

Modul 1 Pengenalan Proses Stokastik

Mika Alvionita Sitinjak

09 September 2025

Pendahuluan Proses Stokastik

Proses stokastik adalah sekumpulan variabel acak yang didefinisikan pada suatu himpunan indeks, biasanya waktu, sehingga nilai variabel tersebut dapat berubah secara acak dari satu saat ke saat lainnya. Dengan kata lain, proses stokastik merupakan model matematis yang digunakan untuk menggambarkan fenomena yang dipengaruhi oleh ketidakpastian dan berlangsung secara dinamis. Contoh umum dari proses stokastik antara lain random walk, rantai Markov, proses Poisson, serta proses Brownian. Dalam kehidupan nyata, proses stokastik digunakan untuk memodelkan berbagai sistem yang tidak pasti, seperti pergerakan harga saham, antrean pelanggan di sebuah layanan, penyebaran penyakit, hingga fluktuasi jumlah populasi. Melalui pendekatan ini, kita dapat menganalisis probabilitas terjadinya suatu keadaan, memperkirakan perkembangan sistem, serta membuat keputusan yang lebih tepat di tengah ketidakpastian.

Sehingga, proses stokastik sangat erat kaitannya dengan konsep probabilitas karena pada dasarnya proses ini dibangun dari sekumpulan peubah acak yang nilainya tidak pasti, tetapi dapat dijelaskan dengan distribusi probabilitas. Pada setiap titik waktu, nilai dari suatu proses stokastik bukanlah angka pasti, melainkan memiliki distribusi peluang tertentu. Dengan demikian, teori peluang menjadi dasar untuk memahami sifat-sifat proses stokastik, seperti distribusi peluang tunggal, distribusi peluang bersama, nilai harapan, variansi, hingga probabilitas transisi antar-keadaan. Misalnya, jumlah pasien yang datang ke klinik dalam satu jam dapat dimodelkan dengan proses Poisson, yang memungkinkan kita menghitung peluang “tepat tiga pasien datang” atau “lebih dari lima pasien datang” dalam suatu periode waktu. Contoh lain adalah pergerakan harga saham atau detak jantung pasien ICU yang bisa dimodelkan sebagai proses stokastik, di mana peluang perubahan nilainya dari waktu ke waktu dapat dianalisis untuk memahami pola dan risiko yang ada. Dengan kata lain, proses stokastik menyediakan kerangka untuk memodelkan fenomena acak dinamis, sedangkan peluang memberikan bahasa matematis untuk menjelaskan ketidakpastian tersebut.

Berikut untuk akan dilakukan simulasi berapa banyak topping “pepperoni” yang dipilih sebelum topping “pineapple” muncul pertama kali, jika kita memilih secara acak dari daftar topping.

```
trials <- 10000 # simulation repeated 10,000 times
simlist <- numeric(trials)
toppings <- c("pepper", "pepperoni", "pineapple",
"prawns", "prosciutto")
for (i in 1:trials) {
  pineapple <- 0
```

```

pepperoni <- 0 # counts pepperonis before pineapple
while (pineapple == 0) {
  pick <- sample(toppings,1)
  if (pick == "pepperoni") pepperoni <- pepperoni + 1
  if (pick == "pineapple") pineapple <- 1 }
simlist[i] <- pepperoni }
mean(simlist)

## [1] 1.0025

```

Selanjutnya, simulasi dilakukan untuk menghitung nilai harapan (expected value) dan standar deviasi dari pembayaran (payout) yang diterima Ellen berdasarkan suatu aturan tertentu. Dalam simulasi ini, expense dimodelkan mengikuti distribusi eksponensial dengan nilai rata-rata 500, sehingga setiap kali dilakukan percobaan, dihasilkan satu angka acak dari distribusi tersebut. Aturan pembayaran yang diterapkan adalah jika expense lebih kecil atau sama dengan 100, maka payout = 0, sedangkan jika expense lebih besar dari 100, maka payout dihitung sebagai expense – 100. Simulasi dilakukan sebanyak 100.000 kali, dan setiap hasil payout disimpan dalam vektor. Dari hasil simulasi, diperoleh rata-rata payout sekitar 410,03 yang merepresentasikan nilai harapan pembayaran, serta standar deviasi sekitar 493,55 yang menunjukkan seberapa besar variasi pembayaran dari satu percobaan ke percobaan lainnya. Dengan demikian, kode di bawah ini memberikan gambaran probabilistik mengenai potensi pembayaran Ellen melalui pendekatan simulasi stokastik.

```

trials <- 100000
simlist <- numeric(trials)
for (i in 1:trials) {
  expense <- rexp(1,1/500)
  payout <- max(0, expense-100)
  simlist[i] <- payout}
mean(simlist)

## [1] 410.1914

sd(simlist)

## [1] 493.4329

```

Ruang Parameter dan Ruang Keadaan

Dalam analisis probabilitas dan proses stokastik, terdapat dua konsep penting yaitu ruang keadaan dan ruang parameter. Ruang keadaan adalah himpunan semua kemungkinan nilai atau kondisi yang dapat dicapai oleh suatu peubah acak. Misalnya, jika kita mempelajari status kesehatan pasien, maka ruang keadaannya bisa berupa {sehat, sakit ringan, sakit berat}, atau jika kita menghitung jumlah pasien yang datang ke klinik per jam, maka ruang keadaannya adalah bilangan bulat non-negatif 0,1,2, Sementara itu, ruang parameter adalah himpunan nilai yang digunakan untuk mengindeks atau mengatur proses stokastik tersebut, yang umumnya berupa dimensi waktu. Sebagai contoh, jika kita

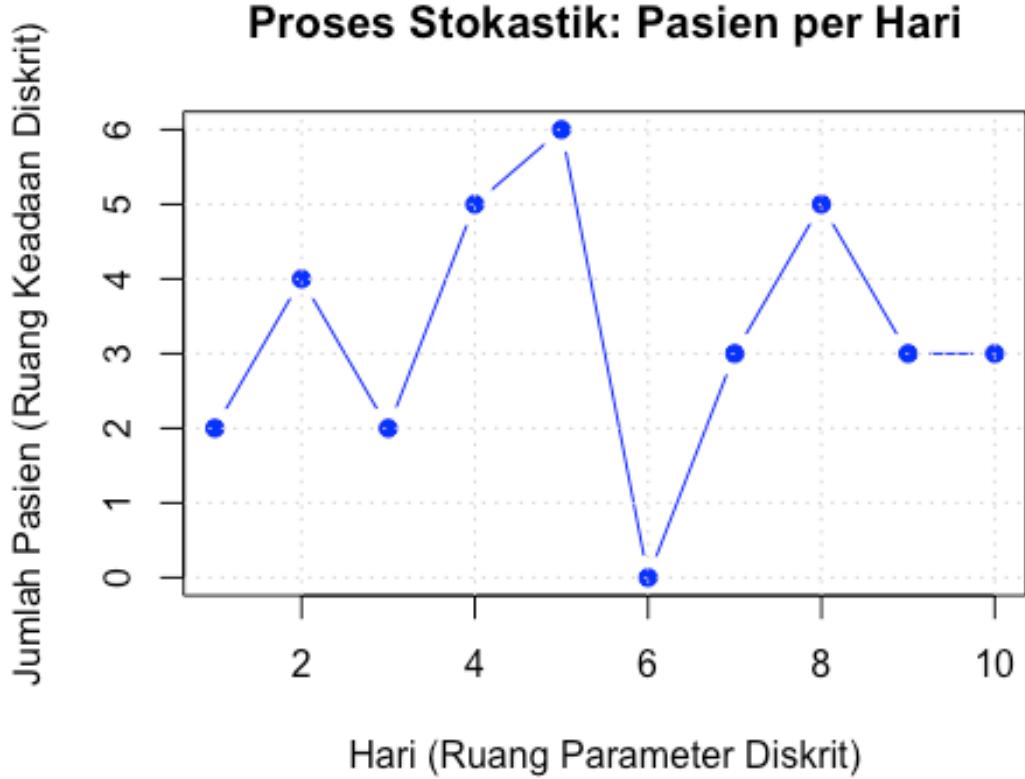
mengamati jumlah pasien setiap jam, maka ruang parameternya adalah $0,1,2, \dots$ dalam satuan jam, atau jika mengamati suhu tubuh pasien dari waktu ke waktu, ruang parameternya adalah waktu kontinu $t \geq 0$. Dengan demikian, ruang keadaan menggambarkan apa saja nilai yang mungkin terjadi, sedangkan ruang parameter menunjukkan kapan atau dalam kondisi apa nilai tersebut diamati.

Dalam proses stokastik, ruang keadaan dan ruang parameter dapat dibedakan menjadi beberapa jenis sesuai dengan sifat data yang diamati. Ruang keadaan dapat berbentuk diskrit terbatas, misalnya status kesehatan pasien {sehat, sakit ringan, sakit berat}, atau diskrit tak terbatas, misalnya jumlah pasien yang datang ke klinik dalam satu jam $0,1,2,3, \dots$. Selain itu, ruang keadaan juga bisa kontinu, seperti kadar gula darah pasien yang dapat bernilai pada rentang tertentu, misalnya antara 50 hingga 300 mg/dL, atau bahkan berbentuk campuran, misalnya dalam analisis keuangan di mana status pasar (naik atau turun) bersifat diskrit sedangkan harga saham bersifat kontinu. Sementara itu, ruang parameter biasanya berkaitan dengan dimensi waktu pengamatan. Ruang parameter bisa diskrit terbatas, contohnya pengukuran tekanan darah hanya pada waktu pagi, siang, dan malam; diskrit tak terbatas, misalnya jumlah pasien diamati setiap hari ke-1, ke-2, ke-3, dan seterusnya; atau kontinu, misalnya detak jantung pasien yang direkam setiap saat $t \geq 0$. Dengan demikian, kombinasi jenis ruang keadaan dan ruang parameter memberikan kerangka yang fleksibel untuk memodelkan berbagai fenomena acak dalam dunia nyata, baik di bidang kesehatan, ekonomi, maupun sains lainnya.

Ruang Parameter Diskrit dan Ruang Keadaan Diskrit

Ruang parameter diskrit berarti proses stokastik diamati pada waktu atau indeks yang berupa bilangan bulat, misalnya hari ke-1, hari ke-2, dan seterusnya. Sedangkan ruang keadaan diskrit berarti nilai peubah acak yang diamati hanya bisa berupa bilangan bulat atau kategori tertentu. Jika keduanya digabung, maka kita memiliki proses stokastik dengan pengamatan pada waktu diskrit, dan setiap hasil pengamatan juga diskrit. Contoh umum adalah jumlah pasien yang datang ke klinik per hari: waktu diamati per hari (parameter diskrit), dan jumlah pasien hanya bisa bernilai $0, 1, 2, \dots$ (keadaan diskrit). Contoh lain dalam kesehatan adalah jumlah kambuh asma yang dialami pasien dalam periode bulanan; waktunya diskrit (bulan ke-1, bulan ke-2, ...) dan nilainya diskrit (0 kali, 1 kali, 2 kali, dst). Contohnya:

```
set.seed(123)
hari <- 1:10 # ruang parameter diskrit (hari ke-1 s/d 10)
pasien <- rpois(10, lambda = 3) # ruang keadaan diskrit (jumlah pasien)
df <- data.frame(Hari = hari, Jumlah_Pasien = pasien)
plot(df$Hari, df$Jumlah_Pasien, type = "b", pch = 19, col = "blue",
      xlab = "Hari (Ruang Parameter Diskrit)",
      ylab = "Jumlah Pasien (Ruang Keadaan Diskrit)",
      main = "Proses Stokastik: Pasien per Hari")
grid()
```



Dalam simulasi ini, ruang parameter berupa hari ke-1 sampai ke-10, sedangkan ruang keadaan adalah jumlah pasien yang datang setiap hari yang hanya dapat bernilai bilangan bulat non-negatif. Data jumlah pasien dihasilkan menggunakan distribusi Poisson dengan rata-rata tiga pasien per hari, yang sesuai untuk memodelkan peristiwa kedatangan pasien di klinik. Pada grafik tersebut, sumbu horizontal menunjukkan hari (parameter diskrit), sedangkan sumbu vertikal menunjukkan jumlah pasien (keadaan diskrit). Dengan tambahan garis bantu grid, pola fluktuasi jumlah pasien dari hari ke hari dapat diamati dengan jelas. Secara keseluruhan, kode ini memperlihatkan bagaimana konsep ruang parameter diskrit dan ruang keadaan diskrit dapat diterapkan dalam analisis data kesehatan.

Ruang Parameter Diskrit dan Ruang Keadaan Kontinu

Ruang parameter diskrit berarti proses stokastik diamati hanya pada titik-titik waktu tertentu, misalnya hari ke-1, ke-2, ke-3, dan seterusnya. Sementara itu, ruang keadaan kontinu berarti nilai yang dapat diambil oleh peubah acak pada tiap titik waktu tersebut berada pada suatu interval kontinu, bukan sekadar bilangan bulat. Contohnya, seorang peneliti mencatat kadar gula darah pasien setiap pagi selama 7 hari berturut-turut. Waktu pengamatan (hari ke-1 sampai hari ke-7) merupakan ruang parameter diskrit, sedangkan kadar gula darah yang bisa bernilai antara 70 hingga 200 mg/dL merupakan ruang keadaan kontinu. Model seperti ini umum digunakan dalam kesehatan, keuangan, maupun sains

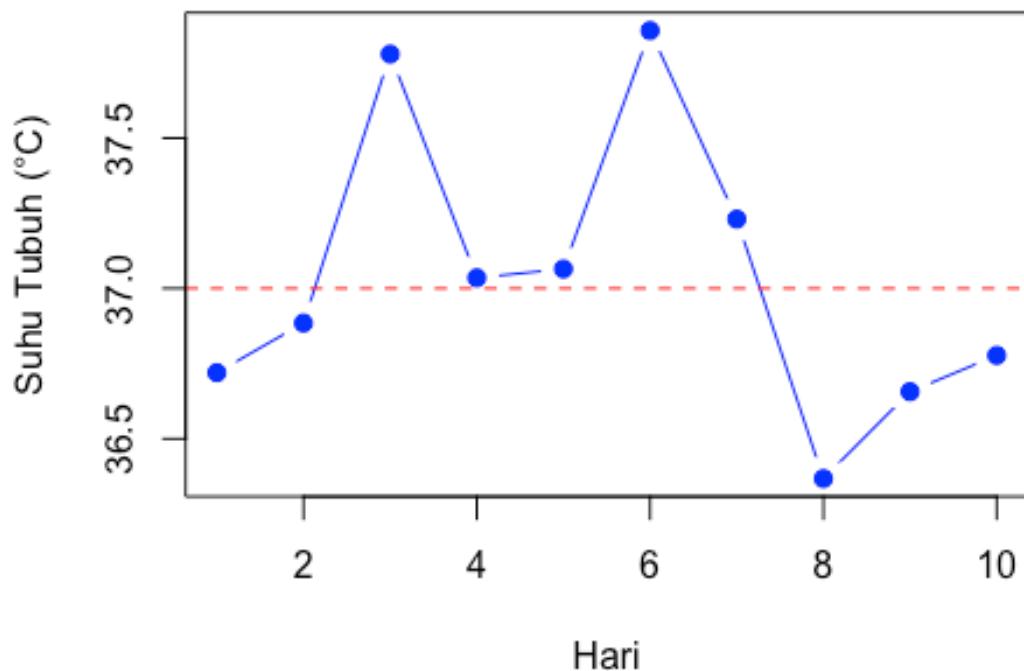
lingkungan ketika variabel yang diamati berupa data kontinu tetapi dicatat hanya pada waktu-waktu tertentu. Contohnya.

```
set.seed(123)
# ruang parameter: hari ke-1 s/d ke-10 (diskrit)
hari <- 1:10
# ruang keadaan: suhu tubuh (kontinu, normal ~ N(37, 0.5))
suhu <- rnorm(10, mean = 37, sd = 0.5)
data <- data.frame(Hari = hari, Suhu = suhu)
print(data)

##      Hari     Suhu
## 1    1 36.71976
## 2    2 36.88491
## 3    3 37.77935
## 4    4 37.03525
## 5    5 37.06464
## 6    6 37.85753
## 7    7 37.23046
## 8    8 36.36747
## 9    9 36.65657
## 10 10 36.77717

plot(hari, suhu, type = "b", col = "blue", pch = 19,
      xlab = "Hari", ylab = "Suhu Tubuh (°C)",
      main = "Proses Stokastik: Ruang Parameter Diskrit, Ruang Keadaan
Kontinu")
abline(h = 37, col = "red", lty = 2)
```

s Stokastik: Ruang Parameter Diskrit, Ruang Keadaan



Kode R di atas mensimulasikan sebuah proses stokastik dengan ruang parameter diskrit dan ruang keadaan kontinu. Pertama, ditentukan bahwa pengamatan dilakukan setiap hari selama 10 hari, sehingga variabel hari $< 1:10$ mewakili ruang parameter yang bersifat diskrit. Kemudian, ruang keadaan kontinu dimodelkan melalui variabel suhu, yang berisi data suhu tubuh pasien yang dihasilkan secara acak dari distribusi normal dengan rata-rata 37°C dan simpangan baku 0,5 ($rnorm(10, mean = 37, sd = 0.5)$). Nilai suhu ini bersifat kontinu karena dapat berupa bilangan riil, misalnya 36,2 atau 37,8. Grafik dengan sumbu-x mewakili hari dan sumbu-y mewakili suhu tubuh, sehingga terlihat bagaimana nilai suhu tubuh pasien berubah setiap harinya. Garis horizontal merah putus-putus ditambahkan pada suhu 37°C sebagai pembanding.

Ruang Parameter Kontinu dan Ruang Keadaan Diskrit

Ruang parameter kontinu berarti proses stokastik diamati pada setiap titik waktu yang bersifat kontinu, misalnya $t \geq 0$. Artinya, kita bisa mengamati proses ini kapan saja dalam skala waktu yang tidak terputus, bukan hanya pada waktu diskrit tertentu. Sementara itu, ruang keadaan diskrit menunjukkan bahwa nilai atau keadaan yang mungkin dari proses hanya berupa himpunan diskrit (misalnya bilangan bulat atau kategori tertentu). Kombinasi ini banyak muncul dalam fenomena nyata, seperti proses Poisson yang menghitung jumlah kejadian (misalnya jumlah pasien yang masuk IGD) sepanjang waktu. Walaupun waktunya kontinu, jumlah pasien yang datang tetap berupa bilangan bulat 0, 1, 2, dan

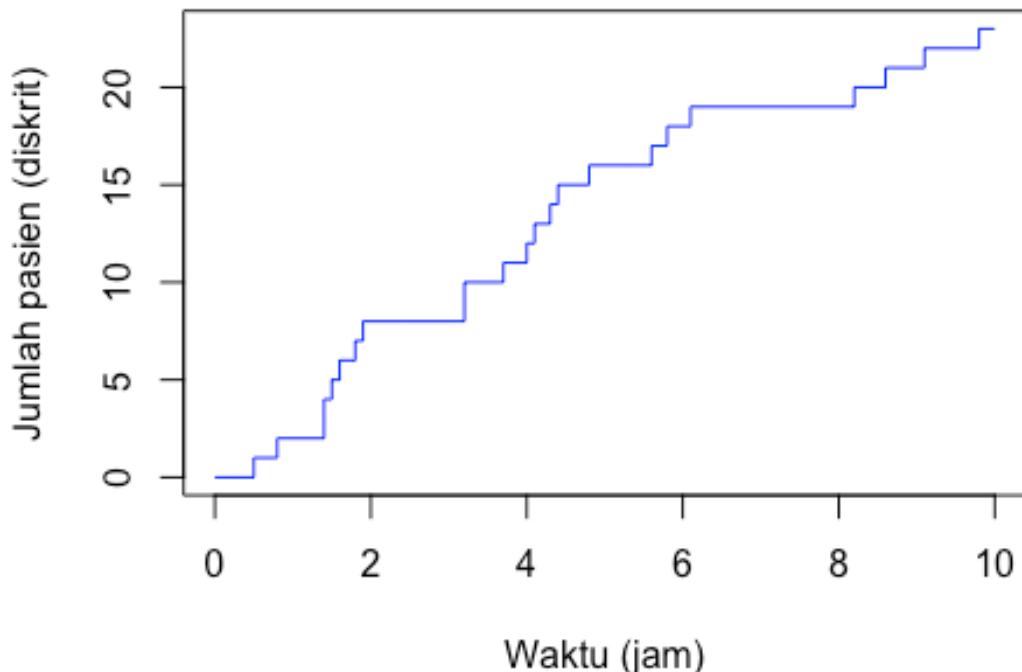
seterusnya. Dengan demikian, ruang parameter kontinu digunakan untuk menggambarkan dinamika sepanjang waktu yang mengalir, sedangkan ruang keadaan diskrit menunjukkan hasil pengamatan yang terbatas pada nilai tertentu. Contohnya:

```
set.seed(123)
lambda <- 2 # rata-rata kedatangan pasien per jam
Tmax <- 10 # waktu maksimum observasi (jam)
arrival_times <- cumsum(rexp(100, rate = lambda))
arrival_times <- arrival_times[arrival_times <= Tmax]

time_points <- seq(0, Tmax, by = 0.1) # parameter kontinu (grid waktu rapat)
num_patients <- sapply(time_points, function(t) sum(arrival_times <= t))

plot(time_points, num_patients, type = "s", col = "blue",
      main = "Simulasi Proses Poisson",
      xlab = "Waktu (jam)", ylab = "Jumlah pasien (diskrit)")
```

Simulasi Proses Poisson



Kode di atas merupakan simulasi proses Poisson, yaitu contoh klasik dari proses stokastik dengan ruang parameter kontinu dan ruang keadaan diskrit. Pada awalnya, ditentukan parameter laju kedatangan $\lambda = 2$ pasien per jam dan waktu pengamatan maksimum 10 jam. Dengan menggunakan distribusi eksponensial (rexp), kode menghasilkan waktu antar-kedatangan pasien, lalu menjumlahkannya (cumsum) sehingga diperoleh urutan

waktu kedatangan pasien dalam periode pengamatan. Setelah itu, dibuat grid waktu yang rapat (`seq(0, Tmax, by = 0.1)`), sehingga kita dapat menghitung jumlah pasien yang sudah datang hingga setiap titik waktu t dengan `sapply`. Hasil perhitungan jumlah pasien ini kemudian diplot dengan tipe garis tangga (type = "s"), yang menunjukkan bahwa waktu (sumbu-x) bersifat kontinu, tetapi jumlah pasien (sumbu-y) hanya dapat bertambah dengan bilangan bulat 0, 1, 2, dan seterusnya. Dengan demikian, kode ini mengilustrasikan bagaimana proses Poisson merepresentasikan fenomena acak di mana peristiwa terjadi secara acak sepanjang waktu, namun jumlah kejadian tetap berupa variabel diskrit.

Ruang Parameter Kontinu dan Ruang Keadaan Kontinu

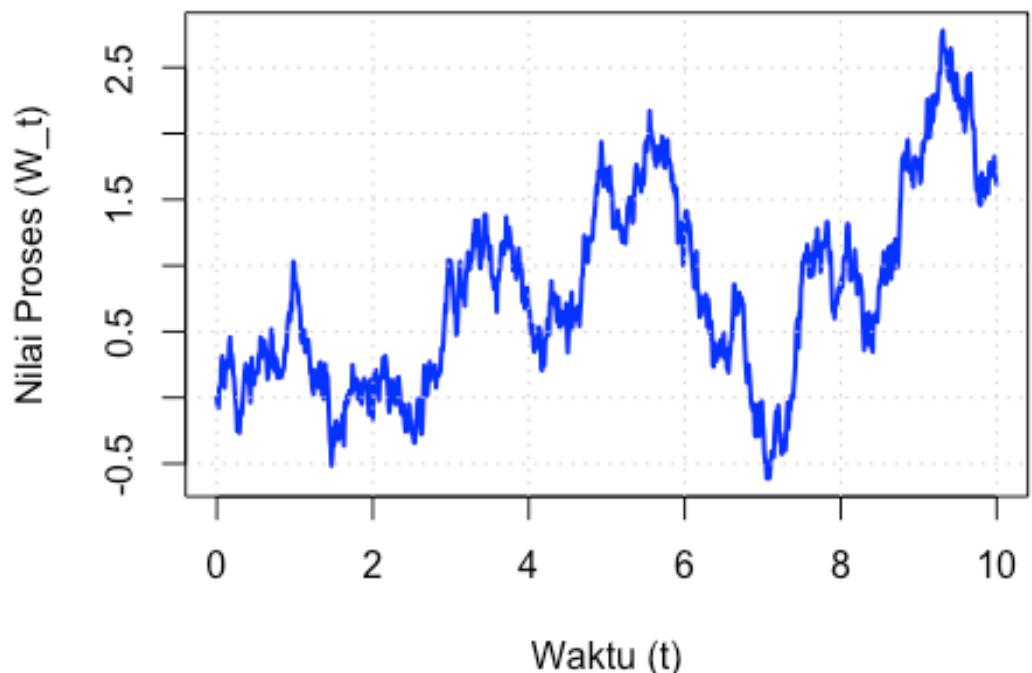
Ruang parameter kontinu dan ruang keadaan kontinu sering muncul dalam pemodelan fenomena nyata yang berubah seiring waktu dan memiliki nilai dalam rentang kontinu. Ruang parameter kontinu berarti pengamatan dilakukan pada waktu yang bersifat kontinu, misalnya setiap detik, menit, atau bahkan pada setiap titik waktu $t \geq 0$. Sementara itu, ruang keadaan kontinu berarti nilai dari peubah acak yang diamati dapat berada pada interval bilangan real, bukan hanya angka diskrit. Contoh umum dalam kesehatan adalah pemantauan detak jantung pasien atau kadar gula darah dari waktu ke waktu. Waktu (parameter) berjalan secara kontinu, sedangkan detak jantung atau kadar gula darah dapat bernilai dalam rentang real tertentu. Contohnya.

```
# Jumlah Langkah waktu
n <- 1000
# Interval waktu
dt <- 0.01
# Waktu kontinu (0 sampai 10 dengan interval 0.01)
time <- seq(0, n*dt, by = dt)

set.seed(123) # agar hasil reproduksibel
increments <- rnorm(n, mean = 0, sd = sqrt(dt))
W <- c(0, cumsum(increments)) # posisi hasil penjumlahan acak

# Plot hasil simulasi
plot(time, W, type = "l", col = "blue", lwd = 2,
      xlab = "Waktu (t)", ylab = "Nilai Proses (W_t)",
      main = "Simulasi Ruang Parameter Kontinu dan Ruang Keadaan Kontinu")
grid()
```

ulasi Ruang Parameter Kontinu dan Ruang Keadaan



Kode R di atas mensimulasikan proses stokastik dengan ruang parameter kontinu dan ruang keadaan kontinu. Pertama, ditentukan jumlah langkah waktu ($n < 1000$) dengan interval kecil $dt < 0.01$, sehingga rentang waktu berjalan dari 0 hingga 10 secara kontinu. Selanjutnya dibuat vektor $time$ yang berisi titik-titik waktu tersebut. Kemudian dihasilkan increment acak dari distribusi normal standar dengan simpangan baku $dt < 1$ yang disimpan dalam variabel $increments$. Nilai proses ini dibentuk dengan menjumlahkan secara kumulatif nilai-nilai increment tersebut, dimulai dari nol (cumsum). Dengan demikian, W menggambarkan lintasan acak (sample path) yang dapat berubah naik atau turun secara kontinu. Bagian akhir kode membuat grafik dengan sumbu-x menunjukkan waktu kontinu (ruang parameter) dan sumbu-y menunjukkan nilai proses yang bersifat kontinu (ruang keadaan). Hasilnya adalah sebuah kurva acak berwarna biru yang menunjukkan bagaimana proses ini berkembang dari waktu ke waktu, sesuai dengan sifat stokastik yang memiliki variabilitas pada setiap titik waktu.