun. Sebaliknya, pada $\lambda_3 = 3$, sebagian besar nilai sangat dekat dengan nol, dan peluang munculnya nilai yang besar (misal >2 atau >3) sangat kecil, atau hamper nol. Dengan demikian, perubahan parameter λ memengaruhi tingkat kepadatan data yaitu semakin tinggi λ, semakin singkat rata-rata waktu tunggu (*mean* $= 1/\lambda$), dan semakin kecil variansinya.

Agar lebih jelas perbedaan distribusi eksponensial untuk berbagai lambda sebelumnya, maka dapat divisualisasikan menjadi satu plot gabungan sebagai berikut.

```
# Mendefinisikan Rentang Nilai x
x <- seq(0, 8, by = 0.1)

# Membuat Data Frame untuk Setiap Lambda
data <- data.frame(
  x = rep(x, 3),
  f_x = c(dexp(x, rate = 0.5), dexp(x, rate = 1.5), dexp(x, rate = 3)),
  lambda = factor(rep(c("0.5", "1.5", "3"), each = length(x)))
)

# Plot menggunakan ggplot2
ggplot(data, aes(x = x, y = f_x, color = lambda)) +
```

```r
  geom_line(linewidth = 1) +
  labs(
    title = "PDF Distribusi Eksponensial",
    x = "x",
    y = "f(x)",
    color = expression(lambda)
  ) +
  theme_minimal()
```



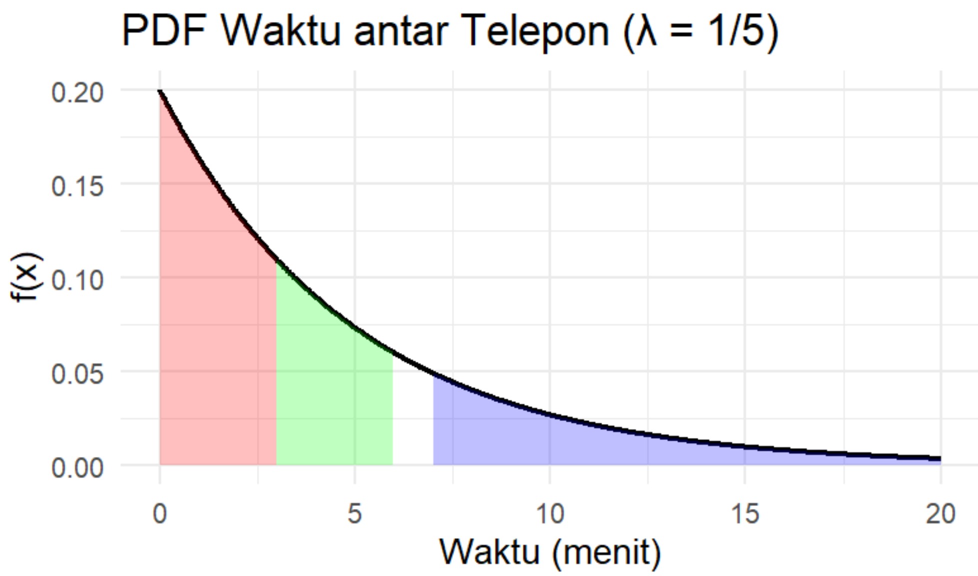
Pada kode tersebut dibuat sebuah rentang nilai x dari 0 sampai 8 dengan kenaikan 0.1, lalu dihitung fungsi densitas probabilitas eksponensial untuk tiga parameter laju ($\lambda_1 = 0.5$, $\lambda_2 = 1.5$, $\lambda_3 = 3$). Nilai-nilai tersebut digabungkan ke dalam satu data frame, kemudian divisualisasikan dengan satu plot gabungan menggunakan `ggplot2`. Hasilnya berupa tiga kurva distribusi eksponensial dengan warna berbeda sesuai nilai λ, sehingga perbedaan bentuk distribusi dapat diamati dengan jelas. Dari grafik terlihat bahwa nilai λ sangat memengaruhi bentuk distribusi. Visualisasi ini menegaskan bahwa semakin besar nilai λ pada distribusi eksponensial makin "terkonsentrasi" di sekitar nol, sementara semakin kecil λ, distribusi semakin melebar.

Contoh Kasus Perhitungan Peluang, Nilai Harapan, Ragam, dan Standar Deviasi Distribusi Eksponensial

Sebuah pusat layanan pelanggan di sebuah perusahaan telekomunikasi menerima panggilan masuk dari pelanggan secara acak. Berdasarkan data historis, diketahui bahwa rata-rata waktu antar-panggilan adalah 5 menit. Asumsikan bahwa waktu antar-panggilan tersebut mengikuti distribusi eksponensial. Manajer layanan ingin mengetahui beberapa hal penting untuk pengelolaan staf *call center*. Pertama, berapakah peluang bahwa selang waktu antar-panggilan tidak lebih dari 3 menit? Kedua, berapakah peluang bahwa selang waktu antar-panggilan justru lebih lama dari 7 menit? Selain itu, berapakah peluang bahwa waktu antar-panggilan berada di antara 3 menit dan 6 menit? Terakhir, manajer juga ingin memahami karakteristik distribusi ini dengan menghitung nilai harapan, ragam, dan standar deviasi dari waktu antar-panggilan agar dapat memperkirakan kebutuhan jumlah staf di jam-jam sibuk.

```r
# Contoh: Perhitungan peluang dan statistik (tanpa simulasi)
# Kasus: rata-rata waktu antar-panggilan = 5 menit -> lambda = 1/5

# Parameter
lambda <- 1/5  # laju (per menit)

# Menghitung Peluang (Analitik Menggunakan pexp)
# P(X <= 3)
p_kurang_3<- pexp(3, rate = lambda)
# P(X >= 7) = 1 - F(7)
p_lebih_7 <- 1 - pexp(7, rate = lambda)
# P(3 < X < 6) = F(6) - F(3)
p_antara_3_6 <- pexp(6, rate = lambda) - pexp(3, rate = lambda)

# Mencari Nilai Statistik
mean <- 1 / lambda
var  <- 1 / (lambda^2)
sd   <- sqrt(var)

# Membuatuat Tabel Ringkasan
hasil <- data.frame(
  Keterangan = c("P(X ≤ 3)", "P(X ≥ 7)", "P(3 < X < 6)",
                 "Nilai Harapan (Mean)", "Ragam (Var)", "Standar Deviasi"),
  Hasil = c(p_kurang_3, p_lebih_7, p_antara_3_6,
            mean, var, sd))
print(hasil)

##             Keterangan      Hasil
## 1             P(X ≤ 3)  0.4511884
## 2             P(X ≥ 7)  0.2465970
## 3         P(3 < X < 6)  0.2476174
## 4 Nilai Harapan (Mean)  5.0000000
## 5          Ragam (Var) 25.0000000
## 6      Standar Deviasi  5.0000000

#Menentukan Data untuk Visualisasi
x_max <- 20
x <- seq(0, x_max, length.out = 1000)
df <- data.frame(x = x, y = dexp(x, rate = lambda))

# Menentukan Area untuk Peluang x
area1 <- subset(df, x <= 3)
area2 <- subset(df, x >= 7)
area3 <- subset(df, x > 3 & x < 6)

# Visualisasi
ggplot(df, aes(x, y)) +
  geom_line(linewidth = 1.1) +
  geom_ribbon(data = area1, aes(ymin = 0, ymax = y), alpha = 0.25, fill =
```

```
"red") +
  geom_ribbon(data = area2, aes(ymin = 0, ymax = y), alpha = 0.25, fill =
"blue") +
  geom_ribbon(data = area3, aes(ymin = 0, ymax = y), alpha = 0.25, fill =
"green") +
  labs(title = "PDF Waktu antar Telepon (λ = 1/5)",
       x = "Waktu (menit)", y = "f(x)") +
  theme_minimal(base_size = 14)
```



Dalam contoh kasus ini, diketahui bahwa rata-rata waktu antar panggilan telepon adalah 5 menit, sehingga laju distribusi eksponensialnya adalah $\lambda = 1/5$. Dengan parameter ini, peluang dihitung menggunakan fungsi distribusi kumulatif eksponensial (`pexp`). Hasilnya menunjukkan bahwa peluang waktu antar panggilan kurang dari atau sama dengan 3 menit adalah sekitar 0.45, peluang waktu lebih dari atau sama dengan 7 menit adalah sekitar 0.25, dan peluang waktu berada antara 3 sampai 6 menit adalah sekitar 0.25. Selain itu, diperoleh bahwa nilai harapan (*mean*) dari distribusi adalah 5 menit `(mean)`, ragamnya 25 `(var)`, dan standar deviasinya 5 menit `(sd)`. Angka-angka ini memberikan gambaran bahwa meskipun rata-rata antar panggilan adalah 5 menit, masih terdapat kemungkinan cukup besar untuk waktu antar panggilan yang lebih singkat maupun lebih panjang.

Visualisasi dalam bentuk kurva PDF distribusi eksponensial memperkuat perhitungan ini. Kurva densitas ditampilkan dengan tiga area arsiran yaitu merah untuk $P(X \leq 3)$, biru untuk $P(X \geq 7)$, dan hijau untuk $P(3 < X < 3)$. Area berwarna tersebut menunjukkan bagian dari distribusi yang sesuai dengan probabilitas yang sudah dihitung sebelumnya. Dengan demikian, grafik membantu memperlihatkan secara intuitif bagaimana peluang-peluang tersebut muncul dari distribusi eksponensial, dan bagaimana distribusi ini menekankan kecenderungan nilai-nilai kecil (dekat nol) namun tetap memiliki ekor panjang yang memungkinkan nilai besar muncul.

Konvolusi Peubah Acak Eksponensial

Dalam teori probabilitas, konvolusi merupakan konsep penting yang digunakan untuk menentukan distribusi dari penjumlahan dua atau lebih peubah acak. Konsep konvolusi sangat penting karena banyak fenomena dunia nyata melibatkan jumlah dari peubah acak. Misalnya, waktu total pelayanan dua tahap berturut-turut adalah jumlah dari dua waktu tunggu yang masing-masing dapat dimodelkan dengan distribusi tertentu.

Pada konvolusi peubah acak eksponensial, jika X dan Y berdistribusi eksponensial dengan parameter yang sama yaitu λ, maka distribusi dari $Z = X + Y$ mengikuti distribusi gamma dengan parameter $k = 2$ dan laju λ. Secara umum, jumlah n peubah acak eksponensial identik dan independen mengikuti distribusi gamma dengan parameter bentuk $k = n$. Selain itu, jika X dan Y berdistribusi eksponensial dengan parameter yang berbeda yaitu λ_1 dan λ_2 maka distribusi dari $Z = X + Y$ mengikuti distribusi Hipoeksponensial. Hal ini menunjukkan keterkaitan erat antara distribusi eksponensial, gamma, dan hipoeksponensial, serta memperlihatkan bagaimana konvolusi menjadi jembatan antara distribusi sederhana dengan distribusi yang lebih kompleks.

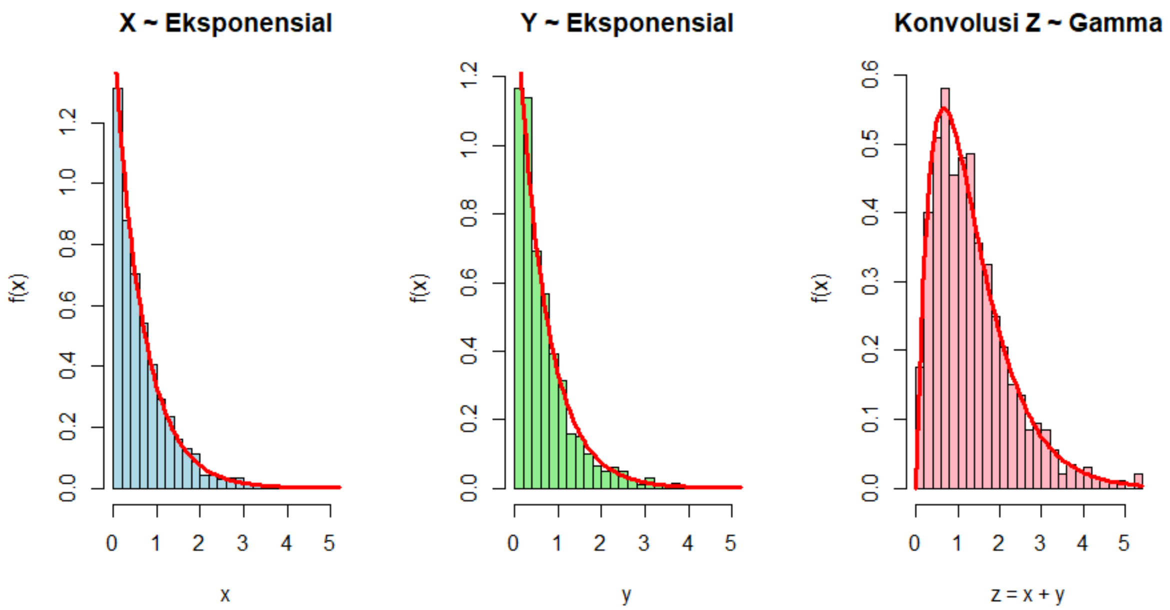
Dalam praktik, konvolusi dapat dihitung secara analitik (menggunakan integral), namun sering kali lebih mudah dilakukan dengan simulasi komputer menggunakan perangkat lunak statistik seperti R. Pendekatan ini sangat membantu untuk memperlihatkan secara visual bagaimana bentuk distribusi berubah akibat penjumlahan peubah acak.

Contoh Simulasi Konvolusi Peubah Acak Distribusi Eksponensial

Dalam modul ini akan dilalukan simulasi konvolusi dari dua peubah acak yang berdistribusi eksponensial dengan nilai lambda yang sama dan berbeda. Masing-masing peubah acak akan dibangkitkan secara acak dengan $n = 100$, kemudian akan dilkakukan visualisasi data mengenai sebaran datanya.

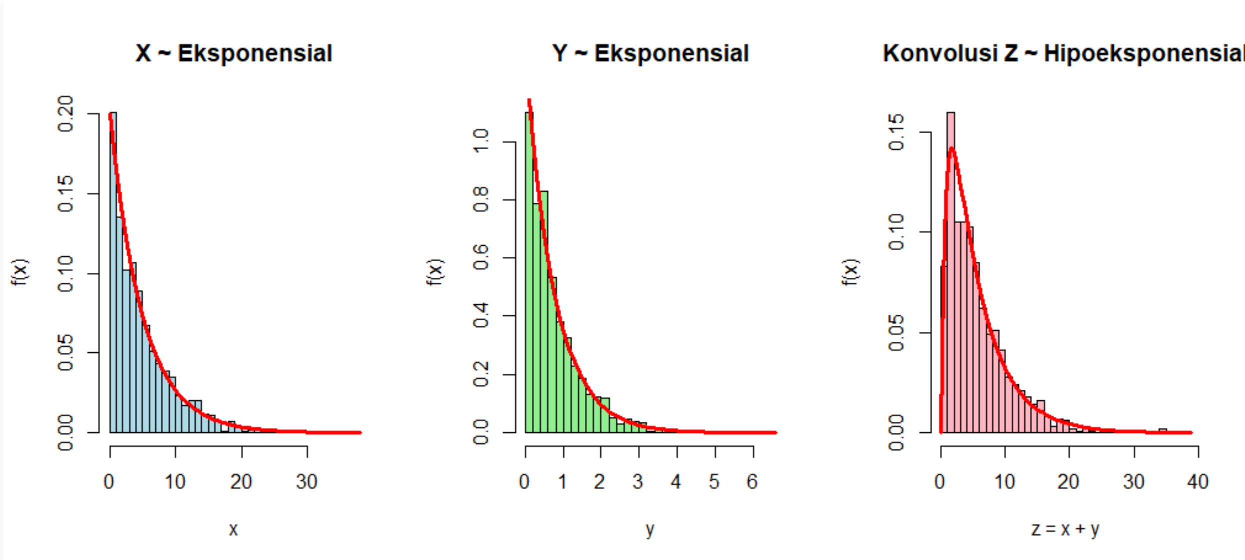
```r
set.seed(123)
n <- 100 # Jumlah Sampel

# ------------------------------
# 1. Kasus X, Y ~ Exp(lambda) sama (Gamma)
# ------------------------------
lambda <- 1.5

# Bangkitkan Peubah Acak
X_same <- rexp(n, rate = lambda)
Y_same <- rexp(n, rate = lambda)

# Konvolusi (Jumlah)
Z_gamma <- X_same + Y_same

# Visualisasi
par(mfrow=c(1,3)) # Menampilkan 3 plot sejajar
```

```r
#Membuat Plot Distribusi Peubah Acak X
hist(X_same, breaks=30, probability=TRUE, col="lightblue",
     main="X ~ Eksponensial",
     xlab="x", ylab="f(x)")
curve(dexp(x, rate=lambda), col="red", lwd=2, add=TRUE)

#Membuat Plot Distribusi Peubah Acak Y
hist(Y_same, breaks=30, probability=TRUE, col="lightgreen",
     main="Y ~ Eksponensial",
     xlab="y", ylab="f(x)")
curve(dexp(x, rate=lambda), col="red", lwd=2, add=TRUE)

#Membuat Plot Distribusi Konvolusi Peubah Acak Z~Gamma
hist(Z_gamma, breaks = 30, probability = TRUE,
     col = "lightpink", main = "Konvolusi Z ~ Gamma",
     xlab = "z = x + y", ylab="f(x)")
curve(dgamma(x, shape = 2, rate = lambda),
      col="red", lwd=2, add=TRUE)
```



Kode di atas merupakan kode untuk membangkitkan dua peubah acak X dan Y yang masing-masing berdistribusi eksponensial dengan parameter $\lambda = 1.5$. Konvolusi dari kedua peubah acak ini ($Z = X + Y$), hasilnya mengikuti distribusi Gamma dengan parameter bentuk (*shape*) $k = 2$ dan laju (*rate*) λ yang sama. Visualisasi histogram menunjukkan bahwa distribusi X dan Y masing-masing mendekati kurva eksponensial (garis merah), sedangkan distribusi konvolusi Z membentuk pola Gamma yang sesuai dengan teori (juga ditunjukkan dengan garis merah). Hal ini mengilustrasikan hubungan antara distribusi eksponensial dan distribusi gamma melalui konvolusi.

```r
# ------------------------------
# 2. Kasus X ~ Exp(lambda1), Y ~ Exp(lambda2) berbeda (Hipoeksponensial)
# ------------------------------
lambda1 <- 0.2
lambda2 <- 1.3

# Bangkitkan peubah acak
X_diff <- rexp(n, rate = lambda1)
Y_diff <- rexp(n, rate = lambda2)

# Konvolusi
Z_hypo <- X_diff + Y_diff

# Visualisasi
par(mfrow=c(1,3)) # Menampilkan 3 plot sejajar
#Membuat Plot Distribusi Peubah Acak X
hist(X_diff, breaks=30, probability=TRUE, col="lightblue",
     main="X ~ Eksponensial",
     xlab="x", ylab="f(x)")
curve(dexp(x, rate=lambda1), col="red", lwd=2, add=TRUE)

#Membuat Plot Distribusi Peubah Acak Y
hist(Y_diff, breaks=30, probability=TRUE, col="lightgreen",
     main="Y ~ Eksponensial",
     xlab="y", ylab="f(x)")
curve(dexp(x, rate=lambda2), col="red", lwd=2, add=TRUE)

#Membuat Plot Distribusi Konvolusi Peubah Acak Z~Hipoeksponensial
hist(Z_hypo, breaks = 30, probability = TRUE,
     col = "lightpink", main = "Konvolusi Z ~ Hipoeksponensial",
     xlab = "z = x + y", ylab="f(x)")
# Tambahkan Kurva Teoritis Hipoeksponensial
# PDF Hipoeksponensial: f(z) = (λ1 λ2 / (λ2 - λ1)) (exp(-λ1 z) - exp(-λ2 z))
curve((lambda1*lambda2/(lambda2-lambda1))*(exp(-lambda1*x) - exp(-
lambda2*x)),
      add = TRUE, col = "red", lwd = 2)
```



Kode tersebut membangkitkan dua peubah acak independen X dan Y yang masing-masing berdistribusi eksponensial tetapi dengan laju yang berbeda ($\lambda_1 = 0.2$ dan $\lambda_2 = 1.3$). Konvolusi dari peubah acak X dan Y dimisalkan $Z = X + Y$. Untuk setiap peubah acak dibuat histogram sampel dan kurva PDF eksponensial teoritis (garis merah). Grafik konvolusi Z (histogram ketiga) menunjukkan bentuk yang berbeda dari kasus ketika kedua laju sama (Gamma). Karena λ berbeda, PDF teoritis Z bukan gamma sederhana melainkan bentuk hipoeksponensial dengan rumus

$$f_{X_i+\cdots+X_n}(t) = \sum_{i=1}^{n} C_{i,n}\lambda_i e^{-\lambda_i t}$$

dengan

$$C_{i,n} = \prod_{j\neq i} \frac{\lambda_j}{\lambda_j - \lambda_i}.$$

Kurva teoritis (garis merah) di atas histogram Z memperlihatkan puncak dan ekor yang merupakan gabungan dari dua peubah acak eksponensial, yaitu kontribusi dari laju kecil ($\lambda_1 = 0.2$) memberikan ekor yang lebih panjang (nilai besar lebih mungkin), sementara laju besar ($\lambda_2 = 1.3$) menekan massa ke arah nol. Dapat dismpulkan, bahwa penjumlahan dua eksponensial dengan laju berbeda menghasilkan distribusi yang asimetris dan tidak sama dengan gamma sederhana, grafik mengilustrasikan bagaimana masing-masing komponen memengaruhi bentuk total distribusi.