# MODUL 4 ANALISIS MULTIVARIAT
# MANOVA Two Way
# 6 Oktober 2025

**Vina Nurmadani**

ANALISIS MULTIVARIAT merupakan salah satu jenis analisis statistik yang digunakan untuk menganalisis data yang terdiri dari banyak variabel yaitu variabel bebas (Independen variabel/ IV) dan variabel tak bebas (Dependent variabel/DV). Data Multivariate adalah data yang dikumpulkan dari dua atau lebih observasi dengan mengukur observasi tersebut dengan beberapa karakteristik.

Analisis Multivariat terbagi menjadi 2 jenis yaitu dependensi dan interdependensi. Jenis dependensi mempunyai konsep variabel ada pemisahan yang jelas antara variabel IV dan DV, sedangkan jenis interdependensi tidak ada pemisah antara DV dan IV. Semua variabel diperlakukan setara. Contoh dari Analisis Dependensi Adalah ANOVA/MANOVA, Regresi Linear/Berganda, Analisis Diskriminan dsb. Contoh dari analisis multivariat interdependensi Adalah Analisis Faktor, Analisis Cluster dan Multidimensial Scalling (MDS).

Dalam penelitian ilmiah, sering kali peneliti dihadapkan pada situasi di mana lebih dari satu variabel dependen diukur secara bersamaan. Misalnya, dalam bidang biologi, psikologi, pendidikan, maupun ekonomi, peneliti tidak hanya tertarik pada satu aspek hasil, melainkan pada beberapa indikator yang saling berkaitan. Penggunaan analisis varians (ANOVA) pada setiap variabel dependen secara terpisah tidak cukup efisien, karena meningkatkan risiko kesalahan tipe I akibat banyaknya pengujian yang dilakukan secara independen.

Untuk mengatasi permasalahan tersebut, digunakanlah *Multivariate Analysis of Variance* (MANOVA), yaitu perluasan dari ANOVA yang memungkinkan pengujian perbedaan rata-rata antar kelompok dengan mempertimbangkan lebih dari satu variabel dependen secara simultan. MANOVA memberikan keunggulan dalam mendeteksi hubungan antar variabel dependen dan mengevaluasi pengaruh faktor bebas terhadap kombinasi variabel-variabel tersebut secara bersamaan.

Melalui MANOVA, peneliti dapat memperoleh pemahaman yang lebih komprehensif terhadap pola data multivariat, seperti apakah suatu perlakuan memiliki pengaruh seragam terhadap seluruh variabel respon, atau hanya terhadap sebagian di antaranya. Dengan demikian, MANOVA menjadi alat analisis yang penting dalam penelitian eksperimental dan observasional yang melibatkan lebih dari satu variabel hasil yang saling berkaitan.

1. **Perbedaan ANOVA vs MANOVA**
   Bentuk umum ANOVA dan MANOVA :

| | |
|---|---|
| ANOVA : | $Y_1 = X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_n$ |
| MANOVA : | $Y_1 + Y_2 + Y_3 + \cdots + Y_6 = X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_n$ |

MANOVA menguji ada tidaknya perbedaan rata-rata dari dua atau lebih variabel takbebas secara simultan (simultaneously) berdasarkan kelompok-kelompok pada variabel bebas. Pada MANOVA, variabel bebas (IV) bersifat non-metrik yaitu terdisi dari beberapa kelompok/kategori, sedangkan variabel tak bebas bersifat metrik (interval atau rasio)

| **ANOVA** | **MANOVA** |
|---|---|
| Digunakan untuk mengetahui apakah terdapat perbedaan pengaruh perlakuan terhadap satu variabel dependen | Mengetahui apakah terdapat pengaruh terhadap lebih dari satu variabel dependen |
| Ketergantungan di antara variabel respon tidak menjadi perhatian utama karena pada dasarnya terdapat anggapan bahwa variabel-variabel respon saling bebas satu sama lain sehingga pengkajian struktur keragaman hanya dilakukan terhadap setiap variabel respon secara terpisah | Mempertimbangkan adanya ketergantungan antar variabel respons sehingga cocok digunakan untuk pengkajian pengaruh dari berbagai perlakuan terhadap lebih dari satu respon |

**Mengapa diperlukan MANOVA dua arah (dua faktor independen, lebih dari satu DV)?**

MANOVA dua arah digunakan ketika penelitian melibatkan dua variabel independen (faktor) dan lebih dari satu variabel dependen (DV) yang saling berkaitan. Analisis ini diperlukan untuk memahami pengaruh masing-masing faktor secara simultan terhadap beberapa variabel hasil, serta untuk mengetahui interaksi antara kedua faktor tersebut. Dengan MANOVA dua arah, peneliti dapat:

1. Menguji apakah masing-masing faktor memiliki pengaruh signifikan terhadap kombinasi variabel dependen.
2. Mendeteksi apakah terdapat interaksi antara kedua faktor yang memengaruhi pola variabel dependen secara bersama.
3. Menghindari peningkatan kesalahan tipe I yang mungkin terjadi jika setiap variabel dependen diuji secara terpisah menggunakan ANOVA.

   Dengan demikian, MANOVA dua arah memberikan gambaran yang lebih menyeluruh dan efisien terhadap pengaruh dua faktor independen terhadap beberapa variabel dependen yang saling berhubungan.

2. **Konsep Dasar**

   Definisi MANOVA dua arah.

   Model Two-Way multivariat :

$$X_{\ell kr} = \mu + \tau_\ell + \beta_k + \gamma_{\ell k} + e_{\ell kr}$$
$$\ell = 1,2,..,g$$
$$k = 1,2,..,b$$

$$r = 1,2,..,n$$

Dimana : $\sum_{\ell=1}^{g} \tau_\ell = \sum_{k=1}^{b} \tau_\ell = \sum_{\ell=1}^{g} \gamma_{\ell k} = \sum_{k=1}^{b} \gamma_{\ell k} = 0$. Semua vector tersebut berukuran $p \times 1$ dan $e_{\ell kr} \sim NIID(0, \sigma^2)$

$\mu$ : rata-rata keseluruhan
$\tau_\ell$ : efek faktor 1
$\beta_k$ : efek faktor 2
$\gamma_{\ell k}$ : efek faktor interaksi faktor 1 dan faktor 2

$$SS_{cor} = SS_{fac1} + SS_{fac2} + SS_{int} + SS_{res}$$

Dengan Derajat Bebas yang terkait dengan setiap jumlah persamaan :

$gbn - 1 = (g - 1) + (b - 1) + (g - 1)(b - 1) + gb(n - 1)$

**Tabel MANOVA two-way**

| **Sumber Variasi** | **Matriks of Sum of Squares & Cross Product (SSP)** | **Degree of Freedom** |
|---|---|---|
| **Faktor 1** | $SSP_{fac1} = \sum_{\ell=1}^{g} bn(\bar{x}_{\ell.} - \bar{x})(\bar{x}_{\ell.} - \bar{x})'$ | $g - 1$ |
| **Faktor 2** | $SSP_{fac2} = \sum_{k=1}^{b} gn(\bar{x}_{.k} - \bar{x})(\bar{x}_{.k} - \bar{x})'$ | $b - 1$ |
| **Interaksi** | $SSP_{int} = \sum_{\ell=1}^{g}\sum_{k=1}^{b} n(\bar{x}_{\ell k} - \bar{x}_{\ell.} - \bar{x}_{.k} + \bar{x})(\bar{x}_{\ell k} - \bar{x}_{\ell.} - \bar{x}_{.k} + \bar{x})'$ | $(g - 1)(b - 1)$ |
| **Residual (Error)** | $SSP_{res} = \sum_{\ell=1}^{g}\sum_{k=1}^{b}\sum_{r=1}^{n}(x_{\ell kr} - \bar{x}_{\ell k})(x_{\ell kr} - \bar{x}_{\ell k})'$ | $gb(n - 1)$ |
| **Total (Corrected)** | $SSP_{cor} = \sum_{\ell=1}^{g}\sum_{k=1}^{b}\sum_{r=1}^{n}(x_{\ell kr} - \bar{x})(x_{\ell kr} - \bar{x})'$ | $gbn - 1$ |

Dalam MANOVA dua arah, terdapat beberapa komponen utama analisis, yaitu:

a. **Variabel bebas (independen):** terdiri dari dua faktor, misalnya faktor A dan faktor B, yang masing-masing memiliki beberapa taraf atau level perlakuan.
b. **Variabel terikat (dependen):** lebih dari satu variabel yang diukur secara bersamaan, biasanya saling berkorelasi, misalnya tinggi tanaman dan jumlah daun.

c. **Efek interaksi (interaction effect):** menunjukkan apakah pengaruh salah satu faktor bergantung pada taraf faktor lainnya, sehingga memberikan pemahaman yang lebih komprehensif terhadap hubungan antar variabel.

3. **Rumusan Hipotesis :**

Hipotesis nol ($H_0$) dan alternatif ($H_1$) untuk:

- Efek utama faktor A

  **$H_0$ (Hipotesis nol) :** Tidak ada pengaruh faktor A terhadap variabel dependen, yang artinya rata-rata semua level faktor A sama.

$$H_0\colon \tau_1 = \tau_2 = \cdots = \tau_g = 0$$

  **$H_1$ (Hipotesis alternatif) :** Ada pengaruh faktor A terhadap variabel dependen Setidaknya satu rata-rata level faktor A berbeda.

$$H_1\text{:Setidaknya satu } \tau_\ell \neq 0$$

- Efek utama faktor B

  **$H_0$ (Hipotesis nol) :** Tidak ada pengaruh faktor B terhadap variabel dependen, yang artinya rata-rata semua level faktor B sama

$$H_0\colon \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_b = 0$$

  **$H_1$ (Hipotesis alternatif) :** Ada pengaruh faktor B terhadap variabel dependen, setidaknya ada satu rata-rata level faktor B berbeda

$$H_1\text{:Setidaknya satu } \beta_b \neq 0$$

- Efek interaksi A × B

  **$H_0$ (Hipotesis nol) :** (Tidak ada efek interaksi)

$$H_0 : \gamma_{11} = \gamma_{12} = \cdots = \gamma_{gb} = 0$$

  **$H_1$ (Hipotesis alternatif) :** (Paling sedikit terdapat satu tidak sama dengan nol)

$$H_1 : \gamma_{\ell k} \neq 0$$

4. Asumsi MANOVA
   - Normalitas multivariat.
     Digunakan untuk memeriksa apakah distribusi multivariat dari beberapa variabel berdistribusi normal dalam populasi

Hipotesis uji normalitas :

$$H_0: \, data \ berdistribusi \ normal \ multivariat$$
$$H_1: \, data \ tidak \ berdistribusi \ normal \ multivariat$$

- Homogenitas matriks varians-kovarians (Box's M test).
  Digunakan untuk mengevaluasi keseragaman matriks varians covarian pada variabel-variabel tertentu. Uji homogenitas matriks varian-covarians dapat dilakukan menggunakan Uji Box's M.

$$H_0: \Sigma_1 = \Sigma_2 = \Sigma_3 = \cdots = \Sigma_g = \Sigma_0$$
$$H_1: paling \ sedikit \ ada \ satu \ diantara \ sepasang \ \Sigma_l \ yang \ tidak \ sama$$

4. Statistik Uji
   Manova mempunyai beberapa statistic uji yang berguna untuk membuat Keputusan dalam menganalisis perbedaan antar kelompok. Statistik uji dalam MANOVA digunakan untuk mengukur pengaruh variabel independent terhadap variabel dependen secara bersamaan dan memberikan informasi tentang signifikansi perbedaan antara kelompok-kelompok yang dibandingkan. Berikut beberapa uji statistic dalam MANOVA :

- Pillai's Trace
  Statistik uji ini digunakan dalam kondisi di mana terdapat ketidakpenuhan asumsi homogenitas varians-kovarians, ukuran sampel yang terbatas, atau jika hasil-hasil pengujian saling bertentangan, seperti situasi di mana beberapa variabel memiliki rata-rata yang berbeda sementara yang lain tidak. Statistik uji ini digunakan untuk mengukur sejauh mana perbedaan signifikan ada di antara kelompok-kelompok yang dibandingkan dalam bentuk kombinasi linier dari variabel-variabel dependen. Kelebihan dari statistik uji ini adalah kemampuannya dalam mengatasi situasi dengan ukuran sampel yang kecil atau jika terdapat ketidaknormalan dalam data

$$V^{(s)} = \Sigma \frac{\lambda_i}{1 + \lambda_i}$$

- Wilk's Lambda
  Statistik uji ini mengukur rasio antara determinan matriks varians-kovarians dalam kelompok-kelompok yang dibandingkan. Statistik ini digunakan ketika ada lebih dari dua kelompok variabel independen dan asumsi homogenitas matriks varians-kovarians terpenuhi

$$\Lambda = \Pi \frac{1}{1 + \lambda_i}$$

  Dilakukan dengan menolak $H_0$ untuk nilai kecil dari ratio :

$$\mathit{\Lambda}^* = \frac{|SSP_{res}|}{|SSP_{int} + SSP_{res}|}$$

Untuk $(g-1)(b-1)=1$

$$F=\left(\frac{1-\Lambda^*}{\Lambda^*}\right)\frac{(gb(n-1)-p+1)/2}{(|(g-1)(b-1)-p|+1)/2}$$

Mempunyai distribusi F dengan $v_1=|(g-1)(b-1)-p|+1$ dan $v_2=b(n-1)-p+1$

Untuk sample besar, Lambda Wilk dapat didekati dengan distribusi Chi-Kuadrat.

Tolak $H_0: \gamma_{11}=\gamma_{12}=\cdots=\gamma_{gb}=0$ pada level $\alpha$ jika

$$-\left[gb(n-1)-\frac{p+1-(g-1)(b-1)}{2}\right] ln\,\Lambda^* > \chi^2_{(g-1)(b-1)p}(\alpha)$$

- Lawley-Hotteling's Trace
  Statistik uji ini digunakan ketika hanya terdapat dua kelompok variabel independen. Statistik ini mirip dengan *Pillai's Trace*, tetapi lebih tepat untuk situasi dengan dua kelompok
  $$V^{(s)}=\Sigma\lambda_i$$
- Roy's Largest Root
  Statistik uji ini mengukur perbedaan varians antara kelompok-kelompok yang dibandingkan. Statistik ini digunakan jika asumsi homogenitas varians-kovarians terpenuhi dan memberikan informasi tentang perbedaan varians yang signifikan
  $$\Theta=\frac{\lambda_i}{1+\lambda_i}$$

Uji Statistik menggunakan Wilks Lambda Adalah statistic test yang paling lazim digunakan. Wilk's Lambda, Hotteling's Trace dan Pillai's Trace Adalah alat uji yang robust meskipun ada pelanggaran asumsi homoginitas varians, namun Roy's Largest Root paling bisa diandalkan manakala ada korelasi antara variabel dependen. Sebaliknya manakala tidak ada korelasi antar variabel dependen Hotteling's Trace merupakan alat uji yang dianggap terbaik

5. Studi Kasus & Data Dummy
   Contoh 6.11 (Analisis Multivariat dua arah dari variansi data pita film) :
   Syarat optimum yang ditekan pada pita film telah diuji menggunakan suatu teknologi yang disebut operasi evolusioner. Dalam pembicaraan ini, terdapat tiga respon :

   $X_1$ : Tahan arah (basah)
   $X_2$ : Kehalusan Permukaan
   $X_3$ : Kedap Cahaya

   Dimana ketigannya diukur dalam dua level, rata-rata dan jumlah aditif. Pengukuran dilakukan sebanyak 5 kali pada setiap kombinasi faktor. Berikut ditampilkan data dari pengukuran :

**TABLE 6.4 PLASTIC FILM DATA**

$x_1$ = tear resistance, $x_2$ = gloss, and $x_3$ = opacity

| | | Factor 2: Amount of additive | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Low (1.0%) | | | High (1.5%) | | |
| Factor 1: Change in rate of extrusion | Low (−10)% | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ |
| | | [6.5 | 9.5 | 4.4] | [6.9 | 9.1 | 5.7] |
| | | [6.2 | 9.9 | 6.4] | [7.2 | 10.0 | 2.0] |
| | | [5.8 | 9.6 | 3.0] | [6.9 | 9.9 | 3.9] |
| | | [6.5 | 9.6 | 4.1] | [6.1 | 9.5 | 1.9] |
| | | [6.5 | 9.2 | 0.8] | [6.3 | 9.4 | 5.7] |
| | High (10%) | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ |
| | | [6.7 | 9.1 | 2.8] | [7.1 | 9.2 | 8.4] |
| | | [6.6 | 9.3 | 4.1] | [7.0 | 8.8 | 5.2] |
| | | [7.2 | 8.3 | 3.8] | [7.2 | 9.7 | 6.9] |
| | | [7.1 | 8.4 | 1.6] | [7.5 | 10.1 | 2.7] |
| | | [6.8 | 8.5 | 3.4] | [7.6 | 9.2 | 1.9] |

6. Langkah Analisis

Perhatikan untuk membaca tabel soal :

| | | Factor 2 : Amount of Additive | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Low (-1%) | | | High (1.5%) | | |
| | | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ |
| Factor 1 : Chance in rate of extruction | Low (-10%) | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| | | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| | | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| | | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| | | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| | | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ |
| | High (10%) | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| | | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| | | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| | | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| | | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 |

Keterangan :

- warna orange menunjukan level faktor 1
- warna hijau menunjukan level faktor 2
- warna biru menunjukan value dari respon variabel dependen

Dalam MANOVA dua arah perlu mencari beberapa perhitungan rata-rata dan akan ditunjukan bagaimana cara membaca data yang ada di soal yaitu :

1. Mencari $\bar{x}$
   Perlu mencari rataan setiap variabel :

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} rata - rata\ warna\ hijau\ (X_1) \\ rata - rata\ warna\ biru\ (X_2) \\ rata - rata\ warna\ ungu\ (X_3) \end{bmatrix}$$

| | | Factor 2 : Amount of Additive | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Low (-1%) | | | High (1.5%) | | |
| | | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ |
| Factor 1 : Chance in rate of extruction | Low (-10%) | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| | | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| | | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| | | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| | | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| | | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ |
| | High (10%) | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| | | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| | | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| | | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| | | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 |

Hasil dari perhitungan $\bar{x}$ :

| | | |
|---|---|---|
| rata2 keseluruhan | x1 | 6.785 |
| | x2 | 9.315 |
| | x3 | 3.935 |

2. Mencari $\bar{x}_{\ell.}$
   Di contoh kasus, memiliki 2 level faktor 1, yaitu Low (-10%) ditandai dengan Biru Tua dan High (10%) ditandai dengan Hijau Tua, sehingga cara membaca datanya Adalah :

   - Rata-rata Level Faktor 1 Low (-10%)

$$\ell = 1 \;=>\; \bar{x}_{1.} = \begin{bmatrix} rata - rata\ warna\ biru\ agak\ tua\ (X_1) \\ rata - rata\ warna\ biru\ agak\ muda\ (X_2) \\ rata - rata\ warna\ ungu\ muda\ (X_3) \end{bmatrix}$$

   - Rata-rata Level Faktor 1 High (10%)

$$\ell = 2 \;=>\; \bar{x}_{2.} = \begin{bmatrix} rata - rata\ warna\ hijau\ agak\ tua\ (X_1) \\ rata - rata\ warna\ hijau\ agak\ muda\ (X_2) \\ rata - rata\ warna\ hijau\ muda\ (X_3) \end{bmatrix}$$

| | | Factor 2 : Amount of Additive | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Low (-1%) (k= 1) | | | High (1.5%) (k= 2) | | |
| | | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ |
| Factor 1 : Chance in rate of extruction | Low (-10%) ($\ell = 1$) | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| | | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| | | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| | | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| | | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| | | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ |
| | High (10%) ($\ell = 2$) | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| | | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| | | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| | | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| | | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 |

Hasil perhitungan $\bar{x}_{\ell.}$ :

| | | |
|---|---|---|
| rata2 faktor 1 level low (xbar 1.) | x1 | 6.49 |
| | x2 | 9.57 |
| | x3 | 3.79 |
| rata2 faktor 1 level high (xbar 2.) | x1 | 7.08 |
| | x2 | 9.06 |
| | x3 | 4.08 |

3. Mencari $\bar{x}_{.k}$
   Di contoh kasus, memiliki 2 level faktor 2, yaitu Low (-1%) ditandai dengan Biru Tua dan High (1.5%) ditandai dengan Hijau Tua, sehingga cara membaca datanya Adalah :

- Rata-rata Level Faktor 2 Low (-1%)

$$k = 1 \implies \bar{x}_{.1} = \begin{bmatrix} rata - rata\ warna\ biru\ agak\ tua\ (X_1) \\ rata - rata\ warna\ biru\ agak\ muda\ (X_2) \\ rata - rata\ warna\ ungu\ muda\ (X_3) \end{bmatrix}$$

- Rata-rata Level Faktor 2 High (1.5%)

$$k = 2 \implies \bar{x}_{.2} = \begin{bmatrix} rata - rata\ warna\ hijau\ agak\ tua\ (X_1) \\ rata - rata\ warna\ hijau\ agak\ muda\ (X_2) \\ rata - rata\ warna\ hijau\ muda\ (X_3) \end{bmatrix}$$

| | | Factor 2 : Amount of Additive | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Low (-1%) ($k = 1$) | | | High (1.5%) ($k = 2$) | | |
| | | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ |
| Factor 1 : Chance in rate of extruction | Low (-10%) | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| | | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| | | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| | | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| | | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| | | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ |
| | High (10%) | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| | | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| | | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| | | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| | | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 |

Hasil dari $\bar{x}_{.k}$ :

| | | |
|---|---|---|
| rata2 faktor 2 level low (xbar .1) | x1 | 6.59 |
| | x2 | 9.14 |
| | x3 | 3.44 |
| rata2 faktor 2 level high (xbar .2) | x1 | 6.98 |
| | x2 | 9.49 |
| | x3 | 4.43 |

4. Mencari $\bar{x}_{\ell k}$

   Rata-rata $\bar{x}_{\ell k}$ Dimana $\ell = 1,2;\ k = 1,2$ Adalah kombinasi dari rataan level faktor 1 dan level faktor 2, ditandai dengan berikut :

   - Rata-rata Level Faktor 1 Low (-10%) (ungu) dan Level faktor 2 Low (-1%) (biru tua)

$$\ell = 1;\ k = 1 \ => \bar{x}_{11} = \begin{bmatrix} rata - rata\ warna\ biru\ agak\ tua\ (X_1) \\ rata - rata\ warna\ biru\ agak\ muda\ (X_2) \\ rata - rata\ warna\ biru\ muda\ (X_3) \end{bmatrix}$$

   - Rata-rata Level Faktor 1 Low (-10%) (ungu) dan Level faktor 2 High (1.5%) (Orange Tua)

$$\ell = 1;\ k = 2 \ => \bar{x}_{12} = \begin{bmatrix} rata - rata\ warna\ \text{Orange}\ agak\ tua\ (X_1) \\ rata - rata\ warna\ \text{Orange}\ agak\ muda\ (X_2) \\ rata - rata\ warna\ \text{Orange}\ muda\ (X_3) \end{bmatrix}$$

   - Rata-rata Level Faktor 1 High (10%) (Hijau Tua) dan Level faktor 2 Low (-1%) (Biru Tua)

$$\ell = 2;\ k = 1 \ => \bar{x}_{21} = \begin{bmatrix} rata - rata\ warna\ \text{Hijau}\ agak\ tua\ (X_1) \\ rata - rata\ warna\ \text{Hijau}\ agak\ muda\ (X_2) \\ rata - rata\ warna\ \text{Hijau}\ muda\ (X_3) \end{bmatrix}$$

   - Rata-rata Level Faktor 1 High (10%) (Hijau Tua) dan Level faktor 2 High (1.5%) (Orange Tua)

$$\ell = 2;\ k = 2 \ => \bar{x}_{22} = \begin{bmatrix} rata - rata\ warna\ ungu\ agak\ tua\ (X_1) \\ rata - rata\ warna\ ungu\ agak\ muda\ (X_2) \\ rata - rata\ warna\ ungu\ muda\ (X_3) \end{bmatrix}$$

| | | Factor 2 : Amount of Additive | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Low (-1%) ($k = 1$) | | | High (1.5%)($k = 2$) | | |
| | | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ |
| Factor 1 : Chance in rate of extruction | Low (-10%) ($\ell = 1$) | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| | | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| | | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| | | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| | | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| | | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ |
| | High (10%) ($\ell = 2$) | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| | | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| | | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| | | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| | | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 |

Hasil $\bar{x}_{\ell k}$ Adalah :

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| rata2 lk | x_11 | 6.3 | x_12 | 6.68 | x_21 | 6.88 | x_22 | 7.28 |
| | | 9.56 | | 9.58 | | 8.72 | | 9.4 |
| | | 3.74 | | 3.84 | | 3.14 | | 5.02 |

5. Mencari $x_{\ell kr}$

Variabel $x_{\ell kr}$ Adalah kombinasi value variabel dependen pada data dari setiap level faktor 1 dan level faktor 2. Berikut contoh dari $x_{\ell kr}$ :

| | | | |
|---|---|---|---|
| $(\ell = 1)$ | $(k = 1)$ | $(r = 1)$ | $x_{111} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} => Warna\ Orange$ |
| $(\ell = 1)$ | $(k = 2)$ | $(r = 3)$ | $x_{123} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} => Warna\ Hijau$ |
| $(\ell = 2)$ | $(k = 1)$ | $(r = 4)$ | $x_{214} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} => Warna\ Biru$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $(\ell = 2)$ | $(k = 2)$ | $(r = 5)$ | $x_{225} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} => Warna\ Ungu$ |

| | | Factor 2 : Amount of Additive | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Low (-1%) $(k = 1)$ | | | High (1.5%)$(k = 2)$ | | |
| | | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ |
| Factor 1 : Chance in rate of extruction | Low (-10%) $(\ell = 1)$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| | | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| | | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| | | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| | | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| | | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ |
| | High (10%) $(\ell = 2)$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| | | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| | | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| | | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| | | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 |

Hasil dari $x_{\ell kr}$ :

| | | | x_lkr | |
|---|---|---|---|---|
| l=1 | k=1 | r=1 | x_111 | 6.5<br>9.5<br>4.4 |
| l=1 | k=1 | r=2 | x_112 | 6.2<br>9.9<br>6.4 |
| l=1 | k=1 | r=3 | x_113 | 5.8<br>9.6<br>3 |
| l=1 | k=1 | r=4 | x_114 | 6.5<br>9.6<br>4.1 |
| l=1 | k=1 | r=5 | x_115 | 6.5<br>9.2<br>0.8 |
| l=1 | k=2 | r=1 | x_121 | 6.9<br>9.1<br>5.7 |
| l=1 | k=2 | r=2 | x_122 | 7.2<br>10<br>2 |
| l=1 | k=2 | r=3 | x_123 | 6.9<br>9.9<br>3.9 |
| l=1 | k=2 | r=4 | x_124 | 6.1<br>9.5<br>1.9 |
| l=1 | k=2 | r=5 | x_125 | 6.3<br>9.4<br>5.7 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| l=2 | k=1 | r=1 | x_211 | 6.7<br>9.1<br>2.8 |
| l=2 | k=1 | r=2 | x_212 | 6.6<br>9.3<br>4.1 |
| l=2 | k=1 | r=3 | x_213 | 7.2<br>8.3<br>3.8 |
| l=2 | k=1 | r=4 | x_214 | 7.1<br>8.4<br>1.6 |
| l=2 | k=1 | r=5 | x_215 | 6.8<br>8.5<br>3.4 |
| l=2 | k=2 | r=1 | x_221 | 7.1<br>9.2<br>8.4 |
| l=2 | k=2 | r=2 | x_222 | 7<br>8.8<br>5.2 |
| l=2 | k=2 | r=3 | x_223 | 7.2<br>9.7<br>6.9 |
| l=2 | k=2 | r=4 | x_224 | 7.5<br>10.1<br>2.7 |
| l=2 | k=2 | r=5 | x_225 | 7.6<br>9.2<br>1.9 |

Berikut Adalah hasil yang sudah di masukan dalam tabel MANOVA dua arah :

| **Source of Variation** | **Matrix of sum of squares & cross product (SSP)** | **Degree of Freedom** |
|---|---|---|
| **Factor 1 : Change in rate extruction** | $\begin{bmatrix} 1.7405 & -1.5045 & 0.8555 \\ -1.5045 & 1.3005 & -0.7395 \\ 0.8555 & -0.7395 & 0.4205 \end{bmatrix}$ | 2-1 = 1 |
| **Factor 2 : Amount of additive** | $\begin{bmatrix} 0.7605 & 0.6825 & 1.9305 \\ 0.6825 & 0.6125 & 1.7325 \\ 1.9305 & 1.7325 & 4.9005 \end{bmatrix}$ | 2-1 = 1 |
| **Interaction** | $\begin{bmatrix} 0.0005 & 0.0165 & 0.0445 \\ 0.0165 & 0.5445 & 1.4685 \\ 0.0445 & 1.4685 & 3.9605 \end{bmatrix}$ | (2-1)(2-1)=1 |
| **Residual** | $\begin{bmatrix} 1.764 & 0.02 & -3.07 \\ 0.02 & 2.628 & -0.552 \\ -3.07 & -0.552 & 64.924 \end{bmatrix}$ | 2.2(5-1)=20 |
| **Total** | $\begin{bmatrix} 4.2655 & -0.7855 & -0.2395 \\ -0.7855 & 5.0855 & 1.9095 \\ -0.2395 & 1.8235 & 73.9893 \end{bmatrix}$ | (2.2.5)-1 = 19 |

6. Uji Statistik
   Dengan menggunakan Uji Wilks' Lambda.

   - Efek utama faktor A

$$\Lambda_1^* = \frac{|SSP_{res}|}{|SSP_{fac1} + SSP_{res}|} = \frac{275.7098}{722.0212} = 0.3819$$

Untuk $(g-1)(b-1) = 1$

$$F_1 = \left(\frac{1-0.3819}{0.3819}\right)\frac{(16-3+1)/2}{(|1-3|+1)/2} = 7.55$$

$$v_1 = |1(1) - 3| + 1) = 3$$

$$v_2 = |2(2)(4) - 3| + 1) = 14$$

Dari Perhitungan didapatkan $F_1 = 7.55 > F_{3,4}(0.05) = 3.34$, maka $H_0: \tau_1 = \tau_2 = 0$ ditolak, ada efek faktor 1

   - Efek utama faktor B

$$\Lambda_2^* = \frac{|SSP_{res}|}{|SSP_{fac2} + SSP_{res}|} = \frac{275.7098}{527.1347} = 0.5230$$

Untuk $(g-1)(b-1) = 1$

$$F_2 = \left(\frac{1-0.5230}{0.5230}\right)\frac{(16-3+1)/2}{(|1-3|+1)/2} = 4.26$$

$$v_1 = |1(1) - 3| + 1) = 3$$

$$v_2 = |2(2)(4) - 3| + 1) = 14$$

Dari Perhitungan didapatkan, $F_2 = 4.26 > F_{3,4}(0.05) = 3.34$, maka $H_0: \beta_1 = \beta_2 = 0$ ditolak, ada efek faktor 2

   - Efek interaksi A × B

$$\Lambda^* = \frac{|SSP_{res}|}{|SSP_{int} + SSP_{res}|}$$

$$\Lambda^* = 0.7771$$

$$F_2 = \left(\frac{1-0.7771}{0.7771}\right)\frac{(16-3+1)/2}{(|1-3|+1)/2} = 1.34$$

$$v_1 = |1(1)-3|+1) = 3$$

$$v_2 = |2(2)(4)-3|+1) = 14$$

Dari Perhitungan didapatkan, $F = 1.34 < F_{3,4}(0.05) = 3.34$, maka $H_0: \gamma_{11} = \gamma_{12} = \gamma_{21} = \gamma_{22} = 0$ diterima, Tidak ada interaksi efek faktor 1 dan efek faktor 2

7. Interpretasi Hasil
   Berdasarkan MANOVA dua arah dengan variabel dengan variabel dependen $X_1, X_2, X_3$, diketahui bahwa **faktor *Change in Rate of Extraction*** menunjukkan pengaruh yang signifikan terhadap karakteristik produk pita film, dengan nilai ($F_1 = 7.55 > F_{3,4}(0.05) = 3.34$). Demikian pula Faktor Amount of addictive berpengaruh signifikan terhadap produk pita film dengan nilai ($F_2 = 4.26 > F_{3,4}(0.05) = 3.34$).

   Sementara interaksi antara kedua faktor tersebut tidak signifikan, karena $F = 1.34 < F_{3,4}(0.05) = 3.34$. Hal ini menunjukan bahwa pengaruh Change in rate of extraction terhadap karakteristik pita film tidak bergantung pada faktor level amount of addictive dan sebaliknya

7. Ringkasan & Kesimpulan
   Kapan menggunakan MANOVA dua arah? MANOVA (Multivariate Analysis of Variance) dua arah digunakan ketika terdapat lebih dari satu variabel dependen dan dua faktor (variabel independen) yang ingin diuji pengaruhnya secara bersamaan terhadap variabel-variabel dependen tersebut.

   Gunakan MANOVA dua arah jika:
   Kamu memiliki dua faktor independen (A dan B), misalnya:

   - A: metode pembelajaran (misalnya: daring vs tatap muka)
   - B: jenis kelamin (misalnya: laki-laki vs Perempuan

   Dan kamu memiliki dua atau lebih variabel dependen yang saling berkaitan, misalnya:

   $Y_1$: nilai ujian teori
   $Y_2$: nilai ujian praktik

   MANOVA digunakan agar bisa melihat apakah kombinasi nilai-nilai dependen (secara keseluruhan) dipengaruhi oleh faktor A, faktor B, atau interaksi keduanya. Kalau kamu hanya punya satu variabel dependen, cukup gunakan ANOVA dua arah.

8. Latihan.
   Silahkan latihan untuk membaca data dan perhitungan MANOVA two ways

| | | Factor 2 | |
|---|---|---|---|
| | | Level 1 | Level 2 |
| Factor 1 | Level 1 | $\begin{bmatrix}6\\8\end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix}4\\6\end{bmatrix}$ |
| | Level 2 | $\begin{bmatrix}3\\8\end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix}-3\\2\end{bmatrix}$ |
| | Level 3 | $\begin{bmatrix}-3\\2\end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix}-4\\-5\end{bmatrix}$ |
| | Level 4 | $\begin{bmatrix}8\\12\end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix}2\\6\end{bmatrix}$ |

9. Referensi

   https://rpubs.com/alfizahrain/1111164
   Gudono. Analisis Data Multivariat Edisi 4. 2016
   Johnson, R. A., & Wichern, D. W. (2007). Applied Multivariate Statistical Analysis (Edisi ke-6). Prentice Hall International.